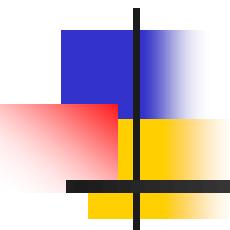
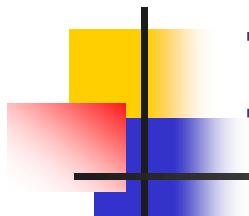


Procesarea statistică a semnalelor



**Anul IV, Tehnologii și Sisteme de
Telecomunicații**

**Facultatea de Electronică, Telecomunicații
și Tehnologia Informației**



Informații generale (I)

- Titulari curs și aplicații
- Curs: Prof. dr. ing. **Daniela Tărniceriu**
- Aplicații: **Conf. dr. ing. Nicolae Cleju**

Informații generale (II)

website

<http://telecom/etc.tuiasi.ro/pns/>

Bibliografie

- Tarniceriu, D., *Bazele prelucrarii numerice a semnalelor*, Ed. Politehnium, Iași, 2008, 372 pagini, ISBN 978-973-621-196-6.
- Tărniceriu, D., *Filtrare digitală*, Ed. Tehnopres, Iasi 2004, ISBN 973 – 702 – 044 – 8, 2004, 331 pagini.
- Munteanu, V., Tarniceriu D., *Teoria estimării și filtrare optimă*, Ed. Tehnopres, 2006.
- Ciochină, S., *Prelucrarea numerică a semnalelor - partea I*, U. P. B., 1995.
- Grigoraș, V., Tărniceriu, D., *Prelucrarea numerică a semnalelor*, Ed. Gh. Asachi Iași, 1995.
- Jackson, L. B., *Digital Filters and Signal Processing*, Kluwer Academic Publisher, Hingham, 1989.
- Munteanu, V., *Teoria Transmisiunii Informației*, Ed. Gh. Asachi Iași, 2002.
- V. Oppenheim, R. W. Shafer, *Discrete - Time Signal Processing*, Englewood Cliffs, NJ. Prentice Hall, 1989.
- Papoulis, A., *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*, McGraw-Hill, New York, 1984.
- Proakis, J. G., Manolakis, D. G., *Introduction to Digital Signal Processing*, New York Macmillian, 1992.
- Tărniceriu, D., Grigoraș, V., *Prelucrarea numerică a semnalelor*, Ed. Gh. Asachi Iași, 1995.
- Mitra, S. K., *Digital signal Processing*, McGraw Hill, 2002.

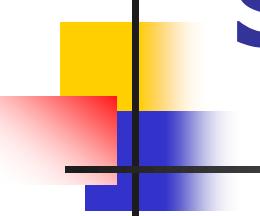
Structura în planul de învățământ

Prelucrarea statistică a semnalelor

disciplină impusă

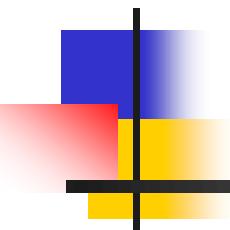
Semestrul	Numărul de ore pe săptămână				Forma de verificare	Numărul total de ore				Total ore pe disciplină
	C	S	L	P		C	S	L	P	
8	3		2		E	42		28		70

- **Cunoștințe anterioare necesare disciplinei**
 - Matematică - probabilitati, statistica,
 - Prelucrarea digitală a semnalelor
 - Decizie și estimare în prelucrarea informației – semnale aleatoare
- **Examinare**
 - Examen scris (60%), laborator(20%), teme de casă (20%)
 - Bonus – prezență la curs (0,1 puncte / curs)



Structura cursului

- TEHNICI DIRECTE DE PROIECTARE A FILTRELOR DIGITALE IIR**
- STRUCTURI PENTRU IMPLEMENTAREA SISTEMELOR DISCRETE**
- EFECTELE LUNGIMII FINITE A CUVINTELOR ÎN FILTRAREA DIGITALĂ**
- PREDICTION LINIARĂ ȘI FILTRARE LINIARĂ OPTIMALĂ**
- ESTIMAREA SPECTRULUI DE PUTERE**



Tehnici directe de proiectare a filtrelor digitale IIR

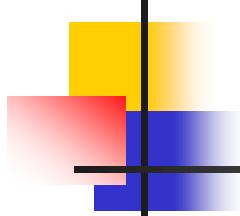
Metodele de proiectare din această categorie se bazează pe optimizare numerică

Proiectarea directă a filtrelor IIR presupune următoarele etape:

- Considerarea unei funcții raționale $H(z)$ de forma

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} = \frac{B(z)}{A(z)} \quad (1)$$

cu ordinele M și N ale polinoamelor $A(z)$ și $B(z)$ fixate;



Proiectarea directă a filtrelor IIR presupune următoarele etape:

- Alegerea unui criteriu de minimizare a erorii adecvat aplicației concrete;
- Utilizarea unui algoritm iterativ, pentru determinarea coeficientilor $\{a_k\}, \{b_k\}$ ai lui $H(z)$ sau a secvenței $h[n]$ astfel încât eroarea dintre răspunsul dorit și cel realizat să fie minimizată.

Metoda de aproximare Padé

- Răspunsul la impuls dorit $h_d[n]$ este specificat pentru $n \geq 0$

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} = \sum_{n=0}^{\infty} h[n] z^{-n} \quad (2)$$

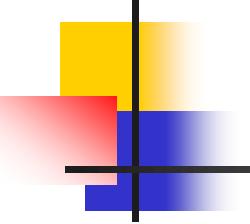
$h[n]$ este răspunsul la impuls
 $L = M + N + 1$ parametri

Metoda de aproximare Padé

- Criteriul celor mai mici pătrate - folosit în problemele de optimizare. Se minimizează suma pătratelor erorilor

$$E = \sum_{n=0}^U [h_d[n] - h[n]]^2 \quad (3)$$

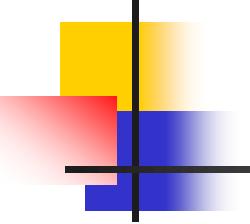
în raport cu parametrii $\{a_k\}$ și $\{b_k\}$ ai filtrului, unde U este o limită superioară prestabilită pentru sumare



Metoda de aproximare Padé

- Dacă $U = L - 1$ este posibil a adapta perfect răspunsul dorit $h_d[n]$ pentru $0 \leq n \leq M + N$
- Filtrul ce urmează a fi proiectat este descris de ecuația cu diferențe

$$y[n] = -a_1 y[n-1] - a_2 y[n-2] - \dots - a_N y[n-N] + b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + \dots + b_M x[n-M] \quad (4)$$



Metoda de aproximare Padé

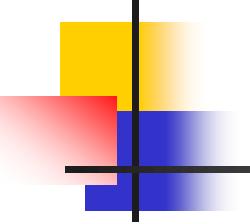
- Dacă intrarea în filtru este impulsul unitate

$$x[n] = \delta[n] \quad \text{rezultă} \quad y[n] = h[n], \text{ adică}$$

$$\begin{aligned} h[n] = & -a_1 h[n-1] - a_2 h[n-2] - \dots - a_N h[n-N] + \\ & + b_0 \delta[n] + b_1 \delta[n-1] + \dots + b_M \delta[n-M] \end{aligned} \quad (5)$$

$$\text{dar} \quad \delta[n-k] = 0 \quad n \neq k$$

$$h[n] = -a_1 h[n-1] - a_2 h[n-2] - \dots - a_N h[n-N] + b_n, \quad 0 \leq n \leq M \quad (6)$$



Metoda de aproximare Padé

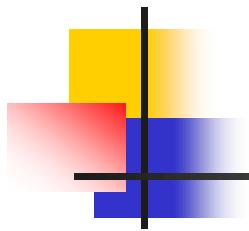
- Pentru $n > M$, relația (5) devine

$$h[n] = -a_1 h[n-1] - a_2 h[n-2] - \dots - a_N h[n-N] \quad (7)$$

- Se impune $h[n] = h_d[n]$ pentru $0 \leq n \leq M + N$ și se folosește sistemul de ecuații (7) pentru a determina $\{a_k\}$.
- Din (6) se determină $\{b_k\}$

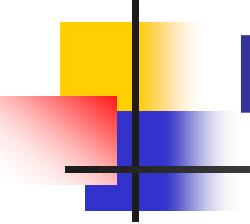
Metoda de aproximare Padé

- 
- Măsura în care această metodă permite obținerea de filtre acceptabile depinde, în parte, de numărul de coeficienți selectați.
 - Aceasta este un dezavantaj important al metodei - filtrul rezultat va avea mulți poli și multe zerouri - folosire limitată.



Metoda de aproximare Padé

- Aproximarea Padé are ca rezultat o potrivire perfectă cu $H_d(z)$, când funcția de sistem dorită este o funcție rațională și se cunoaște numărul de poli și zerouri din funcția de sistem. Aceasta nu este, în general, cazul în practică, deoarece $h_d[n]$ se determină din specificațiile răspunsului dorit în frecvență,
 $H_d(\omega)$



Metoda de aproximare Padé

- O soluție de a obține o aproximare bună a filtrului dorit cu metoda Padé este de a încerca diverse valori pentru M și N până când răspunsul în frecvență al filtrului rezultat converge la răspunsul în frecvență dorit cu o eroare de aproximare acceptabil de mică.

Proiectarea filtrelor digitale IIR folosind metoda celor mai mici pătrate

- Se adoptă un model pentru sistem și se determină parametrii modelului care minimizează în sensul celor mai mici pătrate eroarea dintre răspunsul sistemului real și răspunsul dorit.
- $h_d[n]$ este specificat pentru $n \geq 0$
- filtrul numeric ce urmează a fi proiectat conține numai poli, adică

$$H(z) = \frac{b_0}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \quad (8)$$

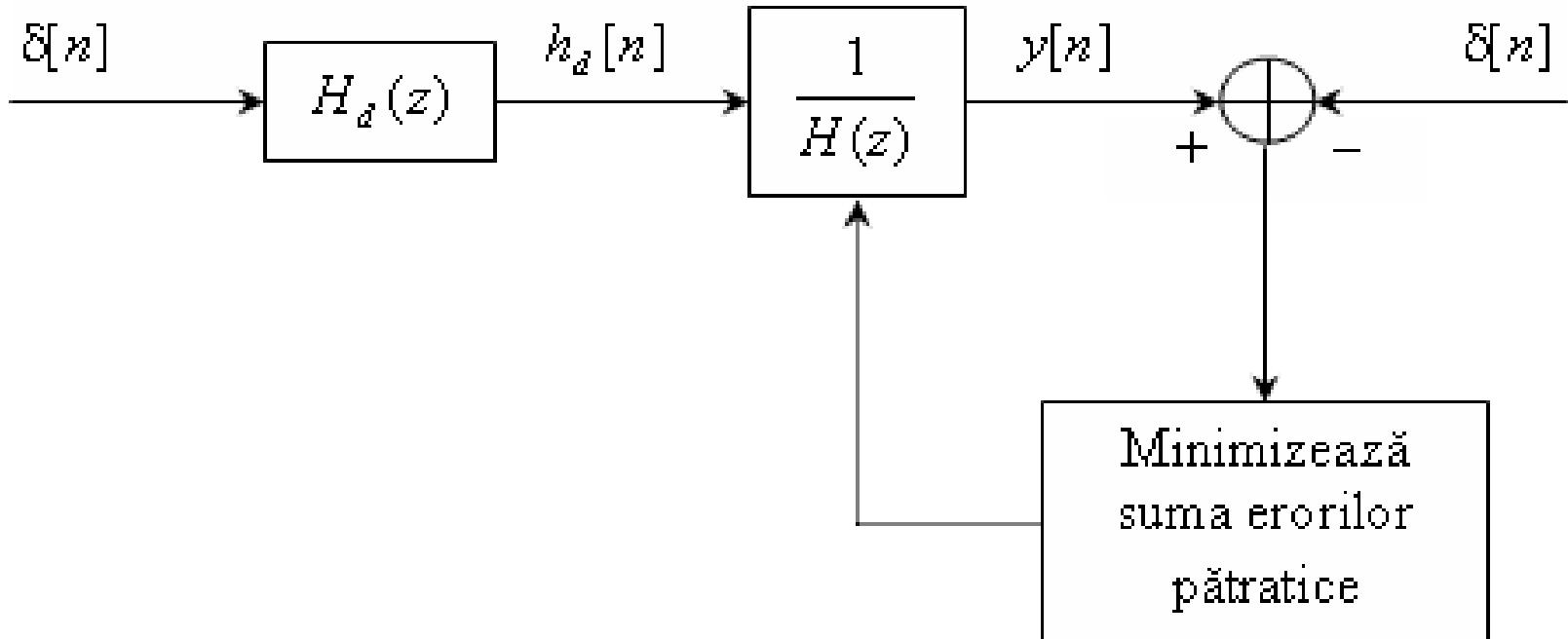
Proiectarea filtrelor digitale IIR folosind metoda celor mai mici pătrate

- Fie conectarea în cascadă a filtrului dorit $H_d(z)$ cu filtrul invers $\frac{1}{H(z)}$

$$Y(z) = H_d(z) \cdot \frac{1}{H(z)} = \frac{1}{b_0} H_d(z) \left(1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k} \right) \quad (9)$$

$$y[n] = \frac{1}{b_0} \left(h_d[n] + \sum_{k=1}^N a_k h_d[n-k] \right) \quad (10)$$

Proiectarea filtrelor digitale IIR folosind metoda celor mai mici pătrate



Proiectarea filtrului invers prin metoda celor mai mici pătrate

Proiectarea filtrelor digitale IIR folosind metoda celor mai mici pătrate

$$y_d[0] = y[0] = 1 \quad b_0 = h_d[0]$$

- Pentru $n > 0$, $y[n]$ reprezintă eroarea dintre ieșirea dorită $y_d[n] = 0$ și ieșirea reală
- Parametrii $\{a_k\}$ vor fi selectați astfel încât să minimizeze suma pătratelor sevenței de eroare:

$$E = \sum_{n=1}^{\infty} y^2[n] = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \left(h_d[n] + \sum_{k=1}^N a_k h_d[n-k] \right)^2}{h_d^2[0]} \quad (11)$$

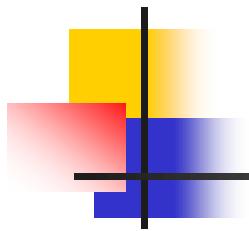
Proiectarea filtrelor digitale IIR folosind metoda celor mai mici pătrate

$$E' = \frac{\left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(h_d^2[n] + 2h_d[n] \sum_{k=1}^N a_k h_d[n-k] + \sum_{k=1}^N a_k h_d[n-k] \sum_{l=1}^N a_l h_d[n-l] \right) \right)^2}{h_d^2[0]} = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(2h_d[n]h_d[n-k] + \sum_{l=1}^N a_l h_d[n-k]h_d[n-l] + \sum_{k=1}^N a_k h_d[n-k]h_d[n-l] \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow r_{dd}[k,0] + \sum_{l=1}^N a_l r_{dd}[k,l] = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N$$

$$\sum_{l=1}^N a_l r_{dd}[k,l] = -r_{dd}[k], \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (12)$$



Proiectarea filtrelor digitale IIR folosind metoda celor mai mici pătrate

$$r_{dd}[k, l] = \sum_{n=1}^{\infty} h_d[n-k] h_d[n-l] \quad (13)$$

$$r_{dd}[k, l] = \sum_{n=0}^{\infty} h_d[n] h_d[n+k-l] = r_{dd}[k-l] \quad (14)$$

$$r_{dd}[k, 0] = \sum_{n=0}^{\infty} h_d[n] h_d[n-k] = r_{dd}[k] \quad (15)$$

$$[R_{dd}][a] = [r_{dd}] \quad (16)$$

Proiectarea filtrelor digitale IIR folosind metoda celor mai mici pătrate

$$[a] = [R_{dd}]^{-1} [r_{dd}] \quad (17)$$

- *metoda se numește a celor mai mici pătrate de proiectare a filtrului invers*
- Practic, răspunsul la impuls dorit $h_d[n]$ este specificat pentru un număr finit de puncte $0 \leq n \leq L$ cu $L \gg N$

$$\hat{r}_{dd}[k-l] = \sum_{n=0}^{L-|k-l|} h_d[n] h_d[n+k-l], \quad 0 \leq k-l \leq N \quad (18)$$

Proiectarea filtrelor digitale IIR folosind metoda celor mai mici pătrate

$$[\hat{R}_{dd}] [a] = [\hat{r}_{dd}] \quad (19)$$

$$[a] = [\hat{R}_{dd}]^{-1} [\hat{r}_{dd}] \quad (20)$$

Rezolvarea problemei de aproximare a filtrului numai cu poli se mai poate realiza pe baza conceptului de *predicție liniară* pe baza minimizării erorii în sensul celor mai mici pătrate

- ieșirea filtrului numai cu poli la un impuls $\delta[n]$

$$y[n] = -\sum_{k=1}^N a_k y[n-k] + b_0 \delta[n] \quad (21)$$

$$h[n] = -\sum_{k=1}^N a_k h[n-k] + b_0 \delta[n], n = 0, 1, \dots \quad (22)$$

Proiectarea filtrelor digitale IIR folosind metoda celor mai mici pătrate

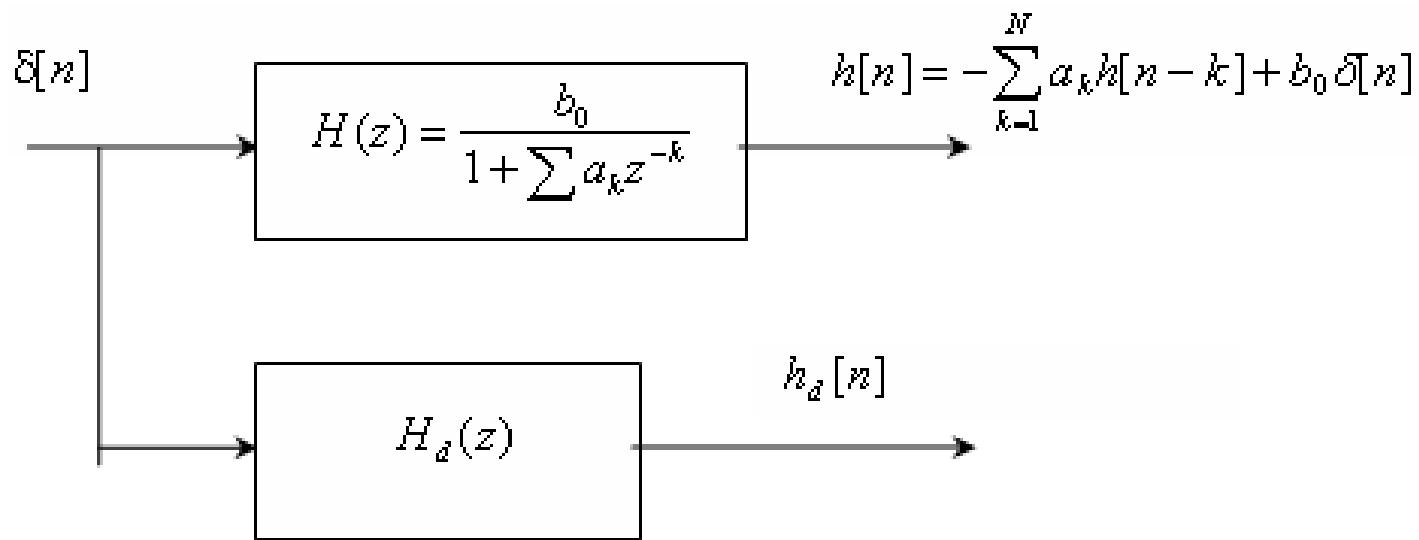


Figura 3.11. Proiectarea filtrului prin metoda celor mai mici pătrate bazată pe predicția liniară

Proiectarea filtrelor digitale IIR folosind metoda celor mai mici pătrate

$$h_d[n] = -\sum_{k=1}^N a_k h_d[n-k] + b_0 \delta[n], \quad n = 0, 1, \dots \quad (23)$$

Deoarece $h[0] = b_0$, se impune $b_0 = h_d[0]$.

$$Pt. n \geq 1 \quad h[n] = -\sum_{k=1}^N a_k h[n-k] \quad (24)$$

$$h[n] = 0 \quad \text{pentru } n < 0$$

Dacă $H_d(z)$ este un filtru numai cu poli

$$h_d[n] = -\sum_{k=1}^N a_k h_d[n-k], \quad n \geq 1 \quad (25)$$

Proiectarea filtrelor digitale IIR folosind metoda celor mai mici pătrate

- Combinația liniară din membrul drept al relației (25) poate fi considerată ca un estimat al lui $h_d[n]$

$$\hat{h}_d[n] = -\sum_{k=1}^N a_k h_d[n-k], \quad n \geq 1 \quad (26)$$

$\hat{h}_d[n]$ se numește *valoarea predicției liniare* a lui $h_d[n]$

$$E = \sum_{n=1}^{\infty} (h_d[n] - \hat{h}_d[n])^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(h_d[n] + \sum_{k=1}^N a_k h_d[n-k] \right)^2 \quad (27)$$

Metoda Prony

- Metoda predicției pe baza celor mai mici pătrate poate fi extinsă la o aproximare a lui $H_d(z)$ care conține poli și zerouri. Dacă filtrul $H(z)$ care aproximează $H_d(z)$ are atât poli cât și zerouri, atunci răspunsul său la impulsul $\delta[n]$ devine

$$h[n] = -\sum_{k=1}^N a_k h[n-k] + \sum_{k=0}^M b_k \delta[n-k], \quad n \geq 0 \quad (28)$$

$$h[n] = -\sum_{k=1}^N a_k h[n-k] + b_n, \quad 0 \leq n \leq M \quad (29)$$

Metoda Prony

$$h[n] = -\sum_{k=1}^N a_k h[n-k], \quad n > M \quad (30)$$

- Pe baza relației (30) se definește valoarea de predicție liniară a lui $h_d[n]$, ca fiind

$$\hat{h}_d[n] = -\sum_{k=1}^N a_k h_d[n-k], \quad n > M \quad (31)$$

- suma pătratelor erorii de predicție este

$$E_1 = \sum_{n=M+1}^{\infty} (h_d[n] - \hat{h}_d[n])^2 = \sum_{n=M+1}^{\infty} \left(h_d[n] + \sum_{k=1}^N a_k h_d[n-k] \right)^2 \quad (32)$$

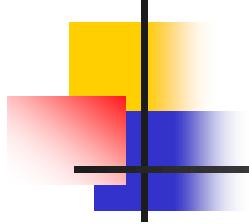
Metoda Prony

- Minimizarea lui E_1 în raport cu coeficienții $\{a_k\}$ conduce la sistemul de ecuații liniare

$$\sum_{l=1}^N a_l r_{dd}[k, l] = -r_{dd}[k, 0], \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (33)$$

$$r_{dd}[k, l] = \sum_{n=M+1}^{\infty} h_d[n-k] h_d[n-l] \quad (34)$$

$$b_n = h_d[n] + \sum_{k=1}^N \hat{a}_k h_d[n-k], \quad 0 \leq n \leq M \quad (35)$$



Metoda Prony

- parametrii $\{\hat{a}_k\}$ ce determină polii se obțin prin metoda celor mai mici pătrate;
- parametrii $\{b_k\}$, care determină zerourile, se obțin ca în metoda de aproximare Padé.

Metoda Shanks

- Ambele seturi de parametri, $\{a_k\}$ și $\{b_k\}$, se determină pe baza minimizării erorii de aproximare în sensul celor mai mici pătrate.

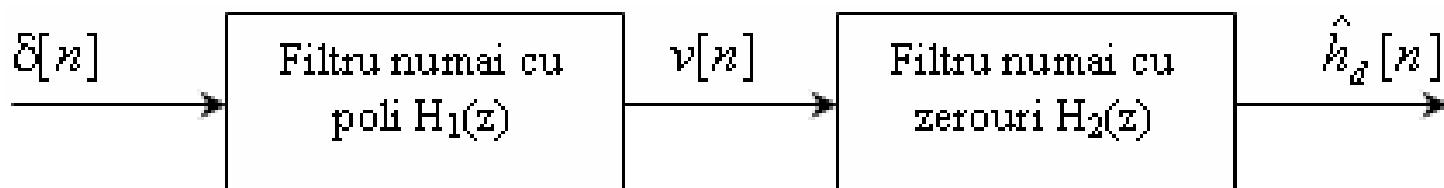
$$H_1(z) = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^N \hat{a}_k z^{-k}} \quad (36)$$

$$v[n] = -\sum_{k=1}^N \hat{a}_k v[n-k] + \delta[n], \quad n \geq 0 \quad (37)$$

Metoda Shanks

$$H_2(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} \quad (38)$$

$$\hat{h}_d[n] = \sum_{k=0}^M b_k v[n-k] \quad (39)$$



Folosirea metodei celor mai mici pătrate pentru determinarea polilor și zerourilor unui filtru

Metoda Shanks

$$e[n] = h_d[n] - \hat{h}_d[n] = h_d[n] - \sum_{k=0}^M b_k v[n-k] \quad (40)$$

$$E_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(h_d[n] - \sum_{k=0}^M b_k v[n-k] \right)^2 \quad (41)$$

- sistem de ecuații liniare pentru parametrii $\{b_k\}$, în forma

$$\sum_{k=0}^M b_k r_{vv}[k, l] = r_{hv}[l, 0], \quad l = 0, 1, \dots, M \quad (42)$$

$$r_{vv}[k, l] = \sum_{n=0}^{\infty} v[n-k] v[n-l] \quad (43)$$

$$r_{hv}[l, 0] = \sum_{n=0}^{\infty} h_d[n] v[n-l] \quad (44)$$

Filtrul FIR invers obținut prin metoda celor mai mici pătrate

- Sistemul invers al unui SDLIT

$$h[n]^* h_I[n] = \delta[n] \quad (45)$$

$$H(z) \cdot H_I(z) = 1 \quad (46)$$

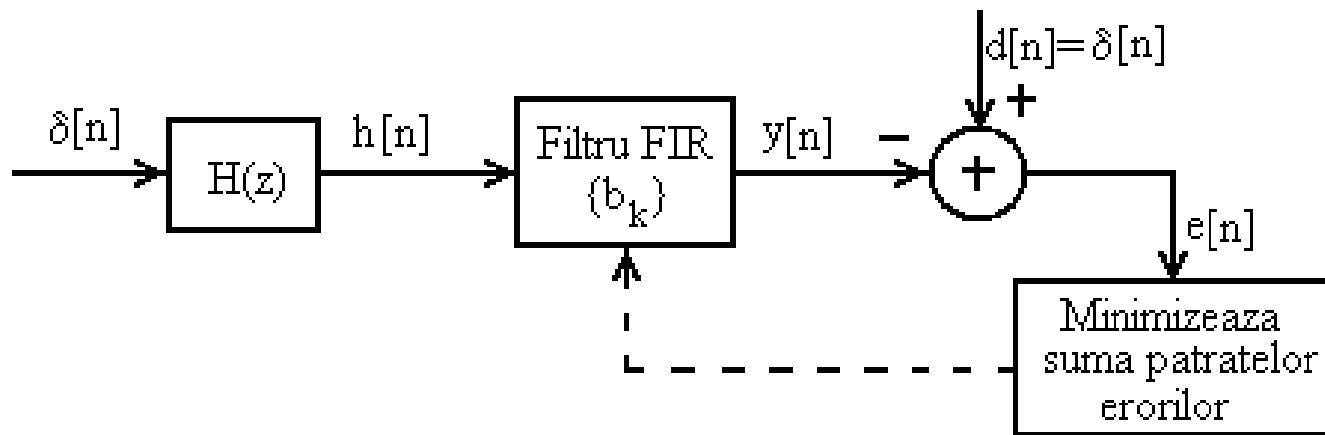
$$E_t = \sum_{n=M+1}^{\infty} h_I^2[n] \quad (47)$$

- Fie $d[n]$ secvența de ieșire dorită a filtrului de lungime $M+1$ și fie $h[n]$ secvența de intrare.
- secvența de eroare dintre secvența dorită si cea reală este

$$e[n] = d[n] - \sum_{k=0}^M b_k h[n-k] \quad (48)$$

Filtrul FIR invers obținut prin metoda celor mai mici pătrate

b_k sunt coeficienții filtrului



Filtrul FIR invers obținut prin metoda celor mai mici pătrate

$$E = \sum_{n=0}^{\infty} \left[d[n] - \sum_{k=0}^M b_k h[n-k] \right]^2 \quad (49)$$

Filtrul FIR invers obținut prin metoda celor mai mici pătrate

- Prin minimizarea lui E în raport cu coeficienții filtrului

$$\sum_{k=0}^M b_k r_{hh}[k-l] = r_{dh}[l], \quad l = 0, 1, \dots, M \quad (50)$$

- $r_{hh}[l]$ este funcția de autocorelație a lui $h[n]$, presupus staționar, definită ca

$$r_{hh}[l] = \sum_{n=0}^{\infty} h[n]h[n-l] \quad (51)$$

Filtrul FIR invers obținut prin metoda celor mai mici pătrate

- $r_{dh}[l]$ este secvența de corelație dintre răspunsul dorit $d[n]$, presupus staționar, și secvența de intrare $h[n]$, definită ca

$$r_{dh}[l] = \sum_{n=0}^{\infty} d[n]h[n-l] \quad (52)$$

- *Filtru Wiener*

Pentru $d[n]=\delta[n]$

$$r_{dh}[l] = \begin{cases} h[0], & l = 0 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases} \quad (53)$$

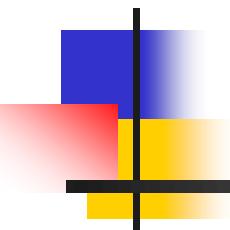
Filtrul FIR invers obținut prin metoda celor mai mici pătrate

$$\begin{bmatrix} r_{hh}[0] & r_{hh}[1] & \dots & r_{hh}[M] \\ r_{hh}[1] & r_{hh}[0] & \dots & r_{hh}[M-1] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{hh}[M] & & & r_{hh}[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \dots \\ b_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h[0] \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (54)$$

$$E_{\min} = \sum_{n=0}^{\infty} d[n]^2 - \sum_{k=0}^M b_k r_{dh}[k] \quad (55)$$

$$d[n] = \delta[n] \quad r_{dh}[n] = h[0]\delta[n] \quad E_{\min} = 1 - h[0] b_0 \quad (56)$$

$$d[n] = \delta[n-D] \quad E_{\min} = 1 - \sum_{k=0}^M b_k h[D-k] \quad (57)$$

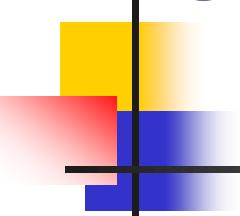


Structuri pentru Implementarea Sistemelor Discrete

Structuri pentru Implementarea Sistemelor Discrete

Structuri

- În formă directă,
- în cascadă,
- în paralel,
- lattice,
- în spatiul starilor



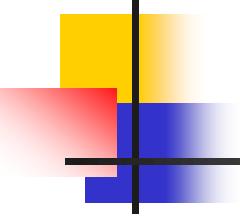
Considerații asupra implementării sistemelor discrete **SDLIT**

- Ecuația cu diferențe cu coeficienți constanți descrisă de relația

$$y[n] = -\sum_{k=1}^N a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad (1)$$

- Funcția de sistem

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \quad (2)$$



Considerații asupra implementării sistemelor discrete SDLIT

- De ce nu sunt implementate direct cele două relații și ce beneficii decurg din rearanjarea acestora în diverse moduri.
- Factorii importanți care determină alegerea unei structuri particulare sunt:
 - complexitatea calculului,
 - necesarul de memorie,
 - efectele lungimii finite a cuvintelor asupra performanțelor sistemului.

Structura lattice

- Utilizată în implementarea filtrelor adaptive
 - Se consideră o succesiune de filtre FIR cu funcțiile de transfer

$$H_m(z) = A_m(z) \quad m = 0, 1, 2, \dots, M-1 \quad (3)$$

unde

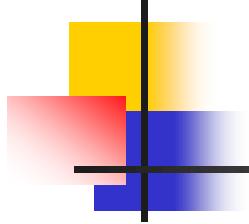
$$A_m(z) = 1 + \sum_{k=1}^m \alpha_m[k] z^{-k} \quad m \geq 1 \quad (4)$$

și $A_0(z) = 1$

$$H_m(z) = \sum_{k=0}^m h_m[k] z^{-k}$$

Răspunsul la impuls al filtrului de ordin m este $h_m[0] = 1$

și $h_m[k] = \alpha_m[k] \quad k = 1, 2, \dots, m$



Structura lattice

- Se definește $\alpha_m[0] = 1$. Dacă $x[n]$ este secvența de intrare în filtrul $A_m(z)$ și $y[n]$ secvența de ieșire, se poate scrie

$$y[n] = x[n] + \sum_{k=1}^m \alpha_m[k]x[n-k] \quad (5)$$

- Două structuri de realizare a filtrelor FIR în forma directă sunt date în figura

Structura lattice

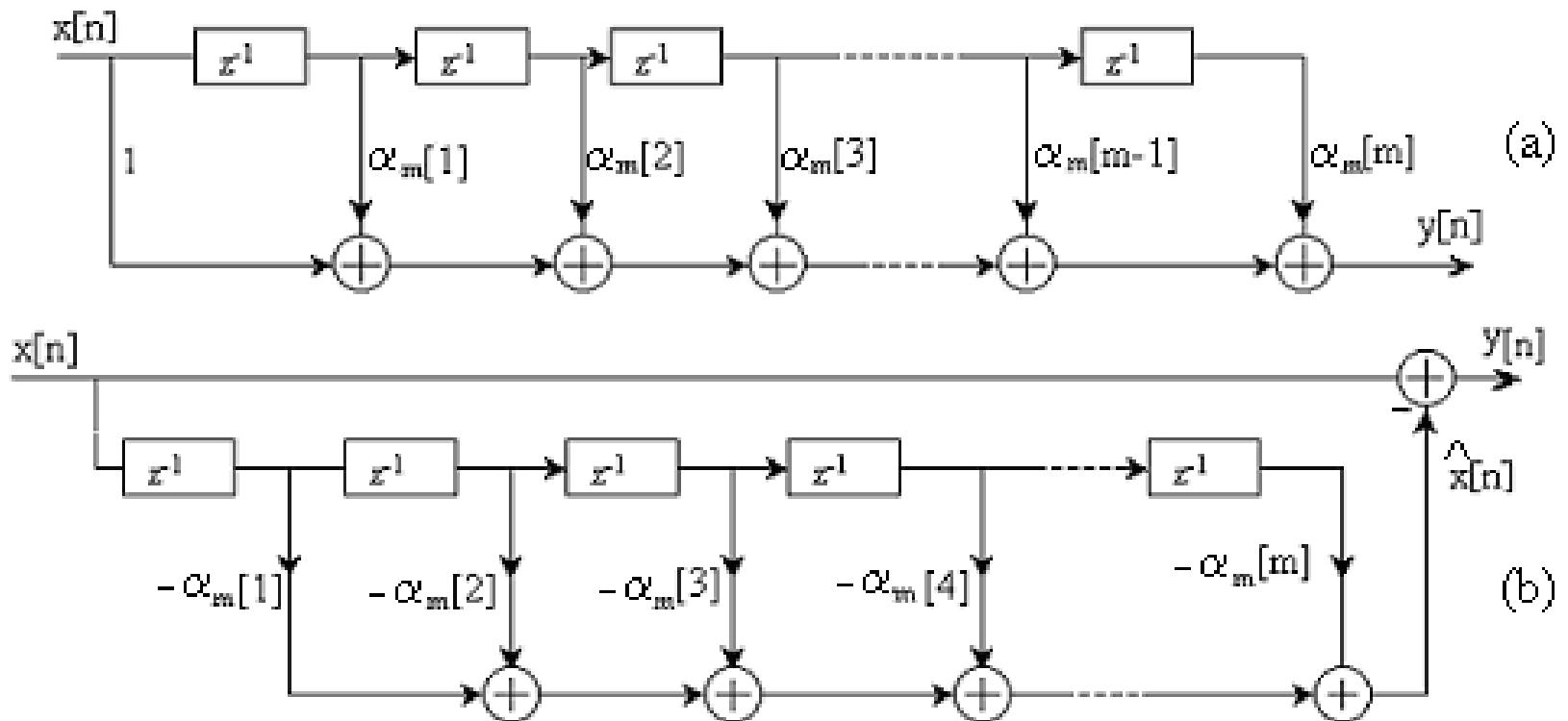


Figura 1. Forma directă de realizare pentru (a) un filtru FIR, (b) un filtru FIR predictor

Structura lattice

- Structurile din figura 1 sunt în strânsă legătură cu predicția liniară, unde

$$\hat{x}[n] = -\sum_{k=1}^m \alpha_m[k]x[n-k] \quad (6)$$

este valoarea prezisă a lui $x[n]$ pe baza a m intrări anterioare, $x[n-1], x[n-2], \dots, x[n-m]$, iar $y[n] = x[n] - \hat{x}[n]$ dat de (5), reprezintă eroarea de predicție.

Ieșirea filtrului FIR dată de relația (5) poate fi văzută ca eroarea între valoarea adevărată a semnalului $x[n]$ și valoarea prezisă $\hat{x}[n]$.

Structura lattice

- Se consideră un filtru de ordinul $m = 1$. Ieșirea unui astfel de filtru este $y[n] = x[n] + \alpha_1[1]x[n-1]$ (7)
- $K_1 = \alpha_1[1]$ coeficient de reflexie.

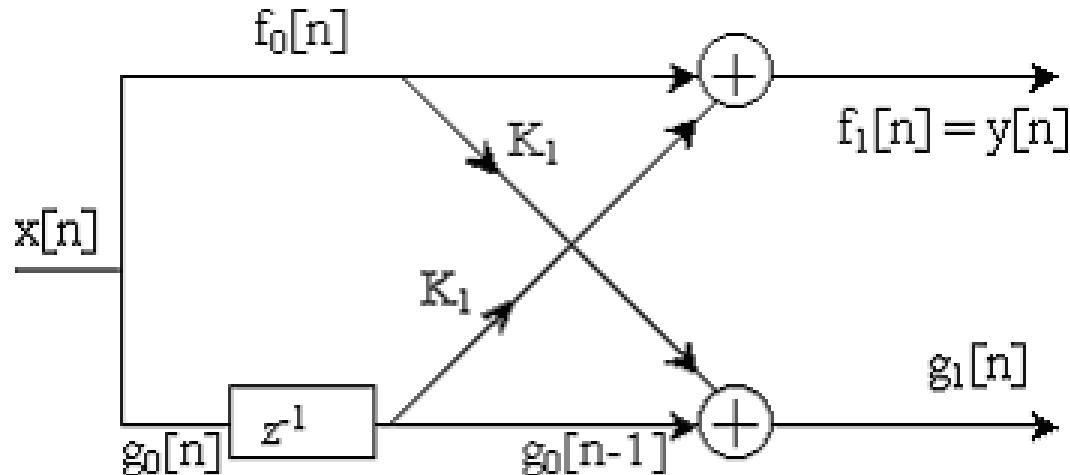
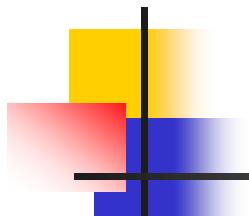


Figura 2. Filtru lattice cu o treapta



Structura lattice

- Pentru această structură se pot scrie relațiile:

$$f_0[n] = g_0[n] = x[n]$$

$$f_1[n] = f_0[n] + K_1 g_0[n-1] = x[n] + K_1 x[n-1] \quad (8)$$

$$g_1[n] = K_1 f_0[n] + g_0[n-1] = K_1 x[n] + x[n-1]$$

- Obs.
- $$\begin{aligned} f_1[n] & \quad (1, K_1) \\ g_1[n] & \quad (K_1, 1) \end{aligned}$$

- Se consideră un filtru FIR pentru care $m = 2$.
- Ieșirea structurii în formă directă este

$$y[n] = x[n] + \alpha_2[1]x[n-1] + \alpha_2[2]x[n-2] \quad (9)$$

Structura lattice

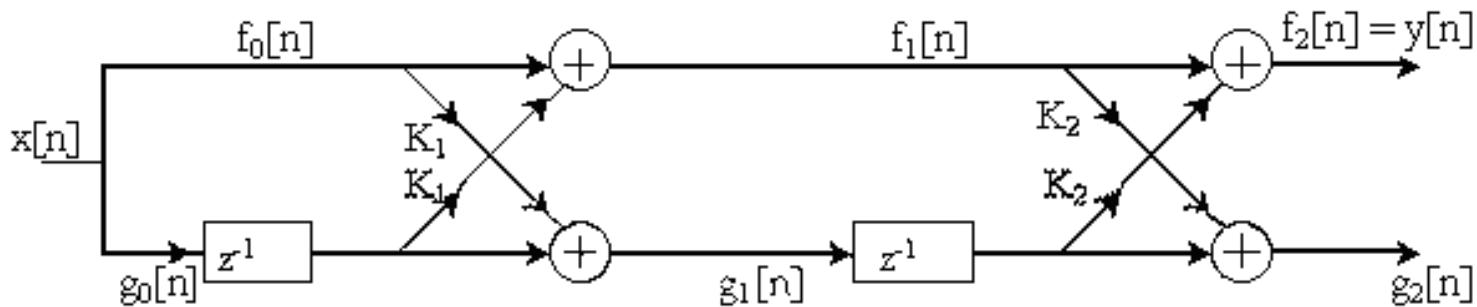
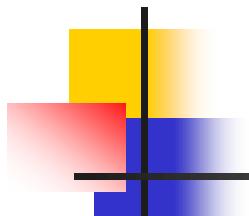


Figura 3. Filtru lattice cu două trepte

- ieșirea din treapta a doua este

$$\begin{aligned} f_2[n] &= f_1[n] + K_2 g_1[n-1] \\ g_2[n] &= K_2 f_1[n] + g_1[n-1] \end{aligned} \tag{10}$$



Structura lattice

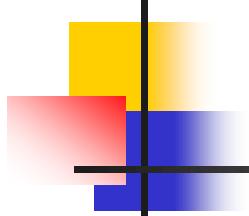
- Înlocuind $f_1[n]$ și $g_1[n]$ din relația (8) în relația (10) se obține

$$\begin{aligned}f_2[n] &= x[n] + K_1 x[n-1] + K_2 [K_1 x[n-1] + x[n-2]] \\&= x[n] + K_1(1 + K_2)x[n-1] + K_2 x[n-2]\end{aligned}\tag{11}$$

$$\begin{aligned}g_2[n] &= K_2 x[n] + K_2 K_1 x[n-1] + K_1 x[n-1] + x[n-2] \\&= K_2 x[n] + K_1(1 + K_2)x[n-1] + x[n-2]\end{aligned}\tag{12}$$

Obs. $f_1[n] \quad (1, K_1(1 + K_2), K_2)$

$g_1[n] \quad (K_2, K_1(1 + K_2), 1)$



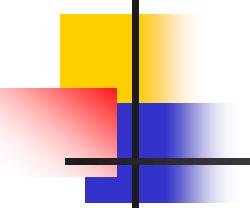
Structura lattice

Relația (11) este identică cu ieșirea filtrului FIR în forma directă dată de (9), dacă

$$\alpha_2[2] = K_2 \quad \alpha_2[1] = K_1(1 + K_2) \quad (13)$$

sau, echivalent

$$K_2 = \alpha_2[2] \quad K_1 = \frac{\alpha_2[1]}{1 + \alpha_2[2]} \quad (13')$$



Structura lattice

- Se poate demonstra prin inducție echivalența dintre filtrul FIR de ordin m implementat în forma directă și filtrul lattice de ordin m sau cu m trepte

$$f_0[n] = g_0[n] = x[n] \quad (14)$$

$$f_m[n] = f_{m-1}[n] + K_m g_{m-1}[n-1] \quad m = 1, 2, \dots, M-1 \quad (15)$$

$$g_m[n] = K_m f_{m-1}[n] + g_{m-1}[n-1] \quad m = 1, 2, \dots, M-1 \quad (16)$$

- Ieșirea filtrului cu $(M-1)$ trepte corespunde ieșirii filtrului FIR de ordin $(M-1)$. Prin urmare

$$y[n] = f_{M-1}[n]$$

Structura lattice

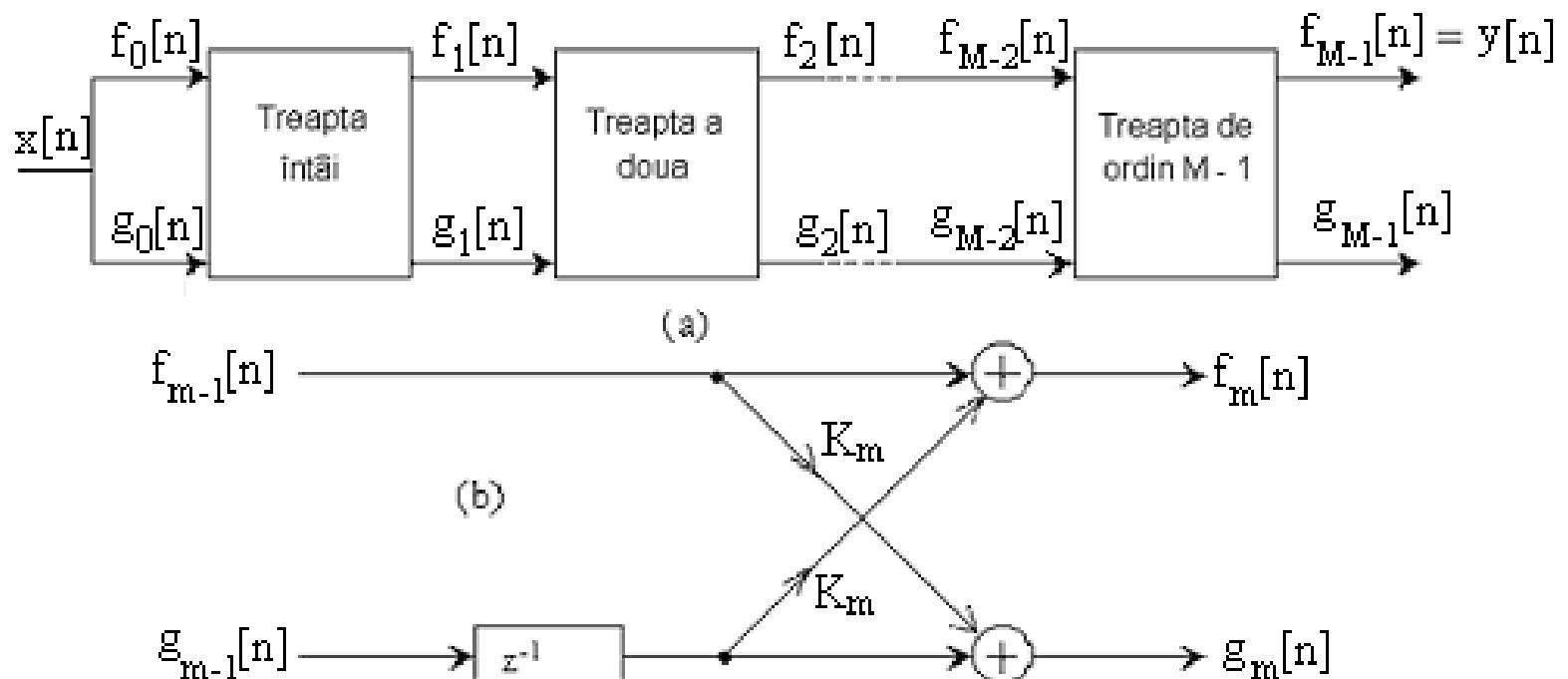


Figura 4. Filtru lattice cu $M-1$ trepte, (b) Structura unei trepte

Structura lattice

- ieșirea $f_m[n]$ a unui filtru lattice de ordin m

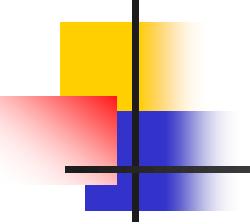
$$f_m[n] = \sum_{k=0}^m \alpha_m[k]x[n-k] \quad \alpha_m[0] = 1 \quad (17)$$

$$F_m(z) = A_m(z)X(z) \text{ unde } A_m(z) = Z\{\alpha_m[n]\} \quad (18)$$

sau, echivalent

$$A_m(z) = \frac{F_m(z)}{X(z)} = \frac{F_m(z)}{F_0(z)} \quad (19)$$

$g_m[n]$ exprimată sub forma unei sume de conoluție cu coeficientii $\beta_m[n]$

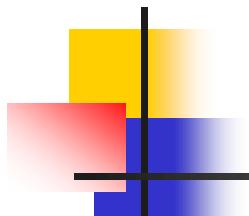


Structura lattice

- coeficienții filtrului care produce ieșirea $f_1[n]$ sunt $\{1, K_1\} = \{1, \alpha_1[1]\}$
- coeficienții filtrului cu ieșirea $g_1[n]$ sunt $\{K_1, 1\} = \{\alpha_1[1], 1\}$.

