Κωνσταντίνος Ιωάννου
ΑΜ 031 19840
Kostisioannou101616@gmail.com

Εργασία Σήματα και Συστήματα

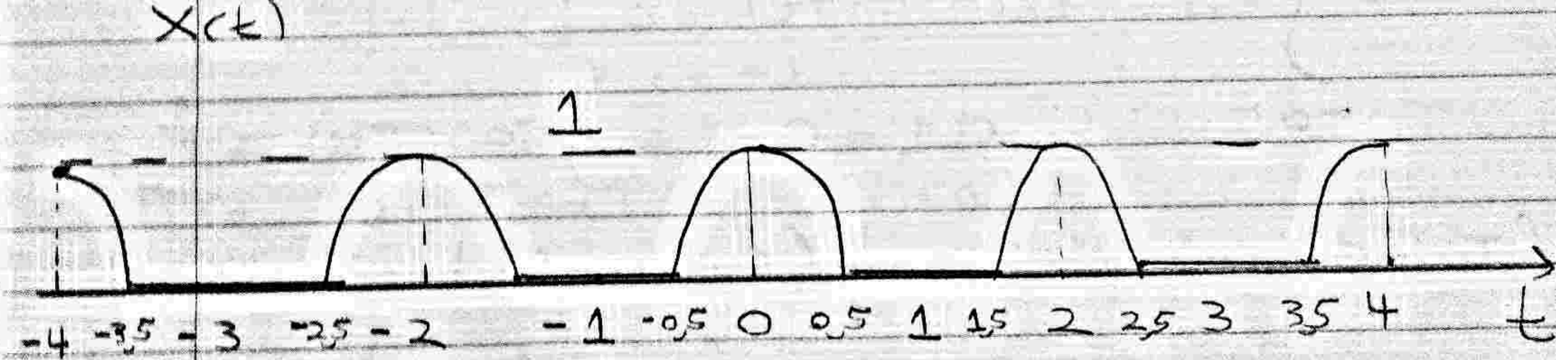
Άσκηση 2.1

$$x(t) = \begin{cases} \cos(\pi t), & |t| \leq 0{,}5 \\ 0, & 0{,}5 \leq |t| \leq 1 \end{cases}$$

με περίοδο $T = 2$.

α) Να βρεθούν a_n, b_n του $x(t)$ σε τριγωνομετρική σειρά Fourier.

-> γραφική $x(t)$ για $t \in [-4, 4]$



$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot \cos(n w_0 t)\, dt$$

όπου $\boxed{T = 2\ sec}$ και $T = \frac{2\pi}{w_0}$

$$w_0 = \frac{2\pi}{2} \Rightarrow \boxed{w_0 = 2\ rad/sec}$$

$$a_n = \frac{2}{2}\int_{-1}^{1} x(t)\cdot\cos(n\pi t)\,dt$$

$$= \int_{-1}^{-0,5} x(t)\cos(n\pi t)\,dt + \int_{-0,5}^{0,5} x(t)\cos(n\pi t)\,dt$$

$$+ \int_{0,5}^{1} x(t)\cos(n\pi t)\,dt \Rightarrow$$

$$a_n = \int_{-0,5}^{0,5} x(t)\cos(n\pi t)\,dt, \quad \text{στα άλλα } x(t) \equiv 0$$

$$= \int_{-0,5}^{0,5} \cos(\pi t)\cos(n\pi t)\,dt \qquad a_1 = a_{-1} = \int_{-0,5}^{0,5} \cos^2(\pi t) = \frac{1}{2}$$

Απο $\cos(a)\cdot\cos(B) = \frac{1}{2}\left(\cos(a-B) + \cos(a+B)\right)$

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-0,5}^{0,5} \cos(\pi t(n-1)) + \cos(\pi t(n+1))\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-0,5}^{0,5} \cos(\pi t(n-1))\,dt + \frac{1}{2}\int_{-0,5}^{0,5} \cos(\pi t(n+1))\,dt$$

• $u = \pi t(n+1) \qquad du = \pi(n+1)\,dt$

$u_1 = -\frac{\pi}{2}(n+1) \qquad u_2 = \frac{\pi}{2}(n+1)$

Ομοίως $b_n = \int_{-0,5}^{0,5} \cos(\pi t) \sin(n\pi t)\, dt$

Όμως η συνάρτηση $f(t) = \cos(\pi t) \sin(n\pi t)$ είναι περιττή ως γινόμενο άρτιας · περιττής

$\int_{-a}^{a} f(t) = 0$. Ολοκλήρωμα περιττής f σε συμμετρικό διάστημα είναι 0.

Άρα $\boxed{b_n = 0}$

B) Μετασχηματισμός Fourier του $x(t)$

$$X(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-jwt}\, dt \quad (\text{ορισμός})$$

Όμως $x(t)$: περιοδικό σήμα οπότε ισχύει

$$X(w) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\, \delta(w - n w_0)$$

όπου $c_n = \frac{1}{2}(a_n + j b_n) \Rightarrow \boxed{c_n = \frac{a_n}{2}}$

και $\boxed{w_0 = \pi \ r/s}$

$$a_n = \frac{\cos(n\pi/2)}{\pi} \left(\frac{n-1-n-1}{(n+1)(n-1)} \right)$$

$$= \frac{\cos(n\pi/2)}{\pi} \, \frac{-2}{n^2 - 1^2}$$

$\cdot\ s = \pi(n-1)t \quad , \quad ds = \pi(n-1)dt$

$s_1 = -\frac{\pi}{2}(n-1) \qquad s_2 = \frac{\pi}{2}(n-1)$

$$a_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi(n+1)}\int_{u_1}^{u_2} \cos(u)\,du + \frac{1}{\pi(n-1)}\int_{s_1}^{s_2} \cos(s)\,ds\right)$$

$$= \frac{+\sin(u)\Big|_{u_1}^{u_2}}{2\pi(n+1)} + \frac{\sin(s)\Big|_{s_1}^{s_2}}{2\pi(n-1)}$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}n+\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}n-\frac{\pi}{2}\right)}{2\pi(n+1)}$$

$$+ \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}n-\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}n+\frac{\pi}{2}\right)}{2\pi(n-1)}$$

$A\pi_0 \quad \sin(-a) = -\sin(a)$

$$a_n = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}n+\frac{\pi}{2}\right)}{\pi(n+1)} + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}n-\frac{\pi}{2}\right)}{\pi(n-1)}.$$

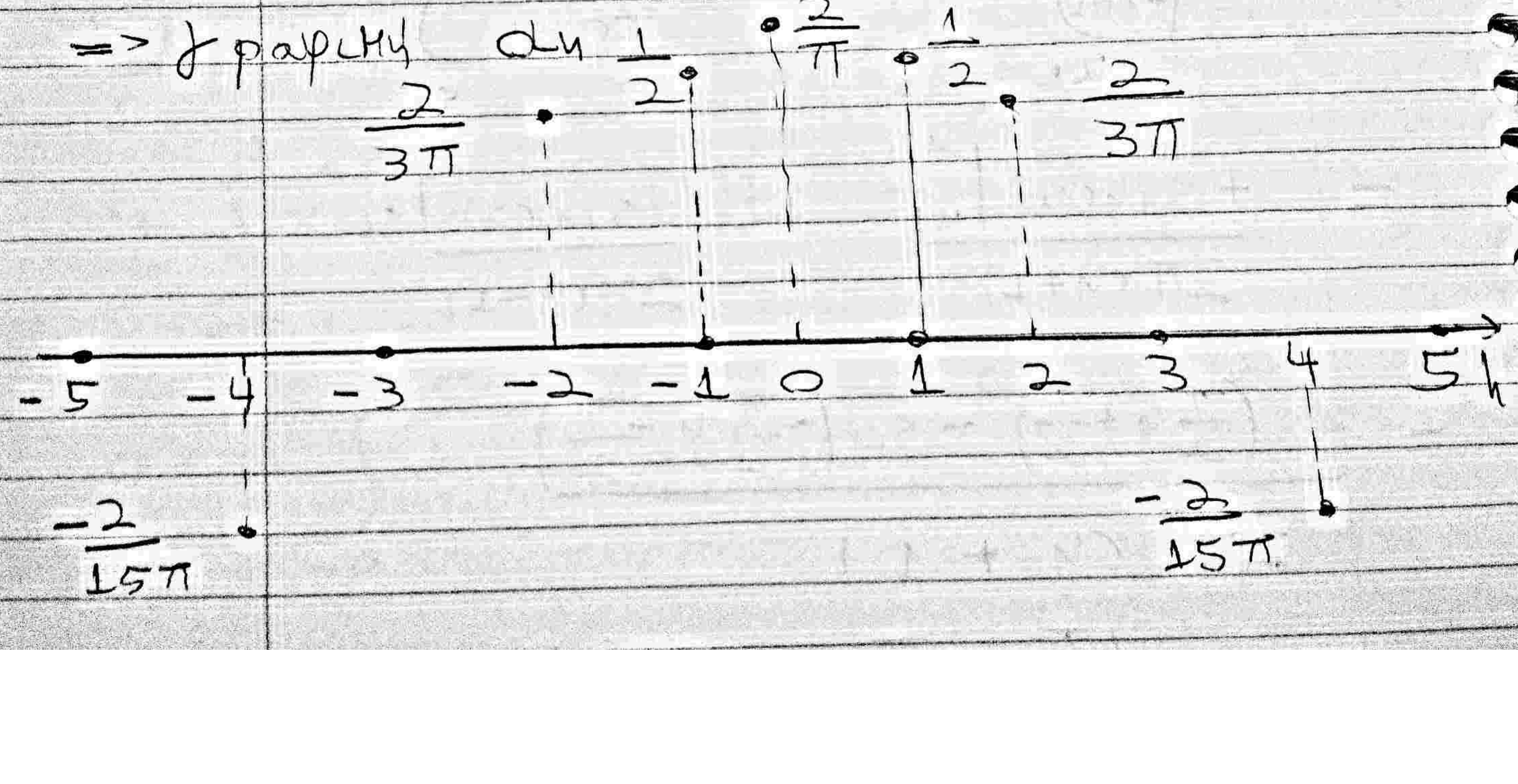
$$= \frac{\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{\pi(n+1)} - \frac{\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{\pi(n-1)}$$

$$\boxed{a_n = \frac{\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{\pi}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1}\right) \quad \begin{matrix} n\in\mathbb{N} \\ n\neq\pm1\end{matrix}}$$

Βρίσκω τιμές από $n \in [-5, 5]$

$$a_n = \left[0,\ -2/15\pi,\ 0,\ 2/3\pi,\ \frac{1}{2},\ 2/\pi,\ \frac{1}{2},\ 2/3\pi,\ 0,\ -2/15\pi,\ 0\right]$$

$\Rightarrow$ γραφική a_n



Άρα $X(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{a_n}{2} \delta(\omega - n\pi)$

$$= \pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(n\pi/2)}{\pi} \frac{(-2)}{n^2-1} \delta(\omega - n\pi)$$

