Logica e Reti Logiche
Esercitazione

Francesco Pasquale

6 aprile 2023

Esercizio 1. Usando il metodo dei *tableaux* verificare che le seguenti formule sono tautologie

1. $((p \to q) \land (q \to r)) \to (p \to r)$
2. $((p \to r) \land (q \to r)) \to ((p \lor q) \to r)$
3. $((p \to q) \land (p \to r)) \to (p \to (q \land r))$
4. $\neg(p \lor q) \to \neg p \land \neg q$

Esercizio 2. Usando il metodo dei *tableaux* determinare se le seguenti formule sono tautologie oppure no. Per quelle che non lo sono, esibire un'interpretazione che le rende false

1. $((p \to q) \land (q \to \neg p)) \to \neg p$
2. $(((p \lor q) \to r) \land (p \to (q \lor r))) \to (p \to r)$
3. $((\neg p \lor q) \land (\neg p \lor r)) \to (p \lor (q \land r))$

Esercizio 3. Usando il metodo dei *tableaux* determinare se le seguenti formule sono contraddizioni oppure no. Per quelle che non lo sono, esibire un'interpretazione che le rende vere

1. $p \to \neg p$
2. $((p \land q) \lor (\neg q \land r)) \land \neg(p \lor r)$
3. $((p \to q) \land (q \to \neg p)) \to p$

Una formula si dice in *forma normale congiuntiva (CNF)*[1] se è una congiunzione di *clausole disgiuntive* (dette anche semplicemente *clausole*) $D_1 \land D_2 \land \cdots \land D_n$ dove ogni

[1] *Conjunctive Normal Form*

clausola è una disgiunzione di *letterali* $D_i = \ell_{i,1} \vee \ell_{i,2} \vee \cdots \vee \ell_{i,k_i}$ e ogni letterale è una variabile oppure una variabile negata. Per esempio,

$$(p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r)$$

è in forma normale congiuntiva. Data una formula X esiste sempre una formula Y equivalente[2] a X in forma normale congiuntiva.

Esercizio 4. Per ognuna delle formule negli Esercizi 1, 2 e 3, dare una formula equivalente in forma normale congiuntiva.

Esercizio 5. Trovare un metodo che, data una formula X, vi consenta di trovare una formula Y in forma normale congiuntiva equivalente a X.

Resolution. Considerate il seguente metodo che trasforma una formula $D_1 \wedge D_2 \wedge \cdots \wedge D_n$ in forma normale congiuntiva in una nuova formula in forma normale congiuntiva (oppure la lascia com'è):

1. Eliminate ogni clausola D_i che contiene sia una variablile x che la sua negata $\neg x$;
2. Per ogni coppia di clausole D_i e D_j in cui una contiene una variabile x e l'altra contiene la sua negata $\neg x$ aggiungete una nuova clausola $Z_{i,j;x}$ con tutti i letterali in D_i e D_j esclusi x e $\neg x$. Per esempio, se $D_i = (p \vee \neg q \vee r)$ e $D_j = (p \vee q \vee \neg s)$, siccome in D_i compare $\neg q$ e in D_j compare q dovete aggiungere la clausola $(p \vee r \vee \neg s)$;[a]
3. Eliminate tutte le clausole D_i, D_j coinvolte nel punto precedente.

[a](Nota bene: questo significa anche che, se per esempio $D_i = (p)$ e $D_j = (\neg p)$, dovete aggiungere una clausola () *vuota*)

Esercizio 6. Sia X una formula in forma normale congiuntiva e sia Y la formula ottenuta da X eseguendo i punti 1, 2 e 3 qui sopra. Dimostrare che X è soddisfacibile[3] se e soltanto se Y è soddisfacibile.

Esercizio 7. Per ognuna delle formule X in forma normale congiuntiva trovate nell'Esercizio 4, costruire la formula X_1 ottenuta applicando i tre punti di *Resolution* a X, poi X_2 ottenuta applicando *Resolution* a X_1 e così via fino a raggiungere una formula X_k che non viene più modificata da *Resolution*. In quali casi arrivate ad ottenere almeno una clausola vuota? Che cosa potete concludere sulla formula X di partenza quando durante queste iterazioni arrivate ad ottenere una formula che contiene una clausola vuota?