Aceste seturi de coeficienți sunt în ordine inversă.

$$\begin{aligned} g_2[n] &= K_2 f_1[n] + g_1[n-1] \\ &= K_2 [x[n] + K_1 x[n-1]] + K_1 x[n-1] + x[n-2] \\ &= K_2 x[n] + K_1 (1 + K_2) x[n-1] + x[n-2] \\ &= \alpha_2[2] x[n] + \alpha_2[1] x[n-1] + x[n-2] \end{aligned}$$

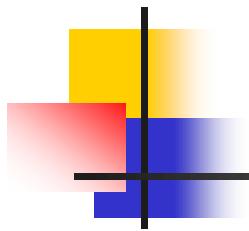


Structura lattice

- coeficienții filtrului sunt $\{\alpha_2[2], \alpha_2[1], 1\}$, iar pentru filtrul ce produce ieșirea $f_2[n]$ sunt $\{1, \alpha_2[1], \alpha_2[2]\}$

$$g_m[n] = \sum_{k=0}^m \beta_m[k] x[n-k] \quad (20)$$

- coeficienții $\{\beta_m[k]\}$ sunt asociați cu ai filtrului care produce ieșirea $f_m[n] = y[n]$, dar operează în ordine inversă.



Structura lattice

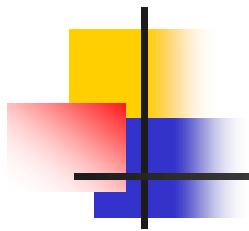
- valorile $x[n], x[n-1], \dots, x[n-m+1]$, sunt utilizate pentru predicția liniară a eșantionului de semnal $x[n-m]$

$$\hat{x}[n-m] = -\sum_{k=0}^{m-1} \beta_m[k]x[n-k] \quad (21)$$

$$\beta_m[k] = \alpha_m[m-k] \quad k = 0, 1, \dots, m \quad (22)$$

- Predicția efectuată pe baza relației (21) se numește *predicție inversă sau înapoi*

$$G_m(z) = B_m(z)X(z) \text{ unde } B_m(z) = Z\{\beta_m[n]\} \quad (23)$$



Structura lattice

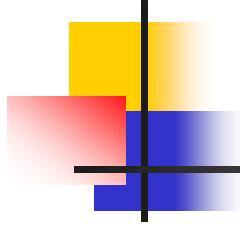
$$B_m(z) = \frac{G_m(z)}{X(z)} \quad (24)$$

$$B_m(z) = \sum_{k=0}^m \beta_m[k] z^{-k} \quad (25)$$

$$B_m(z) = \sum_{k=0}^m \alpha_m[m-k] z^{-k} \quad (26)$$

$$= \sum_{l=0}^m \alpha_m[l] z^{l-m} = z^{-m} \sum_{l=0}^m \alpha_m[l] z^l = z^{-m} A_m(z^{-1})$$

- zerourile filtrului FIR cu funcția de transfer $B_m(z)$ sunt reciproce zerourilor lui $A_m(z)$. Din acest motiv $B_m(z)$ este numit polinom *reciproc* sau *vers invers* al lui $A_m(z)$



Structura lattice

$$F_0(z) = G_0(z) = X(z) \quad (27)$$

$$F_m(z) = F_{m-1}(z) + K_m z^{-1} G_{m-1}(z) \quad m = 1, 2, \dots, M-1 \quad (28)$$

$$G_m(z) = K_m F_{m-1}(z) + z^{-1} G_{m-1}(z) \quad m = 1, 2, \dots, M-1 \quad (29)$$

$$A_0(z) = B_0(z) = 1 \quad (30)$$

$$A_m(z) = A_{m-1}(z) + K_m z^{-1} B_{m-1}(z) \quad m = 1, 2, \dots, M-1 \quad (31)$$

$$B_m(z) = K_m A_{m-1}(z) + z^{-1} B_{m-1}(z) \quad m = 1, 2, \dots, M-1 \quad (32)$$

$$\begin{bmatrix} A_m(z) \\ B_m(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & K_m \\ K_m & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{m-1}(z) \\ z^{-1} B_{m-1}(z) \end{bmatrix} \quad (33)$$

Conversia coeficienților structurii lattice în coeficienți ai filtrului în formă directă

$$A_0(z) = B_0(z) = 1 \quad (34)$$

$$A_m(z) = A_{m-1}(z) + K_m z^{-1} B_{m-1}(z) \quad m = 1, 2, \dots, M-1 \quad (35)$$

$$B_m(z) = z^{-m} A_m(z^{-1}) \quad m = 1, 2, \dots, M-1 \quad (36)$$

- soluția se obține recursiv, începând cu rangul $m = 1$
- determinarea recursivă a coeficienților $\{\alpha_m[k]\}$

$$\begin{aligned} A_m(z) &= A_{m-1}(z) + K_m z^{-1} B_{m-1}(z) \Leftrightarrow \\ \sum_{k=0}^m \alpha_m[k] z^{-k} &= \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_{m-1}[k] z^{-k} + K_m \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_{m-1}[m-1-k] z^{-(k+1)} \end{aligned} \quad (37)$$

Conversia coeficienților structurii lattice în coeficienți ai filtrului în formă directă

$$\alpha_m[0] + \alpha_m[1]z^{-1} + \alpha_m[2]z^{-2} + \dots + \alpha_m[m]z^{-m} =$$

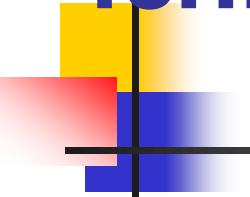
$$\alpha_{m-1}[0] + \alpha_{m-1}[1]z^{-1} + \alpha_{m-1}[2]z^{-2} + \dots + \alpha_{m-1}[m-1]z^{-(m-1)} +$$

$$K_m(\alpha_{m-1}[m-1]z^{-1} + \alpha_{m-1}[m-2]z^{-2} + \dots + \alpha_{m-1}[0]z^{-m})$$

$$\alpha_m[0] = 1 \quad (38)$$

$$\alpha_m[m] = K_m \quad (39)$$

$$\alpha_m[k] = \alpha_{m-1}[k] + K_m \alpha_{m-1}[m-k] = \alpha_{m-1}[k] + \alpha_m[m] \alpha_{m-1}[m-k]$$
$$1 \leq k \leq m-1, m = 1, 2, \dots, M-1. \quad (40)$$



Conversia coeficienților filtrului FIR din forma directă în coeficienți ai structurii lattice

- Dacă se cunosc coeficienții filtrului FIR pentru implementarea în formă directă sau, echivalent, polinomul $A_m(z)$ și se dorește determinarea coeficienților corespunzători structurii lattice, de ordin m , atunci $K_m = \alpha_m[m]$.
- Pentru a obține coeficientul K_{m-1} sunt necesare polinoamele $A_{m-1}(z)$
- Trebuie calculate succesiv polinoamele $A_m(z)$, începând de la $m = M-1$ până la $m = 1$.

Conversia coeficienților structurii lattice în coeficienți ai filtrului în formă directă

$$\begin{aligned} A_m(z) &= A_{m-1}(z) + K_m z^{-1} B_{m-1}(z) \\ &= A_{m-1}(z) + K_m [B_m(z) - K_m A_{m-1}(z)] \end{aligned}$$

$$A_{m-1}(z) = \frac{A_m(z) - K_m B_m(z)}{1 - K_m^2} \quad m = M-1, M-2, \dots, 1 \quad (41)$$

- procedura este operațională atât timp cât $|K_m| \neq 1$ pentru $m = 1, 2, \dots, M-1$
- pentru $m = M-1, M-2, \dots, 1$ se obține

$$K_m = \alpha_m[m] \quad \alpha_{m-1}[0] = 1 \quad (42)$$

$$\alpha_{m-1}[k] = \frac{\alpha_m[k] - K_m \beta_m[k]}{1 - K_m^2} = \frac{\alpha_m[k] - \alpha_m[m] \alpha_m[m-k]}{1 - \alpha_m^2[m]}, \quad 1 \leq k \leq m-1 \quad (43)$$

Structuri lattice numai cu poli pentru implementarea sistemelor IIR

- Fie un sistem numai cu poli cu funcția de sistem

$$H(z) = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^N a_N[k]z^{-k}} = \frac{1}{A_N(z)} \quad (44)$$

- Ecuăția cu diferențe pentru acest sistem IIR este

$$y[n] = -\sum_{k=1}^N a_N[k]y[n-k] + x[n] \quad (45)$$

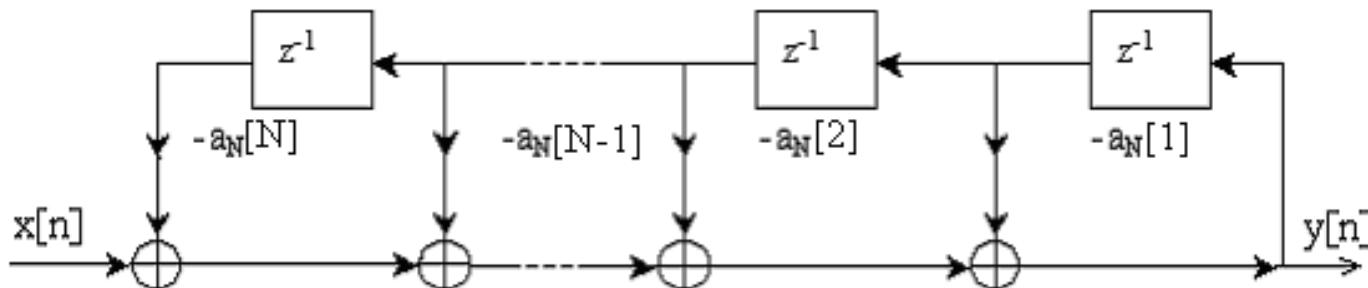


Figura 5. Implementarea în formă directă a unui sistem numai cu poli

Structuri lattice numai cu poli pentru implementarea sistemelor IIR

În relația (45) se inversează intrarea cu ieșirea

$$x[n] = -\sum_{k=1}^N a_N[k]x[n-k] + y[n] \quad (46)$$

echivalent,

$$y[n] = x[n] + \sum_{k=1}^N a_N[k]x[n-k] \quad (47)$$

- Ecuăția (47) descrie un sistem FIR cu funcția de sistem

$$H(z) = A_N(z)$$

- Un sistem poate fi obținut din celălalt interschimbând intrarea cu ieșirea.

Structuri lattice numai cu poli pentru implementarea sistemelor IIR

Pentru filtrul lattice numai cu zerouri se redefineste

intrarea ca fiind $x[n] = f_N[n]$ (48)

iar iesirea ca $y[n] = f_0[n]$ (49)

- Valorile $\{f_m[n]\}$ se calculeaza in ordine descrescatoare

$$f_N[n], f_{N-1}[n], \dots$$

$$f_{m-1}[n] = f_m[n] - K_m g_{m-1}[n-1] \quad m = N, N-1, \dots, 1$$

- Ecuația (16) pentru $g_m[n]$ rămâne neschimbată

Structuri lattice numai cu poli pentru implementarea sistemelor IIR

$$f_N[n] = x[n] \quad (50)$$

$$f_{m-1}[n] = f_m[n] - K_m g_{m-1}[n-1], \quad m = N, N-1, \dots, 1 \quad (51)$$

$$g_m[n] = K_m f_{m-1}[n] + g_{m-1}[n-1], \quad m = N, N-1, \dots, 1 \quad (52)$$

$$y[n] = f_0[n] = g_0[n] \quad (53)$$

care corespunde structurii din figura

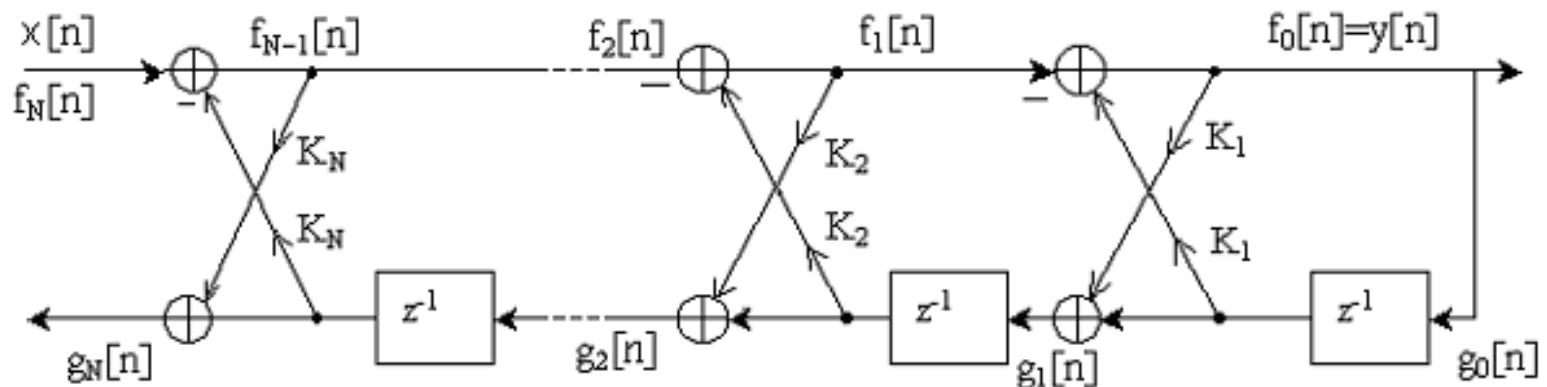
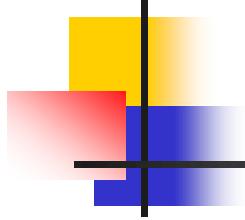


Figura 6. Structura lattice pentru un filtru IIR numai cu poli



Structuri lattice numai cu poli pentru implementarea sistemelor IIR

- În cazul în care $N = 1$, ecuațiile (50) și (51) se reduc la

$$x[n] = f_1[n]$$

$$f_0[n] = f_1[n] - K_1 g_0[n-1]$$

$$g_1[n] = K_1 f_0[n] + g_0[n-1] \tag{54a}$$

$$y[n] = f_0[n] = x[n] - K_1 y[n-1] \tag{54b}$$

$$g_1[n] = K_1 y[n] + y[n-1] \tag{55}$$

- (54b) reprezintă un sistem IIR numai cu poli,
- (55) reprezintă un sistem FIR de ordinul întâi

Structuri lattice numai cu poli pentru implementarea sistemelor IIR

- Cazul $N=2$

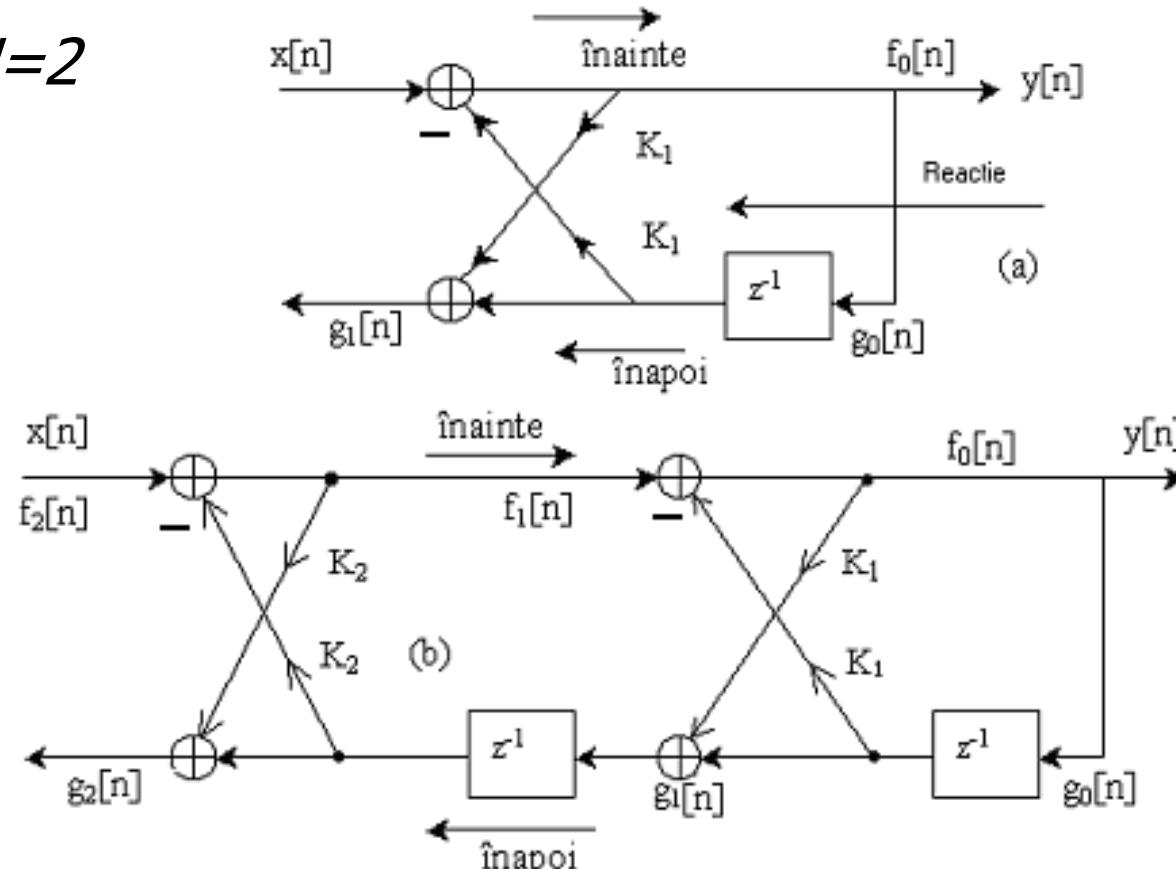


Figura 7. Implementarea structurii lattice pentru un sistem IIR
a) cu un pol și b) cu doi poli

Structuri lattice numai cu poli pentru implementarea sistemelor IIR

Ecuatiile corespunzatoare acestei structuri sunt

$$\begin{aligned}f_2[n] &= x[n] \\f_1[n] &= f_2[n] - K_2 g_1[n-1] \\g_2[n] &= K_2 f_1[n] + g_1[n-1] \\f_0[n] &= f_1[n] - K_1 g_0[n-1] \\g_1[n] &= K_1 f_0[n] + g_0[n-1]\end{aligned}\tag{56}$$

$$\begin{aligned}y[n] &= -K_1(1+K_2)y[n-1] - K_2y[n-2] + x[n] \\g_2[n] &= K_2y[n] + K_1(1+K_2)y[n-1] + y[n-2]\end{aligned}\tag{57}$$

$$H_a(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{F_0(z)}{F_m(z)} = \frac{1}{A_m(z)}\tag{59}$$

Structuri lattice numai cu poli pentru implementarea sistemelor IIR

Ecuatiile corespunzatoare acestei structuri sunt

$$f_2[n] = x[n] \quad (a)$$

$$f_1[n] = f_2[n] - K_2 g_1[n-1] \quad (b)$$

$$g_2[n] = K_2 f_1[n] + g_1[n-1] \quad (c)$$

$$f_0[n] = f_1[n] - K_1 g_0[n-1] \quad (d) \quad (56)$$

$$g_1[n] = K_1 f_0[n] + g_0[n-1] \quad (e)$$

$$y[n] = f_0[n] = g_0[n] \quad (f)$$

$$y[n] = f_0[n] = f_1[n] - K_1 g_0[n-1] \quad (f, d)$$

$$= f_2[n] - K_2 g_1[n-1] - K_1 g_0[n-1] \quad (b)$$

$$= f_2[n] - K_2(K_1 f_0[n-1] + g_0[n-2]) - K_1 g_0[n-1] \quad (e)$$

$$= x[n] - K_1 K_2 y[n-1] - K_2 y[n-2] - K_1 y[n-1] =$$

$$= -K_1(1 + K_2) y[n-1] - K_2 y[n-2] + x[n] \quad (57)$$

Structuri lattice numai cu poli pentru implementarea sistemelor IIR

Ecuatiile corespunzatoare acestei structuri sunt

- (57) – sistem IIR cu 2 poli

$$\begin{aligned} g_2[n] &= K_2 f_1[n] + g_1[n-1] \quad (c) \\ &= K_2(f_0[n] + K_1 g_0[n-1]) + K_1 f_0[n-1] + g_0[n-2] \quad (d, e) \\ &= K_2 y[n] + K_1 K_2 y[n-1] + K_1 y[n-1] + y[n-2] \\ &= K_2 y[n] + K_1(1 + K_2) y[n-1] + y[n-2] \end{aligned} \quad (58)$$

- (58) – sistem FIR cu două zerouri
- Functia de sistem pentru sistemul numai cu poli, respectiv zerouri

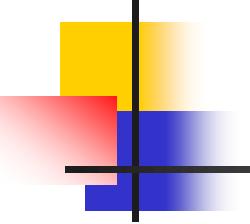
$$H_a(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{F_0(z)}{F_m(z)} = \frac{1}{A_m(z)} \quad (59)$$

Structuri lattice numai cu poli pentru implementarea sistemelor IIR

$$H_b(z) = \frac{G_m(z)}{Y(z)} = \frac{G_m(z)}{G_0(z)} = B_m(z) = z^{-m} A_m(z^{-1}) \quad (60)$$

- structura lattice numai cu poli are o cale numai cu zerouri cu intrarea $g_0[n]$ și ieșirea $g_N[n]$, identică cu calea corespunzătoare numai cu zerouri în structura lattice numai cu zerouri.

$B_m(z)$, - funcția de sistem pentru calea numai cu zerouri comună ambelor structuri lattice, (*înapoi sau invers*).



▪ Structuri lattice numai cu poli pentru implementarea sistemelor IIR

- Structurile lattice numai cu zerouri și numai cu poli sunt caracterizate de aceiași parametri lattice K_1, K_2, \dots, K_N .
- Cele două structuri lattice diferă doar prin interconexiunile grafurilor de semnal.
- Algoritmii pentru conversia coeficienților $\{\alpha_m[k]\}$ ai implementării în formă directă a unui sistem FIR în parametri lattice, și invers, se aplică la fel și structurii numai cu poli.

Structuri lattice cu poli și zerouri pentru implementarea sistemelor IIR

- Structura lattice numai cu poli reprezintă blocul constructiv de bază pentru structuri de tip lattice care conțin atât poli cât și zerouri.

- Un sistem IIR cu funcția de sistem

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M c_M[k]z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_N[k]z^{-k}} = \frac{C_M(z)}{A_N(z)} \quad (61)$$

- În structura în formă directă II, sistemul din (61) este descris de ecuațiile cu diferențe (sistem numai cu poli)

$$w[n] = -\sum_{k=1}^N a_N[k]w[n-k] + x[n] \quad (62)$$

Structuri lattice cu poli și zerouri pentru implementarea sistemelor IIR

$$y[n] = \sum_{k=0}^M c_M[k]w[n-k] \quad (63)$$

- (63) reprezintă relația funcțională intrare–ieșire a unui sistem numai cu zerouri.
- Ieșirea sistemului numai cu zerouri este o combinație liniară de ieșiri întârziate ale sistemului numai cu poli

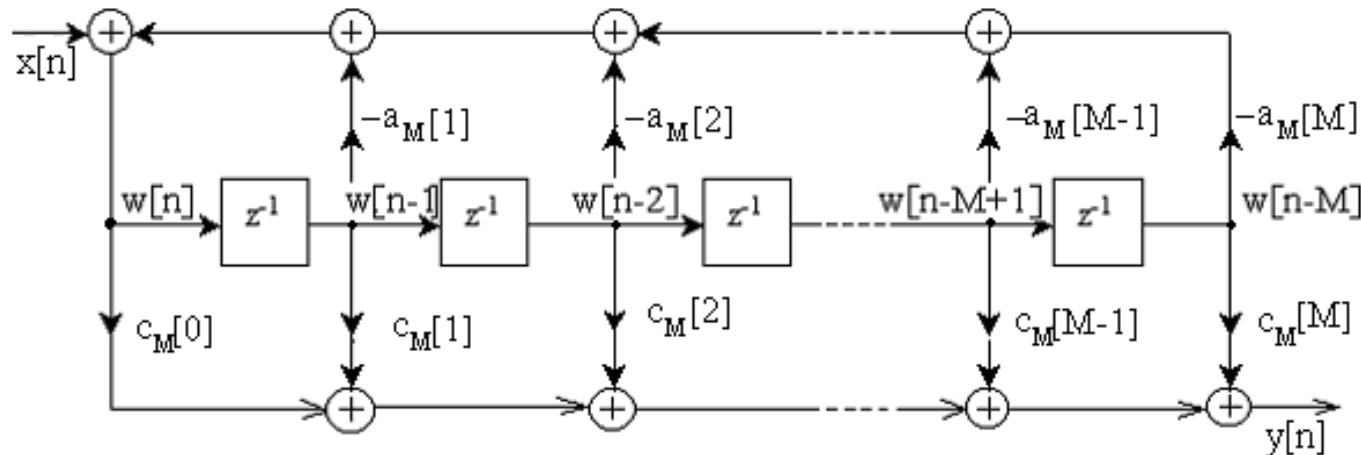


Figura 8. Forma directă II de implementare a unui sistem IIR pentru $N=M$

Structuri lattice cu poli și zerouri pentru implementarea sistemelor IIR

- Zerourile rezultă prin formarea unor combinații liniare din ieșirile anterioare.

$$sistemul \quad H_b(z) = \frac{G_m(z)}{Y(z)} = B_m(z)$$

este un sistem numai cu zerouri.

- Orice combinație liniară de $\{g_m[n]\}$ este, de asemenea, un sistem numai cu zerouri.
- O structură lattice numai cu poli cu parametrii $K_m, 1 \leq m \leq N$, căreia î se adăugă o scară care realizează o combinație liniară de $\{g_m[n]\}$ cu ponderile v_m are ca rezultat un sistem IIR cu poli și zerouri.

Structuri lattice cu poli și zerouri pentru implementarea sistemelor IIR

- Funcția de sistem corespunzătoare sistemului cu poli și zerouri este

$$y[n] = \sum_{m=0}^M v_m g_m[n] \quad (64)$$

- Functia de sistem a sistemului cu poli si zerouri

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{m=0}^M v_m \frac{G_m(z)}{X(z)} \quad (65)$$

Structuri lattice cu poli și zerouri pentru implementarea sistemelor IIR

$$X(z) = F_N(z) \quad \text{și} \quad F_0(z) = G_0(z),$$

$$H(z) = \sum_{m=0}^M v_m \frac{G_m(z)}{G_0(z)} \frac{F_0(z)}{F_N(z)} = \sum_{m=0}^M v_m \frac{B_m(z)}{A_N(z)} = \frac{\sum_{m=0}^M v_m B_m(z)}{A_N(z)} \quad (66)$$

$$C_M(z) = \sum_{m=0}^M v_m B_m(z) \quad (67)$$

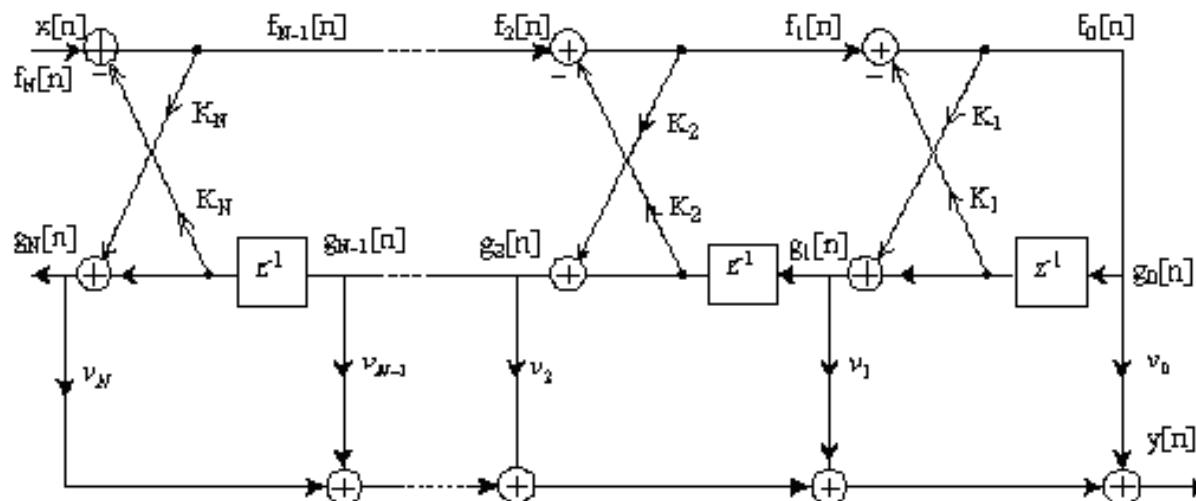


Figura 9. Structura lattice scară pentru realizarea unui sistem cu poli și zerouri

Structuri lattice cu poli și zerouri pentru implementarea sistemelor IIR

- Sunt determinați mai întâi parametrii structurii lattice numai cu poli.
- Coeficienții scării

$$C_m(z) = \sum_{k=0}^{m-1} v_k B_k(z) + v_m B_m(z) \quad (68)$$

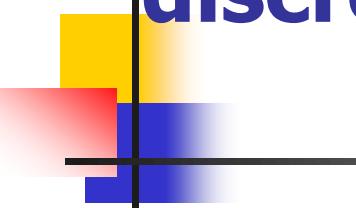
$$C_m(z) = C_{m-1}(z) + v_m B_m(z) \quad (69)$$

$$\beta_m[m] = 1 \text{ pentru toți } m$$

$$v_m = c_m[m] \quad m = 0, 1, \dots, M \quad (70)$$

$$C_{m-1}(z) = C_m(z) - v_m B_m(z) \quad (71)$$

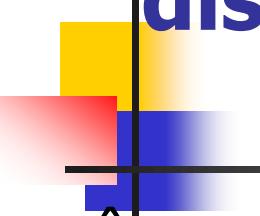
- Structurile filtrelor lattice-scară necesită un minimum de memorie dar nu și un număr minim de multiplicări. Sunt cele mai folosite în aplicațiile practice.



Implementarea și analiza sistemelor discrete, liniare, invariante în timp pe baza variabilelor de stare

- Descrierea internă implică o legătură între semnalele de intrare și de ieșire și un set adițional de variabile numite *variabile de stare*.
 - Un set de ecuații matematice ce pun în evidență relația dintre variabilele de stare ale sistemului și semnalul de intrare;
 - Un al doilea set de ecuații matematice ce stabilesc legătura între variabilele de stare și intrarea curentă cu semnalul de ieșire.
- **Conceptul de stare**

Definiție. Starea unui sistem la momentul n_0 este cantitatea de informație ce trebuie furnizată la momentul n_0 , care, împreună cu semnalul de intrare $x[n]$ pentru $n \geq n_0$, determină în mod unic ieșirea pentru toți $n \geq n_0$.



Implementarea și analiza sistemelor discrete, liniare, invariante în timp pe baza variabilelor de stare

- În general, descrierea internă a sistemelor cauzale conține două părți – una cu memorie și una fără memorie, descrise de două seturi de ecuații matematice:
 - un set de ecuații, denumit *ecuații de stare*, ce exprimă variabilele de stare de la momentul $n+1$ în funcție de variabilele de stare și intrarea la momentul n ;
 - o ecuație, denumită *ecuație de ieșire*, ce exprimă ieșirea la momentul n în funcție de variabilele de stare și intrarea la același moment de timp.

Implementarea și analiza sistemelor discrete, liniare, invariante în timp pe baza variabilelor de stare

- exemple
- În particular, pentru un sistem cauzal cu N variabile de stare $v_1[n], v_2[n], \dots, v_N[n]$, descrierea internă poate fi exprimată prin următoarele două seturi de ecuații:

- *Ecuățiile de stare* (72)

$$v_i[n+1] = f_i[v_1[n], v_2[n], \dots, v_N[n], x[n]] \quad i=1,2,\dots,N$$

- *Ecuăția de ieșire* (73)

$$y[n] = g[v_1[n], v_2[n], \dots, v_N[n], x[n]]$$

Descrierea în spațiul stărilor a sistemelor caracterizate de ecuații cu diferențe

- Fie un sistem discret, liniar, invariant în timp, cauzal, caracterizat de ecuația cu diferențe

$$y[n] = -\sum_{k=1}^3 a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^3 b_k x[n-k] \quad (74)$$

- Implementarea sistemului în formă directă II este indicată în figura 10. Ca variabile de stare, se vor utiliza ieșirile celulelor de memorie ale sistemului.

$$\begin{aligned} v_1[n+1] &= v_2[n] \\ v_2[n+1] &= v_3[n] \\ v_3[n+1] &= -a_3 v_1[n] - a_2 v_2[n] - a_1 v_3[n] + x[n] \end{aligned} \quad (75)$$

Descrierea în spațiul stărilor a sistemelor caracterizate de ecuații cu diferențe

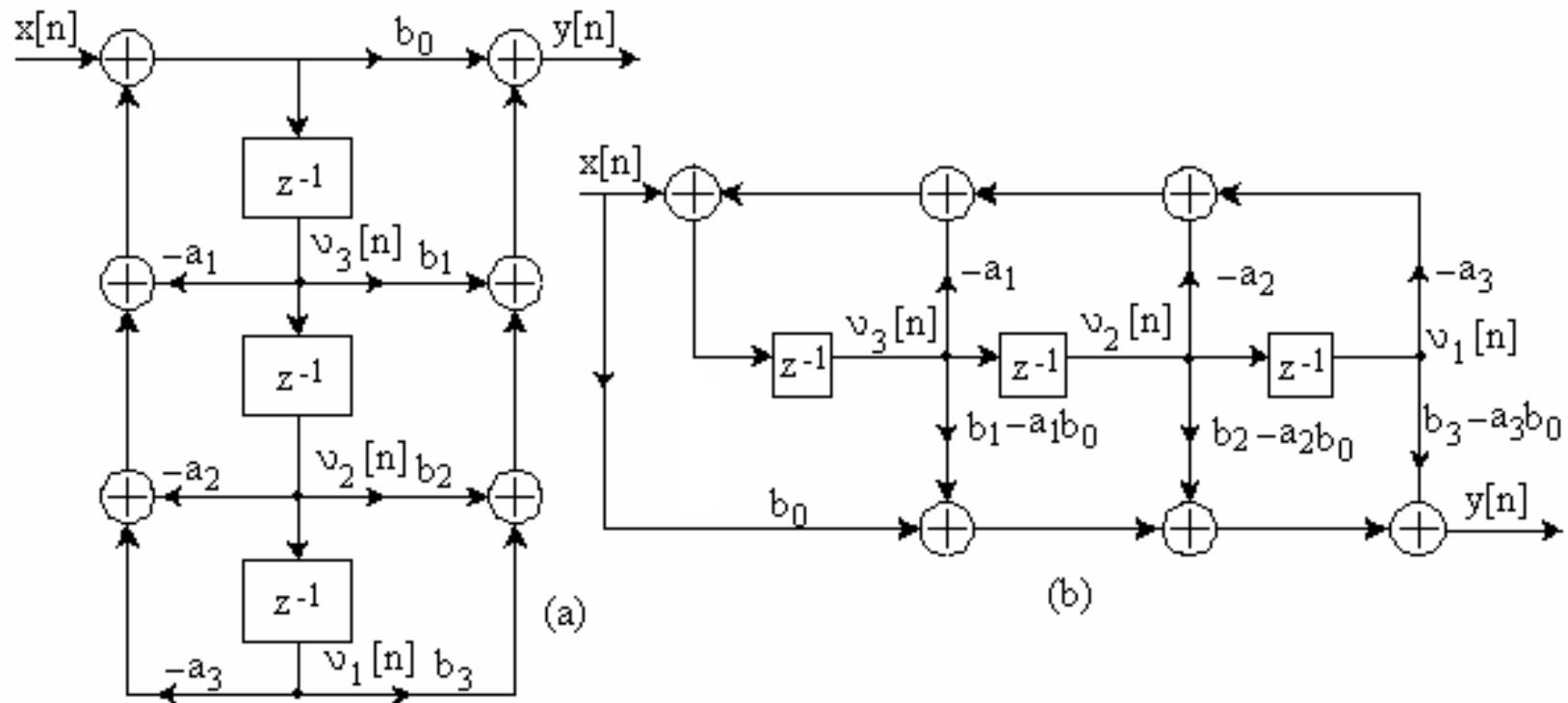


Figura 10. Realizarea (a) în forma directă II și (b) în spațiul stărilor a sistemului descris de relația (74)

Descrierea în spațiul stărilor a sistemelor caracterizate de ecuații cu diferențe

$$y[n] = b_0 v_3[n+1] + b_3 v_1[n] + b_2 v_2[n] + b_1 v_3[n] \quad (76)$$

$$\begin{aligned} y[n] = & (b_3 - b_0 a_3) v_1[n] + (b_2 - b_0 a_2) v_2[n] + \\ & + (b_1 - b_0 a_1) v_3[n] + b_0 x[n] \end{aligned} \quad (77)$$

Descrierea în spațiul stărilor a sistemelor caracterizate de ecuații cu diferențe

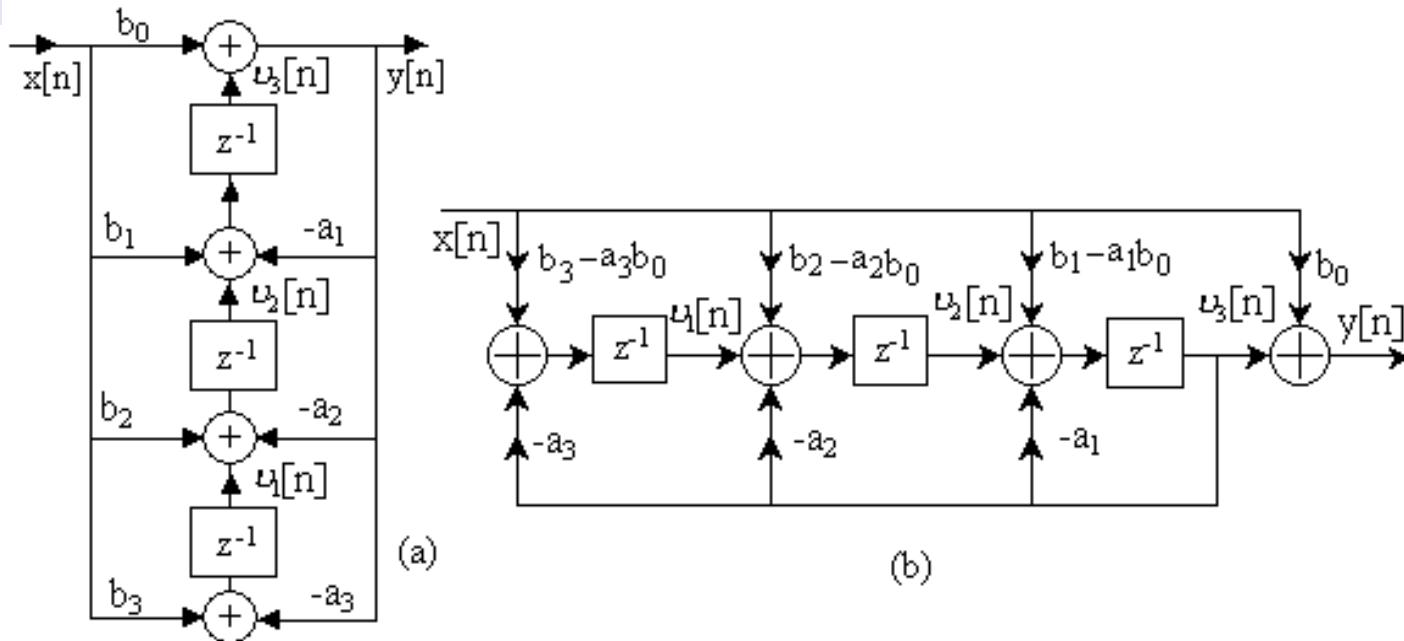


Figura 11. Realizarea (a) în forma directă II transpusă și (b) în spațiul stărilor a sistemului descris de relația (74)

Descrierea în spațiul stărilor a sistemelor caracterizate de ecuații cu diferențe

$$\begin{aligned}v_1[n+1] &= b_3x[n] - a_3y[n] \\v_2[n+1] &= v_1[n] + b_2x[n] - a_2y[n] \\v_3[n+1] &= v_2[n] + b_1x[n] - a_1y[n]\end{aligned}\tag{78}$$

$$y[n] = b_0x[n] + v_3[n]\tag{79}$$

$$\begin{aligned}v_1[n+1] &= -a_3v_3[n] + (b_3 - b_0a_3)x[n] \\v_2[n+1] &= v_1[n] - a_2v_3[n] + (b_2 - b_0a_2)x[n] \\v_3[n+1] &= v_2[n] - a_1v_3[n] + (b_1 - b_0a_1)x[n]\end{aligned}\tag{80}$$

Descrierea în spațiul stărilor a sistemelor caracterizate de ecuații cu diferențe

- *implementarea în spațiul stărilor de tipul 1*
- Matriceal, relațiile (75) și (77) se scriu sub forma

$$\begin{bmatrix} v_1[n+1] \\ v_2[n+1] \\ v_3[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1[n] \\ v_2[n] \\ v_3[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x[n] \quad (81)$$

$$y[n] = [(b_3 - b_0 a_3)(b_2 - b_0 a_2)(b_1 - b_0 a_1)] \begin{bmatrix} v_1[n] \\ v_2[n] \\ v_3[n] \end{bmatrix} + b_0 x[n] \quad (82)$$

Descrierea în spațiul stărilor a sistemelor caracterizate de ecuații cu diferențe

- implementarea în spațiul stărilor de tipul 2

$$\begin{bmatrix} v_1[n+1] \\ v_2[n+1] \\ v_3[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1[n] \\ v_2[n] \\ v_3[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (b_3 - b_0 a_3) \\ (b_2 - b_0 a_2) \\ (b_1 - b_0 a_1) \end{bmatrix} x[n] \quad (83)$$

$$y[n] = [0 \quad 0 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} v_1[n] \\ v_2[n] \\ v_3[n] \end{bmatrix} + b_0 x[n] \quad (84)$$

- Generalizare

$$y[n] = -\sum_{k=1}^N a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^N b_k x[n-k] \quad (85)$$

Descrierea în spațiul stărilor a sistemelor caracterizate de ecuații cu diferențe

$$\mathbf{v}[n] = \begin{bmatrix} v_1[n] \\ v_2[n] \\ \vdots \\ v_N[n] \end{bmatrix} \quad (86)$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1N} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{N1} & f_{N2} & \cdots & f_{NN} \end{bmatrix} \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_N \end{bmatrix} \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_N \end{bmatrix} \quad (87)$$

$$\mathbf{v}[n+1] = \mathbf{F}\mathbf{v}[n] + \mathbf{q}x[n] \quad (88)$$

$$y[n] = \mathbf{g}^t \mathbf{v}[n] + dx[n] \quad (89)$$

Descrierea în spațiul stăriilor a sistemelor caracterizate de ecuații cu diferențe

- Implementarea de tipul 1 liniară și invariantă în timp se obține, alegând

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 \\ -a_N & -a_{N-1} & \cdot & \cdot & \cdot & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} b_N - b_0 a_N \\ b_{N-1} - b_0 a_{N-1} \\ \vdots \\ b_1 - b_0 a_1 \end{bmatrix} \quad d = b_0 \quad (90)$$

Descrierea în spațiul stărilor a sistemelor caracterizate de ecuații cu diferențe

- Implementarea de tipul 2 se obține cu alegerea

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_N \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{N-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdot & 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} b_N - b_0 a_N \\ b_{N-1} - b_0 a_{N-1} \\ \vdots \\ b_2 - b_0 a_2 \\ b_1 - b_0 a_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad d = b_0 \quad (91)$$

Relații de legătură între descrierea intrare-ieșire și descrierea în spațiul stărilor a SDLIT

- Relațiile intrare - ieșire nu descriu în mod unic structura internă a sistemului.
- Se consideră un sistem SISO, N-dimensional, având reprezentarea în spațiul stărilor

$$\mathbf{v}[n+1] = \mathbf{F}\mathbf{v}[n] + \mathbf{q}x[n] \quad (92)$$

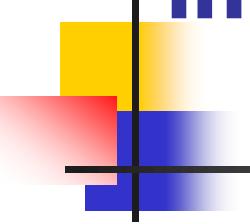
$$y[n] = \mathbf{g}^t \mathbf{v}[n] + dx[n] \quad (93)$$

- Fie \mathbf{P} orice matrice $N \times N$ a cărei inversă, \mathbf{P}^{-1} , există. Se definește
 $\hat{\mathbf{v}}[n] = \mathbf{P}\mathbf{v}[n] \quad (94)$ de unde $\mathbf{v}[n] = \mathbf{P}^{-1}\hat{\mathbf{v}}[n] \quad (95)$

$$\mathbf{P}\mathbf{v}[n+1] = \mathbf{P}\mathbf{F}\mathbf{v}[n] + \mathbf{P}\mathbf{q}x[n]$$

$$\hat{\mathbf{v}}[n+1] = (\mathbf{P}\mathbf{F}\mathbf{P}^{-1})\hat{\mathbf{v}}[n] + (\mathbf{P}\mathbf{q})x[n] \quad (96)$$

$$y[n] = (\mathbf{g}^t \mathbf{P}^{-1})\hat{\mathbf{v}}[n] + dx[n] \quad (97)$$



Relații de legătură între descrierea intrare-ieșire și descrierea în spațiul stărilor a SDLIT

$$\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{P} \mathbf{F} \mathbf{P}^{-1}$$

$$\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{P} \mathbf{q} \quad (98)$$

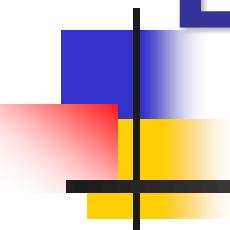
$$\hat{\mathbf{g}}^t = \mathbf{g}^t \mathbf{P}^{-1}$$

- ecuațiile de stare pot fi exprimate ca

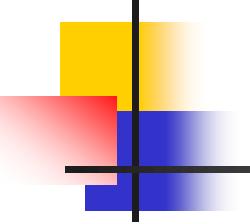
$$\hat{\mathbf{v}}[n+1] = \hat{\mathbf{F}}\hat{\mathbf{v}}[n] + \hat{\mathbf{q}}x[n] \quad (99)$$

$$y[n] = \hat{\mathbf{g}}^t \hat{\mathbf{v}}[n] + dx[n] \quad (100)$$

- Printr-o transformare liniară simplă a variabilelor de stare, se generează un nou set de ecuații de stare și o ecuație de ieșire, în care intrarea $x[n]$ și ieșirea $y[n]$ sunt neschimbate.
- Există un număr infinit de alegeri ale matricei de transformare \mathbf{P}
- Există un număr infinit de ecuații de stare și structuri pentru un sistem.
- O implementare internă se spune că este *minimală* dacă dimensiunea spațiului stărilor (a numărului variabilelor de stare) este cea mai mică din toate realizările posibile.



