Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità (ed insegnamenti mutuati)
Anno accademico: `2019-2020`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Simulazione 2

Esercizio 1.
Un'urna ha n palline numerate da 1 a n. Si estraggono a caso 2 palline in blocco.
`D1`) Calcolare la probabilità che venga estratto il numero k, per $k \in \{1, \dots, n\}$.
`D2`) Calcolare la probabilità che il massimo tra i due numeri estratti sia k, per $k \in \{1, \dots, n\}$.
`D3`) Calcolare la probabilità di estrarre due numeri consecutivi.

Esercizio 2.
Un'urna ha 2 palline bianche. Si lancia un dado equo: se esce un numero $\leq k$, per $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, si mette una pallina nera nell'urna; se esce un numero $> k$ si mettono 3 palline nere nell'urna. Poi si estrae una pallina a caso dall'urna.
`D4`) Calcolare la probabilità di aver ottenuto un numero $\leq k$ nel lancio del dado sapendo di aver estratto una pallina bianca.

Esercizio 3.
Sia q una densità discreta tale che $q(x) > 0$ se e solo se x è un intero non negativo. In corrispondenza consideriamo la densità congiunta $p_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = (1/2)^{x_2 - x_1 + 1} q(x_1)$ per $x_2 \geq x_1 \geq 0$ interi.
`D5`) Trovare la densità marginale di X_1.
`D6`) Trovare la densità discreta di $Y = X_2 - X_1$.

Esercizio 4.
Sia X una variabile aleatoria con densità continua $f(x) = x^{-2} 1_{(1,\infty)}(x)$.
`D7`) Trovare la funzione di distribuzione di $Y = e^{-2X}$.
`D8`) Trovare la densità discreta di $Z = [X]$, dove $[x] := \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$.

Esercizio 5.
Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.
`D9`) Sia X una variabile aleatoria Normale con media 10 e varianza 4. Calcolare $P(|X - 10| < x)$ al variare di $x > 0$ e dire per quale valore di x tale probabilità è uguale a $2\Phi(0.1) - 1$.
`D10`) Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. (indipendenti e identicamente distribuite), con distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 4$. Calcolare

$$P(X_1 + \cdots + X_{100} \leq 28)$$

facendo riferimento alla funzione Φ con argomento positivo e usando l'approssimazione Normale.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
Nelle risposte ai quesiti proposti si tiene conto che si hanno $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ sottoinsiemi di $\{1, \dots, n\}$ aventi 2 elementi. Tali sottoinsiemi rappresentano i possibili modi di estrarre le due palline in blocco e, ovviamente, sono tutti equiprobabili.
D1) La probabilità richiesta è $\frac{\binom{1}{1}\binom{n-1}{1}}{\binom{n}{2}} = \frac{n-1}{n(n-1)/2} = \frac{2}{n}$.
D2) La probabilità richiesta è $\frac{\binom{k-1}{1}\binom{1}{1}\binom{n-k}{0}}{\binom{n}{2}} = \frac{k-1}{n(n-1)/2} = \frac{2(k-1)}{n(n-1)}$.
Osservazione: la somma di tali probabilità al variare di k deve essere uguale ad 1; infatti si ha

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2(k-1)}{n(n-1)} = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n} (k-1) = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{2}{n(n-1)} \frac{(n-1)(n-1+1)}{2} = 1,$$

dove nella terza uguaglianza si è tenuto conto di una formula nota per la somma dei primi numeri naturali.
D3) La probabilità richiesta è uguale a $\frac{n-1}{\binom{n}{2}}$ perché i sottoinsiemi con 2 numeri consecutivi sono $n-1$, e precisamente: $\{1,2\}, \{2,3\}, \dots, \{n-1, n\}$. Quindi si ha $\frac{n-1}{\binom{n}{2}} = \frac{n-1}{n(n-1)/2} = \frac{2}{n}$.

