1/2/2021 4ο Σύνολο Ασκήσεων
Κωνσταντίνος Ιωάννου
Α.Μ: 031 19840
kostisioannou101616@gmail.com

Άσκηση 4.1

α) $x_1[n] = n\left(\frac{1}{4}\right)^{|n|}$

Άρα $x_1[n] = n\left(\frac{1}{4}\right)^{-n} u[-n-1] + n\left(\frac{1}{4}\right)^{n} u[n]$

Από τους γνωστούς τύπους

- $n\, a^n u[n] \rightleftharpoons \frac{a z^{-1}}{(1-a z^{-1})^2}, \quad |z| > |a|$

- $-n\, a^n u[-n-1] \rightleftharpoons \frac{a z^{-1}}{(1-a z^{-1})^2}, \quad |z| < |a|$

$x_1[n] = -\left[-n(4)^n u[n-1]\right] + n\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$

Οπότε

$$\boxed{X_1(z) = -\frac{4 z^{-1}}{(1-4 z^{-1})^2} + \frac{\frac{1}{4} z^{-1}}{(1-\frac{1}{4} z^{-1})^2}}$$

$\Pi.\Sigma = \{|z| < 4\} \cap \{|z| > \frac{1}{4}\}$

$$\boxed{\Pi.\Sigma = \frac{1}{4} < |z| < 4}$$

B) $x_2[n] = \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[-n-2]$

Απο τυπολόγιο

- $-a^n u[-n-1] \rightleftharpoons \frac{1}{1-az^{-1}}, |z| < |a|$

Ισχύει η ιδιότητα

- $x[n-n_0] \rightleftharpoons z^{-n_0} X(z)$

Χωρίς να αλλάζει το Π.Σ

Στο παραπάνω τύπο για $n_0 = -1$

- $-a^{n+1} u[-n-2] \rightleftharpoons \frac{z^{+1}}{1-az^{-1}}, |z| < |a|$

$x_2[n] = -\left(-\frac{1}{3}\right)^{-1} \left[-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} u[n-2]\right]$

Απο τα παραπάνω για αμφίπλευρο Z

$$\boxed{X_2(z) = +\frac{3 z^{+1}}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}, \text{Π.Σ} = |z| < \frac{1}{3}}$$

γ) $x_3[n] = n^2 \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n-1]$

Ιδιότητα: $n\,x[n] \rightleftharpoons -z \dfrac{dX(z)}{dz}$, Π.Σ ΔΕΝ επηρεάζεται

Τύπος: $n\,a^{n-1} u[n-1] \rightleftharpoons \dfrac{z}{(z-a)^2}$, $|z| > a$

Συνδιάζοντας τα παραπάνω

$n\left(n\,a^{n-1} u[n-1]\right) \rightleftharpoons \dfrac{z^2 + az}{(z-a)^3}$, $|z| > a$

Αφου $\dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{z}{(z-a)^2}\right) = -\dfrac{z+a}{(z-a)^3}$

$x_3[n] = \left(\frac{1}{3}\right) n \left[n \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} u[n-1]\right]$

Με Αμφίπλευρο Μετασχηματισμο Ζ

$$\boxed{X_3(z) = \frac{1}{3} \frac{z^2 + \frac{1}{3}z}{\left(z - \frac{1}{3}\right)^3}, \quad \text{Π.Σ} = |z| > \frac{1}{3}}$$

Άσκηση 4.2

α) $X_1(z) = \dfrac{z^2+11z}{(z^2+2z+5)}$, $|z| > \sqrt{5}$

Παρατηρούμε ότι το πλήθος των μηδενικών είναι ίσο με αυτά των πόλων οπότε έχουμε

$$a^n u[n] \rightleftharpoons \frac{z}{z-a}, \quad |z| > a \text{ ή } |z| < a$$

Αναλύουμε σε απλούστερα κλάσματα

$z^2+2z+5=0$, $\Delta = 4-4\cdot5 = -16$

$$z_{1,2} = \frac{-2 \pm 4j}{2} = -1 \pm 2j$$

$$\frac{X_1(z)}{z} = \frac{z+11}{(z-(-1+2j))(z-(-1-2j))}$$

$$= \frac{A}{z+1-2j} + \frac{B}{z+1+2j}$$

$$= \frac{z(A+B)+A(1+2j)+B(1-2j)}{(z+1-2j)(z+1+2j)}$$

Σύστημα

$$\begin{cases} A+B=1 \\ (1+2j)A+(1-2j)B=11 \end{cases}$$

$\Rightarrow B = 1 - A$

$(1+2j)A + (1-2j)(1-A) = 11$

$4Aj = 10 + 2j$

$$\boxed{A = \frac{1}{2} - \frac{5j}{2}} \Rightarrow B = 1 - \frac{1}{2} + \frac{5j}{2}$$

