Laurea Triennale in Scienza e Tecnologia dei Media, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità
Anno accademico: 2017-2018. *Titolare del corso:* Claudio Macci
Simulazione 2
Esercizi 1,2,3,4,5 per gli studenti che sostengono l'esame da 6 crediti.
Esercizi 1,2,3,4,5,6 per gli studenti che sostengono l'esame da 8 crediti.

Esercizio 1.
Un'urna contiene r palline numerate da 1 a r, con $r \geq 3$. Si estraggono a caso due palline in blocco.
D1) Calcolare la probabilità di estrarre le palline con i numeri 1 e r.
D2) Calcolare $\mathrm{Var}[X]$ nel caso in cui X sia la variabile aleatoria che conta il numero delle palline estratte con i numeri 1 o r.
D3) Trovare la densità discreta della variabile aleatoria Y che indica la somma dei due numeri estratti nel caso in cui $r = 4$.

Esercizio 2.
Siano $p, q \in (0, 1)$ fissati. Consideriamo una variabile aleatoria X con densità discreta $p_X(k) = (1 - q)^{k-1}q$ per $k \geq 1$. Si lancia X volte una moneta, e sia p la probabilità che esca testa ad ogni lancio.
D4) Calcolare la probabilità di ottenere "tutte teste" nei lanci di moneta effettuati.

Esercizio 3.
Sia $c > 0$ una costante da determinare. Consideriamo la seguente densità congiunta: $p_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = c\frac{2^{x_1}}{x_1!}\frac{3^{x_2}}{x_2!}$, per $x_1, x_2 \geq 0$ interi.
D5) Trovare il valore di c.
D6) Calcolare $P(X_1 + X_2 = 2)$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria continua con densità $f_X(x) = ax^{-(1+a)}1_{(1,\infty)}(x)$ per $a > 0$.
D7) Trovare la densità discreta di $Y = [X]$ dove $[x] = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$ è la parte intera di x.
D8) Trovare la densità continua di $Z = e^{-X} + 1$.

Esercizio 5.
Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$.
D9) Sia X una variabile aleatoria normale con media 4 e varianza 64. Calcolare $P(6 \leq X \leq 7)$ esprimendo tale valore con la funzione $\Phi(y)$ per qualche $y \geq 0$.
D10) Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. (indipendenti e identicamente distribuite), con densità continua $f_X(x) = 4e^{-4x}1_{(0,\infty)}(x)$. Trovare il valore di $y \in \mathbb{R}$ per cui si ha

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - n/4}{\sqrt{n}} > y\right) = 1 - \Phi(1/2).$$

Esercizio 6.
Consideriamo una catena di Markov omogenea $\{X_n : n \geq 0\}$ con spazio degli stati $E = \{1, 2, 3, 4\}$ e matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Sia $C = \{3, 4\}$.
D11) Calcolare $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ per ogni $i, j \in C$.
D12) Trovare il tempo medio di raggiungimento dell'insieme C partendo dallo stato 2.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.

D1) I sottoinsiemi di due elementi di $\{1,\dots,r\}$ sono $\binom{r}{2}$ e hanno tutti la stessa probabilità di essere estratti. Quindi la probabilità richiesta è $1/\binom{r}{2}=\frac{2}{r(r-1)}$.

D2) La variabile aleaoria X ha distribuzione ipergeometrica e si ha $p_X(k)=\frac{\binom{2}{k}\binom{r-2}{2-k}}{\binom{r}{2}}$ per $k\in\{0,1,2\}$. Per formule note si ha:

$$\mathrm{Var}[X]=2\cdot\frac{2}{r}\left(1-\frac{2}{r}\right)\frac{r-2}{r-1}=\frac{4(r-2)^2}{r^2(r-1)}.$$

In alternativa potevamo ottenere lo stesso risultato osservando che

$$\mathbb{E}[X]=0\cdot\frac{(r-2)(r-3)}{r(r-1)}+1\cdot\frac{4(r-2)}{r(r-1)}+2\cdot\frac{2}{r(r-1)}=\frac{4}{r}$$

(del resto potevamo subito dire che $\mathbb{E}[X]=2\cdot\frac{2}{r}$) e

$$\mathrm{Var}[X]=\mathbb{E}[X^2]-\mathbb{E}^2[X]=0^2\cdot\frac{(r-2)(r-3)}{r(r-1)}+1^2\cdot\frac{4(r-2)}{r(r-1)}+2^2\cdot\frac{2}{r(r-1)}-\left(\frac{4}{r}\right)^2$$
$$=\frac{4r}{r(r-1)}-\frac{16}{r^2}=\frac{4r^2-16(r-1)}{r^2(r-1)}=\frac{4(r^2-4r+4)}{r^2(r-1)}=\frac{4(r-2)^2}{r^2(r-1)}.$$

Osservazione: $p_X(2)$ coincide con la probabilità richiesta alla domanda D1, come deve.

D3) Abbiamo uno spazio di probabilità uniforme discreto, dove l'insieme $\Omega=\{\omega=\{\omega_1,\omega_2\}:\{\omega_1,\omega_2\}\subset\{1,2,3,4\}\}$ ha $\binom{4}{2}=6$ elementi. Allora la densità discreta richiesta è

$$p_Y(3)=P(\{\{1,2\}\})=\frac{1}{6},\ p_Y(4)=P(\{\{1,3\}\})=\frac{1}{6},$$
$$p_Y(5)=P(\{\{1,4\},\{2,3\}\})=\frac{2}{6},\ p_Y(6)=P(\{\{2,4\}\})=\frac{1}{6},\ p_Y(7)=P(\{\{3,4\}\})=\frac{1}{6}.$$

Esercizio 2.

