Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)
Anno accademico: `2012-2013`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Appello del 18 Febbraio 2013

Esercizio 1. Un'urna ha 4 palline bianche e 2 rosse. Si estraggono a caso 2 palline, una alla volta e senza reinserimento.
`D1`) Calcolare la probabilità di estrarre almeno una pallina bianca.
`D2`) Calcolare la probabilità di estrarre la sequenza di colori $(\mathrm{bianca}, \mathrm{rossa})$.

Esercizio 2. Si lancia un dado equo: se esce un numero da 1 a 4 si lancia una moneta equa; se esce uno dei numeri 5 e 6 si lancia una moneta la cui probabilità che esca *testa* è $\frac{1}{3}$.
`D3`) Calcolare la probabilità di ottenere *testa* nel lancio di moneta.
`D4`) Calcolare la probabilità di aver lanciato la moneta equa sapendo di aver ottenuto *testa*.

Esercizio 3. Siano $\lambda, \mu > 0$. Consideriamo la seguente densità congiunta: $p_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \frac{\lambda^{x_1}}{x_1!}e^{-\lambda}(1-e^{-\mu})^{x_2}e^{-\mu}$ per $x_1, x_2 \geq 0$ interi.
`D5`) Calcolare $P(X_1 = X_2)$.
`D6`) Trovare le densità marginali di X_1 e X_2.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con densità continua $f_X(t) = \alpha t^{\alpha-1}1_{(0,1)}(t)$, dove $\alpha > 0$ è una costante arbitraria.
`D7`) Dimostrare che $Y = -\log X$ ha distribuzione esponenziale di parametro α.
`D8`) Calcolare $\mathbb{E}[X^\beta]$ per $\beta > 0$.

Esercizio 5. Sia $N_t = \sum_{n\geq 1} 1_{T_n \leq t}$ (per $t \geq 0$) un processo di Poisson con intensità di $\lambda = 3$.
`D9`) Calcolare $P(N_5 \geq 2)$.
`D10`) Calcolare $P(N_5 = k|N_5 \leq 1)$ per $k \in \{0, 1\}$.

Esercizio 6. Sia X una variabile aleatoria normale di media 1 e varianza 1.
`D11`) Verificare che, per ogni $c > 0$, si ha $P(|X - 1| \leq c) = 2\Phi(c) - 1$.
`D12`) Calcolare $P(X \leq 0.12)$.

Esercizio 7 (*solo per ST-Materiali*). Consideriamo una catena di Markov omogenea $\{X_n : n \geq 0\}$ con spazio degli stati $E = \{1, 2\}$ e matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 1-q & q \end{pmatrix}$$

per $q \in [0, 1]$.
`D13`) Trovare il valore di q per cui la distribuzione stazionaria è $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
`D14`) Dire per quale valore di n si ha $P(\cap_{k=1}^n \{X_k = 1\}|X_0 = 1) = \frac{1}{256}$. *Suggerimento:* dopo aver impostato l'equazione con incognita n, si osservi che 256 è una potenza di 4 ...

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
D1) La variabile aleatoria X che conta il numero di palline bianche estratte ha distribuzione ipergeometrica. Precisamente si ha $p_X(k) = \frac{\binom{4}{k}\binom{2}{2-k}}{\binom{6}{2}}$ per $k \in \{0,1,2\}$. Allora la probabilità richiesta è $P(X \geq 1) = \sum_{k=1}^{2} p_X(k) = \frac{8+6}{15} = \frac{14}{15}$.
D2) Abbiamo, con notazioni ovvie, $P(B_1 \cap R_2) = P(R_2|B_1)P(B_1) = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{6} = \frac{4}{15}$.

Esercizio 2. Sia E l'evento "si ottiene uno dei numeri $1,2,3,4$ nel lancio del dado" e sia T l'evento "esce testa nel lancio della moneta".
D3) Per la formula delle probabilità totali si ha $P(T) = P(T|E)P(E)+P(T|E^c)P(E^c) = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{6}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{6} = \frac{1}{3}+\frac{1}{9} = \frac{4}{9}$.
D4) Per la formula di Bayes (e per il valore di $P(T)$ calcolato prima) si ha $P(E|T) = \frac{P(T|E)P(E)}{P(T)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{6}}{\frac{4}{9}} = \frac{4}{12}\cdot\frac{9}{4} = \frac{3}{4}$.