EFFECTELE LUNGIMII FINITE A CUVINTELOR ÎN FILTRAREA DIGITALĂ



Introducere

Principalele tipuri de erori de cuantizare care apar în filtrarea digitală sunt:

1. Erori de cuantizare ale semnalului de intrare în conversia analog – digitală (A/D);
2. Erori rezultate din cuantizarea coeficienților filtrelor digitale;
3. Erori rezultate din rotunjirea produselor;
4. Depășirea aritmetică;
5. Oscilații cu cicluri limită.

Introducere

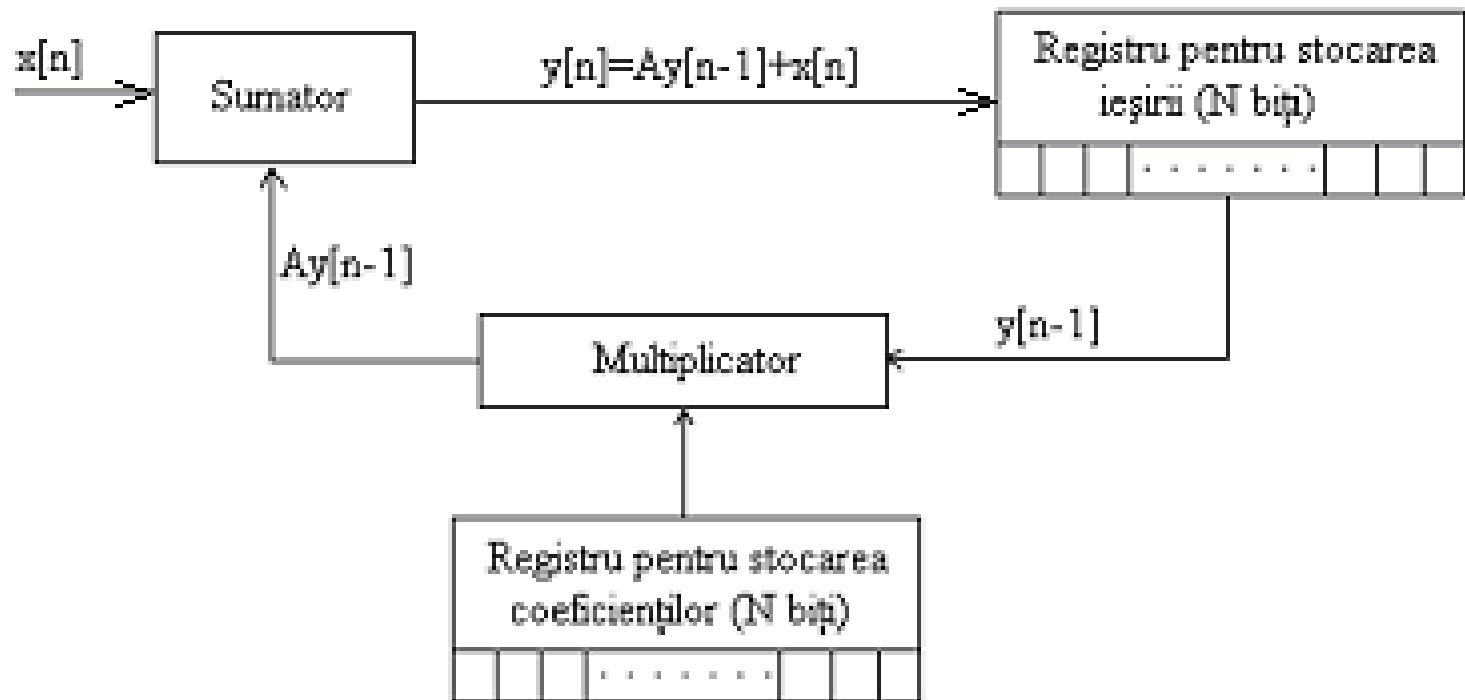
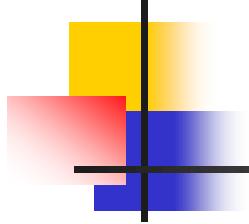


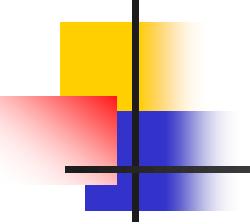
Figura 1. Implementarea unui filtru recursiv de ordinul întâi



Introducere

Trei factori importanți contribuie la alegerea unei anumite realizări a filtrelor:

- complexitatea calculelor,
- necesarul de memorie,
- efectele lungimii finite a cuvintelor.



Reprezentarea numerelor

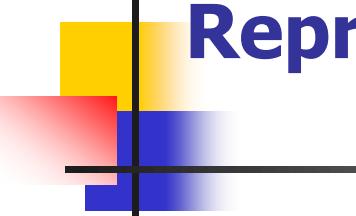
- Clasa reprezentărilor binare poate fi împărțită în reprezentările în virgulă fixă, virgulă mobilă și virgulă mobilă cu blocuri

Reprezentarea numerelor în virgulă fixă

- Reprezentarea numerelor în virgulă fixă este generalizarea reprezentării zecimale

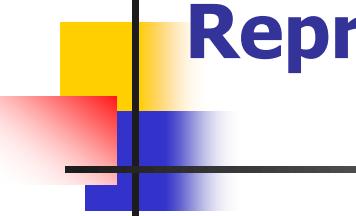
$$x = (b_{-a} \cdots b_{-1} \ b_0, \cdots b_b)_r = \sum_{i=-a}^b b_i r^{-i} \quad 0 \leq b_i \leq (r-1) \quad (1)$$

unde b_i reprezintă cifra, r – baza, $a+1$ – numărul de cifre ale părții întregi și b – numărul de cifre ale părții fracționare.



Reprezentarea numerelor în virgulă fixă

- Cea mai cunoscută reprezentare este cea pentru care $r=2$, în care numerele se numesc *numere binare* sau *biți* și pot lua valorile $\{0,1\}$, obținându-se *codul binar natural direct*. „Virgula binară” dintre b_0 și b_1 nu există fizic în calculator.
- Folosind un format întreg pe n biți ($a=n-1$, $b=0$), se pot reprezenta întregi fără semn cuprinși în domeniul $0 \div (2^n - 1)$.
- De obicei se folosește formatul fracționar ($a=0$, $b=n$), cu virgula binară între b_0 și b_1 , care permite reprezentarea numerelor în domeniul $0 \div (1 - 2^{-n})$.



Reprezentarea numerelor în virgulă fixă

- Primul bit din stânga este numit cel mai semnificativ bit (most significant bit, MSB) iar bitul cel mai din dreapta, cel mai puțin semnificativ bit (least significant bit, LSB).
- În reprezentarea unei fractii, MSB are o pondere de $2^{-1}=1/2$ iar LSB are o pondere de $2^{-b}=1/2^b$, unde b este numărul de biți pe care este reprezentată fractia.
- Ponderea $2^{-b}=1/2^b$ desemnată de LSB este numită și *rezoluție*.

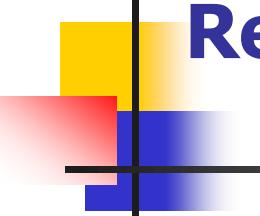
Reprezentarea numerelor în virgulă fixă

- Un cuvânt de cod de $a+1$ biți, cum ar fi 10011, corespunde numărului întreg

$$A = 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^4 = 1 + 2 + 16 = 19$$

- Numărul 0,10011 reprezintă o fracție corespunzătoare numărului zecimal

$$B = 1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 0 \cdot 2^{-3} + 1 \cdot 2^{-4} + 1 \cdot 2^{-5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \frac{19}{32}$$



Reprezentarea numerelor în virgulă fixă

- Transformarea unui număr zecimal în corespondență său binar:
- se divide în mod repetat numărul zecimal din stânga virgulei la 2, reținându-se restul. Acesta, scris în ordine inversă (de la dreapta spre stânga) este reprezentarea binară a părții întregi.
- Partea din dreapta virgulei se multiplică în mod repetat cu 2, înlăturând de fiecare dată partea zecimală și reținând partea întreagă.

Reprezentarea numerelor în virgulă fixă

Exemplu

Să se transforme numărul zecimal 627,625 în format binar.

Soluție.

Partea întreagă

$$627 : 2 = 313$$

1

$$313 : 2 = 156$$

1

$$156 : 2 = 78$$

0

$$78 : 2 = 39$$

0

$$39 : 2 = 19$$

1

$$19 : 2 = 9$$

1

$$9 : 2 = 4$$

1

$$4 : 2 = 2$$

0

$$2 : 2 = 1$$

0

$$1 : 2 = 0$$

1

Prin urmare

$$(627,625)_{10} = (1001110011,101)_2$$

Partea zecimală

$$0.625 \times 2 = 1.250$$

1

$$0.250 \times 2 = 0.500$$

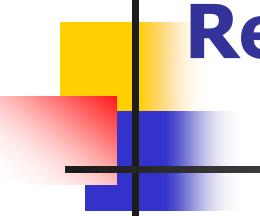
0

$$0.500 \times 2 = 1.000$$

1

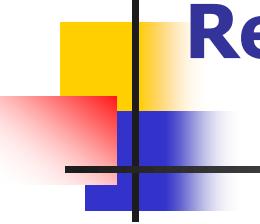
$$0.000 \times 2 = 0.000$$

0



Reprezentarea numerelor în virgulă fixă

- Aritmetica în virgulă fixă este potrivită atât pentru operații cu numere întregi, cât și fractioare.
- În conversia semnalelor analogice bipolare, este necesar un bit adițional pentru a purta informația de semn.
- Patru metode - frecvent folosite pentru reprezentarea numerelor bipolare.
- Se consideră că numerele sunt reprezentate pe $N=b+1$ biți, din care unul pentru semn.



Reprezentarea numerelor în virgulă fixă

- *Formatul mărime cu semn sau semn – valoare* este cea mai simplă metodă pentru reprezentarea numerelor cu semn în format digital.
- Un zero în poziția MSB reprezintă un număr pozitiv;
- Un unu în poziția MSB reprezintă un număr negativ.
- Restul de b biți reprezintă *modulul* sau *amplitudinea* numărului.

Reprezentarea numerelor în virgulă fixă

- În cazul numerelor fracționare, reprezentarea mărime cu semn pentru un număr pozitiv $x \geq 0$ este de forma

$$(x)_{ms} = 0, b_1 b_2 \dots b_b, \quad (2)$$

iar pentru numărul negativ $x_N = -x = -0, b_1 b_2 \dots b_b$, de forma

$$(x_N)_{ms} = 1, b_1 b_2 \dots b_b, \quad (3)$$

- In acest format zero are două reprezentări: $0,0\dots 0$ și $1,00\dots 0$.
- Valoarea zecimală a unui număr fracționar pozitiv este

$$(x)_{ms} = \sum_{i=1}^b b_i 2^{-i} \quad (4)$$

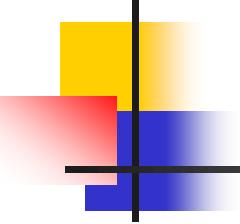
Reprezentarea numerelor în virgulă fixă

- Numărul fracționar negativ este

$$(x_N)_{ms} = -\sum_{i=1}^b b_i 2^{-i} \quad (5)$$

- Modulul unui număr fracționar reprezentat în formatul mărime cu semn este dat de

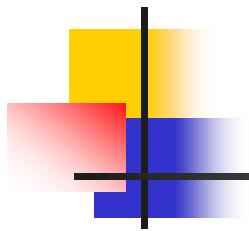
$$|x| = |x_N| = \sum_{i=1}^b b_i 2^{-i} \quad (6)$$



Reprezentarea numerelor în virgulă fixă

- Reprezentarea în *complement față de unu* este identică celei în reprezentarea mărime cu semn pentru numere pozitive.
- Un număr negativ este obținut prin complementarea numărului pozitiv corespunzător.
- În cazul formatului fracționar, numerele pozitive se reprezintă ca în relația (2), iar cele negative $x_N = -x = -0, b_1 b_2 \dots b_b$ sub forma

$$(x_N)_{1C} = \overline{0, b_1 b_2 \dots b_b} = 1, \overline{b_1 b_2 \dots b_b} \quad (7)$$



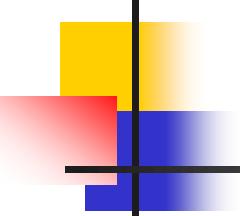
Reprezentarea numerelor în virgulă fixă

- Cu (7), reprezentarea în complement față de unu a unui număr negativ fracționar mai poate fi exprimată în forma

$$(x_N)_{1C} = 1 \times 2^0 + \sum_{i=1}^b (1 - b_i) 2^{-i} = 2 - 2^{-b} - |x| \quad (8)$$

- Ambiguitate în reprezentarea lui zero, ca 0,0...0 sau 1,1...1.
- Modulul numărului negativ $b_0, b_1 b_2 \cdots b_b$ reprezentat în complement față de unu este

$$|x_N| = \sum_{i=1}^b (1 - b_i) 2^{-i} = \sum_{i=1}^b 2^{-i} - \sum_{i=1}^b b_i 2^{-i} = 1 - 2^{-b} - \sum_{i=1}^b b_i 2^{-i} \quad (9)$$

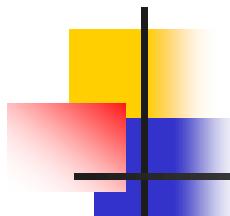


Reprezentarea numerelor în virgulă fixă

Valoarea zecimală a numărului negativ $b_0, b_1 b_2 \cdots b_b$ reprezentat în complement față de unu este

$$\left((x_N)_{1C} \right)_{10} = -1 + \sum_{i=1}^b b_i 2^{-i} + 2^{-b} \quad (10)$$

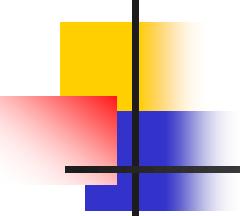
- Spre exemplu, reprezentarea lui $-3/8$ este 1,100, care este complementul față de unu al lui 0,011 ($3/8$).



Reprezentarea numerelor în virgulă fixă

- Reprezentarea în *complement față de doi* este identică cu formatul mărime cu semn în cazul numerelor pozitive.
- Reprezentarea în complement față de doi a unui număr negativ: se scrie modulul acestuia în formatul mărime cu semn, se inversează biții acestei reprezentări și se adună o unitate logică în poziția LSB.
- Un număr fracționar pozitiv se reprezintă sub forma (2), iar numărul fracționar negativ $x_N = -x = -0.b_1b_2 \dots b_b$, sub forma

$$(x_N)_{2c} = \bar{0}, \bar{b}_1 \bar{b}_2 \dots \bar{b}_b + 0,0 \dots 01 \quad (11)$$

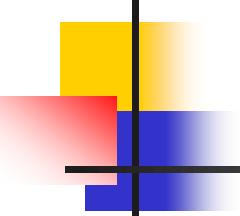


Reprezentarea numerelor în virgulă fixă

- Un număr fractionar pozitiv se reprezintă sub forma (2), iar numărul fractionar negativ $x_N = -x = -0.b_1b_2 \cdots b_b$, sub forma

$$(x_N)_{2c} = \bar{0},\bar{b}_1\bar{b}_2 \cdots \bar{b}_b + 0,0\cdots01$$

- De ex. $(-3/8)_{2C} = 1,100 + 0,001 = 1,101$ (11)
- Semnul “+” indică adunarea modulo 2 care ignoră bitul de transport, dacă acesta este prezent în MSB.



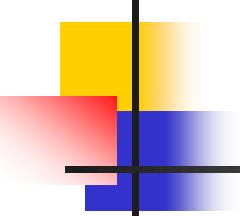
Reprezentarea numerelor în virgulă fixă

- Plecând de la relația (11), reprezentarea în complement față de doi a unui număr fracționar negativ mai poate fi exprimată în forma

$$\begin{aligned} (x_N)_{2C} &= 1 + \sum_{i=1}^b (1 - b_i) 2^{-i} + 2^{-b} = \\ &= 1 + \sum_{i=1}^b 2^{-i} - \sum_{i=1}^b b_i 2^{-i} + 2^{-b} = \\ &= 1 + 1 - 2^{-b} - \sum_{i=1}^b b_i 2^{-i} + 2^{-b} = 2 - |x| \end{aligned} \tag{11'}$$

- Din (8) și (11') rezultă

$$(x_N)_{2C} = (x_N)_{1C} + 2^{-b} \tag{12}$$



Reprezentarea numerelor în virgulă fixă

- Valoarea zecimală a unui număr $b_0, b_1 b_2 \cdots b_b$ reprezentat în complement față de doi, este

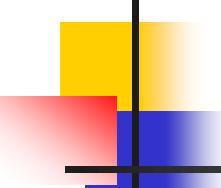
$$(x_{2C})_{10} = -b_0 2^0 + \sum_{i=1}^b b_i 2^{-i} \quad (13)$$

- Unde $b_0 = 0$, pentru numere pozitive și $b_0 = 1$, pentru numere negative.
- Demonstratie: modulul numărului zecimal în ms este

$$x = 0, c_1 c_2 \dots c_b$$

- Numărul negativ corespunzător este

$$x_N = 1, c_1 c_2 \dots c_b$$



Reprezentarea numerelor în virgulă fixă

- Valoarea zecimală a acestuia este

$$(x_N)_{10} = -\sum_{i=1}^b c_i 2^{-i}$$

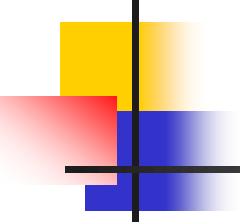
$$(x_N)_{2c} = b_0, \bar{b}_1 \bar{b}_2 \cdots \bar{b}_b = 1, \bar{c}_1 \bar{c}_2 \cdots \bar{c}_b + 2^{-b}$$

- $1 + \sum_{i=1}^b b_i 2^{-i} = 1 + \sum_{i=1}^b (1 - c_i) 2^{-i} + 2^{-b} =$

$$= 1 + \sum_{i=1}^b 2^{-i} - \sum_{i=1}^b c_i 2^{-i} + 2^{-b} =$$

$$= 1 + 1 - 2^{-b} - \sum_{i=1}^b c_i 2^{-i} + 2^{-b} = 2 - \sum_{i=1}^b c_i 2^{-i}$$

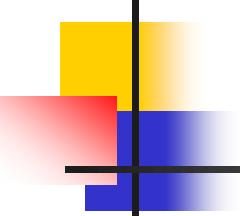
$$(x_N)_{10} = -\sum_{i=1}^b c_i 2^{-i} = -1 + \sum_{i=1}^b b_i 2^{-i}$$



Reprezentarea numerelor în virgulă fixă

- Modului numărului negativ reprezentat în complement față de doi este

$$|x_N| = 1 - \sum_{i=1}^b b_i 2^{-i} \quad (14)$$



Reprezentarea numerelor în virgulă fixă

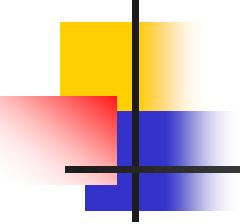
- *Codul binar deplasat* sau *offsetul binar* este similar codului binar direct, obținându-se din acesta prin deplasarea în domeniul valorilor negative cu jumătate din întreaga scală.
- Cu $b+1$ biți se pot reprezenta 2^{b+1} numere. Pentru un cod bipolar există $2M$ numere, cu $M=2^b$, cuprinse în intervalul $-2^b \div (2^b - 1)$ pentru numere întregi și în intervalul $-1 \div (1 - 2^{-b})$ pentru numere fractionare.
- Cel mai mic număr negativ este reprezentat de un număr format din $b+1$ biți de zero iar cel mai mare număr pozitiv este format din $b+1$ biți de unu.

Tabel 1 - Coduri bipolare

<i>Număr</i>	<i>Formatul mărime cu semn</i>	<i>Offset binar</i>	<i>Complement față de doi</i>	<i>Complement față de unu</i>
7	0111	1111	0111	0111
6	0110	1110	0110	0110
5	0101	1101	0101	0101
4	0100	1100	0100	0100
3	0011	1011	0011	0011
2	0010	1010	0010	0010
1	0001	1001	0001	0001
0	0000	1000	0000	0000
0	1000	1000	0000	1111
-1	1001	0111	1111	1110
-2	1010	0110	1110	1101
-3	1011	0101	1101	1100
-4	1100	0100	1100	1011
-5	1101	0011	1011	1010
-6	1110	0010	1010	1001
-7	1111	0001	1001	1000
-8	-	0000	-	-

Tabel 2 -diferite reprezentări ale numerelor fracționare pentru o lungime de 3 biți a cuvintelor

Număr binar	Echivalentul zecimal folosind reprezentarea		
	Mărime și semn	Complement față de 1	Complement față de 2
0,11	3 / 4	3 / 4	3 / 4
0,10	2 / 4	2 / 4	2 / 4
0,01	1 / 4	1 / 4	1 / 4
0,00	0	0	0
1,00	- 0	- 3 / 4	- 4 / 4 = - 1
1,01	- 1 / 4	- 2 / 4	- 3 / 4
1,10	- 2 / 4	- 1 / 4	- 2 / 4
1,11	- 3 / 4	- 0	- 1 / 4



Reprezentarea numerelor în virgulă fixă

- Observatie:

- Există două reprezentări pentru zero în format mărime cu semn și complement față de 1 și nici o reprezentare pentru -1 .
- Formatul complement față de 2 are o singură reprezentare pentru 0 și poate reprezenta numere cuprinse între -1 și $1 - 2^{-2}$ sau, în general, între -1 și $1 - 2^{-(N-1)}$ pentru un registru de N biți.
- Reprezentarea în *complement față de 2* este adesea utilizată în implementarea filtrelor digitale datorită ușurinței efectuării operațiilor de adunare și scădere.
- Diferența dintre numărul maxim și cel minim ce poate fi reprezentată se numește *domeniu dinamic*.

Reprezentarea numerelor în virgulă fixă

Exemplu

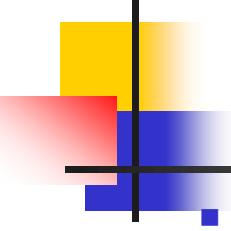
a) $A - B$ și b) $B - A$ unde $A = 0,250$ și $B = 0,625$

Soluție

a)	Zecimal	complement față de 2	complement față de 1
	0,250-	0,010 +	0,010 +
	0,625	1,011	1,010
	-----	-----	-----
	-0,375	1,101 = - 0,375	1,100 = - 0,375
b)			
	0,625 -	0,101 +	0,101 +
	0,250	1,110	1,101
	-----	-----	-----
	0,375	0,011 = 0,375	0,011 = 0,375

în complement față de 1 bitul de transport din poziția cea mai semnificativă este deplasat în poziția celui mai puțin semnificativ bit. Î

în complement față de 2 bitul de transport din poziția cea mai semnificativă este ignorat



Reprezentarea numerelor în virgulă fixă

Sistemul mărime cu semn este folosit mai mult la multiplicare

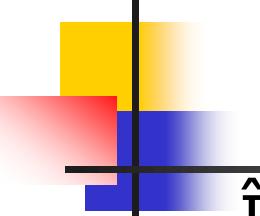
Exemplu

Să se multiplice numerele 0,625 și 0,250 folosind reprezentarea mărime cu semn.

Soluție.

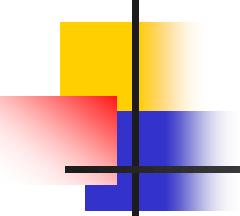
Zecimal	Mărime cu semn
0,625	0,101
0,250	0,010
-----	-----
0000	000
3125	101
1250	000
-----	-----
0,156250	0,001010 = 0,156250

Multiplicarea în aritmetica complement fată de 1 și față de 2 este mai dificilă și necesită un hard sau algoritmi speciali



Reprezentarea numerelor în virgulă fixă

- În procesarea digitală se folosesc formatul fracționar, numerele care reprezintă mărimile ce intervin în procesare și rezultatele operațiilor aritmetice sunt scalate, astfel încât modulul lor să nu depășească valoarea 1.
- La multiplicarea numerelor fracționare, nu există probleme de depășire în cele trei aritmetici. Depășirea poate apărea numai când suma numerelor fracționare este mai mare decât 1.
- Dacă depășirea apare într-o etapă intermediară a adunării, în final nu va exista depășire, cu condiția ca valoarea absolută a rezultatului final să fie subunitară.



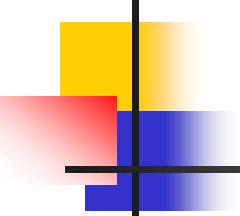
Reprezentarea numerelor în virgulă fixă

Exemplul

Să se adune $0,3125 + 0,7500 + (-0,6250)$ folosind aritmetică în complement față de 1 pe cinci biți.

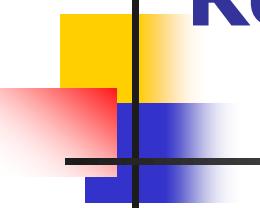
Soluție.

zecimal	complement față de 1
0,3125	0,0101
+0,7500	0,1100
-----	-----
1,0625	1,0001 → incorect, MSB =1 implică număr negativ
-0,6250	1,0101
-----	-----
0,4375	0,0111 → ultimul 1 se datorează transportului



Reprezentarea numerelor în virgulă fixă

- Înmulțirea a două numere în virgulă fixă, fiecare în lungime de b biți, are ca rezultat un produs de lungime $2b$ biți. În aritmetică cu virgulă fixă, produsul este de obicei trunchiat sau rotunjit la b biți, ceea ce conduce la o eroare de trunchiere sau rotunjire cauzată de eliminarea celor mai puțin semnificativi b biți.
- Depășirea în cazul adunării numerelor în reprezentarea în aritmetică în virgulă fixă este un dezavantaj cauzat de domeniul dinamic redus. Aritmetică în virgulă mobilă nu prezintă acest dezavantaj.



Reprezentarea numerelor în virgulă mobilă

- Reprezentarea în virgulă fixă a numerelor, permite acoperirea unui domeniu dinamic, $x_{\max} - x_{\min}$ cu o rezoluție

$$\Delta = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{m-1} \quad (15)$$

Unde: $m=2^{b+1}$ este numărul de nivele, iar $b+1$ numărul de biți.

Δ crește direct proporțional cu creșterea domeniului dinamic.

- Reprezentarea în virgulă mobilă poate fi folosită ca o metodă de acoperire a unui domeniu dinamic mai larg. Reprezentarea în virgulă mobilă cel mai des întâlnită în practică constă dintr-o mantisă M , care este partea fracționară a numărului și se încadrează în domeniul $1/2 \leq M < 1$, înmulțită cu factorul exponential 2^E unde exponentul E este un întreg pozitiv sau negativ. Un număr X este reprezentat ca: $X = M \cdot 2^E$

Reprezentarea numerelor în virgulă mobilă

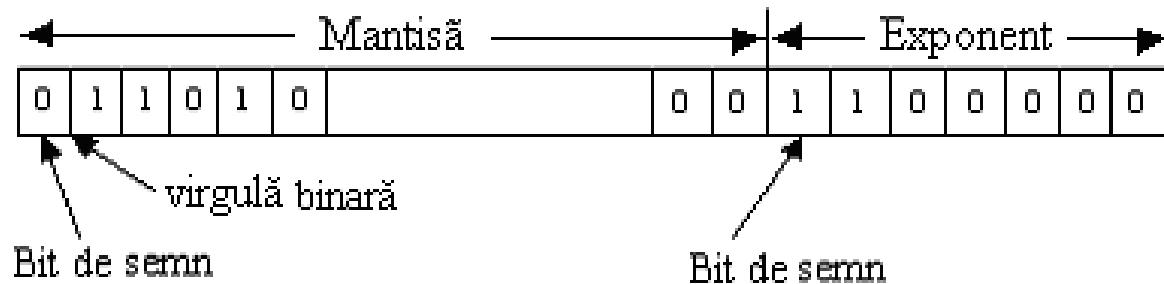


Figura 2 Reprezentarea în virgulă mobilă

- Mantisa și exponentul necesită fiecare câte un bit de semn

$$X_1 = 5$$

$$M_1 = 0,101000$$

$$E_1 = 011$$

$$X_2 = \frac{3}{8}$$

$$M_2 = 0,110000$$

$$E_2 = 101$$

- Dacă cele două numere se înmulțesc, mantisele sunt înmulțite și exponentii adunați.

$$X_1 \cdot X_2 = M_1 \cdot M_2 \cdot 2^{E_1+E_2} = (0,011110) \cdot 2^{010} = (0,111100) \cdot 2^{001}$$

Reprezentarea numerelor în virgulă mobilă

Împărțirea a două numere reprezentate în virgulă mobilă se efectuează prin împărțirea mantiselor și scăderea exponentilor.

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{M_1}{M_2} \cdot 2^{(E_2 - E_1)}$$

- Adunarea a două numere în virgulă mobilă necesită ca exponentii să fie egali. Aceasta se poate obține deplasând virgula binară a mantisei celui mai mic număr spre stânga și compensând prin creșterea corespunzătoare a exponentului.

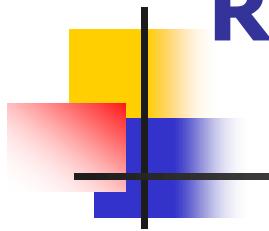
$$M_2 = 0,000011$$

$$E_2 = 011$$

Cu $E_1 = E_2$, se pot aduna cele două numere X_1 și X_2 . Rezultatul este

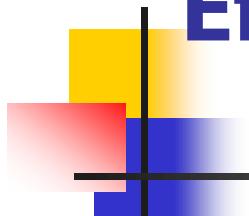
$$X_1 + X_2 = (0,101011) \cdot 2^{011}$$

- Se observă că operația de deplasare, impusă de egalarea exponentilor lui X_2 și X_1 , poate conduce la o precizie mai mică în reprezentarea lui X_2 .
- Totuși o deplasare a cinci biți va cauza pierderea unui singur bit iar deplasarea a șase biți va conduce la mantisa $M_2 = 0,000000$; de aceea aceasta va trebui rotunjită după deplasare astfel încât $M_2 = 0,000001$.



Reprezentarea în virgulă mobilă pe bloc

- Acest mod de reprezentare a numerelor este un hibrid între sistemele cu virgulă fixă și cele cu virgulă mobilă.
- În acest caz, în loc ca fiecare număr să fie reprezentat individual, ca în cazul sistemelor cu virgulă mobilă, un bloc sau un sir de numere are un exponent fix asociat. Acest exponent fix este obținut din examinarea tuturor numerelor din bloc și reprezentarea celui mai mare număr ca un număr cu virgulă mobilă cu o mantisă normalizată.

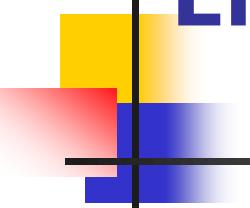


Efectele cuantizării în conversia A/D a semnalelor

- Operațiile de bază îndeplinite de un convertor A/D sunt:
 - Să eșantineze semnalul în mod periodic și cu rată de eșantionare suficient de mare pentru a evita eroarea alias;
 - Să cuantizeze amplitudinea eșantioanelor într-un set discret de nivele.

$$x_q[n] \equiv Q[x[n]] \quad (16)$$

unde $x_q[n]$ reprezintă semnalul cuantizat, iar $Q[\bullet]$ operația de cuantizare.



Efectele cuantizării în conversia A/D a semnalelor

- Dacă un semnal al cărui domeniu dinamic este R urmează a fi reprezentat pe $N=b+1$ biți, numărul nivelelor de cuantizare ce pot fi reprezentate este de 2^{b+1} .
- În reprezentarea în virgulă fixă b biți dau 2^b valori ale amplitudinii iar un bit dă informația de semn. Distanța dintre două nivele adiacente sau pasul de cuantizare este $\Delta = \frac{R}{2^{b+1}-1}$ [63].
- Dacă domeniul dinamic depășește ± 1 , de multe ori este necesară scalarea semnalului, caz în care pasul de cuantizare al semnalului scalat este redus corespunzător la

$$\Delta_1 = \frac{2}{2^N} = 2^{-b}$$

Cuantizarea semnalului de intrare. Erori rezultate din rotunjire și trunchiere

- În executarea calculelor folosind aritmetică în virgulă fixă sau mobilă, apare problema cuantizării numerelor prin trunchiere sau rotunjire de la o reprezentare pe un anumit număr de biți b_n la o alta, pe un număr mai mic de biți, b . Dacă valoarea semnalului se află între două nivele, aceasta poate fi aproximată fie prin cel mai apropiat nivel superior, fie prin cel mai apropiat nivel inferior.
- Efectul cuantizării este că introduce o eroare a cărei valoare depinde de numărul de biți din numărul original și de numărul de biți de după cuantizare.

Sunt trei metode de cuantizare frecvent folosite:

Cuantizarea semnalului de intrare. Erori rezultate din rotunjire și trunchiere

- *Rotunjirea*, caz în care valoarea semnalului este aproximată de cel mai apropiat nivel de cuantizare.
- *Trunchierea*, caz în care valoarea semnalului este aproximată de cel mai mare nivel care este inferior sau egal valoric cu eşantionul semnalului.
- *Trunchierea semn – valoare*, care este asemănătoare cu trunchierea pentru numere pozitive, dar valorile negative ale semnalului sunt approximate de cel mai apropiat nivel de cuantizare mai mare sau egal cu semnalul.

Cuantizarea semnalului de intrare. Erori rezultate din rotunjire și trunchiere

La un moment dat, nT , eroarea datorată cuantizării este

$$E_i = Q_i[x[n]] - x_a(nT) = x_{qi} - x_a \quad (17)$$

unde $i=r$ în cazul rotunjirii și $i=t$ în cazul trunchierii, $x_a = x_a(nT)$ reprezintă valoarea necuantizată a semnalului reprezentată pe b_n+1 biți, iar $Q_i[x[n]] = x_{qi}$, valoarea cuantizată a semnalului reprezentată pe $b+1$ biți.

Rotunjirea. În cazul rotunjirii

$$E_r = Q_r[x[n]] - x_a(nT) = x_{qr} - x_a \quad \text{și} \quad -\frac{\Delta}{2} \leq E_r \leq \frac{\Delta}{2}, \quad \Delta = 2^{-b} \quad (18)$$

Relația neliniară dintre x_{qr} și x_a este reprezentată în figura 3 unde x_a este un semnal cu amplitudine continuă ($b_n = \infty$).

În reprezentarea în virgulă fixă, eroarea de rotunjire satisfacă relația (18), indiferent de aritmetică folosită pentru reprezentarea numerelor negative, deoarece rotunjirea este independentă de semn, ea depinzând numai de mărimea numărului

Cuantizarea semnalului de intrare. Erori rezultate din rotunjire și trunchiere

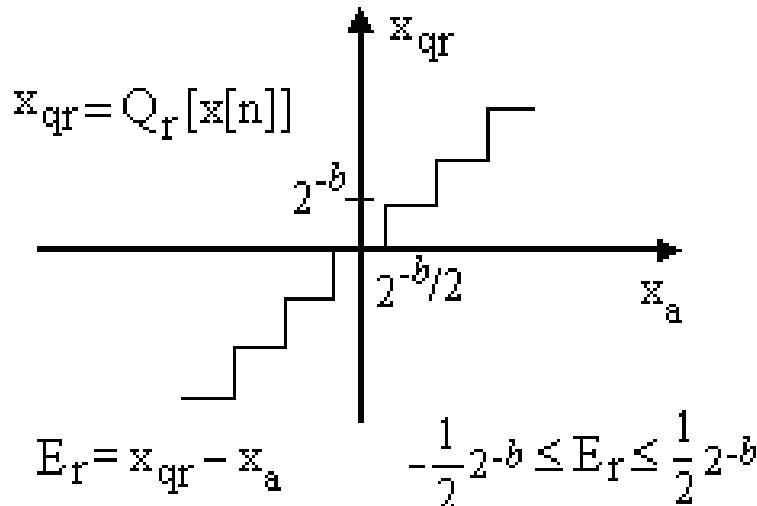


Figura 3
Relația dintre valorile cuantizate și
necuantizate în cazul rotunjirii

În reprezentarea în virgulă mobilă, mantisa este cea trunchiată

$$x_a = M_a \cdot 2^E \quad (19) \quad Q_r[x[n]] = M \cdot 2^E \quad (20) \quad E_r = Q_r[x[n]] - x_a = (M - M_a)2^E \quad (21)$$

$$-\Delta/2 \leq M - M_a \leq \Delta/2 \quad (22) \quad -2^E \Delta/2 \leq E_r \leq 2^E \Delta/2 \quad (23)$$

Cuantizarea semnalului de intrare. Erori rezultate din rotunjire și trunchiere

- eroarea relativă ε , astfel încât

$$Q_r[x[n]] = x_a(1 + \varepsilon) \quad (24)$$

- eroarea corespunzătoare reprezentării în virgulă mobilă este proporțională cu numărul

$$E_r = \varepsilon \cdot x_a \quad (25)$$

$$-2^E \Delta/2 \leq \varepsilon x_a \leq 2^E \Delta/2 \quad (26)$$

$$-2^E \Delta/2 \leq \varepsilon M_a 2^E \leq 2^E \Delta/2 \quad (27)$$

$$-\Delta/2 \leq \varepsilon M_a \leq \Delta/2 \quad (28)$$

- Mantisa satisface relația

$$\frac{1}{2} \leq M_a < 1 \quad (29)$$

- Dacă $M_a = \frac{1}{2}$

$$-\Delta \leq \varepsilon \leq \Delta \quad (30)$$

Cuantizarea semnalului de intrare. Erori rezultate din rotunjire și trunchiere

■ Trunchierea

- numărul este aproimat în aritmetică în virgulă fixă, prin cel mai mare nivel care este mai mic sau egal cu valoarea semnalului. Trunchierea numerelor pozitive, negative și relația neliniară dintre x_{qt} și x_a sunt reprezentate în figura 4, unde x_a este un semnal cu amplitudine continuă.

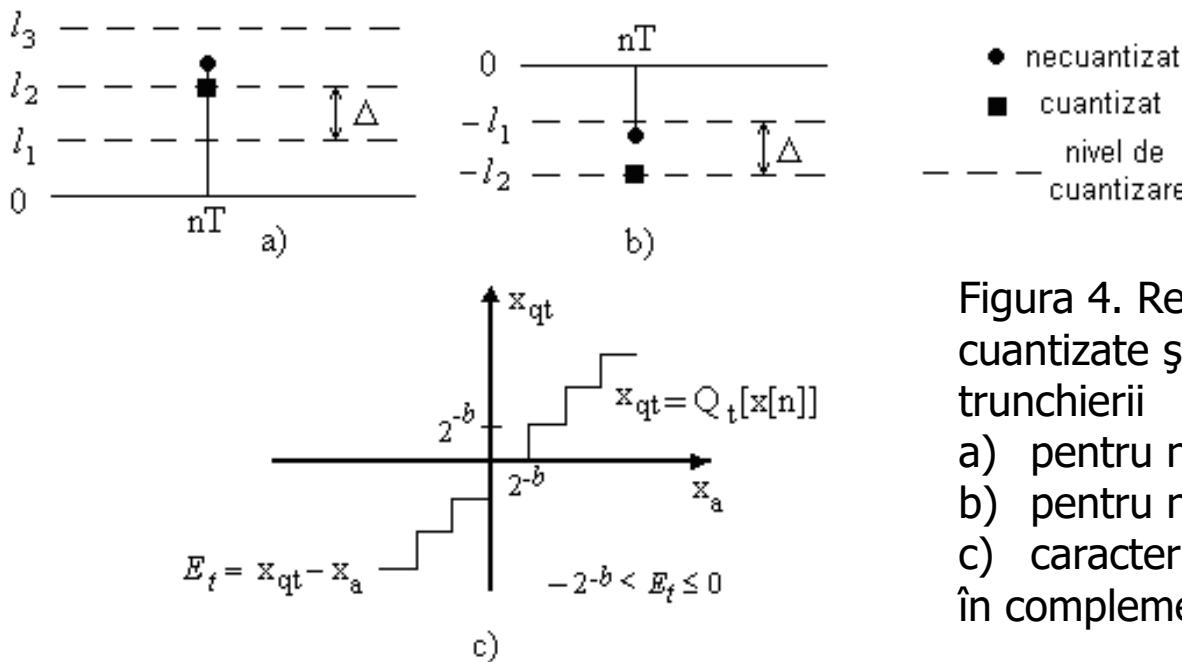


Figura 4. Relația dintre valorile cuantizate și necuantizate în cazul trunchierii

- a) pentru numere pozitive,
- b) pentru numere negative,
- c) caracteristica de trunchiere în complement față de 2

Cuantizarea semnalului de intrare. Erori rezultate din rotunjire și trunchiere

$$E_t = Q_t[x[n]] - x_a \quad -\Delta < E_t \leq 0 \quad (31)$$

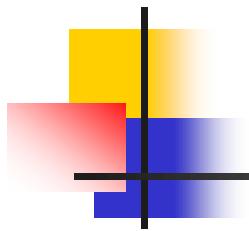
complement față de 1 și complement față de 2.

