Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata

Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)

Anno accademico: `2010-2011`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`

Appello del 17 Febbraio 2011

Esercizio 1. Un'urna ha 4 palline con i numeri 0,1,2,3. Si estraggono a caso 2 palline in blocco.
`D1`) Calcolare la probabilità di estrarre un numero pari e un numero dispari.
`D2`) Trovare la densità della variabile aleatoria X che indica il prodotto dei due numeri estratti.

Esercizio 2. Abbiamo due monete e, per $i \in \{1,2\}$, la probabilità che esca testa lanciando la moneta i-sima è p_i. Supponiamo che $p_1 = \frac{2}{3}$ e $p_2 = \frac{1}{3}$. Si sceglie una moneta a caso e viene lanciata 2 volte.
`D3`) Trovare la densità della variabile aleatoria X che conta il numero di volte che esce testa.
`D4`) Calcolare la probabilità di aver scelto la *moneta 1* sapendo di aver ottenuto testa esattamente una volta nei due lanci della moneta scelta.

Esercizio 3. Consideriamo la seguente densità congiunta: $p_{X_1,X_2}(k,1) = (\frac{1}{2})^k$ per $k \geq 2$ intero; $p_{X_1,X_2}(2,2) = q$, dove $q > 0$ è una costante da determinare.
`D5`) Calcolare il valore della costante q.
`D6`) Calcolare $P(X_2 = 2|X_1 = 2)$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con densità continua $f_X(t) = e^{-t/2} 1_{(0,\log 4)}(t)$.
`D7`) Calcolare $P([X] = 1)$, dove $[x] = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$ è la *parte intera* di x.
`D8`) Trovare la densità di $Y = e^{\frac{X}{2}}$.

Esercizio 5. Sia $N_t = \sum_{n \geq 1} 1_{T_n \leq t}$ (per $t \geq 0$) un processo di Poisson con intensità di $\lambda = \frac{5}{2}$.
`D9`) Calcolare $P(N_4 = 2)$.
`D10`) Calcolare $P(T_1 > 8)$.

Esercizio 6. Sia X una variabile aleatoria con distribuzione normale con media 0 e varianza 16.
`D11`) Calcolare $P(X < 5)$.
`D12`) Calcolare $P(X + Y \geq \sqrt{17})$ dove Y è una variabile aleatoria normale standard e indipendente da X.

Esercizio 7 (*solo per ST-Materiali*). Consideriamo una catena di Markov omogenea $\{X_n : n \geq 0\}$ con spazio degli stati $E = \{1,2\}$ e matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

`D13`) Presentare le conseguenze del Teorema di Markov dopo aver motivato la sua applicabilità.
`D14`) Trovare la distribuzione iniziale $(P(X_0 = 1), P(X_0 = 2))$ in corrispondenza della quale si ha $(P(X_1 = 1), P(X_1 = 2)) = (\frac{5}{9}, \frac{4}{9})$.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
D1) La probabilità richiesta è $\frac{\binom{2}{1}\binom{2}{1}}{\binom{4}{2}} = \frac{2\cdot 2}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.
D2) Abbiamo 6 casi tutti con probabilità $\frac{1}{6}$: $\{0,1\}$, $\{0,2\}$, $\{0,3\}$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$. Dunque si ha $p_X(0) = P(\{\{0,1\},\{0,2\},\{0,3\}\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $p_X(2) = P(\{\{1,2\}\}) = \frac{1}{6}$, $p_X(3) = P(\{\{1,3\}\}) = \frac{1}{6}$, $p_X(6) = P(\{\{2,3\}\}) = \frac{1}{6}$.

