

ESERCIZIO (TEORICO, UN PO' DIFFICILE)

Sia $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$ per qualche $\lambda > 0$. Si lancia una moneta N volte: per ogni lancio di moneta esce testa con probabilità $p \in (0,1)$, ed esce croce con probabilità $1-p$.

Sia X la v.a. che conta il numero di teste ottenute.

- 1) Trovare le densità discrete di X
- 2) Calcolare $P(N=n | X=k)$ per $n \geq k \geq 0$.

OSS,

- Si escludono i casi $p=0$ e $p=1$ per evitare casi banali.
- Se si verifica l'evento $\{N=0\}$ (non si lanciano monete), allora si verifica $\{X=0\}$ (non escono teste).

SVOLGIMENTO

1) La v.a. X assume valori interi non negativi. Conviene fare riferimento alla formula delle probabilità totali con la partizione $\{\{N=n\} : n \geq 0\}$:

$$\forall k \geq 0 \text{ (intero)} \quad P_X(k) = P(X=k) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{P(X=k | N=n)}_{(*)} \underbrace{P(N=n)}_{=\frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}}$$

dove

$$(*) = P(X=k | N=n) = \begin{cases} 0 & \text{se } k > n \\ \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & \text{se } 0 \leq k \leq n \end{cases}$$

Quindi:

$$P_X(k) = \sum_{m=k}^{\infty} \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k} \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{m=k}^{\infty} \frac{\frac{\lambda^m}{m!}}{\binom{m}{k} (m-k)!} p^k (1-p)^{m-k} \frac{\lambda^m}{m!} = \dots$$

$$\begin{aligned}
 & = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(1-p)^{n-k}}{(n-k)!} \quad \text{Diagram: } \text{A green oval contains } \lambda^{n-k+k} \text{ with a red circle around } n-k+k. \\
 & = e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(\lambda(1-p))^{n-k}}{(n-k)!} = e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^k}{k!} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(\lambda(1-p))^h}{h!} = e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{\lambda(1-p)} = \\
 & \quad \boxed{\frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda p}}
 \end{aligned}$$

Si può pensare
 al cambio d'indice $h=n-k$

OSS. Possiamo dire che $X \sim \text{Poisson}(\lambda p)$.

2) Per calcolare $P(N=n | X=k)$ usiamo la formula di Bayes perché consideriamo $P(X=k | N=n)$ (vedere uguaglianza con $(*)$ nelle slide precedente).

Quindi (per $n \geq k$, n intero)

$$P(N=n | X=k) = \frac{P(X=k | N=n) P(N=n)}{P(X=k)}$$

formule con (*), IPOTESI $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$,
 $P(X \leq k)$ è $P_X(k)$ delle domande precedente

$$\begin{aligned} &= \frac{\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}}{\frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda p}} = \frac{\cancel{n!}}{\cancel{k!} (n-k)!} \cancel{p^k} (1-p)^{n-k} \frac{\lambda^m}{\cancel{m!}} e^{-\lambda} \\ &\quad \cancel{\lambda^k p^k} e^{-\lambda p} \\ &= \frac{(1-p)^{n-k} \lambda^{n-k} e^{-\lambda + \lambda p}}{(n-k)!} = \end{aligned}$$

$$= \frac{(\lambda(1-p))^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\lambda(1-p)}.$$

OSS,

$$\text{Possiamo dire che } p(n) = \begin{cases} \frac{(\lambda(1-p))^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\lambda(1-p)} & \text{per } n \geq k \text{ intero} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

è la densità discreta

di $Z+k$ dove $Z \sim \text{Poisson}(\lambda(1-p))$.

DISTRIBUZIONE GEOMETRICA (È DISTRIBUZIONE GEOMETRICA TRASLATA).

Supponiamo di avere una successione di prove indipendenti, tutte con probabilità di successo $p \in (0, 1]$.

