Statistica per la ricerca sperimentale e tecnologica
Corso di Laurea in Informatica, Università di Roma "Tor Vergata"
Anno accademico: 2007-2008
Titolare del corso: Claudio Macci
Esame del 25 Giugno 2008

Esercizio 1. Un'urna ha 5 palline numerate con i numeri 3,4,5,6,7. Si estraggono a caso 3 palline in blocco dall'urna. Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di palline estratte con numero dispari.
D1) Trovare la densità discreta di X.
D2) Calcolare la probabilità di estrarre i tre numeri dispari sapendo di aver estratto almeno due numeri dispari.

Esercizio 2. Consideriamo il seguente gioco. Si ha un'urna con 5 palline numerate da 1 a 5, e si estrae una pallina a caso: se vengono estratti i numeri 1 e 2, si perde il gioco; se vengono estratti i numeri 4 e 5, si vince il gioco; viene estratto il numero 3, si estrae una pallina a caso tra le palline rimaste nell'urna e si vince il gioco se viene estratto il numero 5.
D3) Calcolare la probabilità di vincere il gioco.
D4) Calcolare la probabilità di aver estratto il numero 4 alla prima estrazione sapendo di aver vinto il gioco.

Esercizio 3. La variabile aleatoria (X_1, X_2) ha la seguente densità congiunta: $p_{(X_1,X_2)}(0,0) = p_{(X_1,X_2)}(1,0) = \frac{2}{9}$; $p_{(X_1,X_2)}(0,1) = \frac{1}{9}$; $p_{(X_1,X_2)}(1,1) = \frac{4}{9}$.
D5) Calcolare $P(\min\{X_1, X_2\} = 0, \max\{X_1, X_2\} = 1)$.
D6) Trovare la densità discreta di $Y = X_1 - X_2$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con densità continua $f_X(t) = 2(1-t)$ su $[0,1]$ e $f_X(t) = 0$ altrimenti.
D7) Calcolare $\mathbb{E}[X^2]$.
D8) Calcolare la mediana di X, cioè il valore m tale che $P(X < m) = 1/2$.
Suggerimento. Basta calcolare $P(X < m)$ per $m \in (0,1)$ e porla uguale ad $1/2$; in questo modo si ottiene una equazione con incognita m, e la mediana è la soluzione in $(0,1)$.

Esercizio 5. Sia (N_t) un processo di Poisson con intensità $\lambda = 2$.
D9) Calcolare $P(T_1 > 15)$, dove T_1 la variabile aleatoria che indica con il tempo in cui accade il primo evento contato da (N_t).
D10) Calcolare $P(N_{\frac{21}{2}} = 2)$.

Esercizio 6. Sia X una variabile aleatoria normale standard.
D11) Calcolare $P(|X| > 0.71)$.
Poi siano X_1 e X_2 due variabili aleatorie indipendenti con distribuzione normale standard.
D12) Calcolare $P(X_1 + X_2 > 2\sqrt{2})$.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
D1) Si ha $p_X(k) = \frac{\binom{3}{k}\binom{2}{3-k}}{\binom{5}{3}}$ per $k \in \{0,1,2,3\}$ dove $\binom{a}{b} = 0$ per $a < b$. Quindi si ha: $p_X(0) = 0$ (ovvio); $p_X(1) = \frac{3}{10}$; $p_X(2) = \frac{6}{10}$; $p_X(3) = \frac{1}{10}$.
D2) La probabilità richiesta è $P(X = 3|X \geq 2) = \frac{P(\{X=3\}\cap\{X\geq 2\})}{P(X\geq 2)} = \frac{P(X=3)}{P(X\geq 2)} = \frac{p_X(3)}{p_X(2)+p_X(3)} = \frac{1/10}{(6+1)/10} = \frac{1}{7}$.

Esercizio 2. Sia E_k l'evento "il primo numero estratto è k" per $k \in \{1,2,3,4,5\}$ e sia V l'evento "vincere il gioco".
D3) Per la formula delle probabilità totali si ha $P(V) = \sum_{k=1}^{5} P(V|E_k)P(E_k) = 0\frac{1}{5} + 0\frac{1}{5} + \frac{1}{4}\frac{1}{5} + 1\frac{1}{5} + 1\frac{1}{5} = \frac{1+4+4}{20} = \frac{9}{20}$ (si osservi che $P(V|E_3) = \frac{1}{4}$ perché è la probabilità di estrarre il numero 5 da un'urna che contiene i numeri 1,2,4,5).
D4) Per la formula di Bayes, e sfruttando alcuni valori calcolati prima, si ha $P(E_4|V) = \frac{P(V|E_4)P(E_4)}{P(V)} = \frac{1\frac{1}{5}}{\frac{9}{20}} = \frac{4}{9}$.

