ΤΜΗΜΑ
ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ
ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ &
ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

Ρομποτική

Εργασία Μαθήματος

30 Ιουνίου 2025

Ιωάννης Ορθοδόξου
ΑΕΜ: 10822
iorthodo@ece.auth.gr

Πίνακας Περιεχομένων

1 Εισαγωγή

Στην παρούσα εργασία, στο πρώτο τμήμα σχεδιάσαμε την τροχιά θέσης και προσανατολισμού ενός πόμολου με μηδενική αρχική ταχύτητα και επιτάχυνση ώστε να επιτυγχάνεται το άνοιγμα της πόρτας σε 5 δευτερόλεπτα. Στην συνέχεια στο δεύτερο τμήμα της εργασίας σχεδιάσαμε κατάλληλες εντολές ταχύτητας για τις αρθρώσεις του ρομπότ UR10 έτσι ώστε το ρομπότ να κινήσει το πόμολο με τον τρόπο που σχεδιάσαμε στο πρώτο τμήμα και να καταφέρει να ανοίξει την πόρτα σε 5 δευτερόλεπτα.

2 Τμημα A

Αρχικά, για να μπορέσουμε να σχεδιάσουμε την τροχιά θέσης και προσανατολισμού του πόμολου της πόρτας, πρέπει να χωρίσουμε σε 3 διακριτές κινήσεις το άνοιγμα της πόρτας. Πρώτα πρέπει να περιστραφεί το πόμολο γύρω από τον x_h άξονα του κατά $-45°$, έπειτα η πόρτα θα πρέπει να περιστραφεί γύρω από τον z_d άξονα της $-30°$ και κατ΄ επέκταση να κινήσει το πόμολο και τέλος το πόμολο πρέπει να περιστραφεί έτσι ώστε να φτάσει στην αρχική του θέση, σε σχέση με την πόρτα. Επομένως θα χωρίσουμε τα 5 δευτερόλεπτα σε 0-1.5 για την πρώτη κίνηση, 1.5-3.5 για την δεύτερη κίνηση και 3.5-5 για την τελευταία κίνηση. Για το σχεδιασμό της τροχιάς θα επιλέξουμε 5^{ου} βαθμού πολυώνυμο αφού με αυτό μπορούμε να πετύχουμε μηδενική ταχύτητα και επιτάχυνση. Το πολυώνυμο 5^{ου} βαθμού είναι

$$q(t) = k_0 + k_1 t + k_2 t^2 + k_3 t^3 + k_4 t^4 + k_5 t^5$$

με το q να είναι η θέση του πόμολου. Για τους συντελεστές $k_0, k_1, k_2, k_3, k_4, k_5$, θεωρώντας $t_0 = 0$, έχουμε

$$\begin{aligned}
k_0 &= q_0, \quad k_1 = \dot{q}_0, \quad k_2 = \frac{\ddot{q}_0}{2} \\
k_3 &= \frac{10}{t_f^3}(q_f - q_0) - \frac{(4\dot{q}_f + 6\dot{q}_0)}{t_f^2} - \frac{(3\ddot{q}_0 - \ddot{q}_f)}{2t_f} \\
k_4 &= -\frac{15}{t_f^4}(q_f - q_0) + \frac{(7\dot{q}_f + 8\dot{q}_0)}{t_f^3} + \frac{(3\ddot{q}_0 - 2\ddot{q}_f)}{2t_f^2} \\
k_5 &= \frac{6}{t_f^5}(q_f - q_0) - \frac{3(\dot{q}_f + \dot{q}_0)}{t_f^4} - \frac{(\ddot{q}_0 - \ddot{q}_f)}{2t_f^3}
\end{aligned}$$

και αφού θέλουμε μηδενική θέση και επιτάχυνση οι συντελεστές απλοποιούνται σε

$$\begin{gathered}
k_0 = q_0, \quad k_1 = 0, \quad k_2 = 0 \\
k_3 = \frac{10}{t_f^3}(q_f - q_0), \quad k_4 = -\frac{15}{t_f^4}(q_f - q_0), \quad k_5 = \frac{6}{t_f^5}(q_f - q_0)
\end{gathered} \tag{1}$$

