Laurea Triennale in Scienza e Tecnologia dei Media, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità
Anno accademico: `2017-2018`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Appello del 29 Agosto 2018
Esercizi 1,2,3,4,5 per gli studenti che sostengono l'esame da 6 crediti.
Esercizi 1,2,3,4,5,6 per gli studenti che sostengono l'esame da 8 crediti.

Esercizio 1.
Un'urna ha 2 palline bianche, 3 rosse e 3 nere. Si estraggono a caso 3 palline, una alla volta e con reinserimento.
`D1`) Calcolare la probabilità di estrarre almeno 2 palline rosse.
`D2`) Calcolare la probabilità di estrarre la sequenza di colori $(\mathrm{rosso}, \mathrm{rosso}, \mathrm{nero})$.
`D3`) Calcolare la probabilità di estrarre 3 colori diversi in un qualsiasi ordine.

Esercizio 2.
Un'urna è inizialmente vuota. Si lanciano 3 monete eque. Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di teste ottenute. Vengono messe nell'urna X palline bianche e $3-X$ nere. Poi si estraggono a caso due palline in blocco.
`D4`) Calcolare la probabilità di aver ottenuto una sola volta testa sapendo di aver estratto due palline di colore diverso.

Esercizio 3.
Siano $h_1, h_2 \geq 1$ interi e $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ fissati. Consideriamo la seguente densità congiunta: $p_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \frac{(\lambda_1)^{x_1-h_1}}{(x_1-h_1)!}\frac{(\lambda_2)^{x_2-h_2}}{(x_2-h_2)!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}$, per $x_1 \geq h_1$ e $x_2 \geq h_2$ interi.
`D5`) Calcolare $P(X_1 = h_1+1|X_1+X_2 = h_1+h_2+1)$.
`D6`) Trovare le densità marginali di X_1 e X_2.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con densità continua $f(x) = x^a 1_{(0,b)}$, dove $a \geq 0$, $b > 0$ e $\frac{b^{a+1}}{a+1} = 1$.
`D7`) Trovare la funzione di distribuzione di $Y = \sqrt{X}$.
`D8`) Dire per quali valori di a e b si ha $\mathbb{E}[X] = b/2$.

Esercizio 5.
Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}}dx$.
`D9`) Sia X una variabile aleatoria Normale di media 1 e di varianza 16. Calcolare $P(|X-1| < 5)$ esprimendo tale valore con la funzione $\Phi(y)$ per qualche $y \geq 0$.
`D10`) Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. (indipendenti e identicamente distribuite), con distribuzione media 1 e varianza 8. Trovare il valore di $y \in \mathbb{R}$ per cui si ha

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} - 1}{1/\sqrt{n}} \leq \sqrt{2}y\right) = \Phi(1/2).$$

Esercizio 6.
Consideriamo una catena di Markov omogenea $\{X_n : n \geq 0\}$ con spazio degli stati $E = \{1,2,3,4\}$ e matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 \end{pmatrix}.$$

`D11`) Calcolare la probabilità di passaggio (e quindi assorbimento) in 2 partendo da 1 e da 4.
`D12`) Trovare la/e distribuzione/i stazionaria/e.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
`D1`) Per la teoria della distribuzione Binomiale la probabilità richiesta è $\sum_{k=2}^{3}\binom{3}{k}(\frac{3}{8})^k(1-\frac{3}{8})^{3-k}=\frac{81}{256}$.
`D2`) La probabilità richiesta è $(\frac{3}{8})^3=\frac{27}{512}$.
`D3`) Per la teoria della distribuzione Multinomiale la probabilità richiesta è $\frac{3!}{1!1!1!}(\frac{2}{8})^1(\frac{3}{8})^1(\frac{3}{8})^1=\frac{108}{512}=\frac{27}{128}$.

