Statistica per la ricerca sperimentale e tecnologica
CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA, UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"
Anno accademico: 2007-2008
Titolare del corso: Claudio Macci
Esame del 24 Settembre 2008

Esercizio 1. Un'urna contiene 4 palline bianche, 3 rosse e 2 nere. Si estraggono a caso 2 palline in blocco. Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di palline bianche estratte.
D1) Trovare la densità discreta di X.
D2) Calcolare la probabilità di estrarre i colori bianco e rosso.

Esercizio 2. Abbiamo due urne: la prima ha tre palline con i numeri 1, 2 e 3; la seconda è vuota. Si estraggono a caso 2 palline in blocco dalla prima urna. Nella seconda urna vengono messe un numero di palline bianche uguale al massimo dei due numeri estratti, e un numero di palline nere uguale al minimo tra i due numeri estratti. Poi si estrae una pallina a caso dalla seconda urna.
D3) Calcolare la probabilità che la pallina estratta dalla seconda urna sia bianca.
D4) Calcolare la probabilità di aver estratto i numeri 1 e 3 dalla prima urna sapendo di aver estratto una pallina bianca dalla seconda urna.

Esercizio 3. La variabile aleatoria (X_1, X_2) ha la seguente densità congiunta: $p_{(X_1,X_2)}(0,0) = p_{(X_1,X_2)}(0,1) = p_{(X_1,X_2)}(2,0) = \frac{1}{7}$; $p_{(X_1,X_2)}(1,0) = p_{(X_1,X_2)}(1,1) = \frac{2}{7}$.
D5) Trovare la densità marginale di X_1.
D6) Trovare la densità discreta di $Z = X_1 + X_2$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria continua con densità f_X definita come segue: $f_X(t) = \frac{2}{3}(1+t)$ per $t \in [0,1]$ e $f_X(t) = 0$ altrimenti.
D7) Calcolare $P(X < 1/2)$.
D8) Calcolare $\mathbb{E}[X]$.

Esercizio 5. Il numero di telefonate ricevute da un centralino è dato da un (N_t) un processo di Poisson con intensità $\lambda = 11/2$. Sia (T_n) la successione delle variabili aleatorie che indica gli istanti in cui arrivano le telefonate.
D9) Calcolare $P(2 < T_1 < 4)$.
D10) Calcolare $P(N_4 = 2)$.

Esercizio 6. Sia X una variabile aleatoria normale con media 2 e varianza 4.
D11) Calcolare $P(1 < X < 4)$.
Sia Y un'altra variabile aleatoria normale con media -2 e varianza 12, indipendente da X.
D12) Calcolare $P(X + Y > 1)$.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
D1) La densità discreta di X è $p_X(k) = \frac{\binom{4}{k}\binom{5}{2-k}}{\binom{9}{2}}$ per $k \in \{0,1,2\}$, da cui segue $p_X(0) = \frac{10}{36}$, $p_X(1) = \frac{20}{36}$ e $p_X(2) = \frac{6}{36}$.
D2) La probabilità richiesta è $p_{BR} = \frac{\binom{4}{1}\binom{3}{1}\binom{2}{0}}{\binom{9}{2}} = \frac{4\cdot3\cdot1}{36} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$.

Esercizio 2. Sia B l'evento "la pallina estratta dalla seconda urna è bianca". Abbiamo $\binom{3}{2} = 3$ sottoinsiemi di 2 numeri e hanno tutti la stessa probabilità di essere estratti in blocco: $P(\{1,2\}) = P(\{1,3\}) = P(\{2,3\}) = 1/3$.
D3) Per la formula delle probabilità totali si ha $P(B) = P(B|\{1,2\})P(\{1,2\})+P(B|\{1,3\})P(\{1,3\})+P(B|\{2,3\})P(\{2,3\}) = \frac{2}{3}\frac{1}{3} + \frac{3}{4}\frac{1}{3} + \frac{3}{5}\frac{1}{3} = \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{3}{5}\right)\frac{1}{3} = \frac{40+45+36}{60}\frac{1}{3} = \frac{121}{180}$.
D4) Per la formula di Bayes si ha $P(\{1,3\}|B) = \frac{P(B|\{1,3\})P(\{1,3\})}{P(B)}$ e, sfruttando il valore di $P(B)$ calcolato prima, si ha $P(\{1,3\}|B) = \frac{3}{4}\frac{1}{3}\frac{180}{121} = \frac{45}{121}$.