με το q_0 να είναι η αρχική θέση, q_f να είναι η τελική θέση, και t_f ο τελικός χρόνος. Επομένως μπορούμε να γράψουμε το πολυώνυμο σε πιο απλή μορφή

$$q(t) = k_0 + k_3 t^3 + k_4 t^4 + k_5 t^5 \tag{2}$$

Για την πρώτη κίνηση θα έχουμε $q_0 = 0, q_f = -\frac{\pi}{4}, t_0 = 0, t_f = 1.5$

$$\begin{aligned}
k_0 = 0, \quad k_3 &= \frac{10}{1.5^3}(-\frac{\pi}{4} - 0) = -\frac{20\pi}{27}, \\
k_4 = -\frac{15}{1.5^4}(-\frac{\pi}{4} - 0) = \frac{20\pi}{27}, \quad k_5 &= \frac{6}{1.5^5}(-\frac{\pi}{4} - 0) = -\frac{16\pi}{81}
\end{aligned}$$

Το πολυώνυμο για την πρώτη κίνηση είναι

$$q_{first}(t) = -\frac{20\pi}{27}t^3 + \frac{20\pi}{27}t^4 - \frac{16\pi}{81}t^5$$

το οποίο $\forall t \in [0, 1.5]$ μας δίνει την γωνιακή θέση του πόμολου σε ακτίνια (rad). Με το παρόμοιο σκεπτικό μπορούμε να υπολογίσουμε και το πολυώνυμο της τροχιά της τρίτης κίνησης αφού είναι η ίδια κίνηση αντίστροφα. Άρα αντιστρέφουμε τα πρόσημα των συντελεστών, αυτό μπορούμε να το δουμε αν αντικαταστήσουμε στην (1) όπου $t_f = (t_f - t_0)$ και στην (2) όπου $t = (t - t_0)$ με $t_0 = 3.5$, $t_f = 5$, $q_0 = -\frac{\pi}{4}$ και $q_f = 0$. Καταλήγουμε στην

$$q_{third}(t) = \frac{20\pi}{27}(t - t_0)^3 - \frac{20\pi}{27}(t - t_0)^4 + \frac{16\pi}{81}(t - t_0)^5 \tag{3}$$

$\forall t \in [3.5, 5]$ η οποία μας δίνει την γωνιακή θέση του πόμολου. Αφού η πρώτη κίνηση είναι μία περιστροφή του πόμολου γύρω από τον x άξονα του τότε μπορούμε να την εκφράσουμε ως

$$T_{first}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos q_{first}(t) & -\sin q_{first}(t) & 0 \\ 0 & \sin q_{first}(t) & \cos q_{first}(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Για να πάρουμε την κίνηση στο αδρανειακό πλαίσιο πρέπει να πολλαπλασιάσουμε τον ομογενή μετασχηματισμό του πόμολου με τον παραπάνω πίνακα. Οπότε έχουμε $g_{0H\_first}(t) = g_{0D} \cdot g_{DH} \cdot T_{first}(t)$ με το $g_{0D} \cdot g_{DH}$ να μας δίνει τον ομογενή μετασχηματισμό του πόμολου, με

$$g_{0D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad g_{DH} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0.9 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow g_{0H\_first}(t) = \begin{pmatrix} 0 & \cos q_{first}(t) & -\sin q_{first}(t) & 0.9 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & \sin q_{first}(t) & \cos q_{first}(t) & 0.7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Για την δεύτερη κίνηση, πρέπει να περιστραφεί η πόρτα γύρω από τον z άξονα της. Με παρόμοιο τρόπο όπως και πριν παίρνουμε πολυώνυμο $5^{ου}$ βαθμού και υπολογίζουμε τους συντελεστές με παρόμοιες αντικαταστάσεις που κάναμε για την τρίτη κίνηση $t = (t - t_0), t_f = (t_f - t_0), q_0 = 0, q_f = -\frac{\pi}{6}, t_0 = 1.5, t_f = 3.5$

$$k_0 = 0, \quad k_3 = \frac{10}{2^3}(-\frac{\pi}{6} - 0) = -\frac{5\pi}{24},$$
$$k_4 = -\frac{15}{2^4}(-\frac{\pi}{6} - 0) = \frac{5\pi}{32}, \quad k_5 = \frac{6}{2^5}(-\frac{\pi}{6} - 0) = -\frac{\pi}{32}$$

Το πολυώνυμο για την δεύτερη κίνηση είναι

$$q_{sec}(t) = -\frac{5\pi}{24}(t - t_0)^3 + \frac{5\pi}{32}(t - t_0)^4 - \frac{\pi}{32}(t - t_0)^5$$

