**Primo esonero del corso di Fisica per Informatica**

**Prof. Paolo Camarri – Massimo Bassan**

**A.A. 2019-2020**

**13 maggio 2020**

**Problema n. 1**

Un proiettile viene sparato da terra con velocità avente modulo $v = 100\ \mathrm{m}/s$

a) Trascurando l'attrito dell'aria, quale altezza massima $H$ raggiungerà il proiettile lungo la sua traiettoria se viene sparato lungo la direzione verticale verso l'alto?

b) Sempre trascurando l'attrito dell'aria, quale altezza massima $H_1$ raggiungerà il proiettile lungo la sua traiettoria se la velocità istantanea vettoriale di sparo forma un angolo $\theta = 30°$ con la direzione orizzontale? In queste stesse condizioni di sparo, a quale distanza orizzontale $D$ dal punto di sparo il proiettile cadrà a terra?

c) Qual è il rapporto $r_h$ tra l'altezza massima raggiunta dal proiettile nelle condizioni del punto a) e l'altezza massima raggiunta dal proiettile nelle condizioni del punto b) ? Se definiamo "tempo di volo" l'intervallo di tempo tra l'istante in cui il proiettile viene sparato e l'istante in cui il proiettile cade a terra, qual è il rapporto $r_t$ tra il tempo di volo del proiettile nel punto a) e il tempo di volo del proiettile nel punto b) ?

**Problema n. 2**

Una ruota panoramica avente raggio $R = 10\,\mathrm{m}$ ruota attorno a un asse orizzontale fisso e ha una velocità angolare di rotazione costante $\omega = 0{,}5\,\mathrm{rad/s}$ . Un passeggero avente massa $m = 70\,\mathrm{kg}$ si trova su un seggiolino della ruota panoramica mentre questa sta girando, assicurato al seggiolino con una cintura.

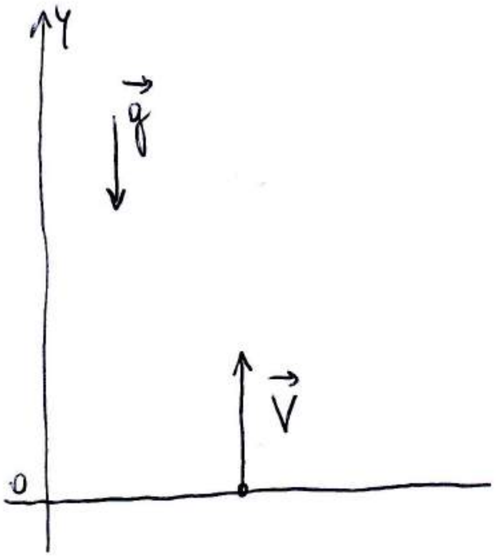
a) Calcolare i moduli $N_1$ e $N_2$ della forza di reazione esercitata dal seggiolino sul passeggero rispettivamente nel punto più basso e nel punto più alto della sua traiettoria.
b) Calcolare il modulo $N_3$ della forza di reazione esercitata dal seggiolino sul passeggero quando questo (mentre la ruota sta girando) si trova alla stessa quota del centro della ruota.
c) Se il passeggero slaccia la cintura subito prima di raggiungere il punto più alto della sua traiettoria, per quale valore minimo $\omega_{\min}$ della velocità angolare di rotazione della ruota il passeggero perde il contatto con il seggiolino nel punto più alto della traiettoria?