Esercizio 3.
D5) Si ha $\{\min\{X_1,X_2\} = 0, \max\{X_1,X_2\} = 1\} = (\{X_1 = 0\} \cap \{X_2 = 1\}) \cup (\{X_1 = 1\} \cap \{X_2 = 0\})$, dove l'unione è tra eventi disgiunti; quindi $P(\min\{X_1,X_2\} = 0, \max\{X_1,X_2\} = 1) = p_{(X_1,X_2)}(1,0) + p_{(X_1,X_2)}(0,1) = \frac{2+1}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.
D6) Si ha $p_Y(-1) = p_{(X_1,X_2)}(0,1) = \frac{1}{9}$, $p_Y(0) = p_{(X_1,X_2)}(0,0) + p_{(X_1,X_2)}(1,1) = \frac{2+4}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ e $p_Y(1) = p_{(X_1,X_2)}(1,0) = \frac{2}{9}$.

Esercizio 4.
D7) Si ha $\mathbb{E}[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 f_X(t)dt = \int_0^1 t^2 2(1-t)dt = 2\int_0^1 t^2 - t^3 dt = 2[\frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4}]_{t=0}^{t=1} = 2(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) = 2\frac{4-3}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.
D8) Per $m \in (0,1)$ si ha $P(X < m) = \int_0^m 2(1-t)dt = 2[t - \frac{t^2}{2}]_{t=0}^{t=m} = 2(m - \frac{m^2}{2}) = 2m - m^2$. Quindi si considera l'equazione $2m - m^2 = \frac{1}{2}$, da cui si ha $2m^2 - 4m + 1 = 0$, le cui soluzioni sono $m_\pm = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$. Osserviamo che $m_+ > 1$ e quindi la mediana è $m_- = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Esercizio 5.
D9) La variabile aleatoria T_1 ha distribuzione esponenziale con parametro $\lambda = 2$; quindi $P(T_1 > 15) = 1 - F_{T_1}(15) = 1 - (1 - e^{-2\cdot 15}) = e^{-30}$.
D10) Si ha $P(N_{\frac{21}{2}} = 2) = \frac{(2\cdot\frac{21}{2})^2}{2!}e^{-2\cdot\frac{21}{2}} = \frac{21^2}{2}e^{-21} = \frac{441}{2}e^{-21}$.

Esercizio 6.
D11) Si ha $P(|X| > 0.71) = P(X > 0.71) + P(X < -0.71) = 1 - \Phi(0.71) + \Phi(-0.71) = 1 - \Phi(0.71) + 1 - \Phi(0.71) = 2(1 - \Phi(0.71)) = 2(1 - 0.76115) = 2 \cdot 0.23885 = 0.4777$.
D12) La variabile aleatoria $X_1 + X_2$ ha distribuzione normale con media $0 + 0 = 0$ e varianza $1 + 1 = 2$; quindi $Z_{X_1+X_2} = \frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}}$ è la standardizzata di $X_1 + X_2$ e si ha $P(X_1 + X_2 > 2\sqrt{2}) = P(Z_{X_1+X_2} > 2) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0.97725 = 0.02275$.

Commenti.
D1) Si ha $p_X(0) + p_X(1) + p_X(2) + p_X(3) = \frac{0+3+6+1}{10} = 1$ in accordo con la teoria.
D6) Si ha $p_Y(-1) + p_Y(0) + p_Y(1) = \frac{1+6+2}{9} = 1$ in accordo con la teoria.
D8) Si verifica che $P(X < m_-) = \frac{1}{2}$ come deve essere; infatti $P(X < m_-) = 2m_- - (m_-)^2 = 2(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) - (1 - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 = 2 - \sqrt{2} - (1 + \frac{2}{4} - \sqrt{2}) = 2 - \sqrt{2} - 1 - \frac{1}{2} + \sqrt{2} = \frac{1}{2}$.