$$\boxed{B = \frac{1}{2} + \frac{5j}{2}}$$

$$\frac{X_1(z)}{z} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{5j}{2}}{-2j+1+z} + \frac{\frac{1}{2} + \frac{5j}{2}}{z+1+2j}$$

$$X_1(z) = \left(\frac{1}{2} - \frac{5j}{2}\right)\left(\frac{z}{z-(-1+2j)}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{5j}{2}\right)\left(\frac{z}{z-(-1-2j)}\right)$$

Οπότε απο τον αρχικό τύπο

$$\boxed{X_1[n] = \left(\frac{1}{2} - \frac{5j}{2}\right)(2j-1)^n u[n] + \left(\frac{1}{2} + \frac{5j}{2}\right)(-1-2j)^n u[n]}$$

- $|-1+2j| = |-1-2j| = \sqrt{1^2 + (2j)^2}$

$= \sqrt{5} \Rightarrow$ Οπότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο αφου $|z| > \sqrt{5}$.

B) $X_2(z) = \dfrac{z+1}{z^2+z+1}$, $|z|>1$

Παρατηρούμε ότι ο αριθμός πόλων είναι μεγαλύτερος απο των μηδενικών οπότε

• Τύπος: $a^{n-1}u[n-1] \overset{Z.T}{\rightleftharpoons} \dfrac{1}{z-a}$, $|z|>|a|$

Αναλύουμε σε απλούστερα κλάσματα

z^2+z+1

$\Delta = 1-4=-3$

$$z_{1,2} = \frac{-1 \pm j\sqrt{3}}{2} = \begin{cases} -\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2}-\frac{j\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\frac{z+1}{z^2+z+1} = \frac{A}{z+\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{B}{z+\frac{1}{2}+\frac{j\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{z(A+B)+A(\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2})+B(\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2})}{(z^2+z+1)}$$

Σύστημα
$$\left.\begin{aligned} A+B=1 &\Rightarrow B=1-A \\ A\left(\tfrac{1}{2}+j\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)+B\left(\tfrac{1}{2}-j\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$A\left(\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+(1-A)\left(\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1 \Rightarrow$$

$$A(j\sqrt{3}) = 1-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$A(j\sqrt{3}) = \frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{A = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} j \ , \quad B = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} j}$$

Οπότε συνολικά

$$X_2(z) = \frac{1}{z - \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} A + \frac{1}{z - \left(-\frac{1}{2} - \frac{j\sqrt{3}}{2}\right)} B$$

Με πεδίο σύγκλισης $|z| > 1$

Συνεπώς ο τύπος που αναφέραμε για να χρησιμοποιηθεί πρέπει $|a| \leq 1$

$$\left| -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right| = \left| -\frac{1}{2} - \frac{j\sqrt{3}}{2} \right|$$

$$= \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

Οπότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο

=> Αντίστροφος Z

$$\boxed{\begin{aligned} X_2[n] = &\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} j\right)\left(j\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1] \\ &+ \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)\left(-\frac{j\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1] \end{aligned}}$$

γ) $X_3(z) = \log\left(\frac{1}{1+a^{-1}z}\right), \ |z|<|a|$

$\Rightarrow$ Παραγωγίζοντας ως προς z έχουμε

$$\frac{dX_3(z)}{dz} = \frac{d}{dz}\left(\overset{0}{\log(1)} - \log(1+a^{-1}z)\right)$$

$$= \frac{d}{dz}\left(-\log(1+a^{-1}z)\right) = -\frac{(1+a^{-1}z)'}{1+a^{-1}z}$$

$$= -\frac{a^{-1}}{1+a^{-1}z} = -\frac{1}{a+z}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dX_3(z)}{dz} = \frac{-1}{a+z}, \ |z|<|a|$$

