Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità (ed insegnamenti mutuati)
Anno accademico: `2015-2016`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Appello del 9 Settembre 2016

Esercizio 1.
Si lancia 7 volte una moneta.
`D1`) Supponiamo che la moneta sia equa. Calcolare la probabilità che esca testa almeno 2 volte.
`D2`) Indichiamo con $p \in (0,1)$ la probabilità che esca testa ad ogni lancio. Calcolare la probabilità di ottenere la sequenza (C,C,C,C,T,C,C) sapendo che è uscita testa solo una volta nei 7 lanci; si verifichi che tale probabilità condizionata non dipende da p.

Esercizio 2. Un'urna ha 3 palline con i numeri 1, 2 e 3. Si estrae una pallina a caso e sia X la variabile aleatoria che indica il numero estratto. Poi si lancia X volte una moneta equa.
`D3`) Calcolare la probabilità di ottenere tutte croci nei lanci di moneta effettuati.
`D4`) Calcolare la probabilità di aver estratto la pallina con il numero k (per $k \in \{1,2,3\}$) sapendo di aver ottenuto tutte croci nei lanci di moneta effettuati.

Esercizio 3. Siano $p_1, p_2, p_3 > 0$ e tali che $p_1 + p_2 + p_3 = 1$. Consideriamo la seguente densità congiunta: $p_{X_1,X_2}(i, x_2) = p_i \cdot (1/2)^{x_2}$ per $i \in \{1,2,3\}$ e $x_2 \geq 1$ intero.
`D5`) Calcolare $P(X_1 = X_2)$.
`D6`) Calcolare $P(\{X_1 = 2\} \cap (\cup_{k\geq 0}\{X_2 = 2k+1\}))$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con distribuzione uniforme su $(e, e^{7/2})$.
`D7`) Trovare la densità continua di $Y = \log X$.
`D8`) Calcolare $P([Y] = 3)$, dove $[y] := \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$ è la *parte intera* di y.

Esercizio 5.
`D9`) Sia $N_t = \sum_{n\geq 1} 1_{T_n \leq t}$ (per $t \geq 0$) un processo di Poisson con intensità $\lambda = 3$. Calcolare $\mathbb{E}[T_{15}]$.
`D10`) Sia X una variabile aleatoria con distribuzione Normale standard. Calcolare $P(\{X \leq 1\} \cup \{X \geq 2\})$.

Esercizio 6. Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. (indipendenti e identicamente distribuite).
`D11`) Dire per quale valore di m si ha

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - m\right| > \varepsilon\right) = 0 \text{ per ogni } \varepsilon > 0,$$

nel caso in cui le variabili aleatorie $\{X_n : n \geq 1\}$ abbiano densità continua $f_X(x) = 2e^{-2x}1_{(0,\infty)}(x)$.
`D12`) Dire per quale valore di y si ha $\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1+\cdots+X_n - n/4}{\sqrt{n}} \leq y\right) = \Phi(3/2)$ nel caso in cui le variabili aleatorie $\{X_n : n \geq 1\}$ abbiano densità continua $f_X(x) = 4e^{-4x}1_{(0,\infty)}(x)$.

Esercizio 7 (*solo per Lauree Magistrali*). Consideriamo una catena di Markov omogenea $\{X_n : n \geq 0\}$ con spazio degli stati $E = \{1,2,3\}$ e matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} a & 1-a & 0 \\ 0 & b & 1-b \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

per $a, b \in (0,1)$.
`D13`) Trovare la/e distribuzione/i stazionaria/e.
`D14`) Sia $P(X_0 = 1) = P(X_0 = 2) = 1/2$. Dire per quali valori di a e b si ha $P(X_1 = 1) = 1/4$, $P(X_1 = 2) = 1/2$ e $P(X_1 = 3) = 1/4$.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
Sia X la variabile aleatoria che conta quante volte esce testa nei 7 lanci di moneta.
`D1`) La probabilità richiesta è $P(X \geq 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] = 1 - [\binom{7}{0}(1/2)^7 + \binom{7}{1}(1/2)^7] = 1 - \frac{1+7}{128} = \frac{120}{128} = \frac{15}{16}$.
`D2`) Sia E l'evento che indica che è uscita la sequenza (C, C, C, C, T, C, C). Allora la probabilità richiesta è $P(E|X = 1) = \frac{P(E\cap\{X=1\})}{P(X=1)} = \frac{P(E)}{P(X=1)} = \frac{p(1-p)^6}{\binom{7}{1}p(1-p)^{7-1}} = \frac{1}{7}$. In effetti il risultato ottenuto non dipende da p.

Esercizio 2. Sia Y la variabile aleatoria che indica il numero di teste ottenute nei lanci di moneta effettuati.
`D3`) Per la formula delle probabilità totali si ha $P(Y = 0) = \sum_{k=1}^{3} P(Y = 0|X = k)P(X = k) = \sum_{k=1}^{3}\binom{k}{0}(1/2)^k \cdot 1/3 = (1/2 + 1/4 + 1/8) \cdot 1/3 = 7/8 \cdot 1/3 = 7/24$.
`D4`) Per la formula di Bayes, e tenendo conto di alcuni valori calcolati prima, si ha $P(X = k|Y = 0) = \frac{P(Y=0|X=k)P(X=k)}{P(Y=0)} = \frac{\binom{k}{0}(1/2)^k \cdot 1/3}{7/24} = \binom{k}{0}(1/2)^k \cdot 8/7$ da cui segue $P(X = 1|Y = 0) = 4/7$, $P(X = 2|Y = 0) = 2/7$ e $P(X = 2|Y = 0) = 1/7$.

