**Statistica per la ricerca sperimentale e tecnologica**
Corso di Laurea in Informatica, Università di Roma "Tor Vergata"
*Anno accademico:* `2006-2007`
*Titolare del corso:* `Claudio Macci`
**Esame del 19 Febbraio 2007**

**Esercizio 1**. Un'urna ha 6 palline numerate da 1 a 6. Si estraggono 3 palline a caso, una alla volta e con reinserimento. Sia $X$ la variabile aleatoria che conta il numero di palline con *numero pari* estratte.
`D1`) Trovare la densità discreta di $X$.
`D2`) Calcolare la probabilità di ottenere la sequenza $(1, 1, 4)$.
`D3`) Calcolare la probabilità di avere esattamente due volte 1 e una volta 4.

**Esercizio 2**. Si lancia un dado equo. Se esce il numero 1 si lancia una moneta equa, se esce un numero diverso da 1 si lancia una moneta la cui probabilità che esca testa è $\frac{1}{5}$.
`D4`) Calcolare la probabilità che esca testa.
`D5`) Calcolare la probabilità di aver ottenuto il numero 1 nel lancio del dado sapendo di aver ottenuto testa.

**Esercizio 3**. Consideriamo una variabile aleatoria $(X, Y)$ con la seguente densità congiunta: $p_{(X,Y)}(0, 0) = p_{(X,Y)}(1, 0) = \frac{1}{4}$ e $p_{(X,Y)}(0, 1) = \frac{1}{2}$.
`D6`) Trovare le densità marginali di $X$ e $Y$, e la densità di $Z = X + Y$.

**Esercizio 4**. Sia $X$ una variabile aleatoria con densità $f_X(t) = \frac{3}{4}(1 - t^2)$ per $-1 < t < 1$ e $f_X(t) = 0$ altrimenti.
`D7`) Calcolare $P(-\frac{1}{2} < X < \frac{1}{2} | 0 < X < 1)$.
`D8`) Calcolare $\mathbb{E}[X]$.

**Esercizio 5**. Sia $X_1$ uniforme su $[0, 1]$ e $X_2$ uniforme su $[0, 2]$.
`D9`) Calcolare $\mathbb{E}[X_1 + X_2]$.
`D10`) Calcolare $\mathrm{Var}[X_1]$ e $\mathrm{Var}[X_2]$.
Supponiamo inoltre che $X_1$ e $X_2$ siano indipendenti.
`D11`) Calcolare $\mathrm{Var}[X_1 + X_2]$.

**Esercizio 6**. Sia $X$ una variabile aleatoria normale con media $\mu = 4$ e varianza $\sigma^2 = 25$.
`D12`) Calcolare $P(X > 5)$.

**Cenno alle soluzioni** (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

**Esercizio 1.**
`D1`) La variabile aleatoria $X$ ha distribuzione binomiale di parametri $n = 3$ (numero di palline estratte) e $p = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ (probabilità di estrarre una pallina con numero pari in ogni estrazione). Quindi $p_X(k) = \binom{3}{k}(\frac{1}{2})^3$ per $k \in \{0, 1, 2, 3\}$, da cui $p_X(0) = p_X(3) = \frac{1}{8}$ e $p_X(1) = p_X(2) = \frac{3}{8}$.
`D2`) La probabilità richiesta è $\frac{1}{6}\frac{1}{6}\frac{1}{6} = \frac{1}{216}$.
`D3`) Per la teoria sulla distribuzione multinomiale la probabilità richiesta è $\frac{3!}{2!1!0!}(\frac{1}{6})^2(\frac{1}{6})^1(\frac{3}{6})^0 = 3(\frac{1}{6})^3 = \frac{3}{216}$, oppure $\frac{3!}{2!0!0!1!0!0!}(\frac{1}{6})^2(\frac{1}{6})^0(\frac{1}{6})^0(\frac{1}{6})^1(\frac{1}{6})^0(\frac{1}{6})^0 = 3(\frac{1}{6})^3 = \frac{3}{216}$.

**Esercizio 2.** Sia $T$ l'evento "esce testa" e $E$ l'evento "esce 1".
`D4`) Per la formula delle probabilità totali si ha $P(T) = P(T|E)P(E)+P(T|E^c)P(E^c) = \frac{1}{2}\frac{1}{6} + \frac{1}{5}\frac{5}{6} = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{1+2}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$.
`D5`) Per la formula di Bayes e per il valore di $P(T)$ calcolato prima, si ha $P(E|T) = \frac{P(T|E)P(E)}{P(T)} = \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{12} \cdot 4 = \frac{1}{3}$.

