Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)
Anno accademico: `2009-2010`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Simulazione 2

Esercizio 1. Un'urna ha 4 palline con i numeri 2,3,4,5. Si estraggono a caso 2 palline in blocco. Sia X la variabile aleatoria che indica la differenza tra il massimo e il minimo tra i due numeri estratti.
`D1`) Trovare la densità di X.
`D2`) Calcolare $\mathbb{E}[X]$ e $\mathrm{Var}[X]$.

Esercizio 2. Si lancia un dado equo. Se escono i numeri 1 e 2 si lanciano 3 monete eque, altrimenti si lanciano 4 monete eque.
`D3`) Calcolare la probabilità di avere esattamente 2 volte testa.
`D4`) Calcolare la probabilità di aver ottenuto un numero pari nel lancio del dado sapendo di aver ottenuto esattamente due volte testa.

Esercizio 3. Consideriamo la seguente densità congiunta: $p_{(X_1,X_2)}(0,1) = p_{(X_1,X_2)}(0,2) = p_{(X_1,X_2)}(1,0) = p_{(X_1,X_2)}(1,2) = \frac{1}{8}$ e $p_{(X_1,X_2)}(1,1) = \frac{1}{2}$.
`D5`) Trovare le densità marginali di X_1 e X_2.
`D6`) Trovare la retta di regressione $X_2 = aX_1 + b$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con distribuzione uniforme su $(4,16)$.
`D7`) Trovare la densità continua di $Y = \sqrt{X}$.
`D8`) Calcolare $P(Y \leq t | X \leq 9)$ al variare di $t \in \mathbb{R}$.
`D9`) Calcolare $\mathbb{E}[Y]$.

Esercizio 5. Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di variabili aleatorie con densità continua $f(t) = 3t^2 1_{(0,1)}(t)$.
`D10`) Trovare il valore della costante c per cui $\lim_{n\to\infty} P(|\overline{X}_n - c| \geq \varepsilon) = 0$ per ogni $\varepsilon > 0$, dove $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$.

Esercizio 6. Sia X una variabile aleatoria normale di media $\mu_X = 1$ e varianza $\sigma_X^2 = 16$.
`D11`) Calcolare $P(0 < X < 3)$.
Sia Y una variabile uniforme su $(0,12)$ e indipendente da X.
`D12`) Calcolare $\mathrm{Var}[X+Y]$.

Esercizio 7 (*solo per ST-Materiali*). Consideriamo una catena di Markov omogenea $\{X_n : n \geq 0\}$ con matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} q & 1-q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

per $q \in [0,1]$.
`D13`) Discutere l'applicabilità del teorema di Markov ed illustrare la sua applicazione per i valori di q per cui è possibile farlo.
`D14`) Esiste un valore di q per cui $\lim_{n\to\infty} p_{i1}^{(n)} = \frac{1}{2}$ per ogni $i \in \{1,2\}$?

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1. Si ha un modello discreto uniforme sull'insieme dei sottoinsiemi di 2 elementi di $\{2,3,4,5\}$ costituito da $\#C_{4,2} = \binom{4}{2} = 6$ elementi.
`D1`) Si ha $p_X(1) = P(\{\{2,3\},\{3,4\},\{4,5\}\}) = \frac{3}{6}$, $p_X(2) = P(\{\{2,4\},\{3,5\}\}) = \frac{2}{6}$, $p_X(3) = P(\{\{2,5\}\}) = \frac{1}{6}$.
`D2`) Si ha $\mathbb{E}[X] = 1 \cdot \frac{3}{6} + 2 \cdot \frac{2}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{3+4+3}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$ e $\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}^2[X] = 1^2 \cdot \frac{3}{6} + 2^2 \cdot \frac{2}{6} + 3^2 \cdot \frac{1}{6} - (\frac{5}{3})^2 = \frac{3+8+9}{6} - \frac{25}{9} = \frac{10}{3} - \frac{25}{9} = \frac{30-25}{9} = \frac{5}{9}$.

Esercizio 2. Sia A l'evento "avere esattamente 2 teste" e sia E_i l'evento di "esce i nel lancio del dado" ($i \in \{1,2,3,4,5,6\}$).
`D3`) Per la formula delle probabilità totali si ha $P(A) = \sum_{i=1}^{6} P(A|E_i)P(E_i) = \frac{1}{6}(2\binom{3}{2}(\frac{1}{2})^3 + 4\binom{4}{2}(\frac{1}{2})^4) = \frac{1}{6}(2\frac{3}{8} + 4\frac{6}{16}) = \frac{1}{6}\frac{3+6}{4} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$.
`D4`) Per la formula di Bayes (e per il valore di $P(A)$ calcolato prima) si ha $P(E_2 \cup E_4 \cup E_6|A) = P(E_2|A) + P(E_4|A) + P(E_6|A) = \frac{P(A|E_2)P(E_2)+P(A|E_4)P(E_4)+P(A|E_6)P(E_6)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6}(\binom{3}{2}(\frac{1}{2})^3+2\binom{4}{2}(\frac{1}{2})^4)}{\frac{3}{8}} = \frac{1}{6}\frac{8}{3}(\frac{3}{8} + 2\frac{6}{16}) = \frac{1}{6}\frac{8}{3}\frac{9}{8} = \frac{1}{2}$.