Siamo interessati all'istante del "1° successo" e, per questo motivo, escludiamo il caso $p=0$.

Consideriamo le seguenti v.r.:

$X = \#$ fallimenti prima del "1° successo" (assume valori in $\{0, 1, 2, \dots\}$);

$Y = \#$ prove per avere il "1° successo" (assume valori in $\{1, 2, 3, \dots\}$).

Queste v.r. sono legate tra loro perché $Y = X + 1$ e $X = Y - 1$.

Esempio: se si ha la sequenza di risultati F, F, S, \dots , si verificano gli eventi

$$\{X=2\} \text{ e } \{Y=3\}.$$

Si considera la seguente terminologia:

X ha distribuzione geometrica di parametro p

Y ha distribuzione geometrica traslata di parametro p

(in simboli scriviamo $X \sim \text{Geo}(p)$ e $Y \sim \text{GeoTraslata}(p)$).

In alcuni libri la terminologia delle due distribuzioni è scambiata. Quella che usiamo noi è in minoranza. Comunque, per non confonderci, si potrebbe dire che:

X ha distribuzione Geometrica "che punta da zero" (di parametro p);

Y ha distribuzione Geometrica "che punta da uno" (di parametro p).

OSSERVAZIONI

- Abbiamo detto si esclude il caso $p=\rho$. Infatti non si avrebbe mai il "1° successo" perché si avrebbe sempre fallimento. Per aggirare il problema si potrebbe considerare queste situazioni:
 $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ (anche $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$) e $P(X=\infty) = 1$;
 $Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ (anche $Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$) e $P(Y=\infty) = 1$.
- Nel caso $p=1$ non ci sono problemi; però possiamo dire che abbiamo sempre successo e quindi $P(X=\infty) = 1$ e $P(Y=\infty) = 1$.

CALCOLO DELLE DENSITÀ DISERBITE DI X E Y .

- Per $k \geq 0$ intero si ha $P_X(k) = P(\underbrace{F \dots F}_{k \text{ volte}} S) = \underbrace{(1-p) \dots (1-p)}_{k \text{ volte}} p = (1-p)^k p$ (vale banalmente anche per $k=0$)
- Per $h \geq 1$ intero si ha

$$P_Y(h) = P(\underbrace{F \dots F}_{h-1 \text{ volte}} S) = \underbrace{(1-p) \dots (1-p)}_{h-1 \text{ volte}} p = (1-p)^{h-1} p \quad (\text{vale banalmente anche per } h=1)$$

eppure, a partire da P_X , $P_Y(h) = P(Y=h) = P(Y-1=h-1) = P(X=h-1) = P_X(h-1) = (1-p)^{h-1} p$

essendo $h \geq 1$, si ha $h-1 \geq 0$

OSS. (spiegazione del termine "geometrica").

Per $k \geq 0$ intero $\frac{P_X(k+p)}{P_X(k)} = \frac{(1-p)^{k+1} p}{(1-p)^k p} = 1-p$ costante rispetto a k ;

Per $h \geq 1$ intero $\frac{P_Y(h+p)}{P_Y(h)} = \frac{(1-p)^{h+1} p}{(1-p)^{h-1} p} = 1-p$ costante rispetto ad h .

FORMULA DELLA SERIE GEOMETRICA

Per ogni $h \geq 0$ intero e per ogni r tale che $|r| < 1$ (cioè $-1 < r < 1$) si ha

$$\sum_{k=h}^{\infty} r^k = \frac{r^h}{1-r}.$$

oss. Spesso lo useremo
per $0 \leq r < 1$.

DIMOSTRAZIONE

$$\sum_{k=h}^{\infty} r^k = r^h + r^{h+1} + r^{h+2} + \dots \xrightarrow{*} r^h(1+r+r^2+\dots) = ?$$

Inoltre si ha $1-r^k = (1-r)(1+r+r^2+\dots+r^{k-1})$ (busta forte i prodotti e
2° membro)

da cui segue $1+r+r^2+\dots+r^{k-1} = \frac{1-r^k}{1-r} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{1}{1-r}$ poiché $|r| < 1$.

