Laurea Triennale in Scienze e Tecnologie per i Media, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità (ed insegnamenti mutuati)
Anno Accademico: `2023-2024`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Esame del 20 Settembre 2024
L'Esercizio 6 è solo per coloro che sostengono l'esame da 8 crediti.

Esercizio 1. Si lancia ripetutamente un dado con i numeri $1, 2, 4, 4, 4, 6$.
`D1)` Si considerino 2 lanci, e sia X la variabile aleatoria che conta il numero di volte che esce il *numero 1*. Calcolare $P(X = 1)$.
`D2)` Si considerino 6 lanci, e sia Y la variabile aleatoria che conta il numero di volte che esce un *numero pari*. Calcolare $\mathbb{E}[Y]$.
`D3)` Sia Z la variabile aleatoria che conta il numero di lanci per avere per la prima volta il *numero 6*. Calcolare la probabilità che il numero 6 esca per la prima volta ad un lancio pari, cioè $P\left(\cup_{k\geq 1}\{Z = 2k\}\right)$.

Esercizio 2. Si lancia un dado equo. Se esce un numero pari, si lancia un dado con i numeri $1, 2, 3, 4, 5, 5$; se esce un numero dispari, si lancia un dado con i numeri $1, 2, 3, 5, 5, 5$.
`D4)` Calcolare la probabilità che esca il numero 5 nel secondo lancio del dado.

Esercizio 3. Siano $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ arbitrariamente fissati. Consideriamo la seguente densità congiunta discreta:

$$p_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \frac{\lambda_1^{x_1}}{x_1!}\frac{\lambda_2^{x_2}}{x_2!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \quad \text{per } x_1, x_2 \geq 0 \text{ interi.}$$

`D5)` Verificare che $P(X_1 + X_2 \leq 1) = (1 + \lambda_1 + \lambda_2)e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}$.
`D6)` Verificare che $P(\{X_1 = 0\} \cap \{X_2 = 0\}|X_1 + X_2 \leq 1) = \frac{1}{1+\lambda_1+\lambda_2}$.

Esercizio 4. Sia $a > 0$ arbitrariamente fissato. Sia X una variabile aleatoria con distribuzione uniforme su $(-a, a^2)$.
`D7)` Trovare la funzione di distribuzione di $Y = e^X$.
`D8)` Verificare che $\mathbb{E}[e^{2X}] = \frac{e^{2a^2}-e^{-2a}}{2(a^2+a)}$.

Esercizio 5. Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$.
`D9)` Sia X una variabile aleatoria Normale standard. Verificare che $P(0 \leq X \leq 3/2) = \Phi(3/2) - 0.5$.
`D10)` Siano $X_1, \ldots, X_{900}$ variabili aleatorie i.i.d. con media 2 e varianza 16.
Calcolare $P(X_1+\cdots+X_{900} > 2000)$ con l'approssimazione Normale esprimendo il risultato con la funzione Φ.

Esercizio 6. Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una catena di Markov omogenea su $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e con matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 1/7 & 2/7 & 1/7 & 3/7 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & r & 1-r \end{pmatrix},$$

dove $r \in (0, 1)$.
`D11)` Motivare l'esistenza di $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ per $i, j \in \{4, 5\}$, e dire per quale valore di r questi limiti sono tutti uguali tra loro.
`D12)` Calcolare la probabilità di assorbimento in $\{2, 3\}$ partendo dallo stato 1.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
`D1)` La variabile aleatoria X ha distribuzione Binomiale con parametri $n = 2$ e $p = \frac{1}{6}$, e si ha

$$P(X = 1) = \binom{2}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(1 - \frac{1}{6}\right)^{2-1} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}.$$

`D2)` La variabile aleatoria Y ha distribuzione Binomiale con parametri $n = 6$ e $p = \frac{5}{6}$, e si ha

$$\mathbb{E}[Y] = np = 6 \cdot \frac{5}{6} = 5.$$

Osservazione. In maniera alternativa (e meno conveniente) si ottiene il risultato con la formula

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{k=0}^{6} k\binom{6}{k}\left(\frac{5}{6}\right)^k\left(1 - \frac{5}{6}\right)^{6-k} = \frac{0 + 30 + 750 + 7500 + 37500 + 93750 + 93750}{46656} = \frac{233280}{46656} = 5.$$

`D3)` Si ha

$$P\left(\cup_{k\geq1}\{Z = 2k\}\right) = \sum_{k\geq1} P(Z = 2k) = \sum_{k\geq1}\left(1 - \frac{1}{6}\right)^{2k-1}\frac{1}{6}$$
$$= \sum_{k\geq1}\left(\frac{5}{6}\right)^{2k-1}\frac{1}{6} = \frac{1/6}{5/6}\sum_{k\geq1}\left(\frac{25}{36}\right)^k = \frac{1}{5}\frac{25/36}{1 - 25/36} = \frac{1}{5}\frac{25/36}{11/36} = \frac{5}{11}.$$

