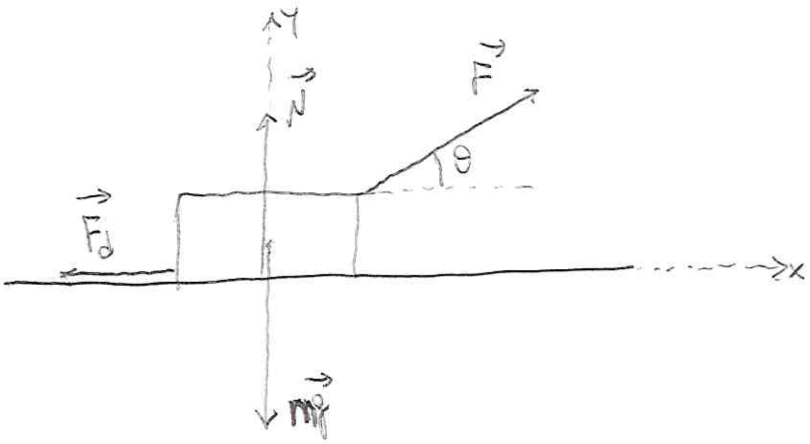
CORSO DI FISICA PER INFORMATICA

SECONDO APPELLO AUTUNNALE DEL 19/09/2022

Problema n. 1



$\vec{F}$: forza applicata

$\vec{F}_d$: forza di attrito dinamico

$\vec{N}$: reazione normale

$m\vec{g}$: forza peso

a) Sulla base del diagramma delle forze rappresentato qua sopra, possiamo scrivere la condizione per cui la cassa si muove di moto rettilineo uniforme:

$$\vec{F} + m\vec{g} + \vec{F}_d + \vec{N} = 0 \quad ; \text{ poniamo } \quad F = |\vec{F}|$$

Essendo
$$F_x = F\cos\theta, \quad F_y = F\,\text{sen}\,\theta$$

$$(m\vec{g})_x = 0, \quad (m\vec{g})_y = -mg$$

$$N_x = 0, \quad N_y = |\vec{N}| = N$$

$$F_{d,x} = -\mu_d N \qquad F_{d,y} = 0,$$

valgono quindi le due equazioni seguenti:

$$\begin{matrix} F_x + (m\vec{g})_x + F_{d,x} + N_x = 0 \\ F_y + (m\vec{g})_y + F_{d,y} + N_y = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} F\cos\theta - \mu_d N = 0 \\ F\,\text{sen}\,\theta - mg + N = 0 \end{cases}$$

Risolviamo questo sistema lineare di due equazioni nelle incognite F e N:

$$\begin{cases} F\cos\vartheta - \mu_d N = 0 \\ F\,\text{sen}\,\vartheta + N = mg \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N = -F\,\text{sen}\,\vartheta + mg \\ F\cos\vartheta - \mu_d(-F\,\text{sen}\,\vartheta + mg) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F\cos\vartheta + \mu_d F\,\text{sen}\,\vartheta - \mu_d mg = 0 \\ N = -F\,\text{sen}\,\vartheta + mg \end{cases} \qquad \begin{cases} (\cos\vartheta + \mu_d\,\text{sen}\,\vartheta)\,F = \mu_d mg \\ N = -F\,\text{sen}\,\vartheta + mg \end{cases}$$

$$\begin{cases} F = \dfrac{\mu_d mg}{\cos\vartheta + \mu_d\,\text{sen}\,\vartheta} \\ N = -\dfrac{\mu_d mg\,\text{sen}\,\vartheta}{\cos\vartheta + \mu_d\,\text{sen}\,\vartheta} + mg = mg\left[1 - \dfrac{\mu_d\,\text{sen}\,\vartheta}{\cos\vartheta + \mu_d\,\text{sen}\,\vartheta}\right] = \dfrac{mg\cos\vartheta}{\cos\vartheta + \mu_d\,\text{sen}\,\vartheta} \end{cases}$$

Quindi, in definitiva:

$$\boxed{\begin{aligned} N &= \frac{mg\cos\vartheta}{\cos\vartheta + \mu_d\,\text{sen}\,\vartheta} = \frac{(30\text{ kg})(9.81\text{ m s}^{-2})\cos 30^\circ}{\cos 30^\circ + 0.3\,\text{sen}\,30^\circ} \simeq 250.85\text{ N} \\ F &= \frac{\mu_d mg}{\cos\vartheta + \mu_d\,\text{sen}\,\vartheta} = \frac{0.3\cdot(30\text{ kg})(9.81\text{ m s}^{-2})}{\cos 30^\circ + 0.3\,\text{sen}\,30^\circ} \simeq 86.90\text{ N} \end{aligned}}$$

