Statistica per la ricerca sperimentale e tecnologica
Corso di Laurea in Informatica, Università di Roma "Tor Vergata"
Anno accademico: 2005-2006
Titolare del corso: Claudio Macci
Esame del 10 Luglio 2006

Esercizio 1. Abbiamo due urne: l'urna A che contiene due palline con i numeri 1 e 2; l'urna B che contiene tre palline con i numeri 1, 2 e 3. Si lancia una moneta equa: se esce testa si sceglie l'urna A, se esce croce l'urna B. Poi si estrae una pallina a caso dall'urna scelta e sia E l'evento "estratta la pallina numero 1".
D1) Calcolare la probabilità dell'evento E.
D2) Calcolare la probabilità di aver ottenuto testa sapendo che è stata estratta la pallina numero 1 (cioè sapendo che l'evento E si è verificato).

Esercizio 2. Un'urna ha 20 palline numerate da 1 a 20. Si estraggono due palline a caso, una alla volta e senza reinserimento. Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di palline estratte con un numero pari.
D3) Calcolare la densità della variabile aleatoria X.
D4) Calcolare la probabilità di ottenere un numero pari alla prima estrazione e un numero dispari alla seconda estrazione, cioè la sequenza $(\text{pari}, \text{dispari})$.

Esercizio 3. Sia (X_1, X_2) una variabile aleatoria discreta bidimensionale con la seguente densità congiunta discreta:
$p_{(X_1,X_2)}(0,0) = p_{(X_1,X_2)}(1,0) = p_{(X_1,X_2)}(2,0) = p_{(X_1,X_2)}(0,1) = p_{(X_1,X_2)}(1,1) = p_{(X_1,X_2)}(2,1) = p_{(X_1,X_2)}(0,2) = p_{(X_1,X_2)}(2,2) = \frac{1}{8}$.
D5) Calcolare la densità marginale di X_1.
D6) Calcolare la densità marginale di X_2.

Esercizio 4. Sia Y una variabile aleatoria esponenziale di parametro $\lambda = 3$.
D7) Calcolare $P(1/3 < Y < 2/3)$.
Sia $Z = [Y]$, dove $[x] = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$ è la *parte intera* di x.
D8) Calcolare $P(Z = 0)$.

Esercizio 5. Siano Y_1, Y_2 due variabili aleatorie indipendenti ed uniformi su $[3, 5]$.
D9) Calcolare $\mathbb{E}[Y_1 + Y_2]$.
D10) Calcolare $\mathrm{Var}[Y_1 + Y_2]$.

Esercizio 6. Sia W una v.a. normale standard (cioè con media 0 e varianza 1).
D11) Calcolare $P(W \leq -3/2)$.
Consideriamo un campione di $X_1, \ldots, X_{100}$ osservazioni indipendenti e normali con media incognita μ e varianza nota $\sigma^2 = 25$. La media dei valori osservati è $\overline{x}_{100} = 5$.
D12) Trovare l'intervallo di confidenza per μ al livello $1 - \alpha = 0.95$.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1. Sia T l'evento "esce testa" e $C = T^c$ l'evento "esce croce".
D1) Per la formula delle probabilità totali si ha
$P(E) = P(E|T)P(T) + P(E|C)P(C) = \frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{3+2}{12} = \frac{5}{12}$.
D2) Per la formula di Bayes (e il valore di $P(E)$ calcolato prima) si ha
$P(T|E) = \frac{P(E|T)P(T)}{P(E)} = \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}{\frac{5}{12}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{12}} = \frac{1}{4}\frac{12}{5} = \frac{3}{5}$.

Esercizio 2.
D3) La variabile aleatoria X ha distribuzione ipergeometrica e la sua densità è $p_X(k) = \frac{\binom{10}{k}\binom{10}{2-k}}{\binom{20}{2}}$ per $k \in \{0,1,2\}$; quindi $p_X(0) = p_X(2) = \frac{9}{38}$ e $p_X(1) = \frac{20}{38} = \frac{10}{19}$.
D4) Sia D_k l'evento "estratto un numero dispari alla k-sima estrazione"; dunque la probabilità richiesta è $P(D_1^c \cap D_2) = P(D_2|D_1^c)P(D_1^c) = \frac{10}{19}\frac{10}{20} = \frac{10}{38} = \frac{5}{19}$.

