Statistica per la ricerca sperimentale e tecnologica
Corso di Laurea in Informatica, Università di Roma "Tor Vergata"
Anno accademico: 2006-2007
Titolare del corso: Claudio Macci
Esame del 18 Settembre 2007

Esercizio 1. Un'urna contiene 4 palline con i numeri 1, 2, 3 e 4. Si estraggono 2 palline in blocco a caso. Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di palline estratte con un numero pari, e sia Y variabile aleatoria che indica la somma dei due numeri estratti.
D1) Trovare la densità discreta di X.
D2) Trovare la densità discreta di Y.

Esercizio 2. Un'urna contiene 1 pallina bianca e 1 nera. Si lancia una moneta equa: se esce testa si mettono nell'urna 9 palline bianche; se esce croce si mettono nell'urna 9 palline nere. Poi si estrae una pallina a caso dall'urna.
D3) Calcolare la probabilità di estrarre una pallina bianca.
D4) Calcolare la probabilità di aver ottenuto testa sapendo di aver estratto una pallina bianca.

Esercizio 3. Consideriamo una variabile aleatoria (X, Y) con la seguente densità congiunta: $p_{(X,Y)}(0,0) = p_{(X,Y)}(1,0) = p_{(X,Y)}(0,1) = p_{(X,Y)}(2,3) = \frac{1}{4}$.
D5) Trovare le densità marginali di X e Y.
D6) Trovare la densità di $Z = X \cdot Y$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con densità continua $f(t) = 3t^2$ per $0 < t < 1$ e $f(t) = 0$ altrimenti.
D7) Calcolare $P(1/3 < X < 2/3)$.
Sia Y una variabile aleatoria con densità continua $f(t) = ct$ per $2 < t < 3$ (dove $c > 0$ è una costante) e $f(t) = 0$ altrimenti.
D8) Trovare il valore di c.

Esercizio 5. Sia X una variabile aleatoria con distribuzione uniforme su $[5, 6]$.
D9) Calcolare $\mathbb{E}[X]$.
D10) Calcolare $\mathrm{Var}[X]$.

Esercizio 6. Sia X una variabile aleatoria normale standard.
D11) Calcolare $P(1 < X < 2)$.
D12) Calcolare $P(|X| < 2)$.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.

D1) La variabile aleatoria X ha distribuzione ipergeometrica e si ha $p_X(k) = \frac{\binom{2}{k}\binom{2}{2-k}}{\binom{4}{2}}$ per $k \in \{0,1,2\}$. Quindi $p_X(0) = p_X(2) = \frac{1}{6}$ e $p_X(1) = \frac{4}{6}$.

D2) Abbiamo l'insieme $\Omega = \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\}$ e ciascuno dei $\binom{4}{2} = 6$ punti di Ω ha probabilità $\frac{1}{6}$. Quindi $p_Y(3) = P(\{\{1,2\}\}) = \frac{1}{6}$, $p_Y(4) = P(\{\{1,3\}\}) = \frac{1}{6}$, $p_Y(5) = P(\{\{2,3\},\{1,4\}\}) = \frac{1+1}{6} = \frac{2}{6}$, $p_Y(6) = P(\{\{2,4\}\}) = \frac{1}{6}$ e $p_Y(7) = P(\{\{3,4\}\}) = \frac{1}{6}$.

Esercizio 2. Sia B l'evento "estratta bianca" e T l'evento "esce testa".

D3) Per la formula delle probabilità totali si ha $P(B) = P(B|T)P(T)+P(B|T^c)P(T^c) = \frac{10}{11}\frac{1}{2}+\frac{1}{11}\frac{1}{2} = (\frac{10}{11}+\frac{1}{11})\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

D4) Per la formula di Bayes e per il valore di $P(B)$ calcolato prima, si ha $P(T|B) = \frac{P(B|T)P(T)}{P(B)} = \frac{\frac{10}{11}\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{10}{11}$.

Esercizio 3.

D5) La densità marginale di X è $p_X(0) = p_{(X,Y)}(0,0)+p_{(X,Y)}(0,1) = \frac{1+1}{4} = \frac{2}{4}$, $p_X(1) = p_{(X,Y)}(1,0) = \frac{1}{4}$ e $p_X(2) = p_{(X,Y)}(2,3) = \frac{1}{4}$. La densità marginale di Y è $p_Y(0) = p_{(X,Y)}(0,0) + p_{(X,Y)}(1,0) = \frac{1+1}{4} = \frac{2}{4}$, $p_Y(1) = p_{(X,Y)}(0,1) = \frac{1}{4}$ e $p_Y(3) = p_{(X,Y)}(2,3) = \frac{1}{4}$.

D6) Si ha $p_Z(0) = p_{(X,Y)}(0,0) + p_{(X,Y)}(1,0) + p_{(X,Y)}(0,1) = \frac{1+1+1}{4} = \frac{3}{4}$ e $p_Z(6) = p_{(X,Y)}(2,3) = \frac{1}{4}$.

Esercizio 4.

D7) Si ha $P(1/3 < X < 2/3) = \int_{1/3}^{2/3} 3t^2 dt = [t^3]_{t=1/3}^{t=2/3} = (2/3)^3 - (1/3)^3 = \frac{8-1}{27} = \frac{7}{27}$.

D8) Il valore c richiesto è tale che $1 = c\int_2^3 t dt = c[t^2/2]_{t=2}^{t=3} = c\frac{3^2-2^2}{2} = c\frac{9-4}{2} = c\frac{5}{2}$; quindi $c = \frac{2}{5}$.

Esercizio 5.

D9) Si ha $\mathbb{E}[X] = \frac{5+6}{2} = \frac{11}{2}$.

D10) Si ha $\mathrm{Var}[X] = \frac{(6-5)^2}{12} = \frac{1}{12}$.

Esercizio 6.

D11) Si ha $P(1 < X < 2) = \Phi(2) - \Phi(1) = 0.97725 - 0.84134 = 0.13591$.

D12) Si ha $P(|X| < 2) = P(-2 < X < 2) = \Phi(2) - \Phi(-2) = \Phi(2) - (1 - \Phi(2)) = 2\Phi(2) - 1 = 2 \cdot 0.97725 - 1 = 0.9545$.

Commenti.

D1) Si ha $p_X(0) + p_X(1) + p_X(2) = \frac{1+4+1}{6} = 1$ in accordo con la teoria.

D2) Si ha $p_Y(3) + p_Y(4) + p_Y(5) + p_Y(6) + p_Y(7) = \frac{1+1+2+1+1}{6} = 1$ in accordo con la teoria.

D5) Si ha $p_X(0) + p_X(1) + p_X(2) = \frac{2+1+1}{4} = 1$ e $p_Y(0) + p_Y(1) + p_Y(3) = \frac{2+1+1}{4} = 1$ in accordo con la teoria.

D6) Si ha $p_Z(0) + p_Z(6) = \frac{3+1}{4} = 1$ in accordo con la teoria.