Allora, poiché la serie è il limite delle somme parziali, si ha

$$\sum_{k=h}^{\infty} r^k \stackrel{(*)}{=} r^h \lim_{k \rightarrow \infty} (1+\dots+r^{k-1}) = r^h \cdot \frac{1}{1-r} = \frac{r^h}{1-r}.$$

FORMULA PER LA "CODA" DI UNA V.A. GEOMETRICA (E PER LA TRASLATA)

- Sia $X \sim \text{Geo}(p)$. Allora, per $J \geq 0$, si ha

$$P(X \geq J) = \sum_{k=J}^{\infty} P_X(k) = \sum_{k=J}^{\infty} (1-p)^k p = p \sum_{k=J}^{\infty} (1-p)^k = p \frac{(1-p)^J}{1-(1-p)} = p \frac{(1-p)^J}{p} = (1-p)^J$$

formula segue from. con $r=1-p$

OSS. In particolare

$$J=0$$

$$P(X \geq 0) = (1-p)^0 = 1 \quad \text{in accordo con quanto ci si aspetta dalla Teoria.}$$

- Sia $Y \sim \text{GeoTraslate}(p)$. Allora, per $J \geq 1$, si ha

$$P(Y \geq J) = \sum_{h=J}^{\infty} P_Y(h) = \sum_{h=J}^{\infty} (1-p)^{h-1} p = p \frac{(1-p)^{J-1}}{1-(1-p)} = p \frac{(1-p)^{J-1}}{p} = (1-p)^{J-1}$$

OSS. In particolare

$$J=1$$

$$P(Y \geq 1) = (1-p)^{1-1} = (1-p)^0 = 1 \quad \text{in accordo con quanto ci si aspetta e con la Teoria.}$$

PROPRIETÀ DELLA "MANCANZA DI MEMORIA"

Per ogni $k, h \geq 0$ interi si ha $P(X=k+h | X \geq h) = P(X=k)$

CONTENUTO

Sapendo di aver avuto h fallimenti, la probabilità di avere altri k fallimenti prima del 1° successo è la stessa di avere k fallimenti prima del 1° successo partendo dall'inizio (cioè senza condizionare).

Dimostrazione

$$P(X=k+h | X \geq h) = \frac{P(\{X=k+h\} \cap \{X \geq h\})}{P(X \geq h)} = \frac{P(X=k+h)}{P(X \geq h)} \stackrel{\rightarrow}{=} \frac{(1-p)^{k+h} p}{(1-p)^h} = (1-p)^k p = P(X=k).$$

per il denominatore utiamo le formule per le code visto prima

$\{X=k+h\} \subset \{X \geq h\}$



COMMENTI

- La proprietà di mancanza di memoria mette in guardia dalle teorie sui numeri riguardanti per le estrazioni dei numeri al lotto.
- Si può dimostrare che, se X ha una v.a. a valori in $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ e soddisfa la proprietà di mancanza di memoria, allora X ha distribuzione geometrica.
- Si può dare un enunciato analogo per la v.a. Y . Infatti, per $k, h \geq 1$ interi, si ha

$$P(Y = k+h | Y > h) = \frac{P(\{Y = k+h\} \cap \{Y > h\})}{P(Y > h)} =$$

$\{Y = k+h\} \subset \{Y > h\}$

$$\frac{P(Y = k+h)}{P(Y \geq h+1)} = \frac{(1-p)^{h+k-1} p}{(1-p)^{h+k+1}} = (1-p)^{k-1} p = P(Y = k).$$

FORMULA PER LA CQDA VISTA PRIMA

ESERCIZIO

Si lancerà ripetutamente un dado equo.