$\Rightarrow$ επι $(-z)$

$$-z\frac{dX_3(z)}{dz} = \frac{z}{z-(-a)}, \ |z|<|a|$$

Ιδιότητα: $nx[n] \rightleftharpoons -z\frac{dX(z)}{dz}$, Π.Σ δεν αλλάζει

Τύπος: $-a^n u[-n-1] \overset{Z.T}{\rightleftharpoons} \frac{z}{z-a}, \ |z|<|a|$

Από αμφίπλευρο $Z \Rightarrow$

$$nx[n] = -(-a)^n u[-n-1]$$

$$\boxed{x[n] = -\frac{1}{n}(-a)^n u[-n-1]}$$

Άσκηση 4.3

Δίνεται Αιτιατό Σύστημα
Με εξίσωση Διαφορών
$y[n] - 2,5\, y[n-1] + y[n-2]$
$= 0,1\, x[n] - 0,5\, x[n-1] + 0,6\, x[n-2]$

a) Συνάρτηση Μεταφοράς
Ε.Δ => Αμφίπλευρο Z

με ιδιότητα $x[n-n_0] \rightleftharpoons z^{-n_0} X(z)$

$$Y(z)\,(1 - 2,5 \cdot z^{-1} + z^{-2}) = X(z)\,(0,1 - 0,5\, z^{-1} + 0,6\, z^{-2})$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{0,1 - 0,5\, z^{-1} + 0,6\, z^{-2}}{1 - 2,5 \cdot z^{-1} + z^{-2}} = \frac{0,1 z^2 - 0,5 \cdot z + 0,6}{z^2 - 2,5 \cdot z + 1}$$

Μηδενικά: $z^2 - 5z + 6 = 0$
$\Rightarrow z_1 = 2$ ή $z_2 = 3$
Πόλοι: $z^2 - 2,5z + 1 = 0$
$\Rightarrow z_1 = 0,5$ ή $z_2 = 2$

$$H(z) = \frac{(z-2)(z-3)}{(z-\frac{1}{2})(z-2)} \Rightarrow \boxed{H(z) = \frac{z-3}{z-1/2}}$$

Οπότε έχουμε τελικά Μηδενικά: $z = 3$
Πόλους: $z = 1/2$
=> Επειδή το σύστημα είναι αιτιατό
και έχει πόλους σε απόλυτη τιμή < 1
είναι και <u>Ευσταθές</u>.

B) Επειδή είναι Ευσταθές => Δηλαδή η περιοχή σύγκλισης περιέχει το μοναδιαίο κύκλο

Ισχύει

$$H(\Omega) = H(z)\Big|_{z=e^{j\Omega}} = \frac{e^{j\Omega} - 3}{e^{j\Omega} - 1/2}$$

Euler : $e^{j\Omega} = \cos(\Omega) + j\sin(\Omega)$

- $|e^{j\Omega} - a| = |\cos(\Omega) - a + j\sin(\Omega)|$

$$= \sqrt{(\cos(\Omega) - a)^2 + (\sin(\Omega))^2}$$

$$= \sqrt{\cos^2(\Omega) + \sin(\Omega) + a^2 - 2a\cos(\Omega)}$$

$$= \sqrt{a^2 + 1 - 2a\cos(\Omega)}$$

$a = 3 \Rightarrow |e^{j\Omega} - 3| = \sqrt{10 - 6\cos(\Omega)}$

$a = \frac{1}{2} \Rightarrow |e^{j\Omega} - 1/2| = \sqrt{5/4 - \cos(\Omega)}$

Άρα $\boxed{|H(\Omega)| = \sqrt{\dfrac{10 - 6\cos(\Omega)}{\frac{5}{4} - \cos(\Omega)}}}$

γ) Εύρεση $y[n] = ?$

Αν $x[n] = n\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$

Και $y[-1] = -\frac{1}{2}$ $\quad y[-2] = \frac{1}{2}$

Προφανώς $x[-1] = x[-2] = 0$

$y[n] - 2,5\,y[n-1] + y[n-2]$
$= 0,1\,x[n] - 0,5\,x[n-1] + 0,6\,x[n-2]$

=> Μονόπλευρο Μετασχηματισμό Z
$X^+(z)$, $Y^+(z)$.

