

Cognome:..... Nome:..... Matr.:.....

### Esercizio 1 [16 punti]

A: *notazione asintotica*. Dire quali delle seguenti relazioni asintotiche sono vere:

$$\begin{aligned} n^{1/5} \log n + \sqrt{\log n} &= o(n^{1/4}); & \frac{n}{\log n} &= \omega\left(\frac{n+3}{\log^3 n}\right); & \frac{n^3 + \log n}{\sqrt{n}} &= \Theta(n^{2.5}); & \log \log n &= o(\sqrt[4]{\log n}); \\ 2^{\sqrt{\log n}} &= o(n^{1/3}); & 2^n &= \Theta(2^{n+\log n}); & 2^{n+2} &= \Theta(2^{n/2}); & 2^{2n} &= \Theta(4^n + n^2); \end{aligned}$$

B: *equazioni di ricorrenza*. Fornire la soluzione asintotica alle seguenti relazioni di ricorrenza:

$$T(n) = 2T(n/4) + \sqrt{n}; \quad \text{Soluzione:}$$

$$T(n) = T(n-1) + \sqrt{n}; \quad \text{Soluzione:}$$

C: *algoritmi e complessità*. Quale algoritmo useresti e quanto costa se devi:

- In un grafo diretto rappresentato con *matrice di adiacenza*, calcolare i nodi raggiungibili da un nodo specifico  $s$ :
- In un grafo non orientato e pesato, individuare il nodo a distanza massima da un nodo  $v$ :
- In un albero AVL di  $n$  nodi, trovare il secondo minimo:
- In un vettore ordinato, calcolare il numero di nodi di valore minimo:

### Esercizio 2 [8 punti]

Sia  $T$  un albero binario con  $n$ , dove ogni nodo  $v$  di  $T$  ha un colore  $v.col$  che può essere *Blu* ( $B$ ) o *Giallo* ( $G$ ), e quindi  $v.col \in \{B, G\}$ . Diciamo che un nodo  $v$  ha *antenati ben colorati* se il cammino dalla radice al nodo  $v$  è composto da una sequenza (potenzialmente vuota) di nodi di colore Blu seguita da una sequenza (potenzialmente vuota) di nodi di colore Giallo.<sup>1</sup>

Si progetti un algoritmo che dato  $T$ , restituisca il numero di nodi di  $T$  che hanno antenati ben colorati. Si assuma che  $T$  è rappresentato tramite una struttura dati collegata, con record e puntatori, dove il record di ogni nodo, oltre al campo  $v.col$ , contiene anche il puntatore al figlio sinistro e al figlio destro del nodo. L'algoritmo deve avere complessità  $O(n)$ . Si fornisca lo pseudocodice dettagliato.

### Esercizio 3 [8 punti]

Sia  $G = (V, E)$  un grafo diretto con  $n$  nodi ed  $m$  archi. Ci sono Alice e Bob che vogliono incontrarsi in un nodo di  $G$ . Inizialmente, Alice si trova sul nodo  $s_A$  ed ha a disposizione  $\Delta_A$  monete di tipo A, mentre Bob si trova sul nodo  $s_B$  ed ha a disposizione  $\Delta_B$  monete di tipo B. Ad ogni arco  $e \in E$ , sono associati due interi,  $c_e^A$  e  $c_e^B$ , che rappresentano rispettivamente il numero di monete di tipo A che Alice deve pagare per attraversare  $e$ , e il numero di monete di tipo B che Bob deve pagare per poter attraversare  $e$ .

Progettate un algoritmo di complessità  $O(m + n \log n)$  che calcola, se esiste, un modo per far incontrare Alice e Bob.

---

<sup>1</sup>Quindi un nodo  $v$  che ha tutti gli antenati di colore Giallo o tutti gli antenati di colore Blu ha antenati ben colorati. Si ricorda inoltre che un nodo è per definizione antenato di se stesso.