Prova di esame dei corsi di Fondamenti di Informatica e Informatica Teorica

12 settembre 2016

Problema 1. Sia $\Sigma = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ e sia $x = x_1 x_2 \ldots x_n$ una parola in Σ^*.
Si consideri una caccia al tesoro in cui il tesoro, rappresentato dal numero intero 0, può esistere o meno e in cui la parola x contiene la catena di indizi che portano a scoprire il tesoro, se esiste, o a concludere che il tesoro non esiste nel caso contrario. In particolare

- il primo carattere x_1 di x (un intero compreso fra 0 e 9 oppure un $\square$) è il primo indizio: se $x_1 = 0$ allora il tesoro è stato trovato, se $x_1 = \square$ allora il tesoro non esiste, altrimenti il prossimo indizio della caccia al tesoro è nella posizione $1 + x_1$ della parola x (ossia, il prossimo indizio è il carattere x_{1+x_1});
- in generale, se dopo un certo numero di passi non è ancora stato trovato il tesoro e non si è capito che esso non esiste, e, dunque, si è arrivati a leggere il carattere x_i, allora: se $x_i = 0$ allora il tesoro è stato trovato, se $x_i = \square$ allora il tesoro non esiste, altrimenti il prossimo indizio della caccia al tesoro è nella posizione $i + x_i$ della parola x (ossia, il prossimo indizio è il carattere x_{i+x_i}).

Si chiede, dunque, di progettare una macchina di Turing che, con input $x \in \Sigma^*$, decide se, in accordo alle regole appena descritte, x contiene il tesoro.

Problema 2. Si consideri il problema seguente: dati un grafo non orientato $G = (V,E)$ ed un intero $k \in \mathbb{N}$, decidere se V può essere partizionato in k sottoinsiemi $V_1, \ldots, V_k$ ciascuno dei quali induce un sottografo completo in G.

Dopo aver formalizzato la definizione del suddetto problema Γ mediante la tripla $\langle I_\Gamma, S_\Gamma, \pi_\Gamma \rangle$, e dopo aver ricordato la definizione del problema COLORABILITÀ, si consideri la seguente funzione $f : I_{\text{COL}} \rightarrow I_\Gamma$: per ogni $\langle G = (V,e), k \rangle \in I_{\text{COL}}$,

$$f(G,k) = \langle \overline{G} = (V, \overline{E}), k \rangle,$$

dove $\overline{E} = \{(u,v) : u \in V \wedge v \in V \wedge (u,v) \notin E\}$.
Si dimostri che f è una riduzione polinomiale da COL a Γ.

Problema 3. Si considerino i due problemi seguenti:

a) dati un grafo non orientato $G = (V,E)$ ed un intero $k \in \mathbb{N}$, decidere se G ha un Vertex Cover di cardinalità $> k$;

b) dati un grafo non orientato $G = (V,E)$ ed un intero $k \in \mathbb{N}$, decidere se ogni Vertex Cover in G ha cardinalità $> k$.

Dopo aver formalizzato la definizione dei suddetti problemi mediante la tripla $\langle I, S, \pi \rangle$, si collochi ciascuno di essi nella corretta classe di complessità.

Soluzione

Problema 1. Ad ogni passo, leggendo il carattere c nella cella scandita dalla testina, la macchina T che decide il problema deve operare come segue:

- se $c = 0$, allora T entra nello stato di accettazione q_A e termina;
- se $c = \square$, allora T entra nello stato di rigetto q_R e termina;
- se c è un valore compreso fra 1 e 9, allora T sposta la sua testina a destra di c posizioni.

Per eseguire quanto indicato nel terzo punto sopra, dotiamo T, oltre che dello stato iniziale q_0, dello stato di accettazione q_A e dello stato di rigetto q_R, degli stati q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8 e q_9: quando T è nello stato q_i, con $1 \leq i \leq 9$, indipendentemente da quello che legge la sua testina, sposta la testina a destra di una posizione ed entra nello stato q_{i-1}.
Quindi, la macchina T è descritta dalle quintuple seguenti:

$$\langle q_0, 0, 0, q_A, ferma \rangle, \qquad \langle q_0, \square, \square, q_R, ferma \rangle, \qquad \langle q_0, i, i, q_i ferma \rangle \ \forall\, 1 \leq i \leq 9,$$

$$\langle q_i, x, x, q_{i-1}, destra \rangle \ \forall\, 1 \leq i \leq 9, \ \forall\, x \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \cup \{\square\}.$$

Problema 2. Il problema decisionale considerato, che chiameremo PARTIZIONE IN CLIQUE (in breve *PIC*), può essere formalizzato come di seguito descritto:

