Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)
Anno accademico: `2012-2013`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Appello del 6 Settembre 2013

Esercizio 1. Un'urna ha 4 palline bianche e 3 rosse. Si estraggono a caso 2 palline, una alla volta e *con* reinserimento.
`D1`) Trovare la densità della variabile aleatoria X che conta le palline rosse estratte.
`D2`) Calcolare la probabilità di estrarre la sequenza di colori $(\text{bianca}, \text{rossa})$.

Esercizio 2. Si lancia un dado equo: se esce uno dei numeri 1 e 2, si lancia una moneta la cui probabilità che esca *testa* è $\frac{2}{3}$; se esce uno dei numeri 3 e 4, si lancia una moneta la cui probabilità che esca *testa* è $\frac{1}{3}$; se esce uno dei numeri 5 e 6 si lancia una moneta equa.
`D3`) Calcolare la probabilità di ottenere *testa* nel lancio di moneta.
`D4`) Calcolare la probabilità di aver lanciato la moneta equa sapendo di aver ottenuto *testa*.

Esercizio 3. Consideriamo la seguente densità congiunta: $p_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = (\frac{1}{2})^{x_1}(\frac{1}{2})^{x_2}$ per $x_1, x_2 \geq 1$ interi.
`D5`) Calcolare $P(X_1 = X_2)$.
`D6`) Calcolare $P(X_1 + X_2 \leq 3)$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con densità continua $f_X(t) = \frac{2}{25}t1_{(0,5)}(t)$.
`D7`) Trovare la densità continua di $Y = X^2$.
`D8`) Calcolare $P(2 < X < 4)$.

Esercizio 5. Sia $N_t = \sum_{n\geq 1} 1_{T_n \leq t}$ (per $t \geq 0$) un processo di Poisson con intensità di $\lambda = 1$.
`D9`) Calcolare $P(N_1 \geq 2)$.
`D10`) Calcolare $\mathbb{E}[N_{10}]$.

Esercizio 6. Sia X una variabile aleatoria normale standard.
`D11`) Calcolare $P(-0.5 < X < 1.2)$.
`D12`) Calcolare $P(X < -2.01)$.

Esercizio 7 (*solo per ST-Materiali*). Consideriamo una catena di Markov omogenea $\{X_n : n \geq 0\}$ con spazio degli stati $E = \{1, 2, 3\}$ e matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

`D13`) Trovare la/e distribuzione/i stazionaria/e.
`D14`) Calcolare $P(X_1 \neq 2, X_2 \neq 2 | X_0 = 1)$.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
D1) La variabile aleatoria X che conta il numero di palline rosse estratte ha distribuzione binomiale. Precisamente si ha $p_X(k) = \binom{2}{k}(\frac{3}{7})^k(1-\frac{3}{7})^{2-k}$ per $k \in \{0,1,2\}$, da cui segue $p_X(0) = \frac{16}{49}$, $p_X(1) = \frac{24}{49}$ $p_X(2) = \frac{9}{49}$.
D2) Abbiamo, con notazioni ovvie, $P(B_1 \cap R_2) = P(B_1)P(R_2) = \frac{4}{7}\frac{3}{7} = \frac{12}{49}$.

Esercizio 2. Sia T l'evento "esce testa nel lancio della moneta" e consideriamo, con notazioni ovvie, gli eventi E_{12}, E_{34}, E_{56}.
D3) Per la formula delle probabilità totali si ha $P(T) = P(T|E_{12})P(E_{12}) + P(T|E_{34})P(E_{34}) + P(T|E_{56})P(E_{56}) = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{6} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{6} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{6} = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{6} = \frac{3}{9} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2+1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
D4) Per la formula di Bayes (e per il valore di $P(T)$ calcolato prima) si ha $P(E_{56}|T) = \frac{P(T|E_{56})P(E_{56})}{P(T)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6}\cdot 2 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Esercizio 3.
D5) Si ha $P(X_1 = X_2) = \sum_{h=1}^{\infty} p_{X_1,X_2}(h,h) = \sum_{h=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^h(\frac{1}{2})^h = \sum_{h=1}^{\infty}(\frac{1}{4})^h = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$.
D6) Si ha $P(X_1 + X_2 \leq 3) = p_{X_1,X_2}(1,1) + p_{X_1,X_2}(2,1) + p_{X_1,X_2}(1,2) = (\frac{1}{2})^1(\frac{1}{2})^1 + (\frac{1}{2})^2(\frac{1}{2})^1 + (\frac{1}{2})^1(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{2+1+1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

