Terzo Esonero del corso di Fisica del 24.06.2022

Corso di Laurea in Informatica

A.A. 2021-2022

(Prof. Paolo Camarri)

Cognome:

Nome:

Matricola:

Anno di immatricolazione:

Problema n.1

a) Una sfera conduttrice di raggio R ha una carica q distribuita uniformemente sulla sua superficie. In un punto dello spazio a distanza r dal centro della sfera, si calcolino il modulo $E(r)$ del campo elettrico generato da questa distribuzione di carica e la densità di energia elettrica $u_E(r)$ in tale punto, per $r > R$.

$E(r) =$
$u_E(r) =$

b) Dato che il campo elettrico all'interno della sfera conduttrice è nullo (come noto), l'energia potenziale elettrostatica U della distribuzione di carica considerata al punto a) si può calcolare integrando la funzione $u_E(r)$ solo sul volume dello spazio esterno alla superficie sferica. Si calcoli quindi l'integrale $U = \int_R^{+\infty}[4\pi r^2 u_E(r)]dr$ usando l'espressione di $u_E(r)$ ottenuta al punto a)

$U =$

c) Si considerino adesso due sfere conduttrici identiche di uguale raggio $R = 0{,}01\ \mathrm{m}$, poste a distanza $d = 1\ \mathrm{m}$ l'una dall'altra, inizialmente scariche. Data una carica $q = 10^{-6}\ \mathrm{C}$, si calcolino l'energia potenziale elettrostatica U_A del sistema quando tutta la carica q viene distribuita su una sola sfera (lasciando l'altra sfera scarica) e l'energia potenziale elettrostatica U_B del sistema quando una carica $q/2$ viene distribuita su ciascuna delle due sfere. Quale delle due configurazioni ha energia potenziale elettrostatica minore? Si supponga che, nel secondo caso, la carica si mantenga distribuita uniformemente su ciascuna sfera (ipotesi ragionevole, essendo $d \gg R$).

$U_A =$	$=$
$U_B =$	$=$
L'energia potenziale minore è	

Problema n.2

Nel circuito mostrato nella FIGURA 1 sono assegnati i seguenti valori: $\mathcal{E} = 200\ \mathrm{V}$, $R_1 = 100\ \Omega$, $R_2 = 10^3\ \Omega$, $R_3 = 50\ \Omega$, $C = 0{,}5 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{F}$

a) Si calcoli la corrente I che scorre nel circuito quando l'interruttore K è aperto.

$I =$ $\quad\quad$ $=$

b) Si calcolino le differenze di potenziale $(\Delta V)_2$ e $(\Delta V)_3$ tra gli estremi delle resistenze R_2 e R_3 quando l'interruttore K è aperto.

$(\Delta V)_2 =$ $\quad\quad$ $=$

$(\Delta V)_3 =$

c) Si calcolino la carica q sull'armatura positiva del condensatore e la differenza di potenziale $(\Delta V)_3^*$ tra gli estremi della resistenza R_3 quando l'interruttore K è chiuso e la corrente nel circuito è a regime.

$q =$ $\quad\quad$ $=$

$(\Delta V)_3^* =$

Problema n.3

In un filo conduttore di lunghezza infinita, con sezione trasversale circolare di raggio $R = 2 \cdot 10^{-3}$ m , scorre una corrente $I = 0{,}5$ A .

a) Si calcoli il modulo B del campo magnetico sulla superficie del filo conduttore.

$B =$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $=$

b) Un elettrone (carica elettrica $q_e = -1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C) si muove con velocità istantanea di modulo $v_e = 3 \cdot 10^3$ m s^{-1} parallelamente al filo conduttore considerato nel punto a), a distanza $r = 2R$ dall'asse del filo. Si calcoli il modulo F_B della forza magnetica agente sull'elettrone.

F_B $\quad =$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $=$

c) In FIGURA 2 è mostrata una bobina rettangolare appesa a un braccio di una bilancia analitica. La bobina è parzialmente immersa in una regione con campo magnetico $\overrightarrow{B_1}$ costante limitato alla regione bianca nella figura (e nullo al di fuori di questa regione), diretto perpendicolarmente al piano della bobina, nel verso uscente dal piano della figura. La bobina è costituita da $N = 15$ avvolgimenti e la sua larghezza è $a = 8$ cm. Una corrente $I = 0{,}5$ A circola nella bobina, percorrendo le spire in senso antiorario (nello schema della figura). La bilancia si trova in equilibrio se nel piatto di destra vengono posizionati dei pesetti aventi massa totale $m = 0{,}0605$ kg. Si calcoli il modulo B_1 del campo magnetico in cui è parzialmente immersa la bobina rettangolare.