Esercizio 3.
D5) Si ha $P(X_1 = X_2) = \sum_{h=0}^{\infty} p_{X_1,X_2}(h,h) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{\lambda^h}{h!} e^{-\lambda}(1-e^{-\mu})^h e^{-\mu} = e^{-\lambda-\mu}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{(\lambda(1-e^{-\mu}))^h}{h!} = e^{-\lambda-\mu}e^{\lambda(1-e^{-\mu})} = e^{-\lambda-\mu+\lambda-\lambda e^{-\mu}} = e^{-\mu-\lambda e^{-\mu}}$.
D6) Si ha $p_{X_1}(x_1) = \sum_{x_2=0}^{\infty} p_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \frac{\lambda^{x_1}}{x_1!}e^{-\lambda}e^{-\mu}\sum_{x_2=0}^{\infty}(1-e^{-\mu})^{x_2} = \frac{\lambda^{x_1}}{x_1!}e^{-\lambda}e^{-\mu}\frac{1}{1-(1-e^{-\mu})} = \frac{\lambda^{x_1}}{x_1!}e^{-\lambda}$ per ogni $x_1 \geq 0$ intero, e $p_{X_2}(x_2) = \sum_{x_1=0}^{\infty} p_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = (1-e^{-\mu})^{x_2}e^{-\mu}e^{-\lambda}\sum_{x_1=0}^{\infty}\frac{\lambda^{x_1}}{x_1!} = (1-e^{-\mu})^{x_2}e^{-\mu}e^{-\lambda}e^{\lambda} = (1-e^{-\mu})^{x_2}e^{-\mu}$ per ogni $x_2 \geq 0$ intero.

Esercizio 4.
D7) Si vede che $P(Y \geq 0) = 1$, da cui $F_Y(y) = 0$ per $y \leq 0$. Per $y > 0$ si ha $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(-\log X \leq y) = P(\log X \geq -y) = P(X \geq e^{-y}) = \int_{e^{-y}}^{1} \alpha t^{\alpha-1}dt = [t^\alpha]_{t=e^{-y}}^{t=1} = 1 - e^{-\alpha y}$. Quindi la densità è $f_Y(y) = \alpha e^{-\alpha y}1_{(0,\infty)}(y)$, e Y ha distribuzione esponenziale di parametro α.
D8) Si ha $\mathbb{E}[X^\beta] = \int_0^1 t^\beta \alpha t^{\alpha-1}dt = \alpha\int_0^1 t^{\alpha+\beta-1}dt = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}[t^{\alpha+\beta}]_{t=0}^{t=1} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$.

Esercizio 5.
D9) Si ha $P(N_5 \geq 2) = 1 - P(N_5 \leq 1) = 1 - \sum_{k=0}^{1} P(N_5 = k) = 1 - \sum_{k=0}^{1}\frac{(3\cdot5)^k}{k!}e^{-3\cdot5} = 1-(1+15)e^{-15} = 1-16e^{-15}$.
D10) Per $k \in \{0,1\}$ si ha $P(N_5 = k|N_5 \leq 1) = \frac{P(\{N_5=k\}\cap\{N_5\leq1\})}{P(N_5\leq1)} = \frac{P(N_5=k)}{P(N_5=0)+P(N_5=1)}$; quindi $P(N_5 = 0|N_5 \leq 1) = \frac{P(N_5=0)}{P(N_5=0)+P(N_5=1)} = \frac{\frac{(3\cdot5)^0}{0!}e^{-3\cdot5}}{\sum_{k=0}^{1}\frac{(3\cdot5)^k}{k!}e^{-3\cdot5}} = \frac{1}{1+15} = \frac{1}{16}$ e $P(N_5 = 1|N_5 \leq 1) = \frac{P(N_5=1)}{P(N_5=0)+P(N_5=1)} = \frac{\frac{(3\cdot5)^1}{1!}e^{-3\cdot5}}{\sum_{k=0}^{1}\frac{(3\cdot5)^k}{k!}e^{-3\cdot5}} = \frac{15}{1+15} = \frac{15}{16}$.