- Fie întâi reprezentarea în **complement față de 2**. Se consideră că numărul ce urmează a fi trunchiat este reprezentat pe $b_n + 1$ biți (la limită, se poate considera că $b_n = \infty$ pentru eșantioane ale unui semnal analogic). Modulul acestui număr negativ este

$$A_1 = 1 - \sum_{i=1}^{b_n} b_i \cdot 2^{-i} \quad (32)$$

- Dacă acesta este trunchiat la b biți, modulul numărului devine

$$A = 1 - \sum_{i=1}^b b_i \cdot 2^{-i} \quad (33)$$



Cuantizarea semnalului de intrare. Erori rezultate din rotunjire și trunchiere

- Diferența de mărime a modulului numărului negativ rezultată prin trunchiere este

$$A - A_1 = \sum_{i=1}^{b_n} b_i \cdot 2^{-i} - \sum_{i=1}^b b_i \cdot 2^{-i} = \sum_{i=b+1}^{b_n} b_i \cdot 2^{-i} \geq 0 \quad (34)$$

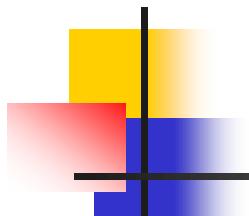
- Deoarece modulul crește prin trunchiere, numărul negativ reprezentat în complement față de 2 devine mai mic. Valoarea maximă a modulului erorii se obține când toți coeficienții b_i sunt egali cu 1, caz în care

$$A - A_1 = 2^{-b} - 2^{-b_n} < \Delta \quad (35)$$

- deoarece $\Delta = 2^{-b}$. Prin urmare, în reprezentarea în complement față de 2, eroarea se situează în domeniul

$$-\Delta < E_t \leq 0 \quad (36)$$

- Situația descrisă anterior este reprezentată în figura 4.



Cuantizarea semnalului de intrare. Erori rezultate din rotunjire și trunchiere

- În cazul reprezentării numerelor negative în **complement față de 1** pe $b_n + 1$ biți, modulul numărului negativ este

$$A_1 = 1 - \sum_{i=1}^{b_n} b_i 2^{-i} - 2^{-b_n} \quad (37)$$

- Prin trunchierea la $b+1$ biți, modulul numărului negativ devine

$$A = 1 - \sum_{i=1}^b b_i 2^{-i} - 2^{-b} \quad (38)$$

Cuantizarea semnalului de intrare. Erori rezultate din rotunjire și trunchiere

- astfel încât diferența acestora este

$$\begin{aligned} A - A_l &= \sum_{i=1}^{b_n} b_i 2^{-i} - \sum_{i=1}^b b_i 2^{-i} + 2^{-b_n} - 2^{-b} = \\ &= \sum_{i=b+1}^{b_n} b_i 2^{-i} - (2^{-b} - 2^{-b_n}) \leq 0 \end{aligned} \tag{39}$$

- Modulul numerelor negative descrește prin trunchiere, adică, de fapt, acestea cresc. Situația este ilustrată în Figura 5. care reprezintă trunchierea în reprezentarea semn - valoare. Domeniul în care poate lua valori eroarea ce apare prin trunchierea numerelor negative reprezentate în complement față de 1 este

$$0 \leq E_t < \Delta \tag{40}$$

Cuantizarea semnalului de intrare. Erori rezultate din rotunjire și trunchiere

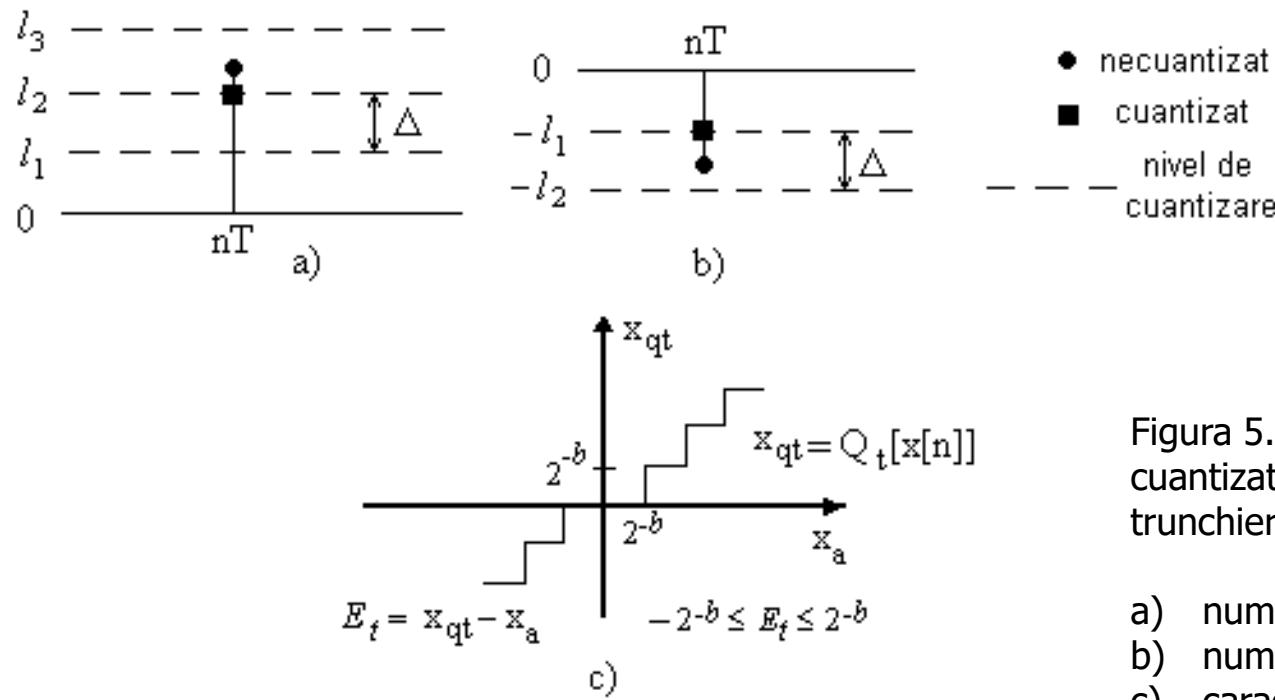


Figura 5. Relația dintre valorile cuantizate și necuantizate în cazul trunchierii semn valoare

- numere pozitive,
- numere negative,
- caracteristica de trunchiere în semn – valoare

Cuantizarea semnalului de intrare. Erori rezultate din rotunjire și trunchiere

- În reprezentarea numerelor negative în formatul *mărime cu semn*, biții care reprezintă modulul numărului negativ sunt aceeași cu cei corespunzători numărului pozitiv, diferind numai bitul de semn. Aceasta înseamnă că prin trunchierea unui număr negativ modulul acestuia scade, iar valoarea trunchiată este dată de cel mai apropiat nivel de cuantizare care nu este mai mic decât numărul, situație reprezentată în Figura 5.

- În *virgulă mobilă*. $E_t = Q_t[x[n]] - x_a = (M - M_a)2^E$ (41)

- În *complement față de 2* a mantisei

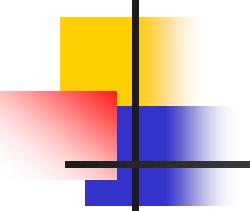
$$-\Delta < M - M_a \leq 0 \quad (42) \quad \text{sau} \quad -2^E \Delta < E_t \leq 0 \quad (43)$$

- Deoarece $E_t = \varepsilon x_a$ se obține $-2^E \Delta < \varepsilon x_a \leq 0$ (44)

$$\text{sau } -2^E \Delta < \varepsilon M_a 2^E \leq 0 \quad (45) \quad \text{care implica } -\Delta < \varepsilon M_a \leq 0 \quad (46)$$

- Dacă $M_a = \frac{1}{2}$ se obține domeniul maxim al erorii relative ε , $-2\Delta < \varepsilon \leq 0$ (47)

- Dacă $M_a = -\frac{1}{2}$ domeniul erorii relative este $0 \leq \varepsilon < 2\Delta$ (48)



Cuantizarea semnalului de intrare. Erori rezultate din rotunjire și trunchiere

- complement fată de 1, $-\Delta < M - M_a \leq 0$ (49) sau $-2^E \Delta < E_t \leq 0$ (50)
- Cu $E_t = \varepsilon x_a = \varepsilon M_a 2^E$ (51) și $M_a = \frac{1}{2}$ se obține domeniul maxim al erorii relative pentru M_a pozitiv, ca fiind $-2\Delta < \varepsilon \leq 0$ (52)
- Pentru valori negative ale mantisei, eroarea este $0 \leq M - M_a < \Delta$ (53)
sau $0 \leq E_t < 2^E \Delta$ (54) Pentru $M_a = -\frac{1}{2}$, domeniul maxim pentru eroarea relativă este $-2\Delta < \varepsilon \leq 0$ (55), același ca și pentru M_a pozitiv.
- Acest lucru este valabil, de asemenea, și pentru cazul în care mantisa este reprezentată în formatul *mărime cu semn*.

Model statistic pentru cuantizarea fină

- În calculele aritmetice ce implică cuantizare prin trunchiere sau rotunjire, este convenabil să se adopte o metodă statistică pentru caracterizarea erorilor rezultate. Cuantizorul poate fi modelat prin introducerea unui zgomot aditiv $e[n]$ ce se suprapune peste semnalul $x[n]$, cu respectarea unor ipoteze ce vor fi specificate în cele ce urmează, adică

$$Q[x[n]] = x_q[n] = x[n] + e[n] \quad (56) \quad \text{unde } e[n] = Er \text{ pentru rotunjire și } e[n] = Et$$

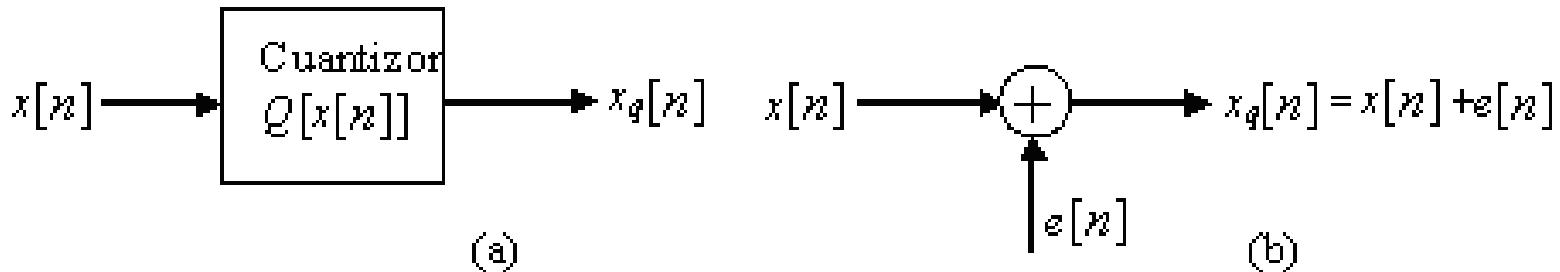
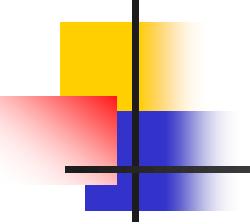


Figura 6. Modelul zgomotului aditiv pentru procesul liniar de cuantizare:
(a) sistemul real; (b) model de cuantizare



Model statistic pentru cuantizarea fină

- Cum $x[n]$ poate fi orice număr care se încadrează în domeniul cuantizorului, eroarea de cuantizare este ușual modelată ca o variabilă aleatoare care se încadrează în limitele specificate anterior pentru erori.

Tipul cuantizării	Tipul de aritmetică	Numere reprezentate cu virgulă fixă	Numere reprezentate cu virgulă mobilă
Rotunjire	-Semn-valoare -Complement față de 1 -Complement față de 2	$-2^{-b-1} \leq E_t \leq 2^{-b-1}$	$-2^{-b} \leq \varepsilon \leq 2^{-b}$
Trunchiere	Complement față de 2	$-2^{-b} < E_t \leq 0$	$-2^{-b+1} < \varepsilon \leq 0 , x > 0$ $0 \leq \varepsilon < 2^{-b+1} , x < 0$
Trunchiere semn-valoare	-Complement față de 1 -Semn-valoare	$-2^{-b} < E_t \leq 0 , x > 0$ $0 \leq E_t < 2^{-b} , x < 0$	$-2^{-b+1} < \varepsilon \leq 0$

Tabelul 3 **Intervalele erorii de cuantizare**

Model statistic pentru cuantizarea fină

- Funcțiile densitate de probabilitate pentru erorile de rotunjire și trunchiere pentru formatele de reprezentare în virgulă fixă prezentate sunt ilustrate în figura 7 [49].

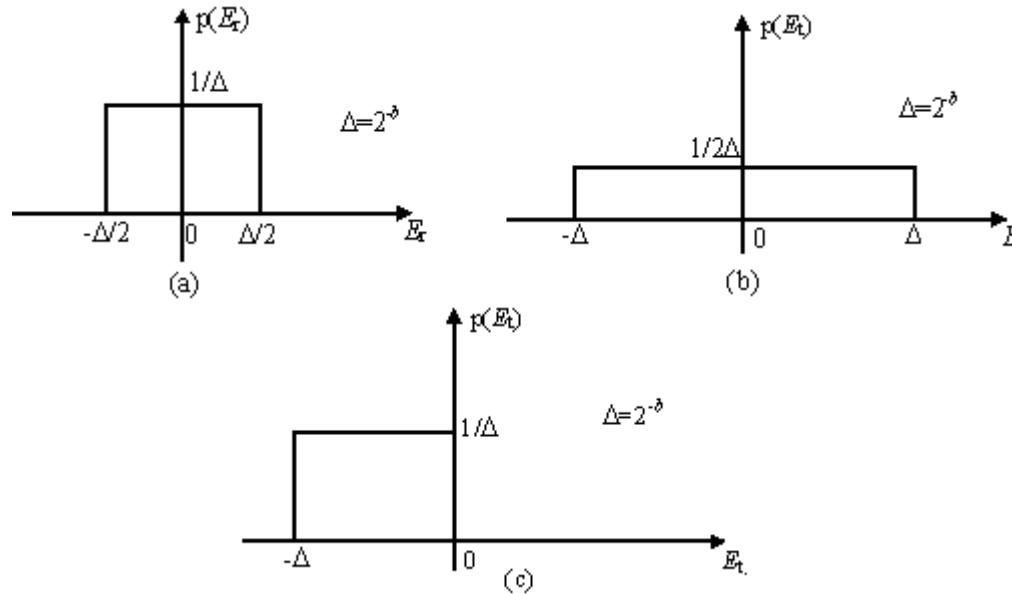


Figura 7 Caracterizarea statistică a erorilor de cuantizare. Funcțiile densitate de probabilitate ale
(a) erorii de rotunjire; (b) erorii de trunchiere în formatul semn-valoare;
(c) erorii de trunchiere în formatul complement față de doi

$$\underline{1. \text{ Rotuung}}: \bar{E}_R = \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \bar{E}_R p(\bar{E}_R) d\bar{E}_R = \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \frac{1}{\Delta} \cdot \bar{E}_R \cdot \phi(\bar{E}_R) = \left. \frac{1}{\Delta} \cdot \frac{\bar{E}_R^2}{2} \right|_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} =$$

$$\frac{1}{2\Delta} \left(\frac{\Delta^2}{4} - \frac{-\Delta^2}{4} \right) = 0.$$

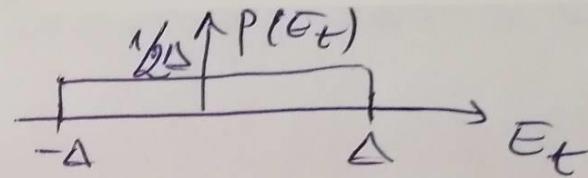
$$\bar{V}_{\bar{E}_R}^2 = \bar{E}_R^2 - (\bar{E}_R)^2$$

$$\bar{E}_R^2 = \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \bar{E}_R^2 p(\bar{E}_R) d\bar{E}_R = \frac{1}{\Delta} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \bar{E}_R^2 d\bar{E}_R = \left. \frac{1}{\Delta} \cdot \frac{\bar{E}_R^3}{3} \right|_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} =$$

$$\frac{1}{3\Delta} \left(\frac{\Delta^3}{8} + \frac{\Delta^3}{8} \right) = \frac{1}{3\Delta} \cdot \frac{\Delta^3}{4} = \frac{\Delta^2}{12}$$

$$\bar{V}_{\bar{E}_R}^2 = \frac{\Delta^2}{12} - 0 = \frac{\Delta^2}{12}.$$

2. Truncuere Sekun-Werte

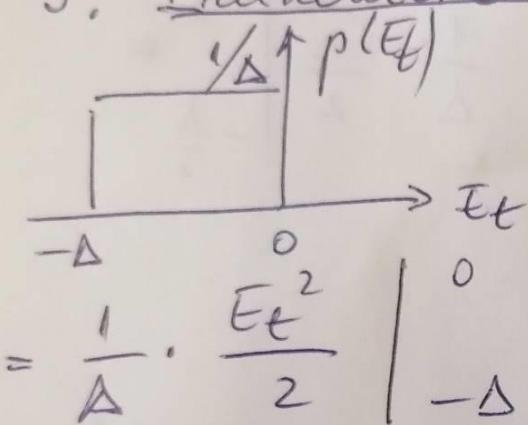


$$\bar{E}_t = \int_{-\Delta}^{\Delta} E_t \cdot p(E_t) dE_t = \\ = \int_{-\Delta}^{\Delta} \cdot \frac{1}{2\Delta} \cdot E_t \cdot p(E_t) dE_t = \frac{1}{2\Delta} \cdot \frac{E_t^2}{2} \Big|_{-\Delta}^{\Delta} = \frac{1}{4\Delta} (\Delta^2 - (-\Delta)^2) = 0.$$

$$\bar{E_t^2} = \int_{-\Delta}^{\Delta} E_t^2 p(E_t) dE_t = \frac{1}{2\Delta} \cdot \frac{E_t^3}{3} \Big|_{-\Delta}^{\Delta} = \\ = \frac{1}{6\Delta} (\Delta^3 + (-\Delta)^3) = \frac{2\Delta^3}{6\Delta} = \frac{\Delta^2}{3}$$

$$\sigma_{E_t}^2 = \bar{E_t^2} - (\bar{E_t})^2 = \frac{\Delta^2}{3} - 0 = \frac{\Delta^2}{3}$$

3. Trunchiure uî complement făcî de 2.



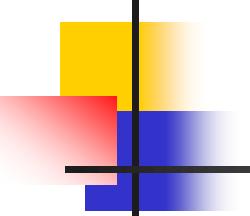
$$= \frac{1}{\Delta} \cdot \frac{E_t^2}{2} \Big|_{-\Delta}^0 = \frac{1}{2\Delta} (0 - \Delta^2) = -\frac{\Delta^2}{2}$$

$$\bar{E}_t = \int_{-\Delta}^0 E_t p(\bar{E}_t) d\bar{E}_t =$$

$$\bar{E}_t^2 = \int_{-\Delta}^0 E_t^2 \cdot p(E_t) dE_t = \frac{1}{\Delta} \cdot \frac{E_t^3}{3} \Big|_{-\Delta}^0 =$$

$$= \frac{1}{3\Delta} \cdot (0 + \Delta^3) = \frac{\Delta^2}{3}$$

$$\sigma_{\bar{E}_t}^2 = \bar{E}_t^2 - (\bar{E}_t)^2 = \frac{\Delta^2}{3} - \frac{\Delta^2}{4} = \frac{\Delta^2}{12}$$



Model statistic pentru cuantizarea fină

- Analiza rezultatelor din Tabelul 3 și a expresiilor densităților de repartiție pentru erorile de rotunjire și trunchiere conduce la concluzia că rotunjirea este preferată altor metode de cuantizare, din următoarele motive [34]:
 - semnalul de eroare este independent de tipul de aritmetică;
 - media semnalului eroare este zero;
 - nici o altă metodă de cuantizare nu conduce la o dispersie mai mică.
- Cuantizarea reprezintă o operație neliniară și ireversibilă.

Model statistic pentru

cuantizarea fină

■ Efectele erorii de cuantizare datorate rotunjirii pot fi evidențiate dacă $e[n]$ se consideră o secvență aleatoare care satisface următoarele proprietăți:

- Eroarea $e[n]$ este uniform distribuită în domeniul ,
 - Secvența de eroare $\{e[n]\}$ este o secvență de zgomot alb staționar, pentru care $e[n]$ și $e[m]$, pentru $m \neq n$, sunt necorelate.
 - Secvența de eroare $\{e[n]\}$ este necorelată cu semnalul $x[n]$.
- Ipotezele de mai sus sunt îndeplinite când pasul de cuantizare este mic și semnalul $x[n]$ traversează mai multe nivele de cuantizare între două eșantioane succesive.

$$SNR = 10 \cdot \log_{10} \frac{P_x}{P_n} \quad (57)$$

Model statistic pentru cuantizarea fină

unde P_x este puterea semnalului, iar P_n este puterea zgomotului de cuantizare.

- Dacă eroarea de cuantizare este uniform distribuită în domeniul $(-\Delta/2, \Delta/2)$, aşa cum este reprezentat în figura 7a, valoarea medie a erorii este zero și dispersia (puterea zgomotului de cuantizare) este

$$P_n = \sigma_e^2 = \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} e^2 p(e) de = \frac{1}{\Delta} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} e^2 de = \frac{\Delta^2}{12} = \frac{2^{-2b}}{12} \quad (58)$$

- Prin urmare, SNR este

$$SNR = 10 \cdot \log_{10} \frac{P_x}{P_n} = 10 \cdot \log_{10} P_x + 10 \cdot \log_{10} (12 \times 2^{2b}) \quad (59)$$

$$SNR = 10 \cdot \log_{10} P_x + 10,8 + 6b \quad (60)$$

Model statistic pentru cuantizarea fină

- Această expresie pentru SNR indică faptul că fiecare bit folosit în convertorul A/D sau cuantizor, mărește raportul semnal/zgomot de cuantizare cu 6 dB sau reduce puterea zgomotului de cuantizare cu 6 dB.
- Pentru a analiza efectul zgomotului de cuantizare asupra răspunsului unui sistem discret, liniar, invariant în timp, se consideră un astfel de sistem caracterizat de funcția pondere $h[n]$, la intrarea căruia se aplică semnalul cuantizat

$$x_q[n] = x[n] + e[n]$$

- Datorită liniarității sistemului, ieșirea sa este suma răspunsurilor sistemului la semnalul necuantizat $x[n]$ și la eroarea de cuantizare $e[n]$.

Model statistic pentru cuantizarea fină

- Notând semnalul de ieșire datorat zgomotului sau erorii de cuantizare cu $z[n]$, conform figurii 8, se poate scrie

$$z[n] = \sum_{k=0}^n h[k] e[n-k] \quad (61)$$

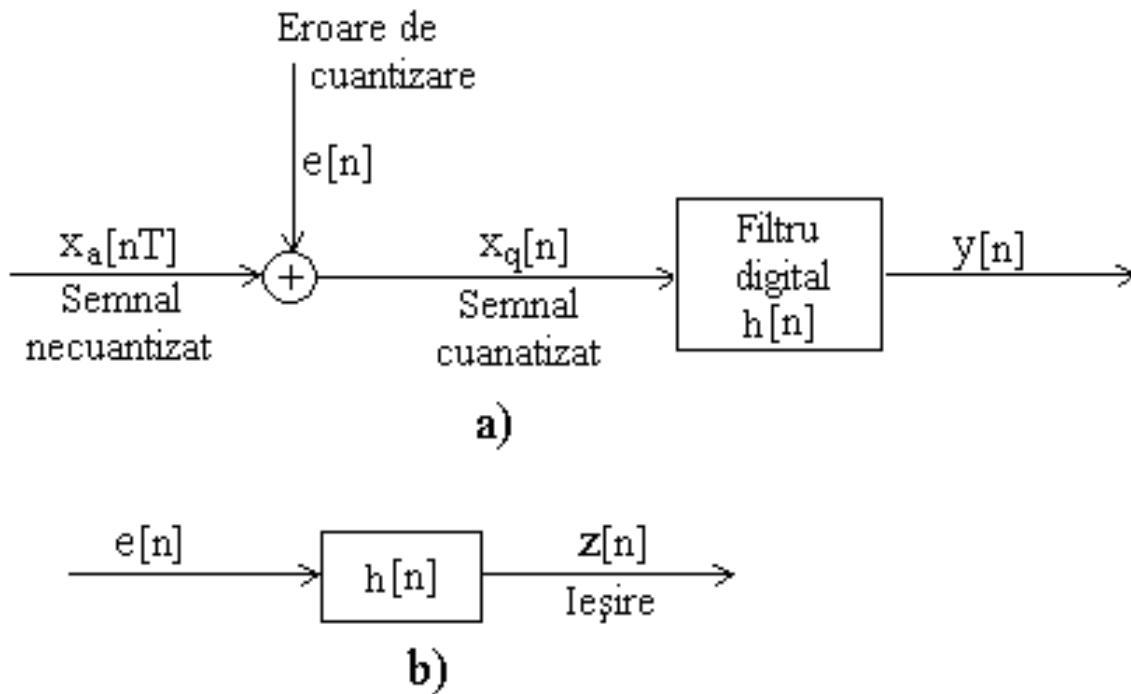


Figura 8. Model pentru eroarea datorată cuantizării semnalului de intrare
a) Modelul de eroare,
b) ieșirea datorată zgomotului de cuantizare

Model statistic pentru cuantizarea fină

- În cazul cuantizării prin rotunjire, dispersia fiecărui termen din suma (61) este

$$\sigma_e^2 h^2[k] = \frac{\Delta^2}{12} h^2[k] \quad (62)$$

- Dispersia unei sume de variabile aleatoare independente este egală cu suma dispersiilor lor

$$\sigma_{0z}^2[n] = \frac{\Delta^2}{12} \sum_{k=0}^n h^2[k] \quad (63)$$

- Dispersia crește până la o valoare de regim permanent cu condiția ca filtrul să fie stabil.

$$\sigma_{ozss}^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{0z}^2[n] = \frac{\Delta^2}{12} \sum_{k=0}^{\infty} h^2[k] \quad (64)$$

- O altă formă pentru expresia dispersiei de regim permanent a ieșirii poate fi obținută cu ajutorul funcției de sistem a filtrului, $H(z)$

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h[k] z^{-k} \quad (65) \qquad H(z^{-1}) = \sum_{m=0}^{\infty} h[m] z^m \quad (66)$$

$$H(z)H(z^{-1}) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} h[k]h[m] z^{m-k} \quad (67)$$

Model statistic pentru cuantizarea fină

$$\int_c H(z)H(z^{-1})z^{-1}dz = \int_c \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} h[k]h[m] z^{m-k-1} dz \quad (68)$$

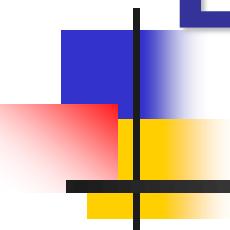
$$\int_c H(z)H(z^{-1})z^{-1}dz = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} h[k]h[m] \int_c z^{m-k-1} dz \quad (69)$$

■ conform teoremei lui Cauchy $\int_c z^{m-k-1} dz = \begin{cases} 2\pi j & m = k \\ 0 & m \neq k \end{cases}$ (70)

$$\int_c H(z)H(z^{-1})z^{-1}dz = 2\pi j \sum_{k=0}^{\infty} h^2[k] \quad (71)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} h^2[k] = \frac{1}{2\pi j} \int_c H(z)H(z^{-1})z^{-1}dz \quad (72)$$

$$\sigma_{ozss}^2 = \frac{\Delta^2}{12} \sum_{\substack{\text{polii din} \\ \text{cercul unitate}}} \text{reziduurile lui } H(z)H(z^{-1})z^{-1} \quad (73)$$



EFFECTELE LUNGIMII FINITE A CUVINTELOR ÎN FILTRAREA DIGITALĂ

Erori cauzate de cuantizarea coeficientilor filtrelor

Efectul cuantizării parametrilor filtrului asupra stabilității.

Analiza senzitivității la cuantizarea coeficientilor filtrelor IIR

- În multe cazuri este de dorit ca un pol sau o pereche de poli să fie în apropierea cercului unitate. Dacă în acest caz pasul de cuantizare este atât de mare încât reprezentarea polilor să fie pe sau în afara cercului unitate, filtrul astfel implementat devine instabil.

Fie, de exemplu, un filtru de ordinul întâi $y[n] = A y[n-1] + x[n]$ (74)

și fie $N=b+1$, numărul bițiilor disponibili reprezentării coeficientului A care, pentru un filtru stabil, este cuprins în domeniul $-1 < A < 1$

- Mărimea pasului de cuantizare este $\Delta = 2^{-b}$. Dacă $\varepsilon = 1 - A$ este distanța de la pol la cercul unitate, cea mai mică valoare a lui ε care poate fi precis reprezentată este $\Delta = 2^{-b}$. Pentru asigurarea stabilității trebuie ca pasul de cuantizare să fie mai mic sau egal cu distanța de la pol la cercul unitate, $\Delta \leq \varepsilon$, adică $2^{-N+1} \leq (1 - A)$, de unde rezultă

$$N \geq -\frac{\log_{10} \varepsilon}{\log_{10} 2} + 1 = -\frac{\log_{10}(1 - A)}{\log_{10} 2} + 1 \quad (75)$$

- Pentru filtrele de ordin superior localizarea polilor depinde, în general, de mai mulți coeficienți. Fie un filtru IIR cu funcția de sistem

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \quad (76)$$

Erori cauzate de cuantizarea coeficientilor filtrelor

Efectul cuantizării parametrilor filtrului asupra stabilității.

Analiza senzitivității la cuantizarea coeficienților filtrelor IIR

- Filtrul IIR cu coeficienți cuantizați are funcția de sistem

$$\bar{H}(z) = \frac{\sum_{k=0}^M \bar{b}_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N \bar{a}_k z^{-k}} \quad (77)$$

- unde coeficienții cuantizați $\{\bar{b}_k\}$ și $\{\bar{a}_k\}$ pot fi exprimați în funcție de coeficienții necuantizați $\{b_k\}$ și $\{a_k\}$ prin relațiile

$$\begin{aligned} \bar{a}_k &= a_k + \Delta a_k & k = 1, 2, \dots, N \\ \bar{b}_k &= b_k + \Delta b_k & k = 0, 1, \dots, M \end{aligned} \quad (78)$$

- $\{\Delta b_k\}$ și $\{\Delta a_k\}$ reprezentând erorile de cuantizare ale coeficienților. Numitorul lui $H(z)$ poate fi exprimat în forma

$$D(z) = 1 + \sum_{k=0}^N a_k z^{-k} = \prod_{k=1}^N (1 - p_k z^{-1}) \quad (79)$$

unde $\{p_k\}$ sunt polii lui $H(z)$. Similar, se poate descompune numitorul lui $\bar{H}(z)$ în forma

$$\bar{D}(z) = \prod_{k=1}^N (1 - \bar{p}_k z^{-1}) \quad (80)$$

unde $\bar{p}_k = p_k + \Delta p_k$, $k=1, 2, \dots, N$, și Δp_k este eroarea sau perturbația care rezultă din cuantizarea coeficienților filtrului.

Erori cauzate de cuantizarea coeficientilor filtrelor

Efectul cuantizării parametrilor filtrului asupra stabilității.

Analiza senzitivității la cuantizarea coeficienților filtrelor IIR

- Δp_i a polului p_i , în funcție de eroarea de cuantizare $\{\Delta a_k\}$ a coeficienților. Perturbația Δp_i poate fi exprimată ca [48]

$$\Delta p_i = \sum_{k=1}^N \frac{\partial p_i}{\partial a_k} \Delta a_k \quad (81)$$

Unde $\frac{\partial p_i}{\partial a_k}$ reprezintă variația poziției polului p_i determinată de variația coeficientului a_k . Astfel, eroarea totală este exprimată ca o sumă a erorilor datorate schimbărilor în fiecare din coeficienții $\{a_k\}$.

- Derivatele parțiale $\frac{\partial p_i}{\partial a_k}$, $k=1, 2, \dots, N$, pot fi obținute diferențiind $D(z)$ în funcție de fiecare $\{a_k\}$, după cum urmează [48]:

$$\left(\frac{\partial D(z)}{\partial a_k} \right)_{z=p_i} = \left(\frac{\partial D(z)}{\partial z} \right)_{z=p_i} \left(\frac{\partial p_i}{\partial a_k} \right) \quad (82)$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial a_k} = \frac{\left(\frac{\partial D(z)}{\partial a_k} \right)_{z=p_i}}{\left(\frac{\partial D(z)}{\partial z} \right)_{z=p_i}} \quad (83)$$

$$\left(\frac{\partial D(z)}{\partial a_k} \right)_{z=p_i} = z^{-k} \Big|_{z=p_i} = p_i^{-k} \quad (84)$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial a_k} = \frac{(2J(z)/\partial a_k)_{z=p_i}}{(2J(z)/\partial z)_{z=p_i}}$$

$$A(z) = 1 + \sum_{k=0}^N a_k z^{-k}; \quad \left. \frac{\partial J(z)}{\partial a_k} \right|_{z=p_i} = z^{-k} \Big|_{z=p_i} = p_i^{-k}$$

$$\left. \frac{\partial J(z)}{\partial z} \right|_{z=p_i} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\prod_{l=1}^N (1 - p_l \cdot z^{-1}) \right) \Big|_{z=p_i} =$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left((1-p_1 \cdot z^{-1})(1-p_2 \cdot z^{-1}) \cdots (1-p_{i-1} \cdot z^{-1}) (1-p_i \cdot z^{-1}) (1-p_{i+1} \cdot z^{-1}) \cdots (1-p_N \cdot z^{-1}) \right) \Big|_{z=p_i}$$

$$= -p_1(-1) \cdot z^{-2} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^N (1-p_l z^{-1}) + (-p_2)(-1) \cdot z^{-2} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i \\ l \neq 2}}^N (1-p_l z^{-1}) + \cdots$$

$$\cdots + (-p_N)(-1) \cdot z^{-2} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^N (1-p_l z^{-1}) \Big|_{z=p_i} =$$

$$= \sum_{k=1}^N \frac{p_k}{z^2} \left. \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N (1-p_l z^{-1}) \right|_{z=p_i} = \sum_{k=1}^N \frac{p_k}{p_i^2} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N \frac{p_i - p_l}{p_i} =$$

$$= \frac{p_i}{p_i^2} \cdot \frac{1}{p_i^{N-1}} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^N (p_i - p_l) = \frac{1}{p_i^N} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^N (p_i - p_l)$$

Erori cauzate de cuantizarea coeficientilor filtrelor

Efectul cuantizării parametrilor filtrului asupra stabilității.

Analiza senzitivității la cuantizarea coeficientilor filtrelor IIR

$$\left(\frac{\partial D(z)}{\partial z} \right)_{z=p_i} = \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left[\prod_{l=1}^N (1 - p_l z^{-1}) \right] \right\}_{z=p_i} = \left\{ \sum_{k=1}^N \frac{p_k}{z^2} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N (1 - p_l z^{-1}) \right\}_{z=p_i} = \frac{1}{p_i^N} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^N (p_i - p_l) \quad (85)$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial a_k} = \frac{p_i^{N-k}}{\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^N (p_i - p_l)} \quad (86)$$

$$\Delta p_i = \sum_{k=1}^N \frac{p_i^{N-k}}{\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^N (p_i - p_l)} \Delta a_k \quad (87)$$

- Această expresie oferă o măsură a senzitivității polului p_i la o schimbare a coeficientilor $\{a_k\}$.
- Un rezultat analog se poate obține pentru senzitivitatea zerourilor la erorile cauzate de cuantizarea parametrilor $\{b_k\}$.
- Termenii $(p_i - p_l)$ din numitorul relației (87) reprezintă vectori, în planul Z , orientați de la polii $\{p_l\}$ la polul $\{p_i\}$. Lungimile $|p_i - p_l|$ vor fi mici pentru polii din vecinătatea lui p_i . Aceste lungimi mici vor contribui la erori mari și va rezulta o perturbație Δp_i mare. Eroarea Δp_i poate fi minimizată prin maximizarea lungimii $|p_i - p_l|$.

Erori cauzate de cuantizarea coeficientilor filtrelor

Efectul cuantizării parametrilor filtrului asupra stabilității.

Analiza senzitivității la cuantizarea coeficienților filtrelor IIR

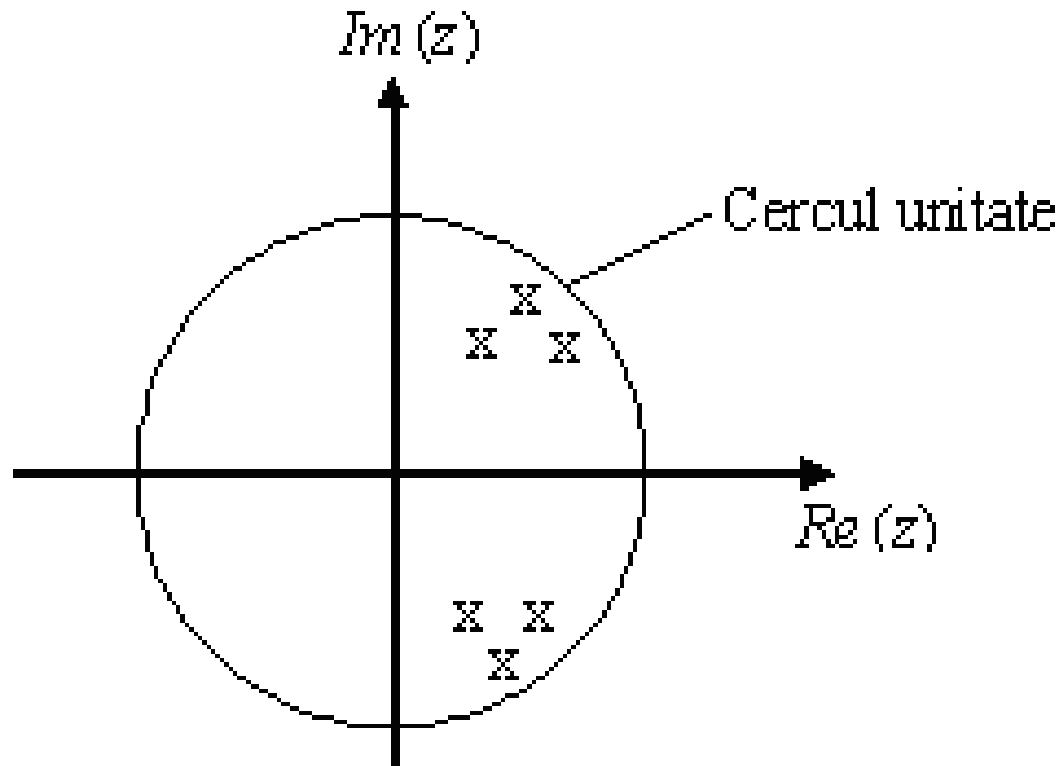


Figura 9 Poziții ale polilor unui filtru IIR trece bandă

Erori cauzate de cuantizarea coeficientilor filtrelor

Efectul cuantizării parametrilor filtrului asupra stabilității.

Analiza senzitivității la cuantizarea coeficienților filtrelor IIR

- Acest lucru se poate realiza prin implementarea filtrelor de ordin mare cu celule cu un singur pol sau cu doi poli. Filtrele cu un singur pol (și un singur zero) au valori complexe pentru coeficienți și necesită operații aritmetice în complex pentru realizarea lor. Această problemă poate fi evitată combinând polii și zerourile complex conjugate, pentru a forma secțiuni de filtru de ordin doi cu coeficienți reali. Deoarece polii complex conjugăți sunt suficient de depărtați, eroarea de cuantizare Δp , este minimizată și, în consecință, filtrul cu coeficienții cuantizați rezultat aproximează mai bine caracteristica răspunsului în frecvență a filtrului cu coeficienții necuantizați.

Erori cauzate de cuantizarea coeficientilor filtrelor

Efectul cuantizării parametrilor filtrului asupra stabilității. Analiza sensibilității la cuantizarea coeficientilor filtrelor IIR

- Este interesant de observat modul în care influențează structura de implementare a filtrului erorile cauzate de cuantizarea coeficientilor. Pentru a ilustra acest lucru, fie un filtru cu doi poli complex conjugăți, caracterizat de funcția de sistem

$$H(z) = \frac{1}{1 - (2r \cos \theta)z^{-1} + r^2 z^{-2}} \quad (88)$$

- Filtrul are polii la $z_{1,2} = re^{\pm j\theta}$. Când este realizat ca în figura 10, există doi coeficienți: $a_1 = -2r \cos \theta$ și $a_2 = r^2$. Cu precizie infinită este posibil să obținem un număr infinit de poziții ale polilor. Evident, cu precizie finită (adică a_1 și a_2 cuantizați), pozițiile posibile ale polilor sunt în număr finit.

Erori cauzate de cuantizarea coeficientilor filtrelor

Efectul cuantizării parametrilor filtrului asupra stabilității. Analiza sensibilității la cuantizarea coeficienților filtrelor IIR

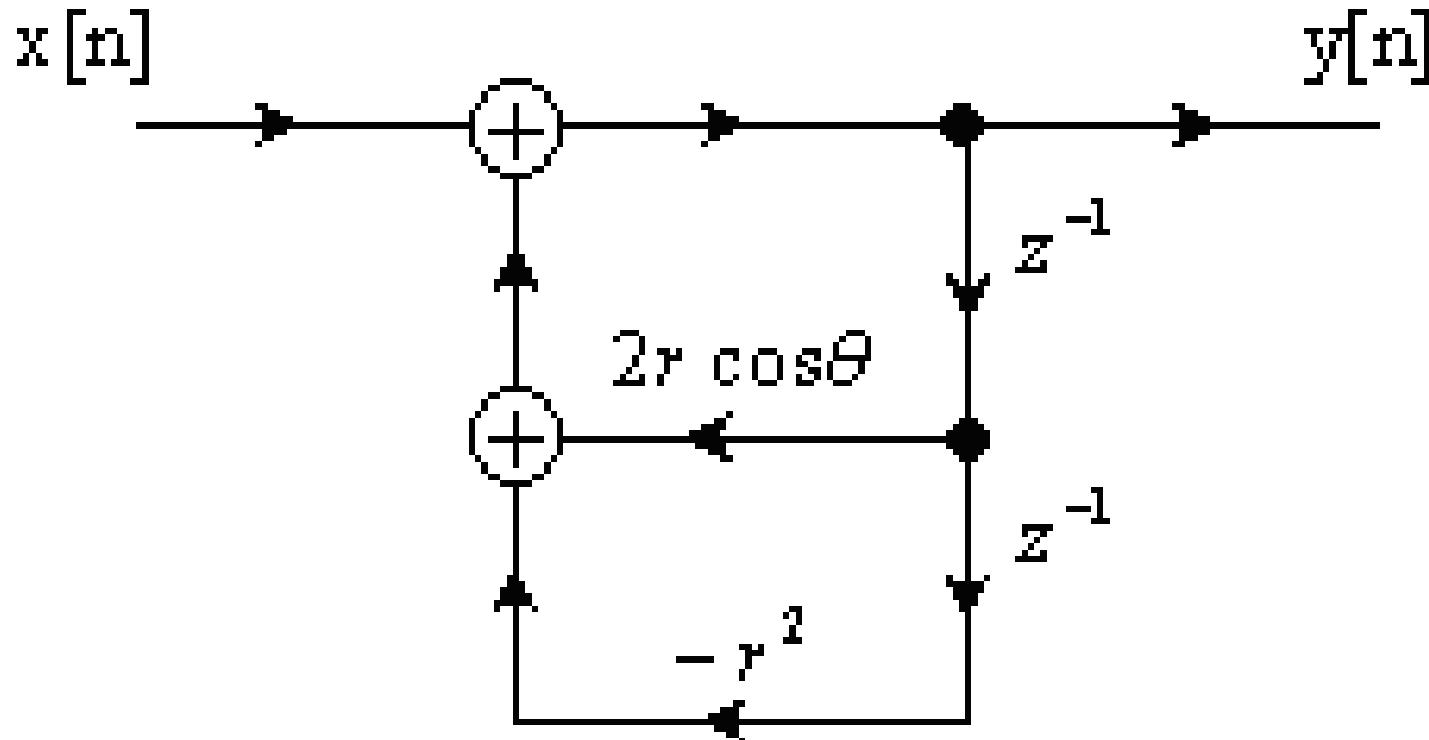


Figura 10. Realizare directă a unui filtru cu doi poli

Erori cauzate de cuantizarea coeficientilor filtrelor

Efectul cuantizării parametrilor filtrului asupra stabilității. Analiza sensibilității la cuantizarea coeficientilor filtrelor IIR

- De exemplu, pentru $b=3$, sunt posibile 7 valori nenule a_2 pentru a_1 și a_2 . În figura 11 sunt reprezentate pozițiile posibile ale polilor, numai pentru primul cadran al planului z . Sunt posibile 40 de poziții ale polilor în acest caz. Neuniformitatea în poziția polilor este datorată faptului că se cuantizează r^2 iar polii se găsesc pe un arc de cerc de rază r .