$\forall t \in [1.5, 3.5]$ η οποία μας δίνει την γωνιακή θέση της πόρτας. Αφού η δεύτερη κίνηση είναι μία περιστροφή της πόρτας γύρω από τον z άξονα της τότε μπορούμε να την εκφράσουμε ως

$$T_{sec}(t) = \begin{pmatrix} \cos q_{sec}(t) & -\sin q_{sec}(t) & 0 & 0 \\ \sin q_{sec}(t) & \cos q_{sec}(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Για να υπολογίσουμε την δεύτερη κίνηση στο αδρανειακό πλαίσιο, πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε τον ομογενή μετασχηματισμό του πόμολου ως προς το πλαίσιο της πόρτας, στο τέλος της πρώτης κίνησης, αφού οι κινήσεις πρέπει να είναι συνεχείς.

$$g_{DH\_first}(1.5) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0.9 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0.7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Επομένως τώρα μπορούμε να υπολογίσουμε την κίνηση του πόμολου στο αδρανειακό πλαίσιο ως

$g_{0H\_sec}(t) = g_{0D} \cdot T_{sec}(t) \cdot g_{DH\_first}(1.5)$

$$\Rightarrow g_{0H\_sec}(t) = \begin{pmatrix} \sin q_{sec}(t) & \frac{\sqrt{2}}{2}\cos q_{sec}(t) & \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos q_{sec}(t) & 0.9 \cdot \cos q_{sec}(t) \\ -\cos q_{sec}(t) & \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin q_{sec}(t) & \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin q_{sec}(t) & 0.9 \cdot \sin q_{sec}(t) + 2 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0.7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Τέλος για την τρίτη κίνηση, έχουμε ήδη υπολογίσει τους συντελεστές της τροχιάς επομένως μένει να βρούμε το ομογενή μετασχηματισμό ως προ το αδρανειακό πλαίσιο. Και η τρίτη κίνηση είναι περιστροφή του πόμολου γύρω από τον x άξονα του επομένως

$$T_{third}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos q_{third}(t) & -\sin q_{third}(t) & 0 \\ 0 & \sin q_{third}(t) & \cos q_{third}(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Θα πρέπει να υπολογίσουμε το $g_{0H\_sec}(3.5)$ αφού είναι ο μετασχηματισμός στο τέλος της δεύτερης κίνησης και θέλουμε να είναι συνεχείς οι κινήσεις.

$$g_{0H\_sec}(3.5) = \begin{pmatrix} -0.5 & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{9\sqrt{3}}{20} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{31}{20} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0.7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Επομένως τώρα μπορούμε να υπολογίσουμε την κίνηση στο αδρανειακό πλαίσιο ως $g_{0H\_third}(t) = g_{0H\_sec}(3.5) \cdot T_{third}(t)$

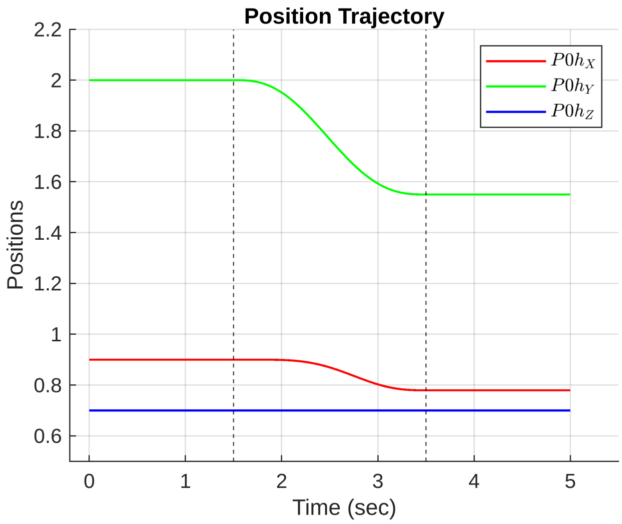
$$\Rightarrow g_{0H\_third}(t) =$$

$$\begin{pmatrix} -0.5 & \frac{\sqrt{6}}{4}(\cos q_{third}(t) + \sin q_{third}(t)) & \frac{\sqrt{6}}{4}(\cos q_{third}(t) - \sin q_{third}(t)) & \frac{9\sqrt{3}}{20} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{4}(\cos q_{third}(t) + \sin q_{third}(t)) & \frac{\sqrt{2}}{4}(\sin q_{third}(t) - \cos q_{third}(t)) & \frac{31}{20} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin q_{third}(t) - \cos q_{third}(t)) & \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin q_{third}(t) + \cos q_{third}(t)) & 0.7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