$B_1 =$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $=$

FIGURA 1

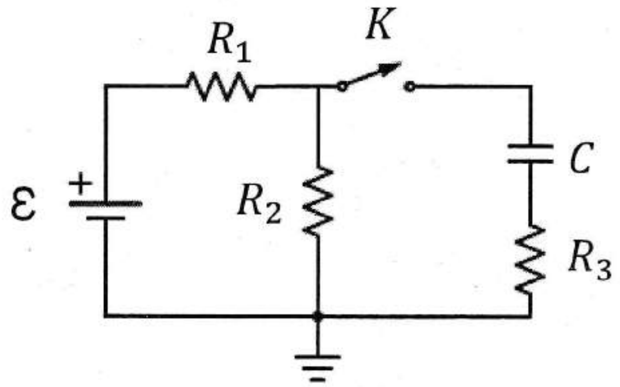
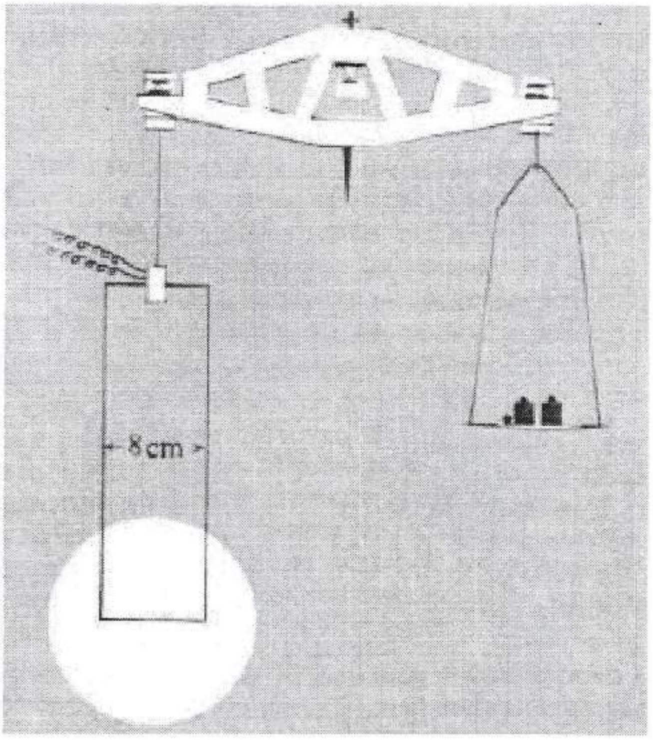


FIGURA 2



CORSO DI FISICA PER INFORMATICA A.A. 2021-2022

PROF. PAOLO CAMARRI

TERZO ESONERO SCRITTO 24/06/2022

Problema n. 1

a) Per rispondere alla prima parte della domanda, sfruttando la simmetria sferica del sistema considerato possiamo applicare il teorema di Gauss a una superficie gaussiana sferica, con raggio $r > R$, concentrica alla sfera conduttrice. Sulla superficie di raggio $r > R$, il modulo del campo elettrico è costante, per cui il flusso del campo elettrico della distribuzione di carica considerata è

$$\Phi(\vec{E}) = 4\pi r^2 E(r), \quad \text{dove} \quad E(r) = |\vec{E}(r)|$$

La carica elettrica contenuta all'interno della superficie gaussiana di raggio r è uguale a q se $r > R$, per cui, per il teorema di Gauss, risulta

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{q}{\varepsilon_0}, \quad \text{da cui} \quad \boxed{E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad (r>R)}$$

La densità di energia elettrica in un punto dello spazio in cui è presente un campo elettrico $\vec{E}$ è

$$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 |\vec{E}|^2$$

Nel nostro caso, quindi, otteniamo

$$u_E(r) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(E(r)\right)^2 = \frac{1}{2}\cancel{\varepsilon_0}\cdot\frac{q^2}{16\pi^2\varepsilon_0^{\cancel{2}} r^4}$$, e quindi

$$\boxed{u_E(r) = \frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 r^4} \qquad (r > R)}$$

b) Poiché $u_E(r)$ (energia elettrica per unità di volume) è costante su superfici sferiche di raggio r concentriche alla sfera conduttrice per $r > R$, l'energia totale della distribuzione di carica considerata si può calcolare sommando le energie elettriche di ogni guscio sferico di raggio r_i e spessore Δr_i molto piccolo; quindi il volume di un guscio sferico di raggio r_i e spessore Δr_i è