Erori cauzate de cuantizarea coeficientilor filtrelor

Efectul cuantizării parametrilor filtrului asupra stabilității. Analiza sensibilității la cuantizarea coeficienților filtrelor IIR

- Pentru o anumită cuantizare a coeficienților, polii se află pe o grilă din planul z definită de intersecția cercurilor concentrice corespunzătoare cuantizării lui r^2 și liniilor verticale corespunzătoare cuantizării lui $2\pi\cos\theta$. De importanță particulară este setul rar de poli, pentru θ apropiat de zero și, datorită simetriei, pentru θ în apropierea lui π . Această situație va fi critic nefavorabilă pentru filtrele trece jos și filtrele trece sus care au în mod normal polii grupați în jurul frecvenței unghiulare $\theta=0$ și, respectiv, $\theta=\pi$.

Erori cauzate de cuantizarea coeficientilor filtrelor

Efectul cuantizării parametrilor filtrului asupra stabilității. Analiza sensibilității la cuantizarea coeficientilor filtrelor IIR

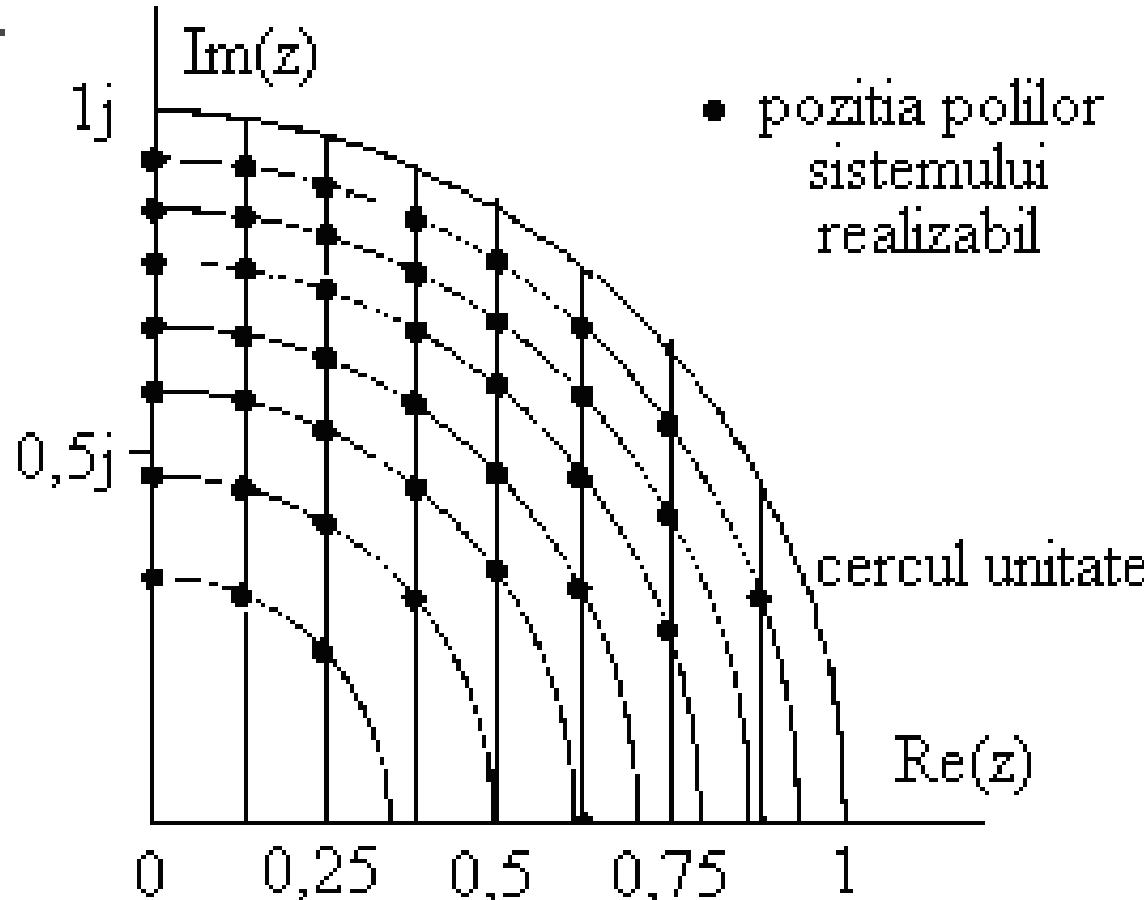


Fig. 11 Poziții posibile ale polilor structurii de ordinul doi în planul Z , pentru cuantizarea pe trei biți

Erori cauzate de cuantizarea coeficientilor filtrelor

Efectul cuantizării parametrilor filtrului asupra stabilității. Analiza sensibilității la cuantizarea coeficienților filtrelor IIR

O alternativă în realizarea filtrelor cu doi poli este forma cuplată, reprezentată în figura 12.

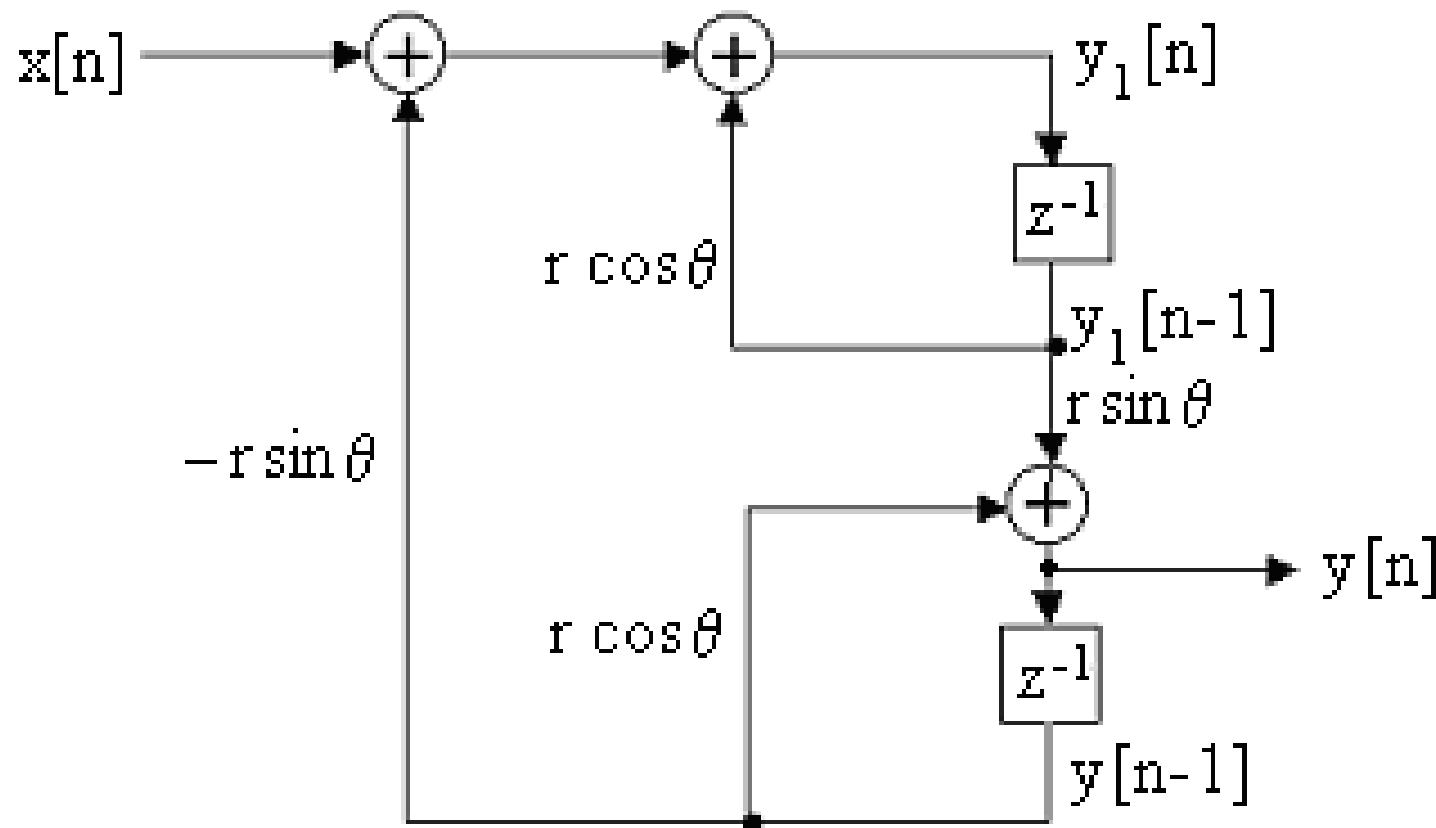


Figura 12. Realizare în forma cuplată a filtrului IIR cu doi poli

Erori cauzate de cuantizarea coeficientilor filtrelor

Efectul cuantizării parametrilor filtrului asupra stabilității. Analiza sensibilității la cuantizarea coeficienților filtrelor IIR

- Cele două ecuații cuplate sunt:

$$y_1[n] = x[n] + (r \cos \theta) \cdot y_1[n-1] - (r \sin \theta) \cdot y[n-1]$$

$$y[n] = (r \sin \theta) \cdot y_1[n-1] + (r \cos \theta) \cdot y[n-1] \quad (89)$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = \frac{(r \sin \theta) z^{-1}}{1 - (2r \cos \theta) z^{-1} + r^2 z^{-2}} \quad (90)$$

$$\begin{cases} Y_1(z) = X(z) + (R \cos \theta) \cdot z^{-1} Y_1(z) - (R \sin \theta) \cdot z^{-1} Y(z) \\ Y(z) = (R \sin \theta) z^1 Y_1(z) + (R \cos \theta) z^{-1} Y(z) \end{cases}$$

$$Y_1(z) (1 - (R \cos \theta) \cdot z^{-1}) = X(z) - (R \sin \theta) \cdot z^{-1} Y(z)$$

$$Y(z) = (R \sin \theta) \cdot z^{-1} \cdot \frac{X(z) - (R \sin \theta) z^{-1} Y(z)}{1 - (R \cos \theta) z^{-1}} + (R \cos \theta) \cdot z^{-1} Y(z)$$

$$Y(z) \left(1 + \frac{R^2 \sin^2 \theta \cdot z^{-2}}{1 - (R \cos \theta) z^{-1}} - (R \cos \theta) z^{-1} \right) = \frac{R \sin \theta \cdot z^{-1}}{1 - (R \cos \theta) z^{-1}} \cdot X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{R \sin \theta \cdot z^{-1}}{1 - (R \cos \theta) z^{-1}} \cdot \frac{1 - (R \cos \theta) z^{-1}}{1 - (R \cos \theta) z^{-1} + R^2 \sin^2 \theta \cdot z^{-2} - R \sin \theta \cdot z^{-1}}$$

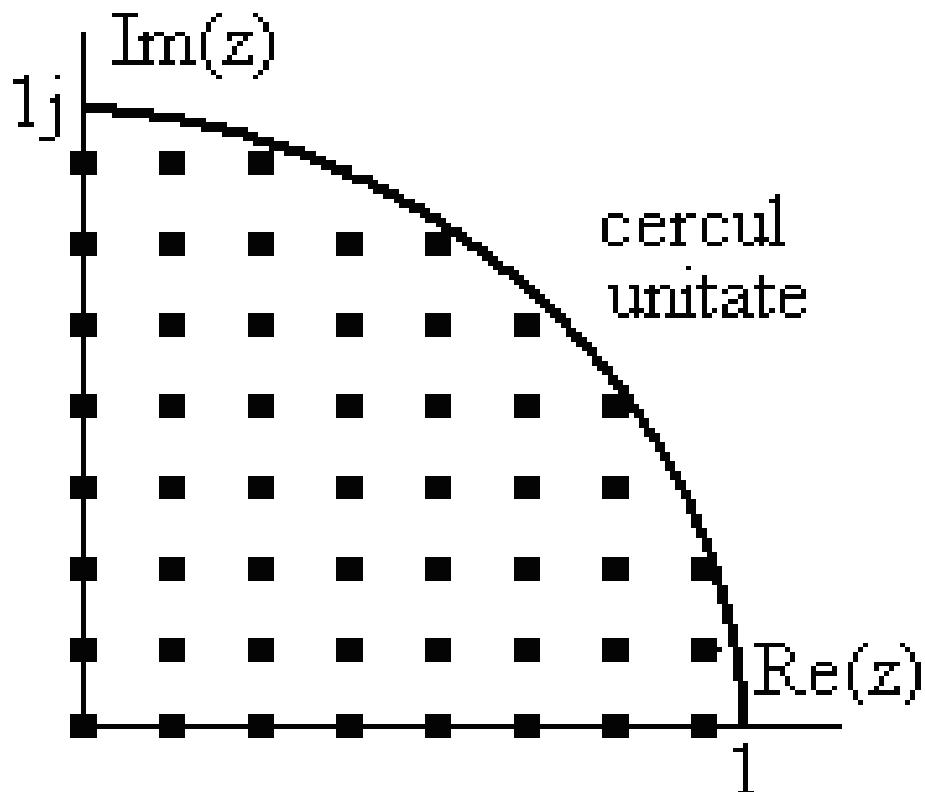
$$= \frac{R \sin \theta \cdot z^{-1}}{1 - 2R \cos \theta \cdot z^{-1} + R^2 \cdot z^{-2}}$$

Erori cauzate de cuantizarea coeficientilor filtrelor

Efectul cuantizării parametrilor filtrului asupra stabilității. Analiza sensibilității la cuantizarea coeficientilor filtrelor IIR

- În forma cuplată se observă că sunt de asemenea doi coeficienți, $\alpha_1 = r \sin\theta$ și $\alpha_2 = r \cos\theta$. Deoarece ambii sunt liniari în r , pozițiile posibile ale polilor sunt acum puncte egal spațiate pe un caroaj dreptunghiular, ca în figura 13.

Figura 13.
Poziții posibile ale polilor
filtrului cu doi poli, realizat în
forma cuplată din figura 12



Erori cauzate de cuantizarea coeficientilor filtrelor

Efectul cuantizării parametrilor filtrului asupra stabilității. Analiza sensibilității la cuantizarea coeficientilor filtrelor IIR

- Prețul plătit pentru această distribuire uniformă a poziției polilor este o creștere a volumului de calcule.
- Ideal ar fi să se selecteze o structură care conduce la un set dens de puncte în regiunea unde se află polii. Din nefericire nu există o metodă simplă și sistematică pentru determinarea realizării filtrului care să ducă la rezultatul dorit.
- Având dat un filtru IIR de ordin înalt care trebuie implementat ca o combinație de secțiuni de ordinul doi, va trebui să se decidă între o structură în cascadă și una în paralel, adică între realizarea

Erori cauzate de cuantizarea coeficientilor filtrelor

Efectul cuantizării parametrilor filtrului asupra stabilității. Analiza sensibilității la cuantizarea coeficienților filtrelor IIR

$$H(z) = \prod_{k=1}^K \frac{b_{k0} + b_{k1}z^{-1} + b_{k2}z^{-2}}{1 + a_{k1}z^{-1} + a_{k2}z^{-2}} \quad (91)$$

$$H(z) = \sum_{k=1}^K \frac{c_{k0} + c_{k1}z^{-1}}{1 + a_{k1}z^{-1} + a_{k2}z^{-2}} \quad (92)$$

Erori cauzate de cuantizarea coeficientilor filtrelor

Efectul cuantizării parametrilor filtrului asupra stabilității. Analiza sensibilității la cuantizarea coeficienților filtrelor IIR

- Dacă filtrul IIR are zerouri pe cercul unitate, cum este cazul filtrelor eliptice și Cebyshev de tipul doi, fiecare secțiune de ordin doi din configurația în cascadă din (91) conține o pereche de zerouri complex conjugate. Coeficienții $\{b_k\}$ din (91) determină în mod direct pozițiile acestor zerouri, iar cuantizarea lor trebuie să le deplaseze de pe cercul unitate. Senzitivitatea răspunsului sistemului la eroarea de cuantizare este ușor și direct controlabilă prin alocarea unui număr suficient de biți pentru reprezentarea coeficienților cuantizați $\{b_k\}$ cu o precizie specificată. Astfel va exista control direct asupra polilor și zerourilor care rezultă din procesul de cuantizare.

Erori cauzate de cuantizarea coeficientilor filtrelor

Efectul cuantizării parametrilor filtrului asupra stabilității. Analiza sensibilității la cuantizarea coeficientilor filtrelor IIR

- Realizarea în paralel a lui $H(z)$, conform relației (92), asigură un control direct doar asupra polilor sistemului. Coeficienții numărătorului $\{c_{k0}\}$ și $\{c_{k1}\}$ sunt obținuți prin descompunerea în fracții simple a lui $H(z)$. Prin urmare polii influențează indirect localizarea zerourilor, prin combinarea tuturor termenilor din descompunerea în fracții simple a lui $H(z)$ și, în consecință, este mult mai dificil a se determina efectul erorii de cuantizare datorat coeficientilor $\{c_{ki}\}$, în localizarea zerourilor sistemelor.

Erori cauzate de cuantizarea coeficientilor filtrelor

Efectul cuantizării parametrilor filtrului asupra stabilității. Analiza sensibilității la cuantizarea coeficienților filtrelor IIR

- Cuantizarea parametrilor $\{c_{ki}\}$ poate produce o perturbație semnificativă a pozițiilor zerourilor și, de obicei, va fi suficient de mare în implementările cu virgulă fixă pentru a deplasa zerourile de pe cercul unitate.

Cuantizarea coeficienților filtrelor FIR

- Așa cum s-a arătat și în secțiunea precedentă, analiza senzitivității aplicată polilor unui sistem se aplică direct și zerourilor filtrelor IIR. Prin urmare, o expresie asemănătoare cu relația (87) se poate obține pentru zerourile unui filtru FIR. Pentru a minimiza senzitivitatea la cuantizarea coeficienților, va trebui ca filtrul FIR cu un număr mare de zerouri să fie implementat ca o cascadă de secțiuni de ordinul unu și doi.
- Filtrele FIR cu răspuns liniar de fază. Realizările directe ale unor astfel de filtre mențin proprietatea de fază liniară chiar și în cazul cuantizării coeficienților.

$$\sigma_E = \frac{2^{-b}}{\sqrt{12}} \sqrt{M} \quad (93)$$

Cuantizarea coeficienților filtrelor FIR

- Cuantizarea coeficienților filtrului FIR afectează doar caracteristica de amplitudine.
- Cu creșterea lungimii filtrului trebuie să crească și numărul de biți pentru reprezentarea coeficienților, pentru a menține aceeași eroare în răspunsul în frecvență al filtrului. Se presupune, de exemplu, că fiecare coeficient al filtrului este rotunjit la $(b+1)$ biți. Prin urmare, eroarea de rotunjire se încadrează în domeniul: $-2^{-b}/2 < e_r[n] < 2^{-b}/2$.
- Valoarea cuantizată a răspunsului la impuls poate fi reprezentată ca $h_q[n] = h[n] + e_r[n]$ și eroarea în răspunsul în frecvență este

$$E_M(\omega) = \sum_{n=0}^{M-1} e_r[n] \cdot e^{-j\omega n} \quad (94)$$

Cuantizarea coeficienților filtrelor FIR

- Presupunând că $e_r[n]$ este o variabilă aleatoare uniform distribuită în intervalul $[-2^{-b}/2, 2^{-b}/2]$ cu valoarea medie zero, $E_M(\omega)$ va fi, de asemenea, de medie zero.
- Dispersia erorii în răspunsul în frecvență $E_M(\omega)$ este suma dispersiilor celor M termeni $e_r[n]$

$$\sigma_E^2 = \frac{2^{-2b}}{12} M \quad (95)$$

- Ecuația (95) subliniază faptul că dispersia erorii crește liniar cu lungimea filtrului M . Deviația standard a erorii $E_M(\omega)$ este

$$\sigma_E = \frac{2^{-b}}{\sqrt{12}} \sqrt{M} \quad (96)$$

Cuantizarea coeficienților filtrelor FIR

- Într-o realizare în cascadă, de forma

$$H(z) = G \cdot \prod_{k=1}^K H_k(z) \quad (97)$$

secțiunile de ordinul doi sunt:

$$H_k(z) = 1 + b_{k1}z^{-1} + b_{k2}z^{-2} \quad (98)$$

- Coeficienții au forma $b_{k1} = -2r_k \cos \theta_k$ și $b_{k2} = r_k^2$
- Cuantizarea lui b_{k1} și b_{k2} conduce la localizarea zerourilor ca în figura 11, cu excepția faptului că grid-ul se extinde în afara cercului unitate.
- Ecuția (93) arată că zerourile lui $H(z-1)$ sunt identice cu cele ale lui $H(z)$.

Cuantizarea coeficienților filtrelor FIR

- Dacă $H(z)$ are un zerou complex $z = r_k \cdot e^{j\cdot\theta_k}$ atunci $H(z)$ trebuie să aibă și o “imagine–oglindă” a acestuia, adică zeroul $z^{-1} = (1/r_k) \cdot e^{-j\cdot\theta_k}$
- Deoarece perechea de zerouri cuantizate $z_{3,4} = (1/r_k) \cdot e^{\pm j\cdot\theta_k}$ poate să nu fie imaginea în oglindă a perechii de zerouri cuantizate $z_{1,2} = r_k \cdot e^{\pm j\cdot\theta_k}$

$$\left(1 - \frac{2}{r_k} \cos \theta_k z^{-1} + \frac{1}{r_k^2} z^{-2} \right) = \frac{1}{r_k^2} \left(r_k^2 - 2r_k \cos \theta_k z^{-1} + z^{-2} \right)$$

(99)

Cuantizarea coeficienților filtrelor FIR

- Factorul $\{1/r_k^2\}$ poate fi combinat cu câștigul total G , sau poate fi distribuit în secțiunile de filtru de ordin doi.
Termenul din (99) conține exact aceeași parametri ca și factorul $(1 - 2r_k \cos \theta_k z^{-1} + r_k^2 z^{-2})$ și, prin urmare, zerourile apar acum în perechi imagine oglindă chiar dacă coeficienții sunt cuantizați.

Erori cauzate de cuantizarea produselor.

Caracterizarea statistică a efectelor cuantizării în realizarea în virgulă fixă a filtrelor digitale

- Multiplicarea a două numere reprezentate pe b biți fiecare, exceptând bitul de semn, are ca rezultat un număr reprezentat pe $2b$ biți. Se impune exprimarea produselor prin b biți semnificativi, astfel încât, inevitabil, cuantizarea este asociată cu formarea produsului. Indiferent de tipul de cuantizare folosit, s-a încetățenit ca acesta să se numească *rotunjirea produsului*.
- Eroarea de rotunjire asociată formării produsului este independentă de la o iterație la alta, astfel încât poate fi folosit modelul cuantizării fine, sursele de zgomot fiind introduse în sistem după multiplicatoare. Multiplicatorul este modelat cu o operație în precizie infinită urmată de o sursă de zgomot aditiv $e[n]$

Erori cauzate de cuantizarea produselor.

Caracterizarea statistică a efectelor cuantizării în realizarea în virgulă fixă a filtrelor digitale

- Caracterizarea zgomotului de rotunjire într-un filtru cauzal, cu un singur pol, care este implementat în aritmetică cu virgulă fixă și este descris de ecuația neliniară cu diferențe

$$v[n] = Q_r[av[n-1]] + x[n] \quad (100)$$

- Efectul rotunjirii produsului $av[n-1]$ este modelat cu o secvență de zgomot $e[n]$ adunată la produsul necuantizat $av[n-1]$, care este

$$Q_r[av[n-1]] = av[n-1] + e[n] \quad (101)$$

Erori cauzate de cuantizarea produselor.

Caracterizarea statistică a efectelor cuantizării în realizarea în virgulă fixă a filtrelor digitale

- Cu acest model pentru eroarea de cuantizare, sistemul considerat este descris de ecuația liniară cu diferențe

$$v[n] = av[n - 1] + x[n] + e[n] \quad (102)$$

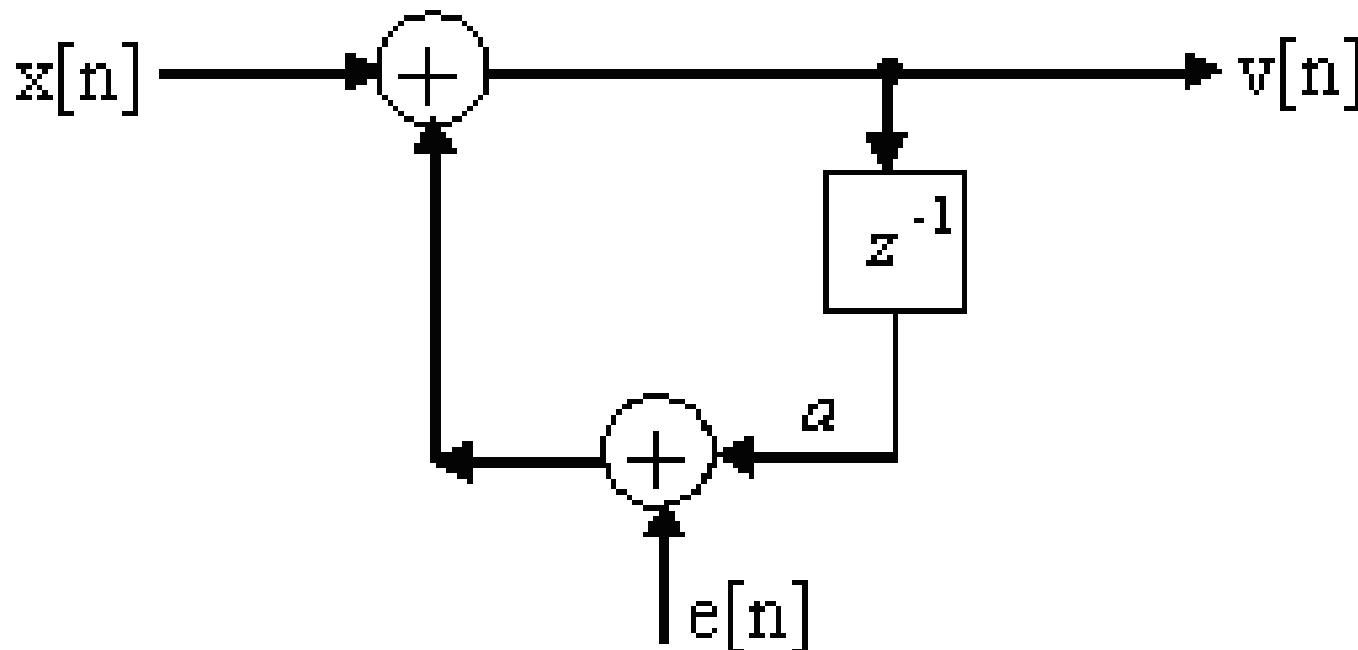


Figura 14. Modelul zgomotului aditiv pentru eroarea de cuantizare a produsului pentru un filtru cu un singur pol

Erori cauzate de cuantizarea produselor.

Caracterizarea statistică a efectelor cuantizării în realizarea în virgulă fixă a filtrelor digitale

- Secvența de ieșire a filtrului $v[n]$, poate fi separată în două componente. Prima este răspunsul sistemului, $y[n]$, la secvența de intrare $x[n]$, iar a doua este răspunsul sistemului, $z[n]$, la zgomotul aditiv de cuantizare $e[n]$.

$$v[n] = y[n] + z[n] \quad (103)$$

- Înlocuind $v[n]$ din (103) în (102), se obține

$$y[n] + z[n] = ay[n - 1] + az[n - 1] + x[n] + e[n] \quad (104)$$

- Se fac următoarele presupuneri în legătură cu eroarea $e[n]$:

Erori cauzate de cuantizarea produselor.

Caracterizarea statistică a efectelor cuantizării în realizarea în virgulă fixă a filtrelor digitale

1. Pentru orice n , secvența de eroare $\{e[n]\}$ este uniform distribuită în intervalul

$$\left(-\frac{1}{2}2^{-b}, \frac{1}{2}2^{-b}\right)$$

Valoarea medie a lui $\{e[n]\}$ egală cu zero, și dispersia

$$\sigma_e^2 = \frac{2^{-2b}}{12} \quad (105)$$

2. Eroarea $\{e[n]\}$ este o secvență staționară de zgomot alb și, $e[n]$ și $e[m]$ sunt necorelate pentru $n \neq m$.
3. Secvența de eroare $\{e[n]\}$ este necorelată cu semnalul $\{x[n]\}$.

Erori cauzate de cuantizarea produselor. Caracterizarea statistică a efectelor cuantizării în realizarea în virgulă fixă a filtrelor digitale

- Separarea ecuației cu diferențe (104) în două ecuații independente:

$$y[n] = ay[n - 1] + x[n] \quad (106)$$

$$z[n] = az[n - 1] + e[n] \quad (107)$$

$$z[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]z[n - k] \quad (108)$$

$$m_z = m_e H(0) \quad (109)$$

$$m_z = m_e \sum_{k=0}^{\infty} h[k]$$

unde $H(0)$ valoarea răspunsului în frecvență $H(\omega)$ la $\omega = 0$.

Erori cauzate de cuantizarea produselor.

Caracterizarea statistică a efectelor cuantizării în realizarea în virgulă fixă a filtrelor digitale

- Eroarea de cuantizare datorată rotunjirii are media zero, valoarea medie a erorii la ieșire este $m_z=0$.

$$\gamma_{zz}[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} h[k]h[l]\gamma_{ee}[k-l+n] \quad (110)$$

unde $\gamma_{ee}[n]$ este funcția de autocorelație a secvenței de intrare $e[n]$.

- Secvența aleatoare este zgromot alb

$$\gamma_{ee}[n] = \sigma_e^2 \delta[n] \quad (111)$$

$$\begin{aligned}
 \gamma_{zz}[u] &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} z[m] z[m+u] = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} h[k] e^{[k-u]} \cdot \\
 &\cdot \sum_{l=0}^{\infty} h[l] e^{[l-u]} = \sum_{k=0}^{\infty} h[k] \sum_{l=0}^{\infty} h[l] \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{[k-u]} e^{[l-u]} = \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} h[k] h[l] \gamma_{ee}[k-u-l+u] = \\
 &\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} h[k] h[l] \gamma_{ee}[k-l+u] \\
 \gamma_{ee}[u] &= \tau_e^2 \delta[u]; \quad \gamma_{ee}[u] = \tau_e^2 \delta[k-l+u] = \begin{cases} \tau_e^2; & l=k+u \\ 0; & \text{rest} \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \gamma_{zz}[u] &= \tau_e^2 \sum_{k=0}^{\infty} h[k] h[k+u] \\
 \tau_2^2 &= \gamma_{zz}[0] = \tau_e^2 \sum_{k=0}^{\infty} h[k]^2
 \end{aligned}$$

Erori cauzate de cuantizarea produselor.

Caracterizarea statistică a efectelor cuantizării în realizarea în virgulă fixă a filtrelor digitale

$$\gamma_{zz}[n] = \sigma_e^2 \sum_{k=0}^{\infty} h[k]h[k+n] \quad (112)$$

- Dispersia σ_z^2

$$\sigma_z^2 = \sigma_e^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} h^2[k] \quad (113)$$

$$\sigma_z^2 = \frac{\sigma_e^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(\omega)|^2 d\omega \quad (114)$$

- În cazul filtrului cu un singur pol, răspunsul la impuls este

$$h[n] = a^n u[n] \quad (115)$$

Erori cauzate de cuantizarea produselor.

Caracterizarea statistică a efectelor cuantizării în realizarea în virgulă fixă a filtrelor digitale

- Dispersia erorii la ieșirea filtrului rezultă

$$\sigma_z^2 = \sigma_e^2 \sum_{k=0}^{\infty} a^{2k} = \frac{\sigma_e^2}{1-a^2} \quad (116)$$

- Fie, în continuare, un filtru recursiv de ordinul doi:

$$y[n] = -a_1 y[n-1] - a_2 y[n-2] + b_0 x[n] + b_1 x[n-1] \quad (117)$$

- Se consideră întâi realizarea în forma directă I, ca în figura 15

Erori cauzate de cuantizarea produselor. Caracterizarea statistică a efectelor cuantizării în realizarea în virgulă fixă a filtrelor digitale

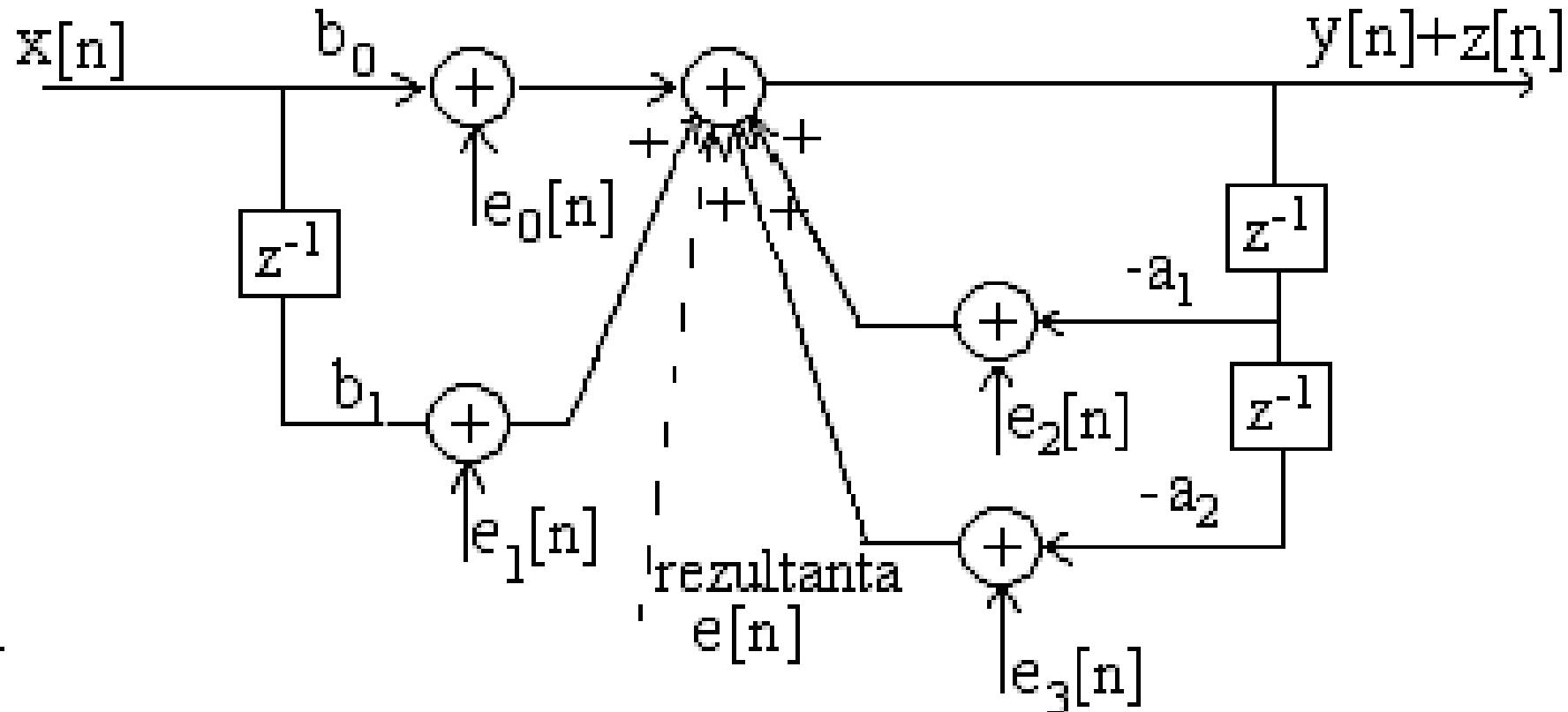


Fig. 15. Zgomotul de rotunjire la multiplicare pentru un filtru de ordinul doi în forma directă I

Erori cauzate de cuantizarea produselor.

Caracterizarea statistică a efectelor cuantizării în realizarea în virgulă fixă a filtrelor digitale

- Toate sursele de zgomot se adună în același punct, acestea pot fi înlocuite cu o sursă de zgomot echivalentă

$$e[n] = \sum_{i=0}^3 e_i[n] \quad (118)$$

- Zgomotul trece numai prin partea de sistem ce conține numai poli, adică zerourile nu au nici un efect asupra zgomotului din ieșire.

$$\sigma_{e_i}^2 = \frac{\Delta^2}{12}, \quad i = 0, 1, 2, 3 \quad (119)$$

Erori cauzate de cuantizarea produselor.

Caracterizarea statistică a efectelor cuantizării în realizarea în virgulă fixă a filtrelor digitale

- Dispersia zgromotului rezultat este suma dispersiilor componentelor

$$\sigma_e^2 = \sum_{i=0}^3 \sigma_{e_i}^2 = \frac{\Delta^2}{3} \quad (120)$$

- Dispersia surselor de zgromot este

$$\sigma_e^2 = (M + N + 1) \frac{\Delta^2}{12} \quad (121)$$

- Portiunea din filtru prin care trece zgromotul de rotunjire este arătată în figura 16.

Erori cauzate de cuantizarea produselor. Caracterizarea statistică a efectelor cuantizării în realizarea în virgulă fixă a filtrelor digitale

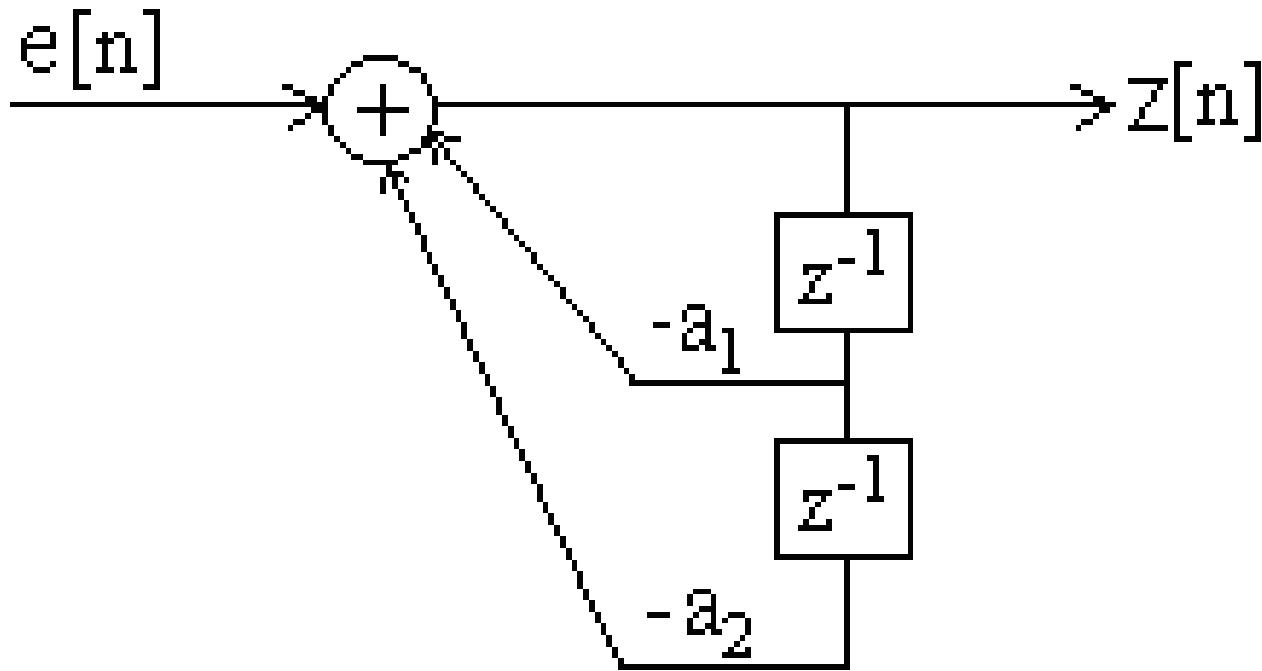


Figura 16. Portiunea din filtrul recursiv afectată de zgomotul de rotunjire pentru realizarea în forma directă I.

Erori cauzate de cuantizarea produselor.

Caracterizarea statistică a efectelor cuantizării în realizarea în virgulă fixă a filtrelor digitale

$$\frac{Z(z)}{E(z)} = H'(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \quad (122)$$

- Această funcție de transfer diferă de cea a filtrului care include și zerouri

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \quad (123)$$

- Dispersia totală de regim permanent a ieșirii datorate zgomotului de rotunjire este

$$\sigma_{0zss}^2 = \frac{\Delta^2}{3} \sum_{\substack{\text{polii din} \\ \text{cercul unitate}}} \text{reziduurile lui } H'(z) H'(z^{-1}) z^{-1} \quad (123)$$

Erori cauzate de cuantizarea produselor.

Caracterizarea statistică a efectelor cuantizării în realizarea în virgulă fixă a filtrelor digitale

$$\sigma_{0zss}^2 = (M + N + 1) \frac{\Delta^2}{12} \frac{1}{2\pi j} \oint H'(z) H'(z^{-1}) z^{-1} dz = \\ = (M + N + 1) \frac{\Delta^2}{12} \sum_n |h'[n]|^2 \quad (125)$$

unde $H'(z) = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$ este partea care conține toți polii sistemului.

Implementarea canonică (forma directă II) a filtrului descris de (117)

Erori cauzate de cuantizarea produselor. Caracterizarea statistică a efectelor cuantizării în realizarea în virgulă fixă a filtrelor digitale

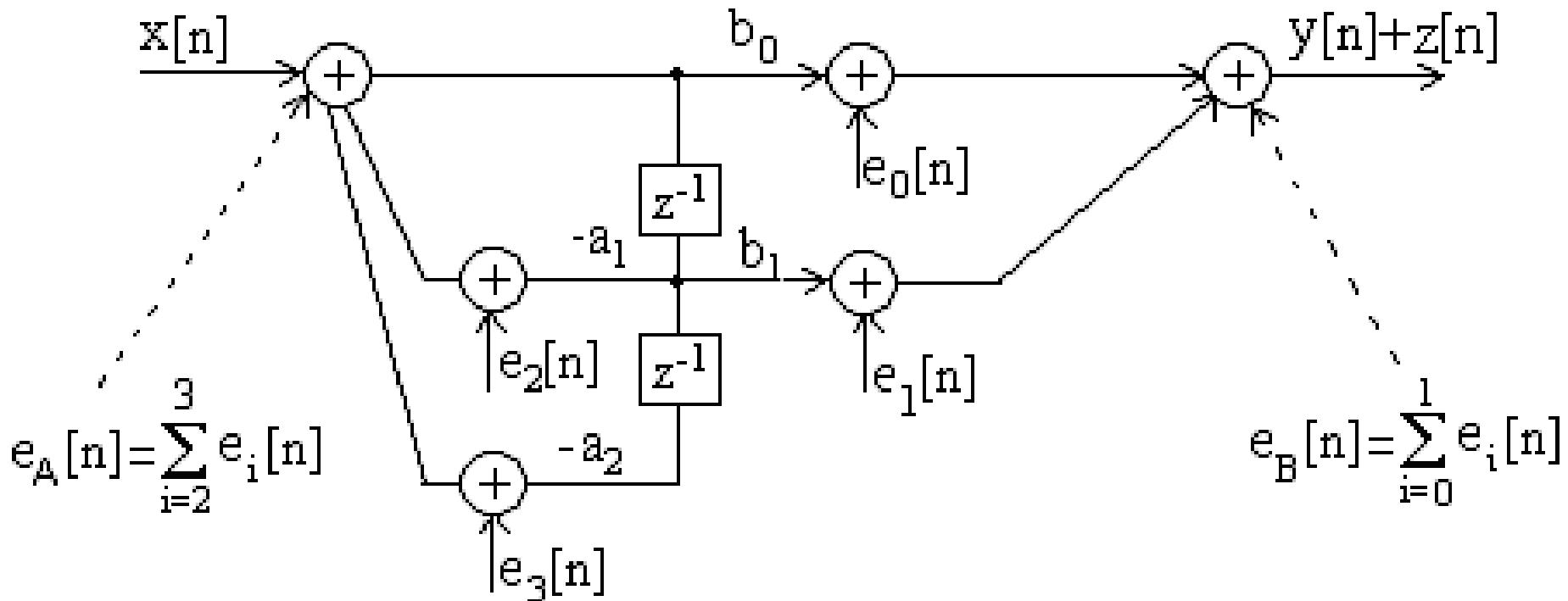


Figura 17. Zgomotul de rotunjire al produselor pentru un filtru recursiv implementat în forma canonica

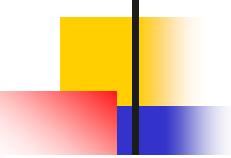
Erori cauzate de cuantizarea produselor.

Caracterizarea statistică a efectelor cuantizării în realizarea în virgulă fixă a filtrelor digitale

- Semnalele de eroare $e_A[n] = \sum_{i=2}^3 e_i[n]$ cu dispersia $\frac{\Delta^2}{6}$

trece prin tot filtru, în timp ce $e_B[n] = \sum_{i=0}^1 e_i[n]$ cu dispersia $\frac{\Delta^2}{6}$ este un zgromadire adunat direct la ieșire.

$$\sigma_{0zss}^2 = \frac{\Delta^2}{6} \left[1 + \sum_{\substack{\text{polii din interiorul} \\ \text{cercului unitate}}} \text{reziduurile lui } H(z) H(z^{-1}) z^{-1} \right] \quad (126)$$



Erori cauzate de cuantizarea produselor.

Caracterizarea statistică a efectelor cuantizării în realizarea în virgulă fixă a filtrelor digitale

- Pentru cazul general al formei directe II pentru filtrul IIR,

$$\begin{aligned}\sigma_{0zss}^2 &= N \frac{\Delta^2}{12} \frac{1}{2\pi j} \oint_c H(z) H(z^{-1}) z^{-1} dz + (M+1) \frac{\Delta^2}{12} = \\ &= N \frac{\Delta^2}{12} \sum_n |h[n]|^2 + (M+1) \frac{\Delta^2}{12}\end{aligned}\tag{127}$$

- Fără a considera valori numerice pentru coeficienți, numai din compararea relațiilor (125) și (127), nu este posibil să decidem care dintre aceste forme de implementare produce un zgomot de ieșire mai mic datorat erorii de cuantizare a produselor.

