Statistica per la ricerca sperimentale e tecnologica
CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA, UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"
Anno accademico: `2006-2007`
Titolare del corso: `Claudio Macci`
Esame del 29 Gennaio 2007

Esercizio 1. Un'urna contiene 3 palline bianche, 3 nere e 1 rossa. Si estraggono 3 palline a caso, una alla volta e senza reinserimento. Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di palline bianche estratte.
`D1`) Trovare la densità discreta di X.
`D2`) Calcolare la probabilità di estrarre almeno una pallina bianca.
`D3`) Calcolare la probabilità di ottenere la sequenza $(\text{bianca}, \text{nera}, \text{rossa})$.

Esercizio 2. Un'urna ha 5 palline numerate da 1 a 5. Si estraggono a caso 4 palline in blocco e consideriamo le seguenti variabili aleatorie: X è il minimo tra i numeri estratti; Y è il massimo tra i numeri estratti.
`D4`) Trovare la densità congiunta di (X, Y) e la densità di $Z = X + Y$.

Esercizio 3. Abbiamo due urne: la prima ha 3 palline con i numeri 1, 2 e 3; la seconda ha 2 palline nere. Si estrae una pallina a caso dalla prima urna e, se esce $k \in \{1, 2, 3\}$, si mettono k palline bianche nella seconda urna. Poi si estrae una pallina a caso dalla seconda urna.
`D5`) Calcolare la probabilità di estrarre una pallina bianca.
`D6`) Per ogni $k \in \{1, 2, 3\}$, calcolare la probabilità che sia stato estratto il numero k dalla prima urna sapendo che è stata estratta una pallina bianca dalla seconda urna.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con densità $f_X(t) = 2t$ per $0 < t < 1$ e $f_X(t) = 0$ altrimenti.
`D7`) Calcolare $P(\frac{1}{4} < X < \frac{1}{2})$.
`D8`) Calcolare $\mathbb{E}[X]$.
`D9`) Trovare la funzione di distribuzione di X.

Esercizio 5. Sia X una variabile aleatoria con densità $f_X(t) = c(1 + t^2)$ per $-1 < t < 1$ e $f_X(t) = 0$ altrimenti.
`D10`) Calcolare il valore della costante c.

Esercizio 6. Sia X una variabile aleatoria normale standard.
`D11`) Calcolare $P(X > -1)$.
Poi sia Y un'altra variabile aleatoria normale standard e supponiamo che X e Y siano indipendenti.
`D12`) Calcolare $P(X + Y > \sqrt{2})$.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
`D1`) La variabile aleatoria X ha distribuzione ipergeometrica e si ha $p_X(k) = \frac{\binom{3}{k}\binom{4}{3-k}}{\binom{7}{3}}$ per $k \in \{0,1,2,3\}$, da cui $p_X(0) = \frac{4}{35}$, $p_X(1) = \frac{18}{35}$, $p_X(2) = \frac{12}{35}$ e $p_X(3) = \frac{1}{35}$.
`D2`) La probabilità richiesta è $P(X \geq 1) = 1 - p_X(0) = 1 - \frac{4}{35} = \frac{31}{35}$.
`D3`) Con notazioni ovvie la probabilità richiesta è $P(B_1 \cap N_2 \cap R_3) = P(R_3|B_1 \cap N_2)P(N_2|B_1)P(B_1) = \frac{1}{5}\frac{3}{6}\frac{3}{7} = \frac{3}{70}$.

Esercizio 2. Consideriamo l'insieme Ω costituito dai sottoinsiemi di $\{1,2,3,4,5\}$ di 4 elementi (in tutto sono $\binom{5}{4} = 5$); quindi $\Omega = \{\{1,2,3,4\},\{1,2,3,5\},\{1,2,4,5\},\{1,3,4,5\},\{2,3,4,5\}\}$. Ogni punto di Ω ha probabilità $\frac{1}{5}$.
`D4`) Si ha $p_{(X,Y)}(1,4) = P(\{\{1,2,3,4\}\}) = \frac{1}{5}$, $p_{(X,Y)}(1,5) = P(\{\{1,2,3,5\},\{1,2,4,5\},\{1,3,4,5\}\}) = \frac{3}{5}$ e $p_{(X,Y)}(2,5) = P(\{\{2,3,4,5\}\}) = \frac{1}{5}$. Inoltre $\{Z = 5\} = \{(X,Y) = (1,4)\}$, $\{Z = 6\} = \{(X,Y) = (1,5)\}$ e $\{Z = 7\} = \{(X,Y) = (2,5)\}$; quindi $p_Z(5) = \frac{1}{5}$, $p_Z(6) = \frac{3}{5}$ e $p_Z(7) = \frac{1}{5}$.