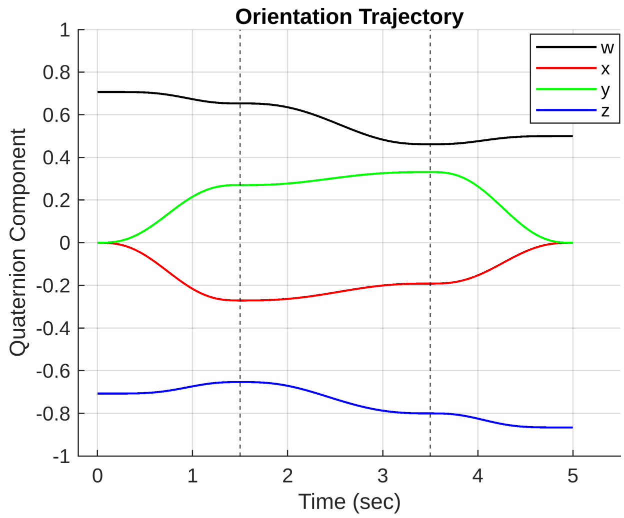
Μετά και απο τες 3 κίνησης καταλήγουμε στον τελικό ομογενη μετασχηματισμό του πόμολου ως προς το αδρανειακό πλαίσιο:

$$\Rightarrow g_{0H\_third}(5) = \begin{pmatrix} -0.5 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{9\sqrt{3}}{20} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -0.5 & 0 & \frac{31}{20} \\ 0 & 0 & 1 & 0.7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Στα παρακάτω διαγράμματα φαίνονται οι τροχιά θέσης και προσανατολισμού του πόμολου ως προς το αδρανειακό πλαίσιο.

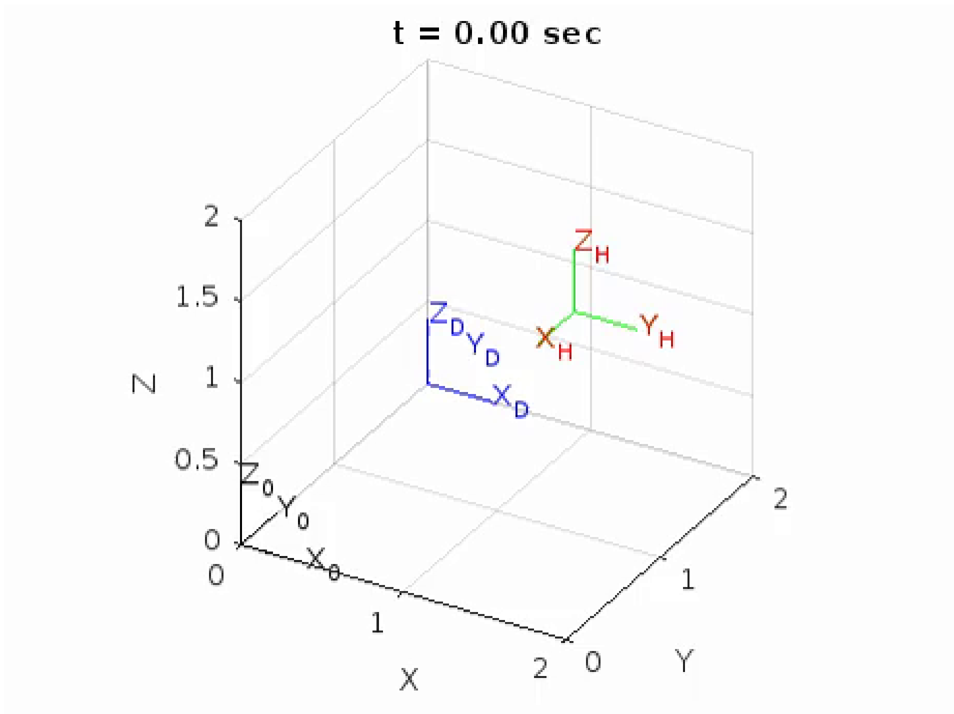


(α΄) Τροχιά Θέσης



(β΄) Τροχιά προσανατολισμού με Unit Quaternions

Παρατηρούμε πως η τροχιά του πόμολου είναι συνεχείς χωρίς καμία ασυνέχεια και με μηδενική αρχική και τελική ταχύτητα και επιτάχυνση. Παρακάτω βλέπουμε πως μετακινούνται τα πλαίσια στον τρισδιάστατο χώρο. (Για να μπορεί να παίξει το gif χρησιμοποιήστε Adobe Acrobat)