[2]Ricorda che in logica proposizionale due formule X e Y sono *equivalenti* se hanno la stessa tabella di verità

[3]Ricorda che una formula si dice *soddisfacibile* se esiste almeno una interpretazione che la rende vera

Una formula si dice in *forma normale disgiuntiva (DNF)*[4] se è una disgiunzione di *clausole congiuntive* $C_1 \vee C_2 \vee \cdots \vee C_n$ dove ogni clausola è una congiunzione di *letterali* $C_i = \ell_{i,1} \wedge \ell_{i,2} \wedge \cdots \wedge \ell_{i,k_i}$ e ogni letterale è una variabile oppure una variabile negata. Per esempio,

$$(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r)$$

è in forma normale disgiuntiva. Data una formula X esiste sempre una formula Y equivalente a X in forma normale disgiuntiva.

Esercizio 8. Per ognuna delle formule degli Esercizi 1, 2 e 3, dare una formula equivalente in forma normale disgiuntiva.

Esercizio 9. Trovare un metodo che, data una formula X, vi consenta di trovare una formula Y in forma normale disgiuntiva equivalente a X.

Esercizio 10. Riflettere sulla relazione che c'è fra il metodo dei *tableaux* e la forma normale disgiuntiva.

Sia $\mathcal{A}$ il sistema assiomatico definito dai seguenti schemi di assiomi

A1 : $X \to (Y \to X)$

A2 : $(X \to (Y \to Z)) \to ((X \to Y) \to (X \to Z))$

A3 : $(\neg X \to Y) \to (\neg Y \to X)$

e dalla regola di inferenza *Modus Ponens*

$$\frac{X,\ X \to Y}{Y}\ .$$

Esercizio 11. Verificare che le formule **A1**, **A2** e **A3** sono tautologie.

Esercizio 12. Dimostrare che nel sistema $\mathcal{A}$

1. $\vdash p \to p$
2. $\vdash \neg\neg p \to p$

Sia $\mathcal{B}$ il sistema assiomatico definito dai seguenti schemi di assiomi

B1 : $(X \wedge Y) \to X$

B2 : $(X \wedge Y) \to Y$

B3 : $((X \wedge Y) \to Z) \to (X \to (Y \to Z))$

B4 : $((X \to Y) \wedge (X \to (Y \to Z))) \to (X \to Z)$

[4] *Disjunctive Normal Form*

e dalla regola di inferenza *Modus Ponens*.

Esercizio 13. Verificare che le formule **B1**, **B2**, **B3** e **B4** sono tautologie.

Esercizio 14. Dimostrare che nel sistema $\mathcal{B}$

1. $\vdash p \to (q \to q)$
2. $p \wedge q \to r \vdash p \to (q \to r)$
3. $p \to q, p \to (q \to r) \vdash p \to r$
   (Suggerimento: Usare il punto precedente, che dice che da una formula del tipo $X \wedge Y \to Z$ si può derivare la formula $X \to (Y \to Z)$)
4. $\vdash p \to (q \to p)$
5. $p \to q, q \to r \vdash p \to r$
   (Suggerimento: Usare il punto precedente, che dice che si può derivare una formula del tipo $X \to (Y \to X)$)

Esercizio 15. Per ognuna delle seguenti formule, dire se è un teorema nel sistema $\mathcal{B}$ oppure no. In caso affermativo esibire una dimostrazione, in caso negativo spiegare perché non può essere un teorema

1. $p \to (p \to q)$
2. $(p \wedge (p \to q)) \to q$
3. $((p \to r) \wedge (q \to r)) \to (r \to (p \wedge q))$

Esercizio 16. Riflettere sulla relazione che c'è fra la regola di inferenza *Modus Ponens* e i punti 2 e 3 del metodo *resolution*.

Esercizio 17. Avete davanti a voi quattro porte, X, Y, Z, W, e otto guardiani, A, B, C, D, E, F, G, H. Ognuno dei guardiani può dire la verità oppure mentire. I guardiani fanno le seguenti affermazioni:

A: X è una porta buona

B: Almeno una delle porte Y, Z è buona

C: A e B dicono la verità

D: X e Y sono entrambe porte buone

E: X e Z sono entrambe porte buone

F: Almeno uno dei guardiani D, E dice la verità

G: Se C dice la verità, anche F dice la verità

H: Se G e io diciamo la verità, anche A dice la verità

Almeno una delle porte è buona. Potete scegliere una sola porta. Una catastrofe si abbatterà su di voi se non scegliete una porta buona.
Che porta scegliete? Perché?