Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)
Anno Accademico: `2022-2023`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Simulazione 1

Esercizio 1. Un "gioco" consiste nel lanciare 3 volte un dado equo.
`D1)` Calcolare la probabilità che escano almeno due numeri dispari.
`D2)` Calcolare la probabilità che esca la sequenza $(1, \text{pari}, \text{dispari})$ sapendo che sono usciti esattamente due numeri dispari.
`D3)` Consideriamo una sequenza di "giochi". Calcolare la probabilità che la sequenza $(1, \text{pari}, \text{dispari})$ esca per la prima volta ad un gioco pari (il secondo, il quarto, il sesto, l'ottavo, ecc.).

Esercizio 2. Abbiamo due urne: l'urna 1 con 9 palline bianche e 1 nera, e l'urna 2 con 19 palline bianche e 1 nera. Si lancia una moneta equa: se esce testa, si sceglie l'urna 1; se esce croce si sceglie l'urna 2. Infine si estrae a caso una pallina dall'urna scelta.
`D4)` Calcolare la probabilità di estrarre una pallina bianca.

Esercizio 3. Consideriamo la seguente densità congiunta discreta:

$$p_{X_1,X_2}(0,0) = p_{X_1,X_2}(0,1) = p_{X_1,X_2}(1,0) = \frac{1}{5}; \quad p_{X_1,X_2}(1,1) = \frac{2}{5}.$$

`D5)` Trovare la retta di regressione di X_2 rispetto a X_1.
`D6)` Calcolare $P(X_1 = 1 | X_1 \neq X_2)$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con densità continua

$$f_X(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in (0,1) \\ x+1 & \text{se } x \in (-1,0) \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

`D7)` Trovare la funzione di distribuzione della variabile aleatoria $Y = |X|$.
`D8)` Verificare che $\mathbb{E}[X^{2k}] = \frac{1}{2k+1}$ per $k \geq 0$ intero.

Esercizio 5. Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.
`D9)` Sia X una variabile aleatoria Normale con media 1 e varianza 1. Dire per quale valore di $z > 1$ si ha $P(\{0 < X < 1\} | \{0 < X < z\}) = \frac{1}{2}$.
`D10)` Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. con distribuzione uniforme in $(-b, b)$ per qualche $b > 0$. Dire per quale valore di b si ha

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}} < \sqrt{3} \right) = \Phi(2).$$

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
`D1)` Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di volte che esce un numero dispari. Allora la probabilità richiesta è $P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) = \binom{3}{2}(\frac{1}{2})^3 + \binom{3}{3}(\frac{1}{2})^3 = \frac{3+1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.
`D2)` Sia E l'evento "esce la sequenza $(1, \text{pari}, \text{dispari})$". La probabilità richiesta è $P(E|X = 2) = \frac{P(E\cap\{X=2\})}{P(X=2)} = \frac{P(E)}{\binom{3}{2}(\frac{1}{2})^3} = \frac{\frac{1}{6}\frac{1}{2}\frac{1}{2}}{3/8} = \frac{1}{24}\frac{8}{3} = \frac{1}{9}$.
`D3)` La variabile aleatoria Y che conta il numero di "giochi" necessari per avere per la prima volta la sequenza $(1, \text{pari}, \text{dispari})$ ha distribuzione geometrica traslata con parametro $p = P(E) = \frac{1}{24}$. Allora la probabilità richiesta è $P(Y \in \{2, 4, 6, 8, \ldots\}) = \sum_{h\geq1}(1-p)^{2h-1}p = \frac{p}{1-p}\sum_{h\geq1}(1-p)^{2h} = \frac{p}{1-p}\frac{(1-p)^2}{1-(1-p)^2} = \frac{p(1-p)}{1-(1-2p+p^2)} = \frac{p(1-p)}{2p-p^2} = \frac{1-p}{2-p} = \frac{1-1/24}{2-1/24} = \frac{23/24}{47/24} = \frac{23}{47}$.

Esercizio 2.
`D4)` Con notazioni ovvie, usando la formula delle probabilità totali si ha

$$P(B) = P(B|T)P(T) + P(B|T^c)P(T^c) = \frac{9}{10}\frac{1}{2} + \frac{19}{20}\frac{1}{2} = \frac{9}{20} + \frac{19}{40} = \frac{18 + 19}{40} = \frac{37}{40}.$$