- $I_{PIC} = \{\langle G = (V,E), k \rangle : G$ è un grafo non orientato e $k \in \mathbb{N}\}$;
- $S_{PIC}(G,k) = \{\{V_1, \ldots, V_k\} : \forall\, i = 1, \ldots, k\ [\, V_i \subseteq V\,] \wedge \cup_{i=1}^k V_i = V \wedge \forall\, i, j = 1, \ldots, k : i \neq j\ [\, V_i \cap V_j = \emptyset\,]\}$;
- $\pi_{PIC}(G,k,S_{PIC}(G,k)) = \exists \{V_1, \ldots, V_k\} \in S_{PIC}(G,k) : \forall\, i = 1, \ldots, k\ \forall u, v \in V_i\ [\, (u,v) \in E\,]$.

Ricordiamo, ora, che il problema COLORABILITÀ consiste nel chiedersi, dati un grafo non orientato $G = (V,E)$ ed un intero positivo k, se è possibile colorare ciascun nodo di G con uno di (al più) k colori possibili in modo tale che i nodi di ciascuna coppia di nodi adiacenti abbiano ricevuto colori diversi. Una delle possibili formalizzazioni del problema COLORABILITÀ è la seguente:

- $I_{COL} = \{\langle G = (V,E), k \rangle : G$ è un grafo non orientato e $k \in \mathbb{N}\}$;
- $S_{COL}(G,k) = \{\{V_1, \ldots, V_k\} : \forall\, i = 1, \ldots, k\ [\, V_i \subseteq V\,] \wedge \cup_{i=1}^k V_i = V \wedge \forall\, i, j = 1, \ldots, k : i \neq j\ [\, V_i \cap V_j = \emptyset\,]\}$;
- $\pi_{COL}(G,k,S_{COL}(G,k)) = \exists \{V_1, \ldots, V_k\} \in S_{COL}(G,k) : \forall\, i = 1, \ldots, k\ \forall u, v \in V_i\ [\, (u,v) \not\in E\,]$.

Osserviamo, ora, che istanze $\langle G = (V,E), k \rangle$ di *COL* in cui $k \geq |V|$ sono sempre, banalmente, istanze sì: infatti, in tal caso, è sufficiente colorare ciascun nodo del grafo con un colore diverso. Pertanto, il problema è **NP**-completo nel caso in cui $k < |V|$. Sia, dunque, $\langle G = (V,E), k \rangle$ una istanza di COLORABILITÀ tale che $k < |V|$ e sia $f(G,k) = \langle \overline{G} = (V, \overline{E}), k \rangle$ l'istanza corrispondente di *PIC*.
Se $\langle G = (V,E), k \rangle$ è una istanza sì di COLORABILITÀ, allora esiste una partizione di V in k insiemi $V_1, \ldots, V_k$ tale che, per ogni $i = 1, \ldots, k$ e per ogni coppia di nodi u e v contenuti entrambi in V_i, si ha che $(u,v) \not\in E$.

Ma, per definizione di $\overline{E}$, questo significa che, per ogni $i = 1,\dots,k$ e per ogni coppia di nodi u e v contenuti entrambi in V_i, si ha che $(u,v) \in \overline{E}$: quindi per ogni $i = 1,\dots,k$, V_i è un sottografo completo di $\overline{G}$. In conclusione, $\{V_1,\dots,V_k\}$ è una partizione di $\overline{G}$ in k sottografi completi e questo significa che $\langle \overline{G} = (V,\overline{E}),k\rangle$ è una istanza sì di *PIC*.
Viceversa, se $\langle \overline{G} = (V,\overline{E}),k\rangle$ è una istanza sì di *PIC*, allora esiste una partizione di V in k insiemi $V_1,\dots,V_k$ tale che, per ogni $i = 1,\dots,k$ e per ogni coppia di nodi u e v contenuti entrambi in V_i, si ha che $(u,v) \in \overline{E}$. Ma, per definizione di $\overline{E}$, questo significa che, per ogni $i = 1,\dots,k$ e per ogni coppia di nodi u e v contenuti entrambi in V_i, si ha che $(u,v) \notin E$: quindi per ogni $i = 1,\dots,k$, V_i è un insieme indipendente in G ed i suoi nodi possono essere colorati con lo stesso colore. Quindi, G può essere colorato con k colori e, dunque, $\langle G = (V,E),k\rangle$ è una istanza sì di COLORABILITÀ. Questo dimostra che f è una riduzione da COLORABILITÀ a *PIC*.