Esercizio 2.
`D4`) Indichiamo con E l'evento "estratte palline di colore diverso", e la probabilità richiesta è $P(X=1|E)$. Per la formula di Bayes si ha

$$P(X=1|E)=\frac{P(E|X=1)P(X=1)}{P(E)}=\frac{P(E|X=1)P(X=1)}{\sum_{j=0}^{3}P(E|X=j)P(X=j)}$$

(nella seconda uguaglianza si considera la formula delle probabilità totali). Per la teoria della distribuzione Binomiale si ha $P(X=0)=P(X=3)=\frac{1}{8}$ e $P(X=1)=P(X=2)=\frac{3}{8}$. Inoltre si ha $P(E|X=0)=P(E|X=3)=0$ (per costruzione) e $P(E|X=1)=P(E|X=2)=\frac{\binom{2}{1}\binom{1}{1}}{\binom{3}{2}}=\frac{2}{3}$ per la teoria della distribuzione Ipergeometrica. Quindi

$$P(X=1|E)=\frac{\frac{2}{3}\frac{3}{8}}{0+\frac{2}{3}\frac{3}{8}+\frac{2}{3}\frac{3}{8}+0}=\frac{1}{2}.$$

Esercizio 3.
`D5`) Si ha

$$\begin{aligned}P(X_1=h_1+1|X_1+X_2=h_1+h_2+1)&=\frac{P(\{X_1=h_1+1\}\cap\{X_1+X_2=h_1+h_2+1\})}{P(X_1+X_2=h_1+h_2+1)}\\&=\frac{P(\{X_1=h_1+1\}\cap\{X_2=h_2\})}{P(X_1+X_2=h_1+h_2+1)}=\frac{p_{X_1,X_2}(h_1+1,h_2)}{p_{X_1,X_2}(h_1+1,h_2)+p_{X_1,X_2}(h_1,h_2+1)}=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}.\end{aligned}$$

`D6`) Per $x_1\geq h_1$ si ha

$$p_{X_1}(x_1)=\sum_{x_2\geq h_2}\frac{(\lambda_1)^{x_1-h_1}}{(x_1-h_1)!}\frac{(\lambda_2)^{x_2-h_2}}{(x_2-h_2)!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}=\frac{(\lambda_1)^{x_1-h_1}}{(x_1-h_1)!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\sum_{x_2\geq h_2}\frac{(\lambda_2)^{x_2-h_2}}{(x_2-h_2)!}=\frac{(\lambda_1)^{x_1-h_1}}{(x_1-h_1)!}e^{-\lambda_1}.$$

Poi, con calcoli simili, per $x_2\geq h_2$ si ha

$$p_{X_2}(x_2)=\sum_{x_1\geq h_1}\frac{(\lambda_1)^{x_1-h_1}}{(x_1-h_1)!}\frac{(\lambda_2)^{x_2-h_2}}{(x_2-h_2)!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}=\frac{(\lambda_2)^{x_2-h_2}}{(x_2-h_2)!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\sum_{x_1\geq h_1}\frac{(\lambda_1)^{x_1-h_1}}{(x_1-h_1)!}=\frac{(\lambda_2)^{x_2-h_2}}{(x_2-h_2)!}e^{-\lambda_2}.$$

Osservazione: possiamo dire che X_1 ha la distribuzione di h_1+Z_1 con Z_1 variabile aleatoria con distribuzione di Poisson di parametro λ_1; in maniera analoga X_2 ha la distribuzione di h_2+Z_2 con Z_2 variabile aleatoria con distribuzione di Poisson di parametro λ_2.

Esercizio 4.
`D7`) Si ha $P(0\leq Y\leq\sqrt{b})=1$, da cui segue $F_Y(y)=0$ per $y\leq 0$ e $F_Y(y)=1$ per $y\geq\sqrt{b}$. Per $y\in(0,\sqrt{b})$ si ha

$$F_Y(y)=P(\sqrt{X}\leq y)=P(X\leq y^2)=\int_0^{y^2}x^a dx=\left[\frac{x^{a+1}}{a+1}\right]_{x=0}^{x=y^2}=\frac{y^{2(a+1)}}{a+1}.$$

`D8`) Si ha (tenendo conto della relazione $\frac{b^{a+1}}{a+1}=1$)

$$\frac{b}{2}=\int_0^b x\cdot x^a dx=\left[\frac{x^{a+2}}{a+2}\right]_{x=0}^{x=b}=\frac{b^{a+2}}{a+2}=\frac{(a+1)b}{a+2}\frac{b^{a+1}}{a+1}=\frac{(a+1)b}{a+2}$$

da cui segue $\frac{a+1}{a+2}=\frac{1}{2}$, e quindi $2a+2=a+2$, e in conclusione $a=0$ che implica $b=1$.
Osservazione: possiamo dire che la condizione $\mathbb{E}[X]=\frac{b}{2}$ conduce alla distribuzione uniforme su $(0,1)$; del

resto è ben noto che in questo caso il valore atteso coincide con il punto medio dell'intervallo.

