

Πολυτεχνείο Κρήτης Τμήμα ΗΜΜΥ

Διδάσκων: Αθανάσιος Λιάβας

Τηλεπικοινωνιακά Συστήματα Ι: Άσκηση 1η

Ομάδα:

Γιάννης Περίδης 2018030069

Σκλάβος Παναγιώτης 2018030170

Χειμερινό Εξάμηνο 2020-2021

1 Θεωρία

Θ.1

Η συνάρτηση αυτοομοιότητας της ϕ :

$$\phi(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{T}}, & \text{αν } |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

προκύπτει ως εξής: $R_{\phi\phi}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\phi(t+\tau) dt$

Η ϕ εκτείνεται στον άξονα των t στο διάστημα $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ ενώ η προώθημένη $\phi(t+\tau)$ στο: $[-\frac{T}{2}-\tau, \frac{T}{2}-\tau]$

$$1\eta \text{ Περίπτωση: } \frac{T}{2} - \tau < -\frac{T}{2} \iff \tau > T,$$

$$R_{\phi\phi}(\tau) = 0, \text{ μηδενική επικάλυψη της } \phi(t) \text{ με την προωθημένη } \phi(t + \tau)$$

$$2\eta \text{ Περίπτωση: } -\frac{T}{2} < \frac{T}{2} - \tau \leq \frac{T}{2} \iff 0 \leq \tau < T,$$

$$R_{\phi\phi}(\tau) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}-\tau} \frac{1}{T} dt = \frac{t}{T} \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}-\tau} = \left(\frac{\frac{T}{2}-\tau}{T} \right) - \left(\frac{-\frac{T}{2}}{T} \right) = 1 - \frac{\tau}{T}$$

$$3\eta \text{ Περίπτωση: } -\frac{T}{2} < -\frac{T}{2} - \tau \leq \frac{T}{2} \iff -T \leq \tau < 0,$$

$$R_{\phi\phi}(\tau) = \int_{-\frac{T}{2}-\tau}^{\frac{T}{2}} \frac{1}{T} dt = \frac{t}{T} \Big|_{-\frac{T}{2}-\tau}^{\frac{T}{2}} = \left(\frac{\frac{T}{2}}{T} \right) - \left(\frac{-\frac{T}{2}-\tau}{T} \right) = 1 + \frac{\tau}{T}$$

$$4\eta \text{ Περίπτωση: } \frac{T}{2} \leq -\tau - \frac{T}{2} \iff \tau \leq -T,$$

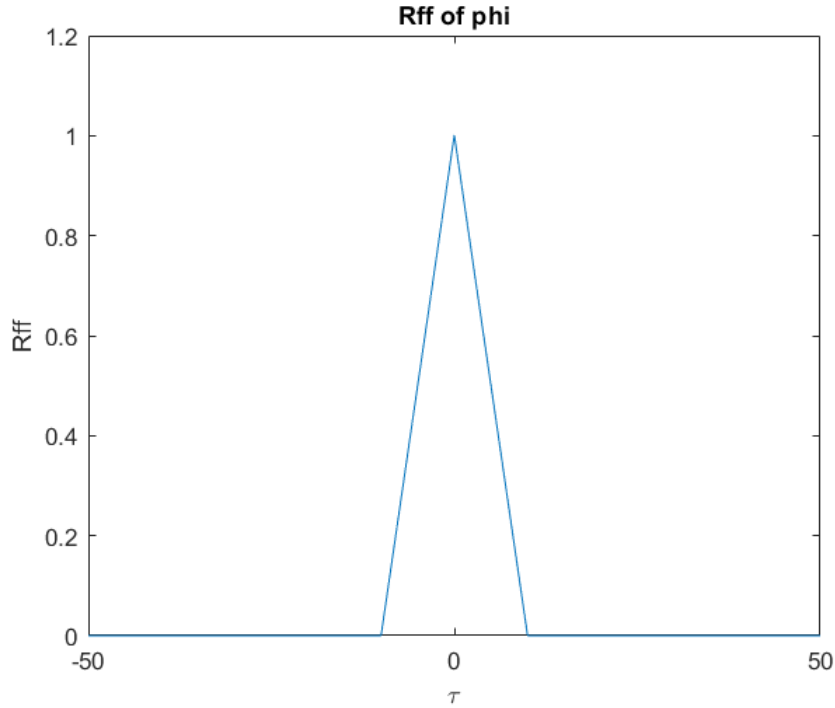
$$R_{\phi\phi}(\tau) = 0, \text{ μηδενική επικάλυψη της } \phi(t) \text{ με την προωθημένη } \phi(t + \tau)$$

Για την συνάρτηση $R_{\phi\phi}$ ισχύει: $R_{\phi\phi}(\tau) = \phi(\tau) * \phi(-\tau)$, άρα, όπως και ήταν αναμενόμενο, προκύπτει ότι:

$$R_{\phi\phi}(\tau) = 1 - \frac{|\tau|}{T}, \tau \in [-T, T]$$

ή αν αντικαταστήσουμε τ με t έχουμε: $R_{\phi\phi}(t) = 1 - \frac{|t|}{T}, t \in [-T, T]$

Παρακάτω φαίνεται και μια γραφική αναπαράσταση της $R_{\phi\phi}$



Θ.1.1 Γραφική αναπαράσταση της $R_{\phi\phi}(\tau)$

Θ.2

Με όμοιο τρόπο υπολογίζουμε την συνάρτηση αυτοομοιότητας $R_{\phi\phi}$ για την $\phi(t - 10)$. Συγκριμένα: $R_{\phi\phi}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t - 10)\phi(t - 10 + \tau) dt$,

Έστω $t' = t - 10$, συνεπώς για το διαφορικό έχουμε $dt' = dt$ Άρα η συνάρτηση γίνεται: $R_{\phi\phi}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t')\phi(t' + \tau) dt'$,

Η $\phi(t)$ εκτείνεται στον άξονα των t στο διάστημα $[-\frac{T}{2} + 10, \frac{T}{2} + 10]$ ενώ η προώθημένη $\phi(t + \tau - 10)$ στο: $[-\frac{T}{2} + 10 - \tau, \frac{T}{2} + 10 - \tau]$, Άρα $\phi(t') \in [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ και $\phi(t' + \tau) \in [-\frac{T}{2} - \tau, \frac{T}{2} - \tau]$

Συνεπώς από ερώτημα Θ.1: $R_{\phi\phi}(\tau) = 1 - \frac{|\tau|}{T}$, $\tau \in [-T, T]$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι η συνάρτηση αυτοομοιότητας της $\phi(t - 10)$ είναι ίδια με αυτήν της $\phi(t)$, όπως αυτή φαίνεται στην εικόνα Θ.1.1. Συνεπώς, αντιλαμβανόμαστε ότι η συνάρτηση αυτοομοιότητας είναι ανεξάρτητη από τις μετατοπίσεις της ϕ .

Θ.3

Έχουμε τώρα:

$$\phi(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{T}}, & \text{αν } 0 \leq t < \frac{T}{2}, \\ -\frac{1}{\sqrt{T}}, & \text{αν } \frac{T}{2} \leq t \leq T, \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Η συνάρτηση αυτοομοιότητας: $R_{\phi\phi}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\phi(t+\tau) dt$,

Η $\phi(t)$ εκτείνεται στον άξονα των t στο διάστημα $[0, T]$ ενώ η προωθημένη $\phi(t+\tau)$ στο: $[0-\tau, T-\tau]$.

1η Περίπτωση: $T - \tau < 0 \iff \tau > T$,

$R_{\phi\phi}(\tau) = 0$, μηδενική επικάλυψη της $\phi(t)$ με την προωθημένη $\phi(t+\tau)$

2η Περίπτωση: $0 < T - \tau \leq \frac{T}{2} \iff \frac{T}{2} \leq \tau < T$,

$$R_{\phi\phi}(\tau) = \int_0^{T-\tau} \phi(t)\phi(t+\tau) dt = \int_0^{T-\tau} \left(-\frac{1}{T}\right) dt = -\frac{t}{T} \Bigg|_0^{T-\tau} = -\frac{T-\tau}{T} = -1 + \frac{\tau}{T}$$

3η Περίπτωση: $\frac{T}{2} < T - \tau \leq T \iff 0 \leq \tau < \frac{T}{2}$,

$$R_{\phi\phi}(\tau) = \int_{\frac{T}{2}}^T \phi(t)\phi(t+\tau) dt = \int_0^{\frac{T}{2}-\tau} \frac{1}{T} dt + \int_{\frac{T}{2}-\tau}^{\frac{T}{2}} \left(-\frac{1}{T}\right) dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T-\tau} \frac{1}{T} dt =$$

$$\frac{t}{T} \Bigg|_0^{\frac{T}{2}-\tau} - \frac{t}{T} \Bigg|_{\frac{T}{2}-\tau}^{\frac{T}{2}} + \frac{t}{T} \Bigg|_{\frac{T}{2}}^{T-\tau} = \left(\frac{1}{2} - \frac{\tau}{T}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{\tau}{T}\right) + \left(1 - \frac{\tau}{T} - \frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{3\tau}{T}$$

4η Περίπτωση: $0 < -\tau \leq \frac{T}{2} \iff -\frac{T}{2} \leq \tau < 0$,

$$R_{\phi\phi}(\tau) = \int_{-\tau}^T \phi(t)\phi(t+\tau) dt = \int_{-\tau}^{\frac{T}{2}} \frac{1}{T} dt + \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}-\tau} \left(-\frac{1}{T}\right) dt + \int_{\frac{T}{2}-\tau}^T \frac{1}{T} dt =$$

$$\frac{t}{T} \Bigg|_{-\tau}^{\frac{T}{2}} - \frac{t}{T} \Bigg|_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}-\tau} + \frac{t}{T} \Bigg|_{\frac{T}{2}-\tau}^T = \left(\frac{\frac{T}{2}+\tau}{T}\right) - \left(\frac{\frac{T}{2}-\tau}{T} - \frac{\frac{T}{2}}{T}\right) + \left(\frac{T}{T} - \frac{\frac{T}{2}-\tau}{T}\right) = 1 + \frac{3\tau}{T}$$

