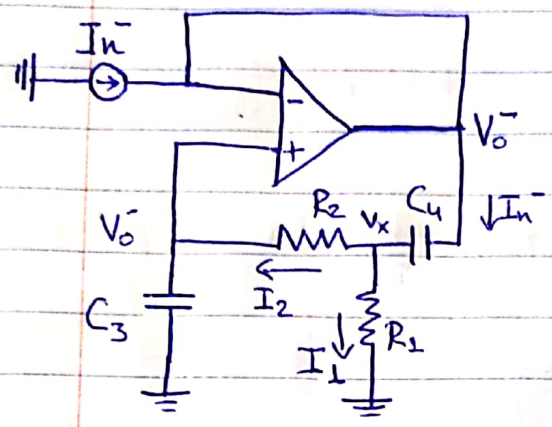
2η Σειρά Θεωρητικών Ασκήσεων - Ηλεκτρονική III - 2022/2023
Κεφαλληνός Διονύσιος 03119030

Άσκηση 1

Θα χρησιμοποιήσουμε επαλληλία για τις 3 πηγές θορύβου.



• Έστω μόνο I_n^-

$$V_o^- = V^- \doteq V^+$$

$$I_n^- = I_1 + I_2$$

$$I_1 = \frac{V_x}{R_1}$$

$$I_2 = \frac{V_x - V_o^-}{R_2} = V_o s C_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_x = R_2 \cdot V_o^- s C_3 + V_o^- = V_o^-(1 + sR_2C_3)$$

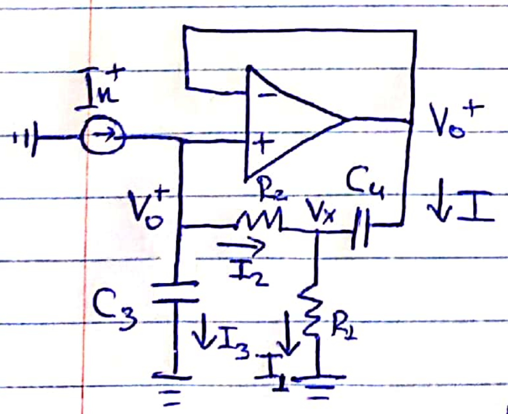
Οπότε $I_n^- = \frac{V_o^-(1+sR_2C_3)}{R_1} + V_o^- s C_3 = V_o^-\left(\frac{1+sR_2C_3}{R_1} + sC_3\right)$

$$I_n^- = (V_o^- - V_x) s C_4 = V_o^-(s R_2 C_3 \cdot s C_4)$$

Από τα παραπάνω έχουμε:

$$V_o^-(sR_2C_3) \cdot sC_4 = V_o^-\left(\frac{1+sR_2C_3+sR_1C_3}{R_1}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_o^- = 0 \quad , \quad H_1(j\omega) = 0$$



• Έστω μόνο I_n^+

$$I_n^+ = I_2 + I_3$$

$$I_2 = I_1 - I \Rightarrow \frac{V_o - V_x}{R_2} = \frac{V_x}{R_1} - I$$

όπου $I = (V_o - V_x) s C_4$ άρα

$$\frac{V_o - V_x}{R_2} = \frac{V_x}{R_1} - (V_o - V_x) s C_4 \Rightarrow$$

$$\frac{V_o}{R_2} + sC_4 V_o = \frac{V_x}{R_1} + sC_4 V_x + \frac{V_x}{R_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_o = \frac{\frac{1}{R_1} + sC_4 + \frac{1}{R_2}}{\frac{1}{R_2} + sC_4} V_x \Rightarrow V_x = \frac{\frac{1}{R_2} + sC_4}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} + sC_4} V_o$$

$$I_n^+ = I_2 + I_3 = I_2 + V_o s C_3 = \frac{V_o - V_x}{R_2} + V_o s C_3 \Rightarrow$$

$$I_n^+ = V_o \left[\frac{1}{R_2} + sC_3 - \frac{1}{R_2} \frac{\frac{1}{R_2} + sC_4}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + sC_4} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_n^+ = V_o \left[\frac{1}{R_2} \left[\frac{1/R_1}{1/R_1 + 1/R_2 + sC_4} \right] + sC_3 \right]$$