$\Delta V_i = 4\pi r_i^2 \Delta r_i$, e l'energia elettrica in esso contenuta

è $\Delta U_i = u_E(r_i)\Delta V_i = 4\pi r_i^2 u_E(r_i)\Delta r_i$

Poiché $u_E(r_i) \neq 0$ per $r_i > R$, l'energia totale si ottiene così:

$$U = \sum_{\substack{i \\ (r_i > R)}} \left[4\pi r_i^2 u_E(r_i) \Delta r_i\right] = \int_R^{+\infty} \left[4\pi r^2 u_E(r)\right] dr$$

Otteniamo quindi

$$U = \int_R^{+\infty} \left[4\pi r^2 u_E(r)\right] dr = \int_R^{+\infty} \left[\cancel{4\pi r^2} \cdot \frac{q^2}{\cancel{32}_{8} \cancel{\pi^2} \varepsilon_0 \cancel{r^4}^{\,2}}\right] dr =$$

$$= \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0} \int_R^{+\infty} \frac{1}{r^2} dr = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0} \left[-\frac{1}{r}\Big|_R^{+\infty}\right], \quad \text{e quindi}$$

$$\boxed{U = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}}$$

c) Quando una sfera conduttrice ha una carica q distribuita uniformemente sulla sua superficie e l'altra sfera conduttrice è scarica, l'energia potenziale elettrostatica è solo quella della sfera carica, la cui espressione è stata ottenuta nel punto b):

$$\boxed{U_A = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R} = \frac{(10^{-6}\,C)^2}{8\pi \cdot (8{,}854 \times 10^{-12}\,C^2 N^{-1} m^{-2}) \cdot (0{,}01\,m)} = 0{,}4494\,J}$$

Nella seconda configurazione abbiamo due sfere conduttrici, ciascuna con carica $q/2$ distribuita uniformemente sulla sua superficie, e le due sfere si trovano a distanza $d \gg R$ l'una dall'altra. Nelle ipotesi del problema, quindi, l'energia del sistema si può calcolare così:

$$U_B = \frac{(q/2)^2}{8\pi\varepsilon_0 R} + \frac{(q/2)^2}{8\pi\varepsilon_0 R} + \frac{(\frac{q}{2})\cdot(\frac{q}{2})}{4\pi\varepsilon_0 d}$$

I primi due termini sono le energie elettriche di ciascuna delle due distribuzioni superficiali di carica ($q/2$ per ciascuna superficie sferica), mentre il terzo termine e' l'energia di mutua interazione tra le due sfere cariche, che si possono considerare cariche puntiformi in questo termine in quanto risulta $d \gg R$.

Quindi otteniamo:

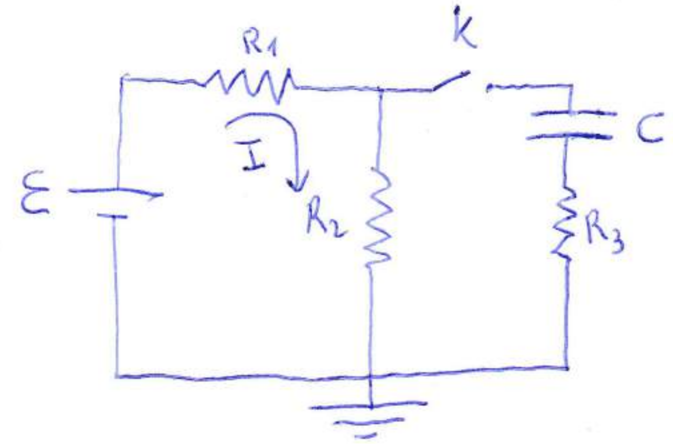
$$U_B = \frac{(q/2)^2}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{2R} + \frac{1}{2R} + \frac{1}{d}\right], \quad \text{e} \quad \text{infine}$$

$$\boxed{U_B = \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{d}\right) = \frac{(10^{-6}C)^2}{16\pi(8,854\times10^{-12}\ C^2N^{-1}m^{-2})}\left(\frac{1}{0,01\ m} + \frac{1}{1m}\right) = 0,2269\ J}$$

L'energia potenziale minore e' quindi U_B.

Problema n. 2

a)



Quando l'interruttore K e' aperto, la corrente I scorre esclusivamente nella maglia contenente il generatore di f.e.m. e la serie delle resistenze R_1 e R_2.