5η Περίπτωση: $\frac{T}{2} < -\tau \leq T \iff -T \leq \tau < -\frac{T}{2}$,

$$R_{\phi\phi}(\tau) = \int_{-\tau}^T \phi(t)\phi(t+\tau) dt = \int_{-\tau}^T -\frac{1}{T} dt = -\frac{t}{T} \bigg|_{-\tau}^T = -1 - \frac{\tau}{T}$$

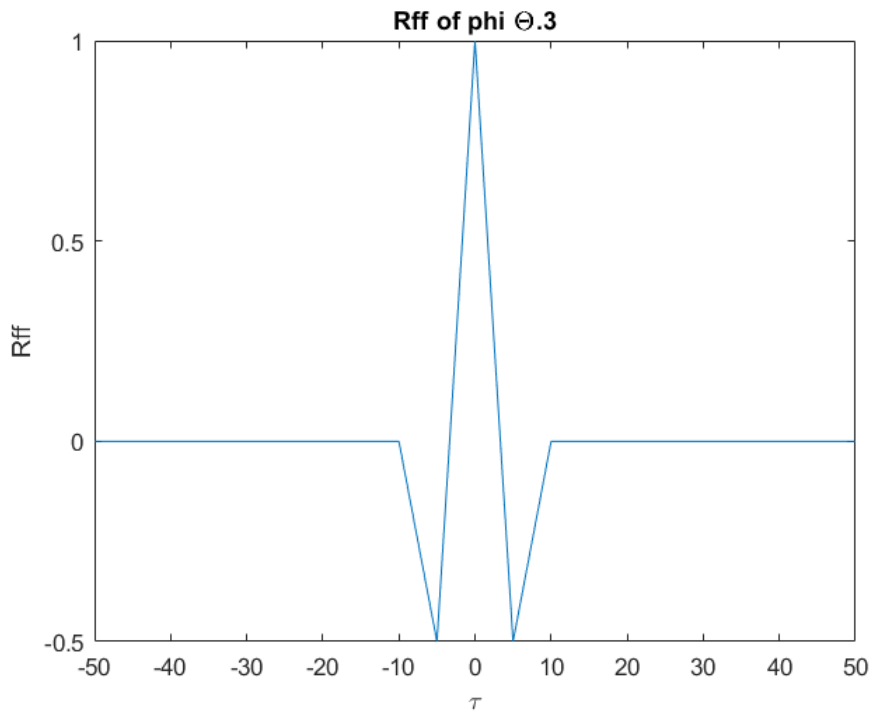
6η Περίπτωση: $T \leq -\tau \iff \tau \leq -T$,

$R_{\phi\phi}(\tau) = 0$, μηδενική επικάλυψη της $\phi(t)$ με την προωθημένη $\phi(t+\tau)$

Συνολικά λοιπόν:

$$R_{\phi\phi}(\tau) = \begin{cases} -1 - \frac{\tau}{T} & , -T \leq \tau < -\frac{T}{2} \\ 1 + \frac{3\tau}{T} & , -\frac{T}{2} \leq \tau < 0 \\ 1 - \frac{3\tau}{T} & , 0 \leq \tau < \frac{T}{2} \\ -1 + \frac{\tau}{T} & , \frac{T}{2} \leq \tau < T \\ 0 & , \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Παρακάτω φαίνεται και η γραφική παράσταση της $R_{\phi\phi}$:



Θ.3.1 Γραφική αναπαράσταση της $R_{\phi\phi}(\tau)$

2 Ασκήσεις & Παρατηρήσεις

Άσκηση Α

Σε πρώτη φάση καλούμαστε να δημιουργήσουμε συνάρτηση ϕ της μορφής αποκομμένου Squared Root Raised Cosine, την οποία θα μελετήσουμε για διάφορες τιμές του roll off factor (a) στο πεδίο του χρόνου και των συχνοτήτων.

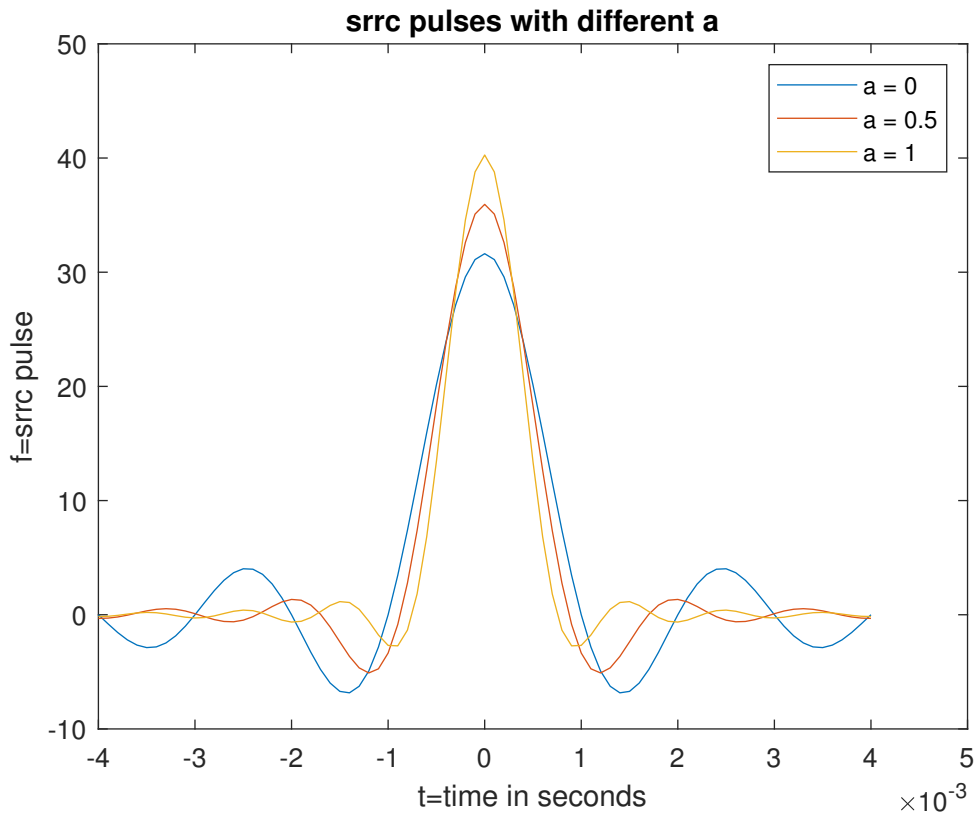
A.1

Αρχικά λοιπόν δημιουργούνται οι αποκομμένοι παλμοί SRRC για $\alpha=0, 0.5, 1$, κάνοντας χρήση της συνάρτησης `srrc_pulse.m`, στο περιβάλλον της Matlab, και έπειτα σχεδιάζονται σε κοινό plot.

Η διαδικασία φαίνεται παρακάτω:

```
1 %A.1
2 %initialization of symbol period T,oversampling factor over,
3 %parameter A(half duration of the pulse) and roll-off factor a
4 T=10^-3;
5 over=10;
6 A=4;
7 a=[0 0.5 1];
8 %creating srrc pulses
9 [f1,t1]=srrc_pulse(T,over,A,a(1));
10 [f2,t2]=srrc_pulse(T,over,A,a(2));
11 [f3,t3]=srrc_pulse(T,over,A,a(3));
12 %creating graph of the pulses in the same plot
13 figure();
14 plot(t1,f1);
15 hold on;
16 plot(t2,f2);
17 plot(t3,f3);
18 title('srrc pulses with different a')
19 xlabel('t=time in seconds');
20 ylabel('f=srrc pulse');
21 legend('a = 0', 'a = 0.5', 'a = 1');
```

Η γραφική απεικόνιση που προκύπτει είναι η εξής:



A.1.1 Γραφική αναπαράσταση της ϕ για $a=0,0.5,1$

Στο παραπάνω σχήμα απεικονίζονται τρεις διαφορετικοί παλμοί τετραγωνικού ανυψωμένου ημιτόνου (square-root raised cosine) $\phi(t)$, με περίοδο συμβόλου $T=0,01$ sec, παράμετρο A (αχέραιος, ίσος με την μισή διάρκεια του παλμού πολλαπλασιασμένος με T), περίοδο δειγματοληψίας $T_s=0,001$ για τρεις διαφορετικούς συντελεστές επέκτασης (roll-off factor) $\alpha=0,0.5$ και 1 , αντίστοιχα. Είναι φανερό πως ο παλμός αυτός, για $\alpha=0$ ταυτίζεται με την συνάρτηση $\text{sinc}(t/T)$, πολλαπλασιασμένη με $\frac{1}{\sqrt{T}}$. Αναλύοντας την $\phi(t)$ για κάθε ξεχωριστό α , παρατηρείται πως για $\alpha=0$ και για $t=0$, ο παλμός έχει το ελάχιστο από τις τρεις περιπτώσεις πλάτος, αντιθέτως, όσο αυξάνεται το απόλυτο t και επεκτείνεται στον χρονικό άξονα, για $\alpha=0$ ο παλμός έχει το μεγαλύτερο πλάτος από τις άλλες δύο γραφικές για κάθε χρονική στιγμή διάφορη του 0 . Αντίστοιχα, διαφάνεται πως για $\alpha=1$, το πλάτος της $\phi(t)$ είναι το μέγιστο από τις τρεις περιπτώσεις για $t=0$, ενώ ταυτόχρονα, είναι το ελάχιστο για όλες τις υπόλοιπες χρονικές στιγμές. Επομένως, γίνεται κατανοητό πως όσο μεγαλύτερο είναι το α τόσο μεγαλύτερο είναι το πλάτος

για $t=0$ και αντίστοιχα υπάρχει τόσο πιο έντονη-γρήγορη απόσβεση των καμπυλών στο 0.Είναι σημαντικό να σημειωθεί πως ο συντελεστής α , επηρεάζει σημαντικά το εύρος φάσματος των συχνοτήτων ,όσο μεταβάλλεται.

