Πολυτεχνείο Κρήτης   Τμήμα ΗΜΜΥ

Διδάσκων: Αθανάσιος Λιάβας

Τηλεπικοινωνιακά Συστήματα Ι: Άσκηση 2η

Ομάδα:

Γιάννης Περίδης 2018030069

Σκλάβος Παναγίωτης 2018030170

Χειμερινό Εξάμηνο 2020-2021

Θέμα Α

Α.1

Ξεκινώντας ζητείται η δημιουργία ενός (αποκομμένου) παλμού SRRC $\phi(t)$ θεωρώντας δεδομένες τις τιμές $T = 10^{-2}$ sec, $over = 10$, $T_s = \frac{T}{over} = 10^{-3}$, $A = 4$ και α= 0.5 κάνοντας χρήση της δοθείσας συνάρτησης *srrc_pulse.m* στο περιβάλλον της Matlab. Ακολούθως υπολογίζεται το μέτρο του μετασχηματισμού $Fourier$ της φ: $\left|\Phi(F)\right|$ σε Nf ισαπέχοντα σημεία στο διάστημα $[-\frac{F_s}{2}, \frac{F_s}{2})$, με $Nf = 4096$(έτσι ώστε να αποφευχθούν τυχόν παραμορφώσεις) και $F_s = \frac{1}{T_s} = 100$ με σκοπό τον υπολογισμό και τη σχεδίαση της φασματικής πυκνότητας ενέργειας $\left|\Phi(F)\right|^2$.

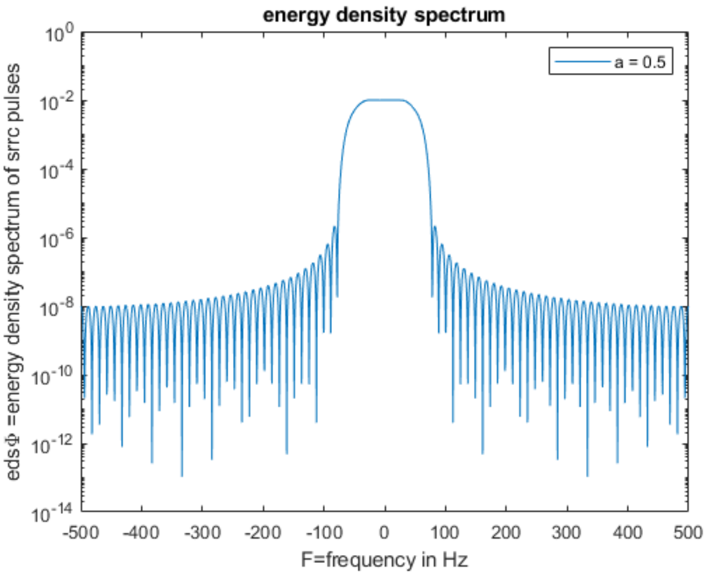


Figure 1: Energy Density Spectrum: $\left|\Phi(F)\right|^2$ in logarithmic scale

Ο κώδικας σε *Matlab* που πραγματοποεί τις ανώθεν εργασίες φαίνεται παρακάτω:

```
%TELECOMMUNICATION SYSTEMS I
%exercise 2
%authors-Panagiotis Sklabos/Giannis Peridis

%MATLAB CODE
clear all;
close all;
clc;
format compact;

%A.1
%intialization of symbol period T,oversampling factor over,
%parameter A(half duration of the pulse) and roll-off factor a
T=10^-2;
over=10;
A=4;
a=0.5;

%creating srrc pulses
[phi,t]=srrc_pulse(T,over,A,a);

```

```
%intialization of sampling period Ts,sampling frequency Fs,
%parameter Nf(number of equidistant points) and F axis
Ts=T/over;
Fs=1/Ts;
Nf=2048;
F=[-Fs/2:Fs/Nf:Fs/2-Fs/Nf];

%creating fast fourier transformation
PHI=fftshift(fft(phi,Nf)*Ts);

%creating the energy density spectrum
edsPHI=abs(PHI).^2;

%creating graph of the energy density spectrums
%in the same plot
disp('press any key to see the energy density spectrum with logarithmic yaxis')
pause
figure();
semilogy(F,edsPHI);
title('energy density spectrum with logarithmic yaxis');
xlabel('F=frequency in Hz');
ylabel('edsPhi =energy density spectrum of srrc pulses');
legend('a = 0.5');
```

A.2

Συνεχίζοντας παράγεται μια ακολουθία N=100 ισοπίθανων και ανεξάρτητων *bits* τα οποία μετατρέπονται σε σύμβολα X_n με βάση την απεικόνιση:

$$0 \longrightarrow +1$$

$$1 \longrightarrow -1$$

Η ακολουθία, αυτή, περιγράφεται συναρτήσει του χρόνου t, με την βοήθεια του τρένου παλμών καθυστερυμένων κατα ακέραια πολλαπλάσια της περιόδου συμβόλων (nT) ώς εξής:

$$X_\delta(t) = \sum_{n=0}^{N-1} X_n\,\delta(t - nT), \tag{1}$$

Συνεπώς η κυματομορφή:

$$X(t) = \sum_{n=0}^{N-1} X_n \, \phi(t - nT), \tag{2}$$

προκύπτει άμεσα όταν το σήμα $X_\delta(t)$ περνάει από το φίλτρο στον πομπό με κρουστική απόκριση $h(t) = \phi(t)$.

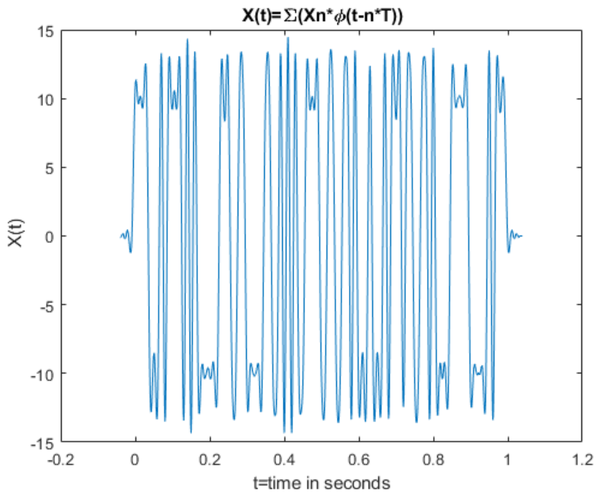


Figure 2: Waveform of $X(t)$

Ο κώδικας σε $Matlab$ που πραγματοποεί τις ανώθεν εργασίες φαίνεται παρακάτω:

```
%A.2
%N number of bits
N=100;

%call of the created function that transfers bits to 2PAM
disp('a random sequence of independent and  equally possible bits')
b=(sign(randn(N,1))+1)/2;
b=transpose(b)

%call of the created function that transfers bits to 2PAM
disp('the transformed 2PAM sequence')
Xn=bits_to_2PAM(b)
t1=(0:Ts:N*T-Ts);
```

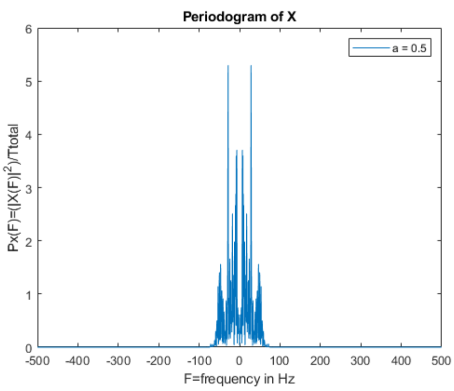
```
%creation of X_delta
X_delta=1/Ts*upsample(Xn,over);

%creation of X(t)=sum(Xn*phi(t-n*T))
%convolution of phi and X_delta
tconv=[t(1)+t1(1):Ts:t(end)+t1(end)];
X_t=conv(phi,X_delta)*Ts;
%creation of the graph of X(t)
disp('press any key to see X(t) waveform ')
pause
figure()
plot(tconv,X_t);
title(' X(t)=\Sigma(Xn*\phi(t-n*T))')
ylabel(' X(t)')
xlabel('t=time in seconds')
```

