Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità (ed insegnamenti mutuati)
Anno accademico: `2014-2015`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Appello del 18 Febbraio 2015

Esercizio 1. Si lancia 3 volte un dado equo.
`D1`) Calcolare la probabilità che il numero 6 esca almeno 2 volte.
`D2`) Calcolare la probabilità che il numero 1 esca al primo lancio sapendo che la somma dei numeri ottenuti nei tre lanci è 4.

Esercizio 2. Si lancia una moneta equa. Se esce testa si lancia 2 volte un dado equo; se esce croce si lancia 2 volte un dado con le facce $1, 1, 2, 3, 4, 5$.
`D3`) Calcolare la probabilità che escano tutti numeri pari nei lanci dei dadi effetuati.
`D4`) Calcolare la probabilità di aver ottenuto testa nel lancio di moneta sapendo che sono usciti tutti numeri pari nei lanci dei dadi effettuati.

Esercizio 3. Sia $\lambda > 0$ arbitrariamente fissato. Definiamo la seguente densità congiunta: $p_{X_1,X_2}(1, k) = \frac{1}{7}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ per $k \geq 0$ intero e $p_{X_1,X_2}(2, k) = \frac{6}{7}\frac{(2\lambda)^k}{k!}e^{-2\lambda}$ per $k \geq 0$ intero.
`D5`) Trovare la densità marginale di X_1.
`D6`) Calcolare $P(X_1 + X_2 \leq 2)$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con distribuzione uniforme su $(0, 1)$.
`D7`) Trovare la funzione di distribuzione di $Y = e^{-X^2}$.
`D8`) Calcolare $P(X < \frac{2}{3}|X > \frac{1}{3})$.

Esercizio 5.
`D9`) Sia $N_t = \sum_{n\geq 1} 1_{T_n\leq t}$ (per $t \geq 0$) un processo di Poisson con intensità di $\lambda = \frac{1}{2}$. Calcolare $P(N_4 = 1)$.
`D10`) Sia X una variabile aleatoria Normale standard. Calcolare $P(|X| < \frac{1}{4})$.

Esercizio 6. Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. (indipendenti e identicamente distribuite).
`D11`) Dire per quale valore di m si ha

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - m\right| > \varepsilon\right) = 0 \text{ per ogni } \varepsilon > 0,$$

nel caso in cui le variabili aleatorie $\{X_n : n \geq 1\}$ abbiano distribuzione uniforme su $(-2, 4)$.
`D12`) Sia $\lambda > 0$ arbitrariamente fissato. Dire per quale valore di x si ha

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \lambda \leq \frac{\sqrt{x\lambda}}{\sqrt{n}}\right) = \Phi(2)$$

nel caso in cui le variabili aleatorie $\{X_n : n \geq 1\}$ abbiano distribuzione di Poisson di parametro λ.

Esercizio 7 (*solo per Lauree Magistrali*). Consideriamo una catena di Markov omogenea $\{X_n : n \geq 0\}$ con spazio degli stati $E = \{1, 2, 3\}$ e matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

`D13`) Trovare la/e distribuzione/i stazionaria/e.
`D14`) Dire per quali valori di n si ha $P(X_n = 1|X_0 = 1) \leq (\frac{1}{3})^4$.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
`D1`) Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di volte che esce il numero 6 nei tre lanci di dado. Allora la probabilità richiesta è $P(X \geq 2) = \sum_{k=2}^{3} \binom{3}{k} (\frac{1}{6})^k (1-\frac{1}{6})^{3-k} = \frac{15}{216} + \frac{1}{216} = \frac{16}{216} = \frac{2}{27}$.
`D2`) Sia A l'evento "esce il numero 1 al primo lancio" e B l'evento "la somma dei 3 numeri usciti è 4". Allora $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(\{(1,2,1)\})+P(\{(1,1,2)\})}{P(\{(2,1,1)\})+P(\{(1,2,1)\})+P(\{(1,1,2)\})} = \frac{(1+1)/6^3}{(1+1+1)/6^3} = \frac{2}{3}$.

Esercizio 2. Indichiamo con E l'evento "escono tutti numeri pari nei lanci dei dadi effettuati", e con T l'evento "esce testa nel lancio di moneta".
`D3`) Per la formula delle probabilità totali si ha $P(E) = P(E|T)P(T) + P(E|T^c)P(T^c) = \frac{3}{6}\frac{3}{6}\frac{1}{2} + \frac{2}{6}\frac{2}{6}\frac{1}{2} = \frac{1}{8} + \frac{1}{18} = \frac{9+4}{72} = \frac{13}{72}$.
`D4`) Per la formula di Bayes, e tenendo conto di alcuni valori calcolati prima, si ha $P(T|E) = \frac{P(E|T)P(T)}{P(E)} = \frac{\frac{3}{6}\frac{3}{6}\frac{1}{2}}{13/72} = \frac{1}{8}\frac{72}{13} = \frac{9}{13}$.