Esercizio 2. Sia M_i l'evento "si sceglie la moneta i-sima".
D3) Per la formula delle probabilità totali si ha $p_X(k) = P(X = k) = \sum_{i=1}^{2} P(X = k|M_i)P(M_i) = \frac{1}{2}(\binom{2}{k}(\frac{2}{3})^k(1-\frac{2}{3})^{2-k}+\binom{2}{k}(\frac{1}{3})^k(1-\frac{1}{3})^{2-k})$, da cui segue $p_X(0) = \frac{1}{2}(\frac{1}{9}+\frac{4}{9}) = \frac{5}{18}$, $p_X(1) = \frac{1}{2}(\frac{4}{9}+\frac{4}{9}) = \frac{8}{18}$ $p_X(2) = \frac{1}{2}(\frac{4}{9}+\frac{1}{9}) = \frac{5}{18}$.
D4) Per la formula di Bayes (e per il valore di $P(X = 1)$ calcolato prima) si ha $P(M_1|X = 1) = \frac{P(X=1|M_1)P(M_1)}{P(X=1)} = \frac{\frac{4}{9}\frac{1}{2}}{\frac{8}{18}} = \frac{1}{2}$.

Esercizio 3.
D5) Si ha $q + \sum_{k=2}^{\infty}(\frac{1}{2})^k = 1$, da cui segue $q = 1 - \sum_{k=2}^{\infty}(\frac{1}{2})^k = 1 - \frac{(\frac{1}{2})^2}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.
D6) Si ha $P(X_2 = 2|X_1 = 2) = \frac{P(\{X_2=2\}\cap\{X_1=2\})}{P(X_1=2)} = \frac{p_{X_1,X_2}(2,2)}{p_{X_1,X_2}(2,1)+p_{X_1,X_2}(2,2)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$.

Esercizio 4.
D7) Si ha $P([X] = 1) = P(1 \leq X < 2) = \int_1^2 f_X(t)dt = \int_1^{\log 4} e^{-t/2}dt = 2[-e^{-t/2}]_{t=1}^{t=\log 4} = 2(e^{-1/2} - \frac{1}{2})$, tenendo anche conto che $\log 4 \in (1,2)$.
D8) Si vede che $P(1 \leq e^{\frac{X}{2}} \leq 2) = 1$, da cui $F_Y(y) = 0$ per $y \leq 1$ e $F_Y(y) = 1$ per $y \geq 2$. Per $y \in (1,2)$ si ha $F_Y(y) = P(e^{\frac{X}{2}} \leq y) = P(\frac{X}{2} \leq \log y) = P(X \leq 2\log y) = \int_0^{2\log y} e^{-t/2}dt = 2[-e^{-t/2}]_{t=0}^{t=2\log y} = 2(1-y^{-1})$. Quindi la densità è $f_Y(y) = 2y^{-2}1_{(1,2)}(y)$.

Esercizio 5.
D9) Si ha $P(N_4 = 2) = \frac{(\frac{5}{2}\cdot 4)^2}{2!}e^{-\frac{5}{2}\cdot 4} = 50e^{-10}$.
D10) Si ha $P(T_1 > 8) = \int_8^{\infty} \frac{5}{2}e^{-\frac{5}{2}t}dt = [-e^{-\frac{5}{2}t}]_{t=8}^{t=\infty} = e^{-20}$.

Esercizio 6.
D11) Si ha $P(X < 5) = P(\frac{X}{\sqrt{16}} < \frac{5}{\sqrt{16}}) = \Phi(\frac{5}{4}) = \Phi(1.25) = 0.89435$.
D12) La variabile aleatoria $X+Y$ ha distribuzione normale di media $0+0 = 0$ e varianza $16+1 = 17$. Dunque si ha $P(X + Y \geq \sqrt{17}) = P(\frac{X+Y}{\sqrt{17}} \geq \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{17}}) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0.84134 = 0.15866$.

Esercizio 7.
D13) Il teorema di Markov è applicabile perché la matrice di transizione ha tutti gli elementi positivi, e dunque si ha una catena di Markov regolare. In corrispondenza si ha $\lim_{n\to\infty} P(X_n = j|X_0 = i) = \pi_j$ per ogni $i, j \in \{1,2\}$, dove $\pi = (\pi_1, \pi_2)$ è la distribuzione stazionaria. La distribuzione stazionaria è soluzione di

$$(\pi_1, \pi_2)\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = (\pi_1, \pi_2),$$

da cui

$$\begin{cases} \frac{2}{3}\pi_1 + \frac{1}{3}\pi_2 = \pi_1 \\ \frac{1}{3}\pi_1 + \frac{2}{3}\pi_2 = \pi_2; \end{cases}$$

le due equazioni si riducono alla stessa equazione $\frac{\pi_1}{3} = \frac{\pi_2}{3}$, la cui soluzione è $\pi_1 = \pi_2 = \frac{1}{2}$. In conclusione la distribuzione stazionaria è $\pi = (\pi_1, \pi_2) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