Σχήμα 2: Η πορεία του πόμολου

3 Τμήμα Β

Στο δεύτερο μέρος της εργασίας θα υλοποιήσουμε κατάλληλες εντολές ταχύτητας για της αρθρώσεις του ρομπότ UR10 έτσι ώστε να καταφέρει να κινήσει το πόμολο για να ανοίξει η πόρτα. Για να το πετύχουμε αυτό, αρχικά θα πρέπει να υπολογίσουμε το γραμμικό μετασχηματισμό πόμολου με το άκρο του βραχίονα g_{HE}.

$$g_{HE} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0.1 \\ 0 & 1 & 0 & 0.1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Στην συνέχεια για κίνηση της τροχιάς του πόμολου μπορούμε να πάρουμε το γραμμικό μετασχηματισμό του άκρου του ρομπότ από το πλαίσιο βάσης έτσι ώστε να βρούμε που πρέπει να είναι το άκρο κατα την διάρκεια της κίνησης.

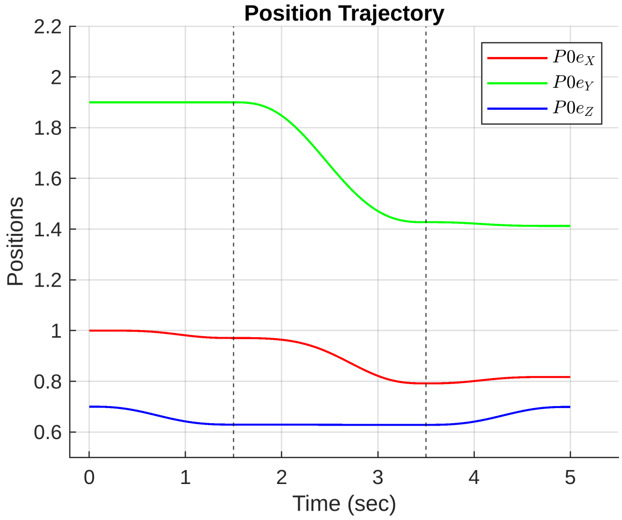
$$g_{0E\_first}(t) = \begin{pmatrix} -\sin q_{first}(t) & \cos q_{first}(t) & 0 & \frac{\cos q_{first}(t)}{10} + \frac{9}{10} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{19}{10} \\ \cos q_{first}(t) & \sin q_{first}(t) & 0 & \frac{\sin q_{first}(t)}{10} + \frac{7}{10} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$g_{0E\_sec}(t) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}\cos q_{sec}(t) & \frac{\sqrt{2}}{2}\cos q_{sec}(t) & -sinq_{sec}(t) & \frac{18+\sqrt{2}}{20}\cos q_{sec}(t) + \frac{\sin q_{sec}(t)}{10} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\sin q_{sec}(t) & \frac{\sqrt{2}}{2}\sin q_{sec}(t) & cosq_{sec}(t) & \frac{18+\sqrt{2}}{20}\sin q_{sec}(t) + \cos q_{sec}(t) - \frac{1}{10} + 2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{14-\sqrt{2}}{20} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