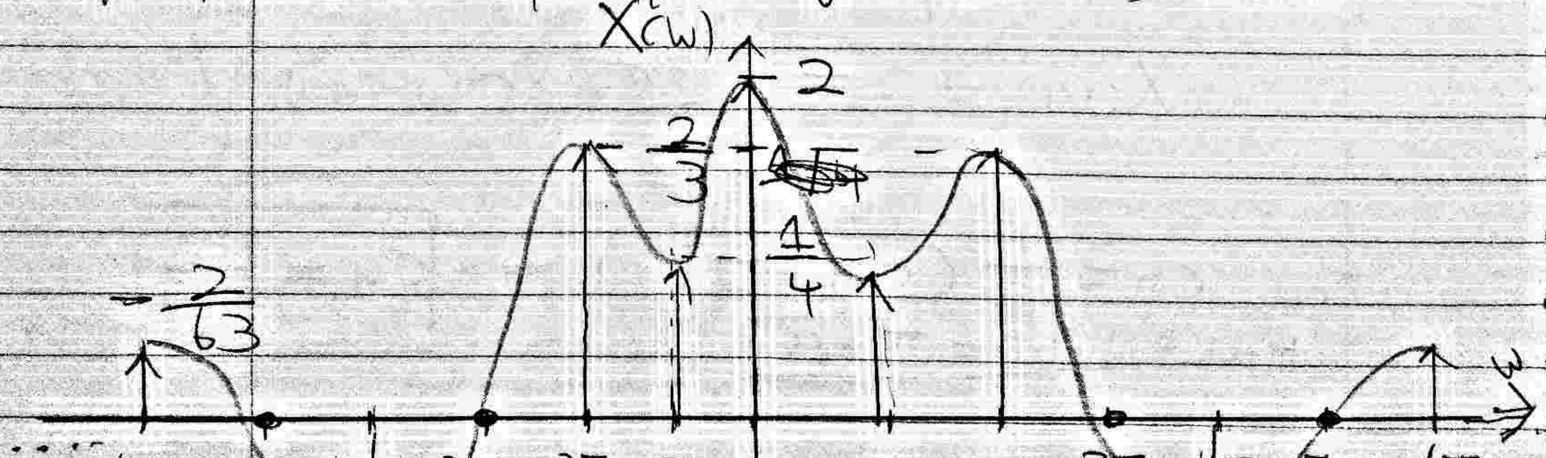
$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{-2\cos(n\pi/2)}{n^2-1} \delta(\omega - n\pi)$$

Άρα $\boxed{X(\omega) = \sum_{n \neq \pm 1} \frac{-2\cos(n\pi/2)}{n^2-1} \delta(\omega - n\pi)}$

<u>για $n = \pm 1$</u> $X(\omega) = \frac{\pi}{2}\delta(\omega - \pi) + \frac{\pi}{2}\delta(\omega + \pi)$

$$+ \sum_{n \neq \pm 1} \frac{\cos(n\pi/2)}{1-n^2} \delta(\omega - n\pi)$$

Εύκολα κατανοούμε ότι η $X(\omega)$ έχει μη μηδενικές τιμές μόνο για $\omega = n\pi$, $n \in \mathbb{N}$



$X(\omega)$: προφανώς άρτια Προφανώς $\omega = n\pi$ $\forall n \in \mathbb{Z}$

c) $H(w) = \begin{cases} \pi - 0,5|w|, & |w| \le 1,5\pi \\ 0, & \text{else} \end{cases}$

Το $x(t)$ διέρχεται από Βαθυπερατό φίλτρο

$\cancel{X(w) = H(w) \cdot Y(w)}$

$\underline{Y(w) = H(w) \cdot X(w)}$

όπου το $H(w)$ είναι μη μηδενική μόνο στο διάστημα $w \in [-1,5\pi, 1,5\pi]$

Συνεπώς μας ενδιαφέρουν οι τιμές του $X(w)$ μόνο σε αυτό το διάστημα και όχι σε όλο το πεδίο ορισμού του.

w	$X(w)$
0	2
$\pm\pi$	$\pi/2$

$X(w) = 2\delta(w) + \frac{\pi}{2}(\delta(w-\pi) + \delta(w+\pi))$
$w \in (-1,5\pi, 1,5\pi)$.

Άρα

$Y(w) = (\pi - 0,5|w|)\left[2\delta(w) + \frac{\pi}{2}\delta(w-\pi) + \frac{\pi}{2}\delta(w+\pi)\right]$

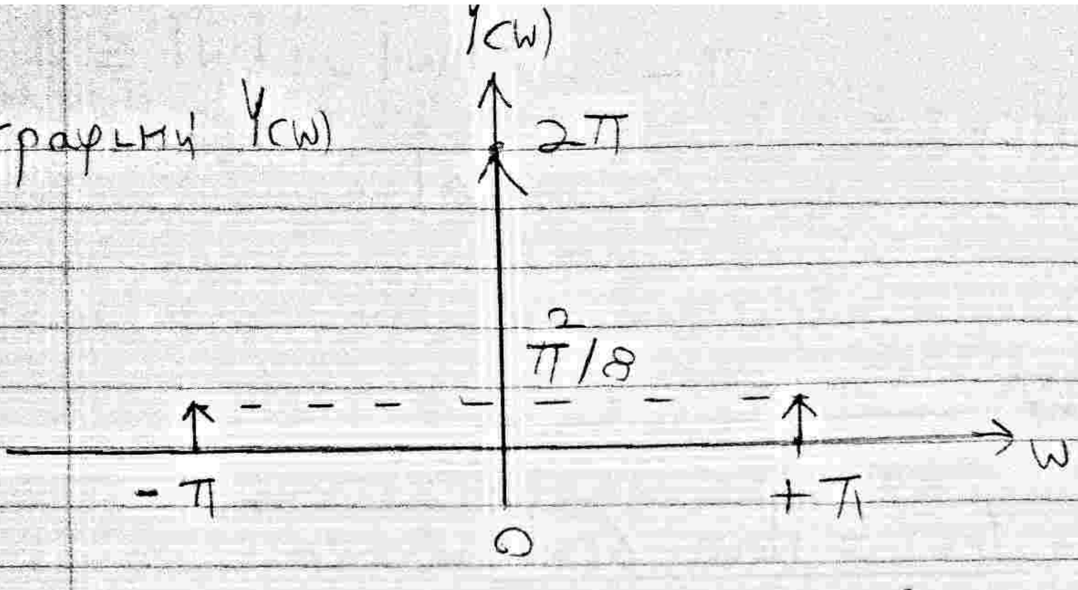
Προφανώς η $Y(w)$ έχει νόημα για $w=0$, $w=\pm\pi$

$Y(w=0) = (\pi - 0) \cdot 2 = 2\pi$

$Y(w=\pi) = (\pi - \frac{1}{2}|\pi|)\,\pi/2 = \pi^2/4$

$Y(w=-\pi) = (\pi - \frac{1}{2}|-\pi|)\,\pi/2 = \pi^2/4$

=> γραφική $Y(w)$



$$\boxed{Y(w) = 2\pi\,\delta(w) + \frac{\pi^2}{4}\big(\delta(w-\pi) + \delta(w+\pi)\big)}$$

Αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier

$$y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} Y(w)\, e^{jwt}\, dw$$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi\,\delta(w)\, e^{jwt}\, dw + \frac{\pi}{8}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(w-\pi)\, e^{jwt}\, dw$$

$$+ \frac{\pi}{8}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(w+\pi)\, e^{jwt}\, dw.$$

=> Από την ιδιότητα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a)\, e^{jxt}\, dx = \Big[u(x-a)\, e^{ajt}\Big]_{-\infty}^{+\infty}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}(u(x-a)\, e^{aJt}) - \lim_{x\to-\infty}(u(x-a)\, e^{aJt})$$

$$= 1 \cdot e^{aJt} - 0 \cdot e^{aJt} = e^{aJt}.$$

Οπότε

$$y(t) = e^{0Jt} + \frac{\pi}{8}\left(e^{\pi J t} + e^{-\pi J t}\right)$$

$$= 1 + \frac{\pi}{8}\left(e^{\pi J t} + e^{-\pi J t}\right).$$

Απο την σχέση Euler

$$e^{(\pi t)J} + e^{(-\pi t)J} = \cos(\pi t) + J\sin(\pi t) + \cos(-\pi t) + J\sin(-\pi t)$$

$$= 2\cos(\pi t) \quad \forall t$$

$$\boxed{y(t) = 1 + \frac{\pi}{4}\frac{\cos(\pi t)}{1}}$$

Προφανώς το $y(t)$ είναι περιοδικό ως άθροισμα σταθερού + περιοδικού σήματος.

Με $w = \pi$, $T = \frac{2\pi}{w} \Rightarrow \boxed{T = 2\ sec}$

Θεμελιώδη περίοδο ίση με αυτήν του διεγέρτη (σήματος) εισόδου.

Τώρα θα υπολογίσουμε τους συντελεστές a_m, b_m του τριγωνομετρικού αναπτύγματος

$$a_m = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{T/2} y(t) \cos(\pi t m)\, dt$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(1 + \frac{1}{8}\cos(\pi t)\right) \cos(\pi t m)\, dt$$

$$= \int_{-1}^{1} \cos(\pi m t)\, dt + \int_{-1}^{1} \frac{1}{8} \cos(\pi t) \cos(\pi t m)\, dt$$

- $$\int_{-1}^{1} \cos(\pi m t)\, dt = \frac{\sin(\pi m t)}{\pi m} \Bigg|_{-1}^{1}$$

$$= \frac{\sin(\pi m)}{\pi m} - \frac{\sin(-\pi m)}{\pi m} = \frac{2 \sin(\pi m)}{\pi m} = 0$$

Αφου $m \in Z$, $\sin(\pi m) = 0$.

- $$\int_{-1}^{1} \cos(\pi t) \cos(\pi t \cdot m)\, dt$$

Απο το πρωτο ερώτημα παίρνουμε απευθείας την φόρμα του ολοκληρώματος

$$\int_{-1}^{1} \cos(\pi t)\cos(\pi t n)\,dt =$$

$$= \frac{\sin(u)}{2\pi(n+1)}\Big|_{u_1}^{u_2} + \frac{\sin(d)}{2\pi(n-1)}\Big|_{d_1}^{d_2}$$

Όπου

$u = \pi t(n+1)$ $\qquad d = +\pi(n-1)t \;\; dt$

$u_1 = -\pi(n+1)$ $\qquad d_1 = -\pi(n-1)$

$u_2 = \pi(n+1)$ $\qquad d_2 = \pi(n-1)$

$$= \frac{\sin(\pi n+\pi) - \sin(-\pi n-\pi)}{2\pi(n+1)} + \frac{\sin(\pi n-\pi) - \sin(\pi-\pi n)}{2\pi(n-1)}$$

$$= \frac{\sin(\pi n+\pi)}{\pi(n+1)} + \frac{\sin(\pi n-\pi)}{\pi(n-1)}$$

$$= -\frac{\sin(\pi n)}{\pi(n+1)} - \frac{\sin(\pi n)}{\pi n-\pi}$$

$$= -\frac{\sin(\pi n)}{\pi\cancel{(n+1)}}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{1-n}\right)$$

$$= -\frac{\sin(\pi n)}{\pi}\left(\frac{1-n+n+1}{(n+1)(1-n)}\right)$$

$$= \frac{\sin(\pi n)}{\pi}\,\frac{2}{1-n^2}$$

Άρα συνολικά

$$a_m = 0 + \frac{1}{8} \cdot \frac{\sin(\pi m)}{\pi} \frac{2}{1-m^2}$$

$$\boxed{a_m = \frac{\sin(\pi m)}{4\pi(1-m^2)}} \quad \text{για } m \neq \pm 1$$

$$a_{-1} = a_1 = 0 + \int_{-1}^{1} \frac{\cos^2(\pi t)}{8} dt$$

$$= \frac{1}{8\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(u) du \quad , \quad u = \pi t$$

$$= \frac{1}{8\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2}\cos(2u) + \frac{1}{2} \right) du$$