Oscilații cu ciclu-limită în sisteme recursive

- În sistemele recursive, neliniaritatea datorată efectuării operațiilor matematice în aritmetică finită poate cauza oscilații periodice la ieșire, chiar dacă secvența de intrare este zero sau o valoare constantă, nenulă.
- Astfel de oscilații în sistemele recursive sunt numite *cicluri limită* și pot fi direct atribuite erorii de rotunjire sau trunchiere la multiplicare. Al doilea tip de oscilații numit *oscilații de depășire* poate apărea când intrarea cuantizorului depășește domeniul dinamic. Aceste oscilații au, de obicei, amplitudine mare și nu pot fi reduse prin creșterea numărului de biți.

Cicluri limită datorate rotunjirii

- Efectele cuantizării se identifică cu zgomotul când nivelul semnalului este mare și foarte variabil, făcând eroarea de cuantizare, la orice moment de timp, aproape independentă de erorile anterioare. Când nivelul semnalului este scăzut, erorile cauzate de cuantizare devin corelate. Ciclurile limită sunt periodice, dar nu neapărat sinusoidale.
- Caracteristica unei oscilații de ciclu limită, se consideră un sistem cu un singur pol, descris de ecuația liniară cu diferențe

$$y[n] = ay[n - 1] + x[n] \quad (128)$$

în care polul este situat la $z=a$.

Cicluri limită datorate rotunjirii

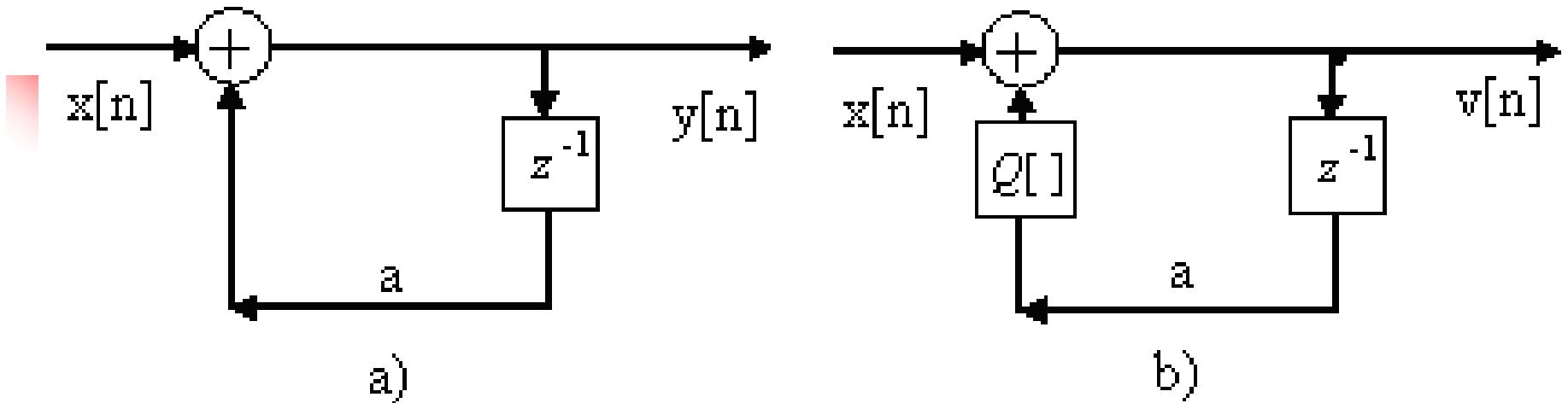


Figura 18. a) Sistemul recursiv ideal cu un singur pol
b) Sistemul neliniar real

- Sistemul real, care este descris de ecuația neliniară cu diferențe

$$v[n] = Q[av[n - 1]] + x[n] \quad (129)$$

Cicluri limită datorate rotunjirii

- Se presupune că sistemul real din figura 18b este implementat cu o aritmetică în virgulă fixă cu patru biți pentru amplitudine și un bit pentru semn. Cuantizarea care se face după multiplicare este presupusă a rotunji produsul prin adaos.
- $z=a$ și intrarea $x[n]=\beta\delta[n]$, unde $\beta=15/16$, care are reprezentarea binară 0,1111.

Cicluri limită datorate rotunjirii

n	$a=0,1000 = 1/2$	$a=1,1000 = -1/2$	$a=0,1100 = 3/4$	$a=1,1000 = -3/4$
0	0,1111 (15/16)	0,1111 (15/16)	0,1111 (15/16)	0,1111 (15/16)
1	0,1000 (8/16)	1,1000 (-8/16)	0,1011 (11/16)	1,1011 (-11/16)
2	0,0100 (4/16)	0,0100 (-4/16)	0,1000 (8/16)	0,1000 (8/16)
3	0,0010 (2/16)	1,0010 (-2/16)	0,0110 (6/16)	1,0110 (-6/16)
4	0,0001 (1/16)	0,0001 (-1/16)	0,0101 (5/16)	0,0101 (5/16)
5	0,0001 (1/16)	1,0001 (-1/16)	0,0100 (4/16)	1,0100 (-4/16)
6	0,0001 (1/16)	0,0001 (-1/16)	0,0011 (3/16)	0,0011 (3/16)
7	0,0001 (1/16)	1,0001 (-1/16)	0,0010 (2/16)	1,0010 (-2/16)
8	0,0001 (1/16)	0,0001 (-1/16)	0,0010 (2/16)	0,0010 (2/16)

pt. $a = 0,1000$.

$$n=1 \rightarrow 0,1111 \cdot 0,1000.$$

$$\begin{array}{r} 0,01111 \\ \hline 0,10000 \end{array}$$

$$n=4 \rightarrow 0,0010 \cdot 0,1000.$$

$$n=5 \rightarrow 0,0001 \cdot 0,1000.$$

$$\begin{array}{r} 0,00001 \\ \hline 0,00010 \end{array}$$

pt. $a = 0,1100$

$$n=1 \rightarrow 0,1111 \cdot 0,1100$$

$$\begin{array}{r} 1111 \\ 1111 \\ \hline 0,101101 \\ \hline 0,1011 \end{array}$$

$$n=8 \rightarrow 0,0010 \cdot 0,1100.$$

$$\begin{array}{r} 001 \\ 001 \\ \hline 0,0001 \\ \hline 0,000101 \\ \hline 0,000101 \\ \hline 0,0001010 \end{array}$$

Cicluri limită datorate rotunjirii

- În mod ideal, răspunsul sistemului ar trebui să scadă exponențial spre zero ($y[n] = a^n \rightarrow 0$ când $n \rightarrow \infty$). În sistemul real, totuși, răspunsul $y[n]$ atinge o stare stabilă periodică la ieșire, cu o perioadă ce depinde de valoarea polului. Când polul este pozitiv, oscilațiile au loc cu perioada $N_p = 1$, astfel încât ieșirea atinge o valoare constantă de 1/16 pentru $a=1/2$ și 1/8 pentru $a=3/4$. Acest fenomen este numit ciclu limită cu frecvență zero.

Cicluri limită datorate rotunjirii

- Când polul este negativ, secvența de ieșire oscilează între valori pozitive și negative ($\pm 1/16$ pentru $a = -1/2$ și $\pm 1/8$ pentru $a = -3/4$). Prin urmare, perioada este $N_p = 2$. Se obține astfel o oscilație de amplitudine constantă, a cărei pulsărie este egală cu π și a cărei amplitudine este $\pm 1/16$ sau $\pm 1/8$.
- Aceste cicluri-limită apar ca rezultat al efectului de cuantizare în multiplicări.

Cicluri limită datorate rotunjirii

- Când răspunsul filtrului cu un pol este în ciclu limită, sistemul neliniar real lucrează ca un sistem liniar echivalent, cu un pol la $z=1$, atunci când polul este pozitiv ($a>0$), și $z=-1$, când polul este negativ ($a<0$).

$$Q_r[av[n-1]] = \begin{cases} v[n-1], & a > 0 \\ -v[n-1], & a < 0 \end{cases} \quad (130)$$

- Deoarece produsul $av[n-1]$ este rotunjit, eroarea de quantizare este limitată de

$$|Q_r[av[n-1]] - av[n-1]| \leq \frac{1}{2} 2^{-b} \quad (131)$$

- unde b este numărul de biți (exclusiv semnul) utilizat în reprezentarea polului a și a lui $v[n]$.

Cicluri limită datorate rotunjirii

$$\begin{aligned} |v[n-1]| - |av[n-1]| &\leq \frac{1}{2} 2^{-b} \\ |v[n-1]| &\leq \frac{\frac{1}{2} 2^{-b}}{1 - |a|} \end{aligned} \quad (132)$$

- Expresia din (132) definește *zona* sau *banda moartă* pentru un filtru cu un singur pol.
- Sistemul ideal cu doi poli este descris de ecuația liniară cu diferențe

$$y[n] = a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + x[n] \quad (133)$$

Cicluri limită datorate rotunjirii

$$v[n] = Q_r[a_1 v[n-1]] + Q_r[a_2 v[n-2]] + x[n] \quad (134)$$

- Când coeficienții filtrului satisfac condiția $a_1^2 < -4a_2$, polii $z_{1,2} = re^{\pm j\theta}$ sistemului apar la , unde $a_2 = -r^2$ și $a_1=2r\cos\theta$.

$$Q_r[a_2 v[n-2]] = -v[n-2] \quad (135)$$

adică $a_2 = -r^2 = -1$

$$|Q_r[a_2 v[n-2]] - a_2 v[n-2]| \leq \frac{1}{2} 2^{-b} \quad (136)$$

Cicluri limită datorate rotunjirii

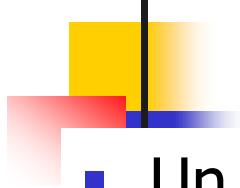
$$\begin{aligned} |v[n-2]| - |a_2 v[n-2]| &\leq \frac{1}{2} 2^{-b} \\ |v[n-2]| &\leq \frac{\frac{1}{2} 2^{-b}}{1 - |a_2|} \end{aligned} \quad (137)$$

- Limitele benzii moarte depind doar de a_2 . Parametrul $a_1 = 2/\cos\theta$ determină doar frecvența oscilațiilor.
- În realizarea în paralel a diverselor sisteme IIR de ordin înalt cu secțiuni de ordinul doi, fiecare secțiune generează propriul ciclu limită, fără interacțiune între secțiunile de filtru de ordin doi.

Cicluri limită datorate rotunjirii

- Iesirea este o sumă a ciclurilor limită cu intrare zero a secțiunilor individuale.
- În cazul realizării în cascadă pentru un sistem IIR de ordin înalt, ciclurile limită sunt mult mai greu de analizat. În particular, când prima secțiune de filtru generează un ciclu limită cu intrare zero, acesta este filtrat de secțiunile succesive.

Cicluri limită datorate depășirii

- 
- Un tip mult mai sever de cicluri limită poate apărea datorită depășirii aritmetice din interiorul filtrelor care folosesc aritmetică în complement față de unu sau în complement față de doi. Aceste cicluri limită sunt cunoscute sub numele de *oscilații de depășire*.
 - Se consideră secțiunea de filtru de ordin doi prezentată în figura 19, în care adunarea se face în aritmetică complementului față de doi.

Cicluri limită datorate depășirii

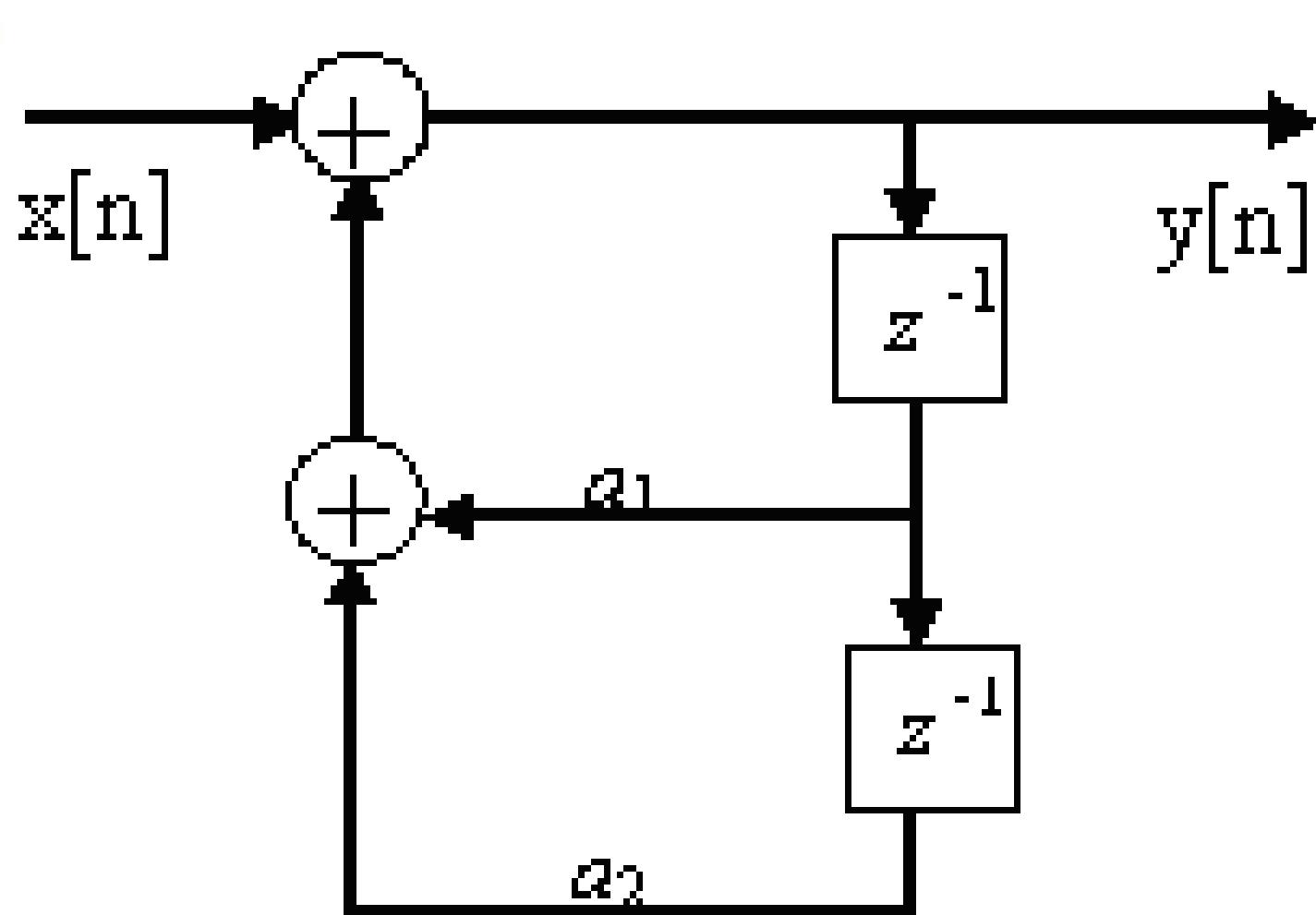


Figura 19. Secțiune de filtru de ordinul doi

Cicluri limită datorate depășirii

- Ieșirea din filtru se poate scrie

$$y[n] = g[a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + x[n]] \quad (138)$$

unde funcția $g[.]$ reprezintă adunarea în complement față de doi.

- Figura 20 prezintă caracteristica intrare-ieșire $g[n]$ a sumatorului în complement față de doi.

Cicluri limită datorate depășirii

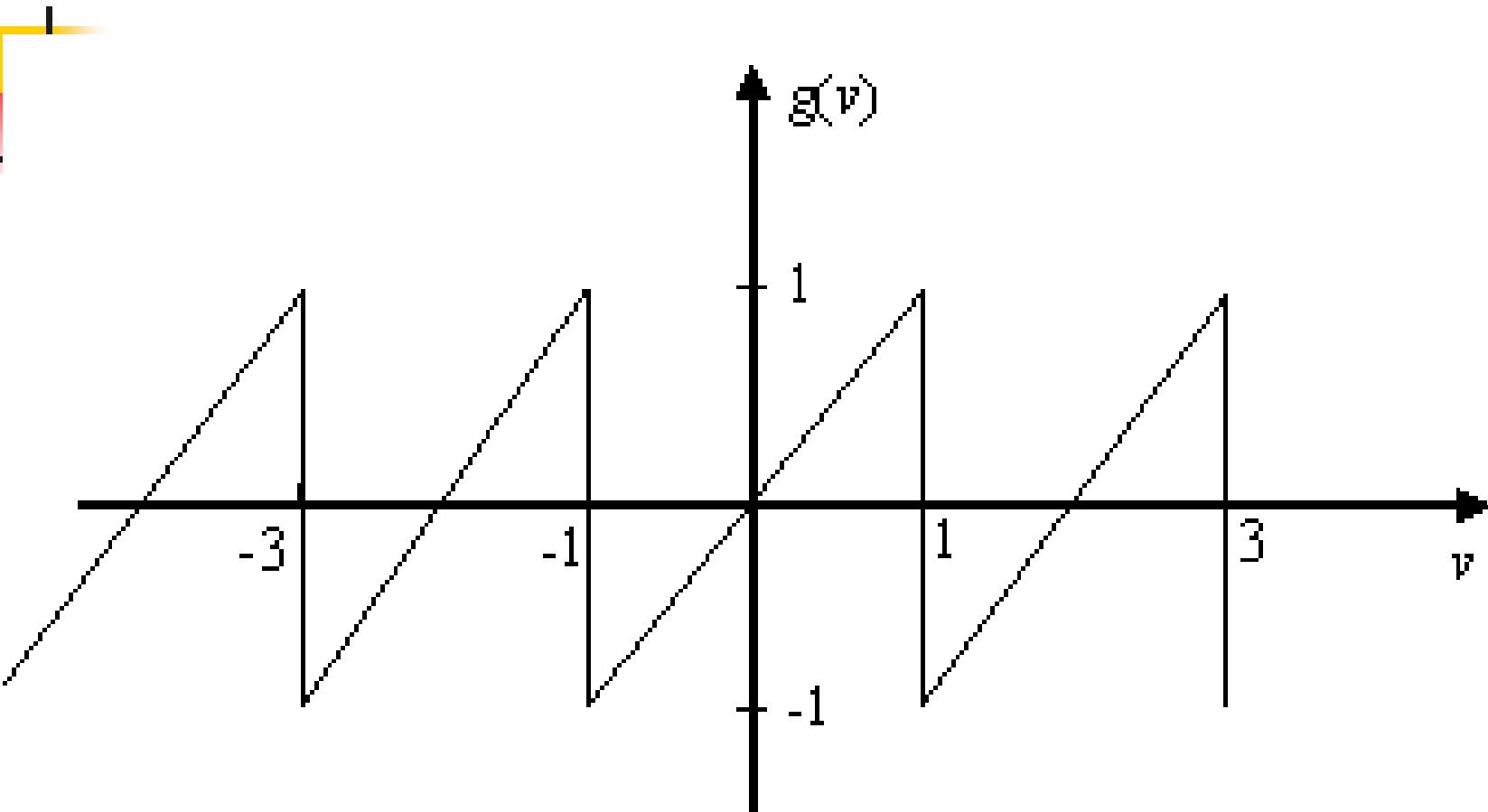


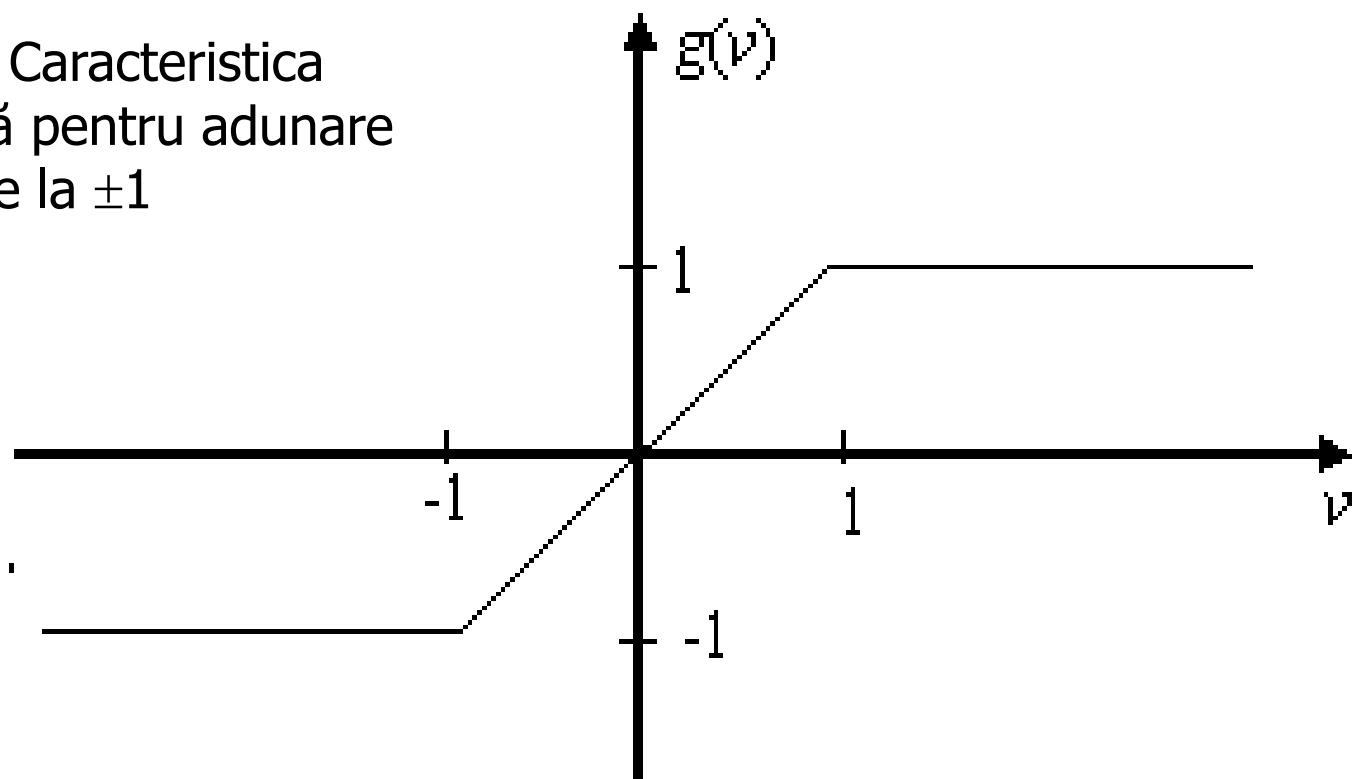
Figura 20. Caracteristica funcțională pentru adunarea în complement față de doi a două sau mai multe numere

Cicluri limită datorate depășirii

$$|a_1| + |a_2| < 1 \quad (139)$$

- Un remediu este de a modifica caracteristica sumatorului, ca în figura 21, care operează cu saturare numerică.

Figura 21. Caracteristica funcțională pentru adunare cu saturare la ± 1



Cicluri limită datorate depășirii

- **Exemplu**
- Se consideră secțiunea de filtru de ordin doi caracterizată de ecuația (134) $v[n] = Q_r[a_1 v[n-1]] + Q_r[a_2 v[n-2]] + x[n]$ în care adunarea se face în aritmetică complement față de doi, cu lungimea cuvintelor de 4 biți, incluzând bitul de semn, și se folosește rotunjirea pentru reprezentările în complement față de doi. Se presupune că $a_1 = 3/4 = 0,110$ și $a_2 = -3/4 = 1,010$ și, de asemenea, că $x[n]$ rămâne zero pentru $n \geq 0$.
- Se consideră condițiile initiale $v[-1] = (3/4)_{10} = (0,110)_{2C}$ și $v[-2] = (-3/4)_{10} = (1,010)_{2C}$. Eșantionul de la ieșire la momentul $n=0$ va fi

Cicluri limită datorate depășirii

$$v[0] = 0,110 \bullet 0,110 + 1,010 \bullet 1,010 = 0,100100 + 0,100100$$

Dacă se rotunjește fiecare produs, rezultă

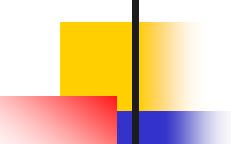
$$v[0] = 0,101 + 0,101 = 1,010 = -3/4$$

În mod similar se obține

$$\begin{aligned} v[1] &= Q(a_1 v[0]) + Q(a_2 v[-1]) = 0,110 \bullet 1,010 + 1,010 \bullet 0,110 = \\ &\quad (\text{înmulțirea se face în semn valoare și se stabilește semnul}) = - \\ &0,1001 - 0,1001 (\text{urmează rotunjirea la 4 biti}) = -0,101 - \\ &0,101 (\text{numerele negative se reprezintă în} \\ &2C) = (1,010 + 0,001) + (1,010 + 0,001) = 1,011 + 1,011 = 0,110 = \\ &3/4 \end{aligned}$$

adică, $v[n]$ va continua să oscileze între $-3/4$ și $3/4$ până ce este aplicat

Scalarea pentru prevenirea depășirii

- 
- Saturația aritmetică descrisă în paragraful anterior elimină ciclurile limită datorate depășirii pe de o parte, dar, pe de altă parte, duce la distorsiuni nedorite ale semnalelor, în acest caz nemaifuncționând regula conform căreia, dacă se adună mai multe numere a căror sumă este de modul subunitar, rezultatul este corect, chiar dacă apar depășiri în etapele intermediare de calcul.

Scalarea pentru prevenirea depășirii

Norme de scalare

Scalarea după norma \mathbf{I}_1

- Se analizează toate nodurile în care ar putea apărea depășiri și fiecare nod din rețea este constrâns să aibă o amplitudine mai mică decât 1, pentru a evita depășirea.
- Dacă $w_i[n]$ reprezintă valoarea variabilei asociată nodului i iar $h_i[n]$ este răspunsul la impuls de la nodul de intrare

$$|w_i[n]| = \left| \sum_{m=0}^{\infty} x[n-m] h_i[m] \right| \quad (140)$$

$$|w_i[n]| \leq x_{\max} \sum_{m=0}^{\infty} |h_i[m]| \quad (141)$$

Scalarea pentru prevenirea depășirii

Norme de scalare

Scalarea după norma $\| \cdot \|_1$

- O condiție suficientă ca este ca $|w_i[n]| < 1$

$$x_{\max} < \frac{1}{\sum_{m=0}^{\infty} |h_i[m]|} \quad (142)$$

- Mărimea $l_1 = \|h_i\|_1 = \sum_{m=0}^{\infty} |h_i[m]|$ se numește *normă l_1* a lui h_i .

- Factorul de scalare

$$s_1 < \min_i \left\{ \frac{1}{\|h_i\|_1} \right\}$$

$$s_1 x_{\max}$$

Scalarea pentru prevenirea depășirii

Norme de scalare

Scalarea după norma I₁

$$S_1 x_{\max} < \frac{1}{\max_i \left[\sum_{m=0}^{\infty} |h_i[m]| \right]} \quad (143)$$

- Scalând intrarea pe această cale se garantează că depășirea nu apare niciodată la nici unul din nodurile de rețea. La ieșire se compensează scalarea prin înmulțirea cu $\frac{1}{S_1}$, astfel încât să nu se modifice funcția de transfer a filtrului.
- Relația (143) conduce la o scalare foarte severă, care se mai numește și *scalare de sumă*.

Scalarea pentru prevenirea depășirii

Norme de scalare

Scalarea după norma $\| \cdot \|_\infty$

- Se poate alege factorul de scalare, s_∞ , mai mare, astfel încât să se garanteze lipsa depășirii. Intrarea este un semnal de bandă îngustă modelat cu $x[n] = x_{\max} \cos(\omega_0 n)$, variabilele de noduri vor fi [39]

$$w_i[n] = |H_i(\omega_0)| x_{\max} \cos[\omega_0 n + \angle H_i(\omega_0)] \quad (144)$$

- Depășirea este evitată pentru toate semnalele armonice dacă

$$\max_{i, |\omega| \leq \pi} |H_i(\omega)| x_{\max} < 1 \quad (145)$$

- Mărimea $\| H_i \|_\infty = \max_{|\omega| \leq \pi} |H_i(\omega)|$ se numește norma $\| \cdot \|_\infty$ a lui H_i .

Scalarea pentru prevenirea depășirii

Norme de scalare

Scalarea după norma $\| \cdot \|_\infty$

- Dacă intrarea este scalată prin factorul de scalare rezultă

$$s_\infty < \min_i \left\{ \frac{1}{\|H_i\|_\infty} \right\}$$

$$S_\infty x_{\max} < \frac{1}{\max_{i, |\omega| \leq \pi} |H_i(\omega)|} \quad (146)$$

Scalarea pentru prevenirea depășirii

Norme de scalare

Scalarea după norma \mathbf{I}_2

- O altă abordare posibilă este de a scala intrarea astfel încât energia fiecărei variabile de nod să fie mai mică sau egală cu energia totală a secvenței de intrare.

$$\begin{aligned} |w_i[n]|^2 &= \left| \sum_{k=0}^{\infty} h_i[k]x[n-k] \right|^2 \leq \sum_{k=0}^{\infty} |h_i[k]|^2 \sum_{k=0}^{\infty} |x[n-k]|^2 = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} |h_i[k]|^2 \sum_{k=0}^{\infty} |x[k]|^2 \end{aligned} \tag{147}$$

$$|w_i[n]|^2 \leq \sum_{n=0}^{\infty} |x[n]|^2 \quad \sum_{n=0}^{\infty} |x[n]|^2 = E_x \quad s_2$$

Scalarea pentru prevenirea depășirii

Norme de scalare

Scalarea după norma \mathbf{I}_2

$$s_2^2 \leq \frac{1}{\max_i \sum_{n=0}^{\infty} |h_i[n]|^2} = \frac{1}{\max_i \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H_i(\omega)|^2 d\omega} \quad (148)$$

- Mărimea $l_2 = \|h_i\|_2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |h_i[n]|^2 \right)^{1/2}$ se numește *normă I_2* a lui h_i .

Interacțiunea dintre domeniul dinamic și zgomot

- Normele de scalare l_2, l_∞, l_1 reprezintă trei moduri de a obține coeficienți de scalare pentru intrarea unui filtru digital. Prin scalarea intrării cu factorul $s_p, p = 1, \infty, 2$ raportul semnal / zgomot de cuantizare la ieșire scade.
- Un sistem IIR de ordinul doi, implementat în forma directă I și forma directă II, figura 22.a, factorul de scalare s-a combinat cu coeficienții b_k , astfel încât sursa de zgomot este aceeași ca în cazul fără scalare, prezentat în figura 15. Deoarece acest zgomot este filtrat din nou de partea de filtru care conține polii, puterea zgomotului de ieșire este aceeași pentru sistemul nescalat, reprezentat în figura 15 și cel scalat, reprezentat în 22.a.

Interacțiunea dintre domeniul dinamic și zgomot

- Funcția de sistem este $s_p H(z)$, față de $H(z)$ a sistemului cu intrarea nescalată și, corespunzător, ieșirea este

$$y'[n] = s_p y[n]$$

- Zgomotul este injectat după scalare, raportul dintre puterea semnalului și cea a zgomerului în sistemul scalat este de s_p^2 ori raportul semnal/zgomot pentru sistemul nescalat din figura 5.15.
- $s_p < 1$ raportul semnal / zgomot la ieșirea filtrului se reduce prin scalare.

Interacțiunea dintre domeniul dinamic și zgomot

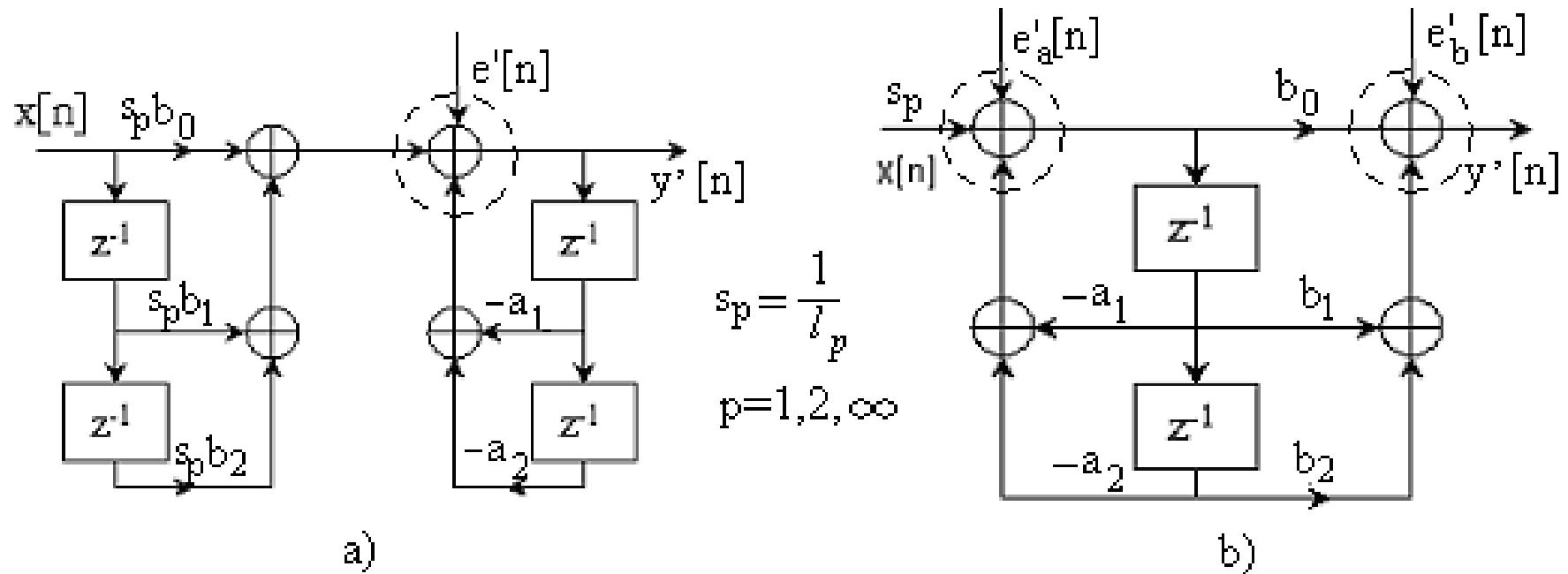


Figura 22. Scalarea sistemelor de ordinul doi.
a) Forma directă I, b) Forma directă II

Interacțiunea dintre domeniul dinamic și zgomot

- În cazul implementării în forma directă II din figura 22b factorul de scalare trebuie determinat astfel încât să se evite depășirea în ambele noduri încercuite. Funcția de sistem a filtrului scalat este $s_p H(z)$
- Factorul de scalare s_p , $p = 1, \infty, 2$, contribuie cu o sursă suplimentară de zgomot la $e_a[n]$ a sistemului nescalat reprezentat în figura 17. Acest zgomot este filtrat în același mod de sistemul nescalat și de cel scalat. Prin urmare, puterea semnalului se multiplică cu s_p^2 , iar puterea zgomotului de ieșire este dată de relația (127), cu N înlocuit cu $(N+1)$, astfel încât raportul semnal/zgomot se reduce și în acest caz, dacă se efectuează scalarea pentru a evita depășirea.

Interacțiunea dintre domeniul dinamic și zgomot

- Cu cât o regulă de scalare conduce la un factor de scalare mai scăzut, se reduce probabilitatea depășirii, dar se reduce și raportul semnal/zgomot de cuantizare. Acest fapt reprezintă *interacțiunea dintre domeniul dinamic și zgomot*. Prezintă interes găsirea unor structuri caracterizate de zgomot de cuantizare minim în condiții de scalare precizate. Utilizarea unor structuri în formă directă de ordin mare nu conduce la rezultate satisfăcătoare din acest punct de vedere, astfel încât sunt preferate structurile în cascadă sau în paralel, realizate cu secțiuni de ordinul doi.

Scalarea în realizarea în cascadă și în paralel

Analiza realizării în cascadă

- Un sistem implementat cu K module de ordinul doi, fiecare din acestea implementat în forma canonică, conectate în cascadă.

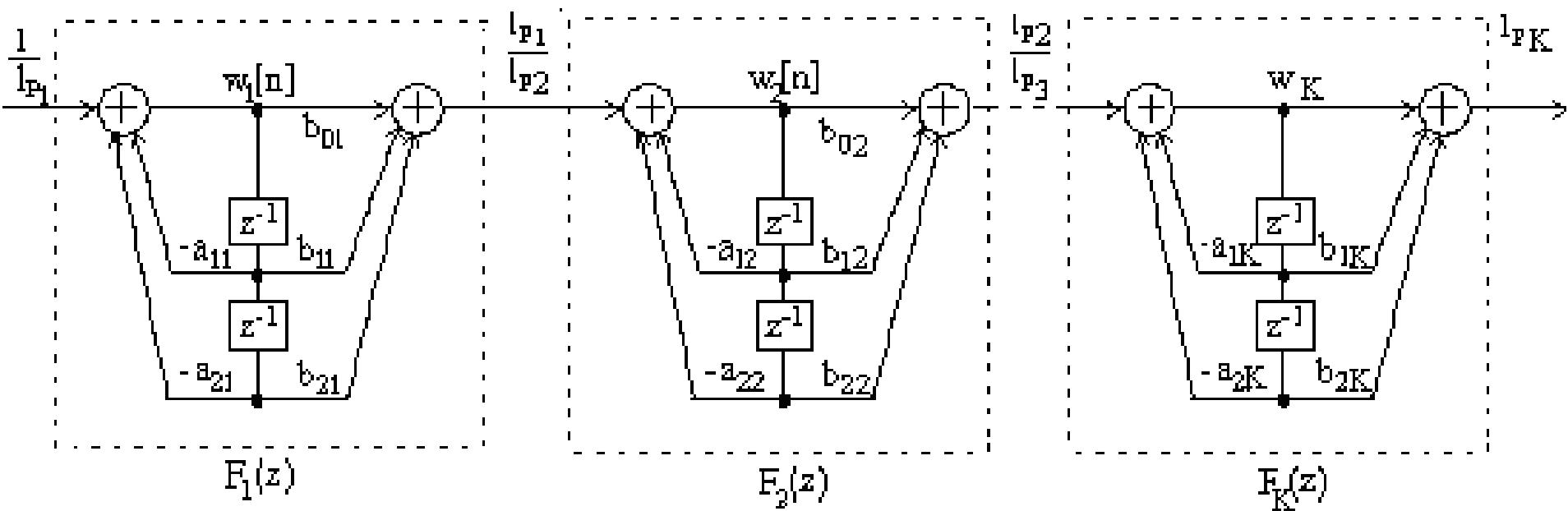


Figura 23. Scalarea la realizarea în cascadă a unui filtru cu K celule de ordinul doi

Scalarea în realizarea în cascadă și în paralel

Analiza realizării în cascadă

- F_k , $k=1,\dots,K$, funcția de sistem a unui modul de ordinul doi.

$$F_k(z) = \frac{b_{0k} + b_{1k}z^{-1} + b_{2k}z^{-2}}{1 + a_{1k}z^{-1} + a_{2k}z^{-2}} \quad (149)$$

$$l_{pi} = \|H_i(\omega)\|_p ; i=1, 2, 3, \dots, K, p = 1, 2, \infty$$

$$H_i(z) = \frac{\prod_{k=1}^{i-1} F_k(z)}{1 + a_{1i}z^{-1} + a_{2i}z^{-2}} \quad (150)$$

coeficientii $\frac{l_{pi}}{l_{p(i+1)}}$ pot fi încorporați în b_{0i}, b_{1i}, b_{2i}

Scalarea în realizarea în cascadă și în paralel

Analiza realizării în cascadă

- Înțînd seama de cele prezentate în paragraful precedent, scalarea este propriu-zis necesară numai pentru secțiunile pentru care normele sunt supraunitare. Dacă, însă, rezultă că nu este necesară scalare pentru celula respectivă, ceea ce ar corespunde unui factor de scalare unitar, fără efect asupra zgomotului de cuantizare. Totuși, dacă se scalează intrarea într-o secțiune de ordinul doi cu un factor supraunitar, care va amplifica semnalul, va crește raportul semnal/zgomot, prin utilizarea eficientă a gamei dinamice a filtrului. Astfel, scalarea poate fi privită nu numai ca un mod de a evita depășirea, ci și de adaptare a nivelului semnalului la gama dinamică a filtrului.

Scalarea în realizarea în cascadă și în paralel

Analiza realizării în cascadă

- În cazul unui filtru numeric IIR de ordin mare realizat prin conectarea în cascadă a unor structuri de ordinul doi, puterea zgromotului la ieșire depinde de modul în care polii și zerourile sunt împerecheate pentru a forma structuri de ordinul doi și de ordinea secțiunilor în cascadă. Se poate observa că pentru K secțiuni de ordin doi există $K!$ posibilități de a împerechea polii și zerourile și $K!$ posibilități de a ordona secțiunile de ordinul doi rezultate. Rezultă în total $(K!)^2$ sisteme diferite. În plus, se poate alege oricare din formele directe I sau II (sau transpușele lor) pentru implementarea secțiunilor de ordinul doi. Chiar și pentru sisteme de ordin mic problema împerecherii și ordonării nu este simplă, deoarece necesită un volum mare de calcule.

Scalarea în realizarea în cascadă și în paralel

Analiza realizării în cascadă

- Scalarea este propriu-zis necesară numai pentru secțiunile pentru care normele $l_{pi} = \|H_i(\omega)\|_p$ sunt supraunitare.
- Dacă, $\|H_i(\omega)\|_p \leq 1$, nu este necesară scalare pentru celula respectivă
- Dacă se scalează intrarea într-o secțiune de ordinul doi cu un factor supraunitar, care va amplifica semnalul, va crește raportul semnal/zgomot, prin utilizarea eficientă a gamei dinamice a filtrului.

Scalarea în realizarea în cascadă și în paralel

Analiza realizării în cascadă

- În cazul unui filtru numeric IIR de ordin mare realizat prin conectarea în cascadă a unor structuri de ordinul doi, puterea zgomotului la ieșire depinde de modul în care polii și zerourile sunt împerecheate pentru a forma structuri de ordinul doi și de ordinea secțiunilor în cascadă. Se poate observa că pentru K secțiuni de ordin doi există $K!$ posibilități de a împerechea polii și zerourile și $K!$ posibilități de a ordona secțiunile de ordinul doi rezultate. Rezultă în total $(K!)^2$ sisteme diferite. În plus, se poate alege oricare din formele directe I sau II (sau transpusele lor) pentru implementarea secțiunilor de ordinul doi.

Scalarea în realizarea în cascadă și în paralel

Analiza realizării în cascadă

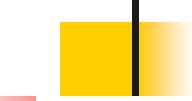
- Se definește *factorul* (sau *câștigul*) de vârf pentru celula k cu relația

$$\rho_k = \frac{\max_{\omega} |H_k(\omega)|}{\left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H_k(\omega)|^2 d\omega \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (151)$$

- O grupare optimă minimizează factorii de vârf și a găsit că se pot obține rezultate bune aplicând următoarele reguli simple [23]:

Scalarea în realizarea în cascadă și în paralel

Analiza realizării în cascadă

- 
1. Polul care este cel mai apropiat de cercul de rază unitate din planul Z, trebuie împerecheat cu zeroul cel mai apropiat de el;
 2. Regula 1 se aplică repetat până ce toți polii și zerourile au fost împerecheate;
 3. Secțiunile de ordinul doi rezultate trebuie ordonate în funcție de apropierea polilor de cercul unitate, fie în ordinea crescătoare, fie descrescătoare a apropiierii polilor de cercul unitate.

Scalarea în realizarea în cascadă și în paralel

Analiza realizării în cascadă

- Subsistemele cu câștig (factor) de vârf foarte mare sunt nedorite pentru că ele pot cauza depășiri și pot amplifica zgomotul de cuantizare. Împerechind un pol ce este apropiat de cercul unitate, cu un zerou adjacent se tinde să se reducă câștigul de vârf al secțiunii.
- O motivație pentru regula 3 este aceea că pentru ca spectrul zgomotului de ieșire să nu aibă o alură ascuțită, cu un maxim puternic în apropierea unui pol ce este apropiat de cercul de unitate din planul Z , este de dorit ca acești poli să fie la începutul schemei în cascadă. Răspunsul în frecvență la ieșirea unui anumit nod implică produsul răspunsurilor în frecvență ale subsistemelor care preced nodul.

Scalarea în realizarea în cascadă și în paralel

Analiza realizării în cascadă

- Pentru a evita reducerea excesivă a nivelului de semnal în etajele anterioare ale cascadei ar trebui ca polii ce sunt apropiati de cercul unitate să fie plasați ultimii în cascadă. Se observă că problema ordonării secțiunilor depinde de o varietate de factori, cum ar fi dispersia totală a zgromotului de ieșire și forma spectrului zgromotului de ieșire. Jackson a folosit norme I_p pentru a cuantifica analiza problemei împerecherii și ordonării polilor și zerourilor și a elaborat o serie de reguli empirice pentru obținerea de rezultate satisfăcătoare, fără a evalua toate posibilitățile.

Scalarea în realizarea în cascadă și în paralel

Analiza realizării în cascadă

- Pentru obținerea unui zgomot cât mai mic, celulele se ordonează în sens crescător al factorului de vârf.