Esercizio 3.
D5) Si ha: $p_{X_1}(0) = p_{(X_1,X_2)}(0,0)+p_{(X_1,X_2)}(0,1)+p_{(X_1,X_2)}(0,2) = \frac{1+1+1}{8} = \frac{3}{8}$; $p_{X_1}(1) = p_{(X_1,X_2)}(1,0)+p_{(X_1,X_2)}(1,1) = \frac{1+1}{8} = \frac{2}{8}$; $p_{X_1}(2) = p_{(X_1,X_2)}(2,0) + p_{(X_1,X_2)}(2,1) + p_{(X_1,X_2)}(2,2) = \frac{1+1+1}{8} = \frac{3}{8}$.
D6) Si ha: $p_{X_2}(0) = p_{(X_1,X_2)}(0,0)+p_{(X_1,X_2)}(1,0)+p_{(X_1,X_2)}(2,0) = \frac{1+1+1}{8} = \frac{3}{8}$; $p_{X_2}(1) = p_{(X_1,X_2)}(0,1)+p_{(X_1,X_2)}(1,1) + p_{(X_1,X_2)}(2,1) = \frac{1+1+1}{8} = \frac{3}{8}$; $p_{X_2}(2) = p_{(X_1,X_2)}(0,2) + p_{(X_1,X_2)}(2,2) = \frac{1+1}{8} = \frac{2}{8}$.

Esercizio 4.
D7) Si ha $P(1/3 < Y < 2/3) = \int_{1/3}^{2/3} 3e^{-3t}dt = [-e^{-3t}]_{1/3}^{2/3} = -e^{-3\cdot 2/3} - (-e^{-3\cdot 1/3}) = e^{-1} - e^{-2}$.
D8) Si ha $P(Z = 0) = P(0 \le Y < 1) = \int_0^1 3e^{-3t}dt = [-e^{-3t}]_0^1 = -e^{-3\cdot 1} - (-e^{-3\cdot 0}) = 1 - e^{-3}$.

Esercizio 5.
D9) Si ha $\mathbb{E}[Y_1 + Y_2] = \mathbb{E}[Y_1] + \mathbb{E}[Y_2] = \frac{3+5}{2} + \frac{3+5}{2} = \frac{8+8}{2} = 8$.
D10) Si ha $\mathrm{Var}[Y_1 + Y_2] = \mathrm{Var}[Y_1] + \mathrm{Var}[Y_2] = \frac{(5-3)^2}{12} + \frac{(5-3)^2}{12} = \frac{4+4}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.

Esercizio 6.
D11) Si ha $P(W \le -3/2) = \Phi(-3/2) = 1 - \Phi(3/2) = 1 - \Phi(1.5) = 1 - 0.93319 = 0.06681$.
D12) L'intervallo di confidenza richiesto è $\left[\overline{x}_n - \phi_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x}_n + \phi_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$. Si ha $n = 100$, $\overline{x}_n = \overline{x}_{100} = 5$, $\sigma = \sqrt{25} = 5$; inoltre $1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975$ segue da $1 - \alpha = 0.95$ e quindi $\phi_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.96$. In conclusione l'intervallo di confidenza richiesto è $[4.02, 5.98]$.

Commenti.
D3) Si ha $p_X(0) + p_X(1) + p_X(2) = \frac{9+20+9}{38} = 1$ in accordo con la teoria.
D3-D4) Osserviamo che si ha $P(D_1 \cap D_2^c) = P(D_2^c|D_1)P(D_1) = \frac{10}{19}\frac{10}{20} = \frac{10}{38} = \frac{5}{19}$ e che $D_1^c \cap D_2$ e $D_1 \cap D_2^c$ hanno intersezione vuota. Inoltre $\{X = 1\} = (D_1^c \cap D_2) \cup (D_1 \cap D_2^c)$; quindi $p_X(1) = P(D_1^c \cap D_2) + P(D_1 \cap D_2^c) = P(D_2|D_1^c)P(D_1^c) + P(D_1|D_2^c)P(D_2^c) = \frac{10}{38} + \frac{10}{38} = \frac{20}{38} = \frac{10}{19}$.
D5) Si ha $p_{X_1}(0) + p_{X_1}(1) + p_{X_1}(2) = \frac{3+2+3}{8} = 1$ in accordo con la teoria.
D6) Si ha $p_{X_2}(0) + p_{X_2}(1) + p_{X_2}(2) = \frac{3+3+2}{8} = 1$ in accordo con la teoria.
D7-D8) Si può fare riferimento alla funzione di distribuzione di Y e, tenendo conto che Y è una variabile aleatoria continua, si ha
$P(1/2 < Y < 2/3) = F_Y(2/3) - F_Y(1/3) = 1 - e^{-3\cdot 2/3} - (1 - e^{-3\cdot 1/3}) = e^{-1} - e^{-2}$;
$P(Z = 0) = P(0 \le Y < 1) = F_Y(1) - F_Y(0) = 1 - e^{-3\cdot 1} - (1 - e^{-3\cdot 0}) = 1 - e^{-3}$.
D9-D10) L'indipendenza tra Y_1 e Y_2 garantisce l'uguaglianza $\mathrm{Var}[Y_1 + Y_2] = \mathrm{Var}[Y_1] + \mathrm{Var}[Y_2]$ che in generale non è vera. Al contrario l'uguaglianza $\mathbb{E}[Y_1 + Y_2] = \mathbb{E}[Y_1] + \mathbb{E}[Y_2]$ vale anche senza l'ipotesi di indipendenza.