A.3

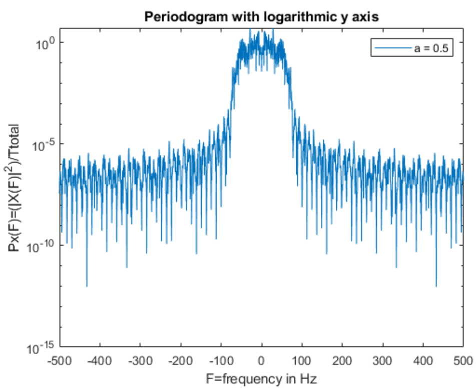
Προχωρώντας στα ερώτημα A.3 υπολογίζεται το περιοδόγραμμα μίας υλοποίησης της $X(t)$:

$$P_X(F) = \frac{\left|X(F)\right|^2}{Ttotal}, \tag{3}$$

αφού πρώτα υπολογιστεί ο μετασχηματισμός $Fourier$ $X(F)$ της X(t). Παρακάτω απεικονίζεται το περιοδόγραμμα $P_X(F)$ σε δεκαδική και λογαριθμική κλίμακα.



(a) Graph of $P_X(F)$ using plot



(b) Graph of $P_X(F)$ using semilogy

Ο κώδικας σε $Matlab$ που πραγματοποεί τις ανώθεν εργασίες φαίνεται παρακάτω:

```
%A3
%creating fast fourier transformation X(F) of  X(t)
X_F=fftshift(fft(X_t,Nf)*Ts);
%the total duration time
Ttotal=length(tconv)*Ts;

%creation of a periodogram of one of the implementations of X(t)
P_x=abs(X_F).^2/Ttotal;

%creation of periodogram graph in logarithmic y axis
disp('press any key to see the periodogram')
pause
figure();
semilogy(F,P_x);
title('Periodogram with logarithmic y axis');
xlabel('F=frequency in Hz');
ylabel('Px(F)=(|X(F)|^2)/Ttotal');
legend('a = 0.5');

%creation of periodogram graph in plot
disp('press any key to see the periodogram with logarithmic y axis')
pause
figure();
plot(F,P_x);
title('Periodogram of X');
xlabel('F=frequency in Hz');
ylabel('Px(F)=(|X(F)|^2)/Ttotal');
legend('a = 0.5');
```

Η παραπάνω διαδικασία για υπολογισμό και απεικόνιση περιοδογραμμάτων επαναλήφθηκε αρκετές φορές ώστε να παρατηρηθεί διεξοδικά η μορφή περιοδογραμμάτων διαφορετικών υλοιποιήσεων της X(t). Η ποικιλομορφία στις υλοποιήσεις προκύπτει, παίρνοντας κάθε φορά διαφορετικές υλοποιήσεις της ακολουθίας *bits* που είναι ο μόνος μη ντετερμινιστικός όρος.

Αφότου λοιπον παρατηρήθηκαν τα περιοδογράμματα διαφορετικών υλοποιήσεων της X(t), παρήχθησαν 500 διαφορετικές υλοποιήσεις περιοδογραμμάτων ώστε να πραγματοποιηθεί μια εκτίμιση της φασματική πυκνότητας ισχύος. Αυτό είναι εφικτό, κάνοντας χρήση του προσεγγιστικού τύπου:

$$S_X(F) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{\left|X(\omega_i, F)\right|^2}{T}. \tag{4}$$

Τα αποτελέσματα της εκτίμησης που πραγματοποιήθηκε συγκρίθηκαν με την θεωρητική φασματική πυνότητα ισχυος η οποία προκύπτει ώς εξής:

$$S_X(F) = \frac{\sigma_X^2}{T}\left|\Phi(F)\right|^2. \tag{5}$$

Στον τύπο αυτο έχουμε: $\sigma_X^2 = var = \frac{1^2+(-1)^2}{2} = 1$ Παρακάτω λοιπόν, αμφότερες απεικονίζονται σε κοινό δίαγραμαμα ώστε να επιτευχθεί σύγκρισή τους.

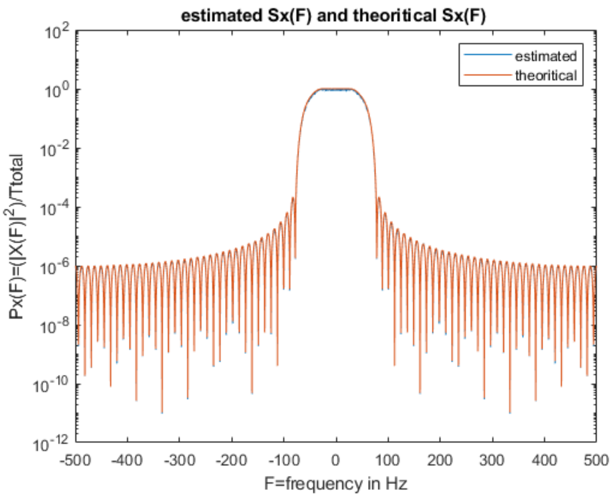


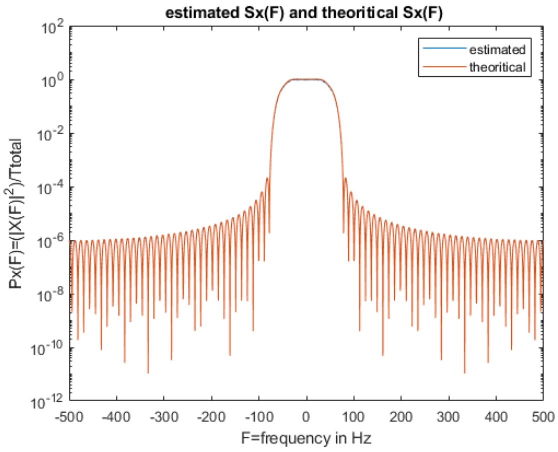
Figure 4: S_X, Theoretical and approximate estimation, in same semilogy

Ο κώδικας σε *Matlab* που πραγματοποεί τις ανώθεν εργασίες φαίνεται παρακάτω:

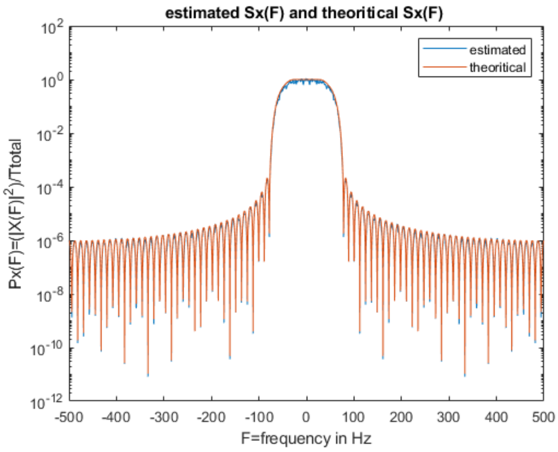
```
%initializing K the number of periodograms Px(F) of the of implemenations of
%X(t) and sum ,helps to find the summary
K =500;
sum=0;
%every loop we create a new implementation of X(t) and a new periodogram
%Px(F) for it, we repeat K times
for k=0:K-1
    b=(sign(randn(N,1))+1)/2;
    Xn=bits_to_2PAM(b);
    X_delta=1/Ts*upsample(Xn,over);
    X_t=conv(phi,X_delta)*Ts;
    X_F=fftshift(fft(X_t,Nf)*Ts);
    P_x=abs(X_F).^2/Ttotal;
    sum=sum+P_x;
end
%creation of the estimated power density spectrum, we divide the  summary by K times
%to find the arithmetic mean
S_x=sum/K;

%creating the theoritical Sx(F)
variance=1;
S_x_th= (variance*(abs(PHI).^2))/T;

%creating the graph of the estimated Sx(F) and the theoritical Sx(F) in the
%same plot with logarithmic y axis
disp('press any key to see the graph of the estimated Sx(F) and the theoritical Sx(F) in the same plot with
     logarithmic y axis')
pause
figure();
semilogy(F,S_x);
hold on;
semilogy(F,S_x_th);
title('estimated Sx(F) and theoritical Sx(F) ');
xlabel('F=frequency in Hz');
ylabel('Px(F)=(|X(F)|^2)/Ttotal');
legend('estimated', 'theoritical');
```