Με ιδιότητα · $x[n-1] \rightleftharpoons z^{-1}X(z) + x[-1]$

· $x[n-2] \rightleftharpoons z^{-2}X(z) + z^{-1}x[-1]$
$+ x[-2]$

$Y^+(z) - 2,5\,z^{-1}Y(z) - 2,5\,y[-1] + z^{-2}Y(z) + z^{-1}y[-1]$
$+ y[-2] = 0,1\,X^+(z) - 0,5\,X^+(z) - 0,5\,x[-1]$
$+ 0,6\,z^{-2}X^+(z) + 0,6\,z^{-1}x[-1] + x[-2]$

=> Αντικαθιστώντας τις τιμές

$Y^+(z)\left[1 - 2,5\,z^{-1} + z^{-2}\right] + \left(\frac{5}{4} + \frac{1}{2} - \frac{z^{-1}}{2}\right)$
$= X^+(z)\left[0,1 - 0,5\,z^{-1} + 0,6\,z^{-2}\right] + 0$

$$Y^+_{(z)} = \underbrace{\frac{\frac{z^{-1}}{2} - \frac{7}{4}}{1-2,5z^{-1}+z^{-2}}}_{Y_{zi}} + \underbrace{\frac{0,1 - 0,5 z^{-1} + 0,6 z^{-2}}{1-2,5 \cdot z^{-1}+z^{-2}} X^+_{(z)}}_{Y_{zs} = H_{(z)} X^+_{(z)}}$$

- Απόκριση Μηδενικής εισόδου =>

$Y_{zi}(z) = \frac{2z-7z^2}{4z^2-10z+4}$ => Ανάλυση σε απλά κλάσματα

$$\frac{Y_{zi}}{z} = \frac{2-7z}{4z^2-10z+4} = \frac{A}{4z-2} + \frac{B}{z-2}$$

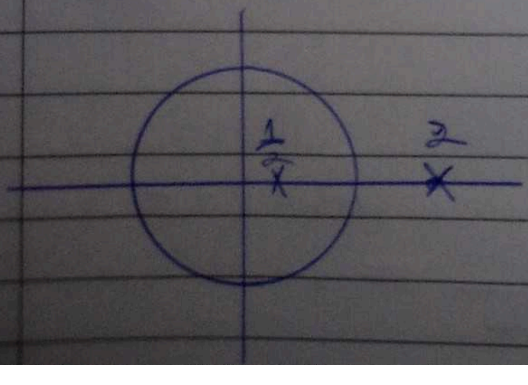
=> $A + 4B = -7$ και $-2A - 2B = 2$

Άρα $A = 1$, $B = -2$

$$Y_{zi}(z) = \frac{1}{4-2z^{-1}} - \frac{2}{1-2z^{-1}}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\right) - 2\left(\frac{1}{1-2z^{-1}}\right), |z| > 2$$

Αρκεί να βρω το Π.Σ της Y_{zi} που έχει πόλους $z_1 = \frac{1}{2}$ και $z_2 = 2$ επειδή είναι αιτιατό Π.Σ = περιλαμβάνει το $+\infty$



$$\Pi\Sigma = |z| > 2 > \frac{1}{2}$$

Από τύπο: $a^n u[n] \rightleftharpoons \frac{1}{1-az^{-1}}$, $|z| > |a|$

=> Αντίστροφο Z έχουμε

$$\boxed{y_{zi}[n] = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 2(2)^n u[n]}$$

για $|z| > 2 > 1/2$

• Απόκριση Μηδενικής Κατάστασης =>

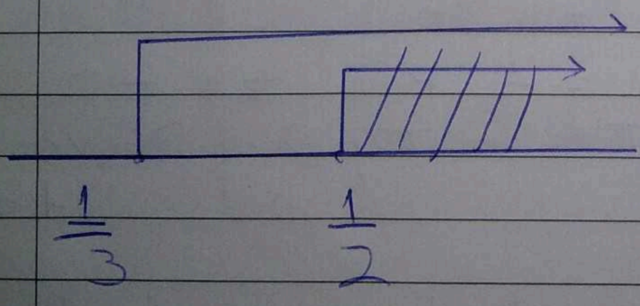
$Y_{zs}(z) = H(z)\,X(z)$ (Αιτιατό: περιέχει το ∞)

$$H(z) = \frac{z-3}{z-1/2}, \quad |z| > \frac{1}{2}$$

$$X(z) = \frac{1/3\, z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)^2}, \quad |z| > \frac{1}{3}$$

