Домашнее задание

Янко Иван, Б05-006

Задание 1

Условия

Пусть $\mathbb{D}\xi < \infty$. Докажите, что для любого $x > 0$ выполнено неравенство

$$\mathbb{P}\{|\xi - \mathbb{E}\xi| \geqslant x\} \leqslant \frac{2\mathbb{D}\xi}{x^2 + \mathbb{D}\xi}$$

Решение

$\mathbb{P}\{|\xi - \mathbb{E}\xi| \geqslant x\} = \mathbb{P}\{(\xi - \mathbb{E}\xi)^2 \geqslant x^2\} = \mathbb{P}\{(\xi - \mathbb{E}\xi)^2 + \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2 \geqslant x^2 + \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2\} \leqslant \frac{\mathbb{E}\left[(\xi-\mathbb{E}\xi)^2+\mathbb{E}(\xi-\mathbb{E}\xi)^2\right]}{x^2+\mathbb{E}(\xi-\mathbb{E}\xi)^2} = \frac{2\mathbb{D}\xi}{x^2+\mathbb{D}\xi}$ При последнем переходе на первой строчке использовалось неравенство Маркова. По условию задачи $\mathbb{D}\xi < \infty$ и $x > 0$, значит $2\mathbb{D}\xi < \infty$ и $t = x^2 + \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2 > 0$.
Замечу, что $\mathbb{E}\left[(\xi - \mathbb{E}\xi)^2 + \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2\right] + \mathbb{E}\left[\mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2\right] = 2\mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2 = 2\mathbb{D}\xi$ и $(\xi - \mathbb{E}\xi)^2 + \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2$ - неотрицательная случайная величина.

Задание 2

Условия

В лотерее на выигрыш уходит 40% от стоимости проданных билетов. Каждый билет стоит 100 рублей. Докажите, что при любых правилах лотереи вероятность выиграть 5000 рублей (или больше) меньше 1%.

Решение

Пусть ξ - случайная величина, для которой $\mathbb{P}\{\xi = x_i\}$ - вероятность выиграть сумму в x_i (считаем, что сумма выигрыша это натуральное число). Тогда из неравенства Маркова $\mathbb{P}\{\xi \geqslant 5000\} \leqslant \frac{\mathbb{E}\xi}{5000} = \frac{40}{5000} < 0.01$

Задание 3

Условия

1. Пусть $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.н.}} \xi$ и $\eta_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.н.}} \eta$. Верно ли, что $\xi_n + \eta_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.н.}} \xi + \eta$?

2. Пусть $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{L_p} \xi$ и $\eta_n \xrightarrow[n\to\infty]{L_p} \eta$. Верно ли, что $\xi_n + \eta_n \xrightarrow[n\to\infty]{L_p} \xi + \eta$?

3. Пусть $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \xi$ и $\eta_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \eta$. Верно ли, что $\xi_n + \eta_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \xi + \eta$?

4. Пусть $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} \xi$ и $\eta_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} \eta$. Верно ли, что $\xi_n + \eta_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} \xi + \eta$?

Решение

Пусть эти случайные величины заданы на одном вероятностном пространстве, иначе задача не имеет смысла.

