Statistica per la ricerca sperimentale e tecnologica
CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA, UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"
Anno accademico: `2007-2008`
Titolare del corso: `Claudio Macci`
Simulazione 1

Esercizio 1. Si lancia un dado equo 4 volte. Per ogni lancio del dado si definisce *successo* l'uscita del numero 1 o del numero 6. Consideriamo le seguenti variabili aleatorie: X indica il numero di successi e Y indica il minimo tra i quattro numeri usciti.
`D1`) Trovare la densità discreta di X.
`D2`) Calcolare la probabilità di avere la sequenza di numeri $(1, 3, 1, 5)$ sapendo di aver avuto esattamente due successi.
`D3`) Calcolare $P(Y = 5)$. *Suggerimento*: è utile osservare che $P(Y = k) = P(Y \geq k) - P(Y \geq k+1)$ per ogni k intero.

Esercizio 2. Si consideri il seguente gioco. Si lancia una moneta equa e due volte un dado equo: se esce testa si vince se esce almeno una volta il numero 3; se esce croce si vince se la somma dei numeri usciti è 11.
`D4`) Calcolare la probabilità di vincere il gioco.
`D5`) Calcolare la probabilità che sia uscita testa sapendo di aver vinto il gioco.

Esercizio 3. La densità congiunta di (X_1, X_2) è la seguente: $p_{(X_1,X_2)}(0, 2) = p_{(X_1,X_2)}(1, 1) = p_{(X_1,X_2)}(2, 0) = \frac{1}{3}$.
`D6`) Calcolare $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con densità $f_X(t) = \frac{c}{t^2}$ per $t \in [1, 3]$ e $f_X(t) = 0$ altrimenti. Sia $Y = [X]$ dove $[x] = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$ è la *parte intera* di x.
`D7`) Verificare che $c = \frac{3}{2}$.
`D8`) Trovare la densità discreta di Y.

Esercizio 5. Sia X_1 una variabile aleatoria esponenziale con parametro $\lambda_1 = 3$.
`D9`) Calcolare $P(2 < X_1 < 5)$.
Sia X_2 una variabile aleatoria esponenziale con parametro $\lambda_2 = 5$, indipendente da X_1.
`D10`) Calcolare $\mathbb{E}[X_1 X_2]$.

Esercizio 6. Sia X una variabile aleatoria normale standard.
`D11`) Calcolare $P(X < -2)$.
`D12`) Calcolare $P(|X| > 2)$.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
D1) La variabile aleatoria X ha distribuzione binomiale con parametri $n = 4$ (numero dei lanci del dado) e $p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ (probabilità di *successo* in ogni lancio). Quindi $p_X(k) = \binom{4}{k}(\frac{1}{3})^k(1-\frac{1}{3})^{4-k}$ per $k \in \{0,1,2,3,4\}$, da cui $p_X(0) = \frac{16}{81}$, $p_X(1) = \frac{32}{81}$, $p_X(2) = \frac{24}{81}$, $p_X(3) = \frac{8}{81}$ e $p_X(4) = \frac{1}{81}$.
D2) Indichiamo con E l'evento "esce la sequenza $(1,3,1,5)$" e si ha $P(E|X=2) = \frac{P(E\cap\{X=2\})}{P(X=2)} = \frac{P(E)}{p_X(2)}$ perché $E \subset \{X = 2\}$. Allora, tenendo conto il valore di $p_X(2)$ calcolato prima, otteniamo il seguente risultato: $P(E|X=2) = \frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}}{\frac{24}{81}} = \frac{81}{24\cdot 6^4} = \cdots = \frac{1}{384}$.
D3) Si ha $P(Y=5) = P(Y \geq 5) - P(Y \geq 6) = \frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{2^4-1^4}{6^4} = \frac{15}{1296}$.

Esercizio 2. Sia V l'evento "vincere il gioco" e T l'evento "esce testa".
D4) Per la formula delle probabilità totali si ha $P(V) = P(V|T)P(T)+P(V|T^c)P(T^c) = \frac{11}{36}\frac{1}{2}+\frac{2}{36}\frac{1}{2} = \left[\frac{11}{36}+\frac{2}{36}\right]\frac{1}{2} = \frac{13}{36}\frac{1}{2} = \frac{13}{72}$; infatti $P(V|T) = \sum_{k=1}^{2}\binom{2}{k}(\frac{1}{6})^k(1-\frac{1}{6})^{2-k} = \frac{10+1}{36} = \frac{11}{36}$, e $P(V|T^c) = \frac{2}{36}$ perché si ha somma 11 se e solo se le coppie di numeri usciti sono $(6,5)$ e $(5,6)$.
D5) Per la formula di Bayes, e sfruttando il valore di $P(V)$ calcolato prima, si ha $P(T|V) = \frac{P(V|T)P(T)}{P(V)} = \frac{\frac{11}{36}\frac{1}{2}}{\frac{13}{72}} = \frac{11}{13}$.