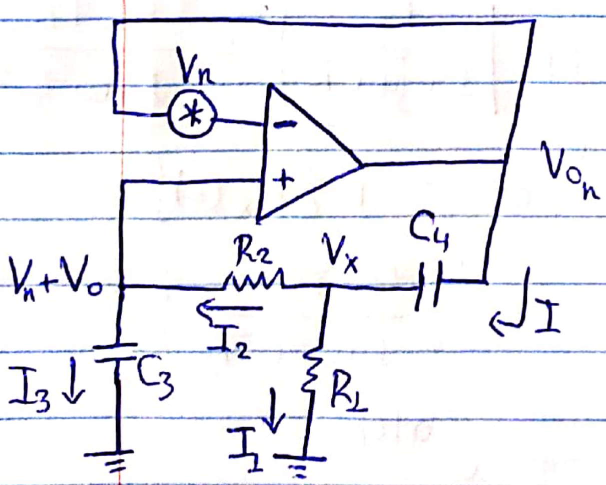
$$H_2(j\omega) = \frac{1}{\frac{1}{R_2}\left[\frac{1/R_1}{1/R_1 + 1/R_2 + j\omega C_4}\right] + j\omega C_3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H_2(j\omega) = \frac{R_1 + R_2 + j\omega R_1 R_2 C_4}{1 - R_1 R_2 C_3 C_4 \omega^2 + j\omega C_3 (R_1 + R_2)}$$

$$|H_2(j\omega)|^2 = \frac{(R_1+R_2)^2 + (R_1 R_2 C_4 \omega)^2}{(1 - R_1 R_2 C_3 C_4 \omega^2)^2 + (C_3 (R_1+R_2))^2 \omega^2}$$

και $$\overline{I_n^{+2}} = |H_2(j\omega)|^2 \, \overline{I_{n_o}^2}$$

• Έστω μόνο V_n



$$V^- = V^+ = V_{o_n} + V_n$$

$$I_3 = I_2 = (V_n + V_o) sC_3$$

$$I_1 = \frac{V_x}{R_1}$$

$$I = (V_o - V_x) sC_4 = I_2 + I_1$$

$$I_2 = \frac{V_x - (V_n + V_{on})}{R_2}$$

Άρα $(V_n + V_{on}) sC_3 = \dfrac{V_x - (V_n + V_{on})}{R_2} \Rightarrow V_x = (V_n + V_{o_n}) [sC_3 R_2 + 1]$

$$(V_{on}-V_x)sC_4 = \frac{V_x-(V_n+V_{on})}{R_2} + \frac{V_x}{R_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[V_{on}-(V_n+V_{on})(sC_3R_2+1)\right]sC_4 = (V_n+V_{on})sC_3 + \frac{(V_n+V_{on})}{R_1}(1+sC_3R_2)$$

$$\Rightarrow V_{on}\left(sC_4 - s^2C_3R_2C_4 - sC_4 - sC_3 - \frac{1}{R_1} - \frac{sC_3R_2}{R_1}\right) = V_n\left(sC_3 + \frac{1+sC_3R_2}{R_1} + s^2C_3R_2C_4 + sC_4\right)$$

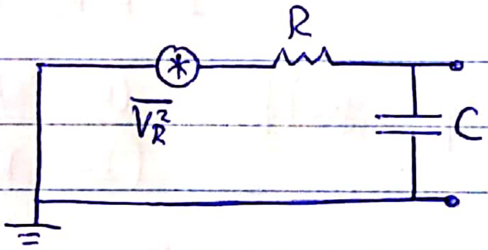
$$\Rightarrow \frac{V_{on}}{V_n} = -\frac{s^2C_3R_2C_4 + s\left(C_3+C_4+\frac{C_3R_2}{R_1}\right)+\frac{1}{R_1}}{s^2C_3R_2C_4 + s\left(C_3+\frac{C_3R_2}{R_1}\right)+\frac{1}{R_1}}$$

άρα $$|H_3(j\omega)|^2 = \frac{\left(\frac{1}{R_1}-\omega^2R_2C_3C_4\right)^2+\left(\omega\left(C_3+C_4+\frac{C_3R_2}{R_1}\right)\right)^2}{\left(\frac{1}{R_1}-\omega^2R_2C_4C_3\right)^2+\left(\omega\left(C_3+\frac{C_3R_2}{R_1}\right)\right)^2}$$