Esercizio 3. Sia B l'evento "estratta pallina bianca" e, per $k \in \{1,2,3\}$, sia E_k l'evento "esce k nell'estrazione dalla prima urna".
`D5`) Per la formula delle probabilità totali si ha $P(B) = \sum_{k=1}^{3} P(B|E_k)P(E_k) = \frac{1}{3}\frac{1}{3} + \frac{2}{4}\frac{1}{3} + \frac{3}{5}\frac{1}{3} = [\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{3}{5}]\frac{1}{3} = \cdots = \frac{43}{90}$.
`D6`) Per la formula di Bayes e per il valore di $P(B)$ calcolato prima, si ha $P(E_1|B) = \frac{P(B|E_1)P(E_1)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{3}\frac{1}{3}}{\frac{43}{90}} = \frac{10}{43}$, $P(E_2|B) = \frac{P(B|E_2)P(E_2)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{4}\frac{1}{3}}{\frac{43}{90}} = \frac{15}{43}$ e $P(E_3|B) = \frac{P(B|E_3)P(E_3)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{5}\frac{1}{3}}{\frac{43}{90}} = \frac{18}{43}$.

Esercizio 4.
`D7`) Si ha $\int_{1/4}^{1/2} 2t dt = [t^2]_{1/4}^{1/2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{4-1}{16} = \frac{3}{16}$.
`D8`) Si ha $\mathbb{E}[X] = \int_0^1 t2t dt = 2[\frac{t^3}{3}]_0^1 = \frac{2}{3}$.
`D9`) Si ha $F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(x)dx$, da cui $F_X(t) = 0$ per $t < 0$, $F_X(t) = \int_0^t 2x dx = [x^2]_0^t = t^2$ per $0 < t < 1$ e $F_X(t) = 1$ per $t > 1$.

Esercizio 5.
`D10`) Si ha $1 = c\int_{-1}^{1} 1 + t^2 dt = c[t + \frac{t^3}{3}]_{-1}^{1} = c(1 + \frac{1}{3} - (-1 - \frac{1}{3})) = \frac{8}{3}c$, da cui $c = \frac{3}{8}$.

Esercizio 6.
`D11`) Si ha $P(X > -1) = 1 - \Phi(-1) = 1 - (1 - \Phi(1)) = \Phi(1) = 0.84134$.
`D12`) È noto che $X + Y$ è normale di media $0 + 0 = 0$ e varianza $1 + 1 = 2$. Quindi, indicando con $Z_{X+Y} = \frac{X+Y-0}{\sqrt{2}}$ la standardizzata di $X + Y$, si ha $P(X + Y > \sqrt{2}) = P(\frac{X+Y-0}{\sqrt{2}} > \frac{\sqrt{2}-0}{\sqrt{2}}) = P(Z_{X+Y} > 1) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0.84134 = 0.15866$.

Commenti.
`D1`) Si ha $p_X(0) + p_X(1) + p_X(2) + p_X(3) = \frac{4+18+12+1}{35} = 1$ in accordo con la teoria.
`D2`) Si ha anche $P(X \geq 1) = p_X(1) + p_X(2) + p_X(3) = \frac{18+12+1}{35} = \frac{31}{35}$.
`D1-D3`) Le sequenze di colori diversi sono in tutto $3! = 6$: (B,N,R), (B,R,N), (N,B,R), (N,R,B), (R,B,N), (R,N,B). Tali sequenze costituiscono eventi disgiunti a due a due, ciascuno di probabilità $\frac{3}{70}$, la cui unione è $\{X = 1\}$. Questo è in accordo con il fatto che la somma delle probabilità di tutte le sequenze coincide con $p_X(1)$: $\frac{3+3+3+3+3+3}{70} = \frac{18}{70}$.
`D4`) In accordo con la teoria si ha $p_{(X,Y)}(1,4) + p_{(X,Y)}(1,5) + p_{(X,Y)}(2,5) = \frac{1+3+1}{5} = 1$ e $p_Z(5) + p_Z(6) + p_Z(7) = \frac{1+3+1}{5} = 1$.
`D6`) Si ha $\sum_{k=1}^{3} P(E_k|B) = \frac{10+15+18}{43} = 1$ in accordo con la teoria.