Esercizio 3.
D6) Si ha: $p_{X_1}(0) = p_{(X_1,X_2)}(0,2) = \frac{1}{3}$, $p_{X_1}(1) = p_{(X_1,X_2)}(1,1) = \frac{1}{3}$, $p_{X_1}(2) = p_{(X_1,X_2)}(2,0) = \frac{1}{3}$, da cui $\mathbb{E}[X_1] = 0\frac{1}{3}+1\frac{1}{3}+2\frac{1}{3} = 1$; $p_{X_2}(0) = p_{(X_1,X_2)}(2,0) = \frac{1}{3}$, $p_{X_2}(1) = p_{(X_1,X_2)}(1,1) = \frac{1}{3}$, $p_{X_2}(2) = p_{(X_1,X_2)}(0,2) = \frac{1}{3}$, da cui $\mathbb{E}[X_2] = 0\frac{1}{3}+1\frac{1}{3}+2\frac{1}{3} = 1$; $\mathbb{E}[X_1X_2] = (0\cdot 2)\frac{1}{3}+(1\cdot 1)\frac{1}{3}+(2\cdot 0)\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$. Quindi $\mathrm{Cov}(X_1,X_2) = \mathbb{E}[X_1X_2]-\mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[X_2] = \frac{1}{3}-1\cdot 1 = -\frac{2}{3}$.

Esercizio 4.
D7) Si ha $1 = c\int_1^3 \frac{1}{t^2}dt = c[-\frac{1}{t}]_{t=1}^{t=3} = c(-\frac{1}{3}+1) = \frac{2}{3}c$, da cui $c = \frac{3}{2}$.
D8) Si ha: $p_Y(1) = P(1 \leq X < 2) = \int_1^2 \frac{3}{2t^2}dt = \left[-\frac{3}{2t}\right]_{t=1}^{t=2} = -\frac{3}{4}+\frac{3}{2} = \frac{3}{4}$, $p_Y(2) = P(2 \leq X < 3) = \int_2^3 \frac{3}{2t^2}dt = \left[-\frac{3}{2t}\right]_{t=2}^{t=3} = -\frac{1}{2}+\frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.

Esercizio 5.
D9) Si ha $P(2 < X_1 < 5) = \int_2^5 3e^{-3t}dt = [-e^{-3t}]_{t=2}^{t=5} = e^{-6}-e^{-15}$.
D10) Si ha $\mathbb{E}[X_1X_2] = \mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[X_2] = \frac{1}{3}\frac{1}{5} = \frac{1}{15}$.

Esercizio 6.
D11) Si ha $P(X < -2) = \Phi(-2) = 1-\Phi(2) = 1-0.97725 = 0.02275$.
D12) Osservando che $\{|X| > 2\} = \{X > 2\} \cup \{X < -2\}$ è un'unione disgiunta, si ha $P(|X| > 2) = P(\{X > 2\}\cup\{X < -2\}) = P(X > 2)+P(X < -2) = 1-P(X \leq 2)+P(X < -2) = 1-\Phi(2)+\Phi(-2) = 1-\Phi(-2)+1-\Phi(-2) = 2(1-\Phi(2)) = 0.0455$.

Commenti.
D1) Si ha $p_X(0)+p_X(1)+p_X(2)+p_X(3)+p_X(4) = \frac{16+32+24+8+1}{81} = 1$ in accordo con la teoria.
D4) In altro modo $P(V|T) = 1-\binom{2}{0}(\frac{1}{6})^0(1-\frac{1}{6})^{2-0} = 1-\frac{25}{36} = \frac{11}{36}$.
D6) Si ha $P(X_1+X_2 = 2) = 1$; quindi in altro modo $\mathrm{Cov}(X_1,X_2) = \mathrm{Cov}(X_1,2-X_1) = \mathrm{Cov}(X_1,2)-\mathrm{Cov}(X_1,X_1) = 0-\mathrm{Var}[X_1] = -\mathbb{E}[X_1^2]+\mathbb{E}^2[X_1] = -(0^2\frac{1}{3}+1^2\frac{1}{3}+2^2\frac{1}{3})+1^2 = -\frac{5}{3}+1 = -\frac{2}{3}$.
D8) Si ha $p_Y(1)+p_Y(2) = \frac{3+1}{4} = 1$ in accordo con la teoria.
D9) In altro modo $P(2 < X_1 < 5) = F_{X_1}(5)-F_{X_1}(2) = 1-e^{-3\cdot 5}-(1-e^{-3\cdot 2}) = e^{-6}-e^{-15}$.
D11-D12) Si ha $2P(X < -2) = P(|X| > 2)$ e non sorprende (basta fare un grafico ...).