Esercizio 3.
`D5`) Si ha $p_{X_1}(0) = p_{(X_1,X_2)}(0,1) + p_{(X_1,X_2)}(0,2) = \frac{2}{8}$, $p_{X_1}(1) = p_{(X_1,X_2)}(1,0) + p_{(X_1,X_2)}(1,1) + p_{(X_1,X_2)}(1,2) = \frac{1+4+1}{8} = \frac{6}{8}$ e $p_{X_2}(0) = p_{(X_1,X_2)}(1,0) = \frac{1}{8}$, $p_{X_2}(1) = p_{(X_1,X_2)}(0,1) + p_{(X_1,X_2)}(1,1) = \frac{1+4}{8} = \frac{5}{8}$, $p_{X_2}(2) = p_{(X_1,X_2)}(0,2) + p_{(X_1,X_2)}(1,2) = \frac{1+1}{8} = \frac{2}{8}$.
`D6`) Si ha (uso formule semplificate per X_1 perché è a valori in $\{0,1\}$) $\mathbb{E}[X_1] = p_{X_1}(1) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$, $\mathrm{Var}[X_1] = p_{X_1}(1)(1-p_{X_1}(1)) = \frac{3}{4}(1-\frac{3}{4}) = \frac{3}{16}$, $\mathbb{E}[X_2] = 0\frac{1}{8} + 1\frac{5}{8} + 2\frac{2}{8} = \frac{9}{8}$, $\mathbb{E}[X_1X_2] = (0\cdot 1)\frac{1}{8} + (0\cdot 2)\frac{1}{8} + (1\cdot 0)\frac{1}{8} + (1\cdot 1)\frac{4}{8} + (1\cdot 2)\frac{1}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$, $\mathrm{Cov}(X_1,X_2) = \mathbb{E}[X_1X_2] - \mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[X_2] = \frac{3}{4} - \frac{3}{4}\frac{9}{8} = \frac{3}{4}(1-\frac{9}{8}) = \frac{3}{4}(-\frac{1}{8}) = -\frac{3}{32}$. Allora $a = \frac{\mathrm{Cov}(X_1,X_2)}{\mathrm{Var}[X_1]} = \frac{-\frac{3}{32}}{\frac{3}{16}} = -\frac{1}{2}$ e $b = \mathbb{E}[X_2] - a\mathbb{E}[X_1] = \frac{9}{8} + \frac{1}{2}\frac{3}{4} = \frac{9+3}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$.

Esercizio 4.
`D7`) Si ha $P(2 < Y < 4) = 1$, da cui segue $F_Y(y) = 0$ per $y \leq 2$ e $F_Y(y) = 1$ per $y \geq 4$. Per $2 < y < 4$ si ha $F_Y(y) = P(\sqrt{X} \leq y) = P(X \leq y^2) = \int_4^{y^2} \frac{1}{16-4}dt = [\frac{t}{12}]_{t=4}^{t=y^2} = \frac{y^2-4}{12}$. Quindi la densità è $f_Y(y) = \frac{y}{6}1_{(2,4)}(y)$.
`D8`) Si ha $P(Y \leq t|X \leq 9) = \frac{P(\{Y\leq t\}\cap\{X\leq 9\})}{P(X\leq 9)} = \frac{P(\{Y\leq t\}\cap\{Y\leq 3\})}{P(Y\leq 3)}$. Tale funzione di t vale 0 per $t \leq 2$ e vale 1 per $t \geq 3$. Per $2 < t < 3$ abbiamo $P(Y \leq t|X \leq 9) = \frac{P(Y\leq t)}{P(Y\leq 3)} = \frac{F_Y(t)}{F_Y(9)} = \frac{\frac{t^2-4}{12}}{\frac{3^2-4}{12}} = \frac{t^2-4}{5}$.
`D9`) Si ha $\mathbb{E}[Y] = \int_2^4 y\frac{y}{6}dy = [\frac{y^3}{18}]_{y=2}^{y=4} = \frac{4^3-2^3}{18} = \frac{64-8}{18} = \frac{56}{18} = \frac{28}{9}$.

Esercizio 5.
`D10`) Per la legge dei grandi numeri si ha $c = \mathbb{E}[X_n] = \int_0^1 t3t^2dt = 3[\frac{t^4}{4}]_{t=0}^{t=1} = \frac{3}{4}$.

