Matematica Discreta - Ammissione all'orale: Appello 1

Domanda 1 Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la funzione definita ponendo:

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{se } n \text{ è pari,} \\ 3n+1, & \text{se } n \text{ è dispari,} \end{cases}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora $f^{-1}(\{2,4,7\})$ è uguale a:

(a) $\emptyset$
(b) $\{1,2,22\}$
(c) $\{4,8,14\}$
(d) $\{2,4,8,14\}$
(e) Nessuna di queste

Domanda 2 Sia $f \in S_9$ definita ponendo $f = 3\,2\,1\,9\,8\,7\,6\,5\,4$. Sia $k \in \mathbb{P}$ il più piccolo intero positivo tale che

$$\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k} = 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9.$$

Allora k è uguale a:

(a) 2
(b) 3
(c) 4
(d) 5
(e) Nessuna di queste

Domanda 3 Lo scrittore Francois de la Rochefoucauld disse una volta che:

"Chi non vive senza follie non è savio"

Consideriamo i predicati

$$S(x) := x \text{ è savio}$$

e

$$V(x) := x \text{ vive senza follie}$$

(dove x è nell'universo delle persone). Allora un predicato logicamente equivalente all'affermazione di de la Rochefoucauld è:

(a) $\forall x.(S(x) \to V(x))$

(b) $\forall x.(S(x) \vee V(x))$

(c) $\forall x.((\neg V(x)) \to S(x))$

(d) $\neg(\exists x.(V(x) \wedge S(x)))$

(e) Nessuna di queste

Domanda 4 Siano p, q, r proposizioni. Consideriamo la proposizione composta:

$$(p \to (\neg q)) \vee r$$

Allora una proposizione composta logicamente equivalente alla sua negazione logica è:

(a) $(\neg p) \vee (\neg q) \vee r$

(b) $p \wedge q \wedge (\neg r)$

(c) $((\neg q) \to p) \vee r$

(d) $(p \wedge q) \vee (\neg r)$

(e) Nessuna di queste

Domanda 5 Sia $n \in \mathbb{P}$ e sia $n = a_k a_{k-1} \cdots a_0$ la sua espressione in base 7 (quindi, $n = a_k 7^k + a_{k-1} 7^{k-1} + \cdots + a_1 7 + a_0$ con $0 \leq a_k, \ldots, a_0 \leq 6$). Allora è sempre vero che:

(a) $3|n$ se e solo se $3|a_0$

(b) $3|n$ se e solo se $3|(a_k + \cdots + a_0)$

(c) $3|n$ se e solo se $3|(a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^k a_0)$

(d) $3|n$ se e solo se $3|a_k$

(e) Nessuna di queste

Domanda 6 State comunicando con il codice RSA. Avete due interlocutori: A e B. Le chiavi pubbliche sono $n = 913$ ed $e = 81$ (A), e $n = 2993$ ed $e = 67$ (B). Le vostre chiavi sono: $n = 1739$, $e = 295$ (pubbliche) e $d = 247$ (privata). Volete spedire il messaggio 142 a B. Per codificarlo dovete calcolare:

(a) $[142^{295}]_{1739}$

(b) $[142^{67}]_{1739}$

(c) $[142^{67}]_{2993}$

(d) $[142^{295}]_{2993}$

(e) Nessuna di queste

Domanda 7 Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ la soluzione della ricorsione lineare a coefficienti costanti:

$$f(n+3) = -f(n+2) + 8f(n+1) + 12f(n)$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$, con le condizioni iniziali $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, e $f(2) = -2$. Allora:

(a) esistono $a, b, c \in \mathbb{R}$ tali che $f(n) = (a + bn)3^n + c(-2)^n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

(b) esistono $a, b, c \in \mathbb{R}$ tali che $f(n) = a\,3^n + (b + cn)(-2)^n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

(c) esistono $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $f(n) = a\,3^n + b(-2)^n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

(d) esistono $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $f(n) = an\,3^n + b(-2)^n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

(e) Nessuna di queste

Domanda 8 In una normale tastiera sono presenti 94 caratteri (47 “maiuscoli” e 47 “minuscoli”). Di questi, 32 sono non alfanumerici (21 “maiuscoli” e 11 “minuscoli”). Si ritiene generalmente che una buona password debba contenere almeno un carattere “maiuscolo” ed almeno un carattere non alfanumerico. Allora il numero di password “cattive” di lunghezza 4 è:

(a) 48627082

(b) 258962

(c) 45326400

(d) 17976401

(e) Nessuna di queste

Domanda 9 Siano $f, g, h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ le funzioni definite ponendo:

$$f(n) := 2^{n+1} - 2^n \qquad g(n) := 2^{n+1} \qquad h(n) := n\,3^n$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora:

(a) $g \approx f$, e $h = \Omega(f)$

(b) $g = o(f)$, e $h = O(f)$

(c) $g = o(f)$, e $h = \Omega(f)$

(d) $g \not\approx f$, e $h = O(f)$

(e) Nessuna di queste

Domanda 10 Consideriamo le seguenti righe di codice Python:

```
for i in range(1,n+1):
    for j in range(1,n-i+1):
        (...)
```

Sia $f(n)$ il numero di volte che viene ripetuto il codice (...). Allora $f(n)$ è asintoticamente equivalente a:

(a) n

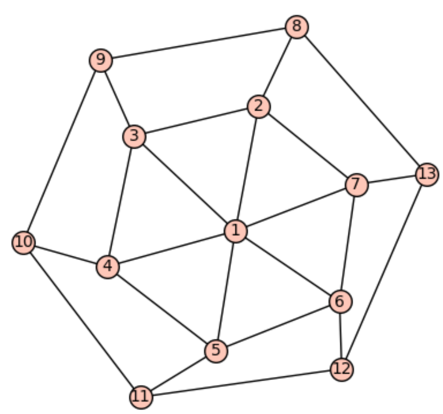
(b) $\frac{1}{2}n^2$

(c) n^2

(d) $n^3 - n^2$

(e) Nessuna di queste

Domanda 11 Sia G il grafo rappresentato graficamente qui sotto:



Allora il numero cromatico di G è:

(a) 1

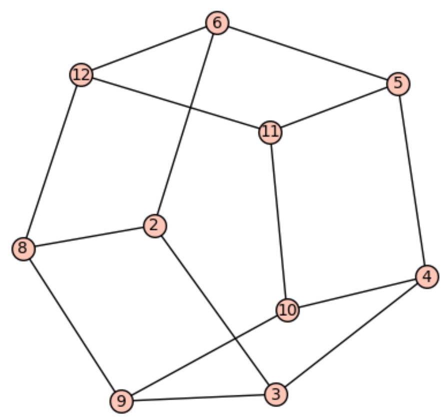
(b) 2

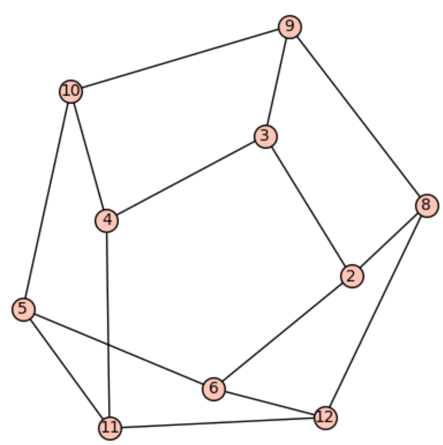
(c) 3

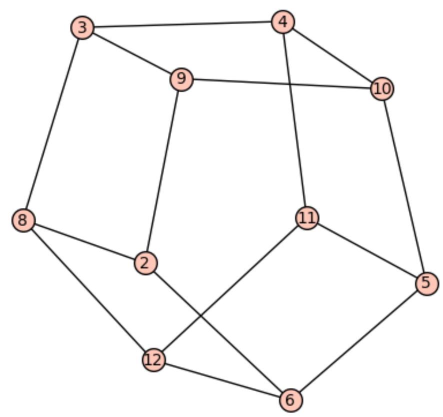
(d) 4

(e) ≥ 5

Domanda 12 Siano G, H, e K i grafi rappresentati graficamente qui di sotto dall'alto in basso, rispettivamente:







Allora:

(a) G e H sono isomorfi, e H e K non sono isomorfi

(b) G e H sono isomorfi, e H e K sono isomorfi

(c) G e H non sono isomorfi, e H e K non sono isomorfi

(d) G e H non sono isomorfi, e H e K sono isomorfi

(e) Nessuna di queste