- 1) Calcolare le probabilità di avere per la 1^a volta un numero ≤ 2 nei primi 3 lanci.
- 2) Calcolare le probabilità di avere per la 1^a volta il numero 5 dopo il 3^o lancio (dal 4^o in poi).
- 3) Calcolare le probabilità di avere per la 1^a volta un numero ≤ 4 ed un lancio pari.

SOLUZIONE

In ogni risposta si può fare riferimento ad una opportuna V.o. geometrica traslata.

1) $Y \sim \text{GeoTranslato} \quad (p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}) \quad P(Y \leq 3) = ?$

$$P(Y \leq 3) = \sum_{k=1}^3 (1-p)^{k-1} p = p \left\{ (1-p)^0 + (1-p)^1 + (1-p)^2 \right\} = \frac{1}{3} \left\{ 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} \right\} = \frac{1}{3} \cdot \frac{9+6+4}{9} = \frac{19}{27}$$

OSS. La prob. richiesta è anche uguale a $P(Z \geq 1) = 1 - P(Z=0)$ con $Z \sim \text{BIN}(n=3, p=\frac{1}{3})$

e quindi $P(Z \geq 1) = 1 - \binom{3}{0} \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(1-\frac{1}{3}\right)^{3-0} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 1 - \frac{8}{27} = \frac{27-8}{27} = \frac{19}{27}$.

2) $Y \sim \text{GeoTraslate } (p=\frac{1}{6})$. $P(Y \geq 4) = ?$

$$P(Y \geq 4) = \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{4-1} = \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$$

OSS, Potete verificare che $P(Y \geq 4) = 1 - P(Y < 4)$

$$= 1 - \sum_{k=1}^3 P(Y=k) = 1 - (P_Y(1) + P_Y(2) + P_Y(3)) \\ = \dots$$

3) $Y \sim \text{GeoTraslate } (p=\frac{4}{6}=\frac{2}{3})$. $P(Y \in \{2, 4, 6, 8, \dots\}) = ?$

$$P(Y \in \{2, 4, 6, 8, \dots\}) = \sum_{h=1}^{\infty} P_Y(2h) = \sum_{h=1}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{3}\right)^{2h-1} \frac{2}{3} = \frac{2/3}{1/3} \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{2h} = 2 \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{1}{9}\right)^h = \\ = 2 \frac{\left(\frac{1}{9}\right)^1}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2/9}{8/9} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

ESEMPIO

Abbiamo un'urna con 5 palline numerate da 1 a 5. Si estraggono palline e caso, una alle volte e con rimessaggio.

- 1) Calcolare le probabilità di estrarre per la 1^a volta il numero 4 alle 3^a estrazione
- 2) Calcolare le probabilità di estrarre per la 1^a volta un numero dispari ad una estrazione
poi delle quante in poi.
- 3) Calcolare le probabilità di estrarre due numeri dispari alle prime due estrazioni
sapendo di aver estratto per la 1^a volta il numero 5 alle 3^a estrazione..

Svolgimenti

In ogni insieme di più feste sperimenta ad una V.e. geometrica la platea.

1) $Y \sim \text{Geostesiate } (P = \frac{1}{5})$ $P(Y=3) = ?$

$$P(Y=3) = P_Y(3) = (1-P)^{3-1} P = \left(1 - \frac{1}{5}\right)^{3-1} \frac{1}{5} = \left(\frac{4}{5}\right)^2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{16}{125}$$