και $$PSD = |H_3(j\omega)|^2\,\overline{V_{n_0}^2}$$

Συνολικά στην έξοδο: $PSD_{o\lambda} = |H_2(j\omega)|^2\,\overline{I_{n_0}^2} + |H_3(j\omega)|^2\,\overline{V_{n_0}^2}$

Άσκηση 5



$$H = \frac{\frac{1}{sC}}{R+\frac{1}{sC}} = \frac{1}{1+sCR}$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega CR}$$

$$PSD = S_x = |H(j\omega)|^2\,\overline{V_n^2} = 4kTR\left|\frac{1}{1+j\omega CR}\right|^2 = \frac{4kTR}{1+\omega^2C^2R^2}$$

$$S_x(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(t)\,e^{-2\pi i t f}\,dt = F\{R_x(t)\}$$

Άρα $$R_x(t) = F^{-1}\{S_x(f)\} = F^{-1}\left\{\frac{4kTR}{1+\omega^2C^2R^2}\right\}$$

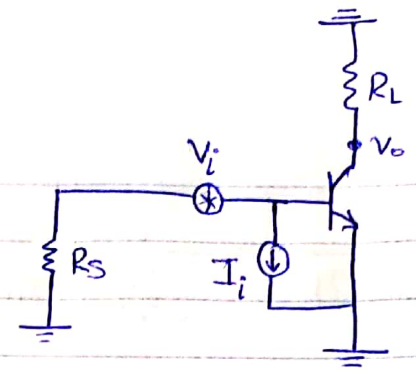
Fourier: $$\frac{2a}{a^2+(2\pi f)^2} \longleftrightarrow e^{-a|t|}$$

$$\frac{4kTR}{1+\omega^2C^2R^2} = \frac{\frac{4kTR}{C^2R^2}}{\frac{1}{C^2R^2}+(2\pi f)^2} \overset{a=\frac{1}{RC}}{=} \frac{4kTRa}{a^2+(2\pi f)^2} =$$

$$= 2kTR\frac{2a}{a^2+(2\pi f)^2}$$

άρα $R_x(t) = 2kTRe^{-\frac{|t|}{RC}}$

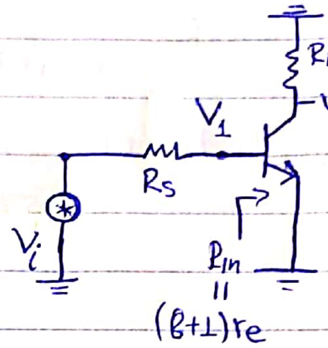
Άσκηση 4



$$g_m = \frac{I_c}{V_T} = 40\,\frac{mA}{V}$$

Επαλληλία

• Έστω μόνο V_i

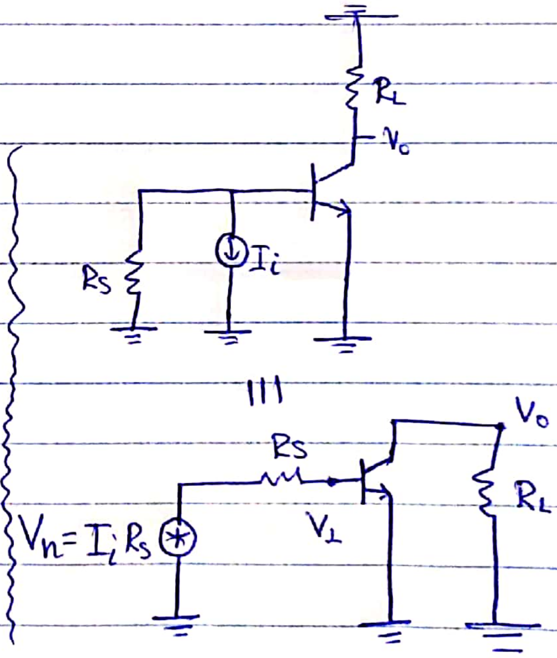


$$\frac{V_o}{V_1} = -g_m \cdot R_L \quad \text{(CE)}$$

$$\frac{V_1}{V_i} = \frac{R_{in}}{R_{in}+R_S} = \frac{(\beta+1)r_e}{(\beta+1)r_e + R_S}$$