Esercizio 4.
D7) Si vede che $P(0 \leq Y \leq 25) = 1$, da cui $F_Y(y) = 0$ per $y \leq 0$ e $F_Y(y) = 1$ per $y \geq 25$. Per $0 < y < 25$ si ha $F_Y(y) = P(X^2 \leq y) = P(X \leq \sqrt{y}) = \int_0^{\sqrt{y}} \frac{2}{25}tdt = \frac{2}{25}[\frac{t^2}{2}]_{t=0}^{t=\sqrt{y}} = \frac{y}{25}$. Quindi la densità è $f_Y(y) = \frac{1}{25}1_{(0,25)}(y)$. Si osservi che Y ha distribuzione uniforme su $(0,25)$.
D8) Si ha $P(2 < X < 4) = \int_2^4 \frac{2}{25}tdt = \frac{2}{25}[\frac{t^2}{2}]_{t=2}^{t=4} = \frac{4^2-2^2}{25} = \frac{16-4}{25} = \frac{12}{25}$.

Esercizio 5.
D9) Si ha $P(N_1 \geq 2) = 1 - P(N_1 \leq 1) = 1 - \sum_{k=0}^{1} P(N_1 = k) = 1 - \sum_{k=0}^{1}\frac{(1\cdot 1)^k}{k!}e^{-1\cdot 1} = 1 - (1+1)e^{-1} = 1 - 2e^{-1}$.
D10) Si ha $\mathbb{E}[N_{10}] = 10$.

Esercizio 6.
D11) Si ha $P(-0.5 < X < 1.2) = \Phi(1.2) - \Phi(-0.5) = \Phi(1.2) - (1-\Phi(0.5)) = \Phi(1.2) + \Phi(0.5) - 1 = 0.88493 + 0.69146 - 1 = 0.57639$.
D12) Si ha $P(X \leq -2.01) = \Phi(-2.01) = 1 - \Phi(2.01) = 1 - 0.97778 = 0.02222$.

Esercizio 7.
D13) Si deve considerare la seguente relazione matriciale

$$(\alpha,\beta,\gamma)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = (\alpha,\beta,\gamma)$$

che fornisce le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{4} = \alpha \\ \frac{\alpha}{4} + \beta + \frac{\gamma}{4} = \beta \\ \frac{\alpha}{4} + \frac{\gamma}{2} = \gamma. \end{cases}$$

Si osservi che l'incognita β appare solo nella seconda equazione e "scompare"; inoltre, se pensiamo alle tre equazioni con le sole incognite α e γ, l'unica soluzione è $\alpha = \gamma = 0$. In conclusione le

distribuzioni stazionarie sono del tipo $(0, \beta, 0)$; quindi $(0,1,0)$ è l'unica distribuzione stazionaria.
`D14`) Si ha $P(X_1 \neq 2, X_2 \neq 2|X_0 = 1) = \sum_{i,j \in \{1,3\}} P(X_1 = i, X_2 = j|X_0 = 1)$, e quindi $P(X_1 \neq 2, X_2 \neq 2|X_0 = 1) = p_{11}p_{11} + p_{11}p_{13} + p_{13}p_{31} + p_{13}p_{33} = \frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} = \frac{4+2+1+2}{16} = \frac{9}{16}$.

Commenti.
La somma dei valori di ciascuna densità discreta che appare è 1 in accordo con la teoria.
`D1-D2`) Si verifica che anche la probabilità di ottenere la sequenza (rossa, bianca) è $\frac{12}{49}$. La somma $\frac{12+12}{49}$ coincide con $p_X(1)$ in accordo con la teoria.
`D3-D4`) Gli eventi E_{56} e T sono indipendenti perché $P(E_{56}|T) = P(E_{56})$ (entrambe sono uguali ad $\frac{1}{3}$). Del resto, facendo riferimento alla definizione di eventi indipendenti, si ha $P(E_{56} \cap T) = P(E_{56})P(T)$ perché $P(E_{56} \cap T) = P(T|E_{56})P(E_{56}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$ e $P(E_{56})P(T) = \frac{2}{6}\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.
`D6`) Si vede che X_1 e X_2 sono variabili aleatorie geometriche traslate indipendenti di parametro $p = \frac{1}{2}$. Quindi $Z = X_1 + X_2$ ha ha distribuzione binomiale negativa traslata con parametri $r = 2$ e $p = \frac{1}{2}$ da cui segue che $P(X_1 + X_2 \leq 3) = p_Z(2) + p_Z(3) = \sum_{k=2}^{3} \binom{k-1}{2-1} (\frac{1}{2})^2 (1 - \frac{1}{2})^{k-2} = (\frac{1}{2})^2 + 2(\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{4} + \frac{2}{8} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.
`D13`) Si poteva rispondere senza fare calcoli osservando che 1 e 3 sono stati transitori (perché comunicano con 2 ma non vale il viceversa). Inoltre 2 è ovviamente uno stato assorbente.