Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)
Anno accademico: `2009-2010`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Appello del 26 Gennaio 2010

Esercizio 1. Un'urna contiene 4 palline numerate da 3 a 6. Si estraggono a caso 2 palline in blocco.
`D1`) Calcolare $\mathbb{E}[X]$ e $\mathrm{Var}[X]$, dove X la variabile aleatoria che conta il numero di palline con numero pari estratte.
`D2`) Trovare la densità discreta di Y, dove Y è la variabile aleatoria che indica la somma dei due numeri estratti.

Esercizio 2. Si consideri il seguente gioco. Si lancia una moneta equa e poi due dadi equi. Se esce testa nel lancio di moneta, si vince se escono due numeri pari; se esce croce, si vince se esce almeno una volta il numero 1.
`D3`) Calcolare la probabilità di vincere il gioco.
`D4`) Calcolare la probabilità che sia uscita testa nel lancio di moneta sapendo di aver vinto il gioco.

Esercizio 3. Si consideri la seguente densità congiunta: $p_{(X_1,X_2)}(k,1) = (\frac{1}{4})^k$ per $k \geq 1$ intero e $p_{(X_1,X_2)}(1,2) = \frac{2}{3}$.
`D5`) Calcolare $P(X_1 > X_2)$.
`D6`) Calcolare $\mathbb{E}[X_2]$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con densità continua $f_X(t) = \frac{2}{9}(4-t)1_{(1,4)}(t)$.
`D7`) Trovare la densità discreta di $Y = [X]$ dove $[x] = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$ è la *parte intera* di x.
`D8`) Trovare la densità continua di $Y = e^{-X}$.

Esercizio 5. Sia $N_t = \sum_{n\geq 1} 1_{T_n \leq t}$ (per $t \geq 0$) un processo di Poisson con intensità di $\lambda = \frac{7}{3}$.
`D9`) Calcolare $P(N_3 \leq 2)$.
`D10`) Calcolare $P(T_1 > 6)$.

Esercizio 6. Sia X una variabile aleatoria normale standard.
`D11`) Calcolare $P(X \geq 1.2)$.
Sia Y una variabile aleatoria normale standard indipendente da X.
`D12`) Calcolare $P(|X-Y| \geq 2\sqrt{2})$.

Esercizio 7 (*solo per ST-Materiali*). Consideriamo una catena di Markov omogenea $\{X_n : n \geq 0\}$ con matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dove $p_{ij} > 0$ per $(i,j) \in \{1,2\} \times \{1,2,3\}$.
`D13`) Trovare le distribuzioni stazionarie.
`D14`) Verificare che la probabilità di passaggio in 2 partendo da 1 è $\lambda_1^{(2)} = \frac{p_{12}}{p_{12}+p_{13}}$.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
`D1`) Per formula note sulla ipergeometrica si ha $\mathbb{E}[X] = 2\frac{2}{4} = 1$ e $\mathrm{Var}[X] = 2\frac{2}{4}(1-\frac{2}{4})\frac{4-2}{4-1} = \frac{1}{3}$.
`D2`) Abbiamo $\binom{4}{2} = 6$ casi possibili tutti con probabilità $\frac{1}{6}$: $\{3,4\},\{3,5\},\{3,6\},\{4,5\},\{4,6\},\{5,6\}$. Allora $p_Y(7) = P(\{3,4\}) = \frac{1}{6}$, $p_Y(8) = P(\{3,5\}) = \frac{1}{6}$, $p_Y(9) = P(\{4,5\}) + P(\{3,6\}) = \frac{2}{6}$, $p_Y(10) = P(\{4,6\}) = \frac{1}{6}$ e $p_Y(11) = P(\{5,6\}) = \frac{1}{6}$.