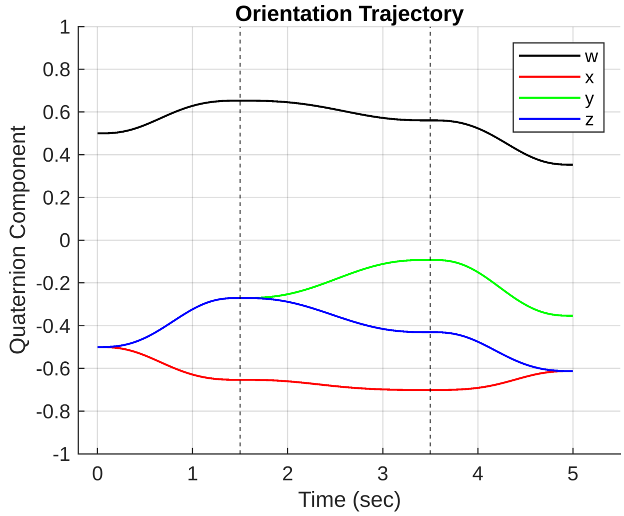
$$g_{0E\_third}(t) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{4}\alpha & \frac{\sqrt{6}}{4}\beta & 0.5 & \frac{\sqrt{6}}{40}\beta + \frac{-1+9\sqrt{3}}{20} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\gamma & -\frac{\sqrt{2}}{2}\beta & -\frac{3}{2} & \frac{31-\sqrt{3}}{20} - \frac{\sqrt{2}}{20}\beta \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\beta & \frac{\sqrt{2}}{2}\gamma & 0 & \frac{\sqrt{2}}{20}\gamma + \frac{7}{10} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

με $\alpha = \cos q_{third}(t) - \sin q_{third}(t)$,$\beta = \cos q_{third}(t) + \sin q_{third}(t)$,$\gamma = \sin q_{third}(t) - \cos q_{third}(t)$
Έπειτα μπορούμε να υπολογίσουμε την συστροφή του άκρου από τον τύπο $\hat{V}_e = g_{0E}^{-1} \cdot \dot{g}_{0E}$ και να υπολογίσουμε την Ιακωβιανή του άκρου J_e και έτσι τελικά να μπορέσουμε να υπολογισουμε τις ταχύτητες αρθρώσεων από τον τύπο $\dot{q} = J_e^{-1} \cdot \hat{V}_e$.

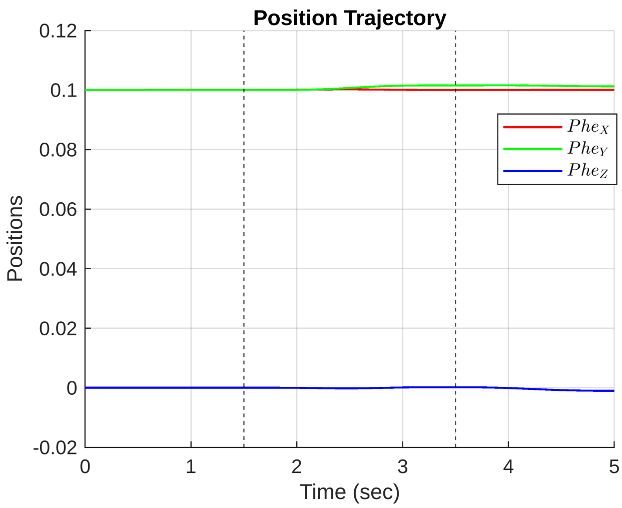
Στα παρακάτω γραφήματα μπορουμε να δούμε την τροχιά θέσης και προσανατολισμού του άκρου του ρομπότ ως προς το αδρανειακό πλαίσιο αλλά και την σχετική θέση και προσανατολισμού του άκρου το βραχίονα ως προς το πόμολο της πόρτας.