A.2

Στο ερώτημα αυτό ζητείται να βρούμε με χρήση της Matlab τους μετασχηματισμό Fourier $\Phi(F)$ των φ για τα διάφορα α . Έπειτα αφού γίνει ο υπολογισμός των $\Phi(F)$, πρέπει να σχεδιαστεί η φασματική πυκνότητα ενέργειας αυτών των παλμών τόσο με χρήση των συναρτήσεων plot και semilogy.

Η διαδικασία φαίνεται παρακάτω:

```
1 %A.2
2 %intialization of sampling period Ts,sampling frequency Fs,
3 %parameter Nf(number of equidistant points) and F axis
4 Ts=T/over;
5 Fs=1/Ts;
6 Nf=2048;
7 F=-Fs/2:Fs/Nf:Fs/2-Fs/Nf;
8 %creating fast fourier transformations
9 F1= fftshift(fft(f1,Nf)*Ts);
10 F2= fftshift(fft(f2,Nf)*Ts);
11 F3= fftshift(fft(f3,Nf)*Ts);
12 %creating the energy density spectrumd
13 edsF1=abs(F1).^2;
14 edsF2=abs(F2).^2;
15 edsF3=abs(F3).^2;
16 %creating graph of the energy density spectrums
17 %in the same plot
18 disp('press any key to see the graph of the energy density spectrums')
19 pause
20 figure(2);
21 plot(F,edsF1);
22 hold on;
23 plot(F,edsF2);
24 plot(F,edsF3);
25 title('energy density spectrums');
26 xlabel('F=frequency in Hz');
27 ylabel('fedF=energy density spectrum of srcc pulses');
```

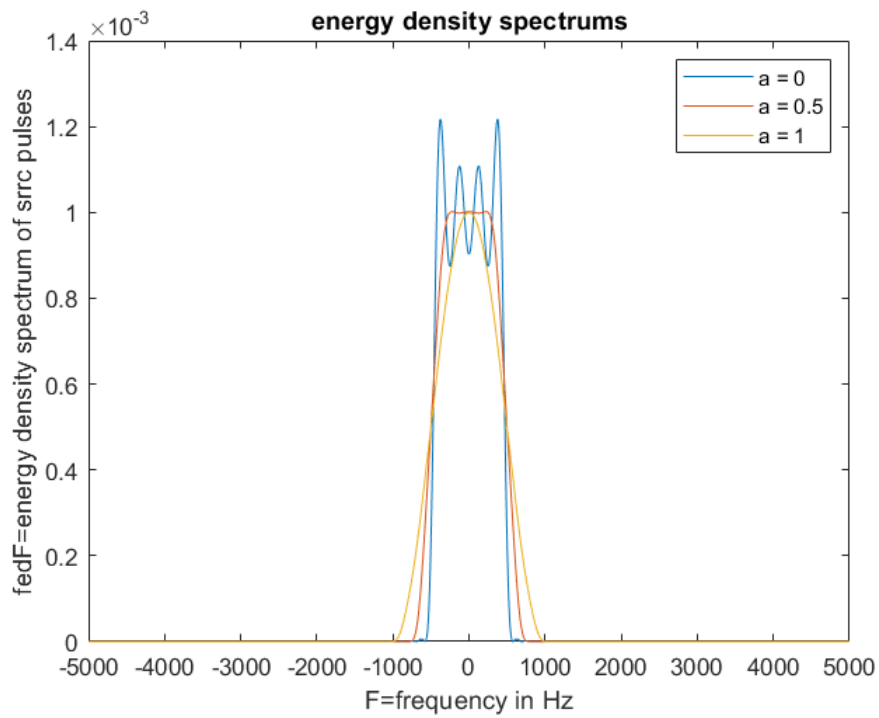


```

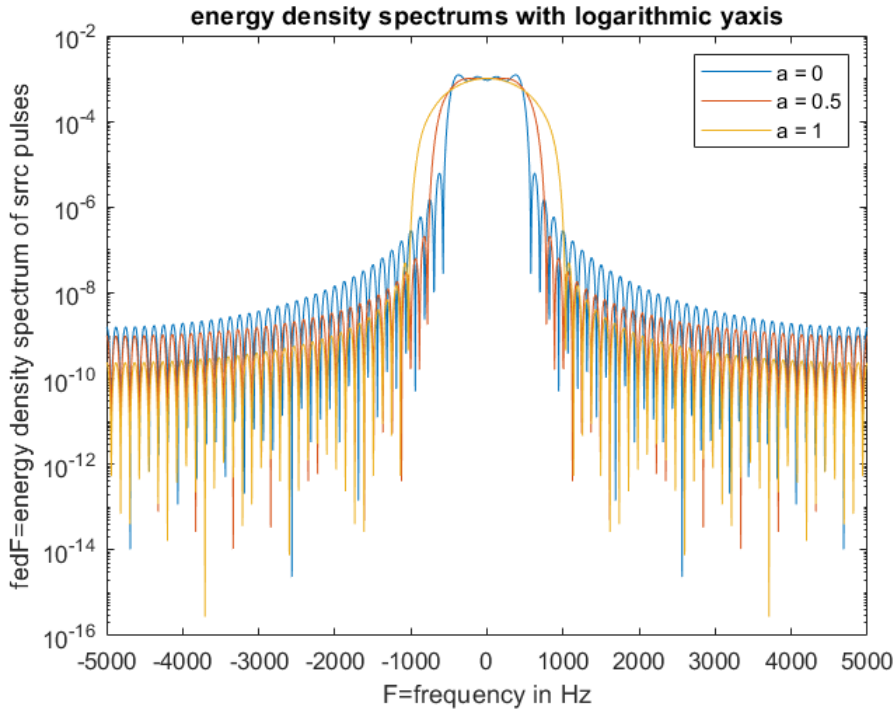
28 legend('a = 0', 'a = 0.5', 'a = 1');
29 %creating graph of the energy density spectrums
30 %in the same semilogy
31 disp('press any key to see the logarithmic yaxis graph of the energy density spectrums')
32 pause
33 figure(3);
34 semilogy(F,edsF1);
35 hold on;
36 semilogy(F,edsF2);
37 semilogy(F,edsF3);
38 title('energy density spectrums with logarithmic yaxis');
39 xlabel('F=frequency in Hz');
40 ylabel('fedF=energy density spectrum of srrc pulses');
41 legend('a = 0', 'a = 0.5', 'a = 1');

```

Η γραφική απεικόνιση που προκύπτει:



A.2.1 Φασματική ενέργεια $|\Phi(F)|^2$ για $a=0,0.5,1$, σε κοινό plot



A.2.2 Φασματική Ενέργεια $|\Phi(F)|^2$ για $a=0,0.5,1$, σε κοινό semilogy

Αρχικά, υπολογίστηκαν οι μετασχηματισμοί fourier των παραπάνω συναρτήσεων $\Phi(F)$, για κάθε διαφορετικό a αντίστοιχα. Στην συνέχεια οι παλμοί κεντραρίστηκαν γύρω από το 0, στο εύρος φάσματος $[-F_s/2, F_s/2]$, το οποίο και διαμορφώθηκε κατάλληλα έτσι ώστε να εμφανίζονται N_f ισαπέχοντα σημεία στον άξονα $\chi'\chi$ των συχνοτήτων. Κατόπιν, αφού υπολογίστηκαν τα διαφορετικά ενεργειακά φάσματα συχνοτήτων, απεικονίστηκαν με δύο διαφορετικούς τρόπους. Στην πρώτη απεικόνιση, ο άξονας $y'y$ είναι κατανομημένος σε γραμμική κλίμακα, ενώ στο δεύτερο σχήμα, είναι κατανομημένος σε λογαριθμική κλίμακα.

Γνωρίζουμε πως το ενεργειακό φάσμα πυκνότητας, μετά από κάποια τιμή του στον $y'y$ θεωρητικά απειρίζεται. Παρόλα αυτά στην πράξη, είναι φανερό πως μετά από αυτήν την τιμή, όσο η συνάρτηση πλησιάζει την αρχή των αξόνων και μετά τα σημεία του $\chi'\chi$ άξονα $\pm \frac{1+a}{2T}$ η ενέργειά της είναι εξαιρετικά μικρότερη σε σχέση με την ενέργεια που υπάρχει στο μέγιστο πλάτος. Επομένως, στην πράξη, γίνεται μια σύμβαση και ορίζεται από εμάς η θέση 0 (μετατόπιση του $y'y$ άξονα προς τα επάνω) σε ένα σημείο στον θετικό ημιάξονα που έχει επαρκής ενέργεια, τέτοιο ώστε κάτω από, θεωρούνται όλες οι υπόλοιπες τιμές 0.

Αναλύοντας τις παραπάνω γραφικές παραστάσεις λοιπόν, για την γραμμική κλίμακα δεν είναι εφικτό να παρατηρηθεί ο προαναφερόμενος απειρισμός του φάσματος, αυτό διότι είναι για κάποιες πολύ μικρές τιμές που είναι ασήμαντες στον άξονα $y'y$. Αντιθέτως, στο σχήμα με τον λογαριθμικό άξονα, το φαινόμενο που αναλύσαμε πρωτύτερα, διαφαίνεται με μεγάλη ευκρίνεια. Διακρίνονται για τιμές μετά από το $\pm \frac{1+a}{2T}$ έντονες διακυμάνσεις του πλάτους των συναρτήσεων (ριππλινγ), οι οποίες πιο συγκεκριμένα, μειώνονται όσο μειώνεται και ο συντελεστής α . Τέλος, και στις δύο παραστάσεις είναι φανερό πως για τιμές γύρω από το 0 υπάρχει ένας κυματισμός που μειώνεται όσο αυξάνεται ο συντελεστής α (μέγιστος κυματισμός για $\alpha=0$).