Dunque, applicando la legge delle maglie di Kirchhoff a questa maglia, otteniamo:

$$\mathcal{E} - R_1 I - R_2 I = 0, \quad \text{da cui:}$$

$$(R_1 + R_2) I = \mathcal{E}, \quad \text{e infine}$$

$$\boxed{I = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2} = \frac{200\ V}{100\,\Omega + 10^3\,\Omega} = 0,1818\ A = 181,8\ mA}$$

b) Quando l'interruttore K è aperto risulta

$$\boxed{(\Delta V)_2 = R_2 I = \frac{R_2 \mathcal{E}}{R_1 + R_2} = \frac{(10^3 \Omega)\cdot(200\ V)}{1100\ \Omega} = 181,818\ V}$$

In tale configurazione del circuito, nel ramo contenente la resistenza R_3 non passa corrente, per cui risulta

$$\boxed{(\Delta V)_3 = 0}$$

c) Quando l'interruttore K è chiuso, a regime nel ramo contenente il condensatore C e la resistenza R_3 non passerà corrente, per cui la differenza di potenziale a regime tra le armature del condensatore coincide con la differenza di potenziale $(\Delta V)_2$ calcolata nel punto precedente. La carica a regime sull'armatura positiva del condensatore è quindi

$$\boxed{q = C(\Delta V)_2 = \frac{C R_2 \mathcal{E}}{R_1 + R_2} = \frac{(0,5\cdot 10^{-6} F)\cdot(10^3 \Omega)(200\ V)}{1100\ \Omega} = 0,909 \times 10^{-4}\ C = 90,9\ \mu C}$$

Risulta poi

$$\boxed{(\Delta V_3)^* = 0}$$

poiché in quel ramo, a regime, la corrente è nulla.

Problema n. 3

a) Applichiamo il teorema di Ampère a una circonferenza posta su un piano perpendicolare al filo conduttore, con centro nell'asse del filo, di raggio $r > R$. Lungo tale circonferenza, per simmetria, il modulo del campo magnetico generato dalla corrente che scorre nel filo e' costante.

Allora:

$$2\pi r\, B(r) = \mu_0 I, \quad \text{con } B(r) = |\vec{B}(r)|,$$

essendo $\vec{B}$ tangente alla circonferenza in ogni suo punto.

Dunque $$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Sulla superficie del filo conduttore, per $r \to R^+$, risulta

$$\boxed{B(R) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} = \frac{(4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{Kg\ m\ A^{-2}\ s^{-2}})(0{,}5\ \mathrm{A})}{2\pi(2\cdot 10^{-3}\ \mathrm{m})} = 0{,}5 \times 10^{-4}\ \mathrm{T}}$$

b) Su una carica elettrica puntiforme in moto in una regione in cui e' presente un campo magnetico $\vec{B}$ agisce una forza magnetica espressa dalla legge

$\vec{F}_B = q_e \vec{v}_e \times \vec{B}$; nel caso in cui $\vec{v}_e \perp \vec{B}$, come nel problema considerato, il modulo di $\vec{F}_B$ e':

$$F_B = |\vec{F_B}| = |q_e| \cdot |\vec{v_e}| \cdot |\vec{B}|$$

Sfruttando il risultato ottenuto nel punto a), il modulo del campo magnetico nella posizione dell'elettrone e'

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi \cdot (2R)} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \text{, per cui possiamo scrivere:}$$

$$\boxed{\begin{aligned} F_B &= |q_e||\vec{v_e}| \frac{\mu_0 I}{4\pi R} = \frac{|q_e| v_e \mu_0 I}{4\pi R} = \\ &= \frac{(1{,}602 \times 10^{-19}\ C)(3 \times 10^{3}\ m\ s^{-1})(4\pi \cdot 10^{-7}\ Kg\ m\ A^{-2} s^{-2})(0{,}5\ A)}{4\pi \cdot (2 \cdot 10^{-3}\ m)} = \\ &= 1{,}2 \times 10^{-20}\ N \end{aligned}}$$

c) Per la simmetria dei due tratti verticali della bobina immersi parzialmente nella regione con il campo magnetico, le forze agenti su tali due rami sono tra loro opposte (i versi di scorrimento della corrente nei due rami verticali sono discordi), per cui l'unica forza non bilanciata agente sulla bobina e' quella agente sugli N tratti orizzontali del lato inferiore della bobina.

Risulta quindi $|\vec{F_B}| = N I a B$, con $\vec{F_B}$ diretta verso il basso secondo la legge $\vec{F_B} = N I \vec{a} \times \vec{B}$.

All' equilibrio, la forza magnetica sulla bobina, se la massa della bobina e' trascurabile rispetto alla massa complessiva dei pesetti sull' altro braccio della bilancia, e' uguale in modulo alla forza peso dei pesetti:

$$N I a B = mg$$

otteniamo quindi:

$$\boxed{B = \frac{mg}{N I a} = \frac{(0{,}0605\ \mathrm{kg})(9{,}81\ \mathrm{m\,s^{-2}})}{15 \cdot (0{,}5\ \mathrm{A}) \cdot (0{,}08\ \mathrm{m})} = 0{,}989\ \mathrm{T}}$$