$$= \frac{1}{16\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(2u) du + \frac{1}{16\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 \, du$$

$$= \frac{1}{16\pi} \left(\frac{\sin(2u)}{2} + u \right)_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{16\pi} \left(\frac{\sin(2\pi) - \sin(-2\pi)}{2} + \pi - (-\pi) \right)$$

$$\boxed{a_{-1} = a_{+1} = \frac{1}{8} \text{ για } m = \pm 1}$$

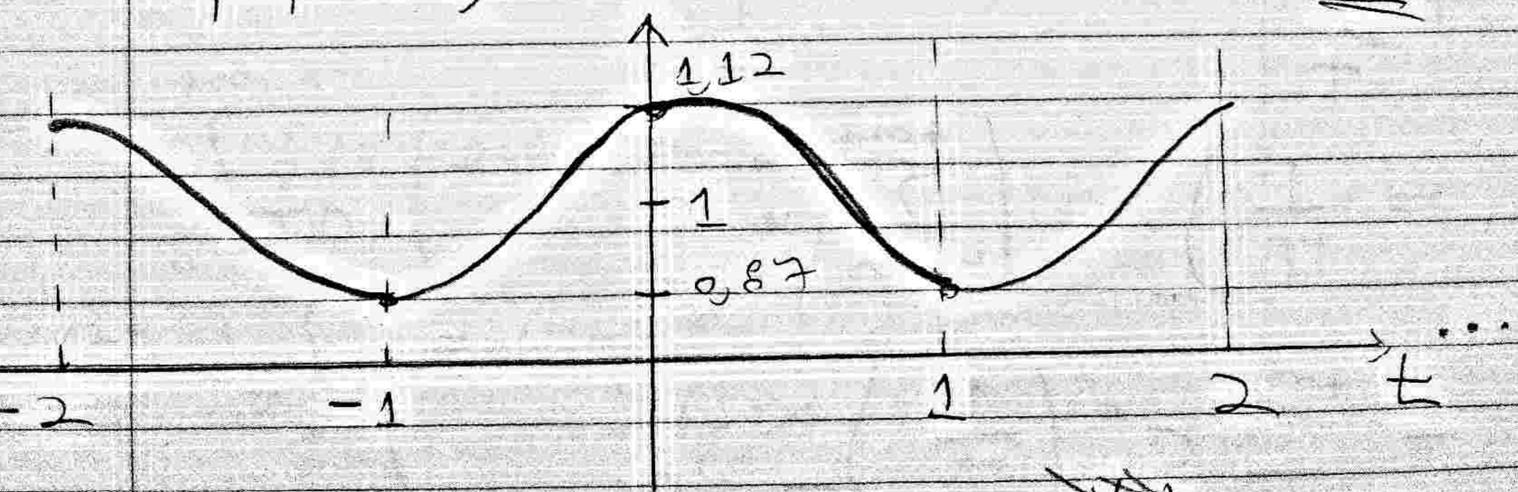
Ενώ $b_m = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y(t)\sin(m\pi t)\,dt$

$$= \frac{2}{2}\int_{-1}^{1}\sin(m\pi t)\,dt + \frac{1}{16}\int_{-1}^{1}\cos(\pi t)\sin(\pi m t)\,dt$$

όμως $\sin(\pi m t)$ και $\cos(\pi t)\cdot\sin(\pi m t)$ είναι περιττές συναρτήσεις στο συμμετρικό διάστημα $(-1, 1)$ οπότε είναι μηδέν.

$$\boxed{b_m = 0}$$

=> Γραφική $y(t) = 1 + \cos(\pi t)/8$ $\forall t$



$\cancel{\forall t}$

$y(min) = 1 - 1/8 = 0,87$
$y(max) = 1 + 1/8 = 1,12$
σε παράθυρο $[-2, 2]$

δ) $X(t)$: περιοδικό σήμα
T: Θεμελιώδη περίοδο
C_n: συντελεστής μιγαδικής Fourier

ΝΔο $$\frac{1}{T}\int_T |X(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n|^2$$

Για περιοδικά σήματα έχουμε $X(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega_0 t}$

οπότε το συζυγές του

$$X^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^* e^{-jn\omega_0 t} \quad (1)$$

επειδή $\left(e^{ja}\right)^* = e^{-ja}$

Ισχύει ότι $|X(t)|^2 = X(t)\cdot X^*(t)$

$$\frac{1}{T}\int_T |X(t)|^2 dt = \frac{1}{T}\int_T X(t)\cdot X^*(t)\, dt \overset{(1)}{=}$$

$$= \frac{1}{T}\int_T X(t)\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^* e^{-jn\omega_0 t}\right) dt$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^* \left(\frac{1}{T}\int_T X(t) e^{-jn\omega_0 t}\right) dt \overset{(2)}{=}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^* C_n\, dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n|^2$$

από την σχέση (2) $C_n = \frac{1}{T}\int_T x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$

που ισχύει μόνο για περιοδικά σήματα. $\boxed{//}$

Άσκηση 2.2

Μετασχηματισμός Fourier $X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$.
(για συνεχή σήματα)

a) $x(t) = [t \cdot e^{-2t} \cdot \sin(7t)]\, u(t)$

$X(\omega) = \int^{+\infty} [t e^{-2t} \cdot \sin(7t)]\, u(t)\, e^{-j\omega t} dt$

Άσκηση 22

α) $x(t) = [t e^{-2t} \sin(7t)] u(t)$

Ισχύει η ιδιότητα $t \cdot x(t) \rightleftharpoons j \frac{dX(w)}{dw}$

Θεωρούμε $y(t) = t e^{-2t} u(t)$
$\Rightarrow$ Fourier

$Y(w) = F[y(t)] = F(t e^{-2t} u(t))$

Όμως από το πολλάπλο έχουμε $e^{-at} u(t) \rightleftharpoons \frac{1}{(a+jw)}$

$$Y(w) = j \frac{d}{dw}\left(\frac{1}{(2+jw)}\right) = j\left(\frac{-j}{(2+jw)^2}\right)$$

$$= \frac{+1}{(2+jw)^2}$$

$X(w) = F[y(t) \cdot \sin(7t)]$

$= F\left[y(t) \frac{1}{2j}\left(e^{j7t} - e^{-j7t}\right)\right]$

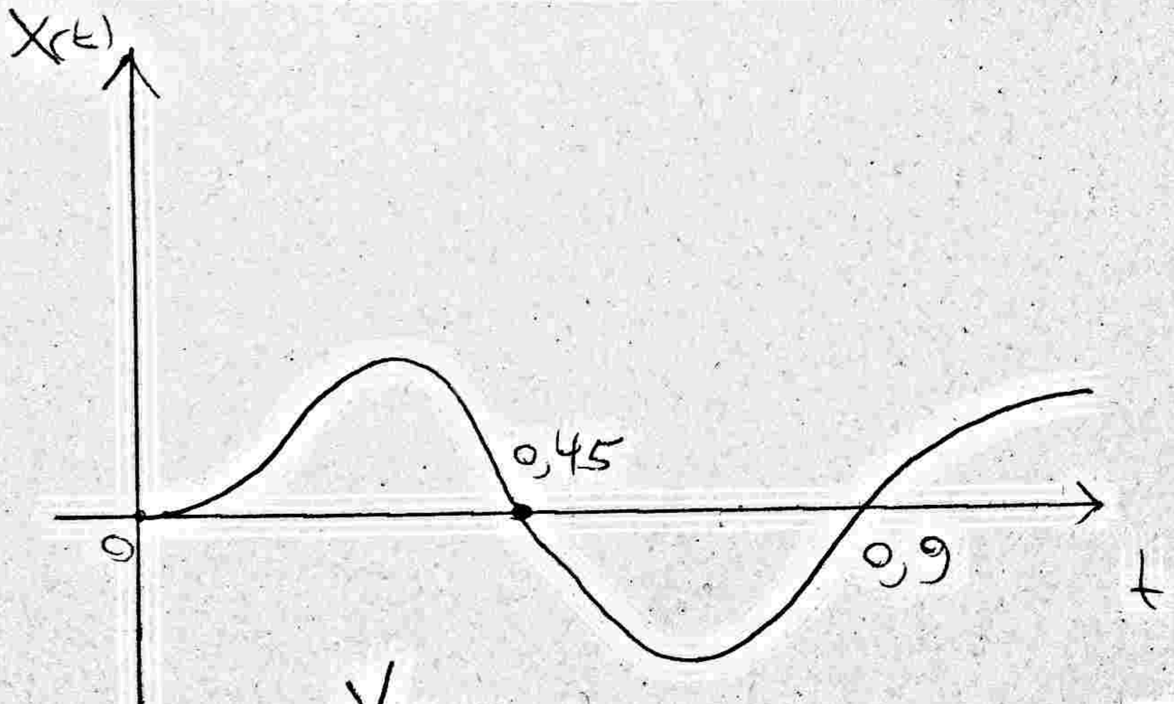
$= \frac{1}{2j} F[y(t) e^{j7t}] - \frac{1}{2j} F[y(t) e^{-j7t}]$

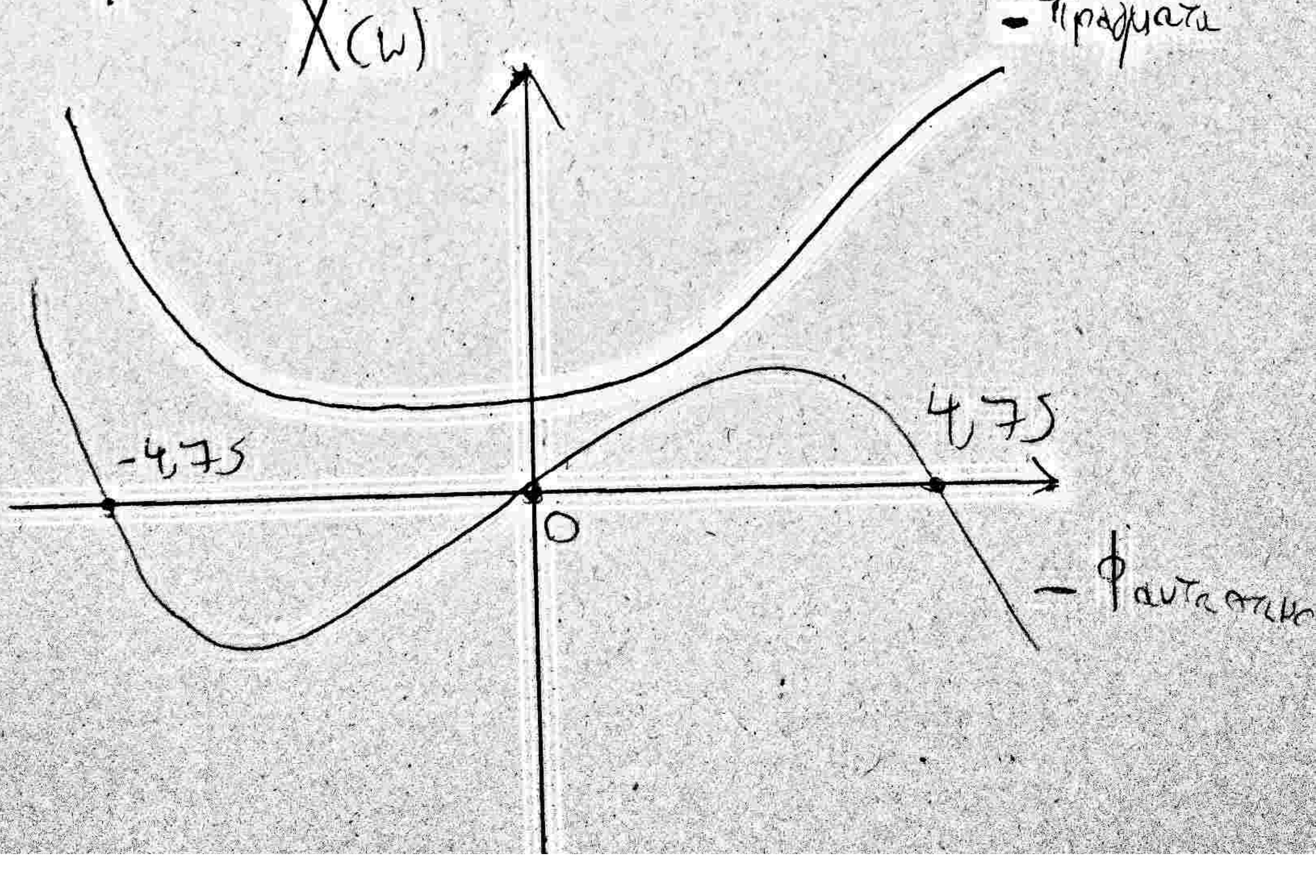
$= \frac{1}{2j}\left(Y(w-7) - Y(w+7)\right)$

