**Statistica per la ricerca sperimentale e tecnologica**
Corso di Laurea in Informatica, Università di Roma "Tor Vergata"
*Anno accademico:* `2006-2007`
*Titolare del corso:* `Claudio Macci`
**Esame del 9 Luglio 2007**

**Esercizio 1**. Un'urna contiene 2 palline rosse, 3 gialle e 4 verdi. Si estraggono 3 palline a caso, una alla volta e senza reinserimento. Sia $X$ la variabile aleatoria che conta il numero di palline rosse estratte.
`D1`) Trovare la densità discreta di $X$.
`D2`) Calcolare la probabilità di ottenere la sequenza (verde,giallo,verde).
`D3`) Calcolare la probabilità di avere esattamente due palline verdi e una gialla.

**Esercizio 2**. Abbiamo due urne: la prima ha 1 pallina bianca e 2 nere; la seconda ha 2 palline bianche e 1 nera. Si lancia una moneta equa: se esce testa si sceglie la prima urna, se esce croce si sceglie la seconda urna. Poi si estrae una pallina a caso dall'urna scelta.
`D4`) Calcolare la probabilità di estrarre una pallina bianca.
`D5`) Calcolare la probabilità di aver ottenuto testa sapendo di aver estratto una pallina bianca.

**Esercizio 3**. Consideriamo una variabile aleatoria $(X, Y)$ con la seguente densità congiunta: $p_{(X,Y)}(0,0) = p_{(X,Y)}(2,0) = p_{(X,Y)}(0,2) = p_{(X,Y)}(1,1) = \frac{1}{4}$.
`D6`) Trovare la densità di $Z = (X + Y)^3$.

**Esercizio 4**. Sia $X$ una variabile aleatoria con distribuzione uniforme su $[-10, 20]$.
`D7`) Calcolare $P(-10 < X < 10)$.
Sia $(X_n)$ una successione di variabili aleatorie indipendenti e tutte con la stessa distribuzione di $X$. Infine poniamo $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$.
`D8`) Trovare il valore di $m$ per cui si ha $\lim_{n\to\infty} P(|\overline{X}_n - m| \geq \varepsilon) = 0$ per ogni $\varepsilon > 0$.

**Esercizio 5**. Sia $(N_t)$ un processo di Poisson di intensità $\lambda = 7/5$.
`D9`) Calcolare $P(N_5 \geq 2)$.
`D10`) Calcolare $\mathbb{E}[N_5]$.

**Esercizio 6**. Sia $X$ una variabile aleatoria normale con media $\mu = 10$ e varianza $\sigma^2 = 4$.
`D11`) Calcolare $P(X < 8)$.
`D12`) Calcolare $P(9 < X < 10 | 9 < X < 11)$.

**Cenno alle soluzioni** (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

**Esercizio 1.**
`D1`) La variabile aleatoria $X$ ha distribuzione ipergeometrica e si ha $p_X(k) = \frac{\binom{2}{k}\binom{7}{3-k}}{\binom{9}{3}}$ per $k \in \{0,1,2,3\}$ (ricordando la convenzione $\binom{a}{b} = 0$ per $a < b$, per cui $\binom{2}{3} = 0$). Quindi $p_X(0) = \frac{35}{84} = \frac{5}{12}$, $p_X(1) = \frac{42}{84} = \frac{6}{12}$, $p_X(2) = \frac{7}{84} = \frac{1}{12}$ e $p_X(3) = 0$.
`D2`) La probabilità richiesta è $\frac{4}{9}\frac{3}{8}\frac{3}{7} = \frac{1}{14}$.
`D3`) La probabilità richiesta è $\frac{\binom{2}{0}\binom{3}{1}\binom{4}{2}}{\binom{9}{3}} = \frac{1\cdot 3\cdot 6}{84} = \frac{3}{14}$.

**Esercizio 2.** Sia $B$ l'evento "estratta bianca" e $T$ l'evento "esce testa".
`D4`) Per la formula delle probabilità totali si ha $P(B) = P(B|T)P(T) + P(B|T^c)P(T^c) = \frac{1}{3}\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\frac{1}{2} = (\frac{1}{3} + \frac{2}{3})\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.
`D5`) Per la formula di Bayes e per il valore di $P(B)$ calcolato prima, si ha $P(T|B) = \frac{P(B|T)P(T)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$.