Esercizio 2.
`D4)` Viene chiesto di calcolare $P(E)$, dove E è l'evento "esce 5 al secondo lancio del dado". Si usa la formula delle probabilità totali e si ha

$$P(E) = P(E|D^c)P(D^c) + P(E|D)P(D) = \frac{2}{6}\frac{3}{6} + \frac{3}{6}\frac{3}{6} = \frac{6+9}{36} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}.$$

Esercizio 3.
`D5)` Si ha

$$P(X_1 + X_2 \leq 1) = p_{X_1,X_2}(0,0) + p_{X_1,X_2}(1,0) + p_{X_1,X_2}(0,1)$$
$$= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} + \lambda_1 e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} + \lambda_2 e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} = (1 + \lambda_1 + \lambda_2)e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}.$$

Osservazione. Il valore ottenuto è in accordo con il fatto che $Z = X_1 + X_2$ ha distribuzione di Poisson di parametro $\lambda_1 + \lambda_2$ (essendo la somma tra due variabili aleatorie di Poisson indipendenti, con parametri λ_1 e λ_2):

$$P(Z \leq 1) = P(Z = 0) + P(Z = 1) = \sum_{k=0}^{1}\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}$$
$$= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} + (\lambda_1+\lambda_2)e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} = (1 + \lambda_1 + \lambda_2)e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}.$$

`D6)` Si ha (ad un certo punto si tiene conto del valore ottenuto nella risposta alla domanda precedente)

$$P(\{X_1 = 0\} \cap \{X_2 = 0\}|X_1 + X_2 \leq 1) = \frac{P(\{X_1 = 0\} \cap \{X_2 = 0\} \cap \{X_1 + X_2 \leq 1\})}{P(X_1 + X_2 \leq 1)}$$
$$= \frac{P(\{X_1 = 0\} \cap \{X_2 = 0\})}{P(X_1 + X_2 \leq 1)} = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{(1 + \lambda_1 + \lambda_2)e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}} = \frac{1}{1 + \lambda_1 + \lambda_2}.$$

Esercizio 4.

`D7)` Si ha $P(e^{-a} \leq Y \leq e^{a^2}) = 1$ e quindi

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y \leq e^{-a}, \\ (*) & \text{se } e^{-a} < y < e^{a^2}, \\ 1 & \text{se } y \geq e^{a^2}. \end{cases}$$

Per $y \in (e^{-a}, e^{a^2})$ si ha

$$(*) = P(Y \leq y) = P(e^X \leq y) = P(X \leq \log y) =$$
$$= \int_{-a}^{\log y} \frac{1}{a^2 - (-a)} dx = \int_{-a}^{\log y} \frac{1}{a^2 + a} dx = \left[\frac{x}{a^2+a}\right]_{x=-a}^{x=\log y} = \frac{\log y + a}{a^2 + a}.$$

`D8)` Si ha

$$\mathbb{E}[e^{2X}] = \int_{-a}^{a^2} \frac{e^{2x}}{a^2 - (-a)} dx = \int_{-a}^{a^2} \frac{e^{2x}}{a^2 + a} dx = \left[\frac{e^{2x}}{2(a^2+a)}\right]_{x=-a}^{x=a^2} = \frac{e^{2a^2} - e^{-2a}}{2(a^2+a)}.$$

Osservazione. In maniera alternativa (e tutto sommato meno conveniente) si ottiene lo stesso risultato a partire dalla risposta alla domanda precedente. Infatti, prendendo la derivata della funzione di distribuzione F_Y, possiamo dire che Y ha densità continua $f_Y(y) = \frac{1}{(a^2+a)y} 1_{(e^{-a}, e^{a^2})}(y)$, da cui segue

$$\mathbb{E}[e^{2X}] = \mathbb{E}[Y^2] = \int_{e^{-a}}^{e^{a^2}} y^2 \frac{1}{(a^2+a)y} dy = \frac{1}{(a^2+a)} \int_{e^{-a}}^{e^{a^2}} y dy = \frac{1}{(a^2+a)} \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=e^{-a}}^{y=e^{a^2}} = \frac{e^{2a^2} - e^{-2a}}{2(a^2+a)}.$$

Esercizio 5.

`D9)` Si ha $P(0 \leq X \leq 3/2) = \Phi(3/2) - \Phi(0) = \Phi(3/2) - 0.5$.

