Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)
Anno accademico: `2009-2010`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Simulazione 4

Esercizio 1. Un'urna contiene 2 palline bianche, 1 rossa e 2 nere. Vengono estratte 3 palline a caso, una alla volta e senza reinserimento.
`D1`) Calcolare la probabilità di avere colori diversi.
`D2`) Calcolare la probabilità di estrarre almeno una pallina bianca.

Esercizio 2. Un'urna ha 2 palline bianche e 1 nera. Si estrae a caso una pallina alla volta senza reinserimento, fino a quando esce la pallina nera. A questo punto la pallina nera viene reinserita e si compie una nuova estrazione a caso.
`D3`) Calcolare $P(E)$ dove E è l'evento "l'ultima pallina estratta (cioè la pallina estratta dopo aver estratto quella nera che poi viene reinserita) è nera".
`D4`) Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di estrazioni effettuate per estrarre la pallina nera (che poi viene reinserita). Calcolare $P(X = k|E)$ ($k \in \{1, 2, 3\}$).

Esercizio 3. Supponiamo che X_1 e X_2 siano indipendenti e che abbiano la stessa densità $p_{X_k}(5) = p_{X_k}(7) = \frac{1}{2}$ (per $k \in \{1, 2\}$).
`D5`) Calcolare $P(X_1 + X_2 = 12|X_1 = 5)$.
`D6`) Calcolare $\mathrm{Cov}(X_1 + X_2, X_1 - X_2)$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con densità continua $f_X(t) = ct(3 - t)1_{(0,3)}(t)$, dove c è una costante positiva.
`D7`) Trovare il valore della costante c.
`D8`) Trovare la densità discreta di $Y = [X]$, dove $[x] = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$ è la *parte intera* di x.

Esercizio 5. Sia $N_t = \sum_{n\geq 1} 1_{T_n\leq t}$ (per $t \geq 0$) un processo di Poisson con intensità di $\lambda = 10$.
`D9`) Calcolare $P(N_2 = 3)$.
`D10`) Calcolare $P(T_3 > 1)$.

Esercizio 6. Sia X una variabile aleatoria normale di media $\mu = 2$ e varianza $\sigma^2 = 1$.
`D11`) Calcolare $P(X < 1)$.
`D12`) Calcolare $P(3X - 6 \geq 1)$.

Esercizio 7 (*solo per ST-Materiali*). Consideriamo una catena di Markov omogenea $\{X_n : n \geq 0\}$ con matrice di transizione

$$P = \left(\begin{array}{cccc} 0 & q & 0 & 1-q \\ 0 & 0 & r & 1-r \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

`D13`) Sia $\lambda_i^{(j)}$ la probabilità di passaggio in j partendo da i. Verificare che $\lambda_1^{(3)} + \lambda_1^{(4)} = 1$.
`D14`) Trovare le distribuzioni stazionarie.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
D1) Dobbiamo considerare l'evento "estrarre 1 pallina bianca, 1 rossa e 1 nera". La probabilità richiesta è $\frac{\binom{2}{1}\binom{1}{1}\binom{2}{1}}{\binom{5}{3}} = \frac{2\cdot 1\cdot 2}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.
D2) La variabile aleatoria X che indica il numero di palline bianche estratte ha distribuzione ipergeometrica e la probabilità richiesta è $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{\binom{2}{0}\binom{3}{3}}{\binom{5}{3}} = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$.

Esercizio 2. Iniziamo con la densità di X: $p_X(1) = \frac{1}{3}$, $p_X(2) = \frac{2}{3}\frac{1}{2} = \frac{1}{3}$, $p_X(3) = \frac{2}{3}\frac{1}{2}1 = \frac{1}{3}$.
D3) Per la formula delle probabilità totali si ha $P(E) = \sum_{k=1}^{3} P(E|X = k)P(X = k) = \frac{1}{3}(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1) = \frac{1}{3}\frac{2+3+6}{6} = \frac{11}{18}$.
D4) Per la formula di Bayes (e per il valore di $P(E)$ calcolato prima) si ha $P(X = k|E) = \frac{P(E|X=k)P(X=k)}{P(E)} = \frac{P(E|X=k)\frac{1}{3}}{\frac{11}{18}} = P(E|X = k)\frac{6}{11}$. Quindi $P(X = 1|E) = \frac{1}{3}\frac{6}{11} = \frac{2}{11}$, $P(X = 2|E) = \frac{1}{2}\frac{6}{11} = \frac{3}{11}$, $P(X = 3|E) = 1\frac{6}{11} = \frac{6}{11}$.