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{V_o}{V_1}\cdot\frac{V_1}{V_i} = -400\cdot 0{,}565\,\frac{V}{V} = -226\,\frac{V}{V}$$

• Έστω μόνο I_i



Άρα έχουμε ξανά:

$$\frac{V_o}{V_n} = \frac{V_o}{V_1}\cdot\frac{V_1}{V_i} = -226\,\frac{V}{V}$$

$$\Rightarrow \frac{V_o}{I_i} = -226\cdot R_S = -226\,\frac{V}{mA}$$

Άρα στην έξοδο έχουμε PSD:

$$\overline{V_o^2} = \left|\frac{V_o}{V_i}\right|^2 \cdot \overline{V_i^2} + \left|\frac{V_o}{I_i}\right|^2 \cdot \overline{I_i^2}$$

$$= 226^2 \cdot 4kT\left(\frac{1}{2g_m}\right) + (226\cdot 10^3)^2 \cdot 2q(I_B)$$

$$= (1{,}06\cdot 10^{-14} + 3{,}26\cdot 10^{-13})\,\frac{V^2}{Hz} = 3{,}37\cdot 10^{-13}\,\frac{V^2}{Hz}$$

Η συνάρτηση μεταφοράς όπως υπολογίστηκε και πριν είναι:

$$\frac{V_o}{i_s} = -226 \frac{V}{mA}$$

Άρα στην είσοδο έχουμε:

$$PSD_i = \frac{\overline{V_o^2}}{(226 \cdot 10^3)^2} = \frac{3,37 \cdot 10^{-13}}{5,1 \cdot 10^{10}} \frac{A^2}{Hz} = 6,61 \cdot 10^{-24} \frac{A^2}{Hz}$$

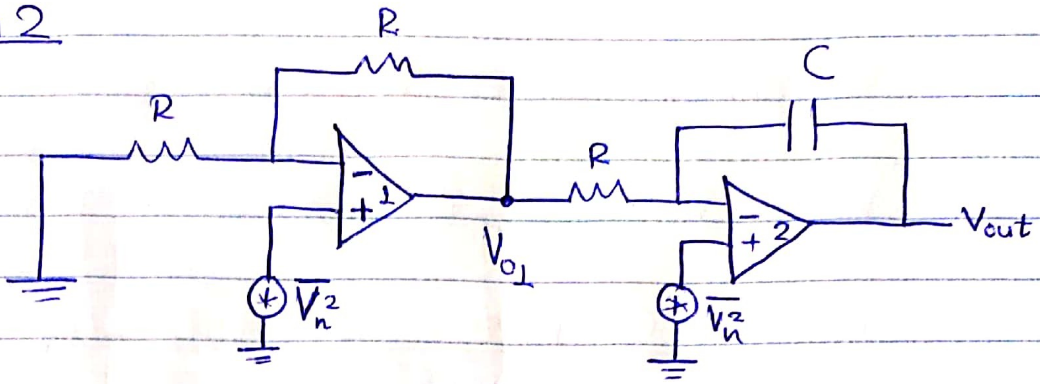
Για cutoff στα 2MHz έχουμε:

$$MDS_i = \sqrt{6,61 \cdot 10^{-24} \cdot 2 \cdot 10^6}\ A = 3,63 \cdot 10^{-9}\ A$$

Η προσομοίωση στο LTSPICE για την συγκεκριμένη άσκηση παρατίθεται στο τέλος της εργαστηριακής αναφοράς.

