Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità (ed insegnamenti mutuati)
Anno accademico: `2016-2017`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Appello del 2 Febbraio 2017

Esercizio 1. Un'urna contiene 7 palline numerate da 1 a 7. Si estraggono a caso 3 palline, una alla volta e senza reinserimento.
`D1`) Calcolare la probabilità di estrarre la sequenza (pari, pari, dispari).
`D2`) Trovare la densità discreta della variabile aleatoria X che conta quante palline con numero dispari vengono estratte.

Esercizio 2. Si lancia una moneta equa. Se esce testa si sceglie un'urna con 3 palline bianche e 2 rosse; se esce croce si sceglie un'urna con 2 palline bianche e 4 rosse. Poi si estrae una pallina a caso dall'urna scelta.
`D3`) Calcolare la probabilità estrarre una pallina bianca.
`D4`) Calcolare la probabilità di aver ottenuto testa nel lancio di moneta sapendo di aver estratto una pallina bianca.

Esercizio 3. Sia $\lambda > 0$ arbitrariamente fissato e consideriamo la seguente densità congiunta: $p_{X_1,X_2}(k,k) = \frac{1}{5} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, $p_{X_1,X_2}(k,k+1) = \frac{2}{5} \cdot \frac{(2\lambda)^k}{k!} e^{-2\lambda}$ e $p_{X_1,X_2}(k,k+2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{(3\lambda)^k}{k!} e^{-3\lambda}$ per $k \geq 0$ intero.
`D5`) Trovare la densità discreta di $Y = X_2 - X_1$.
`D6`) Calcolare $P(X_1 + X_2 \geq 2)$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con distribuzione uniforme su $(0,1)$.
`D7`) Trovare la funzione di distribuzione di $Y = e^{\sqrt{X}}$.
`D8`) Calcolare $\mathbb{E}[e^{2X}]$.

Esercizio 5.
`D9`) Sia $N_t = \sum_{n \geq 1} 1_{T_n \leq t}$ (per $t \geq 0$) un processo di Poisson con intensità di $\lambda = 2$. Calcolare $\mathbb{E}[T_{20}]$.
`D10`) Sia X una variabile aleatoria Normale standard. Calcolare $P(\{X \leq -2\} \cup \{X \geq 1.2\})$.

Esercizio 6. Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. (indipendenti e identicamente distribuite).
`D11`) Dire per quale valore di m si ha

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\left| \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - m \right| > \varepsilon \right) = 0 \text{ per ogni } \varepsilon > 0,$$

nel caso in cui le variabili aleatorie $\{X_n : n \geq 1\}$ abbiano densità discreta $p_X(k) = \frac{\binom{10}{k}\binom{10}{2-k}}{\binom{20}{2}}$ per $k \in \{0,1,2\}$.
`D12`) Trovare il valore di $y \in \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - n/2}{\sqrt{n}} \leq y \right) = \Phi(\sqrt{3})$$

nel caso in cui le variabili aleatorie $\{X_n : n \geq 1\}$ abbiano distribuzione uniforme su $(0,1)$.

Esercizio 7 (*solo per Lauree Magistrali*). Siano $a, b > 0$ fissati. Consideriamo una catena di Markov omogenea $\{X_n : n \geq 0\}$ con spazio degli stati $E = \{1,2\}$ e matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

`D13`) Illustrare le conseguenze del Teorema di Markov dopo aver motivato la sua applicabilità.
`D14`) Sia $\alpha \in [0,1]$ tale che $P(X_0 = 1) = 1 - P(X_0 = 2) = \alpha$. Trovare il valore di α per cui si ha $P(X_1 = 2) = 5/8$.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
`D1`) Con notazioni ovvie la probabilità richiesta è $P(D_1^c \cap D_2^c \cap D_3) = P(D_1^c)P(D_2^c|D_1^c)P(D_3|D_1^c \cap D_2^c) = \frac{3}{7}\frac{2}{6}\frac{4}{5} = \frac{4}{35}$.
`D2`) La variabile aleatoria X ha distribuzione ipergeometrica. In dettaglio $p_X(k) = \frac{\binom{4}{k}\binom{3}{3-k}}{\binom{7}{3}}$ per $k \in \{0,1,2,3\}$, e quindi $p_X(0) = \frac{1}{35}$, $p_X(1) = \frac{12}{35}$, $p_X(2) = \frac{18}{35}$ e $p_X(3) = \frac{4}{35}$.

Esercizio 2. Indichiamo con B l'evento "estratta pallina bianca", e con T l'evento "esce testa nel lancio di moneta".
`D3`) Per la formula delle probabilità totali si ha $P(B) = P(B|T)P(T) + P(B|T^c)P(T^c) = \frac{3}{5}\frac{1}{2} + \frac{2}{6}\frac{1}{2} = \frac{9+5}{30} = \frac{14}{30} = \frac{7}{15}$.
`D4`) Per la formula di Bayes, e tenendo conto del valore di $P(B)$ calcolato prima, si ha $P(T|B) = \frac{P(B|T)P(T)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{5}\frac{1}{2}}{7/15} = \frac{3}{10}\frac{15}{7} = \frac{9}{14}$.

