Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità (ed insegnamenti mutuati)
Anno accademico: `2013-2014`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Simulazione 1

Esercizio 1. Un'urna ha 3 palline bianche e 4 nere. Si estraggono a caso 3 palline dall'urna, una alla volta e senza reinserimento.
`D1`) Calcolare la probabilità di estrarre almeno una pallina bianca.
`D2`) Calcolare la probabilità di estrarre palline tutte dello stesso colore.

Esercizio 2. Si lancia ripetutamente una moneta equa fino a quando esce per la prima volta testa. Se esce per la prima volta nei primi 3 lanci, si lancia la *moneta truccata 1*, la cui probabilità di ottenere testa è $p_1 = \frac{2}{5}$; se esce per la prima volta dal quarto lancio in poi, si lancia la *moneta truccata 2*, la cui probabilità di ottenere testa è $p_2 = \frac{3}{5}$.
`D3`) Calcolare la probabilità di ottenere testa nel lancio della moneta truccata scelta.
`D4`) Calcolare la probabilità di aver scelto la *moneta truccata 1* sapendo di aver ottenuto testa nel lancio della moneta truccata scelta.

Esercizio 3. Definiamo la seguente densità congiunta: $p_{X_1,X_2}(1,k) = a(\frac{1}{2})^k$ per $k \geq 1$ intero, dove $a > 0$ è una costante da calcolare, e $p_{X_1,X_2}(2,k) = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{2^k}{k!}e^{-2}$ per $k \geq 0$ intero.
`D5`) Trovare la densità marginale di X_1 dopo aver calcolato il valore di a.
`D6`) Calcolare $P(X_1 + X_2 = 2)$ dopo aver calcolato il valore di a.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con densità continua $f_X(t) = 6t(1-t)1_{(0,1)}(t)$.
`D7`) Trovare la funzione di distribuzione di $Y = e^{-X}$.
`D8`) Calcolare $\mathbb{E}[Z]$ dove $Z = 1/X$.

Esercizio 5.
`D9`) Sia $N_t = \sum_{n\geq 1} 1_{T_n \leq t}$ (per $t \geq 0$) un processo di Poisson con intensità di $\lambda = 3$. Calcolare $P(N_7 \geq 2)$.
`D10`) Sia X una variabile aleatoria normale con media $\mu = 2$ e varianza $\sigma^2 = 16$. Calcolare $P(X \geq 1)$.

Esercizio 6. Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. (indipendenti e identicamente distribuite).
`D11`) Dire per quale valore di m si ha

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - m\right| > \varepsilon\right) = 0 \text{ per ogni } \varepsilon > 0,$$

nel caso in cui le variabili aleatorie $\{X_n : n \geq 1\}$ abbiano densità continua $f(t) = 2t1_{(0,1)}(t)$.
`D12`) Dire per quale valore di y si ha

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} - \frac{1}{4}}{y/\sqrt{n}} \leq 1\right) = \Phi(2)$$

nel caso in cui le variabili aleatorie $\{X_n : n \geq 1\}$ abbiano densità continua $f(t) = 4e^{-4t}1_{(0,\infty)}(t)$.

Esercizio 7 (*solo per Lauree Magistrali*). Consideriamo una catena di Markov omogenea $\{X_n : n \geq 0\}$ con spazio degli stati $E = \{1,2,3\}$ e matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

per $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 > 0$ tali che $a_1 + a_2 + a_3 = 1$ e $b_1 + b_2 + b_3 = 1$.
`D13`) Trovare la/e distribuzione/i stazionaria/e.
`D14`) Calcolare $P(X_2 \neq 2 | X_0 = 1)$.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di palline bianche estratte; si ha $p_X(k) = \frac{\binom{3}{k}\binom{4}{3-k}}{\binom{7}{3}}$ per $k \in \{0, 1, 2, 3\}$.
D1) La probabilità richiesta è $P(X \geq 1) = p_X(1) + p_X(2) + p_X(3) = \frac{18+12+1}{35} = \frac{31}{35}$.
D2) La probabilità richiesta è $P(\{X = 0\} \cup \{X = 3\}) = P(X = 0) + P(X = 3) = \frac{4+1}{35} = \frac{5}{35}$.

