Laurea Triennale in Scienza e Tecnologia dei Media, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità
Anno accademico: `2018-2019`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Appello del 24 Giugno 2019
Esercizi 1,2,3,4,5 per gli studenti che sostengono l'esame da 6 crediti.
Esercizi 1,2,3,4,5,6 per gli studenti che sostengono l'esame da 8 crediti.

Esercizio 1.
Un'urna ha 3 palline bianche, 2 rosse e 4 nere. Si estraggono a caso 2 palline in blocco. Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di palline bianche estratte.
`D1`) Trovare la densità discreta di X.
`D2`) Calcolare $\mathbb{E}[X]$.
`D3`) Calcolare la probabilità di estrarre due palline dello stesso colore.

Esercizio 2.
Si lancia ripetutamente un dado equo e sia X la variabile aleatoria che conta il numero di lanci necessari per avere per la prima volta il numero 2. Poi si lancia X volte una moneta equa, e sia T l'evento "esce testa in ogni lancio di moneta effettuato".
`D4`) Per ogni $k \geq 1$ intero, calcolare $P(X = k|T)$ e verificare che esiste $q \in (0,1)$ per cui si ha $P(X = k|T) = (1-q)^{k-1}q$.

Esercizio 3.
Consideriamo la seguente densità congiunta: $p_{X_1,X_2}(0,0) = p_{X_1,X_2}(1,1) = p_{X_1,X_2}(2,2) = \frac{1}{4}$; $p_{X_1,X_2}(1,0) = p_{X_1,X_2}(2,0) = p_{X_1,X_2}(2,1) = p_{X_1,X_2}(0,1) = p_{X_1,X_2}(0,2) = p_{X_1,X_2}(1,2) = \frac{1}{24}$.
`D5`) Calcolare $P(X_1 + X_2 = 2)$.
`D6`) Calcolare $P(X_1X_2 = 0)$.

Esercizio 4.
Sia X una variabile aleatoria con distribuzione uniforme sull'intervallo $(\log 2, \log 3)$.
`D7`) Trovare la densità continua di $Y = e^X$.
`D8`) Calcolare $\mathbb{E}[Y]$.

Esercizio 5.
Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$.
`D9`) Sia X una variabile aleatoria con distribuzione Normale con media 7 e varianza σ^2. Trovare il valore della varianza per cui si ha $P(6 < X < 8) = 2\Phi(2) - 1$.
`D10`) Siano $X_1, \ldots, X_{1000}$ variabili aleatorie i.i.d. (indipendenti e identicamente distribuite) con media 1 e varianza 10. Calcolare $P(X_1 + \cdots + X_{1000} > 990)$ sfruttando l'approssimazione Normale del teorema limite centrale, ed esprimendo il risultato utilizzando la funzione Φ con un argomento positivo.

Esercizio 6.
Consideriamo una catena di Markov omogenea $\{X_n : n \geq 0\}$ con spazio degli stati $E = \{1,2,3\}$ e matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 1-p & p & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

per $p \in [0,1]$.
`D11`) Supponiamo di avere $P(X_0 = 1) = P(X_0 = 2) = P(X_0 = 3) = \frac{1}{3}$. Trovare il valore di p per cui si ha $P(X_1 = 1) = \frac{5}{8}$.
`D12`) Per $p = 0$, calcolare i tempi medi di raggiungimento dello stato 1 partendo da 2 e da 3, rispettivamente.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.

D1) Per la teoria della distribuzione Ipergeometrica si ha $p_X(k) = \frac{\binom{3}{k}\binom{6}{2-k}}{\binom{9}{2}}$ per $k \in \{0,1,2\}$. Quindi con semplici calcoli si ha $p_X(0) = \frac{5}{12}$, $p_X(1) = \frac{6}{12}$ e $p_X(2) = \frac{1}{12}$.

D2) Sfruttando la densità discreta di X calcolata prima si ha

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{2} kp_X(k) = 0\frac{5}{12} + 1\frac{6}{12} + 2\frac{1}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}.$$

Osservazione: per la teoria della distribuzione Ipergeometrica la speranza matematica richiesta coincide con quella della variabile aleatoria che si avrebbe nel caso di estrazioni con reinserimento, e quindi ha $\mathbb{E}[X] = 2\frac{3}{9} = \frac{2}{3}$.

D3) Con notazioni ovvie la probabilità richiesta è

$$P(B \cup R \cup N) = P(B) + P(R) + P(N) = \frac{\binom{3}{2}\binom{6}{0} + \binom{2}{2}\binom{7}{0} + \binom{4}{2}\binom{5}{0}}{\binom{9}{2}} = \frac{3+1+6}{36} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}.$$

Esercizio 2.

D4) Per la Formula di Bayes (combinata con la formula delle probabilità totali per il denominatore) per ogni $k \geq 1$ intero si ha

$$P(X = k|T) = \frac{P(T|X = k)P(X = k)}{P(T)} = \frac{P(T|X = k)P(X = k)}{\sum_{j \geq 1} P(T|X = j)P(X = j)};$$

quindi

$$P(X = k|T) = \frac{(\frac{1}{2})^k(1 - \frac{1}{6})^{k-1}\frac{1}{6}}{\sum_{j\geq 1}(\frac{1}{2})^j(1 - \frac{1}{6})^{j-1}\frac{1}{6}} = \frac{\frac{1}{6}\frac{6}{5}(\frac{5}{12})^k}{\frac{1}{6}\frac{6}{5}\sum_{j\geq 1}(\frac{5}{12})^j} = \frac{(\frac{5}{12})^k}{(\frac{5}{12})/(1 - \frac{5}{12})} = \frac{(\frac{5}{12})^{k-1}}{1/(\frac{7}{12})} = \left(\frac{5}{12}\right)^{k-1}\frac{7}{12}.$$

In conclusione, essendo $\frac{5}{12} = 1 - \frac{7}{12}$, vale la relazione desiderata con $q = \frac{7}{12}$.