Esercizio 3.
`D5`) Si ha $p_Y(0) = \sum_{k\geq 0} p_{X_1,X_2}(k,k) = \frac{1}{5}\sum_{k\geq 0}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \frac{1}{5}$, $p_Y(1) = \sum_{k\geq 0} p_{X_1,X_2}(k,k+1) = \frac{2}{5}\sum_{k\geq 0}\frac{(2\lambda)^k}{k!}e^{-2\lambda} = \frac{2}{5}$ e $p_Y(2) = \sum_{k\geq 0} p_{X_1,X_2}(k,k+2) = \frac{2}{5}\sum_{k\geq 0}\frac{(3\lambda)^k}{k!}e^{-3\lambda} = \frac{2}{5}$.
`D6`) Si ha $P(X_1 + X_2 \geq 2) = 1 - P(X_1 + X_2 < 2) = 1 - (p_{X_1,X_2}(0,0) + p_{X_1,X_2}(0,1)) = 1 - \frac{1}{5}e^{-\lambda} - \frac{2}{5}e^{-2\lambda}$.

Esercizio 4.
`D7`) Si vede che $P(1 \leq Y \leq e) = 1$ e quindi $F_Y(y) = 0$ per $y \leq 1$ e $F_Y(y) = 1$ per $y \geq e$. Per $y \in (1,e)$ si ha $F_Y(y) = P(e^{\sqrt{X}} \leq y) = P(\sqrt{X} \leq \log y) = P(X \leq (\log y)^2) = \int_0^{(\log y)^2} dx = (\log y)^2$.
`D8`) Si ha $\mathbb{E}[e^{2X}] = \int_0^1 e^{2x}dx = [\frac{e^{2x}}{2}]_{x=0}^{x=1} = \frac{e^2-1}{2}$.

Esercizio 5.
`D9`) Si ha $\mathbb{E}[T_{20}] = \frac{20}{2} = 10$.
`D10`) Si ha $P(\{X \leq -2\} \cup \{X \geq 1.2\}) = P(X \leq -2) + P(X \geq 1.2) = \Phi(-2) + 1 - \Phi(1.2) = 1 - \Phi(2) + 1 - \Phi(1.2) = 2 - 0.97725 - 0.88493 = 0.13782$.

Esercizio 6.
`D11`) Per la legge dei grandi numeri il valore di m richiesto è $m = \sum_{k=0}^2 k\frac{\binom{10}{k}\binom{10}{2-k}}{\binom{20}{2}} = \frac{0\cdot 45+1\cdot 100+2\cdot 45}{190} = \frac{190}{190} = 1$.
`D12`) Le variabili aleatorie $\{X_n : n \geq 1\}$ hanno media $\frac{1}{2}$ e varianza $\frac{1}{12}$; quindi la standardizzata di $X_1+\cdots+X_n$ è $\frac{X_1+\cdots+X_n-n/2}{\sqrt{1/12}\sqrt{n}}$. Allora $\left\{\frac{X_1+\cdots+X_n-n/2}{\sqrt{n}} \leq y\right\} = \left\{\frac{X_1+\cdots+X_n-n/2}{\sqrt{1/12}\sqrt{n}} \leq \frac{y}{\sqrt{1/12}}\right\}$ e, per il teorema limite centrale, si deve avere $\frac{y}{\sqrt{1/12}} = \sqrt{3}$. In conclusione si ha $y = \sqrt{3}\frac{1}{\sqrt{12}} = \sqrt{\frac{3}{12}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$.

Esercizio 7.
`D13`) Il Teorema di Markov è applicabile perché la catena di Markov $\{X_n : n \geq 0\}$ è regolare; infatti la matrice di transizione è tutta positiva. Allora, se indichiamo l'unica distribuzione stazionaria con (π_1, π_2), qualunque sia la distribuzione iniziale si ha $\lim_{n\to\infty} P(X_n = j) = \pi_j$ per ogni $j \in \{1,2\}$. A questo punto otteniamo i valori numerici della distribuzione stazionaria considerando la seguente relazione matriciale

$$(\pi_1, \pi_2)\begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = (\pi_1, \pi_2),$$

che fornisce il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \frac{\pi_1}{4} + \frac{\pi_2}{2} = \pi_1 \\ \frac{3\pi_1}{4} + \frac{\pi_2}{2} = \pi_2. \end{cases}$$

Le due equazioni forniscono la relazione $\frac{3\pi_1}{4} = \frac{\pi_2}{2}$; quindi $\pi_2 = \frac{3\pi_1}{2}$ e, tenendo conto che $\pi_1 + \pi_2 = 1$, si ha $1 - \pi_1 = \frac{3\pi_1}{2}$, da cui segue $\frac{5\pi_1}{2} = 1$ e $\pi_1 = \frac{2}{5}$. In conclusione si ha $(\pi_1, \pi_2) = (2/5, 3/5)$.

`D14`) Si ha la seguente relazione matriciale

$$(P(X_1 = 1), P(X_1 = 2)) = (\alpha, 1-\alpha) \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix};$$

allora (osservando la seconda componente di questa relazione) si ha $\frac{3\alpha}{4} + \frac{1-\alpha}{2} = \frac{5}{8}$, da cui segue $\frac{3\alpha}{4} - \frac{\alpha}{2} = \frac{5}{8} - \frac{1}{2}$, $\frac{(3-2)\alpha}{4} = \frac{5-4}{8}$, $\alpha = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

Commenti.
La somma dei valori di ciascuna densità discreta che appare è 1 in accordo con la teoria.
`D1-D2`) Abbiamo 3 modi per estrarre complessivamente 2 numeri pari e 1 dispari: (pari, pari, dispari), (pari, dispari, pari), (dispari, pari, pari). In ciascun caso si verifica che la probabilità corrispondente è $\frac{4}{35}$. Allora la somma delle probabilità relative a tali casi $\frac{4+4+4}{35}$ coincide (come deve) con $p_X(1) = \frac{12}{35}$.
`D11`) In altro modo si ha $m = 2 \cdot \frac{10}{20} = 1$ in accordo con la teoria della distribuzione ipergeometrica.