Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità (ed insegnamenti mutuati)
Anno accademico: `2014-2015`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Appello del 2 Febbraio 2015

Esercizio 1. Un'urna contiene 4 palline con i numeri $0, 1, 2, 3$. Si estraggono a caso 2 palline in blocco.
`D1`) Trovare la densità discreta della variabile aleatoria X che conta il numero di palline con numero dispari estratte.
`D2`) Calcolare la probabilità di aver estratto la pallina con il numero 1 sapendo che il prodotto dei numeri estratti è uguale a zero.

Esercizio 2. Si lancia un dado truccato le cui facce hanno i numeri $1, 2, 3, 4, 5, 5$. Se esce un numero dispari si lanciano due monete eque, se esce un numero pari si lanciano tre monete eque.
`D3`) Calcolare la probabilità che escano tutte teste nei lanci di monete effettuati.
`D4`) Calcolare la probabilità che sia uscito un numero dispari nel lancio del dado sapendo che sono uscite tutte teste nei lanci di monete effettuati.

Esercizio 3. Siano $\lambda > 0$ e $p \in (0, 1)$ arbitrariamente fissati. Definiamo la seguente densità congiunta: $p_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = (1-p)^{x_1} p \frac{\lambda^{x_2}}{x_2!} e^{-\lambda}$ per $x_1, x_2 \geq 0$ interi.
`D5`) Calcolare $P(X_1 = X_2)$.
`D6`) Calcolare $P((X_1, X_2) = (0, 0)|X_1 + X_2 \leq 1)$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con distribuzione uniforme su $(-1, 0)$.
`D7`) Dimostrare che $Y = -\log(1 + X)$ ha distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 1$.
`D8`) Calcolare $\mathbb{E}[X]$ e $\mathrm{Var}[X]$.

Esercizio 5.
`D9`) Sia $N_t = \sum_{n\geq 1} 1_{T_n \leq t}$ (per $t \geq 0$) un processo di Poisson con intensità di $\lambda = \frac{3}{7}$. Calcolare $P(N_7 \leq 1)$.
`D10`) Sia X una variabile aleatoria con distribuzione Normale di media 1 e varianza 4. Trovare x per cui si ha $P(X \leq x) = \Phi(\frac{3}{4})$.

Esercizio 6. Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. (indipendenti e identicamente distribuite).
`D11`) Dire per quale valore di m si ha

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - m\right| > \varepsilon\right) = 0 \text{ per ogni } \varepsilon > 0,$$

nel caso in cui le variabili aleatorie $\{X_n : n \geq 1\}$ abbiano densità continua $f_X(t) = \frac{6}{125} t(5-t) 1_{(0,5)}(t)$.
`D12`) Calcolare, usando l'approssimazione Normale, $P(-200 < X_1 + \cdots + X_{10000} < 200)$ nel caso in cui le variabili aleatorie $\{X_n : n \geq 1\}$ abbiano distribuzione uniforme in $(-\sqrt{12}, \sqrt{12})$.

Esercizio 7 (*solo per Lauree Magistrali*). Consideriamo una catena di Markov omogenea $\{X_n : n \geq 0\}$ con spazio degli stati $E = \{1, 2, 3\}$ e matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 9/10 & 1/10 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

per $a, b, c \in (0, 1)$ tali che $a + b + c = 1$.
`D13`) Calcolare la probabilità di passaggio in $C = \{2\}$ partendo da 1.
`D14`) Calcolare $P(X_1 = 1, X_2 = 2|X_0 = 1)$.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
`D1`) Si ha $p_X(k) = \frac{\binom{2}{k}\binom{2}{2-k}}{\binom{4}{2}}$ per $k \in \{0,1,2\}$, e quindi $p_X(0) = p_X(2) = \frac{1}{6}$ e $p_X(1) = \frac{4}{6}$.
`D2`) È opportuno considerare lo spazio di probabilità uniforme $\Omega = \{\{0,1\},\{0,2\},\{0,3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}$, dove ciascun elemento di Ω ha probabilità $\frac{1}{6}$. Allora, se A è l'evento "estratto il numero 1" e B è l'evento "il prodotto dei due numeri estratti è uguale a zero", la probabilità richiesta è $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(\{\{0,1\}\})}{P(\{\{0,1\},\{0,2\},\{0,3\}\})} = \frac{1/6}{3/6} = \frac{1}{3}$.