Από την ιδιότητα $x(t) e^{ajt} \rightleftharpoons X(w-a)$

Άρα έχουμε

$$\boxed{X(\omega) = \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{(2+j(\omega-7))^2} - \frac{1}{(2+j(\omega+7))^2}\right]}$$





b) $x(t)$ περιοδικό σήμα με περίοδο $\boxed{T = 3\,sec}$

Όπου $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\delta(t-3n-1) - \delta(t-3n+1) \right)$

$$\Rightarrow \quad X(\omega) = \frac{2\pi}{3} e^{-j\omega} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{3} n\right)$$

$$- \frac{2\pi}{3} e^{j\omega} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{3} n\right)$$

~~Από την ιδιότητα~~ $\cancel{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT) \rightleftharpoons} \frac{2\pi}{T}$

Από την ιδιότητα

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT) \rightleftharpoons \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{T} n\right)$$

Επίσης από χρονική ολίσθηση $x(t-t_0) \rightleftharpoons e^{-j\omega t_0} X(\omega)$

Euler $e^{-j\omega} - e^{j\omega} = -2j\sin(\omega)$

Άρα

$$\boxed{X(\omega) = -2j\sin(\omega) \frac{2\pi}{3} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{3} n\right)}$$

Αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier

$$X(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(w)\, e^{jwt}\, dw$$

c) $X(w) = \cos^2(w + \pi/3)$

Διαφορετική μορφή

$$\cos^2(w + \pi/3) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2w + 2\pi/3)$$

Euler

$$= \frac{1}{4} e^{-2j(w+\pi/3)} + \frac{1}{4} e^{2j(w+\pi/3)} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left[e^{2jw} \cdot e^{2j\pi/3} + e^{-2jw} \cdot e^{-2j\pi/3} \right]$$

Όμως ισχύει ότι $\delta(t-t_0) \rightleftharpoons e^{-jwt_0}$

$$F^{-1}(e^{-jwt_0}) = \delta(t-t_0)$$

$$F^{-1}(X(w)) = F^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + F^{-1}\left(\frac{1}{4}\left(e^{2jw} \cdot e^{2j\pi/3}\right.\right.$$
$$\left.\left. + e^{-2jw} \cdot e^{-2j\pi/3}\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x(t) = \frac{1}{2}\delta(t) + \frac{1}{4}e^{2j\frac{\pi}{3}}\delta(t+2) + \frac{1}{4}e^{-2j\frac{\pi}{3}}\delta(t-2)}$$

δ) $X(w) = \dfrac{e^{-jw}}{w^2+5}$, $x(t) \rightleftharpoons X(w)$

Θεωρούμε $Y(w) = \dfrac{1}{w^2+5}$, $y(t) \rightleftharpoons Y(w)$

Αν θέσουμε όπου w το t έχουμε

$$Y(t) = \frac{1}{t^2+5}$$

Από την ιδιότητα του Δυϊσμού έχουμε

$$F(Y(t)) = 2\pi\, y(-w) \quad (1)$$

Απο τον πίνακα του βιβλίου έχουμε

$$F\left(\frac{1}{a^2+t^2}\right) = \frac{\pi}{a} e^{-a|w|}, \quad a>0$$

Απο την σχέση (1)

$$F\left(\frac{1}{t^2+(\sqrt{5})^2}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{5}} e^{-\sqrt{5}|w|}$$

Αρα απο (1) $\frac{\cancel{\pi}}{\sqrt{5}} e^{-\sqrt{5}|w|} = 2\cancel{\pi}\, y(-w)$

Θέτωντας όπου $-w$ το t

$$2y(t) = \frac{e^{-\sqrt{5}|-t|}}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{2\sqrt{5}} e^{-\sqrt{5}|t|}$$

Απο την ιδιότητα της ολίσθησης

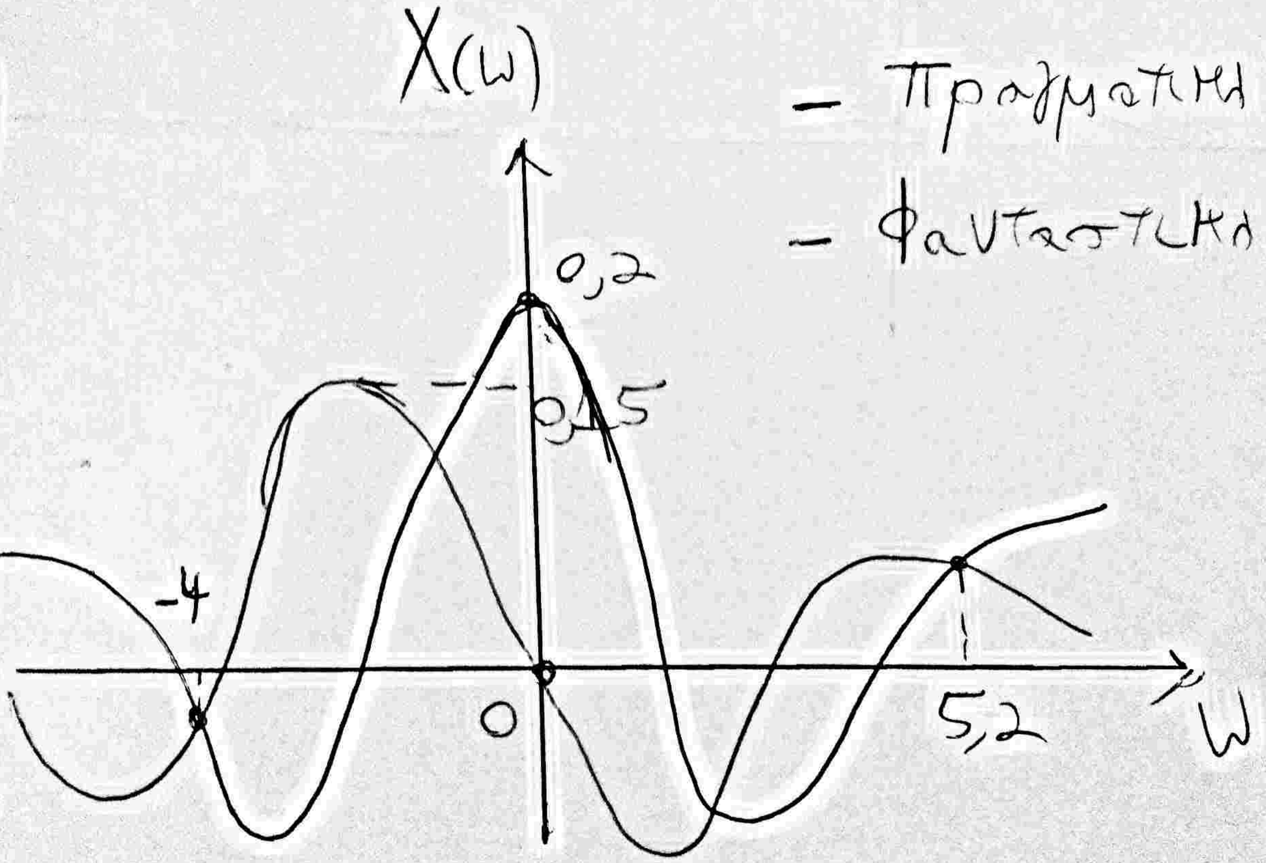
$$x(t-t_0) \rightleftharpoons \exp(-Jwt_0)\, X(w)$$

Απο την αρχική σχέση έχουμε

$$X(w) = e^{-Jw} \cdot Y(w) = e^{-Jw} \cdot F(y(t))$$

$$\boxed{x(t) = y(t-1) = \frac{e^{-\sqrt{5}|t-1|}}{2\sqrt{5}}}$$

γ)



Άσκηση 2.3 $\quad a = (19840) \bmod 10 + 2$

$\Rightarrow \boxed{a=2}$

α) $x[n] = n\left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$

$$x[n] = \begin{cases} n\, 2^{-n}, & n \geq 0 \\ n\, 2^{n}, & n < 0 \end{cases}$$

Από τον ορισμό $X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-j\Omega n}$

$$= \sum_{n=-\infty}^{0} n\left(\frac{1}{2}\right)^{-n} e^{-j\Omega n} + \sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n} e^{-j\Omega n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{0} n\left(\frac{1}{2} e^{+j\Omega}\right)^{-n} + \sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{2} e^{-j\Omega}\right)^{n}$$

• $\sum_{n=1}^{+\infty} n X^{n}, \quad X = \frac{1}{2} e^{-j\Omega}$

Όμως • $\frac{d}{dX}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} X^{n}\right) = \frac{1}{X} \sum_{n=1}^{+\infty} n X^{n}$

από γεωμετρική σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} X^{n} = \frac{-X}{X-1}$

$\Rightarrow$ Παραγωγίζοντας και στα δύο μέλη

$$\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n} = \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n} = \frac{x}{(x-1)^2}$$

για $x = \frac{1}{2} e^{-j\Omega}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{1}{2} e^{-j\Omega}\right)^{n} = \frac{\frac{1}{2} e^{-j\Omega}}{\left(\frac{1}{2} e^{-j\Omega} - 1\right)^2}$$

Ομοίως $\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=-\infty}^{0} x^{-n}\right) = \sum_{n=-\infty}^{0} (-n) x^{-n-1}$

$$= -\frac{1}{x}\sum_{n=-\infty}^{0} n x^{-n}$$

Απο γεωμετρική σειρά $\sum_{n=-\infty}^{0} x^{-n} = \frac{1}{1-x}$

$\Rightarrow$ παραγωγίζοντας

$$-\frac{1}{x}\sum_{n=-\infty}^{0} n x^{-n} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{0} n x^{-n} = \frac{-x}{(1-x)^2}$$

(2)