2) $Y \sim \text{Geo Translate } (P = \frac{3}{5})$ $P\{Y \in \{4, 6, 8, 10, \dots\}\} = ?$

$$\begin{aligned} P\{Y \in \{4, 6, 8, 10, \dots\}\} &= \sum_{h=2}^{\infty} P_Y(2h) = \sum_{h=2}^{\infty} (1-P)^{2h-1} P = \sum_{h=2}^{\infty} \left(1 - \frac{3}{5}\right)^{2h-1} \frac{3}{5} = \frac{3}{5} \sum_{h=2}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^{2h-1} = \\ &= \frac{3/5}{2/5} \sum_{h=2}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^{2h} = \frac{3}{2} \sum_{h=2}^{\infty} \left(\frac{4}{25}\right)^h = \frac{3}{2} \cdot \frac{(4/25)^2}{1 - 4/25} = \frac{3}{2} \cdot \frac{16/625}{21/25} = \frac{3}{2} \cdot \frac{16}{625} \cdot \frac{25}{21} = \frac{8}{175} \end{aligned}$$

3) $E = \{\text{due numeri disponibili nelle prime due estrazioni}\}$

$F = \{\text{esce 5 per le 1^a volta alle 3^a estrazione}\}$

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{P((1\circ3, 1\circ3, 5))}{\left(1 - \frac{1}{5}\right)^{3-1} \frac{1}{5}} = \frac{\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5}}{\left(\frac{4}{5}\right)^2 \cdot \frac{1}{5}} = \frac{\frac{4}{25}}{\frac{16}{25}} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}.$$

OSS.

Rispetto alle probabilità condizionate $P(\cdot|F)$ per le prime due estrazioni abbiamo

4 casi: $(\text{disponi, disponi}), (\text{disponi, pari}), (\text{pari, disponi}), (\text{pari, pari})$.

eventi E

Tutti questi casi hanno probabilità $\frac{1}{4}$ perché $\begin{cases} \text{disponi} \leftrightarrow 1\circ3 \\ \text{pari} \leftrightarrow 2\circ4 \end{cases}$

ESERCIZI

Si considerino lanci ripetuti di due dadi equi.

- 1) Calcolare le probabilità che esca per la prima volta una coppia di numeri minori o uguali a 3 ad un lancio casuale, dal Terzo in poi.
- 2) Calcolare le probabilità che esca per la 1^a volta "somma 7" al k° lancio ($\forall k \in \{1, 2, 3\}$) sapendo che questo accade in uno dei primi Tre lanci.
- 3) Calcolare le probabilità che esca per la 1^a volta (dispari, dispari) ad un lancio multipli di 3 sapendo che è questo è accaduto ad un lancio pari.

Svolgimenti

1) $Y \sim \text{GeoTossate} (p = \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4})$

OSS. Sono le coppie $(1,1), (1,2), (1,3)$

$(2,1), (2,2), (2,3)$

$(3,1), (3,2), (3,3)$

Quindi sono 9 coppie su 36, tutte con prob. $\frac{1}{36}$,
da cui segue $p = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

Oppure, per indipendenza di eventi definiti a

a dadi diversi, si ha $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1)P(E_2)$

$$= \frac{\#\{(1,2,3)\}}{6} \cdot \frac{\#\{(1,2,3)\}}{6} = \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(Y \in \{3, 5, 7, \dots\}) = ?$$

$$\begin{aligned} P(Y \in \{3, 5, 7, \dots\}) &= \sum_{h=2}^{\infty} P_Y(2h-1) \\ &= \sum_{h=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{2h-1-1} \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \sum_{h=2}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{2h-2} = \\ &= \frac{1}{4} \sum_{h=2}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{2(h-1)} = \frac{1}{4} \sum_{h=2}^{\infty} \left(\frac{9}{16}\right)^{h-1} = \\ &= \frac{1/4}{9/16} \sum_{h=2}^{\infty} \left(\frac{9}{16}\right)^h = \frac{1}{4} \cdot \frac{16}{9} \cdot \frac{(9/16)^2}{1 - 9/16} = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{16}{9} \left(\frac{9}{16}\right)^2 \cdot \frac{16}{7} = \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{16} \cdot \frac{16}{7} = \frac{9}{28} \end{aligned}$$