Esercizio 2. Indichiamo con E l'evento "escono tutte teste nei lanci di monete effettuati" e con D l'evento "esce un numero dispari nel lancio del dado".
`D3`) Per la formula delle probabilità totali si ha $P(E) = P(E|D)P(D) + P(E|D^c)P(D^c) = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{4}{6} + \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{2}{6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{24} = \frac{4+1}{24} = \frac{5}{24}$.
`D4`) Per la formula di Bayes, e tenendo conto di alcuni valori calcolati prima, si ha $P(D|E) = \frac{P(E|D)P(D)}{P(E)} = \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{4}{6}}{5/24} = \frac{4}{5}$.

Esercizio 3.
`D5`) Si ha $P(X_1 = X_2) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{X_1,X_2}(k,k) = \sum_{k=0}^{\infty}(1-p)^k p\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = pe^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda(1-p))^k}{k!} = pe^{-\lambda}e^{\lambda(1-p)} = pe^{-\lambda p}$.
`D6`) Si ha $P((X_1,X_2) = (0,0)|X_1+X_2 \leq 1) = \frac{P(\{(X_1,X_2)=(0,0)\}\cap\{X_1+X_2\leq 1\})}{P(X_1+X_2\leq 1)} = \frac{p_{X_1,X_2}(0,0)}{p_{X_1,X_2}(0,0)+p_{X_1,X_2}(1,0)+p_{X_1,X_2}(0,1)} = \frac{pe^{-\lambda}}{pe^{-\lambda}+(1-p)pe^{-\lambda}+p\lambda e^{-\lambda}} = \frac{1}{1+(1-p)+\lambda} = \frac{1}{2-p+\lambda}$.

Esercizio 4.
`D7`) Si vede che $P(Y \geq 0) = 1$ e quindi $F_Y(y) = 0$ per $y \leq 0$. Dobbiamo verificare che $F_Y(y) = 1 - e^{-y}$ per $y > 0$. In effetti per $y > 0$ si ha $F_Y(y) = P(-\log(1+X) \leq y) = P(\log(1+X) \geq -y) = P(1+X \geq e^{-y}) = P(X \geq e^{-y}-1) = \int_{e^{-y}-1}^{\infty} f_X(t)dt = \int_{e^{-y}-1}^{0}\frac{1}{0-(-1)}dt = [t]_{t=e^{-y}-1}^{t=0} = 1 - e^{-y}$.
`D8`) Per le formule sulla distribuzione uniforme si ha $\mathbb{E}[X] = \frac{-1+0}{2} = -\frac{1}{2}$ e $\mathrm{Var}[X] = \frac{(0-(-1))^2}{12} = \frac{1}{12}$.

Esercizio 5.
`D9`) Si ha $P(N_7 \leq 1) = \sum_{k=0}^{1}\frac{(\frac{3}{7}\cdot 7)^k}{k!}e^{-\frac{3}{7}\cdot 7} = (1+3)e^{-3} = 4e^{-3}$.
`D10`) Si ha $P(X \leq x) = P(\frac{X-1}{\sqrt{4}} \leq \frac{x-1}{\sqrt{4}}) = \Phi(\frac{x-1}{2})$; quindi si deve avere $\frac{x-1}{2} = \frac{3}{4}$, da cui segue $x = \frac{5}{2}$ con semplici calcoli.