Esercizio 2. Sia T l'evento "esce testa nel lancio della moneta truccata scelta" e sia X la variabile aleatoria che conta il numero di volte che si lancia la moneta equa per avere per la prima volta testa.
D3) Per la formula delle probabilità totali si ha $P(T) = P(T|X \leq 3)P(X \leq 3) + P(T|X > 3)P(X > 3) = \frac{2}{5}\sum_{k=1}^{3}(\frac{1}{2})^{k-1}\frac{1}{2} + \frac{3}{5}\sum_{k=4}^{\infty}(\frac{1}{2})^{k-1}\frac{1}{2} = \frac{2}{5}\frac{7}{8} + \frac{3}{5}\frac{1}{8} = \frac{17}{40}$.
D4) Per la formula di Bayes, e tenendo conto di alcuni valori calcolati prima, si ha $P(X \leq 3|T) = \frac{P(T|X\leq 3)P(X\leq 3)}{P(T)} = \frac{14/40}{17/40} = \frac{14}{17}$.

Esercizio 3. Si deve avere $1 = a\sum_{k\geq 1}(\frac{1}{2})^k + \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k\geq 0}\frac{2^k}{k!}e^{-2} = a + \frac{1}{\sqrt{2}}$, da cui segue $a = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$.
D5) La densità marginale di X_1 è $p_{X_1}(1) = (1 - \frac{1}{\sqrt{2}})\sum_{k\geq 0}(\frac{1}{2})^k = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ e $p_{X_1}(2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k\geq 0}\frac{2^k}{k!}e^{-2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
D6) Si ha $P(X_1 + X_2 = 2) = p_{X_1,X_2}(1, 1) + p_{X_1,X_2}(2, 0) = (1 - \frac{1}{\sqrt{2}})\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-2}$.

Esercizio 4.
D7) Si vede che $P(e^{-1} \leq e^{-X} \leq 1) = 1$, da cui $F_Y(y) = 0$ per $y \leq e^{-1}$ e $F_Y(y) = 1$ per $y \geq 1$. Per $y \in (e^{-1}, 1)$ si ha $F_Y(y) = P(e^{-X} \leq y) = P(X \geq -\log y) = \int_{-\log y}^{1} 6t(1-t)dt = 6[\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}]_{t=-\log y}^{t=1} = [3t^2 - 2t^3]_{t=-\log y}^{t=1} = 1 - 3(\log y)^2 - 2(\log y)^3$.
D8) Si ha $\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[1/X] = \int_0^1 \frac{1}{t}6t(1-t)dt = 6\int_0^1 1 - tdt = 6[t - \frac{t^2}{2}]_{t=0}^{t=1} = 3$.

Esercizio 5.
D9) Si ha $P(N_7 \geq 2) = 1 - P(N_7 \leq 1) = 1 - \sum_{j=0}^{1}\frac{(3\cdot 7)^j}{j!}e^{-3\cdot 7} = 1 - (1 + 21)e^{-21} = 1 - 22e^{-21}$.
D10) Si ha $P(X \geq 1) = P(Z_X \geq \frac{1-2}{\sqrt{16}}) = P(Z_X \geq -\frac{1}{4}) = 1 - \Phi(-1/4) = 1 - (1 - \Phi(1/4)) = \Phi(1/4) = \Phi(0.25) = 0.59871$.