`D14`) Poniamo $(P(X_0=1),P(X_0=2))=(p,1-p)$. Allora il valore p deve essere soluzione delle due seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \frac{2}{3}p+\frac{1}{3}(1-p)=\frac{5}{9} \\ \frac{1}{3}p+\frac{2}{3}(1-p)=\frac{4}{9}. \end{cases}$$

Ciascuna equazione si riduce all'equazione $\frac{p}{3}=\frac{2}{9}$, da cui si ottiene $p=\frac{2}{3}$; quindi la distribuzione iniziale è $(P(X_0=1),P(X_0=2))=(\frac{2}{3},\frac{1}{3})$.

Commenti.
La somma dei valori di ciascuna densità discreta che appare è 1 in accordo con la teoria.
`D1`) In effetti, se consideriamo i 6 casi (tutti con probabilità $\frac{1}{6}$) elencati nella risposta alla domanda successiva, abbiamo 4 casi con un numero pari ed un numero dispari.
`D4`) Gli eventi M_1 e $\{X=1\}$ sono indipendenti; infatti abbiamo che $P(M_1|X=1)=P(M_1)$. Questo non accade se consideriamo M_1 e $\{X=k\}$ per $k\in\{0,2\}$. Infatti si ha $P(M_1|X=0)=\frac{P(X=0|M_1)P(M_1)}{P(X=0)}=\frac{\frac{1}{9}\frac{1}{2}}{\frac{5}{18}}=\frac{1}{5}$ e $P(M_1|X=2)=\frac{P(X=2|M_1)P(M_1)}{P(X=2)}=\frac{\frac{4}{9}\frac{1}{2}}{\frac{5}{18}}=\frac{4}{5}$. Si osservi che non è sorprendente riscontrare le disuguaglianze $P(M_1|X=0)<P(M_1)$ e $P(M_1|X=2)>P(M_1)$. Infatti se si sa di aver ottenuto "0 teste" ("2 teste", rispettivamente) diminuisce (aumenta, rispettivamente) la probabilità di aver scelto la *moneta 1*, che è la moneta la cui probabilità di ottenere testa è maggiore (si ha $p_1>p_2$).
`D7`) Per completezza si ha $P([X]\in\{0,1\})=P([X]=0)+P([X]=1)=1$; infatti $P([X]=0)=P(0\leq X<1)=\int_0^1 f_X(t)dt=\int_0^1 e^{-t/2}dt=2[-e^{-t/2}]_{t=0}^{t=1}=2(1-e^{-1/2})$.
`D13`) In generale, se una matrice di transizione è tale che

$$\sum_{i\in E}p_{ij}=1 \text{ per ogni } j\in E, \tag{1}$$

cioè la somma degli elementi di ciascuna colonna è uguale a 1 (come accade in questo esercizio), la distribuzione uniforme è stazionaria. La distribuzione uniforme è quella che assegna probabilità costante $\frac{1}{\#E}$ ad ogni elemento di E, dove $\#E$ è la cardinalità di E. La verifica di tale affermazione consiste nel verificare che

$$\sum_{i\in E}\pi_i p_{ij}=\pi_j \text{ per ogni } j\in E \tag{2}$$

nel caso in cui $\pi_i=\frac{1}{\#E}$ per ogni $i\in E$; allora la relazione (2) diventa

$$\frac{1}{\#E}\sum_{i\in E}p_{ij}=\frac{1}{\#E} \text{ per ogni } j\in E$$

e sappiamo che è vera per aver assunto che è vera (1). La distribuzione uniforme potrebbe non essere l'unica distribuzione stazionaria; ad esempio, se P fosse la matrice identità, la somma degli elementi di ciascuna colonna è uguale a 1 e tutte le distribuzioni su E sono stazionarie.