Laurea Triennale in Scienza e Tecnologia dei Media, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità
Anno accademico: `2017-2018`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Appello del 26 Settembre 2018
Esercizi 1,2,3,4,5 per gli studenti che sostengono l'esame da 6 crediti.
Esercizi 1,2,3,4,5,6 per gli studenti che sostengono l'esame da 8 crediti.

Esercizio 1.
Un'urna ha 2 palline bianche, 2 rosse e 2 nere. Si estraggono a caso 3 palline, una alla volta e senza reinserimento.
`D1`) Calcolare la probabilità di estrarre 2 palline rosse.
`D2`) Calcolare la probabilità di estrarre 2 palline rosse e 1 nera in un qualsiasi ordine.
`D3`) Calcolare la probabilità di estrarre la sequenza di colori $(\text{rossa}, \text{rossa}, \text{nera})$.

Esercizio 2.
Si lancia ripetutamente una coppia di dadi equi fino a quando esce per la prima volta la coppia $(1,1)$. Poi si lancia una moneta, la cui probabilità che esca testa lanciandola è $p \in (0,1)$, tante volte quante si è lanciata la coppia di dadi.
`D4`) Calcolare la probabilità che esca testa in tutti i lanci di moneta effettuati.

Esercizio 3.
Sia $p \in (0,1)$ fissato e consideriamo la seguente densità congiunta: $p_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \binom{x_1+x_2}{x_1}\left(\frac{1-p}{2}\right)^{x_1+x_2} p$, per $x_1, x_2 \geq 0$ interi.
`D5`) Calcolare $P(X_1 = 1 | X_1 + X_2 = 4)$.
`D6`) Trovare la densità discreta di $Y = X_1 + X_2$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con densità continua $f(x) = e^{ax} 1_{(0,b)}$, dove $a, b > 0$ e $\frac{e^{ab}-1}{a} = 1$.
`D7`) Trovare la funzione di distribuzione di $Y = e^X$.
`D8`) Calcolare $\mathbb{E}[e^{-aX}]$.

Esercizio 5.
Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.
`D9`) Sia X una variabile aleatoria Normale di media μ e di varianza 4. Dire per quale valore di μ si ha $P(X > 10) = 1 - \Phi(3/2)$.
`D10`) Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. (indipendenti e identicamente distribuite), con distribuzione media 0 e varianza 6. Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} P\left(-\sqrt{3} < \frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}} \leq 2\sqrt{6}\right)$$

esprimendo il risultato con la funzione $\Phi(y)$ per qualche $y \geq 0$.

Esercizio 6.
Consideriamo una catena di Markov omogenea $\{X_n : n \geq 0\}$ con spazio degli stati $E = \{1,2\}$ e, per $a > 0$, matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} a/(a+1) & 1/(a+1) \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

`D11`) Illustrare le conseguenze del teorema di Markov dopo aver motivato la sua applicabilità.
`D12`) Dire per quale valore di a il tempo medio di raggiungimento dell'insieme $\{2\}$ partendo da 1 è uguale a 3/2.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
`D1`) Per la teoria della distribuzione Ipergeometrica la probabilità richiesta è $\frac{\binom{2}{2}\binom{4}{1}}{\binom{6}{3}} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$.
`D2`) Per la teoria della distribuzione Ipergeometrica (con più di 2 tipi) la probabilità richiesta è $\frac{\binom{2}{2}\binom{2}{1}\binom{2}{0}}{\binom{6}{3}} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$.
Osservazione: si ottiene lo stesso valore anche per la probabilità di estrarre 2 palline rosse e 1 bianca; in corrispondenza la somma $\frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ coincide (come deve) con la probabilità calcolata alla domanda precedente.
`D3`) Con notazioni ovvie la probabilità richiesta è $P(R_1 \cap R_2 \cap N_3) = P(R_1)P(R_2|R_1)P(N_3|R_1 \cap R_2) = \frac{2}{6}\frac{1}{5}\frac{2}{4} = \frac{1}{30}$.
Osservazione: si ottiene lo stesso valore anche per $P(R_1 \cap N_2 \cap R_3)$ e per $P(N_1 \cap R_2 \cap R_3)$; in corrispondenza la somma $\frac{1}{30} + \frac{1}{30} + \frac{1}{30} = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}$ coincide (come deve) con la probabilità calcolata alla domanda precedente.

Esercizio 2.
`D4`) Indichiamo con E l'evento "esce testa in ogni lancio di moneta" e con X il numero di lanci di moneta effettuati. Allora, per la formula delle probabilità totali, si ha

$$P(E) = \sum_{k=1}^{\infty} P(E|X = k)P(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} \binom{k}{k} p^k (1-p)^{k-k} \left(1 - \frac{1}{36}\right)^{k-1} \frac{1}{36} = \frac{1}{36}\frac{36}{35} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{35}{36}p\right)^k = \frac{1}{35}\frac{\frac{35}{36}p}{1 - \frac{35}{36}p}.$$

Esercizio 3.
`D5`) Si ha

$$\begin{aligned} P(X_1 = 1|X_1 + X_2 = 4) &= \frac{P(\{X_1 = 1\} \cap \{X_1 + X_2 = 4\})}{P(X_1 + X_2 = 4)} = \frac{P(\{X_1 = 1\} \cap \{X_2 = 3\})}{P(X_1 + X_2 = 4)} \\ &= \frac{p_{X_1,X_2}(1,3)}{p_{X_1,X_2}(0,4) + p_{X_1,X_2}(1,3) + p_{X_1,X_2}(2,2) + p_{X_1,X_2}(3,1) + p_{X_1,X_2}(4,0)} \\ &= \frac{\binom{4}{1}\left(\frac{1-p}{2}\right)^4 p}{\sum_{j=0}^{4}\binom{4}{j}\left(\frac{1-p}{2}\right)^4 p} = \frac{4}{1+4+6+4+1} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