γιατί $n a^n u[n] \rightleftharpoons \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$, $|z| > |a|$

όπου $x[n] = n\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$



Άρα Π.Σ $|z| > \frac{1}{2}$

Απλοποίηση

$$Y_{zs}(z) = \frac{z-3}{z-1/2} \cdot \frac{3z}{(3z-1)^2} \Rightarrow$$

$$\frac{Y_{zs}}{z} = \frac{3(z-3)}{(z-\frac{1}{2})(3z-1)^2} = \frac{90}{3z-1} + \frac{48}{(3z-1)^2} - \frac{60}{2z-1}$$

$$Y_{zs}(z) = \frac{90z}{3z-1} + \frac{48z}{(3z-1)^2} - \frac{60z}{2z-1} \Leftrightarrow$$

$$Y_{zs}(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} \cdot 30 - \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \cdot 30 + \frac{z}{(z-1/3)^2} \cdot \frac{16}{3}$$

με $|z| > \frac{1}{2}$ (Σε συναλήθευση με μηδενική είσοδο $|z| > 2$, δεν έχει σημασία ίδιους τύπους)

Τύποι: • $a^n u[n] \rightleftharpoons \frac{1}{1-az^{-1}}, \quad |z| > |a|$

• $n a^{n-1} u[n-1] \rightleftharpoons \frac{z}{(z-a)^2}, \quad |z| > |a|$

Άρα $|z| > \frac{1}{2} > \frac{1}{3}$

$$\boxed{y_{zs}[n] = 30\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] - 30\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} u[n-1] \cdot \frac{16}{3}}$$

Συνολικά (όπως υπολογίστηκαν πριν) ($|z| > 2$)

$\Rightarrow y[n] = y_{zi}[n] + y_{zs}[n]$

Άσκηση 4.4

$$x[n] = u[n] - u[n-8]$$

α) DTFT Διακριτός φουριέ

• $u[n] \overset{D.T.F.T}{\rightleftharpoons} \dfrac{1}{1-e^{-j\Omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - 2k\pi)$

Ιδιότητα

• $x[n-n_0] \overset{DTFT}{\rightleftharpoons} e^{-j\Omega n_0} X(\Omega)$

Άρα

• $u[n-8] \rightleftharpoons \dfrac{e^{-j\Omega 8}}{1-e^{-j\Omega}} + e^{-j\Omega 8}\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - 2k\pi)$

Από γραμμικότητα D.T.F.T

$$X(\Omega) = \frac{1-e^{-j\Omega 8}}{1-e^{-j\Omega}} + (1-e^{-j\Omega 8})\pi \sum \delta(\Omega - 2k\pi)$$

$$\Rightarrow \boxed{X(\Omega) = (1-e^{-j\Omega 8})\left(\frac{1}{1-e^{-j\Omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - 2k\pi)\right)}$$

B) DTF του $x[n]$ για 8-σημεία

Για $N=8$ δείγματα

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp\left(-j \frac{2\pi k n}{N}\right)$$

όπου $k = 0, \ldots, N-1$

Άρα $N=8$ $\Rightarrow$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{7} (u[n]-u[n-8]) \exp\left(-j \frac{\pi k n}{4}\right)$$

όμως $\forall n = \{0, \ldots, 7\}$ $u[n]=1$, $u[n-8]=0$

Άρα
$$\boxed{X[k] = \sum_{n=0}^{7} \exp\left(-j \frac{\pi k n}{4}\right) \quad k = 0,1,2,3,4,5,6,7}$$

~~Προφανώς~~

$$\cancel{X[k] = 1 + e^{\frac{-j\pi k}{4}} + e^{\frac{-j3\pi k}{4}} + e^{-j\pi k}} + \cancel{e^{\ldots} + e^{\frac{-j\pi 5k}{4}}}$$

