Statistica per la ricerca sperimentale e tecnologica
Corso di Laurea in Informatica, Università di Roma "Tor Vergata"
Anno accademico: 2007-2008
Titolare del corso: Claudio Macci
Esame dell'8 Febbraio 2008

Esercizio 1. La probabilità che esca testa lanciando una moneta è $\frac{5}{7}$. Si lancia la moneta tre volte.
D1) Calcolare la probabilità di ottenere testa esattamente una volta.
D2) Calcolare la probabilità di ottenere la sequenza $(\text{testa}, \text{croce}, \text{testa})$.

Esercizio 2. Un'urna ha tre palline bianche. Si lancia un dado equo: se esce 1 o 2, si mette una pallina nera nell'urna; se esce 3 o 4, si mettono tre palline nere nell'urna; se esce 5 o 6, si mettono sei palline nere nell'urna. Poi si estrae a caso una pallina dall'urna.
D3) Calcolare la probabilità che la pallina estratta sia nera.
D4) Calcolare la probabilità di aver ottenuto 1 o 2 nel lancio del dado sapendo di aver estratto una pallina nera.

Esercizio 3. La variabile aleatoria (X_1, X_2) ha la seguente densità congiunta: $p_{(X_1,X_2)}(0,0) = p_{(X_1,X_2)}(1,1) = p_{(X_1,X_2)}(0,2) = \frac{1}{3}$.
D5) Calcolare $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$.
D6) Trovare la densità discreta di $Z = X_1 + X_2$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria continua con densità f_X definita come segue: $f_X(t) = \frac{e^t}{e-1}$ per $t \in [0,1]$ e $f_X(t) = 0$ altrimenti.
D7) Calcolare $P(X < 1/2)$.
D8) Calcolare $\mathbb{E}[e^{-X}]$.

Esercizio 5. Sia (N_t) un processo di Poisson con intensità $\lambda = 1$, e sia (T_n) la successione delle variabili aleatorie che indica gli istanti in cui accadono gli eventi.
D9) Calcolare $P(N_1 = 1)$.
D10) Calcolare $P(3 < T_1 < 9)$.

Esercizio 6. Sia X una variabile aleatoria normale standard.
D11) Calcolare $P(-1/2 < X < 2)$.
D12) Calcolare $P(|X| > 1)$.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
D1) Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di teste ottenute, la quale ha distribuzione binomiale con parametri $n = 3$ (numero dei lanci di moneta) e $p = \frac{5}{7}$. La probabilità richiesta è $P(X = 1) = \binom{3}{1}\left(\frac{5}{7}\right)^1\left(1 - \frac{5}{7}\right)^{3-1} = \frac{60}{343}$.
D2) La probabilità richiesta è $\frac{5}{7} \cdot \left(1 - \frac{5}{7}\right) \cdot \frac{5}{7} = \frac{50}{343}$ per indipendenza di eventi legati a diversi lanci di moneta.

Esercizio 2. Sia N l'evento "la pallina estratta è nera", e sia E_{ij} l'evento "esce i o j nel lancio del dado".
D3) Per la formula delle probabilità totali si ha $P(N) = P(N|E_{12})P(E_{12}) + P(N|E_{34})P(E_{34}) + P(N|E_{56})P(E_{56}) = \frac{1}{4}\frac{2}{6} + \frac{3}{6}\frac{2}{6} + \frac{6}{9}\frac{2}{6} = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right)\frac{1}{3} = \frac{17}{12}\frac{1}{3} = \frac{17}{36}$.
D4) Per la formula di Bayes, e sfruttando il valore di $P(N)$ calcolato prima, si ha $P(E_{12}|N) = \frac{P(N|E_{12})P(E_{12})}{P(N)} = \frac{\frac{1}{4}\frac{2}{6}}{\frac{17}{36}} = \frac{3}{17}$.