`D10)` Si ha

$$P(X_1 + \cdots + X_{900} > 2000) = P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_{900} - 900 \cdot 2}{\sqrt{16}\sqrt{900}} > \frac{2000 - 900 \cdot 2}{\sqrt{16}\sqrt{900}}\right)$$
$$\approx 1 - \Phi\left(\frac{2000 - 900 \cdot 2}{\sqrt{16}\sqrt{900}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{2000 - 1800}{4 \cdot 30}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{200}{120}\right) = 1 - \Phi(5/3).$$

Esercizio 6.

`D11)` Osserviamo che la classe $\{4, 5\}$ è chiusa e irriducibile. Inoltre la catena ristretta a $\{4, 5\}$ è regolare (per l'Osservazione 5.16; infatti qui abbiamo $p_{44}, p_{55} > 0$). Quindi si può applicare il Teorema di Markov alla catena ristretta a $\{4, 5\}$, e si ha

$$\lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)} = \quad \text{(per ogni } i, j \in \{4, 5\}\text{)},$$

dove (π_4, π_5) è l'unica distribuzione stazionaria per la catena ristretta a $\{4, 5\}$. Inoltre abbiamo il seguente sistema

$$\begin{cases} \pi_4 = \frac{\pi_4}{3} + \pi_5 r \\ \pi_5 = \frac{2\pi_4}{3} + \pi_5(1 - r). \end{cases}$$

Si sa che il sistema è indeterminato e, con la condizione $\pi_4 + \pi_5 = 1$, ammette un'unica soluzione.
Entrambe le equazioni forniscono la condizione $\frac{2\pi_4}{3} = \pi_5 r$, da cui segue $\pi_4 = \frac{3r}{2}\pi_5$. Quindi dalla condizione $\pi_4 + \pi_5 = 1$ si ottiene

$$\frac{3r}{2}\pi_5 + \pi_5 = 1, \quad \frac{3r+2}{2}\pi_5 = 1, \quad \pi_5 = \frac{2}{3r+2},$$

e anche

$$\pi_4 = \frac{3r}{2} \frac{2}{3r+2} = \frac{3r}{3r+2}.$$

In conclusione

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \begin{cases} \frac{3r}{3r+2} & \text{se } j=4 \\ \frac{2}{3r+2} & \text{se } j=5; \end{cases}$$

quindi i limiti sono tutti uguali se $\frac{3r}{3r+2} = \frac{2}{3r+2}$, e con semplici calcoli si ottiene $r = \frac{2}{3}$ (in effetti per $r = \frac{2}{3}$ si ha $\pi_4 = \pi_5 = \frac{1}{2}$, ed inoltre la matrice di transizione ristretta agli stati a $\{4,5\}$ è bistocastica).
Osservazione. Si ottengono gli stessi risultati anche per i casi $r = 0$ e $r = 1$. Per $r = 1$ possiamo ancora fare riferimento a quanto visto per il caso $r \in (0,1)$; infatti abbiamo ancora una catena irriducibile, la catena è ancora regolare (perché $p_{44} > 0$ e $p_{55} = 0$, e quindi possiamo ancora fare riferimento alla Osservazione 5.16), e possiamo rifare gli stessi calcoli ottenendo

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \begin{cases} \frac{3}{5} & \text{se } j=4 \\ \frac{2}{5} & \text{se } j=5. \end{cases}$$

Per $r = 0$ la catena ristretta a $\{4,5\}$ non è irriducibile; infatti lo stato 5 è assorbente e lo stato 4 è transitorio. Però ci si convince facilmente che:

$$p_{44}^{(n)} = \left(\frac{1}{3}\right)^n, \quad \text{da cui segue} \quad p_{45}^{(n)} = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n;$$

$$p_{54}^{(n)} = 0, \quad \text{e} \quad p_{55}^{(n)} = 1.$$

Allora

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \begin{cases} 0 & \text{se } j=4 \\ 1 & \text{se } j=5. \end{cases}$$

`D12)` Consideriamo il sistema per le probabilità di assorbimento in $C = \{2,3\}$. Si ha $D_C = \{1\}$, e quindi il sistema si riduce ad una sola equazione, con una sola incognita λ_1, che è la quantità richiesta. Si ha

$$\lambda_1 = p_{12} + p_{13} + \lambda_1 p_{11}, \quad \text{cioè } \lambda_1 = \frac{2}{7} + \frac{1}{7} + \frac{\lambda_1}{7};$$

allora

$$\left(1 - \frac{1}{7}\right)\lambda_1 = \frac{2}{7} + \frac{1}{7}, \quad \frac{6\lambda_1}{7} = \frac{3}{7}, \quad \lambda_1 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Osservazione. Il valore ottenuto è in accordo con quel che si aspetterebbe, cioè

$$\lambda_1 = \frac{p_{12} + p_{13}}{p_{12} + p_{13} + p_{14} + p_{15}} = \frac{p_{12} + p_{13}}{1 - p_{11}} = \frac{(2+1)/7}{1 - 1/7} = \frac{3/7}{6/7} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$