Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)
Anno accademico: `2010-2011`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Appello del 4 Febbraio 2011

Esercizio 1. Un'urna ha 3 palline bianche, 2 rosse e 1 nera. Si estraggono a caso 3 palline in blocco.
`D1`) Calcolare la probabilità di estrarre 3 palline con colori diversi.
`D2`) Trovare la densità della variabile aleatoria X che indica il numero di palline bianche estratte.

Esercizio 2. Abbiamo due urne. La *prima* ha 3 palline numerate da 1 a 3; la *seconda* ha 1 pallina nera. Si estrae una pallina a caso dalla prima urna e sia X la variabile aleatoria che indica il numero estratto. Nella seconda urna vengono messe X palline bianche. Infine si estrae una pallina a caso dalla seconda urna.
`D3`) Calcolare la probabilità di estrarre una pallina bianca dalla seconda urna.
`D4`) Calcolare la probabilità di aver estratto la pallina *numero 1* dalla prima urna sapendo di aver estratto una pallina bianca dalla seconda urna.

Esercizio 3. Consideriamo la seguente densità congiunta: $p_{X_1,X_2}(0,0) = p_{X_1,X_2}(1,1) = \frac{1}{3}$ e $p_{X_1,X_2}(0,1) = p_{X_1,X_2}(1,0) = \frac{1}{6}$.
`D5`) Trovare la densità di $Z = X_1 - X_2$.
`D6`) Calcolare $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con distribuzione uniforme su (e^a, e^b) per $a < b$.
`D7`) Trovare la densità continua di $Y = \log X$.
`D8`) Verificare che la mediana di Y è $m = \log(\frac{e^a+e^b}{2})$ (si ricorda che m è l'unico valore per cui $P(Y \leq m) = \frac{1}{2}$).

Esercizio 5. Sia $N_t = \sum_{n\geq 1} 1_{T_n \leq t}$ (per $t \geq 0$) un processo di Poisson con intensità di $\lambda = \frac{8}{5}$.
`D9`) Calcolare $P(N_5 \geq 2)$.
`D10`) Calcolare $P(5 < T_1 < 10)$.

Esercizio 6. Sia X una variabile aleatoria con distribuzione normale standard.
`D11`) Calcolare $P(X > 0.57)$.
`D12`) Verificare che $P(|X| > a) = 2(1 - \Phi(a))$ per ogni $a \geq 0$.

Esercizio 7 (*solo per ST-Materiali*). Consideriamo una catena di Markov omogenea $\{X_n : n \geq 0\}$ con spazio degli stati $E = \{1, 2\}$ e matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ q & 1-q \end{pmatrix}.$$

Inoltre supponiamo di avere la seguente distribuzione iniziale: $P(X_0 = 1) = P(X_0 = 2) = \frac{1}{2}$.
`D13`) Calcolare $P(X_1 = 1)$ nel caso in cui $q = \frac{1}{3}$.
`D14`) Determinare per quali valori di q si ha $P(X_0 = 2, X_1 = 2, X_2 = 1) = \frac{3}{32}$.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
D1) La probabilità richiesta è $P(\{1B, 1N, 1R\}) = \frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{1}{1}}{\binom{6}{3}} = \frac{3\cdot2\cdot1}{20} = \frac{3}{10}$.
D2) La variabile aleatoria X ha distribuzione ipergeometrica: $p_X(k) = \frac{\binom{3}{k}\binom{3}{3-k}}{\binom{6}{3}}$ per $k \in \{0, 1, 2, 3\}$. Dunque si ha $p_X(0) = p_X(3) = \frac{1}{20}$ e $p_X(1) = p_X(2) = \frac{9}{20}$.

Esercizio 2. Sia B l'evento "si estrae una pallina bianca dalla seconda urna".
D3) Per la formula delle probabilità totali si ha $P(B) = \sum_{i=1}^{3} P(B|X = i)P(X = i) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4}) = \frac{1}{3}\frac{12+16+18}{24} = \frac{46}{72} = \frac{23}{36}$.
D4) Per la formula di Bayes (e per il valore di $P(B)$ calcolato prima) si ha $P(X = 1|B) = \frac{P(B|X=1)P(X=1)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{3}}{\frac{23}{36}} = \frac{6}{23}$.

Esercizio 3.
D5) Si ha $p_Z(1) = p_{X_1,X_2}(1, 0) = \frac{1}{6}$, $p_Z(0) = p_{X_1,X_2}(0, 0) + p_{X_1,X_2}(1, 1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} = \frac{4}{6}$, $p_Z(-1) = p_{X_1,X_2}(0, 1) = \frac{1}{6}$.
D6) Si ha $p_{X_1}(0) = p_{X_1,X_2}(0, 0) + p_{X_1,X_2}(0, 1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2+1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $p_{X_1}(1) = p_{X_1,X_2}(1, 0) + p_{X_1,X_2}(1, 1) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1+2}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, da cui $\mathbb{E}[X_1] = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$; $p_{X_2}(0) = p_{X_1,X_2}(0, 0) + p_{X_1,X_2}(1, 0) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2+1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $p_{X_2}(1) = p_{X_1,X_2}(0, 1) + p_{X_1,X_2}(1, 1) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1+2}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, da cui $\mathbb{E}[X_1] = 0\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$; quindi $\mathbb{E}[X_1X_2] = \sum x_1x_2p_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = 0\cdot0\cdot\frac{1}{3} + 1\cdot0\cdot\frac{1}{6} + 0\cdot1\cdot\frac{1}{6} + 1\cdot1\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ e $\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = \mathbb{E}[X_1X_2] - \mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[X_2] = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{4-3}{12} = \frac{1}{12}$.