A.3

Στο τελευταίο ερώτημα του Θέματος A, στόχος είναι ο υπολογισμός του εύρους φάσματος των παλμών SRRC τόσο θεωρητικά με χρήση του τύπου: $BW = \frac{1+a}{T}$, όσο και πρακτικά ορίζοντας κάποια σταθερή τιμή ως το '0', και καθορίζοντας προσεγγιστικά ως προς αυτήν το φάσμα. Αυτό επιτυγχάνεται σχεδιάζοντας την σταθερά πάνω στην γραφική semilogy, όπου βρίσκονται ήδη οι $\Phi(F)$.

Ο κώδικας που πραγματοποιεί τα παραπάνω είναι ο εξής:

```

1 %A.3
2 %creating the band width of energy density spectrum in theory
3 disp(' ')
4 disp('the band width of energy density spectrums in theory')
5 disp(' ')
6 BWedsF1=(1+a(1))/(2*T)
7 BWedsF2=(1+a(2))/(2*T)
8 BWedsF3=(1+a(3))/(2*T)
9 %creating two horizontal lines with different values c1 and c2
10 c1=T/10^3;
11 for ki= 1:length(F)-1
12     c1=[c1 T/10^3];
13 end
14 c2=T/10^5;
15 for ki= 1:length(F)-1
16     c2=[c2 T/10^5];

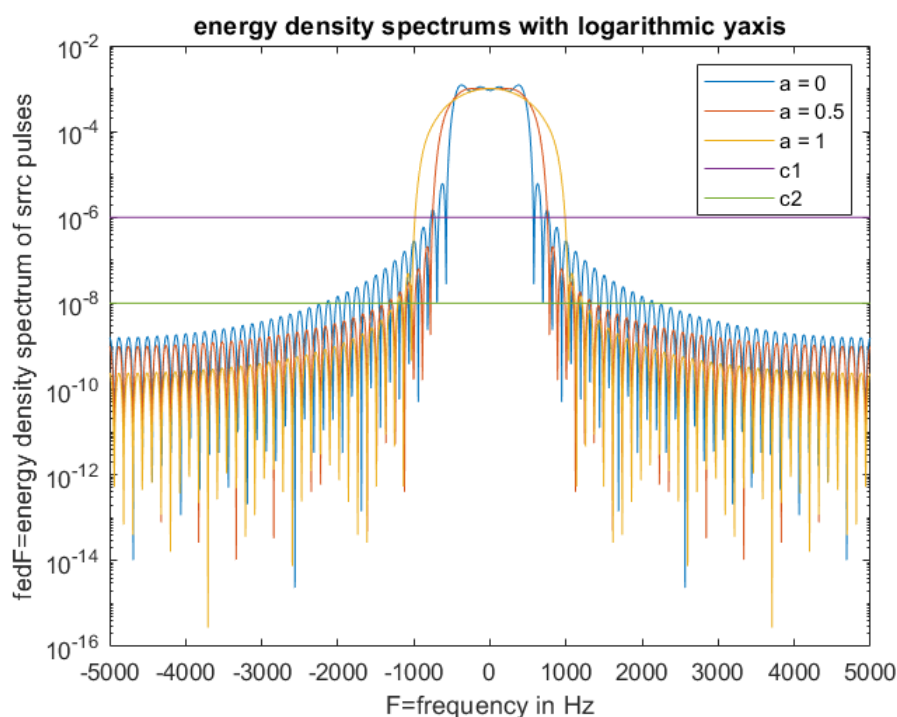
```

```

17 end
18 disp('press any key to see the same graph ,with two constant values c1 and c2')
19 pause
20 semilogy(F,c1);
21 semilogy(F,c2);
22 legend('a = 0', 'a = 0.5', 'a = 1','c1','c2');

```

και η γραφική απεικόνιση της semilogy μετα τον σχεδιασμό των σταθερών $c_1 = \frac{T}{10^3}$ και $c_2 = \frac{T}{10^5}$



A.3.1 Φασματική Ενέργεια $|\Phi(F)|^2$ για $a=0,0.5,1$, σε κοινό semilogy με σταθερές $c_1 = \frac{T}{10^3}$ και $c_2 = \frac{T}{10^5}$

Υπολογίστηκε το θεωρητικό εύρος φάσματος των παλμών απείρης διάρκειας σύμφωνα με την σχέση $BW = \frac{1+a}{2t}$ όπου α ο συντελεστής ενίσχυσης και T η περίοδος συμβόλου. Οι τιμές για κάθε διαφορετικό α:

$\alpha=0$:BW=500

$\alpha=0.5$:BW=750

$\alpha=1$:BW=1000

Επομένως ,χρησιμοποιώντας την τεχνική προσέγγισης του παλμού που προαναφέρθηκε , τραβήχτηκαν δύο γραμμές στην γραφική παράσταση για δύο διαφορετικές τιμές $c_1 = \frac{T}{10^3}$ και

$c_2 = \frac{T}{10^5}$, οι οποίες θεωρήθηκαν σαν σημείο αναφοράς του άξονα του 0, δηλαδή οτιδήποτε κάτω από αυτές, θεωρείται 0. Έτσι λοιπόν, επαναυπολογίστηκαν οι προσεγγιστικές τιμές για τα δύο c. έχουμε:

$C_1:$	$C_2:$
$\alpha=0.0: BW=776,4$	$\alpha=0.0: BW=2144$
$\alpha=0.5: BW=756,8$	$\alpha=0.5: BW=1323$
$\alpha=1.0: BW=986,3$	$\alpha=1.0: BW=1212$

Για να θεωρηθεί ένας παλμός αποδοτικότερος από έναν άλλο πρέπει αυτός να μεταφέρει την ίδια πληροφορία στο ελάχιστο δυνατό εύρος φάσματος. Αυτό διότι, αν όσο το εύρος φάσματος αυξάνεται τόσο περισσότερες συχνότητες επικαλύπτονται και σαν αποτέλεσμα, γίνεται πιο δύσκολη η επικοινωνία πομπού και δέκτη. Για να συγκριθεί λοιπόν αυτό το ελάχιστο εύρος φάσματος μεταξύ δύο παλμών φ με μετασχηματισμό fourier $\Phi(F)$, αρκεί να συγκριθεί το εύρος φάσματος της συνάρτησης αυτοομοιότητας του φ , $R_{\varphi\varphi}$ με μετασχηματισμό fourier ίσο με την φασματική πυκνότητα ενέργειας $|\Phi(F)|^2$ το οποίο είναι ισοδύναμο με αυτό, αφού τα φάσματα των δύο συναρτήσεων $|\Phi(F)|^2$ και $\Phi(F)$, συμπίπτουν. Σύμφωνα λοιπόν με τον θεωρητικό τύπο $BW = \frac{1+a}{2T}$, το εύρος αυτό πρέπει να αυξάνεται όσο αυξάνεται ο συντελεστής a , όπως και υπολογίστηκε πρωτύτερα και διαπιστώθηκε πως ισχύει.

Παρόλα αυτά, στην πράξη γίνεται αντιληπτό πως δεν ισχύει ότι το μικρότερο εύρος φάσματος το έχει ο παλμός με το μικρότερο a . Στην περίπτωση της προσέγγισης με το c_1 , ο πιο αποδοτικός παλμός είναι εκείνος με το μικρότερο BW, δηλαδή ο παλμός για $\alpha=0,5$, του οποίου το a δεν συμπίπτει με το μικρότερο a από τις περιπτώσεις.

Ακόμα πιο έντονη φαίνεται αυτή η απόκλιση με το θεωρητικό μοντέλο στην περίπτωση του c_2 (ακόμα μικρότερο, άρα ακόμα πιο χαμηλά το σημείο αναφοράς του 0 στον y'y)όπου παρατηρείται πως σε πλήρη αντίθεση με το θεωρητικό, όσο αυξάνεται το a , τόσο μειώνεται το εύρος φάσματος. Επομένως, σε αυτήν την περίπτωση ο πιο αποδοτικός παλμός είναι εκείνος που έχει $\alpha=1$.

Εν τέλει συμπεραίνουμε πως το εύρος φάσματος στην πράξη εξαρτάται από το τι ορίζεται ως “πρακτικά μηδέν” και απαιτείται πειρατισμός και εμπειρία για να βρεθεί ο βέλτιστος παλμός.

Άσκηση B

Στο Θέμα αυτό θα μελετήσουμε την φ ως προς τις μετατοπίσεις της κατά ακέραια πολλαπλάσια $k \in \mathbb{Z}$. και συγκεκριμένα για $k=0,1,2,\dots,2A$ όπου $A=5$.