Άσκηση 2

A)



$$V_{o_1} = \left(1 + \frac{R}{R}\right) V_n$$

$$\overline{V_{o_1}^2} = 4\,\overline{V_n^2}$$

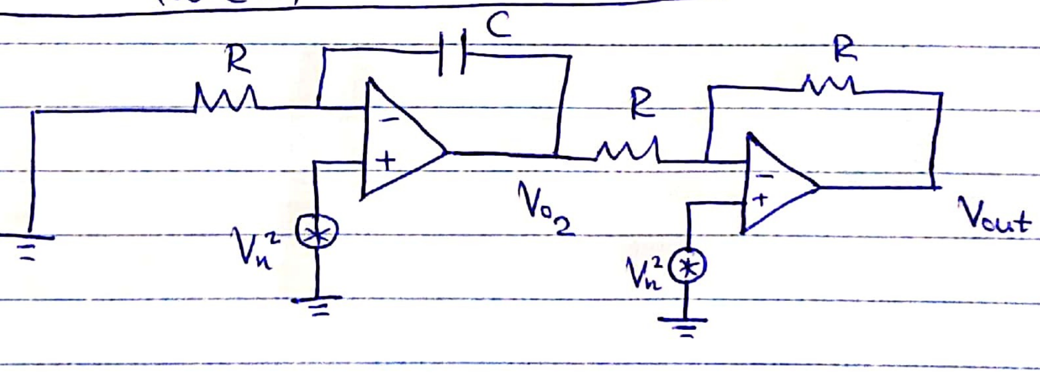
Γ)

$$\frac{V_{out}}{V_{o_1}} = -\frac{\frac{1}{sC}}{R} \qquad \overline{V_{out_1}^2} = \left|-\frac{1}{sCR}\right|^2 4\overline{V_n^2} = \frac{4\overline{V_n^2}}{\omega^2 C^2 R^2}$$

$$\frac{V_{out}}{V_n} = \left(1 + \frac{1/sC}{R}\right) \qquad \overline{V_{out_2}^2} = \left|\left(1+\frac{1}{sCR}\right)\right|^2 \overline{V_n^2} =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{\omega^2 C^2 R^2}\right) \overline{V_n^2}$$

$$\overline{V_{out}^2} = \left(\frac{5}{(\omega CR)^2} + 1\right) \overline{V_n^2}$$



B)

$$\frac{V_{o_2}}{V_n} = \left(1 + \frac{1/Cs}{R}\right) \Rightarrow \overline{V_{o_2}^2} = \left(1 + \frac{1}{\omega^2 C^2 R^2}\right) \overline{V_n^2}$$

Δ)

$$\frac{V_{out}}{V_{o_2}} = -\frac{R}{R} = -1 \qquad \frac{V_{out}}{V_n} = \left(1 + \frac{R}{R}\right) = 2$$

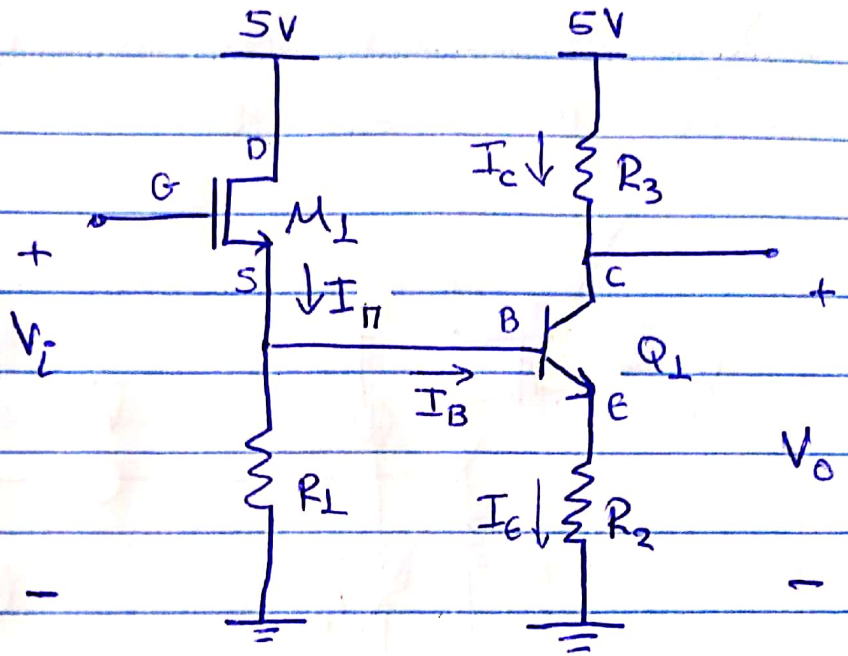
Συνολική PSD : $\overline{V_{out_2}^2} = \overline{V_{o_2}^2} \cdot 1 + \overline{V_n^2} \cdot 4 = \left(5 + \frac{1}{(\omega CR)^2}\right) \overline{V_n^2}$

