

Cognome:..... Nome:..... Matr.:.....

**Esercizio 1 [11 punti]** Si consideri un grafo non orientato e connesso  $G = (V, E)$  di  $n$  nodi dove ad ogni arco  $e \in E$  è associato un peso  $w(e)$ .

1. Dire quale delle seguenti affermazioni è vera:

- Il peso dell'albero calcolato con l'algoritmo di Kruskal è sempre uguale al peso di quello calcolato con l'algoritmo di Prim.
- Quando il grafo è non pesato, l'algoritmo di Prim restituisce un albero dei cammini minimi radicato sul nodo sorgente su cui è chiamato.
- Se si implementa l'algoritmo di Kruskal con la struttura dati *Quick-Find* senza euristica di bilanciamento *union-by-size*, la complessità dell'algoritmo nel caso peggiore è  $O(n^2)$ .
- Se  $T$  non è un MST di  $G$  allora esiste un arco  $e \in T$  e un arco  $f \notin T$  tale che  $e$  è l'arco più pesante del ciclo che si forma quando si aggiunge  $f$  a  $T$ .
- Se  $T$  non è un MST di  $G$  allora esiste un arco  $e$  che non appartiene a  $T$  tale che  $e$  è l'arco più leggero del ciclo che si forma in  $T$  quando si aggiunge  $e$ .

2. Sia  $G$  un grafo non orientato e pesato con pesi distinti. Si consideri la seguente affermazione: *Se l'arco  $e$  appartiene all'unico MST di  $G$ , allora  $e$  è l'arco di peso minimo di tutti i tagli che attraversa.* Dire se l'affermazione è vera o falsa argomentando la risposta. (Max 5 righe.)

**Esercizio 2 [11 punti]** Si consideri il problema del massimo flusso.

1. Si definisca formalmente il problema. (Max 5 righe.)
2. Si enunci la complessità temporale dell'algoritmo di Ford-Fulkerson, argomentando sulla sua polinomialità o meno. (Max 5 righe.)

**Esercizio 3 [11 punti]** I tuoi amici Alice e Bob ti hanno invitato a cena a casa loro e avete ordinato una teglia di pizza con gusti misti. La pizza arriva in un cartone rettangolare che contiene  $n$  pezzi di pizza già tagliati allineati in una lunga striscia. Non tutti i gusti ti piacciono allo stesso modo. Se mangi il pezzo  $i$ -esimo (immagina i pezzi numerati da sinistra a destra) godi  $g_i$ . Ora, quando prendi un pezzo di pizza, per questioni di praticità, puoi scegliere solo uno dei due pezzi esterni (quelli interni si porterebbero via troppa mozzarella dai pezzi adiacenti e i tuoi amici non sarebbero contenti). Tu sei ospite e sei invitato per primo a scegliere il primo pezzo da mangiare. Una volta scelto il pezzo, Alice e Bob si mangeranno i due più esterni fra quelli che restano, e poi toccherà ancora te scegliere. Se per esempio tu decidi di mangiare il pezzo numero 1 (quello più a sinistra), Alice e Bob mangeranno il numero 2 e il numero  $n$ . Mentre se scegli il pezzo più a destra, loro mangeranno il numero 1 e il numero  $n - 1$ . E così via.

Progetta un algoritmo di programmazione dinamica che calcola il massimo godimento ottenibile, dove il godimento che ottieni da un sottoinsieme di pezzi  $S \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$  è definito come

$$g(S) = \sum_{i \in S} g_i.$$

Si discuta la complessità temporale dell'algoritmo proposto.