Παρατηρείται λοιπόν ότι για K=500 που χρησιμοποιήθηκε η προσέγγιση είναι αρκετά καλή καθώς οι διακυμάνσεις των δύο γραφικών είναι παρουσιάζουν μεγάλη ομοιότητα, ενώ το πλάτος φαίνεται να προσεγγίζει το θεωρητικό χωρίς βέβαια να αποτελεί άριστη αναπαράσταση,καθώς φαίνεται να δημιουργεί *ripples* λίγο χαμηλότερα απο το θεωρητικό. Επίσης το εύρος φάσματος των δύο παραστάσεων φαίνεται να είναι ίδιο.

Ενδεικτικά χρησιμοποιώντας διαφορετικά K και N προκύπτουν τα παρακάτω διαγράμματα:



(a) N=200 and K=1000



(b) N=50 and K=50

Ο κώδικας που παρήγαγε τα αποτελέσματα αυτά είναι ο ίδιος που παρατέθηκε παραπάνω, απλά αλλάζοντας τις τιμές των παραμέτρων N και K.

Παρατηρώντας τα δύο γραφήματα παραπάνω, γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι στην περίπτωση όπου έχουμε αυξήσει το N σε 200 και το K σε 1000, η εκτίμηση προσεγγίζει εξαιρετικά την θεωρητική φασματική πυκνότητα ισχύος, σε βαθμό που φαίνεται σαν να ταυτίζονται στο λογαριθμικό άξονα, αποκτώντας μεγαλύτερη σταθερότητα στο πλάτος της. Αντιθέτως όταν το N και το K μειώνονται σε 50 αμφότερα, η προσέγγιση μας παύει να είναι τόσο καλή. Πιο συγκεκριμένα, αρχίζουν στην πειραματική προσέγγιση, να σχηματίζονται έντονα *riiples* ενώ οι αριθμητικοί μέσοι που υπολογίστηκαν σε αρκετά σημεία φαίνεται να διαφέρουν από τις τιμές που θα έπρεπε να παρατηρούνται θεωρητικά.Το γεγονός αυτό, κάνει το πλάτος σε πολλά σημεία, να διαφέρει από το θεωρητικό. Συνεπώς υπάρχει μια αστάθεια και έλλειψη ομοιοφάνειας.

Η διακύμανση στην ακρίβεια της πειραματικής φασματικής πυκνότητας ισχύος, με βάση την τιμή του K και N, μπορεί εύκολα να κατανοηθεί και να ερμηνευθεί με βάση τις θεωρητικές μας γνώσεις. Συγκεκριμένα, εφόσον τα περιοδογράμματα ακολουθουν κανονική κατανομή(όπως και τα βιτς τα οποία κωδικοποιούνται και τελικά καταλήγουμε στην X(t), όσο μεγαλύρτερο γίντειαι το δείγμα, τόσο καλύτερη αποφαίνεται η προσέγγιση σε τελική ανάλυση. Αντίθετα όσο το δείγμα είναι μικρό δεν προλαβαίνουν τα αποτελέσματα να σταθεροποιηθούν και να αποκτήσουν τις αναμενόμενες ιδιότητές τους.

A.4

Στο παρακάτω ερώτημα, μας ζητήθηκε αντίστοιχα όπως στο ερώτημα A.2 να κατασκευαστούν σύμβολα Xn ,μέσω της ίδιας ακολουθίας από ανεξάρτητα και ισοπίθανα $bits$,χρησιμοποιώντας αυτή τη φορά την παρακάτω διαφορετική απεικόνιση $4 - PAM$:

$$00 \longrightarrow +3$$

$$01 \longrightarrow +1$$

$$10 \longrightarrow -3$$

$$11 \longrightarrow -1$$

Αρχικά, δημιουργήθηκε κατάλληλη συνάρτηση Που υλοποιεί τις παραπάνω μετατροπές. Συγκεκριμένα, η μετατροπή των $bits$ γινόταν σε ένα $for\ loop$ στο οποίο εισάγονταν ανά δυάδες και ύστερα γινόταν έλεγχος σε κάθε ένα από τα δύο ξεχωριστά και ανάλογα τον συνδυασμό που δημιουργούσαν, παραγόταν το αντίστοιχο αποτέλεσμα. Είναι προφανές πως το πλήθος των συμβόλων θα είναι το μισό από το πλήθος των $bits$ (δηλαδή $\frac{N}{2} = 50$) εφόσον κάθε δύο $bits$ κωδικοποιούν ένα σύμβολο. Αξιοσημείωτο είναι να παρατηρηθεί πως εφόσον τα $bits$ είναι ισοπίθανα και ανεξάρτητα, θα ισχύει πως $P(bit1 \cap bit2) = P(bit1) \cdot P(bit2)$, επομένως και οι δυάδες τους (άρα και τα σύμβολα Xn) θα είναι επίσης ισοπίθανα.

Η συνάρτηση που παράγει την ακολουθία συμβόλων Xn είναι η ακόλουθη:

```
function [symb] =bits_to_4PAM(bits)

j=1;
for i=1:2:length(bits)
    if(bits(i)==0 && bits(i+1)==0)
       symb(j)=+3;
    elseif(bits(i)==1 && bits(i+1)==0 )
       symb(j)=-3;
    elseif(bits(i)==1 && bits(i+1)==1 )
       symb(j)=-1;
    elseif(bits(i)==0 && bits(i+1)==1 )
       symb(j)=+1;
    else
        disp('ERROR')
        return
    end
 j=j+1;
end

end
```

(Σημειώνουμε ότι στο ερώτημα αυτό δεν παρατίθεται κώδικας σε άλλα σημεία διότι επαναχρησιμοποιείται σχεδόν εξ' ολοκλήρου ο κώδικας του ερωτήματος Α3. Για τον ολοκληρωμένο κώδικα της εργασίας ανατρέξτε στο τέλος.)