**Problema n. 3**

Una cassa avente massa $m = 100\,\mathrm{kg}$ viene trascinata lungo un piano orizzontale con attrito, applicando una forza $\vec{F}$ che forma un angolo $\theta = 10°$ con la direzione orizzontale. Il coefficiente di attrito dinamico tra la cassa e il piano orizzontale è $\mu_d = 0{,}2$ e la cassa si muove con velocità costante di modulo $v = 2\,\mathrm{m/s}$ .

a) Calcolare il modulo $F$ della forza applicata
b) Calcolare il modulo $N$ della reazione vincolare del piano orizzontale applicata alla cassa
c) Calcolare la potenza $P$ sviluppata dalla forza $\vec{F}$ durante il trascinamento della cassa

Problema n. 1



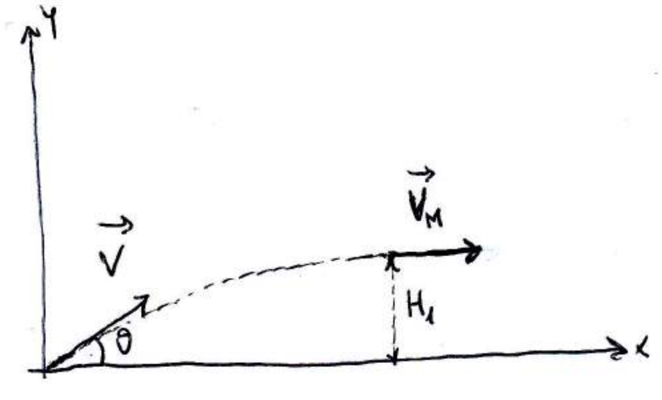

a) In assenza di attrito l'energia meccanica si conserva, in quanto l'unica forza che compie lavoro e' la forza peso, che e' conservativa. Dunque, detto $t_i$ l'istante in cui il proiettile viene sparato, e $t_f$ l'istante in cui il proiettile raggiunge la massima altezza, deve risultare

$$E_{m,f} = E_{m,i} \Rightarrow K_f + U_f = K_i + U_i$$

Poiché $K_i = \frac{1}{2} m v^2$, $U_i = 0$ (essendo $y_i = 0$), $U_f = mgH$ (essendo $y_f = H$) e $K_f = 0$ (essendo $|\vec{v}_f| = 0$), otteniamo

$\cancel{m} g H = \frac{1}{2} \cancel{m} v^2$, e quindi $\boxed{H = \frac{v^2}{2g} = \frac{(100 \ m/s)^2}{2 \cdot (9{,}81 \ m/s^2)} = 509{,}684 \ m}$

b)




Se il proiettile viene sparato con $\vec{v}$ che forma un angolo $\theta = 30°$ con la direzione orizzontale, la traiettoria seguita dal proiettile dopo lo sparo e' parabolica. Per calcolare la quota massima raggiunta dal proiettile lungo la sua traiettoria, in assenza di attrito si puo' ancora utilizzare la legge di conservazione dell'energia meccanica, tenendo presente che la componente lungo l'asse x della velocita' del proiettile resta costante durante il moto, e che nel punto piu' alto della traiettoria la velocita' del proiettile e' diretta orizzontalmente.

Se $t_i$ e' l'istante dello sparo e $t_f$ e' l'istante in cui il proiettile raggiunge la massima altezza, deve quindi risultare

$$E_{m,f} = E_{m,i} \Rightarrow K_f + U_f = K_i + U_i$$

$$K_i = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \left(v^2 \cos^2\theta + v^2 \operatorname{sen}^2\theta\right)$$

$$U_i = 0 \quad (\text{dato che } y_i = 0)$$

$$K_f = \frac{1}{2} m v_M^2 = \frac{1}{2} m v^2 \cos^2\theta \quad (\text{dato che } |\vec{v}_M| = v\cos\theta)$$

$$U_f = mg H_1 \quad (\text{dato che } y_f = H_1)$$

Allora risulta:

$$\cancel{\frac{1}{2} m v^2 \cos^2\theta} + \cancel{m} g H_1 = \cancel{\frac{1}{2} m v^2 \cos^2\theta} + \frac{1}{2} \cancel{m} v^2 \operatorname{sen}^2\theta$$

Dunque risulta $\boxed{H_1 = \frac{v^2 \operatorname{sen}^2\theta}{2g} = \frac{\left(100 \frac{m}{s}\right)^2 \cdot (\operatorname{sen} 30°)^2}{2 \cdot \left(9{,}81 \frac{m}{s^2}\right)} = 127{,}421 \text{ m}}$

