

Cognome:..... Nome:..... Matr.:.....

### Esercizio 1 [16 punti]

A: *notazione asintotica*. Dire quali delle seguenti relazioni asintotiche sono vere:

$$\begin{array}{llll} n + n\sqrt{n} \log^2 n = \Theta(n^{1.5}); & \log^3 n = \Theta(\log n); & n + \sqrt{n} = \Theta(n - \sqrt{n}); & \frac{n^{1.5}\sqrt{n+\log n}}{\sqrt{n^3+3}} = \Theta(\sqrt{n}); \\ (\frac{5}{3})^n = o(2^n); & 2^n = o(2^n \sqrt{\log n}); & 2^n = \Theta(2^{2n}); & 2^{n+2} = \Theta(2^n); \end{array}$$

B: *equazioni di ricorrenza*. Fornire la soluzione asintotica alle seguenti relazioni di ricorrenza:

$$T(n) = 7T\left(\frac{n}{8}\right) + n; \quad \text{Soluzione:}$$

$$T(n) = T(n-1) + n^2; \quad \text{Soluzione:}$$

C: *algoritmi e complessità*. Quale algoritmo useresti e quanto costa se devi:

- Costruire un heap binario contenente  $n$  chiavi prese in input:
- In un grafo orientato, capire se c'è un cammino da  $s$  a  $t$  di al più  $k$  archi che evita uno nodo specifico  $w$ :
- Trovare il  $k$ -esimo minimo in una lista ordinata di  $n$  elementi (implementata con record e puntatori):
- Fondere due heap binomiali contenenti rispettivamente  $n$  e  $n^2$  nodi:

### Esercizio 2 [8 punti]

Un labirinto è modellato come un grafo non diretto  $G = (V, E)$ . Voi siete nel nodo  $s$  e l'uscita si trova nel nodo  $t$ . Potete percorrere gli archi, spendendo un minuto per ogni arco. Nel labirinto inoltre c'è un nodo speciale  $p$  che è un teletrasporto, e un insieme di nodi  $U \subseteq V$  che sono uscite del teletrasporto. Se siete su  $p$  potete teletrasportarvi in un qualsiasi nodo  $q \in U$  a vostra scelta. Il tempo del teletrasporto è di 3 minuti.

Progettate un algoritmo efficiente che calcoli la strategia più veloce, se esiste, per uscire dal labirinto.

### Esercizio 3 [8 punti]

Sia  $A[1 : n]$  un vettore di  $n$  bit, dove quindi  $A[i] \in \{0, 1\}$  per ogni  $i$ . Si progetti una struttura dati che prende in input il vettore  $A$  e sia in grado poi di rispondere a query del seguente tipo:

- **BlockSize(i)**: dato un indice  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  restituisce la lunghezza del più grande blocco di zero contigui che contiene l'indice  $i$ . Se  $A[i] = 1$ , allora la risposta alla query è 0.

La struttura dati deve poter essere costruita in tempo  $O(n)$  e l'algoritmo di query deve richiedere tempo costante. Si forniscano i due pseudocodici dettagliati dell'algoritmo che dato  $A$  costruisce la struttura dati, e dell'algoritmo di query.