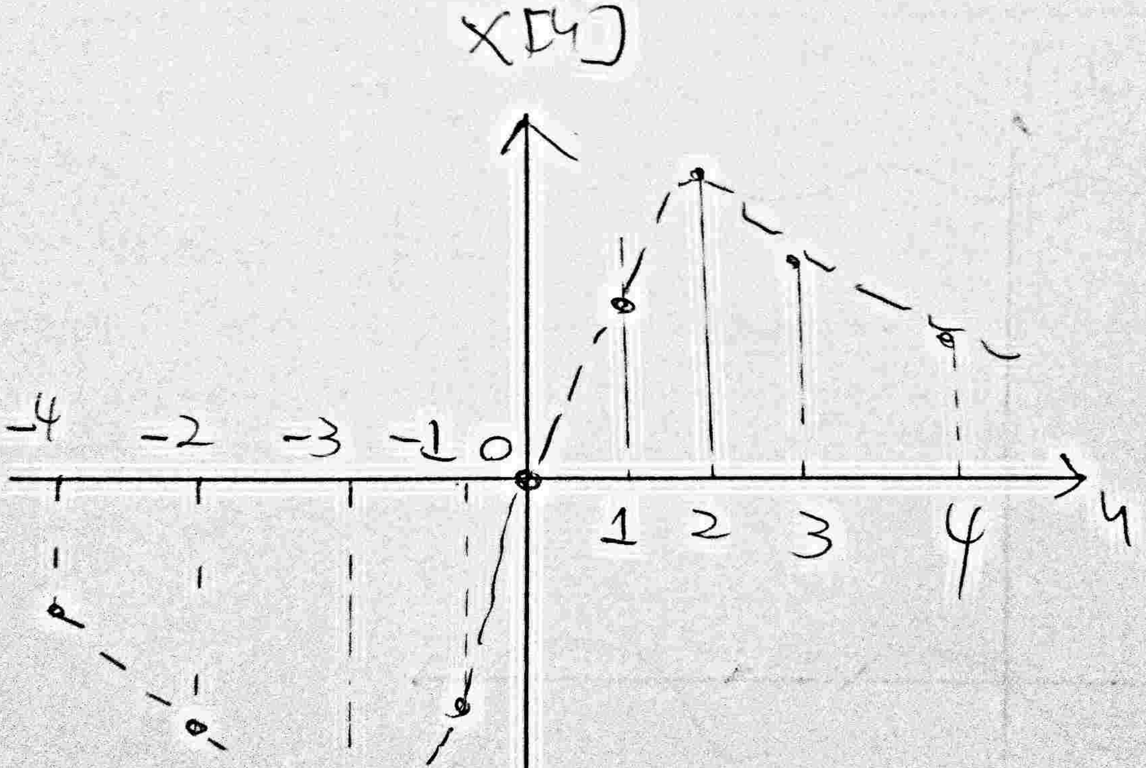
για $x = \frac{1}{2} e^{j\Omega}$

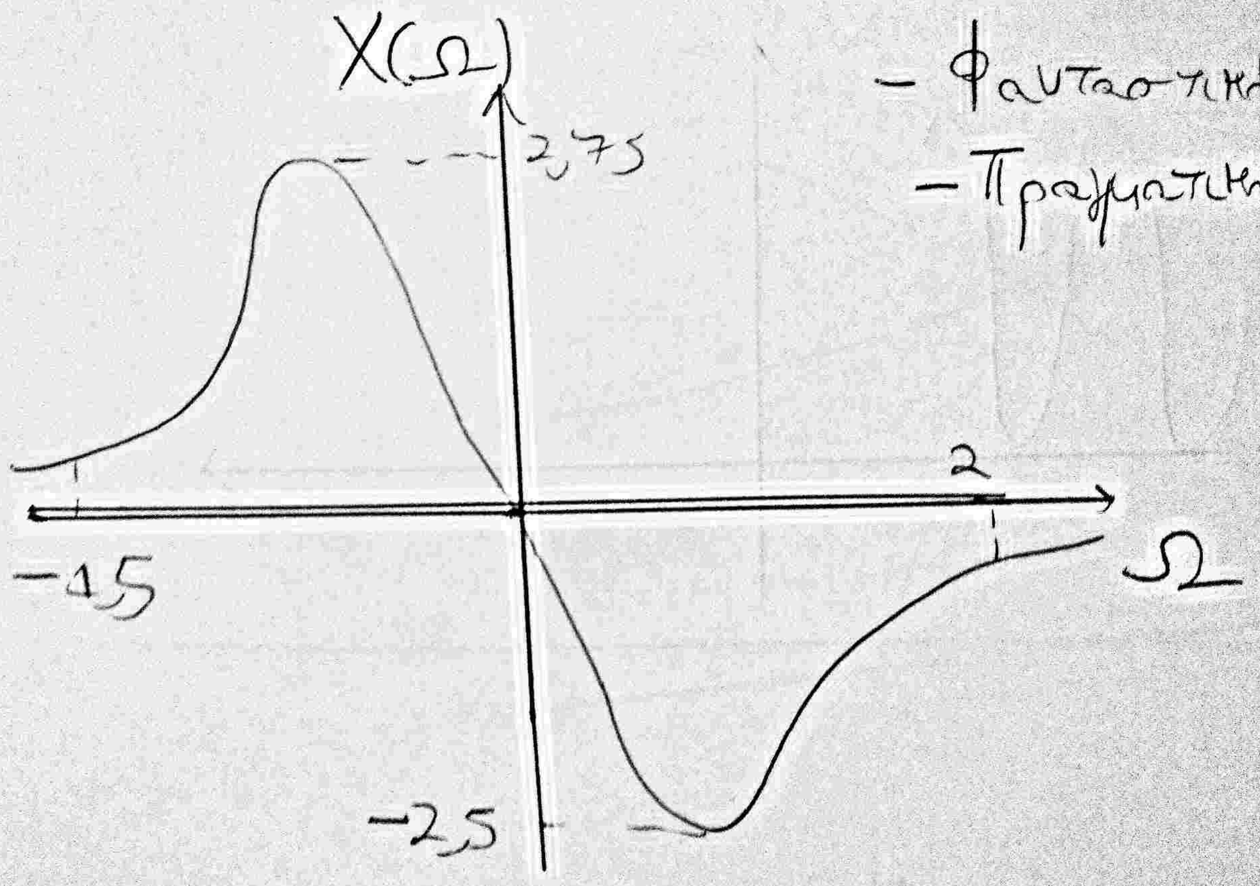
$$\sum_{n=-\infty}^{0} n \left(\frac{1}{2} e^{j\Omega}\right)^{-n} = \frac{-\frac{1}{2} e^{j\Omega}}{\left(1 - \frac{1}{2} e^{j\Omega}\right)^2}$$

Οπότε συνολικά

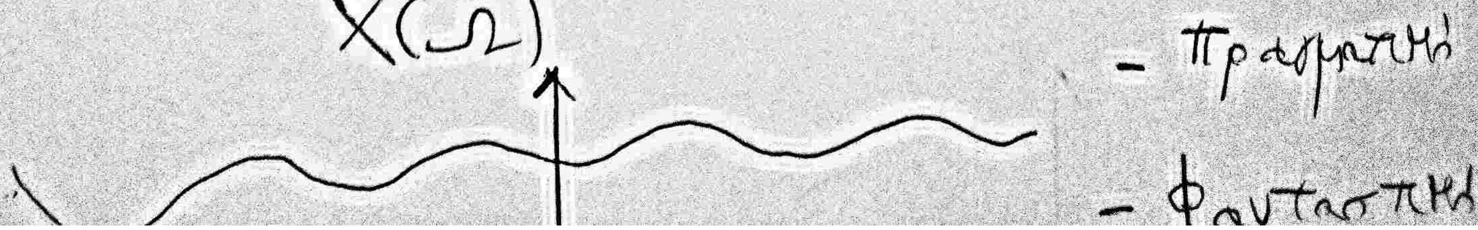
$$\boxed{X(\Omega) = \frac{\frac{1}{2} e^{-j\Omega}}{\left(\frac{1}{2} e^{-j\Omega} - 1\right)^2} - \frac{\frac{1}{2} e^{j\Omega}}{\left(1 - \frac{1}{2} e^{j\Omega}\right)^2}}$$

e)




X(Ω)
2,75
- Φανταστική
- Πραγματική
2
-1,5
Ω
-2,5

b)


X(Ω)
- Πραγματική
- Φανταστική

b) $x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n \sum_{k=0}^{+\infty} \delta[n-3k]$

Ώστε το $x[n]$ να είναι μη μηδενικό

πρέπει $\delta[n-3k]=1 \Rightarrow n=3k, k\in N$

$n=3k, \quad k=0,1,2,3,\dots$

Άρα $x[n]$ υπάρχει για $n=0,3,6,9,\dots$

Για DTFT Ισχύει $\delta[n-n_0] \rightleftharpoons e^{-j\Omega n_0}$

Άρα $\left(\frac{1}{4}\right)^n \delta[n-n_0] \stackrel{\circ}{=} \left(\frac{1}{4}\right)^{n_0} \delta[n_0-n] =$

$= \left(\frac{1}{4}\right)^{n_0} \delta[n-n_0]$, γιατί μας νοιάζ $n-n_0=0$

$\Rightarrow$ Fourier από $n \rightarrow w$ (n_0 σταθερό)

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{n_0} \delta[n-n_0] \rightleftharpoons \left(\frac{1}{4}\right)^{n_0} e^{-j\Omega n_0}$$

Για $n_0=3k$ έχουμε $\left(\frac{1}{4}\right)^{3k} \delta[n-3k] \rightleftharpoons \left(\frac{1}{4}\right)^{3k} e^{-j\Omega 3k}$

$$x[n] = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n \delta[n-3k]$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{3k} \delta[n-3k]$$

$\Rightarrow$ Fourier μετασχηματισμός $n \longrightarrow w$

$$X(w) = \sum_{K=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{3K} F(\delta[n-3K])$$

Άρα $\boxed{X(\Omega) = \sum_{K=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{3K} e^{-j\Omega 3K}}$

$$X(\Omega) = \sum_{K=0}^{+\infty} \left(\left(\frac{1}{4}\right)^{3} \cdot e^{-j\Omega 3}\right)^{K}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{4} e^{-j\Omega}\right)^{\infty} - \left(\frac{1}{4} e^{j\Omega}\right)^{0}}{\left(\frac{1}{4} e^{-j\Omega}\right)^{3} - 1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{64 e^{+3j\Omega}}}$$

$$\boxed{X(\Omega) = \frac{1}{1 - \frac{1}{64 e^{3j\Omega}}}}$$

Αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

(ορισμός) $x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} X(\Omega)\, e^{j\Omega n}\, d\Omega$

c) $X(\cancel{n}\Omega) = e^{-2j\Omega} \frac{\sin(7\Omega/2)}{\sin(\Omega/2)} * \frac{\sin(2\Omega/2)}{\sin(\Omega/2)}$

Έστω $x[n]$, $y[n]$ δύο διακριτά σήματα

$$F[x[n]\cdot y[n]] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\cdot y(n)\, e^{-j\Omega n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} Y(\Omega')\, e^{j\Omega' n}\, d\Omega'\right) e^{-j\Omega n}$$

$$= \int_{-\pi}^{+\pi} Y(\Omega') \frac{1}{2\pi}\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{j\Omega' n - j\Omega n}\right) d\Omega'$$

$$= \int_{-\pi}^{+\pi} Y(\Omega') \frac{1}{2\pi} X(\Omega - \Omega')\, d\Omega'$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} Y(\Omega')\, X(\Omega - \Omega')\, d\Omega'.$$

Όμως στον διακριτό χρόνο αναφερόμαστε σε συνέλιξη διάρκειας μιας περιόδου αφού στο διακριτό έχουμε πάντα περιοδικό σήμα, δηλαδή δείξαμε ότι

$$(1) \quad x[n]\cdot y[n] \rightleftharpoons \frac{1}{2\pi} X(\omega) * Y(\omega)$$