2) $Y \sim \text{Geo Translate} \left(P = \frac{5}{36} = \frac{1}{6} \right)$

Somma di 6 casi su 36 tutti con probabilità $\frac{1}{36}$: $(1,6), (6,1), (2,5), (5,2), (3,4), (4,3)$

Calcoli per questa approssimazione

$$1 + \frac{5}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 1 + \frac{5}{6} + \frac{25}{36} = \frac{36 + 30 + 25}{36} = \frac{91}{36}$$

$$\frac{5}{6} / \frac{91}{36} = \frac{5}{6} \cdot \frac{36}{91} = \frac{30}{91}$$

$$\frac{25}{36} / \frac{91}{36} = \frac{25}{91}$$

$P(Y=k | Y \leq 3) = ?$

$$P(Y=k | Y \leq 3) = \frac{P(\{Y=k\} \cap \{Y \leq 3\})}{P(Y \leq 3)} = \frac{P(Y=k)}{\sum_{j=1}^3 P(Y=j)}$$

$$= \frac{P(Y=k)}{P(Y \leq 3)} = \frac{(1-p)^{k-1} p}{\sum_{j=1}^3 (1-p)^{j-1} p} = \frac{(1-p)^{k-1}}{(1-p)^0 + (1-p)^1 + (1-p)^2}$$

$$= \begin{cases} k=1 & \frac{1}{1 + \frac{5}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2} = \frac{36}{91} \\ k=2 & \frac{\frac{5}{6}}{1 + \frac{5}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2} = \frac{30}{91} \\ k=3 & \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^2}{1 + \frac{5}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2} = \frac{25}{91} \end{cases}$$

Somma = 1
OK
In accordo
con
la teoria

$\{X=k\} \subset \{X \leq 3\}$
perché
 $k \in \{1, 2, 3\}$

3) $Y \sim \text{Geometrische } (\rho = \frac{1}{4})$

Qui si ragiona come per le 19 domande con le 9 coppie

$$(1,1), (1,3), (1,5), \\ (3,1), (3,3), (3,5), \\ (5,1), (5,3), (5,5).$$

Anche qui, per calcolare l'eventuale

$$P(D_1 \cap D_2) = P(D_1)P(D_2) = \frac{\#\{1,3,5\}}{6} \cdot \frac{\#\{1,3,5\}}{6} = \\ = \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(Y \in \{\text{multipli di } 3\} \mid Y \in \{\text{numeri pari}\}) = ?$$

Multiplo di 2

$$P(Y \in \{\text{multipli di } 3\} \mid Y \in \{\text{multipli di } 2\}) =$$

$$= \frac{P(\{Y \in \{3, 6, 9, 12, \dots\} \cap \{Y \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots\}\})}{P(Y \in \{2, 4, 6, \dots\})}$$

$$= \frac{P(Y \in \{6, 12, 18, \dots\})}{P(Y \in \{2, 4, 6, \dots\})} =$$

multipli di $2 \cdot 3 = 6$

$$= \frac{\sum_{h=1}^{\infty} P_Y(6h)}{\sum_{h=1}^{\infty} P_Y(2h)} = \frac{\sum_{h=1}^{\infty} (1-p)^{6h-1} p}{\sum_{h=1}^{\infty} (1-p)^{2h-1} p} = \frac{\cancel{p} \frac{(1-p)^6}{1-(1-p)^6}}{\cancel{p} \frac{(1-p)^2}{1-(1-p)^2}} = \frac{(1-p)^{14}}{1-(1-p)^6} \cdot \frac{1-(1-p)^2}{(1-p)^2} = \left(\frac{1}{4}\right)^4 \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}{1-\left(\frac{1}{4}\right)^6} =$$

$$= \frac{81}{256} \cdot \frac{1-\frac{9}{16}}{1-\frac{729}{4096}} = \frac{81}{256} \cdot \frac{7}{16} \cdot \frac{4096}{3367} = \frac{567}{3367}$$