ε) Στις χαμηλές συχνότητες προτιμώ το δεύτερο κύκλωμα, διότι για μικρά ω ο θόρυβος καθορίζεται κατα κύριο λόγο από τον παράγοντα με το $(\omega CR)^2$ στον παρανομαστή. Επομένως επιλέγουμε το κύκλωμα με τον χαμηλότερο συντελεστή σε αυτόν τον όρο. Αντίθετα, στις υψηλές συχνότητες όπου ο θόρυβος εξαρτάται κυρίως από τον σταθερό όρο, επιλέγουμε το πρώτο κύκλωμα.

Άσκηση 3   DC Ανάλυση

$$V_{BE} = V_T \ln\left(\frac{I_C}{I_S}\right)$$
$$= 25mV \cdot \ln \frac{10^{-3}}{10^{-16}}$$

$$\Rightarrow V_{BE} = 0{,}748 \text{ V}$$



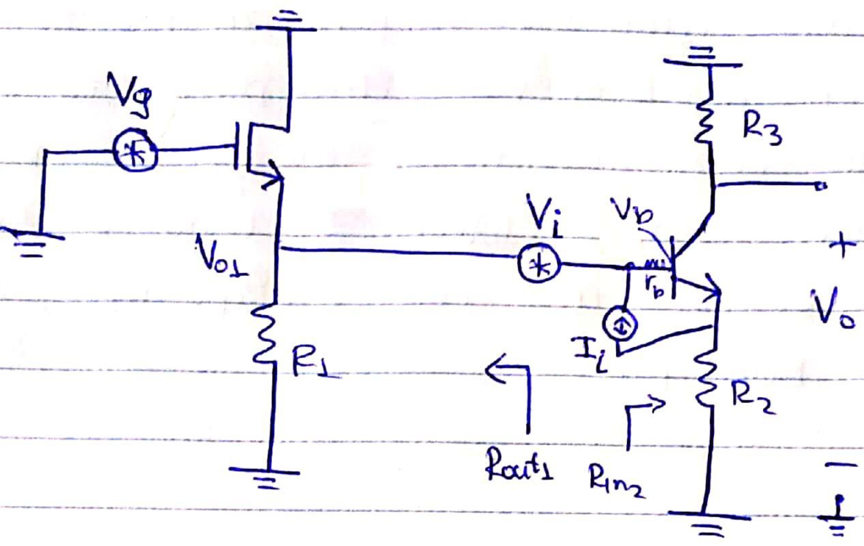
ΝΤΚ

$$V_{BE} + I_E \cdot R_2 = (I_\Pi - I_B) R_1$$

$$I_\Pi = \frac{V_{BE} + I_E \cdot R_2}{R_1} + I_B = \frac{V_{BE} + \frac{I_C}{\alpha} R_2}{R_1} + \frac{I_C}{\beta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_\Pi = 2{,}84 \text{ mA}$$

$$g_m = \sqrt{2 I_\Pi \cdot \mu_n C_{ox} \cdot \frac{W}{L}} = 5{,}83 \frac{mA}{V}$$



Επαλληλία

- V_g

$$R_{in_2} = R_2(\beta+1) + r_b + r_\pi = R_2(\beta+1) + r_b + \frac{\beta}{g_{m_{BJT}}} = 12{,}7\ k\Omega$$

$$\frac{V_{o1}}{V_g} = \frac{R_{in_2} // R_1}{R_{in_2} // R_1 + \frac{1}{g_m}} = 0{,}65\ \frac{V}{V}$$