La gittata dello sparo e' data dalla legge

$$\boxed{D = \frac{v^2 \operatorname{sen}(2\theta)}{g} = \frac{\left(100 \frac{m}{s}\right)^2 (\operatorname{sen} 60°)}{\left(9{,}81 \frac{m}{s^2}\right)} = 882{,}7986 \text{ m}}$$

c) Risulta immediatamente

$$\boxed{r_H = \frac{H}{H_1} = \frac{\cancel{v^2}}{\cancel{2g}} \cdot \frac{\cancel{2g}}{\cancel{v^2} \operatorname{sen}^2\theta} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta} = \frac{1}{(1/2)^2} = 4}$$

Nel caso del punto a), la legge del moto del punto materiale lungo l'asse verticale e'

$y(t) = vt - \frac{1}{2}gt^2$, e risulta $y(t) = 0$ per $t = 0$

e per $t = \frac{2V}{g}$

Dunque, il tempo di volo nel caso a) e' uguale a $\frac{2V}{g}$

Nel caso del punto b), la legge del moto per la sola coordinata $y$ e':

$y(t) = V_y t - \frac{1}{2}gt^2 = (V\operatorname{sen}\theta)t - \frac{1}{2}gt^2$, e risulta

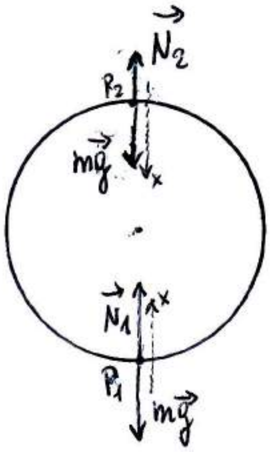
$y(t) = 0$ per $t = 0$ e per $t = \frac{2V\operatorname{sen}\theta}{g}$

Dunque, il tempo di volo nel caso b) e' uguale a $\frac{2V\operatorname{sen}\theta}{g}$

Pertanto otteniamo

$$\boxed{r_t = \frac{2V/g}{2V\operatorname{sen}\theta/g} = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{1}{1/2} = 2}$$

## Problema n. 2




a) Per calcolare $N_1$, consideriamo un asse x, quando il passeggero passa per il punto $P_1$, orientato come nella figura qui a fianco.

Posto $N_1 = |\vec{N}_1|$, risulta:

$m a_x = N_1 - mg$, dove $a_x$ è la componente lungo l'asse x dell'accelerazione istantanea del passeggero. Risulta $a_x = \omega^2 R$ (accelerazione centripeta nel moto circolare uniforme), per cui otteniamo:

$$\boxed{\begin{aligned} N_1 &= m a_x + mg = m(a_x + g) = m(\omega^2 R + g) = \\ &= (70\ kg)\left[(0{,}5\ rad/s)^2 \cdot (10\ m) + (9{,}81\ m/s^2)\right] = 861{,}7\ N \end{aligned}}$$

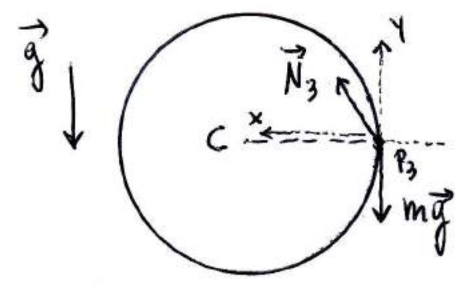
Per calcolare $N_2$, consideriamo un asse x, quando il passeggero passa per il punto $P_2$, orientato come nella figura sopra.