Per calcolare f è sufficiente calcolare l'insieme $\overline{E}$ e, quindi, considerare tutte le coppie di nodi e, per ciascuna di esse, inserire l'arco corrispondente in $\overline{E}$ se e soltanto se esso non è in E. L'algoritmo che calcola f è pertanto descritto nel seguente frammento di codice:

```
Ē ← ∅;
for all (u ∈ V) do begin
    for all (v ∈ V) do begin
        if (u ≠ v ∧ (u,v) ∉ E) then Ē ← Ē ∪ {(u,v)};
    end;
end.
```

L'algoritmo appena descritto richiede $\mathbf{O}(|V|^2|E|)$ passi e, quindi, calcolare f richiede tempo polinomiale in $|G|$. Questo termina la prova che f è una riduzione polinomiale da COLORABILITÀ a *PIC*.

Problema 3. Indicheremo i due problemi in esame, rispettivamente, con l'acronimo Γ_a e Γ_b.
Entrambi i problemi sono definiti sull'insieme di istanze I_Γ e sull'insieme di soluzioni possibili $_\Gamma$ di seguito descritti:

- $I_\Gamma = \{\langle G = (V,E),k\rangle : G$ è un grafo non orientato e $k \in \mathbb{N}^+\}$;
- $S_\Gamma(G,k) = \{V' : V' \subseteq V\}\ \}$.

I predicati dei due problemi sono, invece, distinti.

Il predicato π_{Γ_a} del problema Γ_a è molto simile al predicato che definisce il problema VERTEX COVER, e differisce da quest'ultimo soltanto per la cardinalità del vertex cover richiesto:

$$\pi_{\Gamma_a}(G,k,S_\Gamma(G,k)) = \exists\, V' \in S_\Gamma(G,k) :\ |V'| > k \ \wedge\ \forall\, (u,v) \in E\ [\ u \in V' \ \vee\ v \in V'\ ].$$

Poiché ogni grafo $G = (V,E)$ ha, banalmente, un vertex cover di $|V!$ nodi (e, altrettanto banalmente, non ha un vertex cover con più di $|V|$ nodi), per decidere se una istanza $\langle G = (V,E),k\rangle$ di Γ_a è una istanza sì è sufficiente verificare se $k < |V|$: in caso affermativo $\langle G = (V,E),k\rangle$ è una istanza sì, in caso negativo $\langle G = (V,E),k\rangle$ è una istanza no. Questo prova che il problema Γ_a è in $\mathbf{P}$.

Il predicato π_{Γ_b} del problema Γ_b, pur essendo collegato al predicato di VERTEX COVER, è sostanzialmente diverso da esso in quanto richiede che *ogni* soluzione possibile soddisfi una certa proprietà. In particolare, π_{Γ_b} richiede che, se una soluzione possibile è un vertex cover, allora la sua cardinalità deve essere maggiore di k:

$$\pi_{\Gamma_b}(G,k,S_\Gamma(G,k)) = \forall\, V' \in S_\Gamma(G,k) :\ \left[\ \forall\, (u,v) \in E\ [\ u \in V' \ \vee\ v \in V'\ ]\ \rightarrow |V'| > k\ \right],$$

che può essere anche scritto

$$\pi_{\Gamma_b}(G,k,S_\Gamma(G,k)) = \forall\, V' \in S_\Gamma(G,k) : \ \big[\neg\big(\forall\, (u,v) \in E\ [\ u \in V' \ \vee\ v \in V'\ ]\ \big) \ \vee\ |V'| > k\ \big].$$

Consideriamo ora la negazione del predicato π_{Γ_b}:

$$\neg\ [\pi_{\Gamma_b}(G,k,S_\Gamma(G,k)) = \exists\, V' \in S_\Gamma(G,k) : \ \forall\, (u,v) \in E\ [\ u \in V' \ \vee\ v \in V'\ ]\ \wedge\ |V'| \leq k.$$

Osserviamo, ora, che detti I_{VC}, S_{VC} e π_{VC}, rispettivamente, l'insieme delle istanze, l'insieme delle soluzioni possibili e il predicato del problema VERTEX COVER, si ha che $I_{VC} = I_\Gamma$ e, per ogni $\langle G = (V,E), k\rangle \in I_\Gamma$, $S_{VC}(G,k) = S_\Gamma(G,k)$ e $\neg\ [\ \pi_{\Gamma_b}(G,k,S_\Gamma(G,k)) = \pi_{VC}(G,k,S_{VC}(G,k))$. Questo signifca che il problema Γ_b^c, complemento di Γ_b, coincide con il problema VERTEX COVER. Quindi, Γ_b^c è **NP**-completo e Γ_b è co**NP**-completo.