b) Lungo l'asse y vale sempre la condizione

$$N = -F\,\text{sen}\,\vartheta + mg$$

Affinché la cassa non si sollevi dal piano orizzontale, deve risultare $N \geq 0$, cioè $-F\,\text{sen}\,\vartheta + mg \geq 0 \Rightarrow F\,\text{sen}\,\vartheta \leq mg$, e dunque $F \leq \dfrac{mg}{\text{sen}\,\vartheta}$; allora $\boxed{F_M = \dfrac{mg}{\text{sen}\,\vartheta} = \dfrac{(30\text{ kg})(9.81\text{ m s}^{-2})}{\text{sen}\,30^\circ} \simeq 588.60\text{ N}}$

c) Nel punto a) abbiamo ricavato che, nel caso di moto rettilineo uniforme, risulta

$$F = \frac{\mu_d m g}{\cos\theta + \mu_d \operatorname{sen}\theta}$$

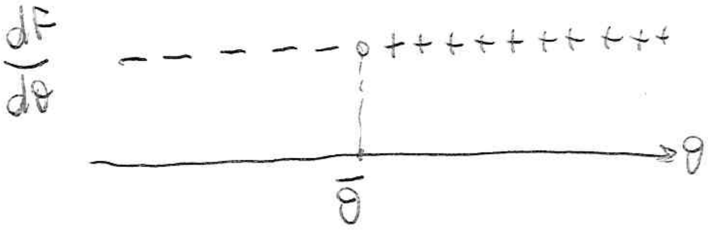
Fissati i parametri m e μ_d, cerchiamo per quale valore di θ esiste un minimo per F.

$$\frac{dF}{d\theta} = -\frac{\mu_d m g}{(\cos\theta + \mu_d \operatorname{sen}\theta)^2}\left(-\operatorname{sen}\theta + \mu_d \cos\theta\right) = \frac{\mu_d m g\,(\operatorname{sen}\theta - \mu_d \cos\theta)}{(\cos\theta + \mu_d \operatorname{sen}\theta)^2}$$

Dunque risulta $\frac{dF}{d\theta} \geq 0$ per $\operatorname{sen}\theta - \mu_d \cos\theta \geq 0$, cioè per

$$\tan\theta \geq \mu_d \quad \Rightarrow \quad \theta \geq \arctan \mu_d = \bar{\theta}$$

Diagramma del segno di $\frac{dF}{d\theta}$:



$\Rightarrow$ $F(\theta)$ è decrescente per $\theta < \bar{\theta}$, ed è crescente per $\theta > \bar{\theta}$.

Dunque, per $\theta = \bar{\theta}$ la funzione $F(\theta)$ ha un minimo.

$$\boxed{\bar{\theta} = \arctan \mu_d = \arctan 0.3 \simeq 0.291 \text{ rad} \simeq 16.7^\circ}$$

$$F_{min} = \frac{\mu_d m g}{\frac{1}{\sqrt{1+0.3^2}} + \frac{0.3 \cdot 0.3}{\sqrt{1+0.3^2}}} = \frac{\mu_d m g}{\sqrt{1+0.3^2}} \simeq 84.57 \text{ N}$$

(essendo $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+(\tan\theta)^2}}$ e $\operatorname{sen}\theta = \frac{\tan\theta}{\sqrt{1+(\tan\theta)^2}}$)

Problema n. 2

a) Nel contatto tra i due cilindri il momento totale delle forze agenti nel sistema e' nullo (trattandosi di forze interne al sistema dei due cilindri), per cui il momento angolare totale del sistema dei due cilindri si conserva nel contatto.

In particolare, si conserva la componente del momento angolare totale lungo l'asse comune ai due cilindri.

Preliminarmente, osserviamo che il volume del secondo cilindro e' $V_2 = \pi r^2 h = \pi \left(\frac{R}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{H}{2}\right) = \frac{\pi R^2 H}{8} = \frac{V_1}{8}$,

dove $V_1 = \pi R^2 H$ e' il volume del primo cilindro.
Essendo i due cilindri costituiti dello stesso materiale, le loro masse e i loro volumi stanno nello stesso rapporto, per cui risulta

$$m_2 = \frac{m_1}{8} = \frac{M}{8}$$

Dalla conservazione della componente del momento angolare totale lungo l'asse di rotazione comune, otteniamo quindi la relazione

$$I_{z,f}\,\omega_f = I_{z,i}\,\omega_i$$

Inizialmente ruota solo il primo cilindro, per cui risulta

$$I_{z,i} = \frac{1}{2} M R^2$$

Dopo il contatto, i due cilindri ruotano attorno all'asse di rotazione comune con la stessa velocità angolare; risulta

$$I_{z,f} = I_1 + I_2 = \frac{1}{2} M R^2 + \frac{1}{2} m_2 r^2 = \frac{1}{2} M R^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{M}{8} \cdot \frac{R^2}{4} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{32}\right) M R^2 = \frac{33}{64} M R^2$$