Esercizio 3.
`D5)` Le due variabili aleatorie X_1 e X_2 hanno entrambe distribuzione Bernoulliana (ovvio) ed entrambe con parametro $p = \frac{3}{5}$; infatti $P(X_1 = 1) = p_{X_1,X_2}(1, 0) + p_{X_1,X_2}(1, 1) = \frac{3}{5}$ e $P(X_2 = 1) = p_{X_1,X_2}(0, 1) + p_{X_1,X_2}(1, 1) = \frac{3}{5}$. Quindi $\mathbb{E}[X_1] = \mathbb{E}[X_2] = \frac{3}{5}$ e $\text{Var}[X_1] = \frac{3}{5}(1 - \frac{3}{5}) = \frac{6}{25}$. Inoltre (ci sono quattro addendi, e l'unico non nullo è quello per $(x_1, x_2) = (1, 1)$) $\mathbb{E}[X_1X_2] = \sum_{x_1,x_2=0}^{1} x_1x_2p_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = p_{X_1,X_2}(1, 1) = \frac{2}{5}$, e quindi $\text{Cov}(X_1, X_2) = \mathbb{E}[X_1X_2] - \mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[X_2] = \frac{2}{5} - \frac{3}{5}\frac{3}{5} = \frac{10-9}{25} = \frac{1}{25}$. Allora la retta di regressione richiesta è $x_2 = ax_1 + b$, dove $a = \frac{\text{Cov}(X_1,X_2)}{\text{Var}[X_1]} = \frac{1/25}{6/25} = \frac{1}{6}$ e $b = \mathbb{E}[X_2] - a\mathbb{E}[X_1] = \frac{3}{5} - \frac{1}{6}\frac{3}{5} = \frac{5}{6}\frac{3}{5} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
`D6)` Si ha $P(X_1 = 1|X_1 \neq X_2) = \frac{P(\{X_1=1\}\cap\{X_1\neq X_2\})}{P(X_1\neq X_2)} = \frac{p_{X_1,X_2}(1,0)}{p_{X_1,X_2}(1,0)+p_{X_1,X_2}(0,1)} = \frac{1/5}{(1+1)/5} = \frac{1}{2}$.

Esercizio 4.
`D7)` Si ha $P(0 \leq Y \leq 1) = 1$ e quindi $F_Y(y) = 0$ per $y \leq 0$ e $F_Y(y) = 1$ per $y \geq 1$. Per $y \in (0, 1)$ si ha $F_Y(y) = P(|X| \leq y)P(-y \leq X \leq y) = \int_{-y}^{0} x + 1dx + \int_{0}^{y} xdx = [\frac{x^2}{2} + x]_{x=-y}^{x=0} + [\frac{x^2}{2}]_{x=0}^{x=y} = 0 - (\frac{(-y)^2}{2} - y) + \frac{y^2}{2} - 0 = y$.
Osservazione. La variabile aleatoria Y ha distribuzione uniforme su $(0, 1)$.
`D8)` Si ha $\mathbb{E}[X^{2k}] = \int_{-1}^{0} x^{2k}(x + 1)dx + \int_{0}^{1} x^{2k}xdx = \int_{-1}^{0} x^{2k+1} + x^{2k}dx + \int_{0}^{1} x^{2k+1}dx = [\frac{x^{2k+2}}{2k+2} + \frac{x^{2k+1}}{2k+1}]_{x=-1}^{x=0} + [\frac{x^{2k+2}}{2k+2}]_{x=0}^{x=1} = 0 - (\frac{(-1)^{2k+2}}{2k+2} + \frac{(-1)^{2k+1}}{2k+1}) + \frac{1}{2k+2} - 0 = -\frac{1}{2k+2} - \frac{-1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} = \frac{1}{2k+1}$.
Osservazione. In accordo con la teoria si ha $\mathbb{E}[X^{2k}] \in [0, 1]$ e $\mathbb{E}[X^{2\cdot0}] = 1$.

Esercizio 5.
`D9)` Si ha $\frac{1}{2} = P(\{0 < X < 1\}|\{0 < X < z\}) = \frac{P(\{0<X<1\}\cap\{0<X<z\})}{P(0<X<z)} = \frac{P(0<X<1)}{P(0<X<z)} = \frac{P(0-1<X^*<1-1)}{P(0-1<X^*<z-1)} = \frac{\Phi(0)-\Phi(-1)}{\Phi(z-1)-\Phi(-1)} = \frac{0.5-\Phi(-1)}{\Phi(z-1)-\Phi(-1)}$, da cui segue $0.5(\Phi(z-1)-\Phi(-1)) = 0.5-\Phi(-1)$, $0.5\Phi(z-1)-0.5 = -0.5\Phi(-1)$, $1 - \Phi(z - 1) = \Phi(-1)$, $1 - \Phi(-1) = \Phi(z - 1)$, $\Phi(1) = \Phi(z - 1)$, e quindi $z = 2$.
`D10)` Si deve applicare il Teorema Limite Centrale e, per proprietà della distribuzione uniforme, si ha $\mu = \frac{-b+b}{2} = 0$ e $\sigma = \sqrt{\frac{(b-(-b))^2}{12}} = \sqrt{\frac{4b^2}{12}} = \frac{b}{\sqrt{3}}$. Quindi si ha

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}} < \sqrt{3}\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sigma\sqrt{n}} < \frac{\sqrt{3}}{\sigma}\right) = \Phi(\sqrt{3}/\sigma) = \Phi(3/b);$$

allora si deve avere $\frac{3}{b} = 2$, da cui segue $b = \frac{3}{2}$.