**Esercizio 3.**
`D6`) Si ha $p_Z(0) = p_{(X,Y)}(0,0) = \frac{1}{4}$ e $p_Z(8) = p_{(X,Y)}(2,0) + p_{(X,Y)}(0,2) + p_{(X,Y)}(1,1) = \frac{1+1+1}{4} = \frac{3}{4}$.

**Esercizio 4.**
`D7`) Si ha $P(-10 < X < 10) = \int_{-10}^{10} \frac{1}{20-(-10)} dt = [\frac{t}{30}]_{-10}^{10} = \frac{10-(-10)}{30} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$.
`D8`) Il valore richiesto è $m = \mathbb{E}[X] = \frac{-10+20}{2} = \frac{10}{2} = 5$.

**Esercizio 5.**
La variabile aleatoria $N_t$ ha distribuzione di Poisson di parametro $\lambda t$, e il parametro coincide con la speranza matematica. Nelle domande di questo esercizio si ha $\lambda t = (7/5) \cdot 5 = 7$.
`D9`) Si ha $P(N_5 \geq 2) = 1 - P(N_5 < 2) = 1 - (P(N_5 = 0) + P(N_5 = 1)) = 1 - \left(\frac{7^0}{0!}e^{-7} + \frac{7^1}{1!}e^{-7}\right) = 1 - (1+7)e^{-7} = 1 - 8e^{-7}$.
`D10`) Si ha $\mathbb{E}[N_5] = 7$.

**Esercizio 6.**
`D11`) Si ha $P(X < 8) = P\left(Z_X < \frac{8-10}{\sqrt{4}}\right) = P\left(Z_X < -\frac{2}{2}\right) = \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0.84134 = 0.15866$.
`D12`) Si ha $P(9 < X < 10|9 < X < 11) = \frac{P(\{9<X<10\}\cap\{9<X<11\})}{P(9<X<11)} = \frac{P(9<X<10)}{P(9<X<11)} = \frac{P(\frac{9-10}{\sqrt{4}}<Z_X<\frac{10-10}{\sqrt{4}})}{P(\frac{9-10}{\sqrt{4}}<Z_X<\frac{11-10}{\sqrt{4}})} = \frac{\Phi(0)-\Phi(-1/2)}{\Phi(1/2)-\Phi(-1/2)} = \frac{0.5-(1-\Phi(1/2))}{\Phi(1/2)-(1-\Phi(1/2))} = \frac{\Phi(1/2)-0.5}{2\Phi(1/2)-1} = \frac{0.69146-0.5}{2\cdot 0.69146-1} = \frac{0.19146}{0.38292} = 0.5$.

*Commenti.*
`D1`) Si ha $p_X(0) + p_X(1) + p_X(2) + p_X(3) = \frac{5+6+1+0}{12} = 1$ in accordo con la teoria.
`D2-D3`) Le sequenze con esattamente due palline verdi e una pallina gialla sono le seguenti: (verde,verde,giallo), (verde,giallo,verde), (giallo,verde,verde). Tali sequenze costituiscono eventi disgiunti a due a due, ciascuno di probabilità $\frac{1}{14}$, la cui unione è l'evento nella domanda `D3`). Questo è in accordo con il fatto che la somma delle probabilità di tutte le sequenze coincide con la probabilità calcolata nella domanda `D3`): $\frac{1+1+1}{14} = \frac{3}{14}$.
`D6`) In accordo con la teoria si ha $p_Z(0) + p_Z(8) = \frac{1+3}{4} = 1$.
`D12`) Arrivati all'uguaglianza $P(9 < X < 10|9 < X < 11) = \frac{\Phi(1/2)-0.5}{2\Phi(1/2)-1}$, osserviamo che il denominatore è il doppio del numeratore; quindi $P(9 < X < 10|9 < X < 11) = \frac{\Phi(1/2)-0.5}{2\Phi(1/2)-1} = \frac{\Phi(1/2)-0.5}{2(\Phi(1/2)-0.5)} = 0.5$ senza aver bisogno di usare le tavole per sapere che $\Phi(1/2) = 0.69146$.