Dunque, ricaviamo:

$$\omega_f = \frac{I_{z,i}\,\omega_i}{I_{z,f}} = \frac{\frac{1}{2} \cancel{MR^2}\,\omega_i}{\frac{33}{64}\cancel{MR^2}} = \frac{32}{33}\,\omega_i$$

$$\boxed{\omega_f = \frac{32}{33}\,\omega_i = \frac{32}{33}\left(2 \text{ rad s}^{-1}\right) = 1.939 \text{ rad s}^{-1}}$$

b) Dopo il contatto, l'energia cinetica del sistema dei due cilindri è:

$$\boxed{\begin{aligned} K_f &= \frac{1}{2} I_{z,f}\,\omega_f^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{33}{64} M R^2 \cdot \left(\frac{32}{33}\right)^2 \omega_i^2 = \\ &= \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{33}}{\cancel{64}\,2} \cdot \frac{\overset{1}{\cancel{32}} \cdot \overset{8}{\cancel{32}}}{33\,\cancel{8}} M R^2 \omega_i^2 = \frac{8}{33} M R^2 \omega_i^2 = \\ &= \frac{8}{33} (1 \text{ kg}) (0.2 \text{ m})^2 \left(2 \text{ rad s}^{-1}\right)^2 = 3.879 \times 10^{-2} \text{ J} \end{aligned}}$$

c) Il lavoro svolto dalle forze impulsive durante il contatto e', per il teorema dell' energia cinetica (essendo le forze impulsive le uniche forze agenti sul sistema durante il contatto):

$$\boxed{W = K_f - K_i}$$

$$K_i = \frac{1}{2} I_{z,i}\, \omega_i^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} MR^2 \omega_i^2 = \frac{1}{4} MR^2 \omega_i^2$$

$$\Rightarrow \boxed{W = \left(\frac{8}{33} - \frac{1}{4}\right) MR^2 \omega_i^2 = \frac{32-33}{132} MR^2 \omega_i^2 = -\frac{1}{132} MR^2 \omega_i^2 = -\frac{1}{132} (1\,kg)(0.2\,m)^2 (2\,rad/s)^2 = -1.212 \times 10^{-3}\,J}$$

Problema n. 3

a) A regime, la corrente passa nella maglia contenente il generatore e le due resistenze in serie; per la legge di Kirchhoff delle maglie, risulta:

$$\mathcal{E} - R_1 i - R_2 i = 0 \Rightarrow (R_1 + R_2)\, i = \mathcal{E}$$

$$\Rightarrow \boxed{i = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2} = \frac{150\ \text{V}}{50\ \Omega + 100\ \Omega} = \frac{150\ \text{V}}{150\ \Omega} = 1\ \text{A}}$$

La differenza di potenziale a regime ai capi del resistore R_2 è quindi:

$$\boxed{\begin{aligned} V_2 &= \mathcal{E} - R_1 i = \mathcal{E} - \frac{R_1 \mathcal{E}}{R_1 + R_2} = \mathcal{E}\left(1 - \frac{R_1}{R_1 + R_2}\right) = \\ &= \frac{\cancel{R_1} + R_2 - \cancel{R_1}}{R_1 + R_2}\,\mathcal{E} = \frac{R_2\, \mathcal{E}}{R_1 + R_2} = \frac{100\ \Omega \cdot 150\ \text{V}}{150\ \Omega} = 100\ \text{V} \end{aligned}}$$

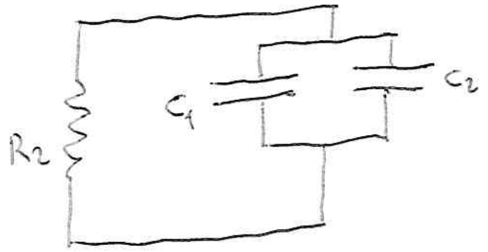
b) Energia potenziale elettrostatica immagazzinata a regime nel sistema dei due condensatori:

$$U = U_1 + U_2 = \frac{1}{2} C_1 V_2^2 + \frac{1}{2} C_2 V_2^2,$$

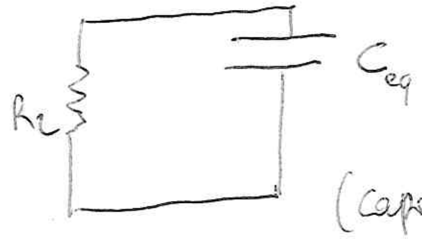
poiché la differenza di potenziale tra le armature di C_1 è uguale alla differenza di potenziale tra le armature di C_2 per come è fatto il circuito

$$\Rightarrow \boxed{U = \frac{1}{2}(C_1 + C_2) V_2^2 = \frac{1}{2}\left[(20 + 18) \cdot 10^{-9}\ \text{F}\right] \cdot (100\ \text{V})^2 = 1.9 \times 10^{-4}\ \text{J}}$$

c) Dal momento in cui l'interruttore T viene aperto, i due condensatori si scaricano attraverso la resistenza R_2:



Questo circuito equivale al seguente:



, con $C_{eq} = C_1 + C_2$ (capacità equivalente dei due condensatori C_1 e C_2 collegati in parallelo).

Pertanto, la costante di tempo di scarica del circuito è

$$\boxed{\begin{aligned}\tau &= R_2 C_{eq} = R_2 (C_1 + C_2) = \\ &= (100\ \Omega)\left[(20+18)\cdot 10^{-9}\ F\right] = 3.8\ \mu s\end{aligned}}$$