Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)
Anno accademico: `2011-2012`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Appello del 20 Febbraio 2012

Esercizio 1. Un'urna contiene 3 palline bianche, 2 rosse e 1 nera. Si estraggono 3 palline in blocco.
`D1`) Calcolare la probabilità di estrarre tre colori diversi.
`D2`) Calcolare la probabilità di estrarre almeno una pallina bianca.

Esercizio 2. Si consideri il seguente gioco. Si lancia una moneta equa: se esce testa, si lancia un dado equo e si vince se esce il *numero 4*; se esce croce, si lanciano due dadi equi e si vince se *la somma dei numeri usciti è 8*.
`D3`) Calcolare la probabilità di vincere il gioco.
`D4`) Calcolare la probabilità di aver ottenuto testa nel lancio di moneta sapendo di aver vinto il gioco.

Esercizio 3. Siano $\lambda > 0$ e $p \in (0,1)$. Consideriamo la seguente densità congiunta: $p_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \binom{x_2}{x_1} p^{x_1}(1-p)^{x_2-x_1}\frac{\lambda^{x_2}}{x_2!}e^{-\lambda}$ per x_1, x_2 interi e tali che $0 \leq x_1 \leq x_2$.
`D5`) Verificare che $P(X_1 = 0) = e^{-\lambda p}$.
`D6`) Verificare che $P(X_1 = X_2) = e^{-\lambda(1-p)}$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con densità continua $f(t) = \frac{e^t}{e^b - e^a}1_{(a,b)}(t)$, per $0 < a < b$.
`D7`) Trovare la densità continua di $Y = X^2$.
`D8`) Calcolare $\mathbb{E}[e^{-X}]$.

Esercizio 5. Sia $N_t = \sum_{n\geq 1} 1_{T_n \leq t}$ (per $t \geq 0$) un processo di Poisson con intensità di $\lambda = 1$.
`D9`) Calcolare $P(N_1 = k|N_1 \leq 2)$ per $k \in \{0,1,2\}$.
`D10`) Calcolare $\mathbb{E}[T_4]$.

Esercizio 6. Sia X una variabile aleatoria normale con media $\mu = 10$ e varianza $\sigma^2 = 4$.
`D11`) Calcolare $P(8 < X < 12)$.
`D12`) Dire qual è la distribuzione di $4X_1 - 3X_2$, dove X_1 e X_2 sono indipendenti e con la stessa distribuzione di X.

Esercizio 7 (*solo per ST-Materiali*). Consideriamo una catena di Markov omogenea $\{X_n : n \geq 0\}$ con spazio degli stati $E = \{1,2\}$ e matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Inoltre consideriamo la distribuzione iniziale $(P(X_0 = 1), P(X_0 = 2)) = (\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$.
`D13`) Trovare la densità discreta di X_1; in altri termini calcolare $(P(X_1 = 1), P(X_1 = 2))$.
`D14`) Calcolare $P(\cap_{j=1}^n \{X_j = 1\})$ per ogni $n \geq 1$. *Suggerimento*: si osservi che, per ogni $n \geq 1$, si ha $P(\cap_{j=1}^n \{X_j = 1\}) = P(\cap_{j=1}^n \{X_j = 1\}|X_0 = 1)P(X_0 = 1) + P(\cap_{j=1}^n \{X_j = 1\}|X_0 = 2)P(X_0 = 2)$ e continuare i calcoli.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
`D1`) La probabilità richiesta è $\frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{1}{1}}{\binom{6}{3}} = \frac{3\cdot 2\cdot 1}{20} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$.
`D2`) La variabile aleatoria X che conta il numero di palline bianche estratte ha distribuzione ipergeometrica. Precisamente si ha $p_X(k) = \frac{\binom{3}{k}\binom{3}{3-k}}{\binom{6}{3}}$ per $k \in \{0,1,2,3\}$. La probabilità richiesta è $P(X \geq 1) = \sum_{k=1}^{3} p_X(k) = \frac{9+9+1}{20} = \frac{19}{20}$.

Esercizio 2. Sia V l'evento "vincere il gioco" e sia T l'evento "esce testa".
`D3`) Per la formula delle probabilità totali si ha $P(V) = P(V|T)P(T) + P(V|T^c)P(T^c) = \frac{1}{6}\frac{1}{2} + \frac{5}{36}\frac{1}{2} = \frac{1}{12} + \frac{5}{72} = \frac{6+5}{72} = \frac{11}{72}$.
`D4`) Per la formula di Bayes (e per il valore di $P(V)$ calcolato prima) si ha $P(T|V) = \frac{P(V|T)P(T)}{P(V)} = \frac{\frac{1}{6}\frac{1}{2}}{\frac{11}{72}} = \frac{1}{12}\frac{72}{11} = \frac{6}{11}$.

Esercizio 3.
`D5`) Si ha $P(X_1 = 0) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{X_1,X_2}(0,k) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k}{0} p^0 (1-p)^{k-0} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda(1-p))^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda(1-p)} = e^{-\lambda p}$.
`D6`) Si ha $P(X_1 = X_2) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{X_1,X_2}(k,k) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k}{k} p^k (1-p)^{k-k} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda p)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda p} = e^{-\lambda(1-p)}$.