$$\frac{V_b}{V_{o1}} = \frac{r_\pi + R_2(\beta+1)}{r_b + r_\pi + R_2(\beta+1)}$$

$$\frac{V_o}{V_b} = \frac{-R_3\, g_{m_{BJT}} \cdot r_e}{R_2 + r_e}$$

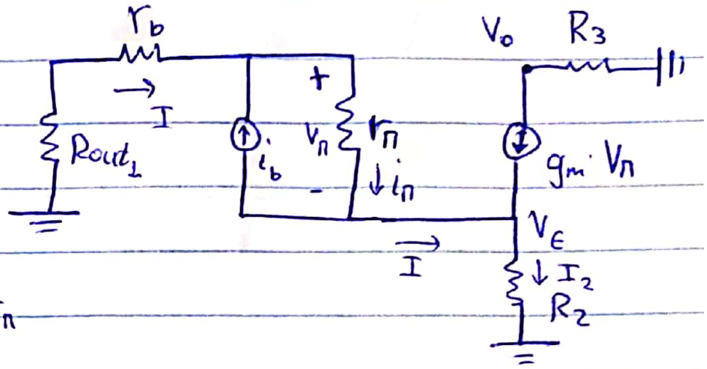
άρα $$\frac{V_o}{V_g} = \frac{V_o}{V_b} \cdot \frac{V_b}{V_{o1}} \cdot \frac{V_{o1}}{V_g} = \frac{-R_3 \cdot g_{m_{BJT}} \cdot r_e}{R_2 + r_e} \cdot \frac{r_\pi + R_2(\beta+1)}{r_b + r_\pi + R_2(\beta+1)} \cdot \frac{R_{in_2} // R_1}{R_{in_2} // R_1 + \frac{1}{g_m}} = -10{,}2\ \frac{V}{V}$$

- **V_i**

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{V_o}{V_b}\cdot\frac{V_b}{V_{o_1}} = \overset{\text{ίδιο}}{\frac{V_o}{V_b}}\cdot\frac{r_\pi + R_2(\beta+1)}{r_b + r_\pi + R_2(\beta+1) + R_{out_1}} = -16$$

- **I_i**

$$R_{out_1} = \frac{1}{g_m} // R_1 = 108{,}89\,\Omega$$



$$V_o = -g_m \cdot V_\pi \cdot R_3 \Rightarrow V_\pi = \frac{-V_o}{g_m R_3}$$

$$I = i_\pi - i_b \qquad i_\pi = V_\pi / r_\pi$$

$$I_2 = g_m \cdot V_\pi + i_\pi - i_b$$

$$V_\pi + V_E = -I\cdot(r_b + R_{out_1}) \Rightarrow V_\pi + I_2 \cdot R_2 = -I(r_b + R_{out_1})$$

$$\Rightarrow V_\pi + (g_m V_\pi + i_\pi - i_b) R_2 = -(i_\pi - i_b)(r_b + R_{out_1})$$

$$\Rightarrow V_\pi + \left(g_m V_\pi + \frac{V_\pi}{r_\pi} - i_b\right) R_2 = -\left(\frac{V_\pi}{r_\pi} - i_b\right)(r_b + R_{out_1})$$

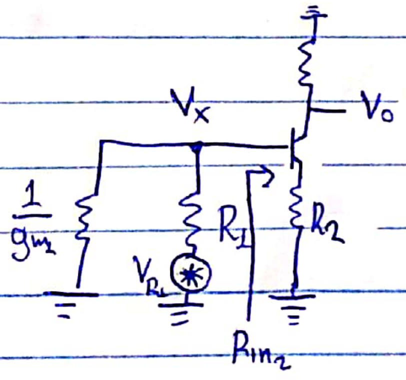
$$\Rightarrow V_\pi\left(1 + g_m + \frac{1}{r_\pi}\right) R_2 - i_b \cdot R_2 = V_\pi\left(-\frac{1}{r_\pi}\cdot r_b + R_{out_1}\right) + i_b(r_b + R_{out_1})$$

$$\Rightarrow -\frac{V_o}{g_m R_3}\left[\left(1 + g_m + \frac{1}{r_\pi}\right) R_2 + \frac{r_b + R_{out_1}}{r_\pi}\right] = i_b(R_2 + r_b + R_{out_1})$$

$$\frac{V_o}{i_b} = \frac{g_m R_3 (R_2 + r_b + R_{out_1})}{R_2 + g_m R_2 + \frac{R_2}{r_\pi} + \frac{r_b + R_{out_1}}{r_\pi}} = -4{,}82\ \frac{V}{mA}$$

- **Θερμικός Θόρυβος R_1**

$$V_x = \frac{\frac{1}{g_m} // R_{in_2}}{\frac{1}{g_m} // R_{in_2} + R_1} V_{R_1}$$