B.1 & B.2

Στην παραπάνω άσκηση μας δόθηκε ένα διάνυσμα ακεραίων k , από το 0 έως το $2*A$, με $A=5$. Μας ζητήθηκε να γίνει πειραματισμός με τις ιδιότητες ορθοκανονικότητας της φ , ως προς τις μετατοπίσεις της, κατά ακέραια πολλαπλάσια του T (όπου T η περίοδος συμβόλου) για τις τρεις διαφορετικές τιμές του $\alpha=0,0.5$ και 1 . Αρχικά, υπολογίστηκαν οι συναρτήσεις ανυψωμένου ημιτόνου (square-root raised cosine) $\varphi(t)$ για τις παραπάνω παραμέτρους, στην συνέχεια, δημιουργήθηκαν οι μετατοπισμένες ως προς kT συναρτήσεις $\varphi(t-kT)$, διαδικασία η οποία αποδείχτηκε αρκετά σύνθετη να υλοποιηθεί στο προγραμματιστικό εργαλείο MATLAB. Αναλύοντας, για να επιτευχθεί η παραπάνω διαδικασία, πρακτικά προστέθηκαν ένα πλήθος $\frac{k*TS}{T} = k * over$ μηδενικά, στην αρχή της $\varphi(t)$ και αντίστοιχα, αποκόπηκαν το ίδιο πλήθος τιμών από το τέλος της, έτσι ώστε να δημιουργηθούν οι δοθείσες μετατοπίσεις της. Επίσης, έγινε αριθμητικός υπολογισμός του γινομένου των δύο αυτών (στα στοιχεία τους ένα προς ένα).

Στην συνέχεια, σχεδιάστηκαν τα αποτελέσματα των παραπάνω διαδικασιών για $\alpha=0,0.5$ και 1 και για $k=0,1,2,3$. Συγκεκριμένα σχεδιάστηκαν 24 γραφικές παραστάσεις, 12 από αυτές (πλήθος $\alpha=3*$ πλήθος $k=4$) περιέχουν μαζί τους παλμούς $\varphi(t)$ και $\varphi(t-kT)$, ενώ οι υπόλοιπες 12 περιέχουν το γινόμενο τους.

Ο κώδικας που περιγράφει τις όλες τις διαδικασίες του B παραθέται παρακάτω καθώς τα ερωτήματα B.1, B.2, B.3 είναι αλληλοσυνδεόμενα:

```
1 %B.1
2 %initialization of parameter A and vector of integer values k
3 A = 5;
4 k = 0:2*A;
5 %creation of srrc pulses
6 [f1,t1]=srrc_pulse(T,over,A,a(1));
```

```

7 [f2,t2]=srrc_pulse(T,over,A,a(2));
8 [f3,t3]=srrc_pulse(T,over,A,a(3));
9 %initialization of integrals to vectos filled with zeros
10 integral1=zeros(1,length(k));
11 integral2=integral1;
12 integral3=integral1;
13 %for loop for every value of vector k
14 for ki=0:length(k)-1
15     %creation of the delayed srrc pulse for a=0
16     f1kt = [zeros(1, over*ki) f1(1:end-ki*over)];
17 %creation of product (srrc pulse)*(srrc pulse delayed by kT) for a=0
18 product1 = f1.*f1kt;
19 if(ki<4)
20     disp('press any key to see the graphs of (srrc pulse) and (srrc pulse delayed by kT)for a=0:')
21     pause
22     figure()
23     plot(t1,f1)
24     hold on
25     plot(t1,f1kt);
26     title('for a=0:(srrc pulse) and (srrc pulse delayed by kT)')
27     hold off
28     disp('press any key to see the graph of(srrc pulse)*(srrc pulse delayed by kT) for a=0:')
29     pause
30     figure()
31     plot(t1,product1)
32     title('for a=0:(srrc pulse)*(srrc pulse delayed by kT)')
33     %creation of integral of (srrc pulse)*(srrc pulse delayed by kT)
34     %for a=0
35     integral1(ki+1)=sum(product1)*Ts;
36 end
37 %creation of the delayed srrc pulse for a=0.5
38 f2kt = [zeros(1, over*ki) f2(1:end-ki*over)];
39 %creation of product (srrc pulse)*(srrc pulse delayed by kT) for a=0.5
40 product2 = f2.*f2kt;
41 if(ki<4)
42     disp('press any key to see the graphs of (srrc pulse) and (srrc pulse delayed by kT)for a=0.5:')
43     pause
44     figure()
45     plot(t2,f2)
46     hold on
47     plot(t2,f2kt);
48     title('for a=0.5:(srrc pulse) and (srrc pulse delayed by kT)')
49     hold off

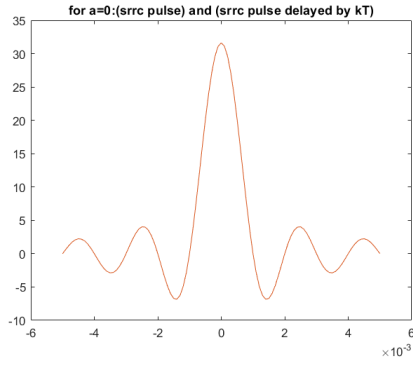
```

```

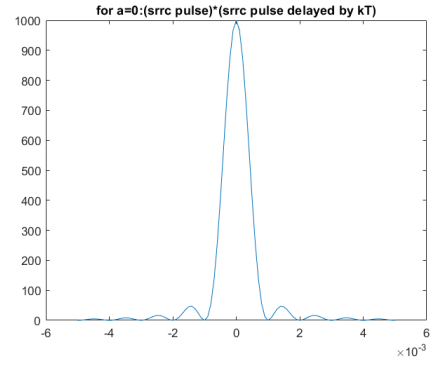
50     disp('press any key to see the graph of(srrc pulse)*(srrc pulse delayed by kT) for a=0.5:')
51     pause
52     figure()
53     plot(t2,product2)
54     title('for a=0.5:(srrc pulse)*(srrc pulse delayed by kT)')
55     %creation of integral of (srrc pulse)*(srrc pulse delayed by kT)
56     %for a=0.5
57     integral2(ki+1)=sum(product2)*Ts;
58 end
59 %creation of the delayed srrc pulse for a=1
60 f3kt = [zeros(1, over*ki) f3(1:end-ki*over)];
61 %creation of product (srrc pulse)*(srrc pulse delayed by kT) for a=1
62 product3 = f3.*f3kt;
63 if(ki<4)
64     disp('press any key to see the graphs of (srrc pulse) and (srrc pulse delayed by kT)for a=1:')
65     pause
66     figure()
67     plot(t3,f3)
68     hold on
69     plot(t3,f3kt);
70     title('for a=1:(srrc pulse) and (srrc pulse delayed by kT)')
71     hold off
72     disp('press any key to see the graph of(srrc pulse)*(srrc pulse delayed by kT) for a=1:')
73     pause
74     figure()
75     plot(t3,product3)
76     title('for a=1:(srrc pulse)*(srrc pulse delayed by kT)')
77     %creation of integral of (srrc pulse)*(srrc pulse delayed by kT)
78     %for a=1
79     integral3(ki+1)=sum(product3)*Ts;
80 end
81 end
82 disp(' ')
83 disp('the values of the integral of (srrc pulse)*(srrc pulse delayed by kT) for a=0,0.5,1 and k=0,1,2,3 ')
84 disp(' ')
85 integral1(1:4)
86 integral2(1:4)
87 integral3(1:4)

```

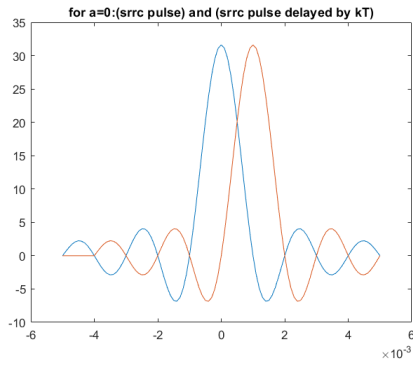
Το σύνολο των αποτελεσμάτων προκύπτει εύκολα από μια εκτέλεση του παραπάνω κώδικα στην Matlab.