Esercizio 6.
`D11`) Per la legge dei grandi numeri il valore di m richiesto è $m = \int_{-\infty}^{\infty} tf_X(t)dt = \int_0^5 t\frac{6}{125}t(5-t)dt = \frac{6}{125}\int_0^5 5t^2 - t^3dt = \frac{6}{125}[5\frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4}]_{t=0}^{t=5} = \frac{6}{125}(5\cdot\frac{125}{3} - \frac{625}{4}) = 10 - \frac{15}{2} = \frac{20-15}{2} = \frac{5}{2}$.
`D12`) Le variabili aleatorie $\{X_n : n \geq 1\}$ hanno media $\frac{-\sqrt{12}+\sqrt{12}}{2} = 0$ e varianza $\frac{(\sqrt{12}-(-\sqrt{12}))^2}{12} = \frac{(2\sqrt{12})^2}{\sqrt{12}} = \frac{4\cdot 12}{12} = 4$ per le formule sulla distribuzione uniforme. Quindi, se indichiamo con Z la standardizzata di $X_1 + \cdots + X_{10000}$, si ha $\{-200 < X_1 + \cdots + X_{10000} < 200\} = \{-\frac{200}{\sqrt{4}\sqrt{10000}} < Z < \frac{200}{\sqrt{4}\sqrt{10000}}\}$ e, per l'approssimazione normale, $P(-200 < X_1 + \cdots + X_{10000} < 200) = \Phi(200/200) - \Phi(-200/200) = \Phi(1) - \Phi(-1) = \Phi(1) - (1 - \Phi(1)) = 2\Phi(1) - 1 = 2\cdot 0.84134 - 1 = 0.68268$.

Esercizio 7.
`D13`) L'insieme D_C degli stati che comunicano con $C = \{2\}$ e che non appartengono a C è $D_C = \{1\}$; infatti lo stato 3 è assorbente. Allora, detta λ la probabilità di passaggio richiesta, questa è soluzione della seguente equazione:

$$\lambda = b + a\lambda.$$

In corrispondenza si ottiene $\lambda = \frac{b}{1-a}$ con semplici calcoli.
`D14`) La probabilità richiesta è $P(X_1 = 1, X_2 = 2|X_0 = 1) = p_{11}p_{12} = ab$.

Commenti.
La somma dei valori di ciascuna densità discreta che appare è 1 in accordo con la teoria.

D7) Se avessimo avuto $Y = -\frac{1}{\lambda} \cdot \log(1+X)$ per qualche $\lambda > 0$, in corrispondenza la variabile aleatoria Y avrebbe avuto distribuzione esponenziale di parametro λ. Infatti anche in questo caso avremmo avuto $P(Y \geq 0) = 1$ e quindi $F_Y(y) = 0$ per $y \leq 0$; inoltre per $y > 0$ si avrebbe $F_Y(y) = P(-\frac{1}{\lambda} \cdot \log(1+X) \leq y) = P(\log(1+X) \geq -\lambda y) = P(1+X \geq e^{-\lambda y}) = P(X \geq e^{-\lambda y} - 1) = \int_{e^{-\lambda y}-1}^{\infty} f_X(t)dt = \int_{e^{-\lambda y}-1}^{0} \frac{1}{0-(-1)} dt = [t]_{t=e^{-\lambda y}-1}^{t=0} = 1 - e^{-\lambda y}$.
D11) La densità $f_X(t)$ è simmetrica rispetto al valore $t = \frac{5}{2}$. Quindi, poiché si ha speranza matematica finita (essendo f_X diversa da zero su un insieme limitato), la speranza di matematica deve essere uguale a $\frac{5}{2}$ per simmetria.
D13) La probabilità richiesta si può calcolare in altro modo notando che

$$\begin{aligned}\lambda =& P(X_1 = 2|X_0 = 1) + \sum_{k=2}^{\infty} P(X_1 = 1, \ldots, X_{k-1} = 1, X_k = 2|X_0 = 1) \\ =& b + \sum_{k=2}^{\infty} a^{k-1} b = b \sum_{k=0}^{\infty} a^k = b \cdot \frac{1}{1-a} = \frac{b}{1-a}.\end{aligned}$$

Inoltre, osservando che $\lambda = \frac{b}{b+c}$ (riscrivendo il denominatore diversamente perché $a + b + c = 1$), abbiamo la seguente interpretazione: si tratta di considerare la probabilità di andare da 1 in 2, e di normalizzare con la probabilità che, partendo da 1, si finisca in 2 o in 3 (lasciando lo stato 1 definitivamente).