Esercizio 6.
`D11`) Si ha $P(0 < X < 3) = P(\frac{0-1}{\sqrt{16}} \leq \frac{X-\mu_X}{\sigma_X} \leq \frac{3-1}{\sqrt{16}}) = \Phi(\frac{1}{2}) - \Phi(-\frac{1}{4}) = \Phi(0.5) - (1-\Phi(0.25)) = \Phi(0.5) + \Phi(0.25) - 1 = 0.69146 + 0.59871 - 1 = 0.29017$.
`D12`) Si ha $\mathrm{Var}[X+Y] = \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[Y]$ per ipotesi di indipendenza e quindi $\mathrm{Var}[X+Y] = 16 + \frac{(12-0)^2}{12} = 16 + 12 = 28$.

Esercizio 7.
`D13`) Per $q = 1$ la catena non è irriducibile (la catena rimane sempre nello stato 1, eventualmente ad eccezione dell'istante iniziale). Per $q = 0$ la catena è irriducibile ma non è regolare; infatti, se consideriamo le potenze della matrice P, si ha $P^{2k-1} = P$ per $k \geq 1$ e $P^{2k} = I$ dove I è la

matrice identità. Se $0 < q < 1$ la catena è regolare perché è irriducibile e $p_{11} > 0$. Quindi il teorema di Markov si applica solo in questo caso e si ha $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j$ per ogni $i, j \in \{1, 2\}$, dove $\pi = (\pi_1, \pi_2)$ è la distribuzione stazionaria. La distribuzione stazionaria soddisfa la seguente relazione

$$(\pi_1, \pi_2) \begin{pmatrix} q & 1-q \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (\pi_1, \pi_2).$$

Si ottengono le seguenti due equazioni tra loro equivalenti:

$$\begin{cases} q\pi_1 + \pi_2 = \pi_1 \\ (1-q)\pi_1 = \pi_2 \end{cases}$$

Quindi, tenendo conto il vincolo $\pi_1 + \pi_2 = 1$, si ha l'equazione $\pi_1 + (1-q)\pi_1 = 1$ da cui segue $\pi_1 = \frac{1}{2-q}$ e $\pi_2 = 1 - \frac{1}{2-q} = \frac{1-q}{2-q}$. In conclusione la distribuzione stazionaria è $\pi = (\frac{1}{2-q}, \frac{1-q}{2-q})$.
`D14`) La risposta è NO e si motiva come segue. Iniziamo con i valori di $q \in (0, 1)$ per cui vale il teorema di Markov. Si deve far riferimento alla equazione $\pi_1 = \frac{1}{2}$, che diventa $\frac{1}{2-q} = \frac{1}{2}$, e che ha soluzione $q = 0$ che non appartiene ai valori per cui si applica il teorema di Markov. Per $q = 1$ si ha $\lim_{n\to\infty} p_{i1}^{(n)} = 1$ per ogni $i \in \{1, 2\}$ perché $p_{i1}^{(n)} = 1$ per ogni $n \geq 1$. Per $q = 0$ le due successioni $\{p_{i1}^{(n)} : n \geq 1\}$ per $i \in \{1, 2\}$ non ammettono limite perché sono oscillanti (precisamente, per ogni $n \geq 1$, si ha: $p_{11}^{(2n)} = 1$ e $p_{11}^{(2n-1)} = 0$; $p_{21}^{(2n)} = 0$ e $p_{21}^{(2n-1)} = 1$); infatti in tal caso la catena non rimane mai in uno stesso stato in due istanti consecutivi.

Commenti.
`D4`) Ovviamente si ha $P(E_2 \cup E_4 \cup E_6) = \frac{3}{6}$ e quindi gli eventi $E_2 \cup E_4 \cup E_6$ e A sono indipendenti perché $P(E_2 \cup E_4 \cup E_6) = P(E_2 \cup E_4 \cup E_6 | A)$.
`D5`) La somma dei valori delle densità è 1 in accordo con la teoria.
`D9`) In altro modo $\mathbb{E}[Y] = \int_4^{16} \sqrt{x} \frac{1}{16-4} dx = \frac{1}{12} [\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}]_{x=4}^{x=16} = \frac{1}{12} \frac{2}{3} [x^{\frac{3}{2}}]_{x=4}^{x=16} = \frac{64-8}{18} = \frac{56}{18} = \frac{28}{9}$.
`D13-D14`) Si verifica che $\pi = (\frac{1}{2-q}, \frac{1-q}{2-q})$ è l'unica distribuzione stazionaria anche nei casi $q = 0$ e $q = 1$. Si osservi che, ad eccezione del caso $q = 0$, si ha sempre $\pi_1 > \pi_2$; inoltre π_1 è una funzione crescente di q. Questo è in accordo con il fatto che, per $q \in (0, 1]$, la catena tende a visitare più spesso lo stato 1 (infatti ogni volta che la catena arriva in 2, sarà nello stato 1 all'istante successivo).