Άρα έχουμε

$$F^{-1}\left\{\left(\frac{\sin(7\Omega/2)}{\sin(\Omega/2)} * \frac{\sin(3\Omega/2)}{\sin(\Omega/2)}\right)\right\} \overset{(1)}{=}$$

$$= 2\pi\, F^{-1}\left\{\frac{\sin(7\Omega/2)}{\sin(\Omega/2)}\right\}\cdot F^{-1}\left\{\frac{\sin(3\Omega/2)}{\sin(\Omega/2)}\right\}$$

Από το τυπολόγιο του βιβλίου έχουμε

$$x[n] = \begin{cases} 1, & |n| \le N_1 \\ 0, & |n| > N_1 \end{cases}, \quad \text{τότε}$$

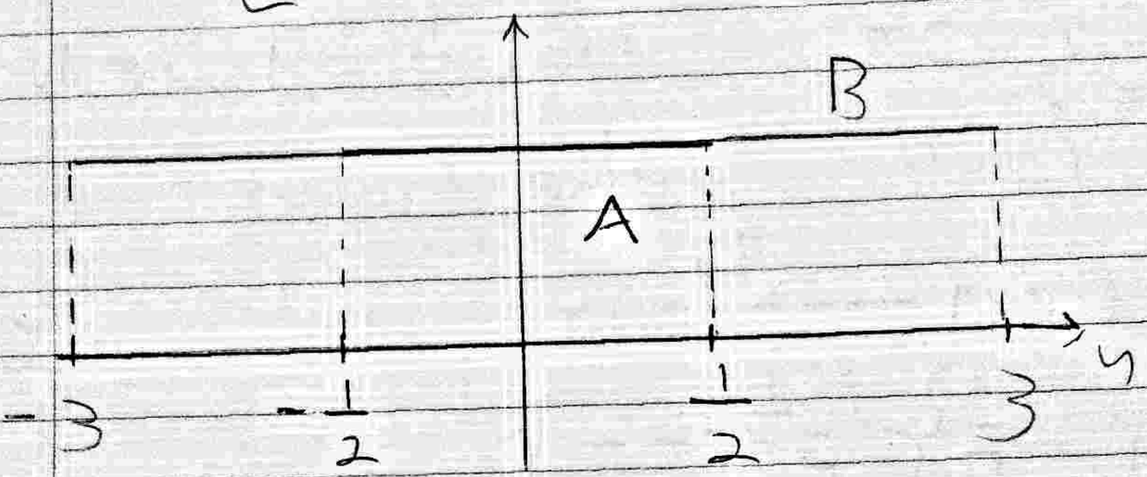
$\Rightarrow$ Fourier

$$F[x[n]] = \frac{\sin\left[\Omega\left(N_1+\frac{1}{2}\right)\right]}{\sin(\Omega/2)}$$

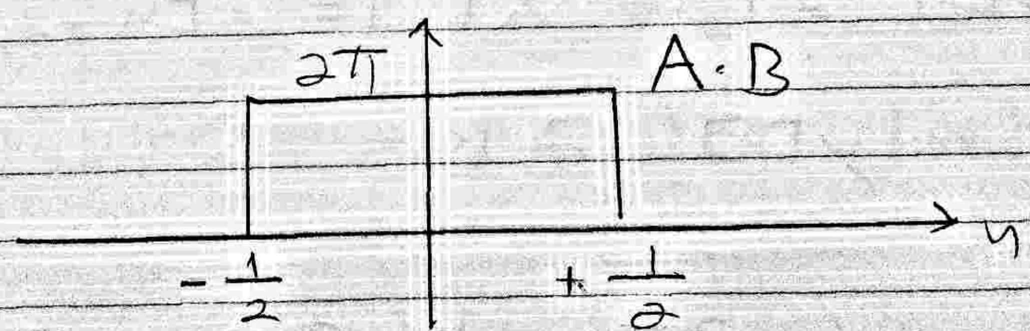
Άρα

$$A = \cancel{B} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{\sin(7\Omega/2)}{\sin(\Omega/2)}\right\} = \begin{cases} 1, & |n| \le 3 \\ 0, & |n| > 3 \end{cases}$$

$$B = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{\sin(\Omega)}{\sin(\Omega/2)}\right\} = \begin{cases} 1, & |n| \le \frac{1}{2} \\ 0, & |n| > \frac{1}{2} \end{cases}$$



Όμως θέλουμε το γινόμενο $A \cdot B$ δηλαδή το κοινό τους υποσύνολο



$\Rightarrow$ Αντίστροφο Fourier στην αρχική σχέση

$$\mathcal{F}^{-1}(X(\cancel{j\Omega})) = \mathcal{F}^{-1}\left\{ e^{-2j\Omega} \cdot \frac{\sin(7\Omega/2)}{\sin(\Omega/2)} * \frac{\sin(\Omega)}{\sin(\Omega/2)} \right\}$$

$\Rightarrow$ ολίσθηση

Για λόγους ευκολίας θεωρούμε

$$Y(\omega) = \frac{\sin(7\Omega/2)}{\sin(\Omega/2)} * \frac{\sin(\Omega)}{\sin(\Omega/2)}$$

$$y(n) = \begin{cases} 2\pi, & n \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}], n \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

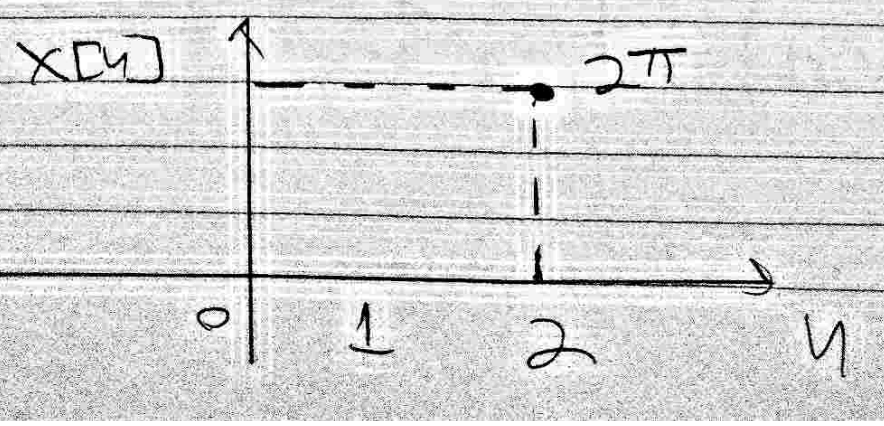
όπου $y[n] \rightleftharpoons Y(\omega)$

$$F^{-1}(X(\omega)) = F^{-1}\{e^{-j\Omega \cdot 2} Y(\omega)\}$$

$$= y[n-2] \Leftrightarrow X[n] = y[n-2]$$

μετατόπιση $y[n]$ 2 κατά δεξιά

$$\boxed{X[n] = \begin{cases} 2\pi, & n = 2, \; n \in [\frac{3}{2}, \frac{5}{2}] \\ 0, & \text{else} \end{cases}}$$



δ) $X(\Omega) = \dfrac{1}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega})^3}$

Απο το τυπολόγιο του βιβλίου

$$\frac{(n+r-1)!}{n!\,(r-1)!}\,a^n u[n] \underset{F^{-1}}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \frac{1}{(1-ae^{-j\Omega})^r}$$

όπου $|a| < 1$.

Για $r=3$ έχουμε, $a=\frac{1}{2}$

$$\frac{(n+2)!}{n!\,(3-1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \underset{F^{-1}}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \frac{1}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega})^3}$$

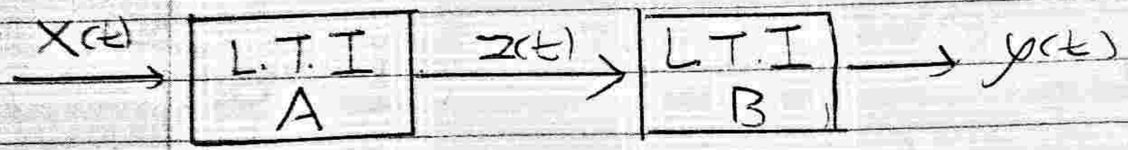
Οπότε έχουμε $X[n] = \dfrac{(n+2)(n+1)\cdot n!}{2!\;n!}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

$$\boxed{X[n] = \frac{(n+2)(n+1)}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]}$$

Άσκηση 2.4

Δίνονται • $\frac{dz(t)}{dt} + 6\, z(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 5\, x(t)$

• $h_B(t) = t \cdot e^{-10t} u(t)$



α) Εύρεση $H(\omega)$.

Από την ιδιότητα $\frac{dx(t)}{dt} \underset{F^{-1}}{\overset{F}{\rightleftarrows}} (j\omega)\, X(\omega)$

=> Fourier στην διαφορική εξίσωση

$$(j\omega)\, Z(\omega) + 6\, Z(\omega) = (j\omega)\, X(\omega) + 5\, X(\omega)$$

$$Z(\omega)\,(j\omega + 6) = X(\omega)\,(j\omega + 5) \quad (1)$$

Αν θεωρήσουμε $h_A(t) \rightleftharpoons H_A(\omega)$ κρουστική απόκριση στο L.T.I A

$$Z(\omega) = H_A(\omega)\, X(\omega) \overset{(1)}{\Longrightarrow}$$

$$\boxed{\bullet \; H_A(\omega) = \frac{j\omega + 5}{j\omega + 6} = 1 - \frac{1}{j\omega + 6}}$$

Ακόμη $h_B(t) \rightleftarrows H_B(\omega)$, $h_B(t) = t e^{-10t} u(t)$

Ισχύει $t \cdot x(t) \rightleftarrows j \dfrac{dX(\omega)}{d\omega}$

$$F(h_B(t)) = F\left(t\left(e^{-10t} u(t)\right)\right) = j \frac{d}{d\omega}\left(F\left(e^{-10t} u(t)\right)\right)$$

όμως $\underset{a>0}{e^{-at} u(t)} \rightleftarrows \dfrac{1}{a+j\omega}$

$$H_B(\omega) = F(h_B(t)) = j \frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{10+j\omega}\right) = \frac{-j^2}{(10+j\omega)^2}$$

$$= \frac{1}{(j\omega+10)^2} \Rightarrow \boxed{H_B(\omega) = \frac{1}{(j\omega+10)^2}} = A$$

Επειδή $h_A(t), h_B(t)$ είναι συνδεδεμένα σε σειρά ισχύει ότι η συνολική απόκριση του συστήματος είναι

$$h(t) = h_A(t) * h_B(t) \rightleftarrows H_A(\omega) \cdot H_B(\omega) = H(\omega)$$