Esercizio 4.
`D7`) Si vede che $P(a^2 \leq X^2 \leq b^2) = 1$, da cui $F_Y(y) = 0$ per $y \leq a^2$ e $F_Y(y) = 1$ per $y \geq b^2$. Per $y \in (a^2, b^2)$ si ha $F_Y(y) = P(X^2 \leq y) = P(X \leq \sqrt{y}) = \int_a^{\sqrt{y}} \frac{e^t}{e^b - e^a} dt = \frac{[e^t]_{t=a}^{t=\sqrt{y}}}{e^b - e^a} = \frac{e^{\sqrt{y}} - e^a}{e^b - e^a}$. Quindi la densità è $f_Y(y) = \frac{e^{\sqrt{y}}}{2\sqrt{y}(e^b - e^a)} 1_{(a^2,b^2)}(y)$.
`D8`) Si ha $\mathbb{E}[e^{-X}] = \int_a^b e^{-t} \frac{e^t}{e^b - e^a} dt = \int_a^b \frac{1}{e^b - e^a} dt = \frac{b-a}{e^b - e^a}$.

Esercizio 5.
`D9`) Per $k \in \{0,1,2\}$ si ha $P(N_1 = k | N_1 \leq 2) = \frac{P(\{N_1 = k\} \cap \{N_1 \leq 2\})}{P(N_1 \leq 2)} = \frac{P(N_1 = k)}{\sum_{j=0}^{2} P(N_1 = j)} = \frac{\frac{(1\cdot 1)^k}{k!} e^{-1\cdot 1}}{\sum_{j=0}^{2} \frac{(1\cdot 1)^j}{j!} e^{-1\cdot 1}}$; quindi si ha $P(N_1 = 0 | N_1 \leq 2) = \frac{2}{5}$, $P(N_1 = 1 | N_1 \leq 2) = \frac{2}{5}$ e $P(N_1 = 2 | N_1 \leq 2) = \frac{1}{5}$.
`D10`) Si ha $\mathbb{E}[T_4] = \frac{4}{1} = 4$.

Esercizio 6.
`D11`) Si ha $P(8 < X < 12) = P(\frac{8-10}{\sqrt{4}} < \frac{X-10}{\sqrt{4}} < \frac{12-10}{\sqrt{4}}) = P(-1 < Z_X < 1) = \Phi(1) - \Phi(-1) = \Phi(1) - (1 - \Phi(1)) = 2\Phi(1) - 1 = 2 \cdot 0.84134 - 1 = 0.68268$.
`D12`) Poiché in generale la combinazione lineare di variabili aleatorie Normali indipendenti ha distribuzione Normale, possiamo dire che $4X_1 - 3X_2$ ha distribuzione Normale di media $4 \cdot 10 - 3 \cdot 10 = 10$ e varianza $4^2 \cdot 4 + (-3)^2 \cdot 4 = (16+9)4 = 25 \cdot 4 = 100$.

Esercizio 7.
`D13`) Si ha

$$(P(X_1 = 1), P(X_1 = 2)) = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right) \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

da cui si ottiene

$$(P(X_1 = 1), P(X_1 = 2)) = \left(\frac{3}{4}\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{3+3}{16}, \frac{9+1}{16}\right) = \left(\frac{6}{16}, \frac{10}{16}\right) = \left(\frac{3}{8}, \frac{5}{8}\right).$$

`D14`) Per ogni $n \geq 1$ si ha $P(\cap_{j=1}^n \{X_j = 1\}) = P(\cap_{j=1}^n \{X_j = 1\} | X_0 = 1) P(X_0 = 1) + P(\cap_{j=1}^n \{X_j = 1\} | X_0 = 2) P(X_0 = 2) = (\frac{1}{4})^n \frac{3}{4} + (\frac{3}{4}(\frac{1}{4})^{n-1}) \frac{1}{4} = 2\frac{3}{4}(\frac{1}{4})^n = \frac{3}{2}(\frac{1}{4})^n$.

Commenti.
La somma dei valori di ciascuna densità discreta che appare è 1 in accordo con la teoria.
`D2`) In altro modo si ha $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{1}{20} = \frac{20-1}{20} = \frac{19}{20}$.
`D5`) Possiamo dire che X_1 e X_2 hanno distribuzioni marginali di Poisson con parametri λp e λ rispettivamente. Infatti si ha: per ogni $h \geq 0$ intero, $p_{X_1}(h) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{X_1,X_2}(h,k) = \sum_{k=h}^{\infty} \binom{k}{h} p^h (1-p)^{k-h} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^h}{h!} \sum_{k=h}^{\infty} \frac{(\lambda(1-p))^{k-h}}{(k-h)!} = e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^h}{h!} e^{\lambda(1-p)} = \frac{(\lambda p)^h}{h!} e^{-\lambda p}$ (e si recupera il risultato che abbiamo trovato ponendo $h = 0$); per ogni $k \geq 0$ intero, $p_{X_2}(k) = \sum_{h=0}^{\infty} p_{X_1,X_2}(h,k) = \sum_{h=0}^{k} \binom{k}{h} p^h (1-p)^{k-h} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \sum_{h=0}^{k} \binom{k}{h} p^h (1-p)^{k-h}$ e, usando la formula del binomio di Newton, si ottiene $p_{X_2}(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} (p + (1-p))^k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$.
`D13`) Si verifica che la distribuzione stazionaria è $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. La distribuzione iniziale assegna maggiore probabilità allo stato 1, mentre la densità di X_1 ottenuta assegna maggiore probabilità allo stato 2 ed è "più vicina" alla distribuzione stazionaria.