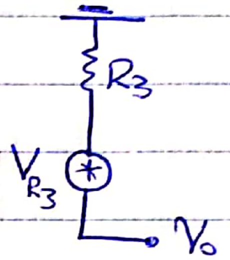
$$\frac{V_o}{V_x} = \frac{V_o}{V_b}\cdot\frac{V_b}{V_{o_1}} = -16$$

$$\frac{V_o}{V_{R_1}} = \frac{V_o}{V_x} \cdot \frac{V_x}{V_{R_1}} = -16 \cdot 0,357 = -5,72 \ \frac{V}{V}$$

- <u>Θερμικός θόρυβος R_3</u>

Θεωρούμε ότι από την έξοδο βλέπουμε $r_o = \infty$ για το BJT

Άρα $\frac{V_o}{V_{R_3}} = 1$



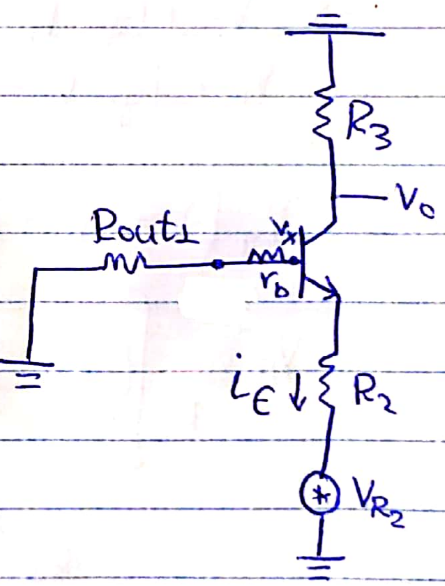
- <u>Θερμικός θόρυβος R_2</u>

$$i_E = -\frac{V_{R_2}}{R_2 + r_e + \frac{R_{out_1} + r_b}{\beta+1}}$$

$$V_o = +a\left(\frac{V_{R_2}}{R_2 + r_e + \frac{R_{out_1} + r_b}{\beta+1}}\right)R_3$$

$$\Rightarrow \frac{V_o}{V_{R_2}} = \frac{a R_3}{R_2 + r_e + \frac{R_{out_1} + r_b}{\beta+1}}$$

$$\Rightarrow \frac{V_o}{V_{R_2}} = 15,89 \ \frac{V}{V}$$



Έχοντας τις συναρτήσεις μεταφοράς για όλες τις πηγές θορύβου, βρίσκω τη συνολική PSD στην έξοδο

$$\overline{V_o^2} = \left|\frac{V_o}{V_g}\right|^2 \overline{V_g^2} + \left|\frac{V_o}{V_i}\right| \overline{V_i^2} + \left|\frac{V_o}{i_b}\right|^2 \overline{I_i^2} + \left|\frac{V_o}{V_{R_1}}\right|^2 \cdot \overline{V_{R_1}^2} + \overline{V_{R_3}^2} + \left|\frac{V_o}{V_{R_2}}\right|^2 \overline{V_{R_2}^2}$$

$$= 10{,}2^2 \cdot 4kT \frac{2}{3} \frac{1}{g_m} + 16^2 \cdot 4kT\left(r_b + \frac{1}{2g_{m_{BJT}}}\right)$$

$$+ (4{,}82 \cdot 10^3)^2 \, 2q I_B + 5{,}72^2 \, 4kT \cdot R_1$$

$$+ 4kTR_3 + 15{,}89^2 \cdot 4kT \cdot R_2$$

$$= \left(1{,}97 \cdot 10^{-16} + 4{,}78 \cdot 10^{-16} + 7{,}43 \cdot 10^{-17} + 1{,}63 \cdot 10^{-16} + 3{,}32 \cdot 10^{-17} + 4{,}191 \cdot 10^{-16}\right) \frac{V^2}{Hz} = 1{,}36 \cdot 10^{-15} \frac{V^2}{Hz}$$

Άρα $PSD_{in} = \dfrac{PSD_{out}}{\frac{V_o}{V_g}} = \dfrac{PSD_{out}}{10{,}2^2} = 1{,}31 \cdot 10^{-17} \dfrac{V^2}{Hz}$