Esercizio 6.
D11) Per la legge dei grandi numeri si ha $m = \int_0^1 t2tdt = 2\int_0^1 t^2dt = 2[\frac{t^3}{3}]_{t=0}^{t=1} = \frac{2}{3}$.
D12) Le variabili aleatorie $\{X_n : n \geq 1\}$ sono esponenziali di parametro $\lambda = 4$, e quindi la loro varianza è $\frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{4^2}$. Indichiamo con $Z_{\bar{X}_n}$ la standardizzata di $\bar{X}_n = \frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$. Allora $\left\{\frac{\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} - \frac{1}{4}}{y/\sqrt{n}} \leq 1\right\} = \left\{Z_{\bar{X}_n} \leq \frac{y}{1/\sqrt{4^2}}\right\}$ e, per il teorema limite centrale, si deve avere $\frac{y}{1/\sqrt{4^2}} = 2$, da cui segue $y = \frac{2}{\sqrt{4^2}} = \frac{1}{2}$.

Esercizio 7.
D13) Indichiamo la distribuzione stazionaria con (p, q, r). Allora si deve avere la relazione matriciale

$$(p, q, r)\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = (p, q, r),$$

che fornisce il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} a_1p + b_1r = p \\ a_2p + q + b_2r = q \\ a_3p + b_3r = r. \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ottiene $a_2p + b_2r = 0$ e, per positività di a_2 e b_2, si ha $p = r = 0$, e quindi $q = 1$. In conclusione l'unica distribuzione stazionaria è $(p, q, r) = (0, 1, 0)$.
D14) Si ha $P(X_2 \neq 2|X_0 = 1) = P(X_2 = 1|X_0 = 1) + P(X_2 = 3|X_0 = 1) = \sum_{j=1}^{3} P(X_1 = j, X_2 = 1|X_0 = 1) + \sum_{j=1}^{3} P(X_1 = j, X_2 = 3|X_0 = 1) = (a_1^2 + 0 + a_3b_1) + (a_1a_3 + 0 + a_3b_3) = a_1^2 + a_3b_1 + a_1a_3 + a_3b_3$.

Commenti.
La somma dei valori di ciascuna densità discreta che appare è 1 in accordo con la teoria.
`D1`) In altro modo $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - p_X(0) = 1 - \frac{4}{35} = \frac{31}{35}$.
`D8`) In altro modo (meno conveniente) si ha $F_Z(z) = 0$ per $z \leq 1$ e $F_Z(z) = P(X \geq 1/z) = \int_{1/z}^{1} 6t(1-t) = 6[\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}]_{t=1/z}^{t=1} = [3t^2 - 2t^3]_{t=1/z}^{t=1} = 1 - \frac{3}{z^2} + \frac{2}{z^3}$ per $z > 1$, da cui segue $f_Z(z) = (\frac{6}{z^3} - \frac{6}{z^4})1_{(1,\infty)}(z)$, e quindi $\mathbb{E}[Z] = \int_1^\infty z(\frac{6}{z^3} - \frac{6}{z^4})dz = 6\int_1^\infty \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3}dz = 6[-\frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2}]_{z=1}^{z=\infty} = 6(1 - \frac{1}{2}) = 3$.
`D13`) Si poteva giungere alla stessa conclusione senza fare calcoli. Infatti 1 e 3 sono stati transitori e 2 è uno stato assorbente.
`D14`) In altro modo si ha $P(X_2 \neq 2|X_0 = 1) = 1 - P(X_2 = 2|X_0 = 1) = 1 - \sum_{j=1}^{3} P(X_1 = j, X_2 = 2|X_0 = 1) = 1 - (a_1a_2 + a_2 + a_3b_2)$. In effetti tale valore coincide con quello trovato prima per la seguente catena di uguaglianze: $1-(a_1a_2+a_2+a_3b_2) = a_1+a_3-a_1a_2-a_3b_2 = a_1(1-a_2)+a_3(1-b_2) = a_1(a_1+a_3)+a_3(b_1+b_3) = a_1^2 + a_1a_3 + a_3b_1 + a_3b_3$.