Posto $N_2 = |\vec{N}_2|$, risulta:

$m a_x = mg - N_2$, dove $a_x$ è la componente lungo l'asse x dell'accelerazione istantanea del passeggero. Risulta $a_x = \omega^2 R$ (accelerazione centripeta nel moto circolare uniforme), per cui otteniamo:

$$\boxed{\begin{aligned} N_2 &= mg - m a_x = m(g - a_x) = m(g - \omega^2 R) = \\ &= (70\ kg)\left[(9{,}81\ m/s^2) - (0{,}5\ rad/s)^2 \cdot (10\ m)\right] = 511{,}7\ N \end{aligned}}$$

b)




Per calcolare $N_3$, consideriamo un asse cartesiano x e un asse cartesiano y orientati come nella figura a fianco. Poiché il passeggero si sta muovendo di moto circolare uniforme, la componente lungo l'asse y dell'accelerazione istantanea del passeggero è nulla. Deve quindi risultare, posto che $N_{3,y}$ sia la componente di $\vec{N}_3$ lungo l'asse y:

$$N_{3,y} - mg = 0 \Rightarrow N_{3,y} = mg$$

Allo stesso tempo, deve risultare

$$m a_x = N_{3,x}$$ , posto che $N_{3,x}$ sia la componente di $\vec{N}_3$ lungo l'asse x, e dove $a_x$ è la componente lungo l'asse x dell'accelerazione istantanea del passeggero. Risulta $a_x = \omega^2 R$ (accelerazione centripeta nel moto circolare uniforme), per cui otteniamo $N_{3,x} = m\omega^2 R$

Pertanto risulta

$$\boxed{\begin{aligned} N_3 &= |\vec{N}_3| = \sqrt{(N_{3,x})^2 + (N_{3,y})^2} = \\ &= \sqrt{(mg)^2 + (m\omega^2 R)^2} = m\sqrt{g^2 + \omega^4 R^2} = \\ &= (70\ kg)\sqrt{\left(9{,}81\ \frac{m}{s^2}\right)^2 + \left(0{,}5\ \frac{rad}{s}\right)^4 \cdot (10\ m)^2} = 708{,}6479\ N \end{aligned}}$$

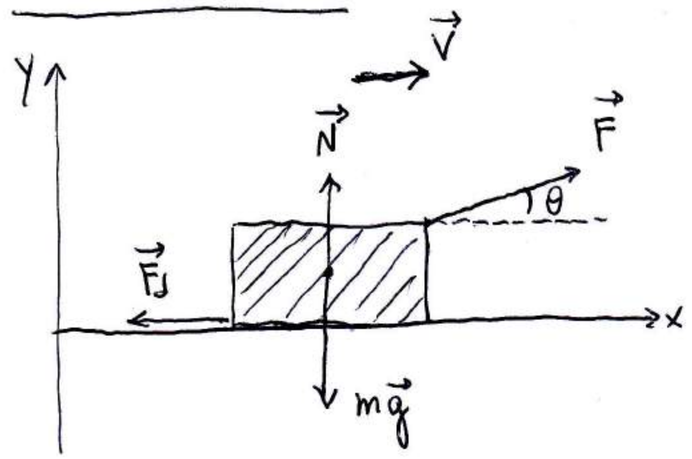
c) Riconsideriamo la situazione già studiata nel punto a), quando il passeggero passa per il punto $P_2$.
Il modulo della reazione del seggiolino sul passeggero in quella posizione è $N_2 = m(g - \omega^2 R)$, per cui il seggiolino esercita una forza di reazione sul passeggero soltanto se risulta $N_2 > 0$, se il passeggero non è assicurato al seggiolino tramite una cintura.
Pertanto, il minimo valore della velocità angolare di rotazione della ruota per cui il passeggero perde contatto con il seggiolino è quello per cui risulta $N_2 = 0$, cioè

$$m(g - \omega^2 R) = 0 \Rightarrow g - \omega^2 R = 0 \Rightarrow \omega^2 R = g,$$

e quindi $\omega^2 = \frac{g}{R}$; dunque otteniamo

$$\boxed{\omega_{min} = \sqrt{\frac{g}{R}} = \sqrt{\frac{9{,}81\ m/s^2}{10\ m}} = 0{,}9905\ \frac{rad}{s}}$$

Problema n. 3




Qui a fianco è schematizzato il diagramma delle forze agenti sulla cassa durante il suo moto.