Esercizio 3.

D5) Si ha

$$P(X_1 + X_2 = 2) = p_{X_1,X_2}(0,2) + p_{X_1,X_2}(1,1) + p_{X_1,X_2}(2,0) = \frac{1}{24} + \frac{1}{4} + \frac{1}{24} = \frac{1+6+1}{24} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}.$$

D6) Si ha

$$\begin{aligned} P(X_1X_2 = 0) &= p_{X_1,X_2}(0,2) + p_{X_1,X_2}(0,1) + p_{X_1,X_2}(0,0) + p_{X_1,X_2}(1,0) + p_{X_1,X_2}(2,0) \\ &= \frac{1}{24} + \frac{1}{24} + \frac{1}{4} + \frac{1}{24} + \frac{1}{24} = \frac{1+1+6+1+1}{24} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}. \end{aligned}$$

Esercizio 4.

D7) Si ha $P(2 \leq e^X \leq 3) = 1$, da cui segue $F_Y(y) = 0$ per $y \leq 2$ e $F_Y(y) = 1$ per $y \geq 3$. Per ogni $y \in (2,3)$ si ha $F_Y(y) = P(e^X \leq y) = P(X \leq \log y) = \int_{\log 2}^{\log y} \frac{1}{\log 3 - \log 2}dx = \frac{\log y - \log 2}{\log 3 - \log 2}$. Quindi la densità continua di Y è $f_Y(y) = \frac{1}{(\log 3 - \log 2)y}1_{(2,3)}(y)$.

D8) Sfruttando la densità continua calcolata prima, si ha

$$\mathbb{E}[Y] = \int_2^3 \frac{y}{(\log 3 - \log 2)y}dy = \frac{1}{\log 3 - \log 2}.$$

Osservazione: in maniera alternativa, e senza utilizzare f_Y calcolata prima, si ha

$$\mathbb{E}[Y] = \int_{\log 2}^{\log 3} \frac{e^x}{\log 3 - \log 2}dx = \frac{[e^x]_{x=\log 2}^{x=\log 3}}{\log 3 - \log 2} = \frac{3-2}{\log 3 - \log 2} = \frac{1}{\log 3 - \log 2}.$$

Esercizio 5.
D9) Si ha

$$2\Phi(2)-1=P(6<X<8)=\Phi\left(\frac{8-7}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{6-7}{\sigma}\right)=\Phi(1/\sigma)-\Phi\left(-\frac{1}{\sigma}\right)$$
$$=\Phi(1/\sigma)-\left(1-\Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right)\right)=2\Phi(1/\sigma)-1,$$

da cui segue $\frac{1}{\sigma}=2$, $\sigma=\frac{1}{2}$, $\sigma^2=\frac{1}{4}$.
D10) La probabilità richiesta è

$$P(X_1+\cdots+X_{1000}>990)=P\left(\frac{X_1+\cdots+X_{1000}-1000\cdot 1}{\sqrt{10}\sqrt{1000}}>\frac{990-1000\cdot 1}{\sqrt{10}\sqrt{1000}}\right)$$
$$\approx 1-\Phi\left(\frac{990-1000}{\sqrt{10000}}\right)=1-\Phi(-0.10)=\Phi(0.10).$$

Osservazione: per completezza, anche se non richiesto per l'esame, $\Phi(0.10)=0.53983$.

Esercizio 6.
D11) Si ha la seguente relazione matriciale

$$(1/3,1/3,1/3)\left(\begin{array}{ccc}1-p & p & 0\\ 1/2 & 0 & 1/2\\ 1/2 & 1/2 & 0\end{array}\right)=(P(X_1=1),P(X_1=2),P(X_1=3)),$$

da cui segue

$$\frac{1}{3}(1-p)+\frac{1}{3}\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\frac{1}{2}=\frac{5}{8}$$

e quindi $1-p=3(\frac{5}{8}-\frac{2}{6})=3\frac{15-8}{24}=\frac{7}{8}$. In conclusione $p=\frac{1}{8}$.
D12) Per $p=0$ lo stato 1 è assorbente. Allora possiamo fare riferimento ai tempi medi $\{\mu_i : i\in T\}$ di primo passaggio per 1, dove i rappresenta lo stato iniziale. I valori richiesti sono μ_2 e μ_3 e abbiamo il seguente sistema (nella soluzione di seguito si sostituisce la seconda nella prima ...):

$$\left\{\begin{array}{l}\mu_2=1+\frac{1}{2}\mu_3\\ \mu_3=1+\frac{1}{2}\mu_2,\end{array}\right.\quad\left\{\begin{array}{l}\mu_2=1+\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}\mu_2)\\ \mu_3=1+\frac{1}{2}\mu_2\end{array}\right.\quad\left\{\begin{array}{l}\frac{3}{4}\mu_2=\frac{3}{2}\\ \mu_3=1+\frac{1}{2}\mu_2\end{array}\right.\quad\left\{\begin{array}{l}\mu_2=2\\ \mu_3=2.\end{array}\right.$$

Osservazione: possiamo dire che, in ogni caso (sia partendo da 2, sia partendo da 3), il tempo di raggiungimento dello stato 1 è il tempo di primo successo nel caso di prove indipendenti con probabilità di successo 1/2 in ogni prova; in corrispondenza di ogni fallimento la catena si muove alternativamente tra gli stati 2 e 3; quindi non sorprende che $\mu_2=\mu_3=1/(1/2)=2$ in accordo con la teoria della distribuzione geometrica traslata (quella che parte da 1).