`D6`) Per $k \geq 0$ intero si ha

$$p_Y(k) = \sum_{x_1=0}^{k} \binom{k}{x_1} \left(\frac{1-p}{2}\right)^k p = (1-p)^k p \sum_{x_1=0}^{k} \binom{k}{x_1} \left(\frac{1}{2}\right)^k = (1-p)^k p$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal fatto che si sommano i valori della densità discreta della distribuzione Binomiale di parametri k e $1/2$.
Osservazione: la variabile aleatoria Y ha distribuzione geometrica (quella che parte da zero) di parametro p.

Esercizio 4.
`D7`) Si ha $P(1 \leq Y \leq e^b) = 1$, da cui segue $F_Y(y) = 0$ per $y \leq 1$ e $F_Y(y) = 1$ per $y \geq e^b$. Per $y \in (1, e^b)$ si ha

$$F_Y(y) = P(e^X \leq y) = P(X \leq \log y) = \int_0^{\log y} e^{ax} dx = \left[\frac{e^{ax}}{a}\right]_{x=0}^{x=\log y} = \frac{y^a - 1}{a}.$$

`D8`) Si ha

$$\mathbb{E}[e^{-aX}] = \int_0^b e^{-ax} e^{ax} dx = b.$$

Osservazione: si deve avere $b \in (0,1)$ e in effetti questo si verifica con semplici calcoli a partire dalla relazione $\frac{e^{ab}-1}{a} = 1$ che implica $b = \frac{\log(a+1)}{a}$ (infatti $\frac{\log(a+1)}{a} \in (0,1)$ per ben note proprietà della funzione logaritmo).

Esercizio 5.
`D9`) Si ha

$$1-\Phi(3/2)=P(X>10)=P\left(\frac{X-\mu}{\sqrt{4}}>\frac{10-\mu}{\sqrt{4}}\right)=1-\Phi\left(\frac{10-\mu}{2}\right)$$

da cui segue $\frac{3}{2}=\frac{10-\mu}{2}$ e, con semplici calcoli, si ottiene $\mu=7$.
`D10`) Si ha

$$P\left(-\sqrt{3}<\frac{X_1+\cdots+X_n}{\sqrt{n}}\leq 2\sqrt{6}\right)=P\left(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}<\frac{X_1+\cdots+X_n}{\sqrt{6}\sqrt{n}}\leq 2\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}\right)$$

e, per il teorema limite centrale, otteniamo

$$\lim_{n\to\infty}P\left(-\sqrt{3}<\frac{X_1+\cdots+X_n}{\sqrt{n}}\leq 2\sqrt{6}\right)=\Phi(2)-\Phi(-\sqrt{3}/\sqrt{6})=\Phi(2)-(1-\Phi(1/\sqrt{2}))=\Phi(2)+\Phi(1/\sqrt{2})-1.$$

Esercizio 6.
`D11`) La matrice di transizione ha elementi tutti positivi, e quindi la catena è irriducibile e regolare. Allora il teorema di Markov è applicabile e si ha

$$\lim_{n\to\infty}P(X_n=j|X_0=i)=\pi_j \text{ (per ogni } i,j\in E),$$

dove (π_1,π_2) è l'unica distribuzione invariante. In dettaglio si ha

$$(\pi_1,\pi_2)\left(\begin{array}{cc} a/(a+1) & 1/(a+1) \\ 1/2 & 1/2 \end{array}\right)=(\pi_1,\pi_2),$$

e, posto $(\pi_1,\pi_2)=(p,1-p)$, si ha il seguente sistema

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{ap}{a+1}+\frac{1-p}{2}=p \\ \frac{p}{a+1}+\frac{1-p}{2}=1-p. \end{array}\right.$$

Allora si ottiene

$$\left\{\begin{array}{l} 2ap+(1-p)(a+1)=2p(a+1) \\ 2p+(1-p)(a+1)=2(1-p)(a+1) \end{array}\right.$$

e, con semplici calcoli, si vede che entrambe le equazioni hanno soluzione $p=\frac{a+1}{a+3}$. Quindi $(\pi_1,\pi_2)=(\frac{a+1}{a+3},\frac{2}{a+3})$.
Osservazione: Per $a=1$ la somma degli elementi di ciascuna colonna è uguale a 1 e, in effetti, in corrispondenza si ha $(\pi_1,\pi_2)=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.
`D12`) Indichiamo con μ_i il tempo medio di raggiungimento dell'insieme $\{2\}$ partendo da $i\in A=\{1\}$. In corrispondenza il sistema di equazioni

$$\mu_i=1+\sum_{j\in A}p_{ij}\mu_j \ (i\in A)$$

si riduce ad un'unica equazione, con un'unica incognita μ_1:

$$\mu_1=1+\frac{a}{a+1}\mu_1.$$

In corrispondenza con semplici calcoli si vede che $\mu_1=a+1$. Allora abbiamo l'equazione $a+1=3/2$, da cui segue $a=\frac{1}{2}$.
Osservazione: il tempo di raggiungimento dell'insieme $\{2\}$ partendo da 1 corrisponde al tempo di primo successo nel caso di prove bernoulliane indipendenti con probabilità di successo $q=p_{12}=\frac{1}{a+1}$, che ammette media $\frac{1}{q}=a+1$ (in accordo con il valore di μ_1 ottenuto sopra).