Esercizio 2. Sia V l'evento "vincere il gioco" e T l'evento "esce testa nel lancio di moneta".
`D3`) Per la formula delle probabilità totali si ha $P(V) = P(V|T)P(T) + P(V|T^c)P(T^c) = \frac{3}{6}\frac{3}{6}\frac{1}{2} + (1-\binom{2}{0}(\frac{1}{6})^0(1-\frac{1}{6})^{2-0})\frac{1}{2} = (\frac{1}{4} + (1-\frac{25}{36}))\frac{1}{2} = (\frac{1}{4}+\frac{11}{36})\frac{1}{2} = \frac{20}{36}\frac{1}{2} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$.
`D4`) Per la formula di Bayes (e la formula delle probabilità totali per $P(V)$ a denominatore) si ha $P(T|V) = \frac{P(V|T)P(T)}{P(V)} = \frac{\frac{3}{6}\frac{3}{6}\frac{1}{2}}{\frac{5}{18}} = \frac{1}{8}\frac{18}{5} = \frac{9}{20}$.

Esercizio 3.
`D5`) Si ha $P(X_1 > X_2) = \sum_{k\geq 2} p_{(X_1,X_2)}(k,1) = \frac{(\frac{1}{4})^2}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{16}\frac{4}{3} = \frac{1}{12}$.
`D6`) Si ha $p_{X_2}(2) = p_{(X_1,X_2)}(1,2) = \frac{2}{3}$ e $p_{X_2}(1) = \sum_{k=1}^{\infty} p_{(X_1,X_2)}(k,1) = \sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{4})^k = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}\frac{4}{3} = \frac{1}{3}$. Quindi $\mathbb{E}[X_2] = 1\frac{1}{3} + 2\frac{2}{3} = \frac{5}{3}$.

Esercizio 4.
`D7`) Si ha $p_Y(k) = \int_k^{k+1}\frac{2}{9}(4-t)dt = \frac{2}{9}[-\frac{(4-t)^2}{2}]_{t=k}^{t=k+1} = \frac{(4-k)^2-(4-(k+1))^2}{9} = \frac{(4-k)^2-(3-k)^2}{9}$ per $k\in\{1,2,3\}$; quindi $p_Y(1) = \frac{9-4}{9} = \frac{5}{9}$, $p_Y(2) = \frac{4-1}{9} = \frac{3}{9}$ e $p_Y(3) = \frac{1-0}{9} = \frac{1}{9}$.
`D8`) Si ha $P(e^{-4} < Y < e^{-1}) = 1$, da cui segue $F_Y(y) = 0$ per $y \leq e^{-4}$ e $F_Y(y) = 1$ per $y \geq e^{-1}$. Per $e^{-4} < y < e^{-1}$ si ha $F_Y(y) = P(e^{-X} \leq y) = P(X \geq -\log y) = \int_{-\log y}^{4}\frac{2}{9}(4-t)dt = \frac{2}{9}[-\frac{(4-t)^2}{2}]_{t=-\log y}^{t=4} = \frac{(4+\log y)^2}{9}$. Quindi la densità è $f_Y(y) = \frac{2}{9}\frac{(4+\log y)}{y}1_{(e^{-4},e^{-1})}(y)$.

Esercizio 5.
`D9`) Si ha $P(N_3 \leq 2) = \sum_{k=0}^{2}\frac{(\frac{7}{3}\cdot 3)^k}{k!}e^{-\frac{7}{3}\cdot 3} = (1+7+\frac{49}{2})e^{-7} = \frac{65}{2}e^{-7}$.
`D10`) Si ha $P(T_1 > 6) = e^{-\frac{7}{3}\cdot 6} = e^{-14}$.

Esercizio 6.
`D11`) $P(X \geq 1.2) = 1 - \Phi(1.2) = 1 - 0.88493 = 0.11507$.
`D12`) La variabile aleatoria $X-Y$ è normale con media $\mu = 0-0 = 0$ e varianza $\sigma^2 = (1)^2 1 + (-1)^2 1 = 2$. Quindi si ha $P(|X-Y| \geq 2\sqrt{2}) = 1 - P(|X-Y| < 2\sqrt{2}) = 1 - P(-2\sqrt{2} < X-Y < 2\sqrt{2}) = 1 - P(\frac{-2\sqrt{2}-0}{\sqrt{2}} < \frac{X+Y-\mu}{\sigma} < \frac{2\sqrt{2}-0}{\sqrt{2}}) = 1 - (\Phi(2) - \Phi(-2)) = 1 - (\Phi(2) - (1-\Phi(2))) = 2(1-\Phi(2)) = 2(1-0.97725) = 2\cdot 0.02275 = 0.0455$.