Στην συνέχεια, κατασκευάστηκε η αντίστοιχη κυματομορφή

$$X(t) = \sum_{n=0}^{N-1} X_n \, \phi(t - nT), \tag{6}$$

ακολουθώντας τη διαδικασία του ερωτήματος Α2. Η απεικόνισή της νέας κωδικοποίησης φαίνεται παρακάτω:

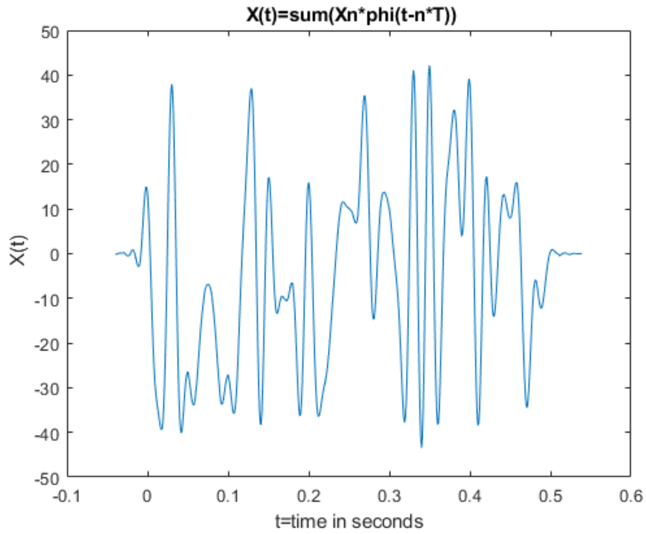
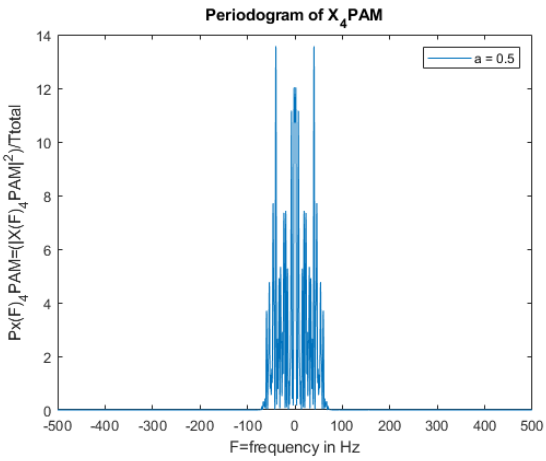
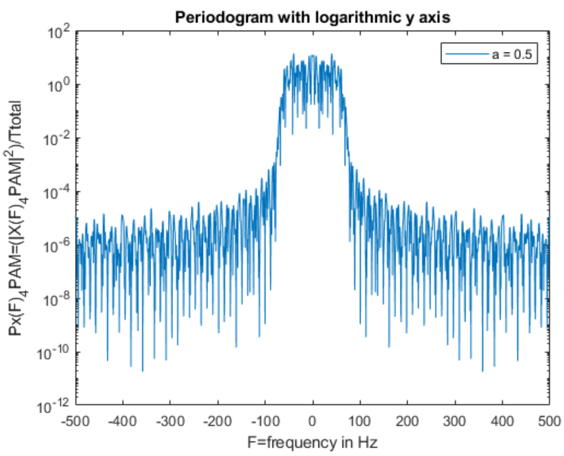


Figure 6: Waveform of $X(t)$

Ακόμη, υπολογίστηκε το περιοδόγραμμα της συνάρτησης $X(t)$ καθώς και σχεδιάστηκε σε κανονική αλλά και σε λογαριθμική κλίμακα κατακόρυφου άξονα.



(a) Graph of $P_X(F)$ using plot



(b) Graph of $P_X(F)$ using semilogy

Με την διαδικασία που αναλύεται στο ερώτημα A3, πραγματοποιήθηκε η εκτίμηση της φασματικής πυκνότητας ισχύος. Έπειτα, για να βρεθεί η αντίστοιχη θεωρητική πυκνότητα ισχύος ξαναχρησιμοποιήθηκε ο τύπος του ερωτήματος $A3$,με την διαφορά πως τώρα, η νέα διακύμανση $\sigma_X^2 = \frac{1^2+(-1)^2+3^2+(-3)^2}{4} = 5$.Τέλος, σχεδιάστηκαν και οι δύο σε ένα κοινό διάγραμμα με λογαριθμικό κατακόρυφο άξονα όπως φαίνεται παρακάτω.

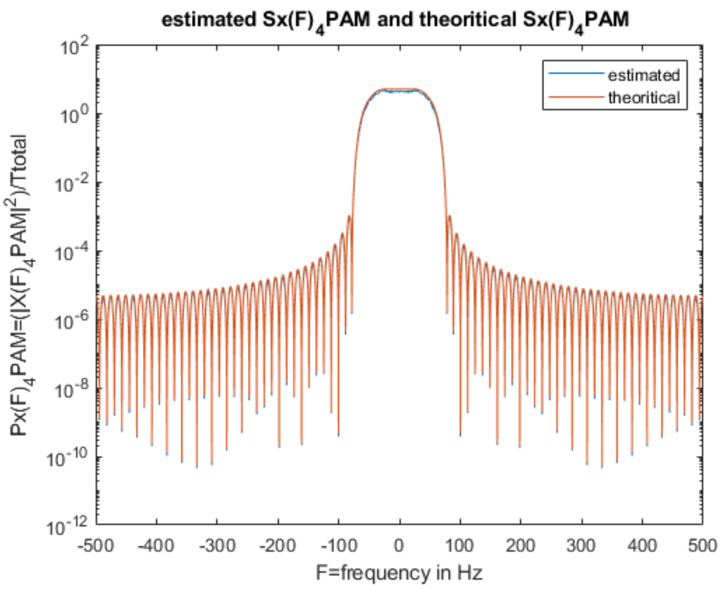
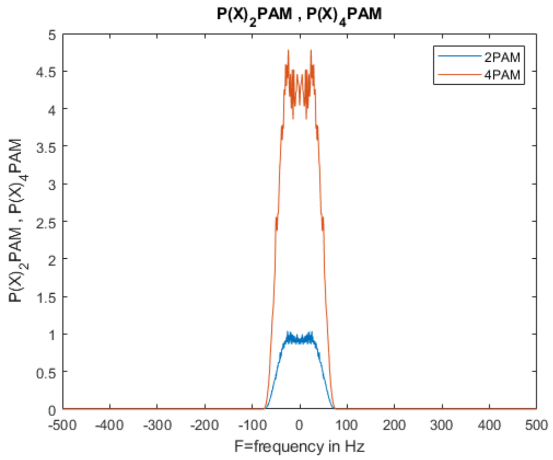


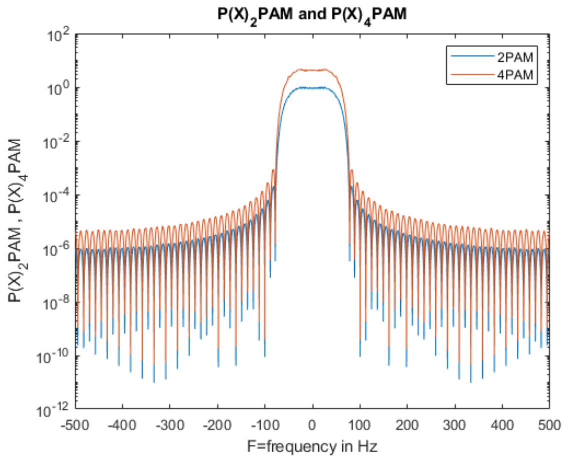
Figure 8: Theoretical and approximate estimation, in same semilogy, for 4PAM

Παρατηρείται λοιπόν για το πλήθος των περιοδογραμμάτων 500 που χρησιμοποιήθηκε για την εκτίμηση της φασματικής πυκνότητας ισχύος πως οι γραφικές είχαν την ίδια συμπεριφορά με την αντίστοιχη γραφική του ερωτήματος Α3($figure4$).