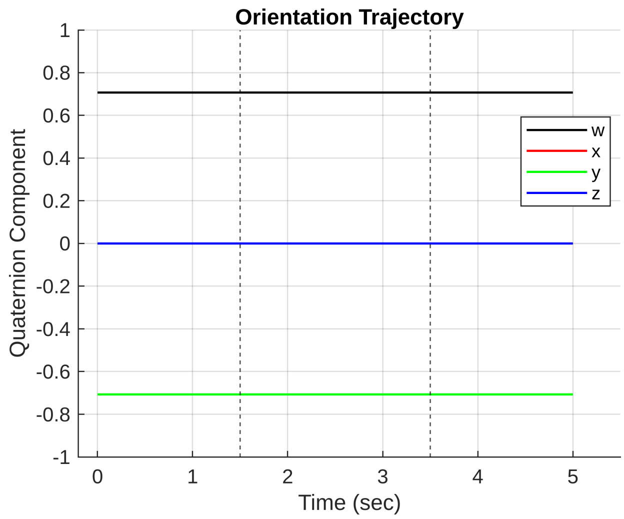
(α′) Τροχιά Θέσης



(β′) Τροχιά προσανατολισμού με Unit Quaternions

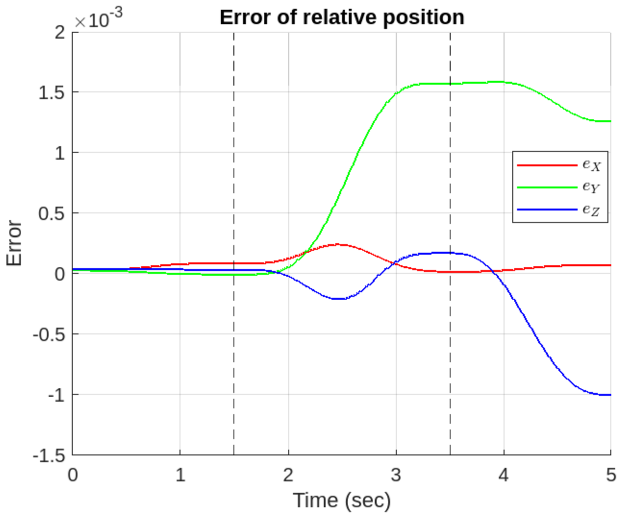


(γ′) Σχετική Τροχιά Θέσης

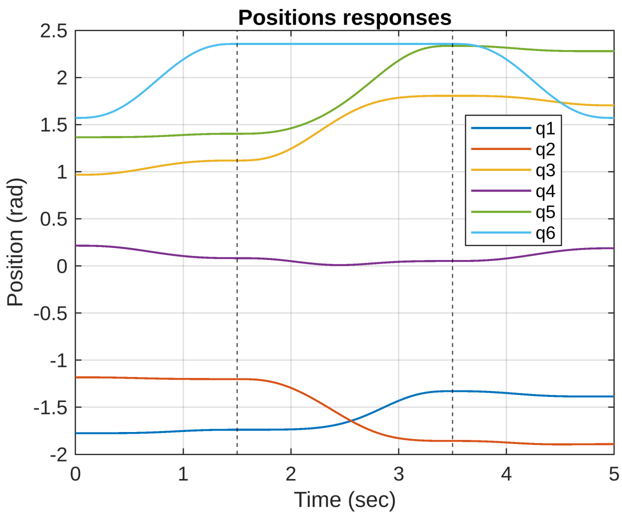


(δ′) Σχετική Τροχιά προσανατολισμού με Unit Quaternions

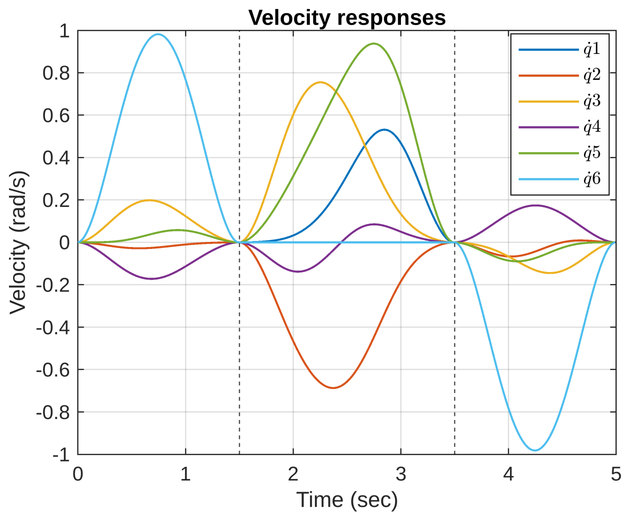
Στα παραπάνω γραφήματα παρατηρούμε πως η τροχιά είναι συνεχής και με μηδενική ταχύτητα και επιτάχυνση. Ακόμη, στο γράφημα σχετικής τροχιάς θέσης παρατηρούμε πως δεν είναι εντελώς ευθείες αλλά αποκλίνουν λίγο από την τιμή που αναμέναμε. Μπορούμε να υπολογίσουμε αυτή την απόκλιση η όποια φαίνεται καλύτερα στο επόμενο γράφημα.



Όπως μπορούμε να δούμε από το γράφημα το σφάλμα είναι της τάξης των μερικών χιλιοστών επομένως μπορούμε να πούμε ότι οφείλεται σε κάποιο αριθμητικό σφάλμα (πχ. υπολογισμός αντίστροφου πίνακα). Επίσης παρακάτω φαίνονται οι αποκρίσεις θέσης και ταχύτητας των αρθρώσεων του ρομπότ.