Esercizio 5.
`D9`) Si ha

$$P(|X-1|<5)=P(-5<X-1<5)=P\left(\frac{-5}{\sqrt{16}}<\frac{X-1}{\sqrt{16}}<\frac{5}{\sqrt{16}}\right)=\Phi(1.25)-\Phi(-1.25)=2\Phi(1.25)-1.$$

`D10`) Facciamo riferimento al teorema limite centrale (per le medie aritmetiche, non per le somme) e si ha

$$P\left(\frac{\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}-1}{1/\sqrt{n}}\le\sqrt{2}y\right)=P\left(\frac{\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}-1}{\sqrt{8}/\sqrt{n}}\le\frac{\sqrt{2}y}{\sqrt{8}}\right)\to\Phi\left(\frac{\sqrt{2}y}{\sqrt{8}}\right)=\Phi(y/2).$$

In corrispondenza si ha $y=1$.

Esercizio 6.
`D11`) Dobbiamo considerare il sistema delle probabilità di passaggio per $C=\{2\}$ tenendo conto che $D_C=\{1,4\}$. Si ha

$$\left\{\begin{array}{l}\lambda_1=\frac{1}{4}+\frac{\lambda_1}{4}+\frac{\lambda_4}{4}\\ \lambda_4=\frac{1}{3}+\frac{\lambda_1}{6}+\frac{\lambda_4}{6},\end{array}\right.\quad\left\{\begin{array}{l}\frac{3}{4}\lambda_1=\frac{1}{4}+\frac{\lambda_4}{4}\\ \frac{5}{6}\lambda_4=\frac{1}{3}+\frac{\lambda_1}{6},\end{array}\right.\quad\left\{\begin{array}{l}3\lambda_1=1+\lambda_4\\ 5\lambda_4=2+\lambda_1,\end{array}\right.$$
$$\left\{\begin{array}{l}\lambda_4=3\lambda_1-1\\ 5(3\lambda_1-1)=2+\lambda_1,\end{array}\right.\quad\left\{\begin{array}{l}\lambda_4=3\lambda_1-1\\ 5(3\lambda_1-1)=2+\lambda_1,\end{array}\right.\quad\left\{\begin{array}{l}\lambda_4=3\lambda_1-1\\ 14\lambda_1=7,\end{array}\right.\quad\left\{\begin{array}{l}\lambda_4=1/2\\ \lambda_1=1/2.\end{array}\right.$$

`D12`) Sia $\pi=(\pi_1,\pi_2,\pi_3,\pi_4)$ una generica distribuzione stazionaria. Si deve imporre la condizione

$$(\pi_1,\pi_2,\pi_3,\pi_4)\left(\begin{array}{llll}1/4&1/4&1/4&1/4\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1/6&1/3&1/3&1/6\end{array}\right)=(\pi_1,\pi_2,\pi_3,\pi_4)$$

da cui si ottiene il seguente sistema

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{4}\pi_1+\frac{1}{6}\pi_4=\pi_1\\ \frac{1}{4}\pi_1+\pi_2+\frac{1}{3}\pi_4=\pi_2\\ \frac{1}{4}\pi_1+\pi_3+\frac{1}{3}\pi_4=\pi_3\\ \frac{1}{4}\pi_1+\frac{1}{6}\pi_4=\pi_4.\end{array}\right.$$

I termini π_2 e π_3 compaiono solo nella seconda e terza equazione, ma si cancellano del tutto. Quindi abbiamo tutte relazioni lineari in π_1 e π_4, da cui segue $\pi_1=\pi_4=0$. Quindi le distribuzioni stazionarie sono del tipo $(0,\alpha,1-\alpha,0)$ per $\alpha\in[0,1]$.
Osservazione: Si poteva raggiungere questa stessa conclusione senza fare calcoli osservando che: $T=\{1,4\}$ è la classe degli stati transitori (quindi $\pi_1=\pi_4=0$); $\{2\}$ e $\{3\}$ sono due classi chiuse irriducibili (essendo 2 e 3 stati assorbenti) a cui corrispondono le uniche distribuzioni stazionarie ristrette a tali stati $(0,1,0,0)$ e $(0,0,1,0)$; quindi tutte e sole le distribuzioni stazionarie sono del tipo $\alpha(0,1,0,0)+(1-\alpha)(0,0,1,0)$ per $\alpha\in[0,1]$.