Για να γίνει σωστή σύγκριση του εύρους φάσματος και του μέγιστου πλάτους τιμών της φασματικής πυκνότητας ισχύος του $X(t)$ στις δύο διαφορετικές κωδικοποιήσεις 2-PAM και 4-PAM , ήταν αναγκαία η δημιουργία των γραφικών παραστάσεων τους σε κοινό διάγραμμα, τόσο σε κανονικό, όσο και σε λογαριθμικό κατακόρυφο άξονα. Τα σχήματα φαίνονται παρακάτω:



(a) shared Graph of $P_X(F)$ for 2 PAM and 4PAM using plot



(b) shared Graph of $P_X(F)$ for 2 PAM and 4PAM using semilogy

Στο πρώτο διάγραμμα με τους κανονικά αριθμημένους άξονες, παρατηρείται Η μεγάλη διαφορά του πλάτους των κυματομορφών, με την απεικόνιση 4-PAM να ξεπερνάει λίγο παραπάνω από τέσσερεις φορές το πλάτος της 2-PAM.Αντιθέτως, όπως είναι γνωστό από την θεωρία ,τα φάσματα των κυματομορφών θα είναι ίδια και θα κυμαίνονται πρακτικά σε τιμές περίπου ίσες με $BW = \frac{1+a}{2T} = 75Hz$.Παρόλα αυτά, όπως φαίνεται με μεγαλύτερη ευκρίνεια στο λογαριθμικά κατανεμημένο διάγραμμα οι θεωρητικές τιμές των φασμάτων εκτίνονται στο άπειρο μετά από κάποιες πάρα πολύ μικρές τιμές που θεωρούνται αμελητέες.

A.5

Στο κομμάτι αυτό της άσκηση, μεταβάλλονται οι παράμετροι T και $over$ ως εξής: $T' = 2T$ και $over' = 2over$, αφήνοντας πρακτικά απαράλλακτο το Ts όπου:

$$Ts' = \frac{T'}{over'} = \frac{2T}{2over} = \frac{T}{over} = Ts. \tag{7}$$

Έπειτα, επαναλαμβάνεται, η διαδικασία που περιγράφηκε στο ερώτημα A.3 ώστε να μπορέσει να γίνει σύγκριση των αποτελεσμάτων για τις διαφορετικές παραμέτρους:

Συγκεκριμένα η νέα $\Phi(t)$ που προκύπτει είναι:

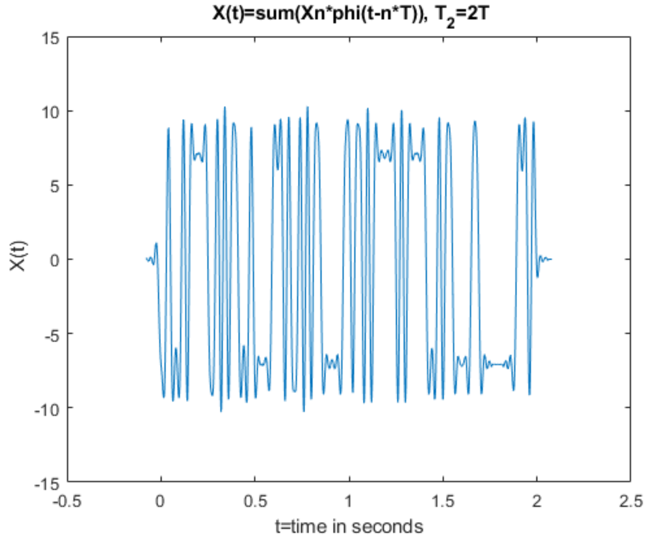
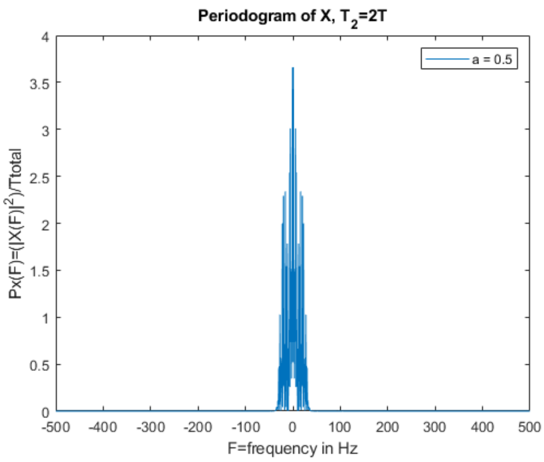
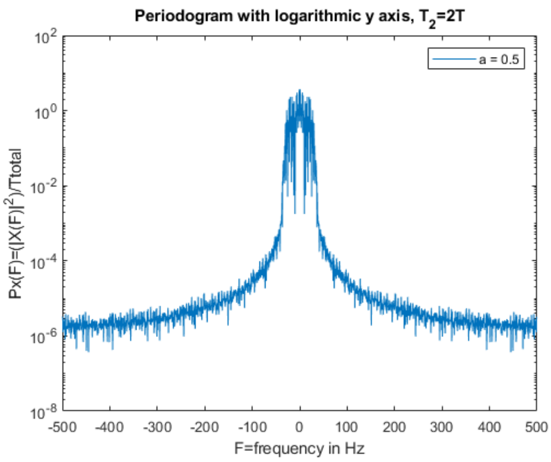


Figure 10: S_X, Theoretical and approximate estimation, in same semilogy

Ενώ περιοδόγραμμα $P_X(F)$ που προκύπτει φαίνεται στις παρακάτω γραφικές τόσο σε κανονικο y άξονα, όσο και σε λογαριθμικά αριθμημένο:



(a) Graph of $P_X(F)$ using plot



(b) Graph of $P_X(F)$ using semilogy

Σε κοινή απεικόνιση το δίαγραμμα που προκύπτει λοιπόν για θεωρητική και εκτιμόμενη φασματική πυκνότητα ισχύος διαμορφώνεται ως εξής:

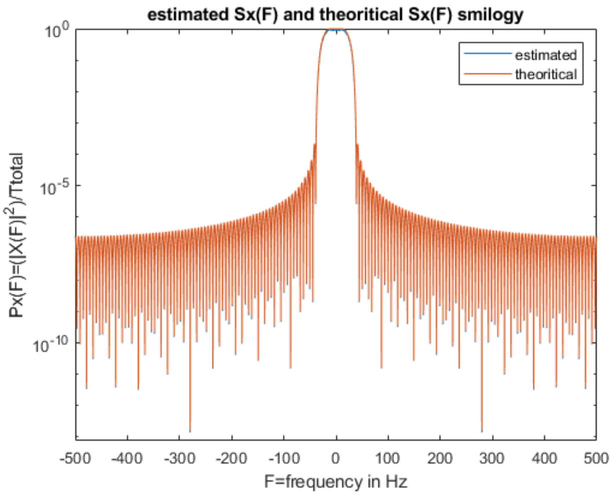
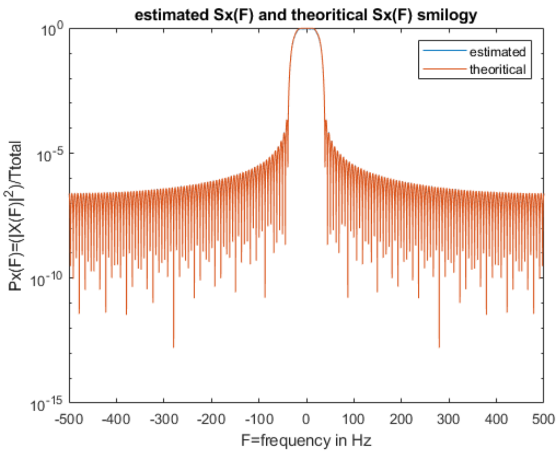
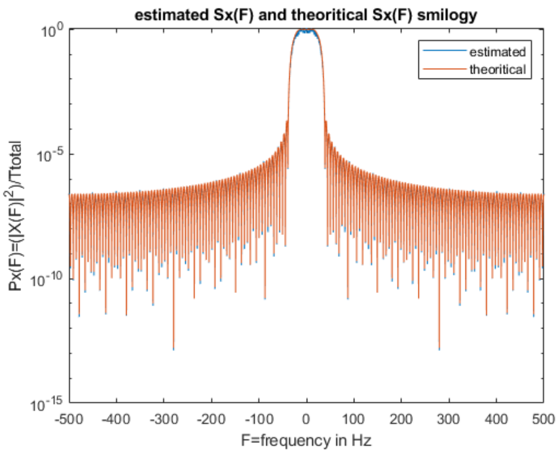


