Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità (ed insegnamenti mutuati)
Anno accademico: `2016-2017`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Appello del 24 Febbraio 2017

Esercizio 1. Si lancia due volte un dado equo e sia X la variabile aleatoria che conta il numero di volte che esce il numero 5.
D1) Trovare la densità discreta di X.
D2) Calcolare $P(X = k|E)$ per $k \in \{0, 1, 2\}$, dove E è l'evento "la somma dei numeri ottenuti nei due lanci è uguale a 10".

Esercizio 2. Si considera il seguente gioco. Si lancia ripetutamente una moneta equa, e consideriamo la variabile aleatoria X che conta il numero di lanci di moneta necessari per avere per la prima volta testa. Poi si lancia un dado equo: se X assume un valore pari, si vince il gioco se esce il numero 1 nel lancio del dado; se X assume un valore dispari, si vince il gioco se esce un numero pari nel lancio del dado.
D3) Calcolare la probabilità di vincere il gioco.
D4) Calcolare la probabilità che X assuma un valore pari sapendo di aver vinto il gioco.

Esercizio 3. Consideriamo la seguente densità congiunta: $p_{X_1,X_2}(0, 5) = p_{X_1,X_2}(5, 0) = \frac{1}{70}$, $p_{X_1,X_2}(1, 3) = p_{X_1,X_2}(3, 1) = \frac{16}{70}$, $p_{X_1,X_2}(2, 2) = \frac{36}{70}$.
D5) Trovare la densità discreta di $Y = X_1X_2$.
D6) Calcolare $P(X_1 \neq X_2)$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con densità continua $f_X(x) = 2x1_{(0,1)}(x)$.
D7) Trovare la densità continua di $Y = 1/X$.
D8) Calcolare $P(X > 1/2)$.

Esercizio 5.
D9) Sia $N_t = \sum_{n\geq1} 1_{T_n\leq t}$ (per $t \geq 0$) un processo di Poisson con intensità di $\lambda = 1/3$. Calcolare $P(N_3 > 2)$.
D10) Sia X una variabile aleatoria Normale con media μ e varianza $\sigma^2 = 100$. Trovare il valore di μ per cui si ha $P(X \leq 11) = \Phi(0.1)$.

Esercizio 6. Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. (indipendenti e identicamente distribuite).
D11) Dire per quale valore di m si ha

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - m\right| > \varepsilon\right) = 0 \text{ per ogni } \varepsilon > 0,$$

nel caso in cui le variabili aleatorie $\{X_n : n \geq 1\}$ abbiano densità continua $f_X(x) = \frac{2}{5}e^{-(2/5)x}1_{(0,\infty)}(x)$.
D12) Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - \frac{2}{5}n}{\sqrt{n}} \leq \frac{3}{5}\right)$$

nel caso in cui le variabili aleatorie $\{X_n : n \geq 1\}$ abbiano densità continua $f_X(x) = \frac{5}{2}e^{-(5/2)x}1_{(0,\infty)}(x)$.

Esercizio 7 (*solo per Lauree Magistrali*). Consideriamo una catena di Markov omogenea $\{X_n : n \geq 0\}$ con spazio degli stati $E = \{1, 2, 3\}$ e matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

D13) Trovare la/e distribuzione/i stazionaria/e.
D14) Calcolare $P(X_2 = 2|X_0 = 1)$.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
D1) Si ha $p_X(k) = \binom{2}{k}(1/6)^k(1-1/6)^{2-k}$ per $k \in \{0,1,2\}$, da cui segue $p_X(0) = \frac{25}{36}$, $p_X(1) = \frac{10}{36}$, $p_X(2) = \frac{1}{36}$.
D2) Si ha $P(X = k|E) = \frac{P(\{X=k\}\cap E)}{P(E)}$ dove $E = \{(4,6),(5,5),(6,4)\}$. Allora $P(X = 0|E) = \frac{P(\{X=0\}\cap E)}{P(E)} = \frac{P(\{(4,6),(6,4)\})}{P(E)} = \frac{2/36}{3/36} = \frac{2}{3}$, $P(X = 1|E) = \frac{P(\{X=1\}\cap E)}{P(E)} = \frac{P(\emptyset)}{P(E)} = 0$ e $P(X = 2|E) = \frac{P(\{X=2\}\cap E)}{P(E)} = \frac{P(\{(5,5)\})}{P(E)} = \frac{1/36}{3/36} = \frac{1}{3}$.

Esercizio 2. Indichiamo con E l'evento "X assume un valore pari", e con V l'evento "vincere il gioco".
D3) Per la formula delle probabilità totali si ha $P(V) = P(V|E)P(E) + P(V|E^c)P(E^c) = \frac{1}{6}\sum_{k\geq 1}(1-\frac{1}{2})^{2k-1}\frac{1}{2} + \frac{3}{6}\sum_{k\geq 1}(1-\frac{1}{2})^{2k-1-1}\frac{1}{2} = \frac{1}{6}\sum_{k\geq 1}(\frac{1}{2})^{2k} + \frac{3}{6}\frac{1}{2}\sum_{k\geq 1}(\frac{1}{2})^{2(k-1)} = \frac{1}{6}\frac{1/4}{1-1/4} + \frac{1}{4}\frac{1}{1-1/4} = \frac{1}{18} + \frac{1}{3} = \frac{1+6}{18} = \frac{7}{18}$.
D4) Per la formula di Bayes, e tenendo conto di alcuni calcoli fatti prima (in particolare il valore di $P(V)$), si ha $P(E|V) = \frac{P(V|E)P(E)}{P(V)} = \frac{\frac{1}{6}\sum_{k\geq 1}(1-\frac{1}{2})^{2k-1}\frac{1}{2}}{7/18} = \frac{1/18}{7/18} = \frac{1}{7}$.