**Esercizio 3.**
`D6`) Si ha $p_X(0) = p_{(X,Y)}(0, 0)+p_{(X,Y)}(0, 1) = \frac{1}{4}+\frac{1}{2} = \frac{1+2}{4} = \frac{3}{4}$ e $p_X(1) = p_{(X,Y)}(1, 0) = \frac{1}{4}$; $p_Y(0) = p_{(X,Y)}(0, 0) + p_{(X,Y)}(1, 0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ e $p_Y(1) = p_{(X,Y)}(0, 1) = \frac{1}{2}$; $p_Z(0) = p_{(X,Y)}(0, 0) = \frac{1}{4}$ e $p_Z(1) = p_{(X,Y)}(1, 0) + p_{(X,Y)}(0, 1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1+2}{4} = \frac{3}{4}$.

**Esercizio 4.**
`D7`) Si ha $P(-\frac{1}{2} < X < \frac{1}{2}|0 < X < 1) = \frac{P(\{-\frac{1}{2}<X<\frac{1}{2}\}\cap\{0<X<1\})}{P(0<X<1)} = \frac{P(0<X<\frac{1}{2})}{P(0<X<1)} = \frac{\frac{3}{4}\int_0^{1/2} 1-t^2dt}{\frac{3}{4}\int_0^1 1-t^2dt} = \frac{[t-\frac{t^3}{3}]_0^{1/2}}{[t-\frac{t^3}{3}]_0^1} = \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{24}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{12-1}{24}}{\frac{3-1}{3}} = \frac{11}{24}\frac{3}{2} = \frac{11}{16}$.
`D8`) Si ha $\mathbb{E}[X] = \int_{-1}^1 t\frac{3}{4}(1 - t^2)dt = \frac{3}{4}\int_{-1}^1 t - t^3dt = \frac{3}{4}[\frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{4}]_{-1}^1 = \frac{3}{4}(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - (\frac{1}{2} - \frac{1}{4})) = 0$.

**Esercizio 5.**
`D9`) Si ha $\mathbb{E}[X_1 + X_2] = \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2] = \frac{0+1}{2} + \frac{0+2}{2} = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$.
`D10`) Si ha $\mathrm{Var}[X_1] = \frac{(1-0)^2}{12} = \frac{1}{12}$ e $\mathrm{Var}[X_2] = \frac{(2-0)^2}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.
`D11`) Per l'indipendenza tra $X_1$ e $X_2$ si ha $\mathrm{Var}[X_1 + X_2] = \mathrm{Var}[X_1] + \mathrm{Var}[X_2] = \frac{1}{12} + \frac{1}{3} = \frac{1+4}{12} = \frac{5}{12}$.

**Esercizio 6.**
`D12`) Si ha $P(X > 5) = P(Z_X > \frac{5-4}{\sqrt{25}}) = P(Z_X > \frac{1}{5}) = 1 - \Phi(\frac{1}{5}) = 1 - \Phi(0.2) = 1 - 0.57926 = 0.42074$.

*Commenti.*
`D1`) Si ha $p_X(0) + p_X(1) + p_X(2) + p_X(3) = \frac{1+3+3+1}{8} = 1$ in accordo con la teoria.
`D2-D3`) Le sequenze con esattamente due volte 1 e una volta 4 sono le seguenti: $(1, 1, 4)$, $(1, 4, 1)$, $(4, 1, 1)$. Tali sequenze costituiscono eventi disgiunti a due a due, ciascuno di probabilità $\frac{1}{216}$, la cui unione è l'evento nella domanda `D3`). Questo è in accordo con il fatto che la somma delle probabilità di tutte le sequenze coincide con la probabilità calcolata nella domanda `D3`): $\frac{1+1+1}{216} = \frac{3}{216}$.
`D4`) In accordo con la teoria si ha $p_X(0) + p_X(1) = \frac{3+1}{4} = 1$, $p_Y(0) + p_X(1) = \frac{1+1}{2} = 1$ e $p_Z(0) + p_Z(1) = \frac{1+3}{4} = 1$.
`D8`) Il risultato $\mathbb{E}[X] = 0$ è in accordo con il fatto che la speranza matematica è finita (infatti $f_X$ è nulla al di fuori di un intervallo limitato, cioè $[-1, 1]$) e la densità $f_X$ è una funzione pari. Inoltre, scorrendo i passaggi sopra, si vede subito che $\int_{-1}^1 t-t^3dt = 0$ perché si ha l'integrale di una funzione dispari (cioè $t - t^3$) su intervallo simmetrico (cioè $[-1, 1]$).