Statistica per la ricerca sperimentale e tecnologica
Corso di Laurea in Informatica, Università di Roma "Tor Vergata"
Anno accademico: `2005-2006`
Titolare del corso: `Claudio Macci`
Simulazione 2

Esercizio 1. Un'urna contiene 3 palline numerate con i numeri 1, 2 e 3. Si estraggono in blocco e sia X la variabile aleatoria che indica la somma dei due numeri estratti.
`D1`) Calcolare la densità discreta di X.

Esercizio 2. Una moneta equa viene lanciata 3 volte.
`D2`) Calcolare la probabilità di ottenere esattamente una volta testa.
`D3`) Calcolare la probabilità di ottenere almeno una volta testa.
`D4`) Supponiamo ora di considerare un numero di lanci non fissato. Calcolare la probabilità di ottenere per la prima volta testa esattamente al quinto lancio.

Esercizio 3. Sia (X_1, X_2) una variabile aleatoria discreta bidimensionale con la seguente densità congiunta discreta: $p_{(X_1,X_2)}(0,2) = p_{(X_1,X_2)}(0,1) = p_{(X_1,X_2)}(1,0) = 1/3$.
`D5`) Trovare la densità discreta marginale di X_1.
`D6`) Calcolare $P(X_1 + X_2 = 1)$.

Esercizio 4. Sia (N_t) un processo di Poisson con intensità $\lambda = 2$ che modellizza le telefonate ricevute da un centralino. Siano (T_n) le variabili aleatorie che indicano i tempi in cui arrivano le telefonate.
`D7`) Calcolare $P(N_3 \geq 4)$.
`D8`) Calcolare $P(T_1 > 6)$.

Esercizio 5. Sia Z una variabile aleatoria con con densità $f_X(t) = ct^2$ per $t \in [0, 2]$ e $f_X(t) = 0$ altrimenti.
`D9`) Verificare che $c = 3/8$.
`D10`) Trovare la densità discreta di $W = [Z]$, dove $[x] = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$ è la parte intera di x.

Esercizio 6. Sia W una v.a. normale con media μ e varianza $\sigma^2 = 4$.
`D11`) Calcolare $P(W > 3)$ nel caso in cui $\mu = 2$.
Poi supponiamo che μ sia incognito. Consideriamo un campione di $n = 100$ osservazioni indipendenti e tutte con la stessa distribuzione di W. La media dei valori osservati è 3.
`D12`) Trovare l'intervallo di confidenza per μ al livello $1 - \alpha = 0.95$.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1. Il numero di sottoinsiemi di 2 elementi dell'insieme $\{1,2,3\}$ è costituito da $\binom{3}{2}=3$ elementi; infatti abbiamo i sottoinsiemi $\{1,2\}$, $\{1,3\}$ e $\{2,3\}$. Ciascuno di questi 3 sottoinsiemi ha probabilità 1/3 di essere scelto.
`D1`) La densità discreta di X si ottiene considerando i possibili valori delle somme; quindi $P(X=1+2)=P(X=1+3)=P(X=2+3)=1/3$, cioè $p_X(3)=p_X(4)=p_X(5)=1/3$.

Esercizio 2. Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di teste ottenute su 3 lanci di moneta.
`D2`) Si ha $P(X=1)=\binom{3}{1}(\frac{1}{2})^1(1-\frac{1}{2})^{3-1}=3/8$.
`D3`) Si ha $P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-\binom{3}{0}(\frac{1}{2})^0(1-\frac{1}{2})^{3-0}=7/8$.
`D4`) Per la teoria della distribuzione geometrica si ha $(1-\frac{1}{2})^{5-1}(\frac{1}{2})=(\frac{1}{2})^5=1/32$.

Esercizio 3.
`D5`) Si ha $p_{X_1}(0)=p_{(X_1,X_2)}(0,2)+p_{(X_1,X_2)}(0,1)=2/3$ e $p_{X_1}(1)=p_{(X_1,X_2)}(1,0)=1/3$.
`D6`) Si ha $P(X_1+X_2=1)=p_{(X_1,X_2)}(1,0)+p_{(X_1,X_2)}(0,1)=2/3$.

Esercizio 4.
`D7`) Si ha $P(N_3\geq 4)=1-P(N_3\leq 3)=1-\sum_{k=0}^{3}P(N_3=k)=1-\sum_{k=0}^{3}\frac{(2\cdot 3)^k}{k!}e^{-2\cdot 3}$, da cui $P(N_3\geq 4)=1-[\frac{6^0}{0!}+\frac{6^1}{1!}+\frac{6^2}{2!}+\frac{6^3}{3!}]e^{-6}=1-61\cdot e^{-6}$.
`D8`) È noto che T_1 ha distribuzione esponenziale di parametro λ; allora nel nostro caso si ha $P(T_1>6)=1-F_{T_1}(6)=1-(1-e^{-2\cdot 6})=e^{-12}$.

Esercizio 5.
`D9`) Si ha $1=c\int_0^2 t^2dt=c[t^3/3]_0^2=c\cdot 8/3$, da cui $c=3/8$.
`D10`) La variabile aleatoria W assume con probabilità positiva i valori 0 e 1, e si ha:
$p_W(0)=P(0\leq Z<1)=\int_0^1\frac{3}{8}t^2dt=\frac{1}{8}[t^3]_0^1=1/8$;
$p_W(1)=P(1\leq Z<2)=\int_1^2\frac{3}{8}t^2dt=\frac{1}{8}[t^3]_1^2=7/8$.

Esercizio 6.
`D11`) La v.a. $Z_W=\frac{W-2}{\sqrt{4}}$ è la standardizzata di W e si ha $P(W>3)=P(\frac{W-2}{\sqrt{4}}>\frac{3-2}{\sqrt{4}})=P(Z_W>1/2)=1-\Phi(1/2)=1-\Phi(0.5)=1-0.69146=0.30854$.
`D12`) L'intervallo di confidenza richiesto è $\left[\overline{x}_n-\phi_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{x}_n+\phi_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$. Si ha $\overline{x}_n=3$, $\sigma=\sqrt{4}$, $n=100$; inoltre $1-\frac{\alpha}{2}=0.975$ segue da $1-\alpha=0.95$ e quindi $\phi_{1-\frac{\alpha}{2}}=1.96$. In conclusione l'intervallo di confidenza richiesto è $[2.608,3.392]$.

Commenti.
`D3`) Si poteva procedere anche in questo modo: $P(X\geq 1)=p_X(1)+p_X(2)+p_X(3)=\frac{3+3+1}{8}=\frac{7}{8}$.
`D10`) Si ha $p_W(0)+p_W(1)=1$ e questo è in accordo con la teoria.