Esercizio 3.
D5) Si ha $p_{X_1}(0) = p_{(X_1,X_2)}(0,0) + p_{(X_1,X_2)}(0,1) = \frac{2}{7}$, $p_{X_1}(1) = p_{(X_1,X_2)}(1,0) + p_{(X_1,X_2)}(1,1) = \frac{4}{7}$ e $p_{X_1}(2) = p_{(X_1,X_2)}(2,0) = \frac{1}{7}$.
D6) Si ha $p_Z(0) = p_{(X_1,X_2)}(0,0) = \frac{1}{7}$, $p_Z(1) = p_{(X_1,X_2)}(0,1) + p_{(X_1,X_2)}(1,0) = \frac{3}{7}$ e $p_Z(2) = p_{(X_1,X_2)}(1,1) + p_{(X_1,X_2)}(2,0) = \frac{3}{7}$.

Esercizio 4.
D7) Si ha $P(X < 1/2) = \int_0^{1/2} \frac{2}{3}(1+t)dt = \frac{2}{3}[t + t^2/2]_{t=0}^{t=1/2} = \frac{2}{3}(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}) = \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{4} = \frac{5}{12}$.
D8) Si ha $\mathbb{E}[X] = \int_0^1 t\frac{2}{3}(1+t)dt = \frac{2}{3}\int_0^1 t + t^2 dt = \frac{2}{3}[\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}]_{t=0}^{t=1} = \frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6} = \frac{5}{9}$.

Esercizio 5.
D9) Si ha $P(2 < T_1 < 4) = \int_2^4 \frac{11}{2}e^{-\frac{11}{2}t}dt = [-e^{-\frac{11}{2}t}]_{t=2}^{t=4} = e^{-11} - e^{-22}$.
D10) Si ha $P(N_4 = 2) = \frac{(\frac{11}{2}\cdot4)^2}{2!}e^{-\frac{11}{2}\cdot4} = 242\cdot e^{-22}$.

Esercizio 6.
D11) Si ha $P(1 < X < 4) = P(\frac{1-2}{\sqrt{4}} < \frac{X-2}{\sqrt{4}} < \frac{4-2}{\sqrt{4}}) = P(-\frac{1}{2} < \frac{X-2}{\sqrt{4}} < 1) = \Phi(1) - \Phi(-1/2) = \Phi(1) - (1 - \Phi(1/2)) = \Phi(1) + \Phi(0.5) - 1 = 0.84134 + 0.69146 - 1 = 0.5328$.
D12) La variabile aleatoria $X + Y$ ha distribuzione normale con media $2 + (-2) = 0$ e varianza $4 + 12 = 16$. Quindi si ha $P(X + Y > 1) = P(\frac{X+Y-0}{\sqrt{16}} > \frac{1-0}{\sqrt{16}}) = P(\frac{X+Y-0}{\sqrt{16}} > \frac{1}{4}) = 1 - \Phi(1/4) = 1 - 0.59871 = 0.40129$.

Commenti.
D1) Si ha $p_X(0) + p_X(1) + p_X(2) = \frac{10+20+6}{36} = 1$ in accordo con la teoria.
D1-D2) La probabilità di estrarre i colori bianco e nero è $p_{BN} = \frac{\binom{4}{1}\binom{3}{0}\binom{2}{1}}{\binom{9}{2}} = \frac{4\cdot1\cdot2}{36} = \frac{8}{36}$. Per costruzione si deve avere $p_X(1) = p_{BR} + p_{BN}$ e tale uguaglianza si verifica sostituendo i valori numerici: $\frac{20}{36} = \frac{12+8}{36}$.
D5) Si ha $p_{X_1}(0) + p_{X_1}(1) + p_{X_1}(2) = \frac{2+4+1}{7} = 1$ in accordo con la teoria.
D6) Si ha $p_Z(0) + p_Z(1) + p_Z(2) = \frac{1+3+3}{7} = 1$ in accordo con la teoria.
D9) In altro modo $P(2 < T_1 < 4) = F_{T_1}(4) - F_{T_1}(2) = 1 - e^{-\frac{11}{2}\cdot4} - (1 - e^{-\frac{11}{2}\cdot2}) = e^{-11} - e^{-22}$.