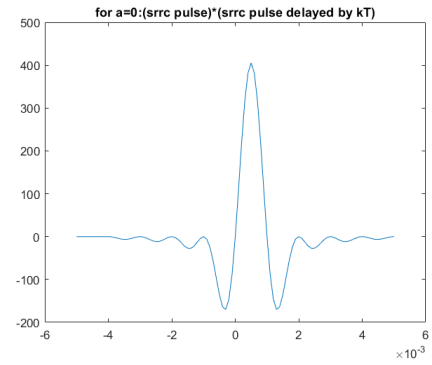
(α) $k = 0$, μετατόπιση



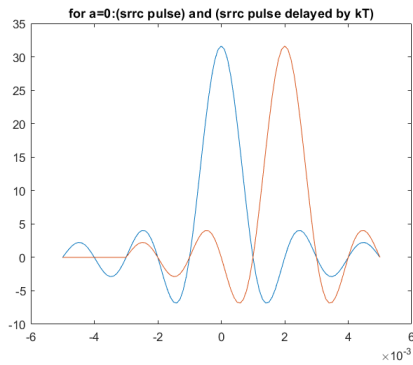
(β) $k = 0$, γινόμενο



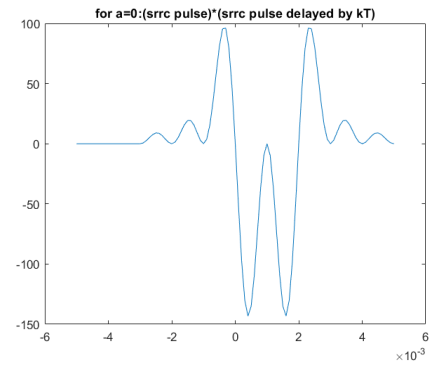
(ζ) $k = 1$, μετατόπιση



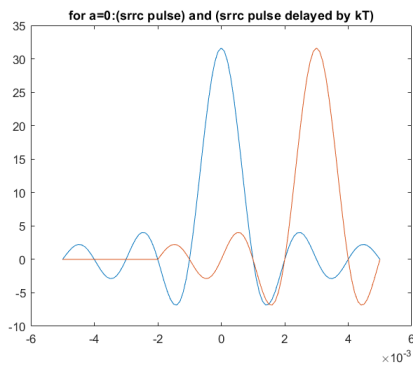
(δ) $k = 1$, γινόμενο



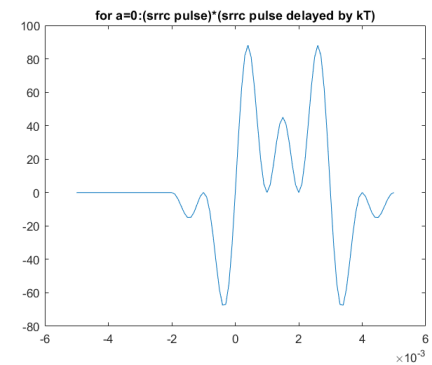
(ε) $k = 2$, μετατόπιση



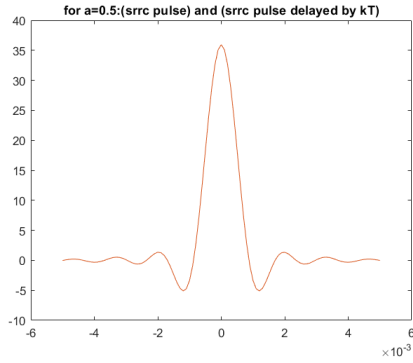
(φ) $k = 2$, γινόμενο



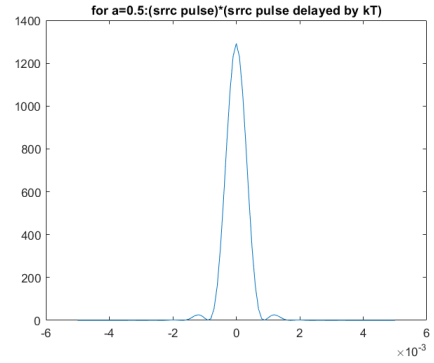
(γ) $k = 3$, μετατόπιση



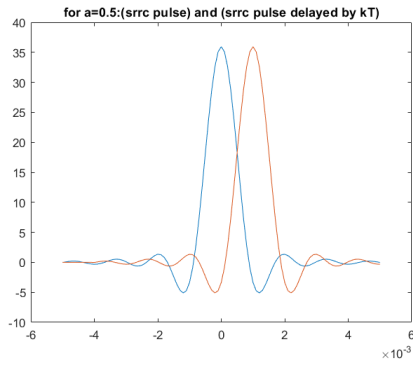
(η) $k = 3$, γινόμενο



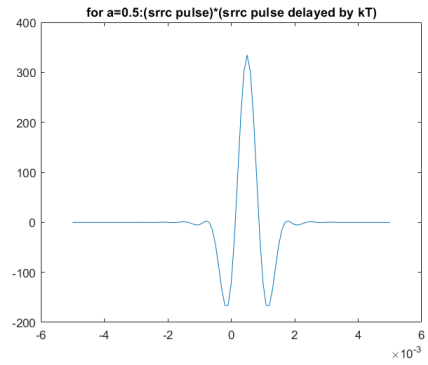
(α) $k = 0$, μετατόπιση



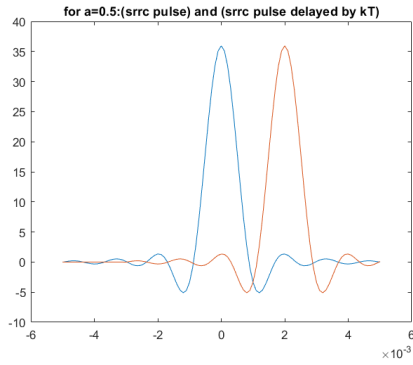
(β) $k = 0$, γινόμενο



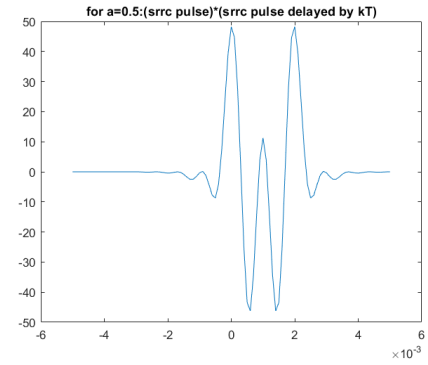
(ζ) $k = 1$, μετατόπιση



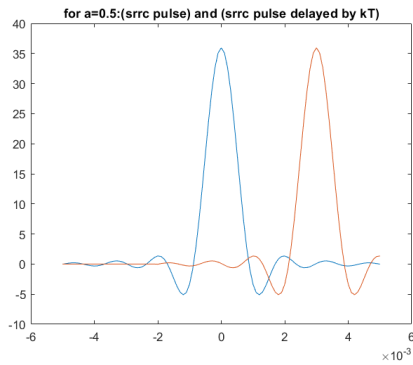
(δ) $k = 1$, γινόμενο



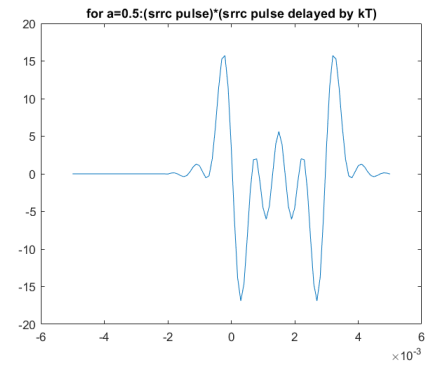
(ε) $k = 2$, μετατόπιση



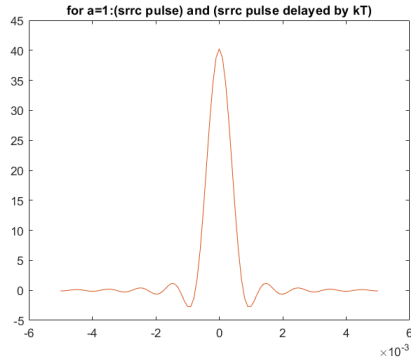
(φ) $k = 2$, γινόμενο



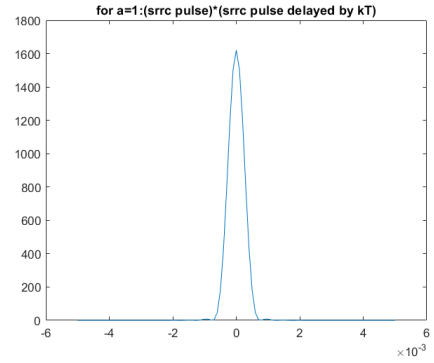
(γ) $k = 3$, μετατόπιση



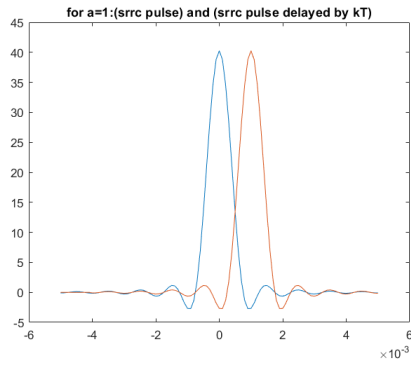
(η) $k = 3$, γινόμενο



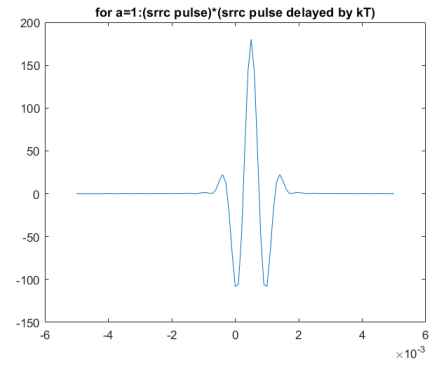
(α) $k = 0$, μετατόπιση



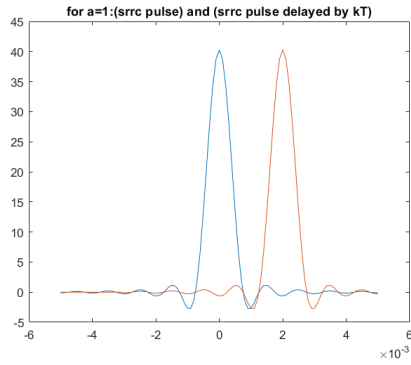
(β) $k = 0$, γινόμενο



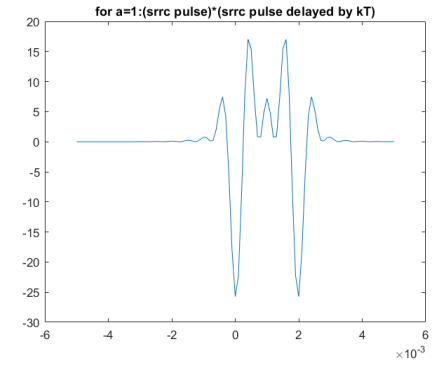
(ζ) $k = 1$, μετατόπιση



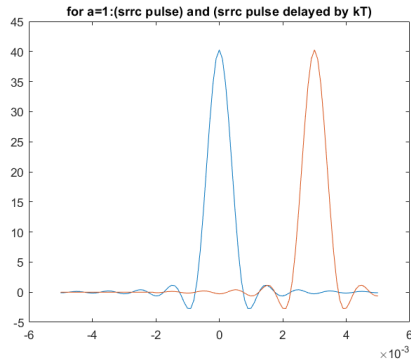
(δ) $k = 1$, γινόμενο



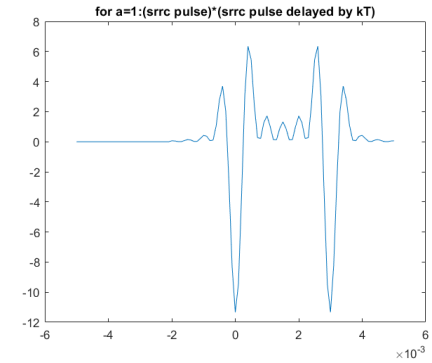
(ε) $k = 2$, μετατόπιση



(φ) $k = 2$, γινόμενο



(γ) $k = 3$, μετατόπιση



(η) $k = 3$, γινόμενο

Σχολιάζοντας τις παραπάνω γραφικές, είναι αναμενόμενο πως αρχικά για $k=0$ οι παλμοί φ και ο μετατοπισμένος του, ταυτίζονται. Ακόμη, παρατηρείται πως και για τις 2 διαφορετικές γραφικές σε κάθε περίπτωση του k , όσο περισσότερο αυξάνεται ο συντελεστής a , τόσο μειώνεται το ριππλινγ ,δηλαδή τόσο πιο γρήγορα φθίνουν οι παλμοί στο 0 και τόσο πιο πολύ τείνουν στην ευθυγράμμιση τους ,στις ακριανές τιμές τους. Τέλος ,με την αύξηση του k , γνωρίζοντας ότι το k παίρνει θετικές τιμές, ο παλμός $\varphi(t-kT)$, μετατοπίζονται στον άξονα του χρόνου προς τα δεξιά.