Άρα

$$\boxed{H(\omega) = \frac{j\omega + 5}{(j\omega+6)(j\omega+10)^2}}$$

B) Εύρεση $h(t) \rightleftharpoons H(\omega)$

$$\frac{j\omega+5}{(j\omega+6)(j\omega+10)^2} = \frac{A}{j\omega+6} + \frac{Bj\omega+\Gamma}{(j\omega+10)^2}$$

$$j\omega+5 = A(j\omega+10)^2 + (B\omega+\Gamma)(j\omega+6) \Rightarrow$$

$$j\omega+5 = A(-\omega^2+10^2+20j\omega) + B(j\omega^2+6\omega) + \Gamma(j\omega+6) \Rightarrow$$

$$j\omega+5 = \omega^2(-A+jB) + \omega(20jA+6B+j\Gamma) + (100A+6\Gamma)$$

Απο ισότητα πολυωνύμων έχουμε

$$A = jB \ (1) \qquad j = 20jA + j\Gamma + 6B \ (2)$$

$$100A + 6\Gamma = 5 \ (3)$$

$$\overset{(1)}{\underset{(2)}{\Longrightarrow}} \ j = 20j^2B + j\Gamma + 6B$$

$$\Rightarrow j = j\Gamma - 14B \ (4)$$

$$\overset{(3)}{\underset{(1)}{\Longrightarrow}} \ 10^2 jB + 6\Gamma = 5 \ (5)$$

$$J(4) \overset{(5)}{\Longrightarrow} -1 = -\Gamma - 14\left(\frac{5-6\Gamma}{100}\right)$$

$$-100 = -100\Gamma - 14(5-6\Gamma) \Leftrightarrow$$
$$-100 = -100\Gamma - 70 + 84\Gamma \Leftrightarrow$$
$$-30 = -16\Gamma$$

$$\boxed{\Gamma = \frac{15}{8}}$$

$$(3) \Rightarrow A = \frac{5-6\Gamma}{100} = \frac{-25}{4}\,\frac{1}{4 \cdot 25}$$

$$\boxed{A = \frac{-1}{16}}$$

$$J(1) \Rightarrow -B = AJ = \frac{-J}{16} \Rightarrow \boxed{B = \frac{J}{16}}$$

Οπότε

$$H(\omega) = -\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{J\omega+6} + \frac{30}{16}\,\frac{1}{(J\omega+10)^2}$$
$$+\frac{1}{16}\,\frac{(J\omega)}{(J\omega+10)^2}$$

Όμως $\frac{J\omega}{(J\omega+10)^2} = \frac{(J\omega+10-10)}{(J\omega+10)^2} = \frac{J\omega+10}{(J\omega+10)^2} - \frac{10}{(J\omega+10)^2}$

$$= \frac{1}{(J\omega+10)} - \frac{10}{(J\omega+10)^2}$$

$$H(\omega) = -\frac{1}{16}\,\frac{1}{j\omega+6} + \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{j\omega+10} - \frac{10}{16}\,\frac{1}{(j\omega+10)^2}$$

$$+\frac{30}{16}\,\frac{1}{(j\omega+10)^2}$$

Απο το βιβλίο έχουμε τις ιδιότητες

- $e^{-at}u[t] \rightleftharpoons \frac{1}{\alpha+j\omega}$

- $t\,e^{-at}u[t] \rightleftharpoons \frac{1}{(\alpha+j\omega)^2}$

$$h(t) = F^{-1}(H(\omega)) = -\frac{e^{-6t}u(t)}{16} + \frac{e^{-10t}u(t)}{16} - \frac{10t\,e^{-10t}u(t)}{16}$$

$$+\frac{30t\,e^{-10t}u(t)}{16}$$

$$\Rightarrow \boxed{h(t) = \frac{u(t)}{16}\left(-e^{-6t} + e^{-10t}(1+20t)\right)}$$

c) Αναζητώ διαφορική $x(t), y(t)$

Ισχύει $y(t) = z(t) * h_B(t) \Rightarrow$ Fourier

$$Y(\omega) = Z(\omega) H_B(\omega) = \frac{Z(\omega)}{(j\omega+10)^2}$$

$$\Rightarrow Z(\omega) = (j\omega+10)^2 Y(\omega)$$

Την οποία αντικαθιστούμε στην (1) απο το (α) ερώτημα

$$(1) \Rightarrow (j\omega+6) Z(\omega) = X(\omega)(j\omega+5). \Leftrightarrow$$

$$(j\omega+6)(j\omega+10)^2 Y(\omega) = X(\omega)(j\omega+5) \Leftrightarrow$$

$$((j\omega)^2 + 20 j\omega + 10^2)(j\omega+6) Y(\omega) = X(\omega)(j\omega+5) \Leftrightarrow$$

$$((j\omega)^3 + 6(\omega j)^2 + 10^2(j\omega) + 600 + 20(j\omega)^2 + 120(j\omega)) Y(\omega) = (j\omega+5) X(\omega)$$

$$[(j\omega)^3 + 26(j\omega)^2 + 220(j\omega)] Y(\omega) = (j\omega+5) X(\omega)$$

Ισότητα $\frac{d^n x(t)}{dt^n} \rightleftharpoons (j\omega)^n X(\omega)$

$\Rightarrow$ Αντίστροφος Fourier

$$\boxed{\frac{d^3 y(t)}{dt^3} + 26 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 220 \frac{dy(t)}{dt} + 600 y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 5x(t).}$$

δ) Αν $x(t) = e^{-5t+5} u(t-1)$
Να βρεθούν $z(t), y(t)$.

• Ισχύει $e^{-at} u(t) \rightleftharpoons \frac{1}{a+jw}$

• $F(x(t+1)) = F\{e^{-5t-5+5} u(t)\}$

$$= F\{e^{-5t} u(t)\} = \frac{1}{5+jw}$$

Ιδιότητα ολίσθησης στον χρόνο

$$x(t-t_0) \rightleftharpoons e^{-jwt_0} X(w)$$

$$X(t+1-1) \rightleftharpoons e^{-jw} \frac{1}{5+jw}$$

Άρα $\boxed{X(w) = \frac{e^{-jw}}{jw+5}}$

Ισχύει $z(t) = h_A(t) * x(t) \overset{Fourier}{\Longrightarrow}$

$$Z(w) = H_A(w) \cdot X(w)$$

$$Z(\omega) = \frac{e^{-j\omega}}{(j\omega+5)} \cdot \frac{(j\omega+5)}{(j\omega+6)} = \frac{e^{-j\omega}}{j\omega+6}$$

$$z(t) = F^{-1}\{Z(\omega)\} = F^{-1}\left\{e^{-j\omega} \frac{1}{j\omega+6}\right\}$$

όπου $\frac{1}{j\omega+6} \xrightarrow{F^{-1}} e^{-6t} u(t)$

$$z(t) = e^{-6(t-1)} u(t-1)$$

$$\Rightarrow \boxed{z(t) = e^{-6t} \cdot e^{6} u(t-1)}$$

- $y(t) = x(t) * h(t) = z(t) * h_B(t)$

$\Rightarrow$ Fourier

$$Y(\omega) = X(\omega) H(\omega) = Z(\omega) H_B(\omega)$$

$$\boxed{Y(\omega) = e^{-j\omega} \cdot \frac{1}{(j\omega+6)(j\omega+10)^2}}$$

Θεωρούμε

$$P(\omega) = \frac{1}{(j\omega+6)(j\omega+10)^2}$$

$$\frac{1}{(x+6)(x+10)^2} = \frac{A}{(x+6)} + \frac{B}{(x+10)} + \frac{\Gamma}{(x+10)^2}$$

$$1 = A(x+10)^2 + B(x+6)(x+10) + \Gamma(x+6)$$

$$1 = x^2(A+B) + x(20A + 16B + \Gamma) + (100A + 60B + 6\Gamma)$$

Από ισότητα πολυωνύμων

$$\left.\begin{aligned} 100A + 60B + 6\Gamma &= 1 \\ 20A + 16B + \Gamma &= 0 \\ A + B &= 0 \end{aligned}\right| \Rightarrow$$ Λύνουμε το σύστημα

$$A = \frac{1}{16}, \quad B = \frac{-1}{16}, \quad \Gamma = -\frac{1}{4}$$

οπότε για $x = j\omega$ έχουμε

$$P(\omega) = -\frac{1}{16(x+10)} - \frac{1 \cdot 4}{16(x+10)^2} + \frac{1}{16(x+6)}$$

Από την ιδιότητα $\cdot\ e^{-at}u(t) \rightleftharpoons \frac{1}{j\omega + a}$

$$\cdot\ t e^{-at} u(t) \rightleftharpoons \frac{1}{(j\omega + a)^2}$$

=> Αντίστροφος Fourier

$$p(t) = \frac{u(t)}{16}\left(e^{-6t} - 4te^{-10t} - e^{-10t}\right)$$

$$p(t) = \frac{u(t)}{16}\left(e^{-6t} - e^{-10t}(4t+1)\right)$$

$$p(t) \rightleftharpoons P(\omega)$$

Από ολίσθηση σε χρόνο $x(t-t_0) \rightleftharpoons e^{-j\omega t_0} X(\omega)$

$$p(t-1) \rightleftharpoons e^{-j\omega} \frac{1}{(j\omega+6)(j\omega+10)^2} = Y(\omega)$$

Άρα $y(t) = p(t-1)$ =>

$$\boxed{y(t) = \frac{u(t-1)}{16}\left[e^{-6(t-1)} - e^{-10(t-1)}(4t-3)\right]}$$

$$x_1(t) \rightleftharpoons X_1(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq 100\pi \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

$$x_2(t) \rightleftharpoons X_2(\omega), \quad X_2(\omega) = 0, \ |\omega| > 160\pi$$

(ζωνοπεριορισμένο σήμα)

Τα σήματα $x_1(t)$ και $x_2(t)$ είναι ζωνοπεριορισμένα με εύρος $\omega_{M1} = 100\pi$ και $\omega_{M2} = 160\pi$ αντίστοιχα.
Για να μπορεί να ανακατασκευαστεί ένα σήμα $y(t)$ από τα δείγματά του, σύμφωνα με το Θεώρημα δειγματοληψίας Shannon, ο ρυθμός δειγματοληψίας πρέπει να ξεπερνάει το όρι Nyquist δηλαδή

$$Y(\omega) = 0, \ |\omega| > \omega_M, \quad \omega_s > 2\omega_M$$

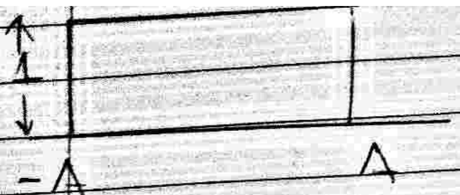
$$\Rightarrow T_s < \frac{\pi}{\omega_M}, \quad \omega_M = \text{μέγιστη συχνότητα } Y(\omega).$$

α) $y(t) = x_1^2(t) + x_2(t)$

$\Rightarrow$ Fourier $\quad Y(\omega) = X_1(\omega) * X_2(\omega) + X_2(\omega)$

Θεωρούμε $A(t) \overset{2\pi}{=} x_1(t) \cdot x_1(t) \rightleftharpoons A(\omega) = X_1(\omega) * X_2(\omega)$

$A(\omega)$: συνέλιξη ενός παλμού από -100π έως 100π.