Esercizio 7.
`D13`) Gli stati 1 e 2 comunicano con 3 ma 3 non comunica con 1 e con 2 perché 3 è uno stato assorbente. Quindi 1 e 2 sono stati transitori. Allora $(0,0,1)$ è l'unica distribuzione stazionaria.
`D14`) Dobbiamo considerare il sistema di equazioni con $C = \{2\}$; allora si ha $D_C = \{1\}$ e il sistema si riduce ad una sola equazione: $\lambda_1^{(2)} = p_{12} + p_{11}\lambda_1^{(2)}$. In corrispondenza si ottiene $\lambda_1^{(2)} = \frac{p_{12}}{1-p_{11}}$ e, tenendo conto che $p_{11}+p_{12}+p_{13} = 1$, si ottiene $1 - p_{11} = p_{12}+p_{13}$ e $\lambda_1^{(2)} = \frac{p_{12}}{p_{12}+p_{13}}$.

Commenti.
La somma dei valori di ciascuna densità discreta che appare è 1 in accordo con la teoria.
`D1`) Si ha $p_X(k) = \frac{\binom{2}{k}\binom{2}{2-k}}{\binom{4}{2}}$ per $k \in \{0,1,2\}$, da cui segue $p_X(0) = p_X(2) = \frac{1}{6}$ e $p_X(1) = \frac{4}{6}$. Allora

in altro modo $\mathbb{E}[X] = 0\frac{1}{6} + 1\frac{4}{6} + 2\frac{1}{6} = \frac{6}{6} = 1$ e $\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}^2[X] = 0^2\frac{1}{6} + 1^2\frac{4}{6} + 2^2\frac{1}{6} - 1^2 = \frac{4+4}{6} - 1 = \frac{8-6}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.
`D3`) Nella soluzione si vede che $P(V|T^c) = \frac{11}{36}$ e si recupera questo risultato in altro modo come segue: $P(V|T^c) = \binom{2}{1}(\frac{1}{6})^1(1-\frac{1}{6})^{2-1} + \binom{2}{2}(\frac{1}{6})^2(1-\frac{1}{6})^{2-2} = \frac{10}{36} + \frac{1}{36} = \frac{11}{36}$.
`D5`) In altro modo $P(X_1 > X_2) = 1 - P(X_1 \leq X_2) = 1 - (p_{(X_1,X_2)}(1,2) + p_{(X_1,X_2)}(1,1)) = 1 - (\frac{2}{3} + \frac{1}{4}) = \frac{12-8-3}{12} = \frac{1}{12}$.
`D13`) In altro modo possiamo considerare il sistema

$$(\pi_1, \pi_2, \pi_3) \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3).$$

Si ottengono le seguenti tre equazioni:

$$\begin{cases} \pi_1 p_{11} + \pi_2 p_{21} = \pi_1 \\ \pi_1 p_{12} + \pi_2 p_{22} = \pi_2 \\ \pi_1 p_{13} + \pi_2 p_{23} + \pi_3 = \pi_3. \end{cases}$$

Nella terza equazione π_3 si semplifica e, scegliendo una qualsiasi coppia di equazioni, si verifica che si ha necessariamente $\pi_1 = \pi_2 = 0$, da cui segue $\pi_3 = 1$.
`D14`) Per la proprietà di Markov, la catena non tiene conto del numero di volte che resta nello stato 1; poi, appena la catena lascia lo stato 1, o va in 2 o va in 3 e ci resta per sempre senza dunque mai andare in 2. Quindi ci si aspetta che i valori $\lambda_1^{(2)}$ e $1 - \lambda_1^{(2)}$ siano proporzionali a p_{12} e p_{13} rispettivamente e questo è in accordo con il valore di $\lambda_1^{(2)}$ ottenuto.