B.3

Στην φάση αυτή αφού έχουν πλέον υπολογιστεί τα γινόμενα: ζητείται να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα τους για $a=0,0.5,1$ και $k=0,1,2,3$. Η αριθμητική προσέγγιση του ολοκληρώματος στο περιβάλλον της MATLAB, επιτεύχθηκε πολλαπλασιάζοντας το άθροισμα των γινομένων με την συχνότητα δειγματοληψίας T_s .

Ο κώδικας που περιγράφει την διαδικασία αυτή έχει καταγραφεί στο ερώτημα B.1.

Table 1: Integral values for varying a and k .

	k=0	k=1	k=2	k=3
a=0	0.9728	0.0226	-0.0258	0.0308
a=0.5	0.9999	0.0000	0.0002	0.0000
a=1	1.0000	0.0000	0.0000	-0.0001

Από τα αποτελέσματα γίνεται αντιληπτό πως οι παλμοί $\text{srrc } \varphi(t)$, είναι προσεγγιστικά ορθοκανονικοί ως προς τις μετατοπίσεις τους κατά kT ,καθώς και για $k=0$ δίνουν αποτέλεσμα πολύ κοντά στο 1, το οποίο όσο μεγαλώνει ο συντελεστής a , τόσο πιο πολύ το πλησιάζει (δηλαδή τόσο καλύτερη προσέγγιση επιτυγχάνεται).Αντίστοιχα επίσης, δίνουν τιμές κοντά στο 0 για $k \neq 0$ όπως και ήταν αναμενόμενο από την θεωρία.

Άσκηση C

Στο τελευταίο Θέμα, ζητούμενο είναι η κατανόηση και η προσομοίωση ενός 2-PAM συστήματος βασική ζώνης

C.1

Στο ερώτημα αυτό, δημιουργήθηκε μια τυχαία ακολουθία από N bits, επιλέχτηκε το $N=100$ bits και αποθηκεύτηκε σε μια μεταβλητή b , μέσω της δοθείσας συνάρτησης που τα δημιουργεί. υλοποίηση σε Matlab:

```
1 %initialization of symbol period T,oversampling factor over,roll-off factor
2 %a,parameter A(half duration of the pulse),N number of bits
3 T=0.1;
4 over=10;
5 a=0.5;
6 A=5;
7 N=100;
8 T_s=T/over;
9
10 %call of the created function that transfers bits to 2PAM
11 disp('a random sequence of bits')
12 b=(sign(randn(N,1))+1)/2
```

C.2.a

Συνεχίζοντας, την ακολουθία bits που δημιουργήσαμε στο προηγούμενο ερώτημα την περνάμε ως είσοδο στην συνάρτηση $bits_to_2PAM(b)$ η οποία παράγει ως έξοδο ακολουθία από 2PAM σύμβολα με την εξής απεικόνιση $0 \rightarrow 1$ $1 \rightarrow -1$.

Με βάση τα παραπάνω κριτήρια αναπτύξαμε την συνάρτηση όπως φαίνεται παρακάτω:

```
1 function [symbols] = bits_to_2PAM(bits)
2 %UNTITLED2 Summary of this function goes here
3 % Detailed explanation goes here
4 for i=1:length(bits)
5     if(bits(i)==0)
6         symbols(i)=1;
7     else
8         symbols(i)=-1;
```

```

9      end
10 end

```

C.2.b

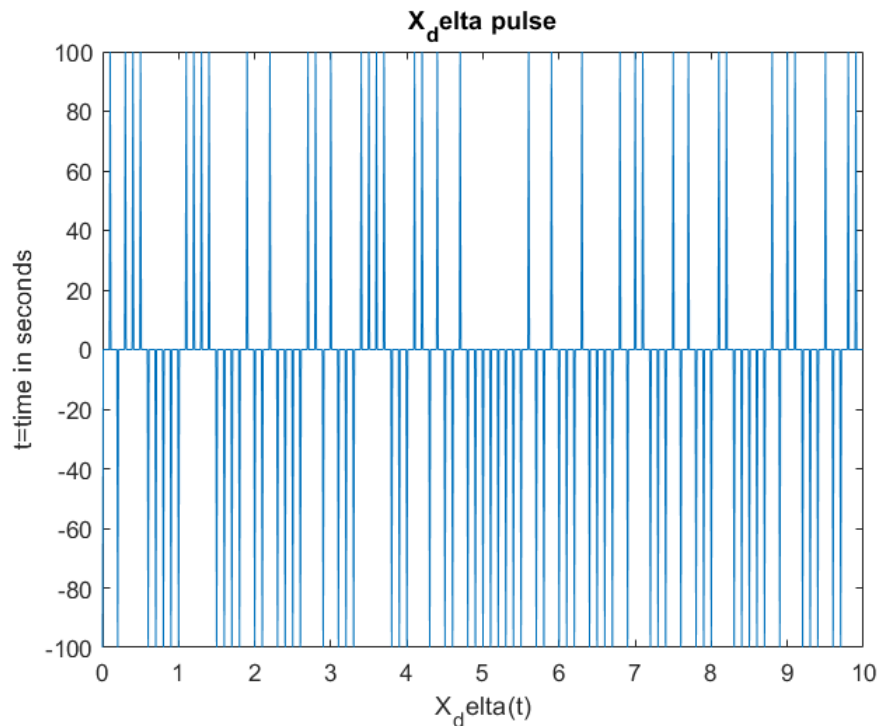
Αρχικά, δημιουργήθηκε το σήμα $X_\delta(t) = \sum_{k=0}^{N-1} X_k \delta(t - kT)$, το οποίο απεικονίζει το άθροισμα του κάθε στοιχείου X_k του προηγούμενου ερωτήματος, πολλαπλασιασμένο με τις αντίστοιχες για κάθε k , μετατοπισμένες κατά kT μοναδιαίες ώσεις. Το παραπάνω, υλοποιήθηκε στην MATLAB, μέσω της εντολής `upsample`, με ορίσματα `over` και την 2-PAM ακολουθία X του προηγούμενου ερωτήματος. Αναλύοντας, μέσω της `upsample` γίνεται δειγματοληψία των τιμών του διανύσματος X , αφήνοντας πλήθος (`over-1`) μηδενικών μεταξύ των δειγμάτων. Έπειτα, διαλέχτηκε καταλλήλως ο χρονικός άξονας του παραπάνω σήματος, από το 0 έως το $T-T_s$ με βήμα $N \cdot T$.

```

1 %C.2.b
2 %creation of x_delta
3 X_delta=1/T_s*upsample(X,over);
4 t=(0:T_s:N*T-T_s);
5 %creation of the graph of x_delta
6 disp('press any key to see the graph of x_delta')
7 pause
8 figure()
9 plot(t,X_delta);
10 title('X_delta pulse')
11 xlabel('X_delta(t)')
12 ylabel('t=time in seconds')

```

ο παλμός X_δ που προκύπτει είναι ο παρακάτω:



C.2.b απεικόνιση του παλμού $X_\delta(t)$

C.2.c

Έπειτα, μας ζητήθηκε να σχεδιαστεί η συνέλιξη ενός παλμού τετραγωνικού ανυψωμένου ημιτόνου(square-root raised cosine) $\varphi(t)$ με το σήμα του προηγούμενου ερωτήματος $X_\delta(t)$. Βρέθηκαν τα χρονικά όρια που η συνέλιξη των δύο σημάτων είναι διάφορη του μηδενός, που όπως είναι γνωστό αυτά είναι το άθροισμα των αριστερών ορίων των σημάτων ως αριστερό όριο της συνέλιξης και αντίστοιχα ισχύει και για το δεξί όριο. Αφού λοιπόν βρέθηκαν σωστά τα χρονικά όρια, τότε με την απλή εντολή `conv` στην MATLAB με ορίσματα τα δύο σήματα και πολλαπλασιασμένη με T_s (περίοδος δειγματοληψίας), υπολογίστηκε και ύστερα σχεδιάστηκε η δοθείσα συνέλιξη $X(t)$