Esercizio 3.
`D5`) Si ha $p_{X_1}(1) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{X_1,X_2}(1,k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{7}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \frac{1}{7}e^{-\lambda}e^{\lambda} = \frac{1}{7}$ e $p_{X_1}(2) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{X_1,X_2}(2,k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{6}{7}\frac{(2\lambda)^k}{k!}e^{-2\lambda} = \frac{6}{7}e^{-2\lambda}e^{2\lambda} = \frac{6}{7}$.
`D6`) Si ha $P(X_1 + X_2 \leq 2) = p_{X_1,X_2}(1,0) + p_{X_1,X_2}(1,1) + p_{X_1,X_2}(2,0) = \frac{1}{7}(1+\lambda)e^{-\lambda} + \frac{6}{7}e^{-2\lambda}$.

Esercizio 4.
`D7`) Si vede che $P(e^{-1} \leq e^{-X^2} \leq 1) = 1$ e quindi $F_Y(y) = 0$ per $y \leq e^{-1}$ e $F_Y(y) = 1$ per $y \geq 1$. Per $y \in (e^{-1}, 1)$ si ha $F_Y(y) = P(e^{-X^2} \leq y) = P(-X^2 \leq \log y) = P(X^2 \geq -\log y) = P(X \geq \sqrt{-\log y}) = \int_{\sqrt{-\log y}}^{\infty} f_X(t)dt = \int_{\sqrt{-\log y}}^{1} \frac{1}{1-0}dt = [t]_{t=\sqrt{-\log y}}^{t=1} = 1 - \sqrt{-\log y}$.
`D8`) Si ha $P(X < \frac{2}{3}|X > \frac{1}{3}) = \frac{P(\{X<\frac{2}{3}\}\cap\{X>\frac{1}{3}\})}{P(X>\frac{1}{3})} = \frac{P(\frac{1}{3}<X<\frac{2}{3})}{P(X>\frac{1}{3})} = \frac{\int_{1/3}^{2/3} f_X(t)dt}{\int_{1/3}^{\infty} f_X(t)dt} = \frac{\int_{1/3}^{2/3} \frac{1}{1-0}dt}{\int_{1/3}^{1} \frac{1}{1-0}dt} = \frac{[t]_{t=1/3}^{t=2/3}}{[t]_{t=1/3}^{t=1}} = \frac{(2-1)/3}{1-1/3} = \frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2}$.

Esercizio 5.
`D9`) Si ha $P(N_4 = 1) = \frac{(\frac{1}{2}\cdot 4)^1}{1!}e^{-\frac{1}{2}\cdot 4} = 2e^{-2}$.
`D10`) Si ha $P(|X| < \frac{1}{4}) = P(-\frac{1}{4} < X < \frac{1}{4}) = \Phi(\frac{1}{4}) - \Phi(-\frac{1}{4}) = \Phi(\frac{1}{4}) - (1 - \Phi(\frac{1}{4})) = 2\Phi(\frac{1}{4}) - 1 = 2 \cdot 0.59871 - 1 = 0.19742$.

Esercizio 6.
`D11`) Per la legge dei grandi numeri il valore di m richiesto è $m = \frac{-2+4}{2} = 1$ per le formule della distribuzione uniforme.
`D12`) La standardizzata di $\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$ è $Z_{\bar{X}_n} = \frac{\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}-\lambda}{\sqrt{\lambda}/\sqrt{n}}$. Allora $\left\{\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} - \lambda \leq \frac{\sqrt{x\lambda}}{\sqrt{n}}\right\} = \left\{Z_{\bar{X}_n} \leq \sqrt{x}\right\}$ e, per il teorema limite centrale, si deve avere $\sqrt{x} = 2$ e quindi $x = 4$.

Esercizio 7.
`D13`) Indichiamo la distribuzione stazionaria con (p,q,r). Allora si deve avere la relazione matriciale

$$(p,q,r)\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (p,q,r),$$

che fornisce il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \frac{1}{3}p = p \\ \frac{1}{3}p + r = q \\ \frac{1}{3}p + q = r. \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ottiene $p = 0$ e, sostituendo nelle altre due equazioni, si ha $q = r$. In conclusione, poiché si deve avere $p + q + r = 1$, l'unica distribuzione stazionaria è $(p,q,r) = (0, 1/2, 1/2)$.
`D14`) Per costruzione si ha $P(X_n = 1|X_0 = 1) = P(\cap_{k=1}^{n}\{X_k = 1\}|X_0 = 1) = (\frac{1}{3})^n$; quindi si deve avere $(\frac{1}{3})^n \leq (\frac{1}{3})^4$, d cui segue $n \geq 4$.

Commenti.
La somma dei valori di ciascuna densità discreta che appare è 1 in accordo con la teoria.
`D1`) In altro modo, $P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) = 1 - \sum_{k=0}^{1} \binom{3}{k} (\frac{1}{6})^k (1 - \frac{1}{6})^{3-k} = 1 - \frac{125}{216} - \frac{75}{216} = \frac{216-125-75}{216} = \frac{16}{216} = \frac{2}{27}$.
`D13`) Si poteva giungere alla stessa conclusione senza fare calcoli. Infatti 1 è uno stato transitorio e la distribuzione stazionaria relativa alla matrice di transizione ristretta alla componente irriducibile $\{2, 3\}$ è $(1/2, 1/2)$ perché si ha una matrice dove la somma degli elementi di ciascuna colonna è 1.