D4) Per la formula delle probabilità totali la probabilità richiesta è uguale a

$$\sum_{k=1}^{\infty}P(T|X=k)P(X=k)=\sum_{k=1}^{\infty}\binom{k}{k}p^k(1-p)^{k-k}(1-q)^{k-1}q$$
$$=\frac{q}{1-q}\sum_{k=1}^{\infty}(p(1-q))^k=\frac{q}{1-q}\frac{p(1-q)}{1-p(1-q)}=\frac{pq}{1-p+pq}.$$

Esercizio 3.

D5) Si deve avere

$$1=c\sum_{x_1=0}^{\infty}\frac{2^{x_1}}{x_1!}\sum_{x_2=0}^{\infty}\frac{3^{x_2}}{x_2!}=ce^2e^3=ce^5$$

da cui segue $c=e^{-5}$.

D6) Si ha

$$P(X_1+X_2=2)=p_{X_1,X_2}(0,2)+p_{X_1,X_2}(1,1)+p_{X_1,X_2}(2,0)=e^{-5}\left(\frac{3^2}{2!}+\frac{2^1}{1!}\frac{3^1}{1!}+\frac{2^2}{2!}\right)$$
$$=\frac{e^{-5}}{2}\left(3^2+2\cdot2\cdot3+2^2\right)=\frac{e^{-5}}{2}(3+2)^2=\frac{25}{2}e^{-5}.$$

Osservazione: le variabili aleatorie X_1 e X_2 sono Poissoniane indipendenti, di parametri 2 e 3 rispettivamente; quindi in generale si ha $P(X_1+X_2=k)=\frac{5^k}{k!}e^{-5}$ per $k\geq 0$ intero (e ponendo $k=2$ si recupera il risultato ottenuto).

Esercizio 4.
D7) Per $k \geq 1$ intero si ha

$$p_Y(k) = \int_k^{k+1} ax^{-(1+a)}dx = [-x^{-a}]_{x=k}^{x=k+1} = \frac{1}{k^a} - \frac{1}{(k+1)^a}.$$

D8) Si ha $P(1 \leq Z \leq 1 + e^{-1}) = 1$ e quindi $F_Z(z) = 0$ per $z \leq 1$, e $F_Z(z) = 1$ per $z \geq 1 + e^{-1}$. Per $z \in (1, 1 + e^{-1})$ si ha

$$\begin{aligned} F_Z(z) = P(e^{-X} + 1 \leq z) = P(-X \leq \log(z-1)) = P(X \geq -\log(z-1)) \\ = \int_{-\log(z-1)}^{\infty} ax^{-(1+a)}dx = [-x^{-a}]_{x=-\log(z-1)}^{x=\infty} = \frac{1}{(-\log(z-1))^a}. \end{aligned}$$

In conclusione la densità continua richiesta è $f_Z(z) = a\frac{(-\log(z-1))^{-a-1}}{z-1}1_{(1,1+e^{-1})}(z)$.

Esercizio 5.
D9) Si ha

$$P(6 \leq X \leq 7) = P\left(\frac{6-4}{\sqrt{64}} \leq \frac{X-4}{\sqrt{64}} \leq \frac{7-4}{\sqrt{64}}\right) = \Phi(3/8) - \Phi(2/8).$$

D10) Le variabili aleatorie $\{X_n : n \geq 1\}$ hanno distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 4$; quindi la loro media è $\frac{1}{4}$ e la loro varianza è $\frac{1}{4^2}$. Allora, ponendo $\sigma = \sqrt{\frac{1}{4^2}} = 1/4$, per il teorema limite centrale si ha

$$P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - n/4}{\sqrt{n}} > y\right) = P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - n/4}{\sigma\sqrt{n}} > \frac{y}{\sigma}\right) \to 1 - \Phi\left(\frac{y}{\sigma}\right).$$

In corrispondenza si ha $\frac{y}{\sigma} = \frac{1}{2}$, da cui segue $y = \frac{\sigma}{2} = \frac{1}{8}$.

Esercizio 6.
L'insieme C costituisce una classe chiusa e irriducibile, mentre $E \setminus C = \{1, 2\}$ costituisce l'insieme degli stati transitori.
D11) La sottocatena ristretta a C è irriducibile, e anzi è regolare; quindi per tale sottocatena si può applicare il teorema di Markov. Allora si ha $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j$ per ogni $i, j \in C$, dove (π_3, π_4) è l'unica distribuzione invariante della sottocatena. Quindi si ha

$$(\pi_3, \pi_4)\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} = (\pi_3, \pi_4),$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\pi_3 + \frac{1}{3}\pi_4 = \pi_3 \\ \frac{1}{2}\pi_3 + \frac{2}{3}\pi_4 = \pi_4, \end{cases} \quad \begin{cases} \pi_3 = \frac{2}{3}\pi_4 \\ \pi_3 = \frac{2}{3}\pi_4; \end{cases}$$

allora, tenendo conto anche l'equazione $\pi_1 + \pi_2 = 1$, si ottiene $(\pi_3, \pi_4) = (2/5, 3/5)$.
D12) Abbiamo il seguente sistema

$$\begin{cases} \mu_1 = 1 + \frac{1}{4}\mu_1 + \frac{1}{4}\mu_2 \\ \mu_2 = 1 + \frac{1}{3}\mu_1 + \frac{1}{3}\mu_2, \end{cases} \quad \begin{cases} 3\mu_1 - \mu_2 = 4 \\ -\mu_1 + 2\mu_2 = 3, \end{cases} \quad \begin{cases} \mu_1 = 11/5 \\ \mu_2 = 13/5 \end{cases}$$

(la soluzione può essere ottenuta con semplici calcoli). In conclusione il tempo medio richiesto è $\mu_2 = \frac{13}{5}$.