Figure 12: S_X, Theoretical and approximate estimation, in same semilogy

Τέλος χρησιμοποιώντας διαφορετικά K και N προκύπτουν τα παρακάτω διαγράμματα:

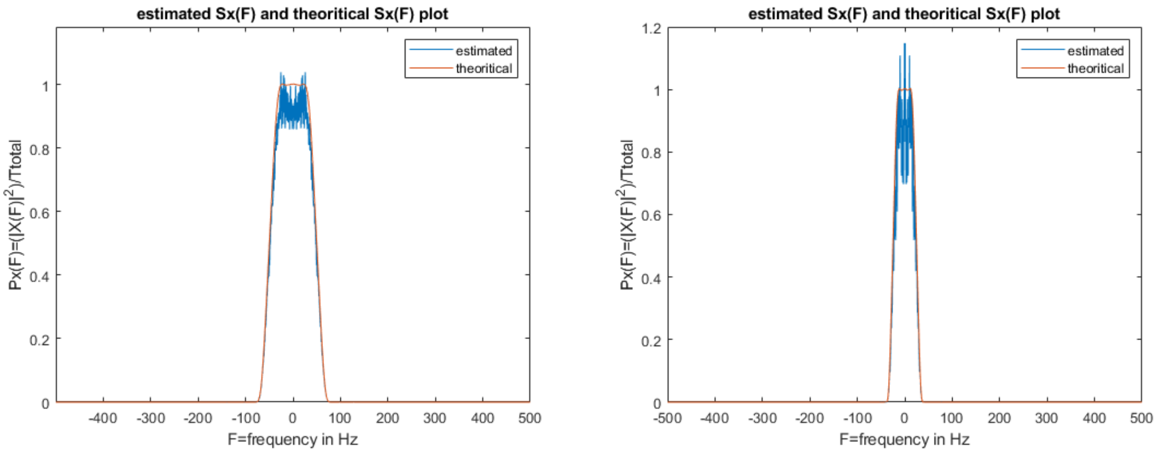


(a) N=200 and K=1000



(b) N=50 and K=50

Για την ευκολότερη σύγκριση του εύρους φάσματος της φασματικής πυκνότητας ισχύος των 2 κυματομορφών(για T=T και T=2T) παραθέτονται οι κατώθεν γραφικές για N=100 και K=500 οι οποίες παράγονται με την εντολή *plot*.



(a) S_X with T

(b) S_X with 2T

Παρατηρώντας λοιπόν τις γραφικές, γίνεται εύκολα αντιληπτό, αυτό που αναμέναμε κι από την θεωρία. Δηλαδή,για T'=2T βλέπουμε μια εμφανή μείωση του εύρους φάσματος, και συγκεκριμένα, τον υποδιπλασιασμό του, καθώς καθορίζεται από τον τύπο:

$$W = \frac{1+a}{2T} \tag{8}$$

Στην προκειμένη περίπτωση,
Για T=0.01 το W υπολογίζεται: $W = 75$.
Για T=0.02 το W υπολογίζεται: $W = 37.5$.

Από την άλλη το πλάτος την κυματομορφής παραμένει απαράλλακτο παρά την μεταβολή της περιόδου συμβόλων T.

Τα παραπάνω θεωρητικά αποτελέσματα είναι αυτά που απεικονίζονται και στις κυματομορφές του γραφήματος σε πολύ καλή προσέγγιση.

(Σημειώνουμε ότι στο ερώτημα αυτό δεν παρατίθεται κώδικας διότι επαναχρησιμοποίται σχεδόν εξ' ολοκλήρου ο κώδικας του ερωτήματος A3. Για τον ολοκληρωμένο κώδικα της εργασίας ανατρέξτε στο τέλος.Επίσης για τον ίδιο λόγο δεν σχολιάζονται όμοιες γραφικές παραστάσεις.)

A.6

Για να επιτευχθεί η ταχύτερη διάδοση δεδομένων σε ένα δεδομένο διαθέσιμο εύρος φάσματος, θα επιλεγόταν κωδικοποίηση 4-PAM,αυτό διότι αντιστοιχίζονται δύο $bits$ ανά σύμβολο και όχι ένα, επομένως, στέλνονται περισσότερα $bits$ πληροφορίας από την 2-PAM απεικόνιση στον ίδιο χρόνο.

Αν το διαθέσιμο εύρος φάσματος είναι πολύ ακριβό, τότε εφόσον είναι γνωστό πως το εύρος εξαρτάται από την περίοδο και συγκεκριμένα είναι αντιστρόφως ανάλογα ποσά ,λόγω του τύπου $BW = \frac{1+a}{2T}$, θα επιλεγόταν η περίοδος συμβόλου T'=2T, διότι θα έδινε το υποδιπλάσιο εύρος φάσματος από την T και επομένως, θα εξοικονομούταν στην μετάδοση το μισό φάσμα.

B

B.1

Εκφώνηση: Να υπολογίσετε αναλυτικά τις ποσότητες $E[Y(t)]$ και $E[Y(t+t)Y(t)]$

Αρχικά έχουμε:

$$E[Y(t)] = E[X(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t + \Theta)] = E[X(t)] \cdot E[\cos(2\pi f_0 t + \Theta)] \tag{9}$$

Λόγω ανεξαρτησίας X και Θ έτσι:

$$E[X(t)] = E\left[\sum_{n=0}^{N-1} X_n\, \phi(t - nT)\right] = \sum_{n=0}^{N-1} E\left[X_n\, \phi(t - nT)\right] = \sum_{n=0}^{N-1} E\left[X_n\right]\, \phi(t - nT) = 0 \tag{10}$$

Αφού τα X_n προκύπτουν με ομοιόρφη κατανομή, δηλ:

$$X_n = \frac{1 + (-1)}{2} = 0$$

Συνεπώς από (8) και (9):

$$E[Y(t)] = 0$$

Έπειτα θέλουμε να υπολογίσουμε την $R_{YY}(t)$:

$R_{YY}(t) = E\left[Y(t+\tau) \cdot Y(t)\right]$

$= E\left[X(t+\tau) \cdot \cos(2\pi f_0 (t+\tau) + \Theta) \cdot X(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t + \Theta)\right]$

$= E\left[X(t+\tau) \cdot X(t)\right] \cdot E\left[\cos(2\pi f_0 (t+\tau) + \Theta) \cdot \cos(2\pi f_0 t + \Theta)\right]$

$= R_{XX}(t+\tau, t) \cdot E\left[\frac{1}{2} \cdot \cos(2\pi f_0 (2t+\tau) + 2\Theta) + \frac{1}{2} \cdot \cos(2\pi f_0 \tau)\right]$

$= \frac{1}{2} \cdot R_{XX}(t+\tau, t) \cdot \cos(2\pi f_0 \tau)$

το οποίο προκύπτει καθώς το $\cos(2\pi f_0 \tau)$ είναι ντετερμινιστικός όρος δλδ: $E[c] = c = m_c$. ενώ για τον άλλο όρο συνημιτόνου, το Θ ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο $[0, 2\pi)$. συνεπώς:

$$f_\Theta(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & \text{αν } \theta \in [0, 2\pi) \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Άρα:

$$E[\cos(2\pi f_0(2t+\tau) + \Theta] = E[g[\Theta]] = \int_0^{2\pi} f_\Theta(\theta) \cdot \cos(2\pi f_0(2t+\tau) + \Theta)\, d\theta$$

$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(2\pi f_0(2t+\tau) + \Theta)\, d\theta = 0$, ολοκλήρωση συνημιτόνου σε πλήρη περίοδο.