Esercizio 3.
D5) Si ha $p_Y(0) = p_{X_1,X_2}(0,5) + p_{X_1,X_2}(5,0) = \frac{1}{70} + \frac{1}{70} = \frac{1}{35}$, $p_Y(3) = p_{X_1,X_2}(1,3) + p_{X_1,X_2}(3,1) = \frac{16}{70} + \frac{16}{70} = \frac{16}{35}$ e $p_Y(4) = p_{X_1,X_2}(2,2) = \frac{36}{70} = \frac{18}{35}$.
D6) Si ha $P(X_1 \neq X_2) = 1 - P(X_1 = X_2) = 1 - p_{X_1,X_2}(2,2) = 1 - \frac{36}{70} = \frac{34}{70} = \frac{17}{35}$.

Esercizio 4.
D7) Si vede che $P(Y \geq 1) = 1$ e quindi $F_Y(y) = 0$ per $y \leq 1$. Per $y > 1$ si ha $F_Y(y) = P(1/X \leq y) = P(X \geq 1/y) = \int_{1/y}^1 2x dx = [x^2]_{x=1/y}^{x=1} = 1 - 1/y^2$. Quindi la densità continua è $f_Y(y) = \frac{2}{y^3}1_{(1,\infty)}(y)$.
D8) Si ha $P(X > 1/2) = \int_{1/2}^1 2x dx = [x^2]_{x=1/2}^{x=1} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Esercizio 5.
D9) Si ha $P(N_3 > 2) = 1 - P(N_3 \leq 2) = 1 - \sum_{k=0}^2 \frac{((1/3)\cdot 3)^k}{k!}e^{-(1/3)\cdot 3} = 1 - (1 + 1 + 1/2)e^{-1} = 1 - \frac{5}{2}e^{-1}$.
D10) Si ha $P(X \leq 11) = P(\frac{X-\mu}{\sqrt{100}} \leq \frac{11-\mu}{\sqrt{100}}) = \Phi(\frac{11-\mu}{10})$ da cui segue $\frac{11-\mu}{10} = 0.1$ e (con semplici calcoli) $\mu = 10$.

Esercizio 6.
D11) Le variabili aleatorie hanno distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 2/5$; quindi, per la legge dei grandi numeri, il valore di m richiesto è $m = 1/\lambda = 5/2$.
D12) Le variabili aleatorie hanno distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 5/2$; quindi hanno media $\mu = 2/5$ e varianza $\sigma^2 = (2/5)^2 = 4/25$. Quindi la standardizzata di $X_1 + \cdots + X_n$ è $\frac{X_1+\cdots+X_n-\frac{2}{5}n}{\sqrt{\frac{4}{25}}\sqrt{n}}$. Allora $\left\{\frac{X_1+\cdots+X_n-\frac{2}{5}n}{\sqrt{n}} \leq \frac{3}{5}\right\} = \left\{\frac{X_1+\cdots+X_n-\frac{2}{5}n}{\sqrt{\frac{4}{25}}\sqrt{n}} \leq \frac{3/5}{\sqrt{4/25}}\right\}$ e, per il teorema limite centrale, il limite richiesto è uguale a $\Phi(\frac{3/5}{\sqrt{4/25}}) = \Phi(3/2) = \Phi(1.5) = 0.93319$.

Esercizio 7.
D13) Se (π_1,π_2,π_3) è una distribuzione stazionaria, allora si deve avere la relazione matriciale

$$(\pi_1,\pi_2,\pi_3) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}(\pi_1,\pi_2,\pi_3),$$

che fornisce il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \frac{\pi_1}{2} = \pi_1 \\ \frac{\pi_1}{2} + \pi_2 + \frac{\pi_3}{2} = \pi_2 \\ \frac{\pi_3}{2} = \pi_3. \end{cases}$$

Si ha $\pi_1 = 0$ dalla prima equazione e $\pi_3 = 0$ dalla terza equazione; quindi $\pi_2 = 1$ e l'unica distribuzione stazionaria è $(\pi_1,\pi_2,\pi_3) = (0,1,0)$.

`D14`) Se consideriamo la matrice di transizione a due passi $P^2 = (p_{ij}^{(2)})_{i,j\in E}$, cioè

$$P^2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3/4 & 1/4 \end{pmatrix},$$

la probabilità richiesta è $p_{12}^{(2)} = \frac{3}{4}$.

Commenti.
La somma dei valori di ciascuna densità discreta che appare è 1 in accordo con la teoria.
`D1`) Si ha $\sum_{k=0}^{2} P(X = k|E) = 1$ in accordo con la teoria.
`D6`) In altro modo $P(X_1 \neq X_2) = p_{X_1,X_2}(0,5) + p_{X_1,X_2}(5,0) + p_{X_1,X_2}(1,3) + p_{X_1,X_2}(3,1) = \frac{1+1+16+16}{70} = \frac{34}{70} = \frac{17}{35}$.
`D13`) Si poteva giungere alla stessa conclusione senza fare calcoli osservando che gli stati 1 e 3 sono transitori, da cui segue che $\pi_1 = \pi_3 = 0$.
`D14`) In altro modo si ha $P(X_2 = 2|X_0 = 1) = \sum_{i=1}^{3} P(X_2 = 2, X_1 = i|X_0 = 1) = \sum_{i=1}^{3} p_{1i}p_{i2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot 1 + 0\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1+2}{4} = \frac{3}{4}$.