η υλοποίηση είναι η εξής:

```

1 %C.2.b
2 %creation of x_delta
3 X_delta=1/T_s*upsample(X,over);
4 t=(0:T_s:N*T-T_s);
5 %creation of the graph of x_delta

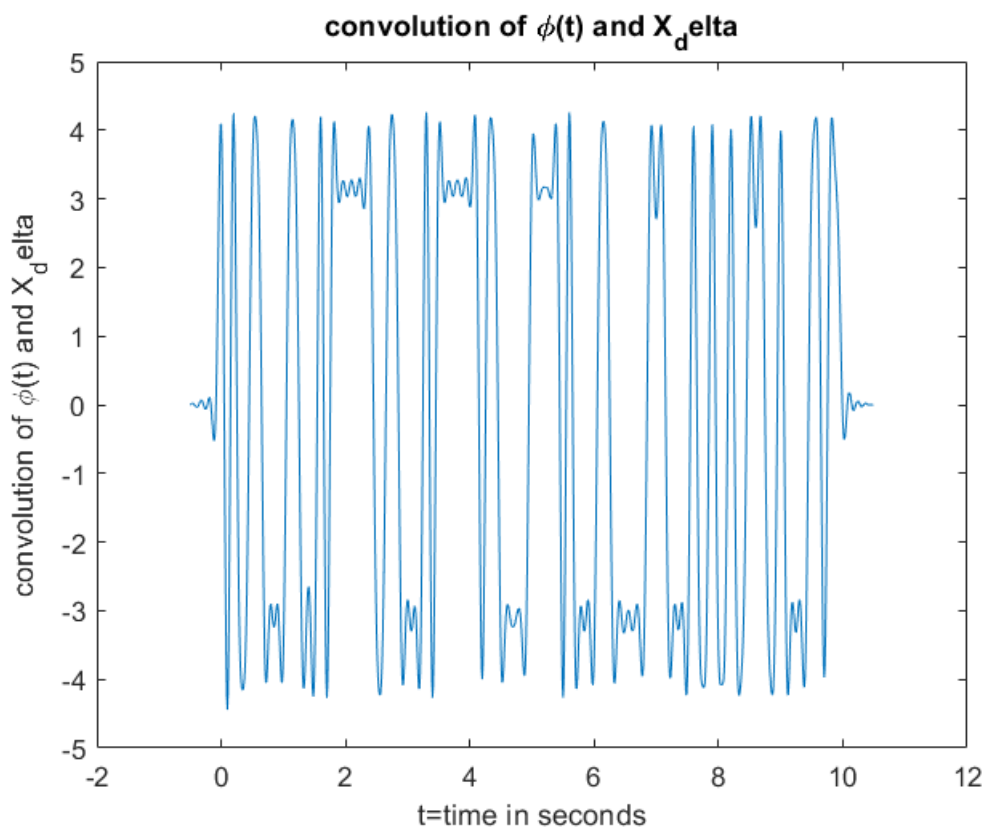
```

```

6 disp('press any key to see the graph of x_delta')
7 pause
8 figure()
9 plot(t,X_delta);
10 title('X_delta pulse')
11 xlabel('X_delta(t)')
12 ylabel('t=time in seconds')

```

Η συνέλιξη που υπολογίζεται είναι η ακόλουθη:



C.2.c Συνέλιξη του παλμού $X_\delta(t)$ με την $\phi(t)$, στον πομπό

C.2.d

ο κώδικας που πραγματοποιεί την παραπάνω διαδικασία είναι:

```

1 %d
2 %convolution of f4 and X_t
3 %no need to change f4 because it is symmetrical to the time
4 %axis(\phi(t)=\phi(-t))

```



```

5 Z=conv(f4,X_t)*T_s;
6 %creating th time axis for the convolution of f4 and X_t
7 tconv2=[tconv(1)+t4(1):T_s:tconv(end)+t4(end)];
8 disp('press any key to see the convolution of \phi(-t) and X_t')
9 pause
10 figure()
11 hold on
12 plot(tconv2,Z);
13 stem([0:N-1]*T,X);
14 title('convolution of \phi(-t) and X_t')
15 ylabel('convolution of \phi(-t) and X_t')
16 xlabel('t=time in seconds')
17 legend('Z(t)','X')
18
19
20 %Printing the values of Z for kt
21 for i = 1:N
22     values = 'Z(%d)=%8f    ||    X(%d)=%d    ||    k=%d \n';
23     fprintf(values,100+i*10,Z(90+i*10),i-1,X(i),i-1)
24 end

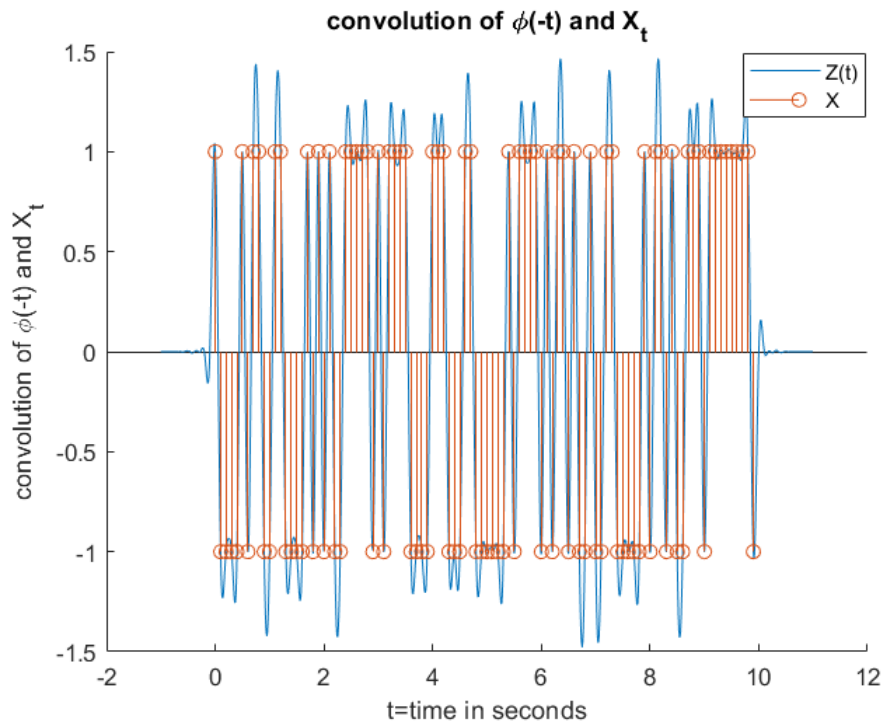
```

Ενδεικτικές τιμές $Z(kT)$ και Q_k , με $k = 0, 1, 2, \dots, 10$ για συσχέτιση των δύο συναρτήσεων, ώστε να δούμε το βαθμό επιτυχίας της επικοινωνίας.

Z(110)=-0.933622		X(0)=-1		k=0
Z(120)=-0.991705		X(1)=-1		k=1
Z(130)=-1.108676		X(2)=-1		k=2
Z(140)=0.836999		X(3)=1		k=3
Z(150)=1.135275		X(4)=1		k=4
Z(160)=-0.864211		X(5)=-1		k=5
Z(170)=-1.017451		X(6)=-1		k=6
Z(180)=-1.126107		X(7)=-1		k=7
Z(190)=0.961821		X(8)=1		k=8
Z(200)=-0.820292		X(9)=-1		k=9
Z(210)=-1.009665		X(10)=-1		k=10

C.2.c Ενδεικτικές τιμές για συσχέτιση $X(t)$ με $Z(t)$

Η συνέλιξη που δίνει το \mathbf{Z} είναι η ακόλουθη:



C.2.c Συνέλιξη του παλμού $X(t)$ με την $\phi(-t)$ στον δέκτη, σε κοινή γραφική με τις τιμές της $X(t)$

Στο τελευταίο ερώτημα ,καλούμαστε να συνελίξουμε το σήμα που δημιουργήθηκε στο προηγούμενο ερώτημα με τον ανακλασμένο παλμό srcc , $\phi(-t)$.Ο παλμός αυτός είναι ίσος με τον $\phi(t)$, καθώς και είναι συμμετρικός ως προς τον $y'y$ άξονα, επομένως δεν χρειάστηκε να δημιουργηθεί από την αρχή διότι χρησιμοποιήθηκε ο ίδιος παλμός $\phi(t)$.Άρα, γίνεται αντιληπτό πως το φίλτρο του πομπού, θα είναι ίδιο με το φίλτρο του δέκτη.

Ύστερα, με τον τρόπο που αναφέρθηκε προηγουμένως ,υπολογίστηκε και σχεδιάστηκε η συνέλιξη αυτή, στα σωστά χρονικά όρια .Έπειτα, για να υπολογιστούν οι τιμές του Z για τις διάφορες χρονικές στιγμές kT , με $k=0,1,2..N-1$ και για να συσχετιστούν με τις αντίστοιχες τιμές X_k , χρησιμοποιήθηκε ένα `for loop`, από το 0 μέχρι το πλήθος bits $N=100$ που μεταφέρονταν που εκτελούσε μια `printf` η οποία τύπωνε σε μια σειρά $Z(kT)$, την τιμή του, $X(k)$, την τιμή του και τον αριθμό επανάληψης k . Εξετάζοντας τις τιμές αυτές, παρατηρήθηκε πως για τιμές του $X_k=1$ το $Z(kT)$, έπαιρνε τιμές περίπου γύρω από το 1, ενώ αντίστοιχα για $X_k=0$ το $Z(kT)$, έπαιρνε τιμές περίπου γύρω από το 0. Αυτό το φαινόμενο συμβαίνει, διότι ενώ ο πομπός μεταδίδει την ακολουθία X_k , λόγω του γεγονότος ότι χρησιμοποιήθηκαν,

προσεγγιστικά ορθοκανονικοί ως προς τις μετατοπίσεις τους κατά kT παλμοί `src` (εφόσον οι ιδανικοί είναι αδύνατον να υπάρξουν στην πραγματικότητα ,καθώς και είναι μη-αιτιατά συστήματα), ο δέκτης, δεν καταφέρνει να ανακτήσει πλήρως αμετάβλητη την ακολουθία Ξ_k , παρόλου που αυτός δειγματοληπτεί σωστά τις κατάλληλες χρονικές στιγμές ίσες με $t=kt$, με $k = 0, 1, 2, ..N-1$. Τέλος, σχεδιάστηκαν σε κοινή γραφική παράσταση με το $Z(t)$, οι διακριτές τιμές της ακολουθίας X_k , οι οποίες ήταν spikes με τιμές ± 1 και απόσταση μεταξύ τους μια περίοδο συμβόλου ,επομένως, παρατηρούμε και γραφικά το φαινόμενο που αναλύθηκε.

ΤΕΛΟΣ