Esercizio 3.
D5) Si ha: $p_{X_1}(0) = p_{(X_1,X_2)}(0,0) + p_{(X_1,X_2)}(0,2) = \frac{2}{3}$, $p_{X_1}(1) = p_{(X_1,X_2)}(1,1) = \frac{1}{3}$, da cui $\mathbb{E}[X_1] = 0\frac{2}{3} + 1\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$; $p_{X_2}(0) = p_{(X_1,X_2)}(0,0) = \frac{1}{3}$, $p_{X_2}(1) = p_{(X_1,X_2)}(1,1) = \frac{1}{3}$, $p_{X_2}(2) = p_{(X_1,X_2)}(0,2) = \frac{1}{3}$, da cui $\mathbb{E}[X_2] = 0\frac{1}{3} + 1\frac{1}{3} + 2\frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1$; $\mathbb{E}[X_1X_2] = (0 \cdot 0)\frac{1}{3} + (1 \cdot 1)\frac{1}{3} + (0 \cdot 2)\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$. Quindi $\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = \mathbb{E}[X_1X_2] - \mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[X_2] = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot 1 = 0$.
D6) Si ha $p_Z(0) = p_{(X_1,X_2)}(0,0) = \frac{1}{3}$ e $p_Z(2) = p_{(X_1,X_2)}(1,1) + p_{(X_1,X_2)}(0,2) = \frac{2}{3}$.

Esercizio 4.
D7) Si ha $P(X < 1/2) = \int_0^{1/2} \frac{e^t}{e-1}dt = \frac{[e^t]_{t=0}^{t=1/2}}{e-1} = \frac{e^{1/2}-1}{e-1}$.
D8) Si ha $\mathbb{E}[e^{-X}] = \int_0^1 e^{-t}\frac{e^t}{e-1}dt = \int_0^1 \frac{1}{e-1}dt = \frac{1}{e-1}\int_0^1 dt = \frac{[t]_{t=0}^{t=1}}{e-1} = \frac{1}{e-1}$.

Esercizio 5.
D9) Si ha $P(N_1 = 1) = \frac{1^1}{1!}e^{-1} = e^{-1}$.
D10) Si ha $P(3 < T_1 < 9) = \int_3^9 e^{-t}dt = [-e^{-t}]_{t=3}^{t=9} = e^{-3} - e^{-9}$.

Esercizio 6.
D11) Si ha $P(-1/2 < X < 2) = \Phi(2) - \Phi(-1/2) = \Phi(2) - (1 - \Phi(1/2)) = \Phi(2) + \Phi(0.5) - 1 = 0.97725 + 0.69146 - 1 = 0.66871$.
D12) Si ha $P(|X| > 1) = 1 - P(-1 \leq X \leq 1) = 1 - (\Phi(1) - \Phi(-1)) = 1 - \Phi(1) + \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) + 1 - \Phi(1) = 2(1 - \Phi(1)) = 2(1 - 0.84134) = 2 \cdot 0.15866 = 0.31732$.

Commenti.
D5) In generale se X_1 e X_2 sono indipendenti allora $\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = 0$. Questo esercizio mostra che possiamo avere casi in cui $\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = 0$ (calcolata sopra), ma X_1 e X_2 non sono indipendenti; infatti i punti con densità positiva $(0,0), (1,1), (0,2)$ non costituiscono un prodotto cartesiano.
D6) Si ha $p_Z(0) + p_Z(2) = \frac{1+2}{3} = 1$ in accordo con la teoria.
D10) In altro modo $P(3 < T_1 < 9) = F_{T_1}(9) - F_{T_1}(3) = 1 - e^{-9} - (1 - e^{-3}) = e^{-3} - e^{-9}$.
D12) In altro modo $P(|X| > 1) = P(\{X > 1\} \cup \{X < -1\}) = P(X > 1) + P(X < -1) = 1 - \Phi(1) + \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) + 1 - \Phi(1) = 2(1 - \Phi(1)) = 2(1 - 0.84134) = 2 \cdot 0.15866 = 0.31732$, dove la seconda uguaglianza segue dal fatto che $\{X > 1\}$ e $\{X < -1\}$ sono disgiunti.