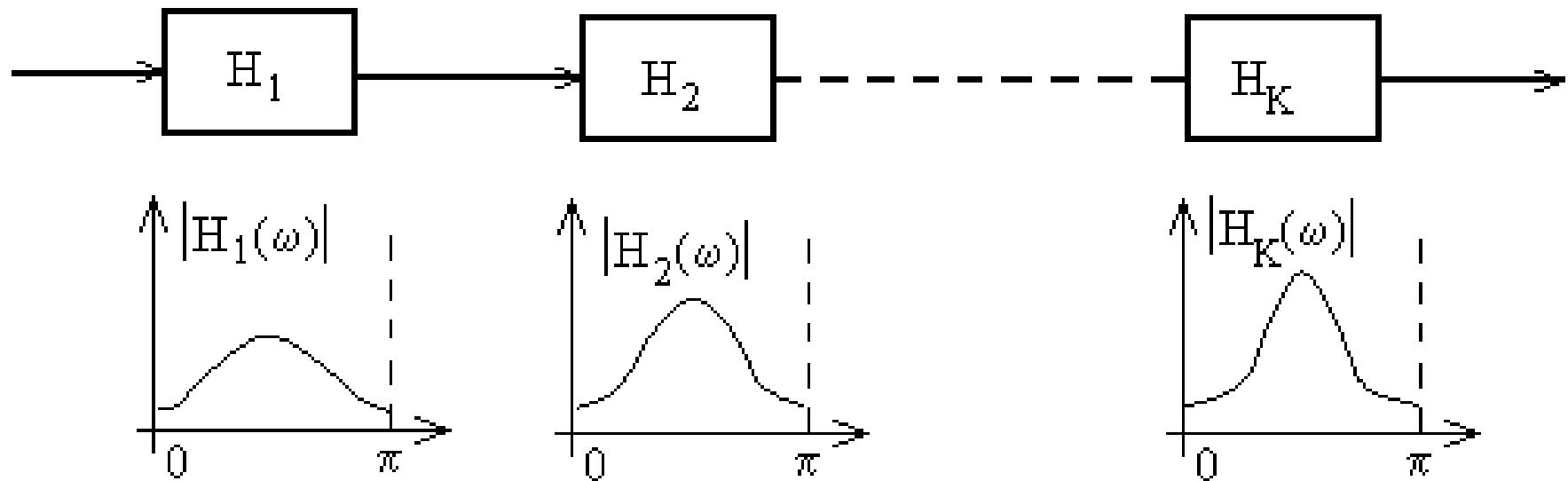


Figura 24. Ordonarea secțiunilor de ordinul doi în cascadă
în ordinea crescătoare a selectivității acestora

Procese aleatoare regulate. Factorizare spectrală.

Reprezentarea proceselor aleatoare staționare

- Un proces aleator staționar în sens larg, poate fi reprezentat ca ieșirea unui sistem liniar, invariant în timp, cauzal, inversabil excitat de un zgomot alb.
- Fie un proces aleator staționar în sens larg $x[n]$ cu funcția de autocorelație $\gamma_{xx}[m]$.
- Transformata Z a funcției de autocorelație $\gamma_{xx}[m]$ este

$$\Gamma_{xx}(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \gamma_{xx}[m] z^{-m} \quad (1)$$

Procese aleatoare regulate. Factorizare spectrală.

Reprezentarea proceselor aleatoare staționare

- Densitatea spectrală de putere se obține prin evaluarea pe cercul unitate ($z = e^{j2\pi f}$).
- Se presupune că $\log \Gamma_{xx}(z)$ este analitică (adică $\log \Gamma_{xx}(z)$ și derivatele sale de orice ordin sunt continue) într-o regiune inelară a planului Z, care include cercul unitate ($r_1 < |z| < r_2$ cu $r_1 < 1$ și $r_2 > 1$).

$$\log \Gamma_{xx}(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} v[m] z^{-m} \quad (2)$$

unde $\{v[m]\}$ sunt coeficienții dezvoltării în serie.

Procese aleatoare regulate. Factorizare spectrală.

Reprezentarea proceselor aleatoare staționare

$$V(z) = \log \Gamma_{xx}(z)$$

$$\log \Gamma_{xx}(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} v[m] e^{-j2\pi fm} \quad (3)$$

$$v[m] = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} [\log \Gamma_{xx}(f)] e^{j2\pi fm} df \quad (4)$$

$$\Gamma_{xx}(z) = e^{\sum_{m=-\infty}^{\infty} v[m] z^{-m}} = e^{v[0]} e^{\sum_{m=-\infty}^{-1} v[m] z^{-m}} e^{\sum_{m=1}^{\infty} v[m] z^{-m}} \quad (5)$$

Procese aleatoare regulate. Factorizare spectrală.

Reprezentarea proceselor aleatoare staționare

- Se definește

$$\sigma_w^2 = e^{v[0]} \text{ și } H(z) = e^{\sum_{m=1}^{\infty} v[m]z^{-m}}, \quad |z| > r_1 \quad (6)$$

$\log \Gamma_{xx}(f)$ este o funcție reală, coeficienții dezvoltării sunt conjugat simetrici $v[m] = v^*[-m]$

$$e^{\sum_{m=-\infty}^{-1} v[m]z^{-m}} = e^{\sum_{n=1}^{\infty} v[-n]z^n} = e^{\left(\sum_{n=1}^{\infty} (v[-n]z^n)^* \right)^*} = \\ = e^{\left(\sum_{n=1}^{\infty} (v[-n])^* (z^*)^n \right)^*} = e^{\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} v[n] \left(\frac{1}{z^*} \right)^{-n} \right\}^*} = H^* \left(\frac{1}{z^*} \right) \quad (7)$$

Procese aleatoare regulate. Factorizare spectrală.

Reprezentarea proceselor aleatoare staționare

$$\Gamma_{xx}(z) = \sigma_w^2 H(z) H^* \left(\frac{1}{\bar{z}^*} \right) \quad (8)$$

- Un proces care îndeplinește condițiile anterioare și admite o asemenea factorizare spectrală se numește *proces regulat*.
- Prin evaluarea relației (8) pe cercul unitate se obține o reprezentare echivalentă a densității spectrale de putere sub forma

$$\Gamma_{xx}(f) = \sigma_w^2 |H(f)|^2 \quad (9)$$

Procese aleatoare regulate. Factorizare spectrală. Reprezentarea proceselor aleatoare staționare

$$\begin{aligned}\log \Gamma_{xx}(f) &= \log \sigma_w^2 + \log H(f) + \log H^*(f) = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} v[m] e^{-j2\pi fm}\end{aligned}\tag{10}$$

- Partea cauzală a seriei Fourier din (3) este asociată cu $H(z)$ iar cea necauzală, cu $H^*\left(\frac{1}{z^*}\right)$
- Pentru valori reale ale procesului

$$H^*\left(\frac{1}{z^*}\right) = H(z^{-1})\tag{11}$$

Procese aleatoare regulate. Factorizare spectrală.

Reprezentarea proceselor aleatoare staționare

- Coeficienții $v[m]$ ai seriei Fourier se numesc coeficienți *cepstrali*, iar secvența $\{v[m]\}$ se numește *cepstrul secvenței* $\gamma_{xx}[m]$
- Filtrul cu funcția de sistem $H(z)$ dată de relația (6) este analitic în regiunea $|z| > r_1 < 1$, astfel încât descompunerea sa în serie Taylor caracterizează un sistem cauzal

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h[n] z^{-n} \quad (12)$$

Procese aleatoare regulate. Factorizare spectrală. Reprezentarea proceselor aleatoare staționare

- Oricare ar fi $x[n]$, un proces aleator, staționar, cu medie nulă și densitate spectrală de putere finită, acesta se poate obține la ieșirea unui filtru liniar, cauzal și invariant în timp, $H(z)$, convenabil ales, dacă la intrarea sa se aplică zgomot alb cu densitatea spectrală de putere σ_w^2 .

Procese aleatoare regulate. Factorizare spectrală. Reprezentarea proceselor aleatoare staționare

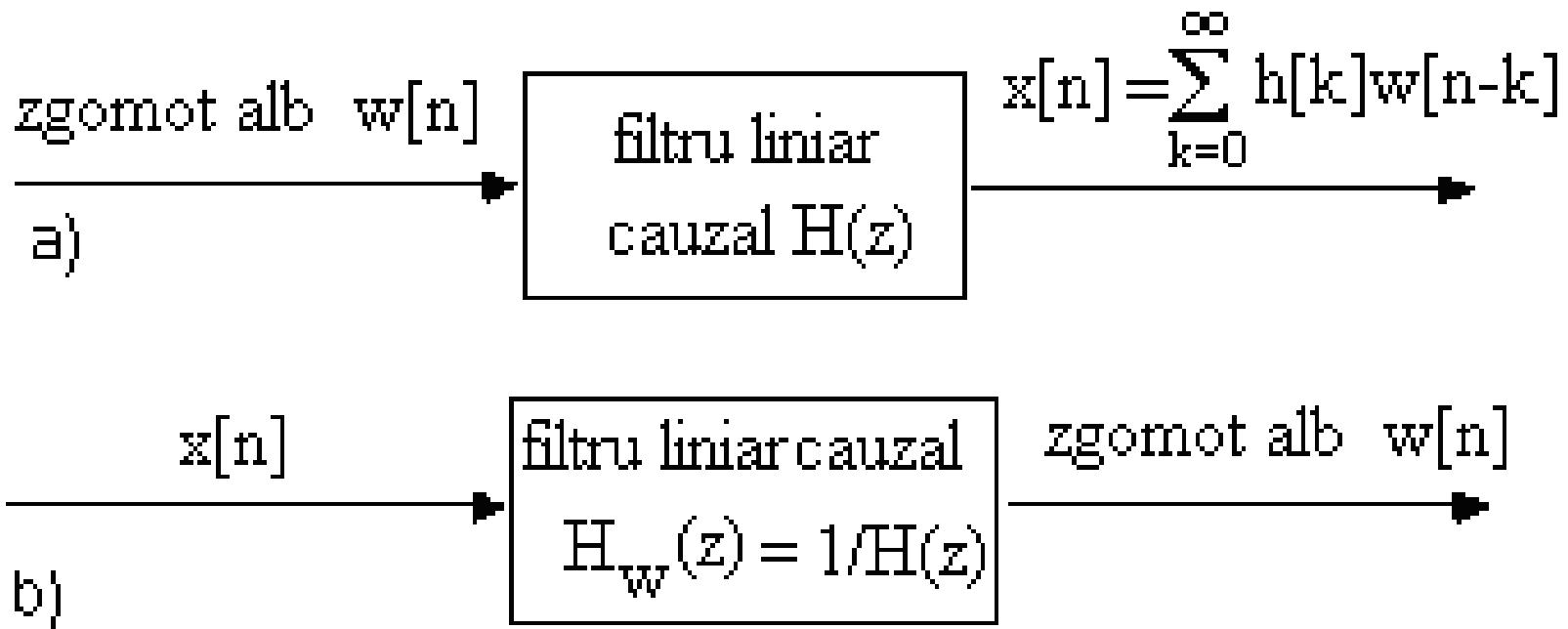


Figura 1. Filtre pentru generarea: a) unui proces aleator din zgomot alb,
b) unui zgomot alb dintr-un proces aleator

Procese aleatoare regulate. Factorizare spectrală. Reprezentarea proceselor aleatoare staționare

- Dacă filtrul $H(z)$ este de fază minimă, există un sistem invers, cauzal, cu funcția de transfer $H_w(z) = \frac{1}{H(z)}$ care “albește” procesul $x[n]$.
- Un astfel de filtru se va numi *filtru de albire*. $w[n]$ este zgomot alb asociat procesului aleator staționar $x[n]$.
- Regiunile de convergență pentru $H(z)$ și $H_w(z)$ sunt diferite, iar condiția de fază minimă pentru un filtru asigură stabilitatea celuilalt, și invers.

Procese aleatoare regulate. Factorizare spectrală.

Reprezentarea proceselor aleatoare staționare

- Dacă $\Gamma_{xx}(z)$ este o funcție rațională, atunci $H(z)$ are o expresie rațională, $H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$ și factorizarea spectrală are forma

$$\Gamma_{xx}(z) = \sigma_w^2 H(z) H^* \left(\frac{1}{\bar{z}^*} \right) = \sigma_w^2 \frac{B(z) B^* \left(\frac{1}{\bar{z}^*} \right)}{A(z) A^* \left(\frac{1}{\bar{z}^*} \right)} \quad (13)$$

$$\text{unde } A(z) = 1 + \sum_{k=1}^p a_k z^{-k} \quad (14) \text{ și } B(z) = 1 + \sum_{k=1}^q b_k z^{-k} \quad (15)$$

sunt polinoame cu zerourile în interiorul cercului unitate.

Modelarea proceselor aleatoare

- Densitatea spectrală de putere a unui proces aleator staționar $x[n]$ este o funcție rațională

$$\Gamma_{xx}(z) = \sigma_w^2 \frac{B(z)B^*\left(\frac{1}{z^*}\right)}{A(z)A^*\left(\frac{1}{z^*}\right)} ; \quad r_1 < |z| < r_2, \quad r_1 < 1, \quad r_2 > 1 \quad (16)$$

- Funcția de sistem $H(z)$

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{k=0}^q b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^p a_k z^{-k}} ; \quad |z| > r_1, \quad r_1 < 1 \quad (17)$$

Modelarea proceselor aleatoare

- $\{b_k\}$ și $\{a_k\}$ sunt coeficienții care determină pozițiile polilor și zerourilor filtrului. Filtrul caracterizat de $H(z)$ este cauzal, stabil și de fază minimă. Filtrul invers $\frac{1}{H(z)}$ este cauzal, stabil și de fază minimă.
- Ecuația cu diferențe pentru sistemul liniar

$$x[n] + \sum_{k=1}^p a_k x[n-k] = \sum_{k=0}^q b_k w[n-k] \quad (18)$$

unde $w[n]$ este zgomot alb.

Modelarea proceselor aleatoare

- Se disting trei situații:

- a) **Proces autoregresiv cu medie alunecătoare (ARMA) notat**

$$ARMA(q, p) \quad H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} \quad H_w(z) = \frac{1}{H(z)} = \frac{A(z)}{B(z)}$$

- b) **Proces autoregresiv (AR) notat** $AR(p) = ARMA(0, p)$ pentru

$$b_0 = 1, b_k = 0, k > 0 \quad H(z) = \frac{1}{A(z)} \quad (19)$$

$$x[n] + \sum_{k=1}^p a_k x[n-k] = w[n]$$

$$H_w(z) = \frac{1}{H(z)} \quad \text{un filtru numai cu zerouri}$$

Modelarea proceselor aleatoare

- c) *Proces cu medie mobilă (alunecătoare) (MA), notat*

$$MA(q) = ARMA(q, 0) \quad a_k = 0, k \geq 1 \quad H(z) = B(z)$$

$$x[n] = \sum_{k=0}^q b_k w[n-k] \quad (20)$$

- Adoptarea modelului sub forma unei expresii raționale pentru densitatea spectrală de putere s-a făcut datorită următoarelor motive:
 - 1- evaluarea numerică a parametrilor necunoscuți este relativ simplă,
 - 2 - un spectru arbitrar poate fi aproximat destul de fidel de acest model.

Relații între parametrii modelului și secvența de autocorelație a procesului

- Legătura între secvența de autocorelație a procesului $\gamma_{xx}[m]$ și parametrii a_k și b_k ai filtrului se poate obține multiplicând la dreapta relația (18) cu $x^*[n-m]$

$$E[x[n_i]x^*[n_i-m]] = -\sum_{k=1}^p a_k E[x[n_i-k]x^*[n_i-m]] + \\ + \sum_{k=0}^q b_k E[w[n_i-k]x^*[n_i-m]] \quad (21)$$

$$\gamma_{xx}[m] = -\sum_{k=1}^p a_k \gamma_{xx}[m-k] + \sum_{k=0}^q b_k \gamma_{wx}[m-k] \quad (22)$$

unde $\gamma_{wx}[m]$ este secvența de corelație între $x[n]$ și $w[n]$

Relații între parametrii modelului și secvența de autocorelație a procesului

$$\gamma_{wx}[m] = E\{w^*[n_i + m]x[n_i]\} =$$

$$E\left\{\sum_{k=0}^{\infty} h[k]w[n_i - k]w^*[n_i + m]\right\} =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} h[k]E\{w^*[n_i - k]w[n_i + m]\} =$$

(23)

$$\sum_{k=0}^{\infty} h[k]\gamma_{ww}[k + m] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]\sigma_w^2\delta[k + m] = \sigma_w^2 h[-m]$$

$$\gamma_{wx}[m] = \begin{cases} 0, & m > 0 \\ \sigma_w^2 h[-m], & m \leq 0 \end{cases}$$

(23')

Relații între parametrii modelului și secvența de autocorelație a procesului

$$\sum_{k=0}^q b_k \gamma_{wx}[m-k] = \sigma_w^2 \sum_{k=0}^q b_k h[k-m] \stackrel{k-m=p}{=} \sigma_w^2 \sum_{p=-m}^{q-m} b_{p+m} h[p] = \\ = \sigma_w^2 \sum_{k=0}^{q-m} b_{k+m} h[k] \quad (24)$$

$$\gamma_{xx}[m] = \begin{cases} -\sum_{k=1}^p a_k \gamma_{xx}[m-k], & m > q \\ -\sum_{k=1}^p a_k \gamma_{xx}[m-k] + \sigma_w^2 \sum_{k=0}^{q-m} h[k] b_{k+m}, & 0 \leq m \leq q \\ \gamma_{xx}^*[-m], & m < 0 \end{cases} \quad (25)$$

Relații între parametrii modelului și secvența de autocorelație a procesului

- Aceste relații sunt neliniare din cauza termenului

$$\sigma_w^2 \sum_{k=0}^{q-m} h[k] b_{k+m}$$

- Pentru procese AR, relațiile (25) se simplifică

$$\gamma_{xx}[m] = \begin{cases} -\sum_{k=1}^p a_k \gamma_{xx}[m-k], & m > 0 \\ -\sum_{k=1}^p a_k \gamma_{xx}[m-k] + \sigma_w^2, & m = 0 \\ \gamma_{xx}^*[-m], & m < 0 \end{cases} \quad (26)$$

Relații între parametrii modelului și secvența de autocorelație a procesului

- Relațiile dintre $\gamma_{xx}[m]$ și $\{a_k\}$ sunt liniare.
- Acestea se numesc ecuațiile Yule-Walker

$$\begin{bmatrix} \gamma_{xx}[0] & \gamma_{xx}[-1] & \gamma_{xx}[-2] & \dots & \gamma_{xx}[-p] \\ \gamma_{xx}[1] & \gamma_{xx}[0] & \gamma_{xx}[-1] & \dots & \gamma_{xx}[-p+1] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{xx}[p] & \gamma_{xx}[p-1] & \gamma_{xx}[p-2] & \dots & \gamma_{xx}[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_w^2 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (27)$$

Relații între parametrii modelului și secvența de autocorelație a procesului

- În cazul unui proces MA

$$\gamma_{xx}[m] = \begin{cases} \sigma_w^2 \sum_{k=0}^q b_k b_{k+m}, & 0 \leq m \leq q \\ 0, & m > q \\ \gamma_{xx}^*[-m], & m < 0 \end{cases} \quad (28)$$

- Relațiile (25) permit determinarea parametrilor modelului, dacă se cunosc valorile funcției de autocorelație, care, în multe cazuri, pot fi estimate pe baza unui număr de eșantioane.
- Invers, când se cunosc parametrii modelului, funcția de autocorelație se poate determina recursiv.

PREDICTION LINIARĂ ȘI FILTRARE LINIARĂ OPTIMALĂ

- Problema proiectării filtrelor optimale - abordată din punct de vedere statistic.
- Filtrele se impun a fi liniare iar criteriul de optimizare se bazează pe minimizarea erorii pătratice medii.
- Statistica de ordinul doi (funcțiile de autocorelație și corelație).
- Proiectarea filtrelor optimale pentru predicția liniară are aplicații în domenii diverse ca:
 - **procesarea semnalului vocal;**
 - **procesarea de imagini;**
 - **suprimarea zgomotului în sistemele de comunicații etc.**

Predictie înainte (forward)

- $x[n]$ un proces aleator staționar. Estimarea valorii procesului la un moment dat, pe baza unui număr finit p de observații (eșantioane) consecutive anterioare.
- Valoarea estimată se notează $\hat{x}[n] \Big|_{M_p^x[n-r]}$ unde

$$M_p^x[n-r] = \{x[n-r-p+1], \dots, x[n-r]\}$$

predictia înainte cu r pași de ordinul p a eșantionului $x[n]$

$$r > 1$$

Predictie înainte (forward)

- Predictorul liniar înainte cu un pas ($r=1$), care determină valoarea estimată $\hat{x}[n]$ ca o combinație liniară ponderată a ultimelor p valori: $x[n-1], x[n-2], \dots, x[n-p]$

$$\hat{x}[n] = -\sum_{k=1}^p a_p[k]x[n-k] \quad (1)$$

$\{-a_p[k]\}$ coeficienți de predicție

Predicție înainte (forward)

- Schema predictorului liniar cu un pas, de ordinul p

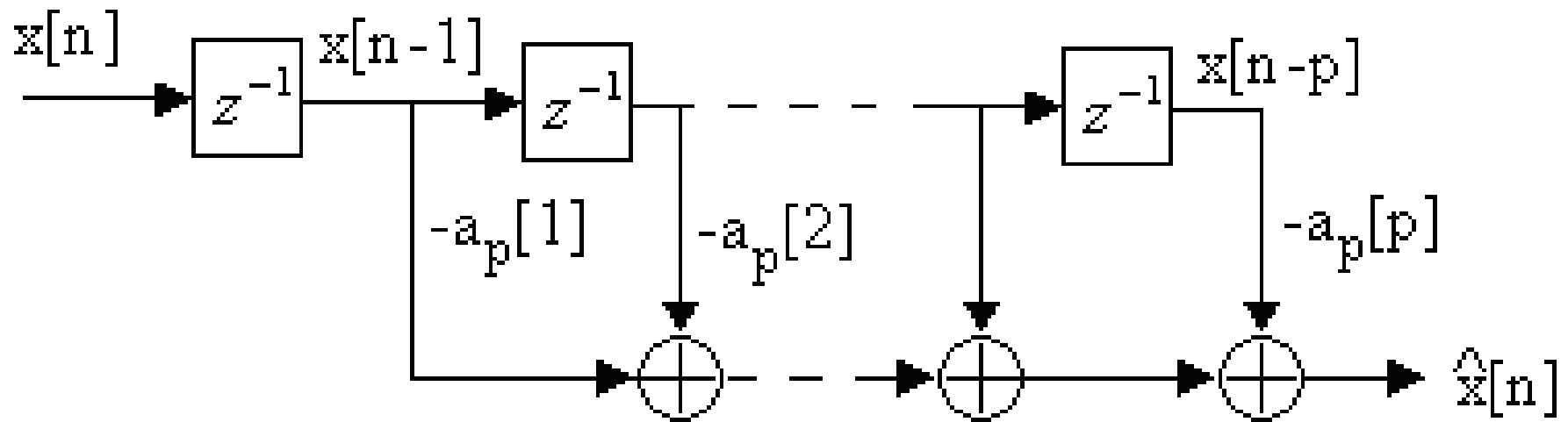


Fig. 1. Predictor liniar cu un pas, de ordin p

Predictie înainte (forward)

- Diferența dintre valoarea $x[n]$ și cea predictată $\hat{x}[n]$ se numește eroare de predictie înainte și se notează $f_p[n]$
$$f_p[n] = x[n] - \hat{x}[n] = x[n] + \sum_{k=1}^p a_p[k]x[n-k] \quad (2)$$
- Eroarea de predictie rezultă conform schemei din figura 2

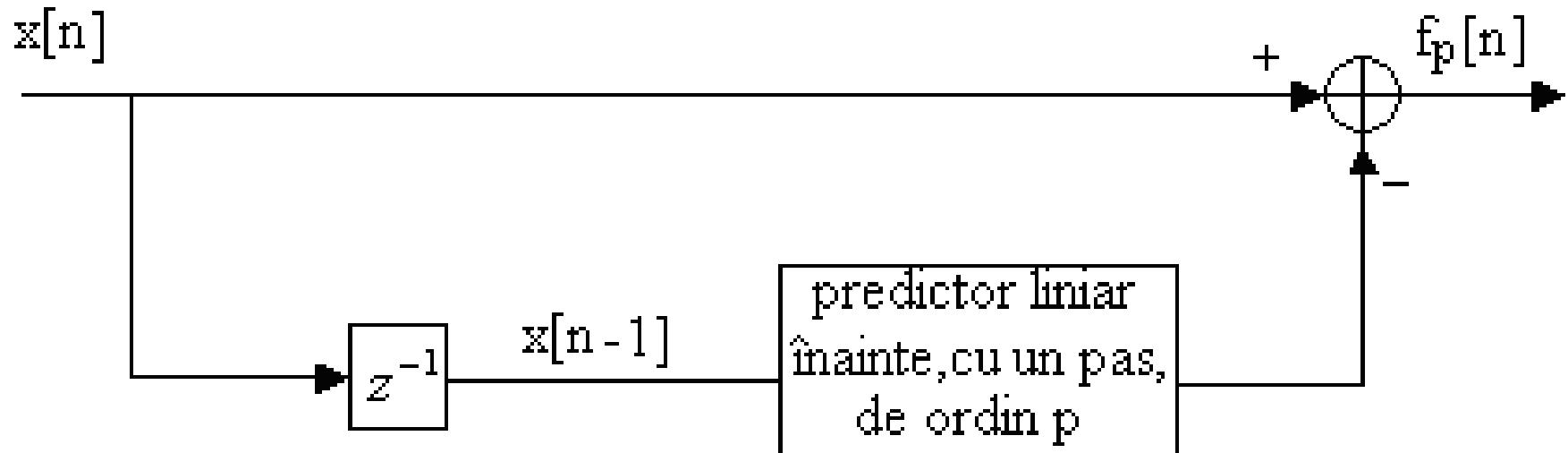


Fig. 2. Legătura dintre predictorul liniar înainte și filtrul erorii de predictie

Predictie inainte (forward)

- Filtrul erorii de predictie

$$A_p(z) = \sum_{k=0}^p a_p[k] z^{-k} \quad (3)$$

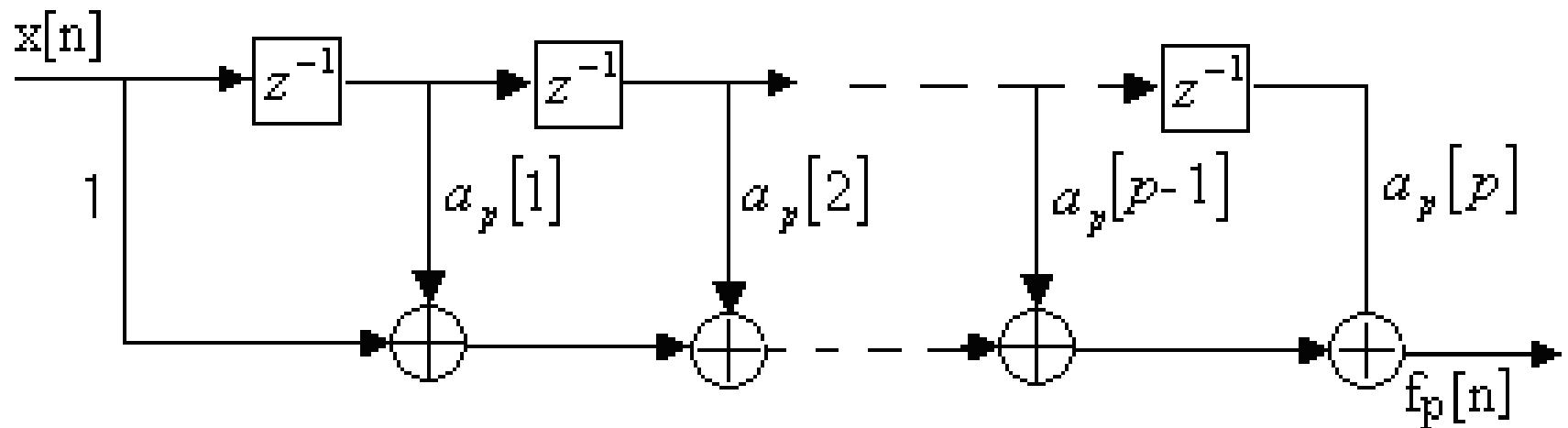


Figura 3. Filtrul erorii de predictie

Predictie înainte (forward)

- Eoarea pătratică medie de predicție liniară înainte este

$$\begin{aligned}\xi_p^f &= E[f_p^2[n_i]] = E\left[\sum_{k=0}^p a_p[k]x[n_i-k]\sum_{l=0}^p a_p[l]x[n_i-l]\right] = \\ &= E\left[x[n_i] + \dots + a_p[p]x[n_i-p]\right]\left[x[n_i] + \dots + a_p[p]x[n_i-p]\right] = \\ &= E\left[x^2[n_i] + 2\sum_{k=1}^p a_p[k]x[n_i]x[n_i-k] + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p a_p[k]a_p[l]x[n_i-k]x[n_i-l]\right] = \tag{4} \\ &= \gamma_{xx}[0] + 2\sum_{k=1}^p a_p[k]\gamma_{xx}[k] + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p a_p[k]a_p[l]\gamma_{xx}[l-k]\end{aligned}$$



Predicție înainte (forward)

- Eroarea pătratică medie este o funcție pătratică de coeficienții filtrului predictor și prezintă un extrem pentru valorile coeficienților pentru care

$$\frac{\partial \xi_p^f(a_p[k])}{\partial a_p[k]} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial \xi_p^f(a_p[k])}{\partial a_p[k]} =$$

Predictie înainte (forward)

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\partial}{\partial a_p[k]} \left(\gamma_{xx}[0] + 2 \sum_{k=1}^p a_p[k] \gamma_{xx}[k] + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p a_p[k] a_p[l] \gamma_{xx}[l-k] \right) = \\
 &= \frac{\partial}{\partial a_p[k]} (\gamma_{xx}[0] + 2 \sum_{k=1}^p a_p[k] \gamma_{xx}[k] + \\
 &\quad a_p[1] a_p[1] \gamma_{xx}[0] + \dots + a_p[1] a_p[k] \gamma_{xx}[k-1] + \dots + a_p[1] a_p[p] \gamma_{xx}[p-1] + \\
 &\quad \vdots \\
 &\quad a_p[k] a_p[1] \gamma_{xx}[1-k] + \dots + a_p[k] a_p[k] \gamma_{xx}[0] + \dots + a_p[k] a_p[p] \gamma_{xx}[p-k] + \\
 &\quad \vdots \\
 &\quad a_p[p] a_p[1] \gamma_{xx}[1-p] + \dots + a_p[p] a_p[k] \gamma_{xx}[k-p] + \dots + a_p[p] a_p[p] \gamma_{xx}[0]) \\
 &= 2 \gamma_{xx}[k] + 2 \sum_{l=1}^p a_p[l] \gamma_{xx}[k-l] = 0
 \end{aligned} \tag{6}$$

Predictie înainte (forward)

$$\gamma_{xx}[k] = - \sum_{l=1}^p a_p[l] \gamma_{xx}[k-l], k = 1, \dots, p \quad (7)$$

- Extremul erorii pătratice medii este un minim

$$\frac{\partial^2 \xi_p^f(a_p[k])}{\partial (a_p[k])^2} = \gamma_{xx}[0] > 0$$

- Relațiile (7) se numesc *ecuațiile normale*

$$\min \left[\xi_p^f \right]^{not.} = E_p^f = \gamma_{xx}[0] + \sum_{k=1}^p a_p[k] \gamma_{xx}[k] \quad (8)$$

Predicție liniară înapoi (backward)

- Estimarea eșantionului $x[n - p - r + 1]$ pe baza observațiilor $M_p^x[n]$ se numește predicție înapoi cu r pași, de ordin p .
- Se cunoaște secvența de date $x[n], x[n-1], \dots, x[n-p+1]$ și se estimează valoarea $x[n-p]$, adică

$$\hat{x}[n-p] = -\sum_{k=0}^{p-1} b_p[k] x[n-k] \quad (9)$$

Predicție liniară înapoi (backward)

- Diferența dintre valoarea $x[n - p]$ și estimatul $\hat{x}[n - p]$ se numește eroare de predicție înapoi, notată cu $g_p[n]$

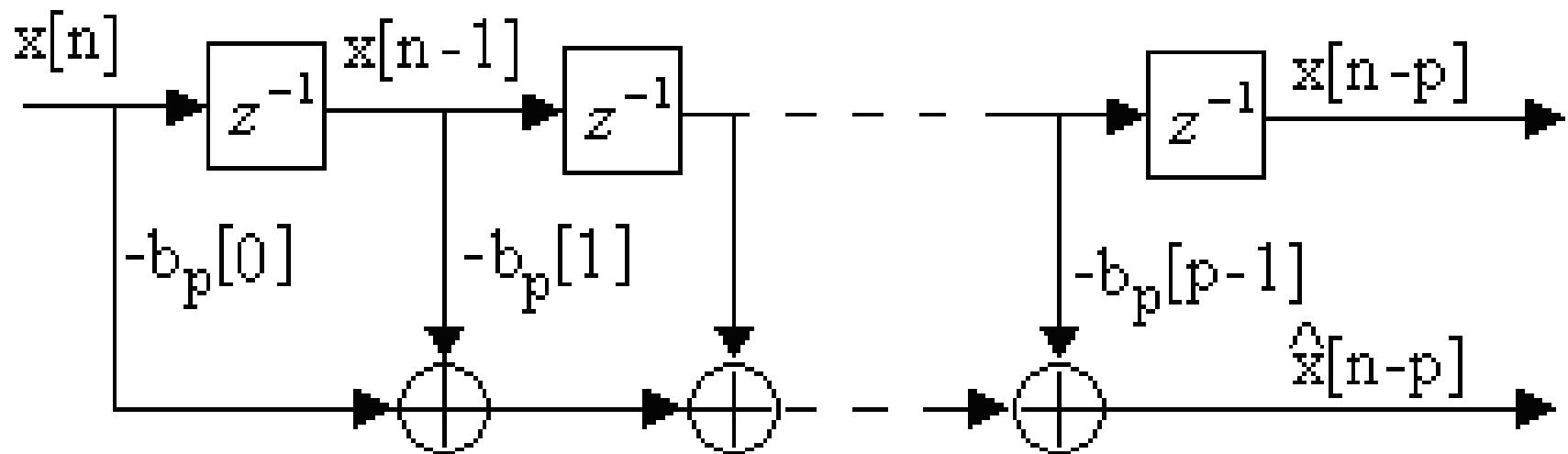


Fig. 4. Predictor înapoi cu un pas, de ordinul p

Predicție liniară înapoi (backward)

$$g_p[n] = x[n-p] + \sum_{k=0}^{p-1} b_p[k] x[n-k] =$$

(10)

$$= \sum_{k=0}^p b_p[k] x[n-k], b_p[p] = 1$$

$$B_p(z) = \sum_{k=0}^p b_p[k] z^{-k}$$

(11)

Predicție liniară înapoi (backward)

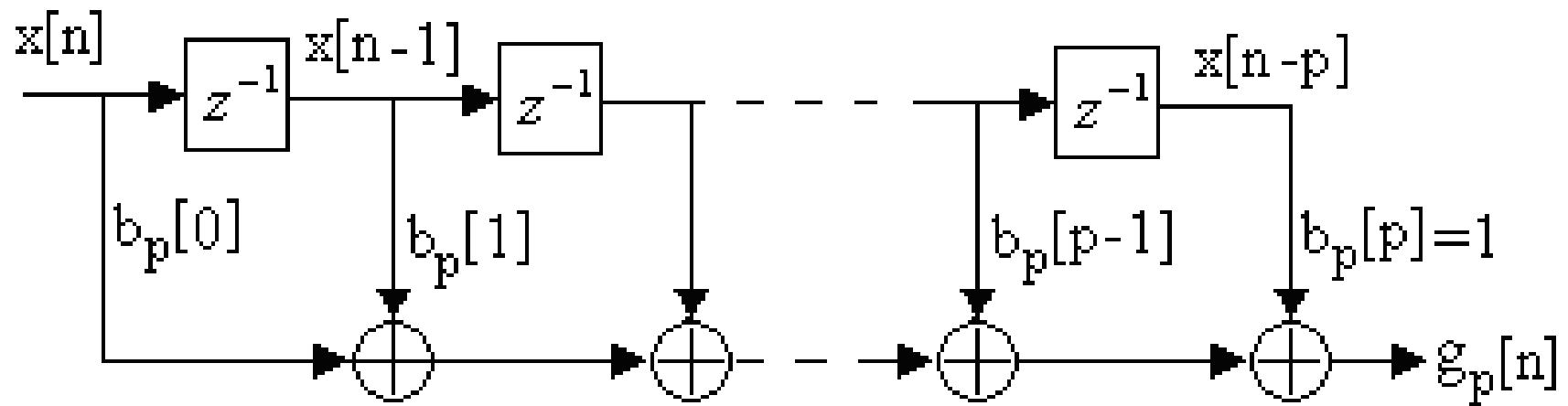


Fig. 5. Filtrul erorii de predicție înapoi

Predicție liniară înapoi (backward)

- Eroarea de predicție înapoi este

$$g_p[n] = x[n-p] + \sum_{k=0}^{p-1} b_p[k] x[n-k] = \quad (12)$$

$$= x[n-p] + \sum_{m=1}^p b_p[p-m] x[n-p+m]$$

- Valoarea sa pătratică medie este

$$E\left\{ g_p^2[n_i] \right\} \stackrel{not}{=} \xi_p^b \quad (13)$$

Predicție liniară înapoi (backward)

$$\begin{aligned}\xi_p^b = & E \left\{ x^2[n_i - p] + 2x[n_i - p] \sum_{m=1}^p b_p [p - m] x[n_i - p + m] + \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p b_p [p - m] b_p [p - l] x[n_i - p + m] x[n_i - p + l] \right\} = \\ & = \gamma_{xx}[0] + 2 \sum_{m=1}^p b_p [p - m] \gamma_{xx}[m] + \\ & + \sum_{m=1}^p \sum_{l=1}^p b_p [p - m] b_p [p - l] \gamma_{xx}[l - m]\end{aligned}\tag{14}$$

Predicție liniară înapoi (backward)

- La fel ca în cazul predicției înainte, eroarea pătratică medie de predicție înapoi este o funcție pătratică de coeficienții filtrului predictor.
- Valorile coeficienților pentru care aceasta prezintă un extrem, se obțin prin egalarea cu zero a derivatei sale în raport cu coeficienții filtrului, adică

$$\frac{\partial \xi_p^b(b_p[p-m])}{\partial b_p[p-m]} = 0 \quad (15)$$

$$\gamma_{xx}[m] = - \sum_{l=1}^p b_p[p-l] \gamma_{xx}[l-m], m = 1, \dots, p \quad (16)$$

Predicție liniară înapoi (backward)

- Extremul obținut este un minim

$$\frac{\partial^2 \xi_p^b(b_p[p-m])}{\partial (b_p[p-m])^2} = \gamma_{xx}[0] > 0$$

$$\min \left[\xi_p^b \right] = E_p^b = E_p^f$$

Coeficienții de reflexie optimi ai predictorului lattice înainte și înapoi

- S-a obținut un set de ecuații din care se pot obține coeficienții predictorului care minimizează valoarea pătratică medie a erorii de predicție.
- Eroarea de predicție înainte în treapta m a predictorului este

$$f_m[n] = f_{m-1}[n] + K_m g_{m-1}[n-1] \quad (17)$$

- Minimizarea erorii pătratice medii $\{E[f_m^2[n_i]]\}$ în raport cu coeficienții de reflexie impune calculul derivatei

$$\frac{\partial \{E[f_m^2[n_i]]\}}{\partial K_m} =$$

$$\frac{\partial \{E[f_{m-1}^2[n_i] + 2K_m f_{m-1}[n_i] g_{m-1}[n_i - 1] + K_m^2 g_{m-1}^2[n_i - 1]]\}}{\partial K_m} =$$

$$E\{2f_{m-1}[n_i]g_{m-1}[n_i - 1] + 2K_m g_{m-1}^2[n_i - 1]\} \quad (18)$$

Coeficienții de reflexie optimi ai predictorului lattice înainte și înapoi

$$K_m = \frac{-E[f_{m-1}[n_i]g_{m-1}[n_i - 1]]}{E[g_{m-1}^2[n_i - 1]]} = \frac{-E[f_{m-1}[n_i]g_{m-1}[n_i - 1]]}{\sqrt{E_{m-1}^f E_{m-1}^b}} \quad (19)$$

$$E_{m-1}^f = E_{m-1}^b = E[g_{m-1}^2[n_i - 1]] = E[f_{m-1}^2[n_i]] \quad (20)$$

- valorile optime ale coeficienților de reflexie ai predictorului lattice sunt egale cu coeficienții de corelație normalizați dintre erorile înainte și înapoi din lattice, cu semnul minus.
- Coeficienții $-K_m$ se mai numesc coeficienți de corelație parțială (PARCOR).

Coeficienții de reflexie optimi ai predictorului lattice înainte și înapoi

$$E[f_m^2[n_i]] = E[f_{m-1}^2[n_i] + 2K_m f_{m-1}[n_i] g_{m-1}[n_i - 1] + K_m^2 g_{m-1}^2[n_i - 1]] = \\ E[f_{m-1}^2[n_i]] + 2K_m E[f_{m-1}[n_i] g_{m-1}[n_i - 1]] + K_m^2 E[g_{m-1}^2[n_i - 1]] \quad (21)$$

- Eroarea pătratică medie minimă în formă recursivă

$$E_m^f = (1 - K_m^2) E_{m-1}^f \quad (22)$$

- $|K_m| \leq 1$ eroarea pătratică medie minimă dată de relația (22) este o secvență monoton descrescătoare.

Relația dintre un proces AR și predicția liniară

- Pentru un proces AR(p) secvența de autocorelație $\gamma_{xx}[m]$ este legată de parametrii $\{a_k\}$ ai procesului prin ecuațiile Yule-Walker

$$\gamma_{xx}[m] = \begin{cases} -\sum_{k=1}^p a_k \gamma_{xx}[m-k], & m > 0 \\ -\sum_{k=1}^p a_k \gamma_{xx}[m-k] + \sigma_w^2, & m = 0 \\ \gamma_{xx}^*[-m], & m < 0 \end{cases} \quad (23)$$

Relația dintre un proces AR și predicția liniară

- Ecuatiile corespunzătoare predictorului de ordin p sunt date în relațiile (7)

$$\gamma_{xx}[l] = - \sum_{k=1}^p a_p[k] \gamma_{xx}[l-k], l = 1 \dots p$$

- Observații:

- Parametrii $\{a_k\}$ ai procesului AR(p) sunt egali cu coeficienții predictorului $\{a_p[k]\}$ de ordin p .
- Eroarea pătratică medie minimă E_p^f a predictorului de ordinul p , este egală cu σ_w^2 , dispersia zgromotului alb.
- Filtrul erorii de predicție este un filtru de albire, care produce secvența de zgromot alb $w[n]$

Soluția ecuațiilor normale

- Minimizarea valorii pătratice medii a erorii de predicție înainte conduce la un sistem de ecuații numite ecuațiile normale (7). Acestea pot fi scrise compact în forma

$$\sum_{k=0}^p a_p[k] \gamma_{xx}[l-k] = 0, l = 1 \dots p, a_p[0] = 1 \quad (24)$$

- Eroarea pătratică medie minimă (EPMM) este dată de relația (8). Adăugând (8) la (24) se obțin ecuațiile normale extinse

$$\sum_{k=0}^p a_p[k] \gamma_{xx}[l-k] = \begin{cases} E_p^f, & l = 0 \\ 0, & l = 1, \dots, p \end{cases} \quad (25)$$



Soluția ecuațiilor normale

- Pentru un proces aleator AR(p), EPMM, $E_p^f = \sigma_w^2$. Există doi algoritmi eficienți de calcul pentru ecuațiile normale.
- Algoritmul Levison-Durbin, - potrivit prelucrării seriale.
- Algoritmul Schur calculează, de asemenea, coeficienții de reflexie și se pretează prelucrării paralele.
- Cei doi algoritmi folosesc proprietățile de simetrie Toeplitz ale matricei de autocorelație.