1. $\mathbb{P}\{\omega_1 \in \Omega \mid \xi_n(\omega_1) \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi(\omega_1)\} = 1$ и $\mathbb{P}\{\omega_2 \in \Omega \mid \eta_n(\omega_2) \xrightarrow[n\to\infty]{} \eta(\omega_2)\} = 1$. Эти же условия можно переписать, как $\mathbb{P}\{\omega_1 \in \Omega \mid \xi_n(\omega_1) \not\xrightarrow[n\to\infty]{} \xi(\omega_1)\} = 0$ и $\mathbb{P}\{\omega_2 \in \Omega \mid \eta_n(\omega_2) \not\xrightarrow[n\to\infty]{} \eta(\omega_2)\} = 0$. Нужно доказать, что $\mathbb{P}\{\omega \in \Omega \mid \xi_n(\omega) + \eta_n(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi(\omega) + \eta(\omega)\} = 1$.
   Далее скажем, что $\{\omega \in \Omega \mid \xi_n(\omega) + \eta_n(\omega) \not\xrightarrow[n\to\infty]{} \xi(\omega) + \eta(\omega)\} \subseteq \{\omega_1 \in \Omega \mid \xi_n(\omega_1) \not\xrightarrow[n\to\infty]{} \xi(\omega_1)\} \cup \{\omega_2 \in \Omega \mid \eta_n(\omega_2) \not\xrightarrow[n\to\infty]{} \eta(\omega_2)\}$. По непрерывности вероятностей $\mathbb{P}\{\omega \in \Omega \mid \xi_n(\omega) + \eta_n(\omega) \not\xrightarrow[n\to\infty]{} \xi(\omega) + \eta(\omega)\} \leqslant \mathbb{P}\{\omega_1 \in \Omega \mid \xi_n(\omega_1) \not\xrightarrow[n\to\infty]{} \xi(\omega_1)\} + \mathbb{P}\{\omega_2 \in \Omega \mid \eta_n(\omega_2) \not\xrightarrow[n\to\infty]{} \eta(\omega_2)\} = 0$. Значит $\mathbb{P}\{\omega \in \Omega \mid \xi_n(\omega) + \eta_n(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi(\omega) + \eta(\omega)\} = 1$, что и требовалось доказать.

2. По условию задачи $\mathbb{E}\left[|\xi_n - \xi|^p\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ и $\mathbb{E}\left[|\eta_n - \eta|^p\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Нужно доказать, что $\mathbb{E}\left[|\xi_n + \eta_n - \xi - \eta|^p\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
   Рассмотрим $|\xi_n + \eta_n - \xi - \eta|^p$. Возмедем математическое ожидание от этой случайной величины в степень $\frac{1}{p}$, получим $(\mathbb{E}\left[|(\xi_n - \xi) + (\eta_n - \eta)|^p\right])^{\frac{1}{p}} \leqslant \mathbb{E}\left[|\xi_n - \xi|^p\right]^{\frac{1}{p}} + \mathbb{E}\left[|\eta_n - \eta|^p\right]^{\frac{1}{p}}$, что верно из неравенсвта Минковского. Значит $\mathbb{E}\left[|\xi_n + \eta_n - \xi - \eta|^p\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, т.к. из условий следует, что и $\mathbb{E}\left[|\xi_n - \xi|^p\right]^{\frac{1}{p}} + \mathbb{E}\left[|\eta_n - \eta|^p\right]^{\frac{1}{p}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

3. Запишем условие: $\forall \varepsilon_1 > 0$ $\mathbb{P}\{|\xi_n - \xi| > \varepsilon_1\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ и $\forall \varepsilon_2 > 0$ $\mathbb{P}\{|\eta_n - \eta| > \varepsilon_2\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ следует $\forall \varepsilon > 0$ $\mathbb{P}\{|\xi_n + \eta_n - \xi - \eta| > \varepsilon\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
   Заметим, что $|\xi_n + \eta_n - \xi - \eta| \leqslant |\xi_n - \xi| + |\eta_n - \eta|$, отсюда следует следущее: $\{|\xi_n + \eta_n - \xi - \eta| > \varepsilon\} \subseteq \{|\xi_n - \xi| + |\eta_n - \eta| > \varepsilon\} \subseteq \{|\xi_n - \xi| > \frac{\varepsilon}{2}\} \cup \{|\eta_n - \eta| > \frac{\varepsilon}{2}\}$.
   Т.к. вероятность монотонна, то $\mathbb{P}\{|\xi_n + \eta_n - \xi - \eta| > \varepsilon\} \leqslant \mathbb{P}\{|\xi_n - \xi| > \frac{\varepsilon}{2}\} + \mathbb{P}\{|\eta_n - \eta| > \frac{\varepsilon}{2}\}$
   Значит взяв достаточно большое n получим, что $\mathbb{P}\{|\xi_n - \xi| > \frac{\varepsilon}{2}\} + \mathbb{P}\{|\eta_n - \eta| > \frac{\varepsilon}{2}\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Значит $\mathbb{P}\{|\xi_n + \eta_n - \xi - \eta| > \varepsilon\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, что и требовалось доказать.