- Προφανώς για $k=0$ $X[0] = 8$ αφού $e^0 = 1$

- Για τις υπόλοιπες τιμές χρησιμοποιούμε ότι

$$X[k] = \frac{e^{-\frac{1}{4}j\pi 7k}\left(-1 + e^{\frac{1}{4}j\pi 7k + \frac{j\pi k}{4}}\right)}{e^{j\pi k/4} - 1}$$

όμως παρατηρούμε

$$e^{\frac{1}{4}j7\pi k + j\frac{\pi k}{4}} = \exp(j2\pi k)$$

Από Euler $e^{jx} = \cos(x) + j\sin(x)$

Άρα

$$e^{j2\pi k} = \cos(2\pi k) + j\sin(2\pi k)$$

όπου $\cos(2\pi k) = \underline{1}, \quad k \in \mathbb{Z}$

$\sin(2\pi k) = 0 \quad k \in \mathbb{Z}$

οπότε $\exp(j2\pi k) = \underline{1}, \quad k \in \mathbb{Z}$

οπότε για $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$

$X[k] = 0$ και για $X[0] = \underline{1}$

Οπότε για $N = 8 \Rightarrow 7$ μηδενικά DTF

(η σχέση για το άθροισμα βρέθηκε στο internet) γ) $x_N[n] = \begin{cases} 1, & n < 8 \\ 0, & 8 < n < N \end{cases}$

~~Παρατηρούμε ότι πάλι έχουμε~~

$x_N[n] = 1 - u[n-8]$, για $n < N$

DTF για το παραπάνω σήμα έχουμε για $N = 16$ δείγματα

$$X_N[k] = \sum_{n=0}^{15} (1 - u[n-8]) \exp\left(-j \frac{\pi k n}{8}\right)$$

Επειδή $1 - u[n-8] = 0$, για $8 < n < 16$

$$X_N[k] = \sum_{n=0}^{7} \exp\left(-\frac{j \pi k n}{8}\right)$$

για $k = 0, \dots, 1$

Ομοίως με το προηγούμενο ερώτημα

$$\exp\left\{\frac{1}{8} j 7\pi k + \frac{j \pi k}{8}\right\} = \exp\{j \pi k\}$$

$$= \cos(\pi k) + j\sin(\pi k)$$

Για να μηδενίζει το $X_N[k]$ απαιτούμε

$$\cos(\pi k) + j\sin(\pi k) = 1$$

$\Rightarrow \cos(\pi k) = 1$ και $\sin(\pi k) = 0$
όπου $k \in \mathbb{Z}$

$\pi k = n\pi$ και $\pi k = n\pi + \pi$
$n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$

Συνολικά
- $k=0$ $X_N[0] = 7 \neq 0$
- $k = 1, \ldots, 15$ έχουμε μηδενικά μόνο όταν

$\cos(\pi k) = 1$ και $\sin(\pi k) = 0$
για άρτια $k \in \mathbb{Z}$ $\quad \forall k \in \mathbb{Z}$

Οπότε έχουμε μηδενικά για τα παρακάτω k

$k = 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14,$

Έχουμε λοιπόν 7 μηδενικά DTF
για $N = 16$

$\Rightarrow$ Όσα είχαμε και στο προηγούμενο
παράδειγμα για $N=8$

δ) Να υπολογιστεί DFT 4 σημείων για

$$x[n] = \delta[n] - 4\delta[n-2] + 5\delta[n-3]$$

Ορισμός DTF για N δείγματα

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp\left(-j \frac{2\pi k n}{N}\right)$$

για $k = 0, \ldots, N-1$

Άρα για $N = 4$ δείγματα

$$X[k] = \sum_{n=0}^{3} x[n] \exp\left(-j \frac{\pi k n}{2}\right)$$

για $k = 0, 1, 2, 3$

$$X[k] = x[0]\, e^{0} + x[1]\, e^{-j\frac{\pi k}{2}} + x[2]\, e^{-j\pi k} + x[3] \exp\left(-j \frac{\pi k 3}{2}\right)$$

Αντικαθιστώντας για τις τιμές $x[0], x[1], x[2], x[3]$

$$\boxed{X[k] = 1 - 4e^{-j\pi k} + 5e^{-j\pi k} \quad k = 0, 1, 2, 3.}$$