Esercizio 2.
D4) Sia E_k l'evento "esce un numero $\leq k$" nel lancio del dado e sia B l'evento "estratta pallina bianca dall'urna". Allora, combinando l'uso della formula di Bayes con quello della formula delle probabilità totali, la probabilità richiesta è

$$\begin{aligned} P(E_k|B) = \frac{P(B|E_k)P(E_k)}{P(B)} &= \frac{P(B|E_k)P(E_k)}{P(B|E_k)P(E_k) + P(B|E_k^c)P(E_k^c)} \\ &= \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{k}{6}}{\frac{2}{3} \cdot \frac{k}{6} + \frac{2}{5} \cdot \frac{6-k}{6}} = \frac{10k}{10k + 6(6-k)} = \frac{10k}{4k+36}. \end{aligned}$$

Esercizio 3.
D5) Per $x_1 \geq 0$ intero si ha $p_{X_1}(x_1) = \sum_{x_2=x_1}^{\infty} p_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = q(x_1) \sum_{x_2=x_1}^{\infty} (1/2)^{x_2-x_1+1}$; allora, considerando un opportuno cambio di variabile per l'indice di sommatoria, si ottiene

$$p_{X_1}(x_1) = q(x_1) \sum_{h=1}^{\infty} (1/2)^h = q(x_1) \frac{1/2}{1-1/2} = q(x_1).$$

D6) La variabile aleatoria Y assume valori interi non negativi. In generale, per $y \geq 0$ intero, si ha

$$p_Y(y) = \sum_{(x_1,x_2):x_2-x_1=y} p_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \sum_{x_1=0}^{\infty} q(x_1)(1/2)^{x_1+y-x_1+1} = (1/2)^{y+1} \sum_{x_1=0}^{\infty} q(x_1) = (1/2)^{y+1}.$$

Osservazione: la variabile aleatoria Y ha distribuzione geometrica di parametro $p = 1/2$ (infatti, per $p = 1/2$, si ha $(1-p)^y p = (1/2)^{y+1}$) qualunque sia la densità discreta q.

Esercizio 4.
D7) Si ha $P(0 < Y < e^{-2}) = 1$, e quindi $F_Y(y) = 0$ per $y \leq 0$ e $F_Y(y) = 1$ per $y \geq e^{-2}$. Per $y \in (0, e^{-2})$ si ha $F_Y(y) = P(e^{-2X} \leq y) = P(-2X \leq \log y) = P(X \geq -(\log y)/2) = \int_{-(\log y)/2}^{\infty} x^{-2} dx = \frac{[x^{-2+1}]_{x=-(\log y)/2}^{x=\infty}}{-2+1} = \frac{2}{-\log y}$.
D8) Per ogni intero $k \geq 1$ si ha $p_Z(k) = P(Z = k) = P(k \leq X < k+1) = \int_k^{k+1} x^{-2} dx =$

$\frac{[x^{-2+1}]_{x=k}^{x=k+1}}{-2+1} = -\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k} = \frac{1}{k(k+1)}$.

Esercizio 5.
`D9`) Si ha

$$P(|X-10|<x) = P(-x < X-10 < x) = P\left(\frac{-x}{\sqrt{4}} \leq \frac{X-10}{\sqrt{4}} \leq \frac{x}{\sqrt{4}}\right)$$
$$= \Phi(x/\sqrt{4}) - \Phi(-x/\sqrt{4}) = \Phi(x/2) - (1-\Phi(x/2)) = 2\Phi(x/2) - 1.$$

Infine, imponendo che tale probabilità sia uguale a $2\Phi(0.1)-1$, segue $x/2 = 0.1$, e quindi $x = 0.2$.
`D10`) Ricordiamo che le variabili aleatorie esponenziali hanno media $1/\lambda = 1/4$ e varianza $1/\lambda^2 = 1/16$. Quindi si ha

$$P(X_1 + \cdots + X_{100} \leq 28) = P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_{100} - 100 \cdot \frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{1}{16}}\sqrt{100}} \leq \frac{28 - 100 \cdot \frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{1}{16}}\sqrt{100}}\right)$$
$$\approx \Phi\left(\frac{28 - 100 \cdot \frac{1}{4}}{\frac{1}{4}\sqrt{100}}\right) = \Phi\left(\frac{28-25}{\frac{10}{4}}\right) = \Phi(6/5) = \Phi(1.2).$$