Esercizio 4.
D7) Si vede che $P(a \leq \log X \leq b) = 1$, da cui $F_Y(y) = 0$ per $y \leq a$ e $F_Y(y) = 1$ per $y \geq b$. Per $y \in (a, b)$ si ha $F_Y(y) = P(\log X \leq y) = P(X \leq e^y) = \int_{e^a}^{e^y} \frac{1}{e^b-e^a}dt = \frac{e^y-e^a}{e^b-e^a}$. Quindi la densità è $f_Y(y) = \frac{e^y}{e^b-e^a}1_{(a,b)}(y)$.
D8) Si deve considerare l'equazione $\frac{e^m-e^a}{e^b-e^a} = \frac{1}{2}$ con incognita m, da cui segue $e^m - e^a = \frac{e^b-e^a}{2}$, $e^m = e^a + \frac{e^b-e^a}{2}$, $e^m = \frac{e^b+e^a}{2}$, $m = \log(\frac{e^b+e^a}{2})$.

Esercizio 5.
D9) Si ha $P(N_5 \geq 2) = 1 - (P(N_5 = 0) + P(N_5 = 1)) = 1 - \frac{(\frac{8}{5}\cdot5)^0}{0!}e^{-\frac{8}{5}\cdot5} - \frac{(\frac{8}{5}\cdot5)^1}{1!}e^{-\frac{8}{5}\cdot5} = 1 - 9e^{-8}$.
D10) Si ha $P(5 < T_1 < 10) = \int_5^{10} \frac{8}{5}e^{-\frac{8}{5}t}dt = [-e^{-\frac{8}{5}t}]_{t=5}^{t=10} = e^{-8} - e^{-16}$.

Esercizio 6.
D11) Si ha $P(X > 0.57) = 1 - \Phi(0.57) = 1 - 0.71566 = 0.28434$.
D12) Si ha $P(|X| > a) = P(X > a) + P(X < -a) = (1 - \Phi(a)) + \Phi(-a) = 1 - \Phi(a) + 1 - \Phi(a) = 2(1 - \Phi(a))$.

Esercizio 7.
D13) Si ha $P(X_1 = 1) = \sum_{j=1}^{2} P(X_1 = 1|X_0 = j)P(X_0 = j) = \frac{3}{4}\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\frac{1}{2} = (\frac{3}{4} + \frac{1}{3})\frac{1}{2} = \frac{9+4}{12}\frac{1}{2} = \frac{13}{24}$.
D14) Si deve considerare l'equazione $P(X_0 = 2)p_{22}p_{21} = \frac{3}{32}$, da cui segue $\frac{1}{2}(1-q)q = \frac{3}{32}$, $q-q^2 = \frac{3}{16}$, $q^2-q+\frac{3}{16} = 0$, $q_\pm = \frac{1\pm\sqrt{1-4\cdot\frac{3}{16}}}{2} = \frac{1\pm\frac{1}{2}}{2}$. Quindi abbiamo due valori di q che realizzano la condizione richiesta: $q = q_+ = \frac{3}{4}$ e $q = q_- = \frac{1}{4}$.

Commenti.
La somma dei valori di ciascuna densità discreta che appare è 1 in accordo con la teoria.
D1-D2) Si ha $\{X = 1\} = \{1B, 1N, 1R\} \cup \{1B, 2N\} \cup \{1B, 2R\}$ dove gli eventi che appaiono nell'unione

sono disgiunti a due a due. Quindi si deve avere $p_X(1) = P(\{1B, 1N, 1R\}) + P(\{1B, 2N\}) + P(\{1B, 2R\})$ e questa uguaglianza si verifica osservando che: $p_X(1) = \frac{9}{20}$ e $P(\{1B, 1N, 1R\}) = \frac{3}{10} = \frac{6}{20}$ (già calcolati); $P(\{1B, 2N\}) = 0$ (ovvio); $P(\{1B, 2R\}) = \frac{\binom{3}{1}\binom{2}{2}\binom{1}{0}}{\binom{6}{3}} = \frac{3 \cdot 1 \cdot 1}{20} = \frac{3}{20}$.

`D12`) L'uguaglianza è immediata per $a = 0$ perché $\Phi(0) = \frac{1}{2}$ (perché la densità di una qualsiasi variabile aleatoria normale di media 0 è una funzione pari) e $P(|X| > 0) = 1$ (infatti in generale si ha $P(|X| \geq 0) = 1$ e $P(|X| = 0) = P(X = 0)$, e in particolare si ha $P(X = 0) = 0$ perché X è una variabile aleatoria continua; quindi si ha $P(|X| > 0) = P(|X| \geq 0) - P(|X| = 0) = 1 - 0 = 1$).