Poiché, per le ipotesi del problema, la cassa si sta muovendo di moto rettilineo uniforme, deve risultare $m\vec{g} + \vec{F} + \vec{N} + \vec{F}_d = 0$, dove $\vec{N}$ è la reazione normale del piano orizzontale e $\vec{F}_d$ è la forza di attrito dinamico.

Introduciamo un sistema di assi cartesiani ortogonali come nello schema qua sopra, e poniamo $N = |\vec{N}|$ e $F = |\vec{F}|$:

Risulta:
$$F_{d,x} = -\mu_d N \; ; \; (m\vec{g})_x = 0; \; N_x = 0; \; F_x = F\cos\theta$$
$$F_{d,y} = 0 \; ; \; (m\vec{g})_y = -mg; \; N_y = N; \; F_y = F\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Pertanto otteniamo le due equazioni seguenti, che devono valere simultaneamente:

$$\begin{cases} F_{d,x} + (m\vec{g})_x + N_x + F_x = 0 \\ F_{d,y} + (m\vec{g})_y + N_y + F_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\mu_d N + F\cos\theta = 0 \\ -mg + N + F\,\mathrm{sen}\,\theta = 0 \end{cases}$$

Riordiniamo i termini:

$$\begin{cases} F\cos\theta - \mu_d N = 0 \\ F\operatorname{sen}\theta + N = mg \end{cases}$$

a) Ricaviamo N dalla seconda equazione:

$N = mg - F\operatorname{sen}\theta$, e sostituiamo questa espressione al posto di N nella prima equazione:

$$F\cos\theta - \mu_d\,(mg - F\operatorname{sen}\theta) = 0$$

$$F\cos\theta - \mu_d mg + \mu_d F\operatorname{sen}\theta = 0$$

$(\cos\theta + \mu_d\operatorname{sen}\theta)\,F = \mu_d mg$, e infine

$$\boxed{F = \frac{\mu_d mg}{\cos\theta + \mu_d\operatorname{sen}\theta} = \frac{0{,}2\cdot(100\ \text{kg})\cdot(9{,}81\ \text{m}/\text{s}^2)}{\cos 10^\circ + (0{,}2)\cdot\operatorname{sen}10^\circ} = 192{,}4402\ \text{N}}$$

b) Quindi, otteniamo:

$$N = mg - F\operatorname{sen}\theta = mg - \frac{\mu_d mg\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta + \mu_d\operatorname{sen}\theta} = \frac{mg(\cos\theta + \cancel{\mu_d\operatorname{sen}\theta} - \cancel{\mu_d\operatorname{sen}\theta})}{\cos\theta + \mu_d\operatorname{sen}\theta}$$

Dunque:

$$\boxed{N = \frac{mg\cos\theta}{\cos\theta + \mu_d\operatorname{sen}\theta} = \frac{(100\ \text{kg})\cdot(9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2})\cdot\cos 10^\circ}{\cos 10^\circ + (0{,}2)\cdot\operatorname{sen}10^\circ} = 947{,}5831\ \text{N}}$$

c) Poiché $\vec{F}$ e $\vec{v}$ sono costanti, e l'angolo tra i vettori $\vec{F}$ e $\vec{v}$ e' pure costante, durante il moto la forza $\vec{F}$ sviluppa una potenza costante:

$$\boxed{\begin{aligned} P &= \vec{F}\cdot\vec{v} = F v \cos\theta = \frac{\mu_d m g\, v \cos\theta}{\cos\theta + \mu_d \operatorname{sen}\theta} \\ &= \frac{0{,}2\cdot(100\ \text{kg})\cdot\left(9{,}81\ \frac{m}{s^2}\right)\cdot\left(2\ \frac{m}{s}\right)\cos 10^\circ}{\cos 10^\circ + (0{,}2)\cdot \operatorname{sen} 10^\circ} = 379{,}0332\ W \end{aligned}}$$