Algoritmul Levison-Durbin

$$a_m[k] = a_{m-1}[k] + K_m a_{m-1}^*[m-k] = a_{m-1}[k] + a_m[m] a_{m-1}^*[m-k]$$
$$k = 1, \dots, m-1, m = 1, \dots, p$$

$$\gamma_{xx}[m] + \sum_{k=1}^{m-1} a_{m-1}[k] \gamma_{xx}[m-k] \quad (26)$$
$$a_m[m] = -\frac{\gamma_{xx}[m]}{E_{m-1}^f}, E_m^f = (1 - |a_m[m]|^2) E_{m-1}^f$$

$$a_m[m] = K_m \qquad \qquad a_m[0] = 1$$

Relațiile recursive (26) sunt identice cu cele care dau coeficienții predictorului pe baza polinoamelor $A_m(z)$ și $B_m(z)$

Algoritmul Levison-Durbin

- K_m este coeficientul de reflexie pentru a m -a treaptă a predictorului lattice, deci algoritmul Levison-Durbin calculează coeficienții de reflexie pentru predicția lattice optimală, precum și coeficienții predictorului optimal FIR în forma directă.
- Pentru predictorul de ordinul m , EPMM este

$$\begin{aligned} E_m^f &= \gamma_{xx}[0] + \sum_{k=1}^m a_m[k] \gamma_{xx}[-k] = \\ &= \gamma_{xx}[0] + \sum_{k=1}^m (a_{m-1}[k] + a_m[m] a_{m-1}^*[m-k]) \gamma_{xx}[-k] = \\ &= E_{m-1}^f \left[1 - |a_m[m]|^2 \right] = E_{m-1}^f \left(1 - |K_m|^2 \right), m = 1, \dots, p \end{aligned} \tag{27}$$

Algoritmul Levinson-Durbin

- unde $E_0^f = \gamma_{xx}[0]$

$$|K_m| \leq 1$$

$$E_0^f \geq E_1^f \geq E_2^f \geq \dots \geq E_p^f \quad (28)$$

Filtre Wiener pentru filtrare și predicție

- În multe situații practice semnalele utile sunt afectate de perturbații cu caracter aditiv, motiv pentru care se pune problema proiectării unui filtru care să suprime componenta nedorită de zgomot, păstrând, în același timp, caracteristicile semnalului dorit.
- Se impune ca filtrul, caracterizat de răspunsul la impuls $h[n]$ să fie liniar, iar ieșirea să să aproximeze un semnal dorit. Situația este ilustrată în figura 6

Filtre Wiener pentru filtrare și predicție

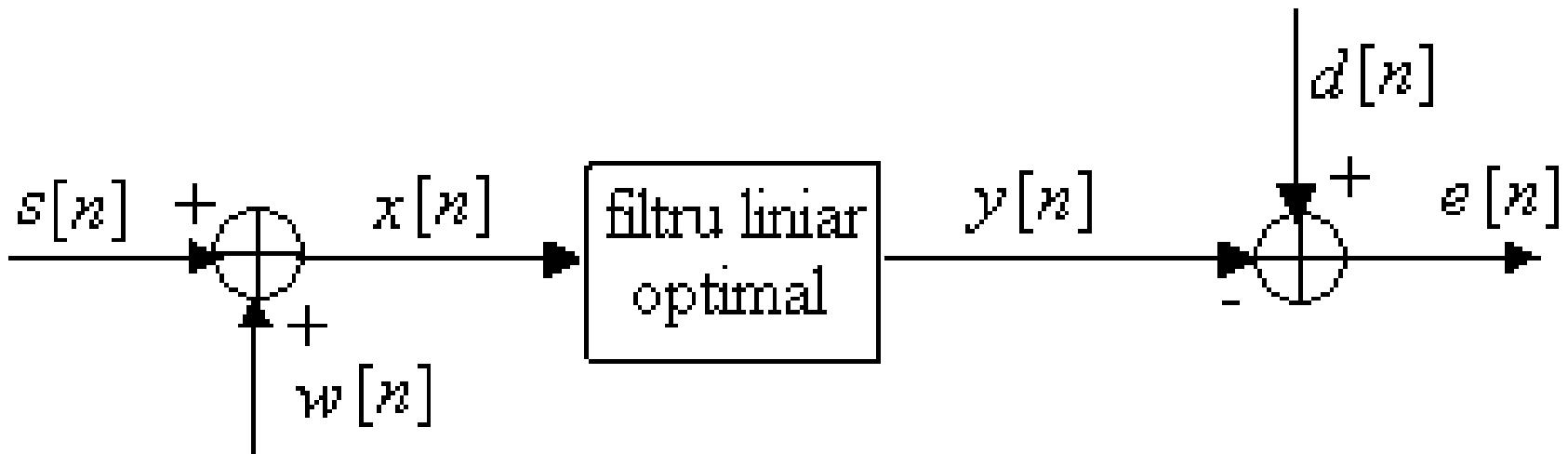


Figura 6. Model pentru estimarea liniară a unui semnal

Filtre Wiener pentru filtrare și predicție

- Unde

$s[n]$ - semnalul util

$w[n]$ - zgomot aditiv

$d[n]$ - semnal dorit

$x[n] = s[n] + w[n]$ - semnalul de intrare în filtru

$y[n]$ - ieșirea filtrului

$e[n] = d[n] - y[n]$ - secvența de eroare

Filtre Wiener pentru filtrare și predicție

- Se disting trei cazuri:
 1. $d[n] = s[n]$, situație cunoscută sub numele de filtrare;
 2. $d[n] = s[n + D], D > 0$, situație cunoscută sub numele de predicție, filtrare cu anticipare sau extrapolare;
 3. $d[n] = s[n - D], D > 0$, situație cunoscută sub numele de netezire, filtrare cu întârziere sau interpolare.
- Criteriul ales pentru optimizarea răspunsului la impuls al filtrului este cel de minimizare a erorii pătratice medii.

Filtre Wiener pentru filtrare și predicție

- Secvențele

$$\{s[n]\}, \{w[n]\}, \{d[n]\}$$

se presupun de medie zero și staționare în sens larg. Filtrul liniar optimal care minimizează eroarea pătratică medie se numește *filtru Wiener* și poate fi cu răspuns finit sau infinit la impuls.

Filtru Wiener cu răspuns finit la impuls

- Se presupune că filtrul cu răspuns finit la impuls are lungimea M și coeficienții $\{h[k], 0 \leq k \leq M - 1\}$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M-1} h[k]x[n-k] \quad (29)$$

- Valoarea pătratică medie a erorii dintre ieșirea dorită $d[n]$ și ieșirea filtrului, $y[n]$, este

$$\xi_M = E\{(e[n_i])^2\} = E\left\{\left(d[n_i] - \sum_{k=0}^{M-1} h[k]x[n_i - k]\right)^2\right\} \quad (30)$$

Filtru Wiener cu răspuns finit la impuls

- Condiția necesară din care se obține valoarea de extrem a erorii este:

$$\frac{\partial E\{(e[n_i])^2\}}{\partial h[k]} = 0, \quad 0 \leq k \leq M-1 \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E\{(e[n_i])^2\}}{\partial h[k]} &= \frac{\partial}{\partial h[k]} E\left\{ \left(d[n_i] - \sum_{k=0}^{M-1} h[k] x[n_i - k] \right)^2 \right\} = \\ &= E\left\{ \frac{\partial}{\partial h[k]} \left(d[n_i] - \sum_{k=0}^{M-1} h[k] x[n_i - k] \right)^2 \right\} = \\ &= -2E\left\{ \left(d[n_i] - \sum_{k=0}^{M-1} h[k] x[n_i - k] \right) (x[n_i - m]) \right\} = \\ &= -2 \left(\gamma_{xd}[m] - \sum_{k=0}^{M-1} h[k] \gamma_{xx}[k-m] \right) = 0, \quad 0 \leq m \leq M-1 \end{aligned} \quad (32)$$

Filtru Wiener cu răspuns finit la impuls

$$\sum_{k=0}^{M-1} h_o[k] \gamma_{xx}[k-m] = \gamma_{xd}[m], \quad 0 \leq m \leq M-1 \quad (33)$$

- ecuațiile Wiener Hopf
- Extremul erorii pătratice medii este un minim

$$\frac{\partial^2 E\{(e[n_i])^2\}}{\partial h[m] \partial h[k]} = 0, \text{ pentru } m \neq k$$

$$\frac{\partial^2 E\{(e[n_i])^2\}}{\partial h^2[m]} = \gamma_{xx}[0] > 0, \quad 0 \leq m \leq M-1 \quad (34)$$

Filtru Wiener cu răspuns finit la impuls

- Ecuațiile (33) poate fi exprimate în formă matriceală astfel:

$$[\Gamma_M][h_o] = [\gamma_d] \quad (35)$$

$$[\Gamma_M]_{M \times M} = \begin{bmatrix} \gamma_{xx}[0] & \gamma_{xx}[1] & \dots & \gamma_{xx}[M-1] \\ \gamma_{xx}[1] & \gamma_{xx}[0] & \dots & \gamma_{xx}[M-2] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{xx}[M-1] & \gamma_{xx}[M-2] & \dots & \gamma_{xx}[0] \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_{lk} = \gamma_{xx}[l-k] \quad [\gamma_d]_{M \times 1} = [\gamma_{xd}[0] \quad \gamma_{xd}[1] \quad \dots \quad \gamma_{xd}[M-1]]^T$$

$$\gamma_{xd}[l], l = 0, 1, \dots, M-1 \quad [h_o]_{M \times 1} = [h[0] \quad h[1] \quad \dots \quad h[M-1]]^T$$

Filtru Wiener cu răspuns finit la impuls

$$[h_0] = [\Gamma_M]^{-1} [\gamma_d] \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \min \xi_M &= E \left\{ \left(d[n_i] - \sum_{k=0}^{M-1} h_o[k] x[n_i - k] \right)^2 \right\} = \\ E \left\{ \left(d[n_i] - \sum_{k=0}^{M-1} h_o[k] x[n_i - k] \right) \left(d[n_i] - \sum_{m=0}^{M-1} h_o[m] x[n_i - m] \right) \right\} &= \\ \gamma_{dd}[0] - 2 \sum_{m=0}^{M-1} h_o[m] \gamma_{xd}[m] + \sum_{m=0}^{M-1} h_o[m] \sum_{k=0}^{M-1} h_o[k] \gamma_{xx}[m-k] &= \\ \gamma_{dd}[0] - \sum_{m=0}^{M-1} h_o[m] \gamma_{xd}[m] & \end{aligned} \quad (37)$$

Filtru Wiener cu răspuns finit la impuls

$$\min \xi_M = \gamma_{dd}[0] - [\gamma_d]^T [\Gamma_M]^{-1} [\gamma_d] \quad (38)$$

- Daca semnalul dorit a fi estimat este de forma

$$d[n] = s[n+D], \text{ cu } D \text{ întreg, fixat} \quad (39)$$

- Filtrul liniar optimal opereaza asupra semnalului observat afectat de zgomot aditiv

$$x[n] = s[n] + w[n] \quad (40)$$

- Filtrul optimal va fi de întârziere, dacă $D < 0$ și de anticipare, dacă $D > 0$.

Filtru Wiener cu răspuns finit la impuls

- Dacă semnalul $s[n]$ și zgomotul $w[n]$ sunt necorelate

$$\begin{aligned}\gamma_{xx}[k] &= \gamma_{ss}[k] + \gamma_{ww}[k] \\ \gamma_{xd}[m] &= \gamma_{ss}[m+D]\end{aligned}\tag{41}$$

iar ecuațiile Wiener Hopf sunt de forma

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{M-1} h_o[k] [\gamma_{ss}[m-k] + \gamma_{ww}[m-k]] &= \\ = \gamma_{ss}[m+D], m &= 0, \dots, M-1\end{aligned}\tag{42}$$

Proprietatea de ortogonalitate a filtrului optimal

- Filtrul liniar optimal ce satisface ecuația Wiener-Hopf (33) are o proprietate statistică importantă, și anume, aceea că eroarea pătratică medie este minimă, dacă coeficienții filtrului $\{h[n]\}$ au fost aleși astfel încât eroarea de estimare și datele $x[n]$ sunt ortogonale, adică:

$$E\{x[n_i - m]e[n_i]\} = 0, 0 \leq m \leq M - 1 \quad (43)$$

$$e[n] = d[n] - y[n] = d[n] - \sum_{m=0}^{M-1} h[m]x[n-m] \quad (44)$$

Filtru Wiener cu răspuns finit la impuls

- Egalând cu zero derivata erorii pătratice medii în raport cu $h[m]$ rezultă

$$\frac{\partial E[e^2[n_i]]}{\partial h[m]} = 2E\left\{ \frac{\partial e[n_i]}{\partial h[m]} e[n_i] \right\} = 0 \quad (45)$$

$$\frac{\partial e[n]}{\partial h[m]} = -\frac{\partial}{\partial h[m]} \sum_{m=0}^{M-1} h[m]x[n-m] = -x[n-m] \quad (46)$$

$$E\{x[n_i - m]e[n_i]\} = 0$$

Determinarea funcției pondere a filtrelor Wiener cu răspuns infinit la impuls (IIR) la recepționarea secvenței de zgomot alb

- În paragraful de față, filtrele, ca și datele se consideră infinite ca durată. Ieșirea filtrului IIR se calculează cu relația

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k] \quad (47)$$

- Coeficienții filtrului rezultă din minimizarea erorii pătratice medii dintre semnalul de ieșire dorit și ieșirea filtrului

$$\xi_{\infty} = E\{(e[n_i])^2\} = E\left\{ (d[n_i] - \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n_i - k])^2 \right\} \quad (48)$$

Determinarea funcției pondere a filtrelor Wiener cu răspuns infinit la impuls (IIR) la recepționarea secvenței de zgomot alb

- Aplicând principiul ortogonalității

$$\sum_{k=0}^{\infty} h_o[k] \gamma_{xx}[m-k] = \gamma_{xd}[m], m \geq 0 \quad (49)$$

- Eroarea pătratică medie minimă se obține din relația (37) pentru $M \rightarrow \infty$, adică

$$EPMM_{\infty} = \min_h \xi_{\infty} = \gamma_{dd}[0] - \sum_{m=0}^{\infty} h_o[m] \gamma_{xd}[m] \quad (50)$$

- Ecuatiile Wiener-Hopf (49) nu pot fi rezolvate direct cu ajutorul tehniciilor oferite de transformata Z, deoarece ecuațiile sunt valabile numai pentru $m \geq 0$

Determinarea funcției pondere a filtrelor Wiener cu răspuns infinit la impuls (IIR) la recepționarea secvenței de zgomot alb

- Filtrul optimal Wiener-Hopf IIR va fi determinat cu ajutorul unui filtru de albire căruia i se aplică procesul stationar $\{x[n]\}$
- În cazul recepționării unei secvențe de zgomot alb, $w[n]$, fie $\gamma_{ww}[m]$ funcția de autocorelație a acesteia.
 $\gamma_{wd}[m]$ funcția de corelație dintre secvența recepționată $w[n]$ și secvența dorită a fi estimată $d[n]$
 $h_{ow}[k]$ funcția pondere a unui filtru optimal IIR ce satisfac ecuația Wiener-Hopf .

Determinarea funcției pondere a filtrelor Wiener cu răspuns infinit la impuls (IIR) la recepționarea secvenței de zgomot alb

$$\sum_{k=0}^{\infty} h_{ow}[k] \gamma_{ww}[m-k] = \gamma_{wd}[m], \quad m \geq 0 \quad (51)$$

$$\gamma_{ww}[m-k] = \sigma_w^2 \delta[m-k] \quad (52)$$

$$\sigma_w^2 h_{ow}[m] = \gamma_{wd}[m], \quad m \geq 0 \quad (53)$$

- Fie ${}^+\gamma_{wd}[m]$ partea lui $\gamma_{wd}[m]$ pentru $m \geq 0$ și $-\gamma_{wd}[m]$ pentru $m < 0$.

$$h_{ow}[m] = \begin{cases} \frac{{}^+\gamma_{wd}[m]}{\sigma_w^2}, & \text{pentru } m \geq 0 \\ 0, & \text{pentru } m < 0 \end{cases} \quad (54)$$

Determinarea funcției pondere a filtrelor Wiener cu răspuns infinit la impuls (IIR) la recepționarea secvenței de zgomot alb

- Aplicând transformata Z relației (54), rezultă

$$\begin{aligned} Z \left\{ h_{ow} [m] \right\} &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_{ow} [m] z^{-m} = H_{ow}(z) = \\ &= \frac{1}{\sigma_w^2} \sum_{m=0}^{\infty} {}^+ \gamma_{wd} [m] z^{-m} = \frac{1}{\sigma_w^2} \cdot {}^+ \Gamma_{wd}(z) \end{aligned} \quad (55)$$

Filtru Wiener cauzal cu răspuns infinit la impuls (IIR)

- Un proces aleator stationar $x[n]$, cu funcția de autocorelație $\gamma_{xx}[k]$ și densitatea spectrală de putere $\Gamma_{xx}(f)$ poate fi obținut la ieșirea unui filtru cu funcția de sistem $G(z)$ și răspunsul la impuls $g[n]$, la intrarea căruia se aplică zgomot alb $w[n]$.

Procesul $x[n]$ este albit de filtrul cu funcția de sistem $1/G(z)$

- Funcția $G(z)$ este partea de fază minimă obținută din factorizarea spectrală a lui

$$\Gamma_{xx}(z) = \sigma_w^2 G(z) G(z^{-1}) \quad (56)$$

Filtru Wiener cauzal cu răspuns infinit la impuls (IIR)

- RC pentru $G(z)$ este $|z| > r_1$ cu $r_1 < 1$
- filtrul optimal Wiener $H_o(z)$ se consideră a fi o cascadă formată dintr-un filtru de albire $\frac{1}{G(z)}$ și un alt filtru caracterizat de funcția de sistem $H_{ow}(z)$

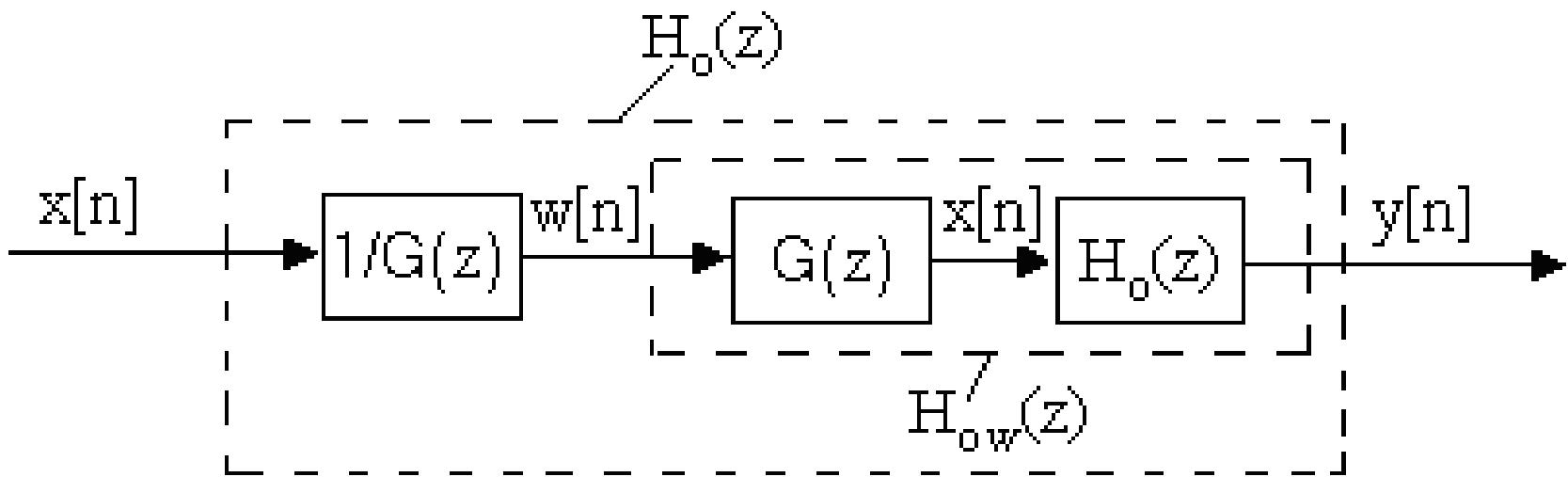


Figura 7. Filtru optimal Wiener

Filtru Wiener cauzal cu răspuns infinit la impuls (IIR)

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h_{ow}[k]w[n-k] \quad (57)$$

$$e[n] = d[n] - y[n]$$

aplicarea principiului ortogonalității determină

$$\sum_{k=0}^{\infty} h_{ow}[k] \gamma_{ww}[m-k] = \gamma_{wd}[m], m \geq 0 \quad (58)$$

- Optimalitatea filtrului $H_{ow}(z)$ asigură și optimalitatea filtrului $H_o(z)$, deoarece

Filtru Wiener cauzal cu răspuns infinit la impuls (IIR)

$$\begin{aligned} E\{x[n_i]e[n_i + m]\} &= \\ = E\left\{\sum_{p=0}^{\infty} g[p]w[n_i - p]\left(d[n_i + m] - \sum_{k=0}^{\infty} h_{ow}[k]w[n_i + m - k]\right)\right\} &= \\ \sum_{p=0}^{\infty} g[p]\left[E\left\{(w[n_i - p]d[n_i + m]) - \sum_{k=0}^{\infty} h_{ow}[k]w[n_i - p]w[n_i + m - k]\right\}\right] &= \\ \sum_{p=0}^{\infty} g[p]\left[\gamma_{wd}[m + p] - \sum_{k=0}^{\infty} h_{ow}[k]\gamma_{ww}[m + p - k]\right] &= 0 \end{aligned} \tag{59}$$

Filtru Wiener cauzal cu răspuns infinit la impuls (IIR)

- Deoarece $w[n]$ este zgomot alb, rezultă că $\gamma_{ww}[m-k] = 0$ cu excepția cazului în care $m=k$.

$$h_{ow}[m] = \frac{\gamma_{wd}[m]}{\gamma_{ww}[0]} = \frac{\gamma_{wd}[m]}{\sigma_w^2}, m \geq 0 \quad (60)$$

- Transformata Z a secvenței $h_{ow}[m]$ se determină cu relația

$$H_{ow}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h_{ow}[k] z^{-k} = \frac{1}{\sigma_w^2} \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{wd}[k] z^{-k} \quad (61)$$

Filtru Wiener cauzal cu răspuns infinit la impuls (IIR)

- Transformata Z bilaterală a secvenței $\gamma_{wd}[k]$ se notează cu $\Gamma_{wd}(z)$

$$\Gamma_{wd}(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_{wd}[k] z^{-k} \quad (62)$$

iar partea sa cauzală se notează cu

$${}^+ [\Gamma_{wd}(z)] = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{wd}[k] z^{-k} \quad (63)$$

$$H_{ow}(z) = \frac{1}{\sigma_w^2} {}^+ [\Gamma_{wd}(z)] \quad (64)$$

Filtru Wiener cauzal cu răspuns infinit la impuls (IIR)

$$w[n] = \sum_{k=0}^{\infty} v[k]x[n-k] \quad (65)$$

$$\frac{1}{G(z)} = V(z) = \sum_{k=0}^{\infty} v[k]z^{-k} \quad (66)$$

$$\gamma_{wd}[k] = E\{w[n_i]d[n_i + k]\} = \quad (67)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} v[m]E\{x[n_i - m]d[n_i + k]\} = \sum_{m=0}^{\infty} v[m]\gamma_{xd}[k + m]$$

Filtru Wiener cauzal cu răspuns infinit la impuls (IIR)

- Transformata Z a functiei de corelatie $\gamma_{wd}[k]$ este:

$$\begin{aligned}\Gamma_{wd}(z) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^{\infty} v[m] \gamma_{xd}[k+m] \right] z^{-k} = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} v[m] \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_{xd}[k+m] z^{-k} = \sum_{m=0}^{\infty} v[m] z^m \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_{xd}[k] z^{-k} = \\ &= V(z^{-1}) \Gamma_{xd}(z) = \frac{\Gamma_{xd}(z)}{G(z^{-1})}\end{aligned}\tag{68}$$

Filtru Wiener cauzal cu răspuns infinit la impuls (IIR)

$$H_{ow}(z) = \frac{1}{\sigma_w^2} \left[\frac{\Gamma_{xd}(z)}{G(z^{-1})} \right]^+ \quad (69)$$

$$H_o(z) = \frac{H_{0w}(z)}{G(z)} = \frac{1}{\sigma_w^2 G(z)} \left[\frac{\Gamma_{xd}(z)}{G(z^{-1})} \right]^+ \quad (70)$$

$$\gamma_{dd}[k] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \Gamma_{dd}(z) z^{k-1} dz \quad (71)$$

Filtru Wiener cauzal cu răspuns infinit la impuls (IIR)

$$\gamma_{dd}[0] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{\Gamma_{dd}(z)}{z} dz = \sigma_d^2 \quad (72)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} h_o[k] \gamma_{xd}[k] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C H_o(z) \Gamma_{xd}(z^{-1}) z^{-1} dz \quad (73)$$

$$EPMM_{\infty} = \frac{1}{2\pi j} \oint_C [\Gamma_{dd}(z) - H_o(z) \Gamma_{xd}(z^{-1})] z^{-1} dz \quad (74)$$

Filtru Wiener IIR necauzal

- Dacă se renunță la constrângerea impusă filtrului Wiener IIR de a fi cauzal, ieșirea acestuia devine

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \quad (75)$$

- Acest filtru este nerealizabil și furnizează estimatul $\hat{d}[n] = y[n]$ al semnalului dorit $d[n]$.

Aplicând principiul ortogonalității, rezultă ecuațiile Wiener-Hopf

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\gamma_{xx}[l-k] = \gamma_{xd}[l], -\infty < l < \infty \quad (76)$$

Exemplul 1.

Fie semnalul $x[n] = s[n] + w[n]$, unde $s[n]$ este un proces AR(1), caracterizat de ecuația cu diferențe

$$s[n] = \alpha s[n-1] + v[n]$$

unde $\alpha = 0,6$, $v[n]$ este zgomot alb cu dispersia $\sigma_v^2 = 0,64$, iar $w[n]$ este zgomot alb cu dispersia $\sigma_w^2 = 1$. Procesele $v[n]$ și $w[n]$ sunt necorelate.

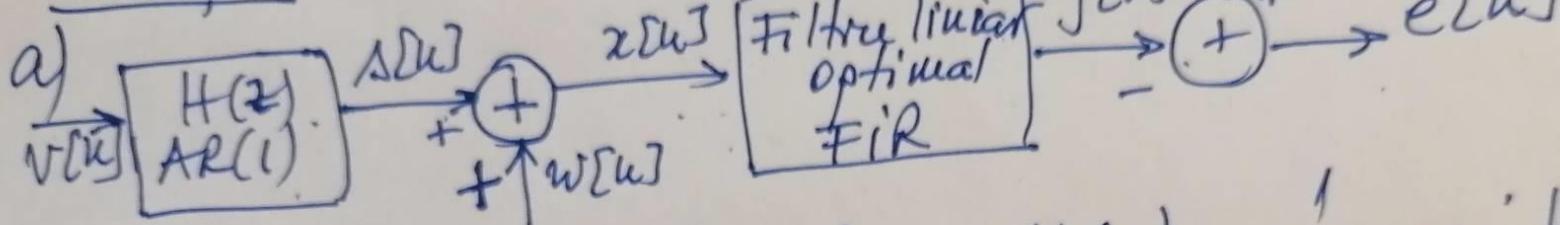
a) Să se determine funcțiile de autocorelație

$$\gamma_{ss}[n] \text{ și } \gamma_{sx}[n];$$

b) Să se determine răspunsul la impuls al filtrei Wiener FIR, de lungime $M=2$, pentru estimarea semnalului $s[n]$ din $x[n]$.

c) Să se determine eroarea patratică medie minimă de estimare, pentru $M=2$.

(2)

Solutie

$$\Gamma_{ss}(z) = H(z) \cdot H(z^{-1}) \cdot \nabla_V^2; \quad H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}; \quad H(z^{-1}) = \frac{1}{1 - az}$$

$$\Gamma_{ss}(z) = \nabla_V^2 \frac{1}{(1 - az^{-1})(1 - az)} = \nabla_V^2 \frac{-\frac{1}{a}z^2}{(z - a)(z - \frac{1}{a})}$$

$$\frac{1}{(z - a)(z - \frac{1}{a})} = \frac{A}{z - a} + \frac{B}{z - \frac{1}{a}}; \quad A = \left. \frac{1}{z - \frac{1}{a}} \right|_{z=a} = \frac{1}{a - \frac{1}{a}} = \frac{1}{\frac{a-1}{a}} = \frac{a}{a-1}$$

$$B = \left. \frac{1}{z-a} \right|_{z=\frac{1}{a}} = \frac{1}{\frac{1}{a}-a} = \frac{a}{1-a^2}$$

$$\Gamma_{ss}(z) = \nabla_V^2 \left(\frac{z}{z-a} - \frac{z}{z-\frac{1}{a}} \right)$$

$$\gamma_{ss}[\omega] = \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \Gamma_{ss}(z) \right\} = \frac{\sigma_v^2}{1-\alpha^2} \left(a^{\omega} u[\omega] + \left(\frac{1}{a}\right)^{\omega} u[-\omega] \right) \quad (3)$$

$$= \frac{\sigma_v^2}{1-\alpha^2} \cdot \frac{1}{a} \cdot$$

pentru $a = 0,6$ și $\sigma_v^2 = 0,64 \rightarrow \gamma_{ss}[\omega] = \frac{0,64}{0,64} \cdot 0,6 = \underline{\underline{0,6}}$

$$\gamma_{xx}[\omega] = E(x[k_i] x[k_i + \omega]) =$$

$$E((s[k_i] + w[k_i])(s[k_i + \omega] + w[k_i + \omega])) =$$

$$\gamma_{ss}[\omega] + \gamma_{ws}[\omega] + \gamma_{sw}[\omega] + \gamma_{ww}[\omega] = \gamma_{ss}[\omega] + \gamma_{ww}[\omega]$$

$$\gamma_{ww}[\omega] = \sigma_w^2 \cdot \delta[\omega]$$

$$\gamma_{xx}[\omega] = \gamma_{ss}[\omega] + \gamma_{ww}[\omega] = 0,6^{\underline{\omega}} + \sigma_w^2 \delta[\omega] =$$

$$= 0,6^{\underline{\omega}} + \delta[\omega]$$

(4)

b) pentru $M=2$, ec. W-H se scrie ca

$$\textcircled{1} \sum_{k=0}^1 h_0[k] r_{xx}[l-k] = r_{dx}[l]; \quad l=0, 1.$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} r_{xx}[k] = r_{ss}[k] + r_{ww}[k] \\ r_{dx}[k] = E(d[n_i] x[n_i+k]) = E(d[n_i] w[n_i-k]) = r_{ss}[k+d] \end{cases}$$

Care relațiiile (2), rel. 1 devin

$$\sum_{k=0}^1 h_0[k] (r_{ss}[l-k] + r_{ww}[l-k]) = r_{ss}[l]$$

$$\begin{bmatrix} r_{xx}[0] & r_{xx}[-1] \\ r_{xx}[1] & r_{xx}[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_0[0] \\ h_0[1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{ss}[0] \\ r_{ss}[1] \end{bmatrix}$$

$$r_{xx}[0]=2; \quad r_{xx}[-1]=r_{xx}[1]=0,6$$

$$r_{ss}[0]=1; \quad r_{ss}[1]=0,6$$

(5)

$$\begin{bmatrix} 2 & 0,6 \\ 0,6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_0[0] \\ h_0[1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2h_0[0] + 0,6h_0[1] = 1 \\ 0,6h_0[0] + 2h_0[1] = 0,6 \end{cases} \quad h_0[0] = \frac{1 - 0,6h_0[1]}{2}.$$

$$\frac{0,6 - 0,36h_0[1]}{2} + 2h_0[1] = 0,6$$

$$0,6 - 0,36h_0[1] + 4h_0[1] = 1,2 \rightarrow 3,64h_0[1] = 0,6$$

$$h_0[1] = \frac{0,6}{3,64} = 0,164; \quad h_0[0] = \frac{1 - 0,6 \cdot 0,164}{2} = 0,4905.$$

c) $EPMH_2 = \gamma_{ss}[0] - \gamma_{ss}[0]h[0] - \gamma_{ss}[1]h[1] =$
 $1 - 0,4505 - (0,164) \cdot (0,6) = \underline{\underline{0,45}}$

Exemplul 2.

Fie semnalul $x[n] = s[n] + \alpha[n]$, unde $s[n]$ este un proces AR(1), caracterizat de ecuația cu diferențe

$$s[n] = \alpha s[n-1] + v[n] \quad (1)$$

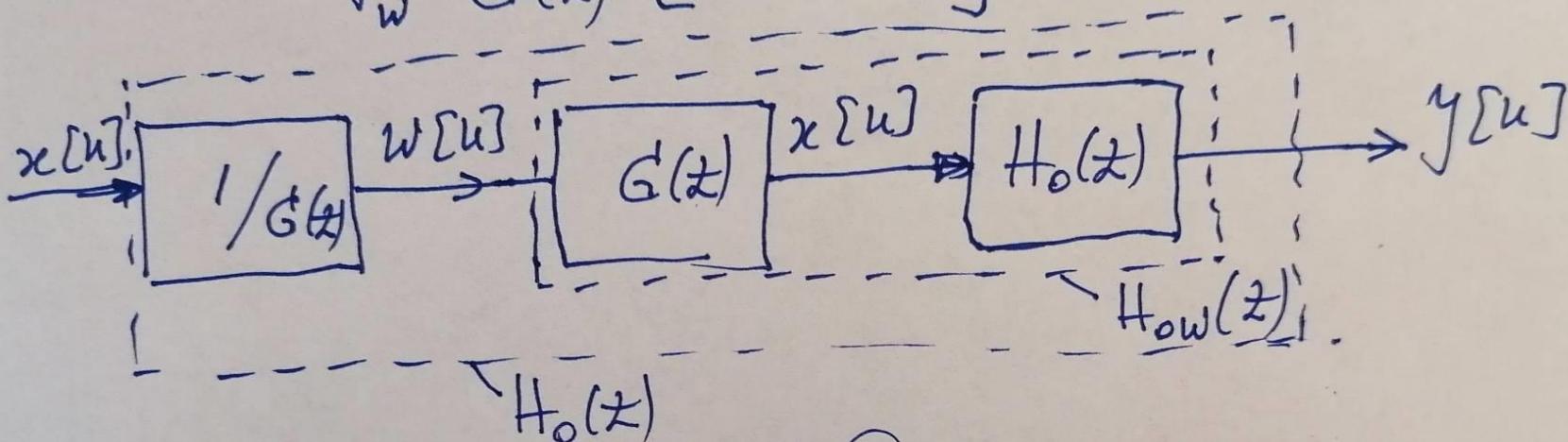
unde $\alpha = 0,6$; $v[n]$ este proces alb cu dispersie $\sigma_v^2 = 0,64$, iar $\alpha[n]$ este proces alb cu dispersie $\sigma_\alpha^2 = 1$. Procesele $v[n]$ și $\alpha[n]$ sunt necorelate

Să se determine

- Functia de sistem
- Functia pondere
- Ecuarea patratica medie minima a filtrului optimal IIR causal.

$$H_o(z) = \frac{1}{\sqrt{w^2 G(z)}} + \left[\frac{\Gamma_{xd}(z)}{G(z^{-1})} \right] \quad (2)$$

(7)

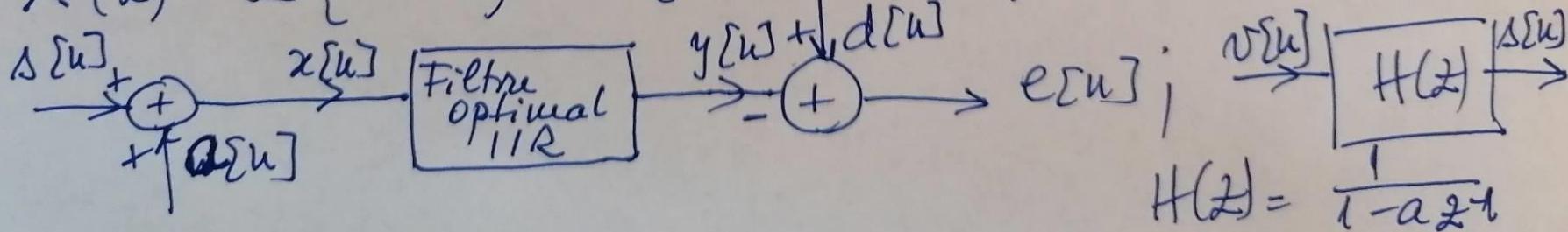


$$\Gamma_{xx}(z) = \sqrt{w^2 \cdot G(z) \cdot G(z^{-1})} \quad (3)$$

$$\Gamma_{xd}(z) = \mathbb{Z}\{r_{xd}[k]\} = \mathbb{Z}\{r_{ss}[k]\} = \Gamma_{ss}(z) \quad (4)$$

permet $d[u] = s[u]$

$$X(z) = \mathbb{Z}\{x[u]\} = \mathbb{Z}\{s[u] + d[u]\} = S(z) + D(z) \quad (5)$$



$$\Gamma_{xx}(z) = X(z) \cdot X(z^{-1}) = (S(z) + A(z)) (S(z^{-1}) + A(z^{-1})) = ⑧$$

$$= S(z) \cdot S(z^{-1}) + A(z) \cdot A(z^{-1}) = \Gamma_{ss}(z) + \nabla_a^2 \quad (6)$$

deorece $\Gamma_{sq}[u] = \Gamma_{as}[u] = 0$.

$$\Gamma_{ss}(z) = \nabla_v^2 \cdot H(z) \cdot H(z^{-1}) = \frac{\nabla_v^2}{(1-az^{-1})(1-az)} \quad (7).$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{xx}(z) &= \frac{\nabla_v^2}{(1-az^{-1})(1-az)} + \nabla_a^2 = \frac{0,64}{(1-0,6z^{-1})(1-0,6z)} + 1 = \\ &= \frac{0,64 + -0,6z - 0,6z^{-1} + 0,36}{(1-0,6z^{-1})(1-0,6z)} = \frac{C(1-bz^{-1})(1-bz)}{(1-0,6z^{-1})(1-0,6z)} \quad (8) \\ &= \frac{C(1-bz-bz^{-1}+b^2)}{(1-0,6z^{-1})(1-0,6z)}; \text{ prin identificare } \Rightarrow \\ &\qquad C(1+b^2)=2 \quad C = \frac{2}{1+b^2}. \\ &\Rightarrow 2b = 0,6 + 0,6b^2 \rightarrow b_1 = 3; b_2 = \frac{1}{3} \rightarrow C = 1,8 \quad \frac{2,8}{1+b^2} = 0,6 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Gamma_{xx}(z) = 1,8 \frac{\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{3}z\right)}{(1 - 0,6z^{-1})(1 - 0,6z)} \quad (9).$$

(3) = (9). $\Rightarrow \Gamma_w^2 = 1,8; G(z) = \frac{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}{1 - 0,6z^{-1}}; G(z) = \frac{1 - \frac{1}{3}z}{1 - 0,6z}$

$$\Gamma_{xd}(z) = \Gamma_{ss}(z) = \frac{0,64}{(1 - 0,6z^{-1})(1 - 0,6z)} \quad (10); \Gamma_{dd}(z) = \Gamma_{ss}(z) \quad (10)$$

Julocenium in rel.(2)

$$\frac{\Gamma_{xd}(z)}{G(z^{-1})} = \frac{0,64}{(1 - 0,6z^{-1})(1 - 0,6z)} \cdot \frac{1 - 0,6z}{1 - \frac{1}{3}z} = \frac{0,64}{(1 - 0,6z^{-1})(1 - \frac{1}{3}z)}$$

$$= \frac{0,64z}{(z - 0,6)(1 - \frac{1}{3}z)} = 0,64 \left(\frac{A}{z - 0,6} + \frac{B}{1 - \frac{1}{3}z} \right) z \quad (11)$$

$$A = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z} \Big|_{z=0,6} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3} \cdot 0,6} = \frac{1}{1 - 0,2} = \frac{1}{0,8}$$

$$B = \frac{1}{z - 0,6} \Big|_{z=\frac{1}{3}} = \frac{1}{2,4}$$

Julocenium
in (11) = }

(10)

$$\frac{F_{xd}(z)}{G(z^{-1})} = \frac{0,8z}{z-0,6} + \frac{\frac{0,8}{3}z}{z-\frac{1}{3}z} ; + \left[\frac{F_{xd}(z)}{G(z^{-1})} \right] = \frac{0,8z}{z-0,6} \quad (12).$$

Utilizam în (2) pe $G(z)$ și (12) \Rightarrow

$$H_o(z) = \frac{1}{1,8 \frac{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}{1 - 0,6z^{-1}}} \cdot \frac{0,8z}{z-0,6} = \frac{\cancel{z-0,6}}{1,8(z-\frac{1}{3})} \cdot \frac{\cancel{0,8z}}{\cancel{z-0,6}} = \\ = \frac{\frac{4}{9}}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} \quad (13).$$

$$h_o[u] = \mathcal{Z}^{-1}\{H_o(z)\} = \frac{4}{9} \left(\frac{1}{3}\right)^u u[u] \quad (14).$$

$$c) EPMM_{\infty} = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \left(\Gamma_{dd}(z) - H_0(z) \Gamma_{xd}(z^{-1}) \right) z^{-1} dz =$$

(11)

$$= \sum_{\text{toti poliedri } c} \operatorname{Res} \left\{ \left[\Gamma_{dd}(z) - H_0(z) \Gamma_{xd}(z^{-1}) \right] z^{-1} \right\} \bullet (15).$$

$$\begin{aligned} EPMM_{\infty} &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{0,64 z^{-1}}{(1-0,6z^{-1})(1-0,6z)} - \frac{\frac{4}{9}}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} \cdot \frac{0,64 z^{-1}}{(1-0,6z^{-1})(1-0,6z)} dz = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{0,64 z^{-1}}{(1-0,6z^{-1})(1-0,6z)} \left(1 - \frac{\frac{4}{9}}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} \right) dz = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{0,64 z^{-1} \cdot \frac{5}{9}(1-0,6z^{-1})}{(1-0,6z^{-1})(1-0,6z)(1-\frac{1}{3}z^{-1})} dz \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{0,356 z^{-1}}{(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1-0,6z)} dz = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{\frac{-0,356}{0,6} dz}{(z-\frac{1}{3})(z-\frac{1}{0,6})} \\ &\quad \operatorname{Res} \left(\frac{\frac{-0,356}{0,6}}{(z-\frac{1}{3})(z-\frac{1}{0,6})} \right) = \left. \frac{\frac{-0,356}{0,6}}{z-\frac{1}{0,6}} \right|_{z=\frac{1}{3}} = \underline{\underline{0,445}}. \end{aligned}$$

Exemplul 3

12

În condițiile exemplului precedent, să se determină a) funcția de sistem, b) funcția pondere și c) eroarea patologică medie minimă a fișorului optimal îiR necesară.

Soluție

$$a) H_{uc}(z) = \frac{\Gamma_{xd}(z)}{\Gamma_{xx}(z)} \quad (16).$$

Introducere în (16) rel. (9) și (10). \Rightarrow

$$H_{uc}(z) = \frac{\frac{0,64}{(1-0,6z^{-1})(1-0,6z)}}{1,8 \cdot \frac{(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z)}{(1-0,6z^{-1})(1-0,6z)}} = \frac{0,3555}{(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z)} \quad (17).$$

$$b) h_{uc}[u] = \mathbb{Z}^{-1} \left\{ H_{uc}(z) \right\}. \quad (18).$$

$$\begin{aligned}
 H_{uc}(z) &= 0,3555 \cdot \frac{1}{(1 - \frac{1}{3}z^{-1})(1 - \frac{1}{3}z)} = 0,3555 \cdot \frac{-32}{(z - \frac{1}{3})(z - 3)} = \\
 &= 0,3555 \cdot \frac{1}{(1 - \frac{1}{3})} \left(\frac{\frac{2}{z}}{z - \frac{1}{3}} - \frac{\frac{2}{z}}{z - 3} \right); h_{uc} = 0,399 \left(\frac{1}{3} u[u] + 3 u \right) \\
 &= 0,399 \cdot \left(\frac{1}{3} \right) \overline{u[u]}
 \end{aligned}$$

$$c) EPMH_{uc} = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \left(R_{dd}(z) - H_{uc}(z) R_{ed}(z) \right) z^{-1} dz \quad (19).$$

Julveanum in (19) rel. (10') & (10) \Rightarrow

$$\begin{aligned}
 EPMH_{uc} &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C \left(R_{ss}(z) - H_{uc}(z) R_{ss}(z^{-1}) \right) z^{-1} dz = \\
 &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C \left(R_{ss}(z) [1 - H_{uc}(z)] \right) z^{-1} dz \quad (20), \text{ deoarece } R_{ss}(z)
 \end{aligned}$$

Preleucău integrandul relației (20). \Rightarrow

$$\Gamma_{ss}(z) [1 - H_{uc}(z)] \cdot z^{-1} = \frac{0,64}{(1-0,6z)(1-0,6z)} \left(1 - \frac{\frac{16}{45}}{(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z)} \right) \cdot z^{-1} =$$

$$= \frac{0,64 \cdot z}{(z-0,6)(-0,6)(z-\frac{1}{0,6})} \left(1 - \frac{\frac{16}{45}z}{(z-\frac{1}{3})(-\frac{1}{3})(z-3)} \right) \cdot z^{-1} =$$

$$= \frac{-\frac{0,64}{0,6} \cdot z}{(z-0,6)(z-\frac{1}{0,6})} \cdot \frac{z^2 - 3z - \frac{1}{3}z + 1 + \frac{48}{45}z}{(z-\frac{1}{3})(z-3)} \cdot z^{-1} = \frac{-\frac{64}{60}}{(z-0,6)(z-\frac{1}{0,6})} \cdot \frac{z^2 - \frac{34}{15}z + 1}{(z-\frac{1}{3})(z-3)}$$

$$= \frac{-\frac{16}{15}}{(z-0,6)(z-\frac{1}{0,6})} \cdot \frac{(z-0,6)(z-\frac{1}{0,6})}{(z-\frac{1}{3})(z-3)} = \frac{-\frac{16}{15}}{(z-\frac{1}{3})(z-3)}.$$

In interiorul cercului unitate există numai un pol $z = \frac{1}{3}$

Rez. $\frac{-\frac{16}{15}}{(z-\frac{1}{3})(z-3)} \Big|_{z=\frac{1}{3}} = \frac{-\frac{16}{15}}{\frac{1}{3}-3} = \frac{-\frac{16}{15}}{-8} = \frac{2}{5} = 0,4.$

Alăs. $EPMH_{uc} < EPMH_\infty < EPMH_2. (0,4 < 0,445 < 0,45)$