4. Докажем, что это не так, для этого приведем контрпример. Пусть $\xi \sim\ Be(\frac{1}{2})$, $\eta = 1 - \xi$. Возьмем $\xi_n \sim\ Be(\frac{1}{2})$ и $\eta_n \sim\ Be(\frac{1}{2})$. Тодга $\xi + \eta = 1$, а $\xi_n + \eta_n \sim\ Binom(2, \frac{1}{2})$, значит и утверждение неверно.

Задание 4

Условия

Пусть φ_ξ– характеристическая функция абсолютно непрерывной слуайной величины ξ с плотностью p_ξ. Рассмотрим $f_1 = Re(\varphi_\xi)$ и $f_2 = Im(\varphi_\xi)$. Существуют ли случайные величины η_1, η_2, для которых f_1, f_2 являются характеристическими функциями?

Решение

Запишем характерестическую функцию через обратное преобразование Фурье. $\varphi_\xi = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{itx}p_\xi(x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}} \cos(tx)p_\xi(x)dx + i\int\limits_{\mathbb{R}} \sin(tx)p_\xi(x)dx$. Значит $f_2 = \int\limits_{\mathbb{R}} \sin(tx)p_\xi(x)dx$. Рассмотрим $f_2(0) = \int\limits_{\mathbb{R}} \sin(0)p_\xi(x)dx = 0$, из чего можно сказать, что не выполняется одно из свойств характерестической фукнции, а значит не существует такой случайной величины η_2, для которой f_2 является характеристическиой функцией. По условию спрашивают существуют ли обе случайные величины (читаю как логический и), а значит из отсутствия одной следует и отрицательный ответ на задачу.

Задание 5

Условия

Может ли функция

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1, & t \in [-T, T] \\ 0, & t \notin [-T, T] \end{cases}$$

быть характеристической функцией некоторой случайной величины? Изменится ли ответ, если чуть-чуть сгладить разрывы функции $\varphi(t)$ в точках $t = \pm T$?

Решение

Заметим, что $\varphi(t)$ не непрервына, а значит и равномерная непрерывность будет отсутствовать. Т.к. одно из свойств характеристической функции не будет выполняться, то эта функция не может быть характеристической функцией некоторой случайной величины.
Рассмотрим теперь задачу, если немного сгладить концы. Будем считать, что сглаживание без разрывов, симметрично относительно нуля и везде имеет производные, причем конечные. Переписать условие можно как "существует ли такая случайная величина, что ее обратное преобразование Фурье будет являться $\varphi(t)$?". При описанных мною условиях сглаживания можно будет найти искомую случайную величину, выполнив прямое преобразование Фурье, а занчит ответ измениться на положительный.

Задание 6*

Условия

1. Рассмотрим с.в. ξ такую, что $a \leqslant \xi \leqslant b$ с вероятностью 1. Покажите, что для любого $t:$
$$\mathbb{E}e^{t\xi} \leqslant \exp\left(t\mathbb{E}\xi + \frac{t(b-a)^2}{8}\right)$$

2. Рассмотрим последовательность $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ такую, что почти наверное $a_i \leqslant \xi_i b_i$ для всех i. Используя экспоненциальное неравенство Чебышева и минимизируя, его по t (метод Чернова) докажите:
$$\mathbb{P}\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - \mathbb{E}\xi_i) \geqslant \varepsilon\right\} \leqslant \exp\left(-\frac{2n^2\varepsilon^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2}\right)$$

$$\mathbb{P}\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - \mathbb{E}\xi_i) \leqslant -\varepsilon\right\} \leqslant \exp\left(-\frac{2n^2\varepsilon^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2}\right)$$

Решение

Честно пришлю решение чутка потом, конспект 10 семинара читал)