Το R_{XX} από την άλλη υπολογίζεται :
$R_{XX}(t+\tau, t) = \left[X(t+\tau) \cdot X(t)\right]$
$= E\left[\sum_{n=0}^{N-1} X_n\, \phi(t+\tau-nT) \cdot \sum_{n=0}^{N-1} X_n\, \phi(t-nT)\right]$
$= E\left[\sum_{n=0}^{N-1} X_n \cdot \phi(t+\tau-nT) \cdot X_n \cdot \phi(t-nT)\right]$
$= \sum_{n=0}^{N-1} E\left[X_n^2 \cdot \phi(t+\tau-nT) \cdot \phi(t-nT)\right]$
$= \sum_{n=0}^{N-1} \sigma_X^2 \cdot \phi(t+\tau-nT) \cdot \phi(t-nT)$

το παραπάνω ισχύει καθώς:
$var_X = \sigma_X^2 = E[(X - E[X])^2] = E[X^2]$, ενώ το X_n είναι ο μόνος μη ντετερμινιστικός όρος.
Συνεπώς η πλήρης περιγροφή της $R_{YY}(t)$ τώρα γίνεται:

$$R_{YY}(t+\tau, t) = \frac{1}{2}\cos(2\pi f_0 \tau) \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \sigma_X^2 \cdot \phi(t+\tau-nT) \cdot \phi(t-nT) \qquad (11)$$

B.2

Εκφώνηση: Να χαρακτηρίστεί η $Y(t)$ ως προς τη (κυκλο)-στασιμότητα, υπό την ευρεία έννοια.

Από όσα υπολογίστηκαν παραπάνω στο B.1 έχει αποδειχτεί ότι $E[Y(t)] = m_Y = 0$ ωστόσο αυτό είναι το ένα μόνο απαιτούμενο κριτήριο για να υπάρχει στασιμότητα υπό την ευρεία έννοια.Επιπλέον θα πρέπει και η R_{YY} να αποτελεί συνάρτηση της διαφοράς τ. Ωστόσο οπως αποφαίνεται από την εξίσωση (10), αυτό δεν ισχύει. Αυτό σημαίνει, καταληκτικά, ότι η $Y(t)$ δέν είναι στατική υπο ευρεία έννοια.

Οπότε μένει να ελέγξουμε αν υπάρχει κυκλοστασιμότητα για την Υ.

Πρώτον $E[Y[t]] = m_Y = 0$, Για κάθε πραγματικό t, το οποίο μας οδηγεί στο συμπέρασμα: $E[Y(t+T)] = 0$, για οποιοδήποτε T. Άρα η μέση τιμή της Υ είναι περιοδική.

και δεύτερον για την R_{YY} έχουμε:
$R_{YY}(t+\tau+T, t+T) =$
$= \frac{1}{2}\cos(2\pi f_0 \tau) \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \sigma_X^2 \cdot \phi(t+\tau+T-nT) \cdot \phi(t+T-nT)$
$= \frac{1}{2}\cos(2\pi f_0 \tau) \cdot \sigma_X^2 \sum_{n=0}^{N-1} \phi(t+\tau+(1-n)T) \cdot \phi(t+(1-n)T)$
$= \frac{1}{2}\cos(2\pi f_0 \tau) \cdot \sigma_X^2 \sum_{n=0}^{N-1} \phi(t+\tau+n'T) \cdot \phi(t+n'T)$
$= R_{YY}(t+\tau, t)$, με $*n' = 1-n$.
Άρα η $Y(t)$ είναι κυκλοστάσιμη υπο ευρεία έννοια.

B.3

Εκφώνηση: Να υπολογιστεί η φασματική πυκνότητα ισχύος της $Y(t)$,$S_Y(F)$, συναρτήσει της $S_X(F)$ και της συχνότητας διαμόρφωσης f_0.

Στο προηγούμενο ερώτημα αποδείχτηκε ότι η $Y(\tau)$ είναι κυκλοστάσιμη υπο ευρεία έννοια. Το γεγονός αυτό υποδεικνύει ότι:

$$S_Y(F) = \bar{R_Y}(F) \tag{12}$$

με $\bar{R_Y}(\tau) \xrightarrow{\mathscr{F}} \bar{R_Y}(F)$ έτσι:
$\bar{R_Y}(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} R_{YY}(t+\tau, t)\,dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} R_{XX}(t+\tau, t) \cdot \frac{1}{2}\cos(2\pi f_0 \tau)\,dt$
$= \frac{1}{2T}\cos(2\pi f_0 \tau) \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} R_{XX}(t+\tau, t)\,dt$
$= \frac{1}{2}\cos(2\pi f_0 \tau) \cdot \bar{R_X}(\tau)$

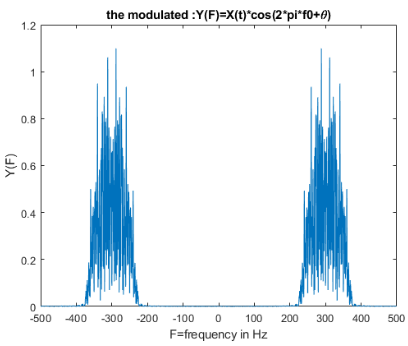
Συνεπώς αντικαθιστώντας στην (11) παίρνουμε:

$S_Y(F) = \frac{1}{2}F\{\cos(2\pi f_0 \tau) \cdot R_{\bar{X}}(\tau)\} = \frac{1}{4}(S_X(F+f_0) + S_X(F-f_0))$

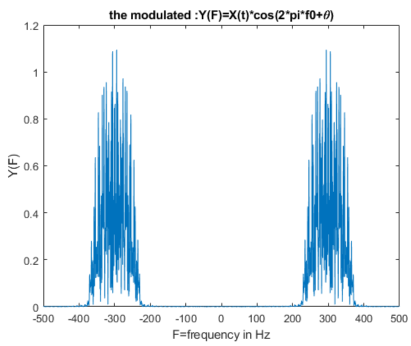
B.4

Στο ερώτημα αυτό, έγινε πειραματική επαλήθευση των θεωρητικών αποτελεσμάτων της άσκησης B.Αρχικά, επιλέχθηκε συχνότητα διαμόρφωσης $f_0 = 300Hz$, δημιουργήθηκε τυχαία μεταβλητή Θ η οποία ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο δίαστημα [0,2π) και όπως έχει αναλυθεί επανειλημμένα η κυματομορφή $X(t)$ η οποία χρησιμοποιεί σύμβολα Xn με κωδικοποίηση 2-PAM.

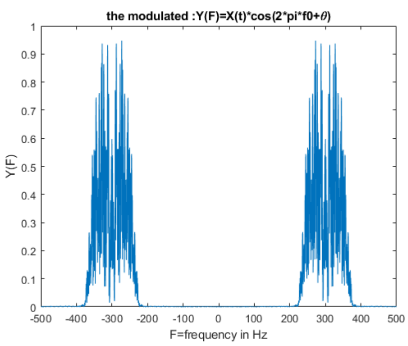
Μέσα σε έναν βρόχο , διαμορφώθηκαν τέσσερεις διαφορετικές κυματομορφές $Y(t) = X(t)*cos(2\pi f_0+\Theta)$ για διαφορετικά $X(t)$ και Θ αφού βρέθηκαν οι μετασχηματισμοί $fourier, Y(F)$ για κάθε μια, σχεδιάστηκαν στις παρακάτω γραφικές.