$x(t) * x(t) = ;$

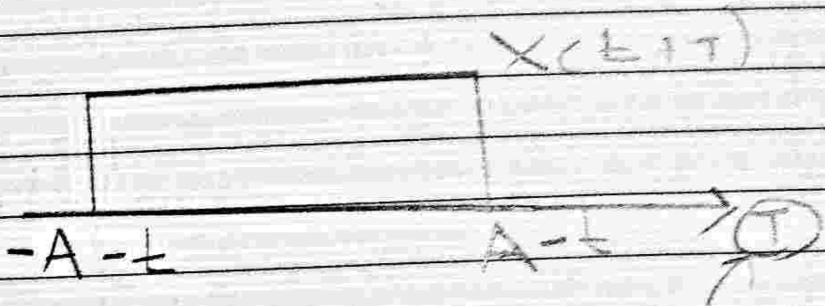
$-A \leq t \leq A \quad , \quad x(t) = 1$

Λύση

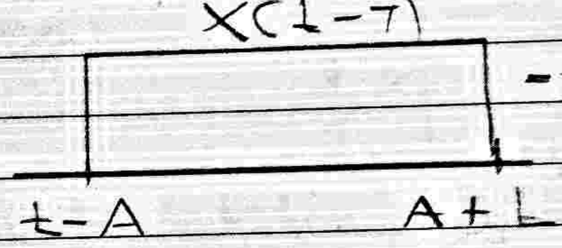
$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau$$

=> Γραφική

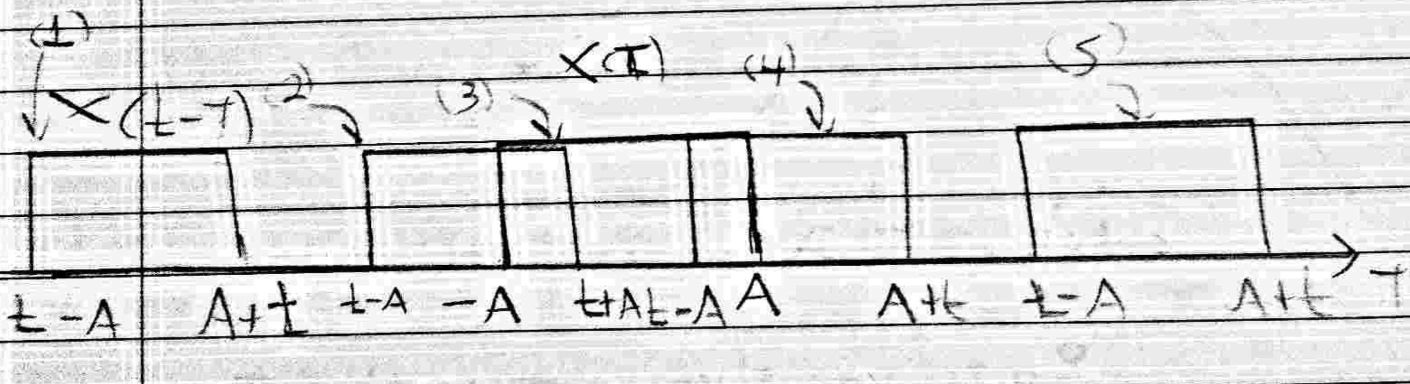
- Μετατόπιση



- ανάκλαση



-> Τα άκρα ανεξάρτητα αλλάζουν Θέση + Πρόσημο



1) $A + t < -A \Leftrightarrow \underline{t < -2A} \Rightarrow y(t) = 0$

2) $\underline{-2A \leq t < 0} \quad (t - A < -A)$

- $x(t-\tau) = 1$ για $-A \leq t - \tau \leq A$

$-A - t \leq -\tau \leq A - t$

$\Rightarrow t - A \leq \tau \leq A + t$

$$\Rightarrow y(t) = \int_{-A}^{t+A} 1 \cdot 1 \, d\tau = t + A + A = 2A + t$$

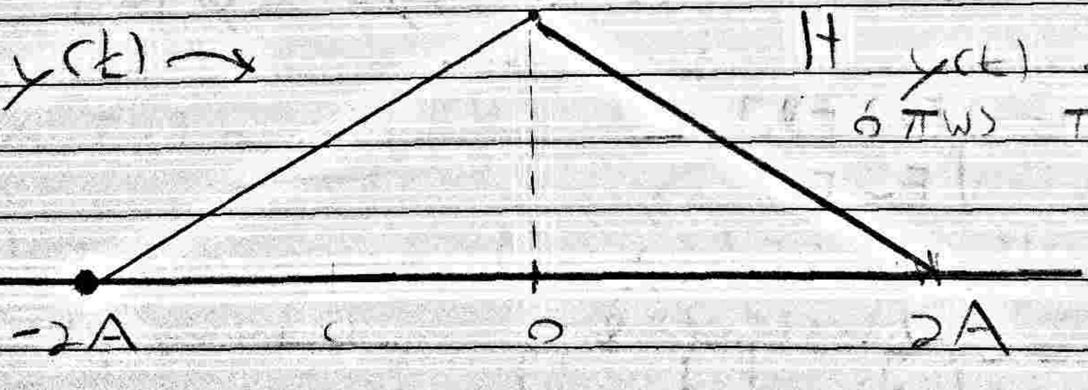
3) $0 \leq t \leq 0 \quad (A + t < A) \Rightarrow \boxed{t = 0}$

$$\Rightarrow y(0) = \int_{-A}^{A} 1 \, d\tau = 2A$$

4) $0 \leq t < 2A \quad (t - A < A)$

$$\Rightarrow y(t) = \int_{t-A}^{A} 1 \, d\tau = A - (t - A) = 2A - t$$

5) $t \geq 2A \quad y(t) = 0.$



Η y(t) είναι σχσ όπως περιμέναμε

$$\Delta_y = \Delta_x + \Delta_h = 2A + 2A = 4A \checkmark$$

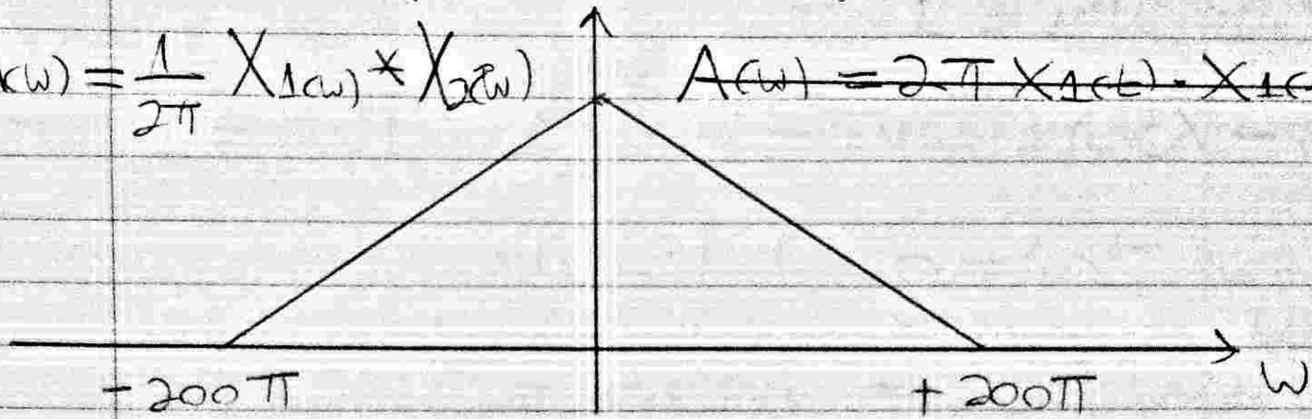
Συσχέτιση Σημάτων

$$r_x[l] = \sum^{+\infty} x[n] \ldots$$

(φωτογραφία από τετράδιο)

Οπότε από το παραπάνω λήμμα το $A(\omega)$ είναι ένα τριγωνικό σχήμα

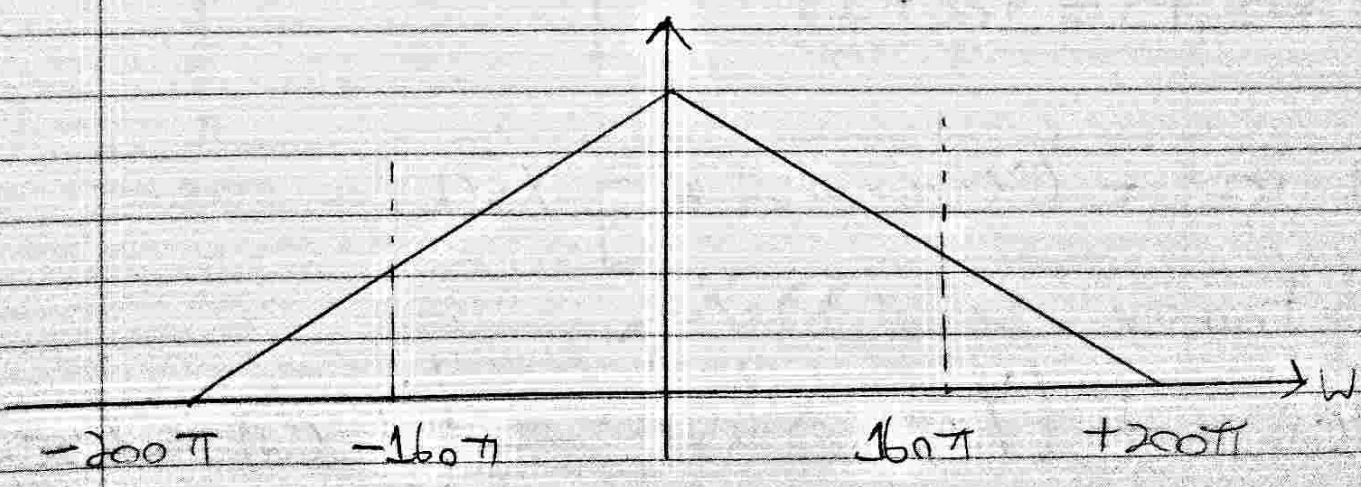
$$A(\omega) = \frac{1}{2\pi} X_1(\omega) * X_2(\omega)$$ $\cancel{A(\omega) = 2\pi X_1(t) \cdot X_1(t)}$



$$X_1^2(t) : \omega_{M1} = 200\pi$$

$$X_2(t) : \omega_{M2} = 160\pi$$

Θέλουμε $Y(\omega) = 0, \ |\omega| > \omega_M$



Προφανώς για να είναι $Y(\omega)=0$ πρέπει

$$\omega_M = \max\{\omega_{M1}, \omega_{M2}\} = 200\pi.$$

$$T_s < \frac{\pi}{200\pi} \Rightarrow \boxed{f_s = 200 \, Hz}$$

B) $z(t) = x_1(t) * (x_1(t) - x_2(t))$

$\Rightarrow$ Fourier $Z(\omega) = X_1(\omega) \cdot (X_1(\omega) - X_2(\omega))$

$X_1(\omega)$: $\omega_{M1} = 100\pi$

$X_1(\omega) - X_2(\omega)$: $\omega_{M2} = \max\{100\pi, 160\pi\} = 160\pi$

Θέλουμε $Z(\omega) = 0$, $|\omega| > \omega_M$
δηλαδή το γινόμενο για να μηδενίζεται αρκεί
να μηδενίζεται το ένα από τα δύο

$\omega_M = \min\{\omega_{M1}, \omega_{M2}\} = \min(100\pi, 160\pi)$

$\omega_M = 100\pi$, ~~$\omega_M = 2\pi$~~ $T_s < \frac{\pi}{100\pi}$

$\Rightarrow \boxed{f_s = 100\,Hz}$

c) $u(t) = (x_1(t) \cdot y(t)) * 2x_2^2(t)$

$\Rightarrow$ Fourier

$U(\omega) = \frac{1}{2\pi}(X_1(\omega) * Y(\omega)) \cdot \frac{2}{2\pi}(X_2(\omega) * X_2(\omega))$

Όπως εύκολα διαπιστώνουμε από το προηγούμενο
λήμμα αλλά και από την άσκηση 3.3
του βιβλίου έχουμε

$X_1(\omega) * Y(\omega)$: $W_{M1} = W_{X_1} + W_Y = 100\pi + 200\pi$

$\Rightarrow W_{M1} = 300\pi$

$X_2(\omega) * X_2(\omega)$: $W_{M2} = 2W_{X_2} = 320\pi$

Όπως προηγουμένως έχουμε το γινόμενο των παραπάνω άρα

$W_M = \min\{W_{M1}, W_{M2}\} = \min\{300\pi, 320\pi\}$

$W_M = 300\pi$, $T_s < \frac{\pi}{300\pi}$

$\Rightarrow \boxed{f_s = 300Hz}$