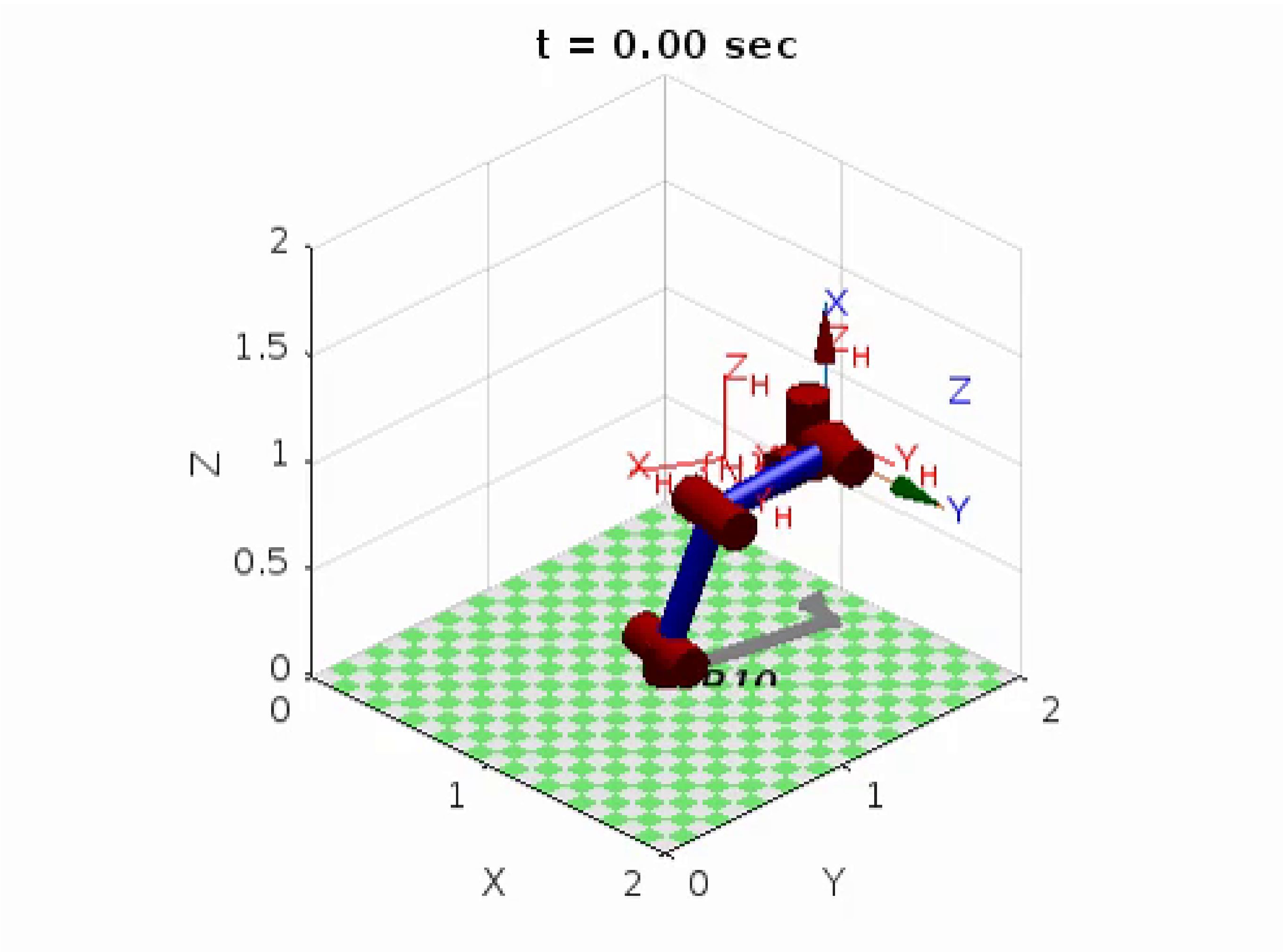


(α΄) Αποκρίσεις Θέσης αρθρώσεων



(β΄) Αποκρίσεις ταχύτητας αρθρώσεων

Ακόμη, μπορούμε να δούμε την κίνηση που εκτελεί το ρομπότ με τα αρχικό και τελικό πλαίσιο του πόμολου.(Για να μπορεί να παίξει το gif χρησιμοποιήστε Adobe Acrobat)



Σχήμα 5: Η πορεία του ρομπότ