Esercizio 3.
D5) Si ha $P(X_1 + X_2 = 12|X_1 = 5) = \frac{P(\{X_1+X_2=12\}\cap\{X_1=5\})}{P(X_1=5)} = \frac{P(\{X_1=5\}\cap\{X_2=7\})}{P(X_1=5)} = \frac{p_{(X_1,X_2)}(5,7)}{p_{X_1}(5)} = \frac{p_{X_1}(5)p_{X_2}(7)}{p_{X_1}(5)} = p_{X_2}(7) = \frac{1}{2}$.
D6) Si ha $\mathrm{Cov}(X_1 + X_2, X_1 - X_2) = \mathrm{Cov}(X_1, X_1) - \mathrm{Cov}(X_1, X_2) + \mathrm{Cov}(X_2, X_1) - \mathrm{Cov}(X_2, X_2) = \mathrm{Var}[X_1] - 0 + 0 - \mathrm{Var}[X_2] = 0$ (l'ultima uguaglianza segue dal fatto che X_1 e X_2 hanno la stessa varianza perché hanno la stessa densità).

Esercizio 4.
D7) Si ha $1 = c\int_0^3 t(3-t)dt = c\int_0^3 3t - t^2 dt = c[3\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}]_{t=0}^{t=3} = 27c(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) = 27c\frac{3-2}{6} = \frac{27}{6}c$, da cui $c = \frac{6}{27}$.
D8) Si ha $p_Y(k) = \frac{6}{27}\int_k^{k+1} t(3-t)dt = \frac{6}{27}[3\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}]_{t=k}^{t=k+1}$ per $k \in \{0, 1, 2\}$, da cui segue $p_Y(0) = p_Y(2) = \frac{7}{27}$ e $p_Y(1) = \frac{13}{27}$.

Esercizio 5.
D9) Si ha $P(N_2 = 3) = \frac{(10\cdot 2)^3}{3!}e^{-10\cdot 2} = \frac{8000}{6}e^{-20} = \frac{4000}{3}e^{-20}$.
D10) Si ha $P(T_3 > 1) = 1 - (1 - \sum_{k=0}^{3-1}\frac{(10\cdot 1)^k}{k!}e^{-10\cdot 1}) = 1 - 1 + (1 + 10 + \frac{100}{2})e^{-10} = 61e^{-10}$.

Esercizio 6.
D11) Si ha $P(X < 1) = P(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{1-2}{\sqrt{1}}) = \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0.84134 = 0.15866$.
D12) La variabile aleatoria $Y = 3X - 6$ è normale con media $\mu_Y = 3\mu - 6 = 0$ e varianza $\sigma_Y^2 = 3^2\sigma^2 = 9$. Quindi $P(3X-6 \geq 1) = P(\frac{Y-\mu_Y}{\sigma_Y} \geq \frac{1-0}{\sqrt{9}}) = 1-\Phi(\frac{1}{3}) = 1-\Phi(0.33) = 1-0.6293 = 0.3707$.

Esercizio 7.
D13) Per $C_1 = \{3\}$ si ha l'insieme $D_{C_1} = \{1, 2\}$ e abbiamo i seguente sistema per $(\lambda_1^{(3)}, \lambda_2^{(3)})$:

$$\begin{cases} \lambda_1^{(3)} = p_{13} + p_{11}\lambda_1^{(3)} + p_{12}\lambda_2^{(3)} \\ \lambda_2^{(3)} = p_{23} + p_{21}\lambda_1^{(3)} + p_{22}\lambda_2^{(3)}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_1^{(3)} = 0 + 0 + q\lambda_2^{(3)} \\ \lambda_2^{(3)} = r + 0 + 0, \end{cases}$$

e la soluzione del sistema è $(\lambda_1^{(3)}, \lambda_2^{(3)}) = (qr, r)$. In maniera simile per $C_2 = \{4\}$ si ha l'insieme $D_{C_2} = \{1, 2\}$ e abbiamo i seguente sistema per $(\lambda_1^{(4)}, \lambda_2^{(4)})$:

$$\begin{cases} \lambda_1^{(4)} = p_{14} + p_{11}\lambda_1^{(4)} + p_{12}\lambda_2^{(4)} \\ \lambda_2^{(4)} = p_{24} + p_{21}\lambda_1^{(4)} + p_{22}\lambda_2^{(4)}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_1^{(4)} = 1 - q + 0 + q\lambda_2^{(4)} \\ \lambda_2^{(4)} = 1 - r + 0 + 0, \end{cases}$$