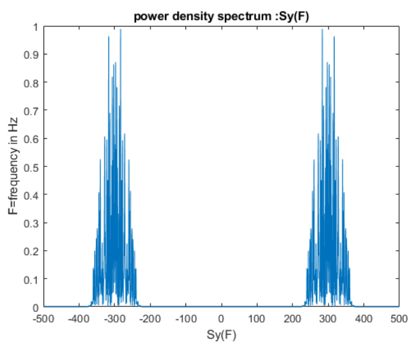
(a) Random realization of X(t) and Y(t)



(b) Random realization of X(t) and Y(t)



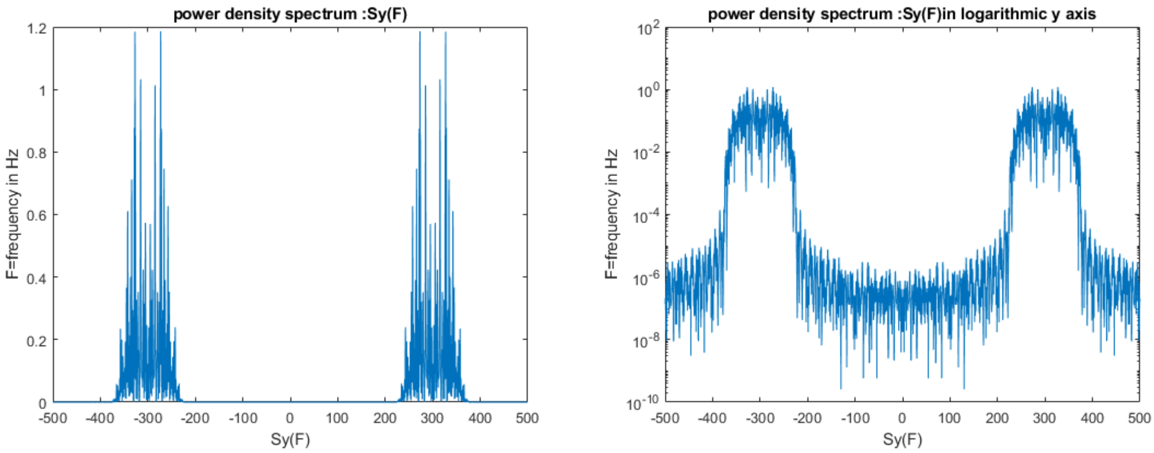
(c) Random realization of X(t) and Y(t)



(d) Random realization of X(t) and Y(t)

Όπως ήταν αναμενόμενο από την θεωρία, οι παραπάνω κυματομορφές $Y(F)$, αποτελούνται η κάθε μια από δύο αντίγραφα του σήματος $X(F)$, μετατοπισμένα κατά $\pm f_0$.

Έπειτα, μέσω του γνωστού τρόπου που έχει περιγραφθεί και νωρίτερα, εκτιμήθηκε μέσω περιοδογραμμάτων η φασματική πυκνότητα ενός διαμορφωμένου σήματος $Y(t)$, για ένα συγκεκριμένο σήμα $X(t)$.Εδώ είναι αναγκαίο να σημειωθεί πως οι διαφορετικές υλοποιήσεις των περιοδογραμμάτων της $Y(t)$, βασίστηκαν όχι στην εναλλαγή του $X(t)$,αλλά μόνο στην εναλλαγή της τυχαίας μεταβλητής Θ σε κάθε βρόχο που εκτελούταν. Η κυματομορφή της $S_Y(F)$ εκτυπώνεται παρακάτω σε κανονικό και λογαριθμικό κατακόρυφο άξονα και παρατηρείται πως μοιάζει πολύ σε μορφή με την $Y(F)$. Επίσης το βασικό συμπέρασμα που αντλούμε είναι ότι το πλάτος της γραφικής $S_Y(F)$ φαίνεται να αρκετές φορές μικρότερο απο αυτό της $S_X(F)$, συγκεκριμένα σχεδόν 4 φορές. Αυτό βέβαια, απλώς έρχεται να επιβεβαιώσει και στην πράξη,κάτι που είδη γνωρίζαμε, καθώς η σχέση αυτή εχει αποδειχτεί στο ερώτημα Β3.



(a) S_Y with plot (b) S_Y with semilogy ο κώδικας για τα παραπάνω είναι ο εξής:

```

%==================================================================================
%B4
%initializing the modulation frequency f0 between 1/2T and (FS/2-1/2T)=>50<f0<450 and
% K number of waveforms
f0=300;
K = 4;

%creating srrc pulse
[phi,t]=srrc_pulse(T,over,A,a);
t1=(0:Ts:N*T-Ts);
variance=1;
%for every loop we make a different modulated waveform that comes from 2PAM
%its different , due to the change of theta and the change of X(t) sequence
for k=0:K-1
    b=(sign(randn(N,1))+1)/2;
    Xn=bits_to_2PAM(b);
    X_delta=1/Ts*upsample(Xn,over);
    X_t=conv(phi,X_delta)*Ts;
    tconv=[t(1)+t1(1):Ts:t(end)+t1(end)];
    %theta is a random variable evenly distributed
    Theta=2*pi*rand;
    %modulation
    Y_t=X_t.*cos(2*pi*f0*tconv+Theta);
    %making fast fourier transformation
    Y_F=fftshift(fft(Y_t,Nf)*Ts);
    absY=abs(Y_F);
    %making the graphs ,we put absY , because Y has a complex part too, and
    %we just want to see the meter
    figure()
    plot(F,absY)
    xlabel('F=frequency in Hz')
    title('the modulated :Y(F)=X(t)*cos(2*pi*f0+\theta)')
    ylabel('Y(F)')
end

%initializing K number of periodograms , total duration time and the sums
%we use to create the Py(F) and Px(F)
K=100;
Ttotal=length(tconv)*Ts;
sumX=0;
sumY=0;
```

```
%every loop we make a different implementation of a  periodogramm for the same Y(t)
%its different , due to the change of theta
for k=0: K-1
   Theta=2*pi*rand;
   Y_t=X_t.*cos(2*pi*f0*tconv+Theta);
   Y_F=fftshift(fft(Y_t,Nf)*Ts);
   absY=abs(Y_F);
   P_y=absY.^2/Ttotal;
   sumY=sumY+P_y;
end
%divide the summary by K so we can find the power density spectrum
S_y=sumY/K;

%creation of the graph of Sy(F) for plot an dplot with logarithmic y axis
disp('press an key to see the power density spectrum :Sy(F)in logarithmic y axis ')
pause
semilogy(F,S_y)
title('power density spectrum :Sy(F)in logarithmic y axis')
xlabel('Sy(F)')
ylabel('F=frequency in Hz')
disp('press any key to see the power density spectrum :Sy(F)')
pause
figure();
plot(F,S_y)
title('power density spectrum :Sy(F)')
xlabel('Sy(F)')
ylabel('F=frequency in Hz')
```

Εφόσον υπάρχει οποιαδήποτε ανάγκη για έλεγχο του κώδικα σε $Matlab$ ο οποίος δεν έχει παρατεθεί εδώ, Μπορεί να ελεγχθεί το παραδοτέο αρχείο $Ex2Thl.m$ που περιέχει το σύνολο των διαδικασιών ή το συμπληρωματικό $Ex2Matl.pdf$ που περιέχει τον κώδικα στην μορφή pdf.