Esercizio 6.
D11) Per ogni $c > 0$, si ha $P(|X-1| \leq c) = P(-c \leq X-1 \leq c) = P(-c \leq Z_X \leq c)$, dove $Z_X = \frac{X-1}{\sqrt{1}} = X-1$ è la standardizzata di X, e quindi $P(|X-1| \leq c) = \Phi(c)-\Phi(-c) = \Phi(c)-(1-\Phi(c)) = 2\Phi(c)-1$.
D12) Si ha $P(X \leq 0.12) = P(X-1 \leq 0.12-1) = P(Z_X \leq -0.88)$, dove $Z_X = X-1$ è ancora la standardizzata di X, e quindi $P(X \leq 0.12) = \Phi(-0.88) = 1-\Phi(0.88) = 1-0.81057 = 0.18943$.

Esercizio 7.
D13) Si deve considerare la seguente relazione matriciale

$$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 1-q & q \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

che fornisce le seguenti equazioni con incognita q:

$$\begin{cases} \frac{1}{8}+\frac{1}{2}(1-q)=\frac{1}{2} \\ \frac{3}{8}+\frac{1}{2}q=\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Consideriamo l'ultima equazione e si ha $\frac{1}{2}q=\frac{1}{2}-\frac{3}{8}=\frac{4-3}{8}=\frac{1}{8}$, da cui segue $q=\frac{1}{4}$. Si verifica che anche la prima equazione fornisce la stessa soluzione.
`D14`) Si ha $P(\cap_{k=1}^n\{X_k=1\}|X_0=1)=p_{11}^n$ dove $p_{11}=\frac{1}{4}$; quindi abbiamo l'equazione $\frac{1}{4^n}=\frac{1}{256}$ che ammette soluzione $n=4$ (perché $4^4=256$).

Commenti.
La somma dei valori di ciascuna densità discreta che appare è 1 in accordo con la teoria.
`D1`) In altro modo $P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-\frac{1}{15}=\frac{14}{15}$.
`D1-D2`) Abbiamo, con le stesse notazioni, $P(R_1\cap B_2)=P(B_2|R_1)P(R_1)=\frac{4}{5}\frac{2}{6}=\frac{4}{15}$. Allora ricordando il valore $p_X(1)$ che abbiamo già calcolato, si ottiene l'uguaglianza $P(X=1)=P(B_1\cap R_2)+P(R_1\cap B_2)$ in accordo con la teoria.
`D6`) Le variabili aleatorie X_1 e X_2 sono indipendenti perché la densità congiunta è uguale al prodotto delle densità marginali. Inoltre X_1 ha distribuzione di Poisson di parametro λ, e X_2 ha distribuzione geometrica (quella che parte da 0) con parametro $p=e^{-\mu}$.
`D8`) In altro modo (meno conveniente) possiamo calcolare $\mathbb{E}[X^\beta]$ studiando la distribuzione della v.a. $Z=X^\beta$. Si ha $P(0\leq Z\leq 1)=1$ e, per $z\in(0,1)$, $P(Z\leq z)=P(X^\beta\leq z)=P(X\leq z^{1/\beta})=\int_0^{z^{1/\beta}}\alpha t^{\alpha-1}dt=[t^\alpha]_{t=0}^{t=z^{1/\beta}}=z^{\alpha/\beta}$. Quindi la densità di Z è $f_Z(z)=\frac{\alpha}{\beta}z^{(\alpha/\beta)-1}1_{(0,1)}(z)$, da cui segue $\mathbb{E}[Z]=\int_0^1 z\frac{\alpha}{\beta}z^{(\alpha/\beta)-1}dz=\frac{\alpha}{\beta}\int_0^1 z^{\alpha/\beta}dz=\frac{\alpha/\beta}{(\alpha/\beta)+1}[z^{(\alpha/\beta)+1}]_{z=0}^{z=1}=\frac{\alpha/\beta}{(\alpha/\beta)+1}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$.
`D10`) Si ha $P(N_5=0|N_5\leq 1)+P(N_5=1|N_5\leq 1)=1$ in accordo con la teoria.
`D13`) Possiamo osservare che, per avere la distribuzione stazionaria $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, la matrice di transizione deve essere

$$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Del resto, più in generale, si dimostra che la distribuzione uniforme (cioè la distribuzione che assegna la stessa densità $\frac{1}{\#E}$ a tutti gli stati) è stazionaria quando la somma degli elementi di ciascuna colonna della matrice di transizione è uguale a 1.