e la soluzione del sistema è $(\lambda_1^{(4)},\lambda_2^{(4)})=(1-qr,1-r)$. In conclusione si ha $\lambda_1^{(3)}+\lambda_1^{(4)}=qr+1-qr=1$ come si doveva verificare.
`D14`) Gli stati 1 e 2 comunicano con ciascuno degli stati 3 e 4, ma non vale il viceversa; quindi 1 e 2 sono transitori. Inoltre gli stati 3 e 4 sono assorbenti e quindi costituiscono da soli classi chiuse irriducibili con distribuzione stazionaria banale. In conclusione le distribuzioni stazionarie sono $\{\pi^{(\alpha)}:\alpha\in[0,1]\}$ del tipo

$$\pi^{(\alpha)}=\alpha(0,0,1,0)+(1-\alpha)(0,0,0,1)=(0,0,\alpha,1-\alpha)$$

al variare di $\alpha\in[0,1]$.

Commenti.
`D4`) Si ha $\sum_{k=1}^{6}P(X=k|E)=\frac{2+3+6}{11}=1$ in accordo con la teoria.
`D6`) La densità congiunta di (X_1+X_2,X_1-X_2) assegna valore $\frac{1}{4}$ ai punti $(10,0),(12,\pm2),(14,0)$, da cui si ottiene $p_{X_1+X_2}(10)=p_{X_1+X_2}(14)=\frac{1}{4}$, $p_{X_1+X_2}(12)=\frac{2}{4}$ e $p_{X_1-X_2}(-2)=p_{X_1-X_2}(2)=\frac{1}{4}$, $p_{X_1-X_2}(0)=\frac{2}{4}$. Allora, in altro modo, $\mathrm{Cov}(X_1+X_2,X_1-X_2)=\mathbb{E}[(X_1+X_2)(X_1-X_2)]-\mathbb{E}[X_1+X_2]\mathbb{E}[X_1-X_2]=0$ perché $\mathbb{E}[(X_1+X_2)(X_1-X_2)]=(10\cdot 0)\frac{1}{4}+(14\cdot 0)\frac{1}{4}+(12\cdot 2)\frac{1}{4}+(12\cdot(-2))\frac{1}{4}=0$ e $\mathbb{E}[X_1-X_2]=-2\frac{1}{4}+0\frac{1}{4}+2\frac{1}{4}=0$.
`D8`) La somma dei valori delle densità è 1 in accordo con la teoria. La simmetria dei valori della densità rispetto al valore $k=1$ segue dalla simmetria di $f_X(t)$ rispetto a $t=\frac{3}{2}$.
`D10`) In altro modo $P(T_3>1)=P(N_1\le 2)=\sum_{k=0}^{2}\frac{(10\cdot 1)^k}{k!}e^{-10\cdot 1}=(1+10+\frac{100}{2})e^{-10}=61e^{-10}$.
`D13`) Osserviamo che abbiamo anche $\lambda_2^{(3)}+\lambda_2^{(4)}=r+1-r=1$. Queste uguaglianze non sono sorprendenti: gli stati 3 e 4 sono assorbenti e ci si aspetta che la somma delle probabilità di assorbimento in 3 e in 4 (partendo da ciascuno dei due stati transitori 1 e 2) sia uguale a 1. Notiamo anche che i valori ottenuti dai sistemi sono la somma delle probabilità che competono ai singoli modi di essere assorbiti in ciascuno degli stati 3 e 4. In dettaglio si ha:

$$\begin{cases}\lambda_1^{(3)}=P(1\to 2\to 3)=qr\\ \lambda_2^{(3)}=P(2\to 3)=r\end{cases}$$

e

$$\begin{cases}\lambda_1^{(4)}=P(1\to 4)+P(1\to 2\to 4)=1-q+q(1-r)=1-qr\\ \lambda_2^{(4)}=P(2\to 4)=1-r.\end{cases}$$

`D14`) In altro modo possiamo considerare il sistema

$$(\pi_1,\pi_2,\pi_3,\pi_4)\begin{pmatrix}0&q&0&1-q\\0&0&r&1-r\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=(\pi_1,\pi_2,\pi_3,\pi_4).$$

Si ottengono le seguenti quattro equazioni:

$$\begin{cases}\pi_1=0\\ \pi_2=q\pi_1\\ \pi_3=\pi_3\\ \pi_4=\pi_4.\end{cases}$$

Quindi $\pi_1=\pi_2=0$, da cui abbiamo il vincolo $\pi_3+\pi_4=1$ per $\pi_3,\pi_4\ge 0$. Dunque ponendo $\pi_3=\alpha$ e $\pi_4=1-\alpha$ otteniamo tutte e sole le distribuzioni stazionarie ottenute sopra.