Esercizio 3.
`D5`) Si ha $P(X_1 = X_2) = p_{X_1,X_2}(1, 1) + p_{X_1,X_2}(2, 2) + p_{X_1,X_2}(3, 3) = p_1/2 + p_2/4 + p_3/8$.
`D6`) Si ha $P(\{X_1 = 2\}\cap(\cup_{k\geq 0}\{X_2 = 2k+1\})) = \sum_{k\geq 0} p_{X_1,X_2}(2, 2k+1) = \sum_{k\geq 0} p_2(1/2)^{2k+1} = \frac{p_2}{2}\sum_{k\geq 0}(1/4)^k = \frac{p_2}{2} \cdot \frac{1}{1-1/4} = \frac{2}{3}p_2$.

Esercizio 4.
`D7`) Si vede che $P(1 \leq Y \leq 7/2) = 1$ e quindi $F_Y(y) = 0$ per $y \leq 1$ e $F_Y(y) = 1$ per $y \geq 7/2$. Per $y \in (1, 7/2)$ si ha $F_Y(y) = P(\log X \leq y) = P(X \leq e^y) = \int_e^{e^y} \frac{1}{e^{7/2}-e}dx = [\frac{x}{e^{7/2}-e}]_{x=e}^{x=e^y} = \frac{e^y-e}{e^{7/2}-e}$. Quindi la densità continua di Y è $f_Y(y) = \frac{e^y}{e^{7/2}-e}1_{(1,7/2)}(y)$.
`D8`) Si ha $P([Y] = 3) = P(3 \leq Y < 4) = F_Y(4) - F_Y(3) = 1 - \frac{e^3-e}{e^{7/2}-e} = \frac{e^{7/2}-e^3}{e^{7/2}-e}$.

Esercizio 5.
`D9`) Si ha $\mathbb{E}[T_{15}] = 15/3 = 5$.
`D10`) Si ha $P(\{X \leq 1\} \cup \{X \geq 2\}) = P(X \leq 1) + P(X \geq 2) = \Phi(1) + (1 - \Phi(2)) = 0.84134 + 1 - 0.97725 = 0.86409$.

Esercizio 6.
Le variabili aleatorie hanno distribuzione esponenziale di parametro λ, con diversi valori di λ per le due domande. Quindi faremo riferimento alle formule per tale distribuzione.
`D11`) Le variabili aleatorie $\{X_n : n \geq 1\}$ hanno distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 2$. Quindi, per la legge dei grandi numeri, il valore di m richiesto è $m = 1/\lambda = 1/2$.
`D12`) Le variabili aleatorie $\{X_n : n \geq 1\}$ hanno distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 4$, e quindi hanno media $1/\lambda = 1/4$ e varianza $1/\lambda^2 = 1/16$. Allora, se indichiamo con Z_n la standardizzata di $X_1 + \cdots + X_n$, si ha $\{\frac{X_1+\cdots+X_n-n/4}{\sqrt{n}} \leq y\} = \{Z_n < y/\sqrt{1/16}\}$ e, per il teorema limite centrale, il limite di tale probabilità (per $n \to \infty$) è $\Phi(y/\sqrt{1/16}) = \Phi(4y)$. Quindi il valore di y richiesto soddisfa la condizione $4y = 3/2$ da cui segue $y = 3/8$.

Esercizio 7.
`D13`) Se (π_1, π_2, π_3) è una distribuzione stazionaria, allora si ha

$$(\pi_1, \pi_2, \pi_3)\begin{pmatrix} a & 1-a & 0 \\ 0 & b & 1-b \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3),$$

da cui seguono le equazioni

$$\begin{cases} a\pi_1 + \pi_3 = \pi_1 \\ (1-a)\pi_1 + b\pi_2 = \pi_2 \\ \pi_2(1-b) = \pi_3, \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{cases} \pi_1 = \pi_3/(1-a) \\ (1-a)\pi_1 + b\pi_2 = \pi_2 \\ \pi_2 = \pi_3/(1-b). \end{cases}$$

Allora, poiché $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$, trascurando la seconda equazione si ha

$$\left(\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + 1\right)\pi_3 = 1$$

e quindi

$$\frac{1-b+1-a+(1-a)(1-b)}{(1-a)(1-b)} \cdot \pi_3 = 1, \;\; \pi_3 = \frac{(1-a)(1-b)}{1-b+1-a+(1-a)(1-b)}.$$

In conclusione l'unica distribuzione stazionaria è

$$(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = \left(\frac{1-b}{1-b+1-a+(1-a)(1-b)}, \frac{1-a}{1-b+1-a+(1-a)(1-b)}, \frac{(1-a)(1-b)}{1-b+1-a+(1-a)(1-b)}\right)$$

e si verifica che questi valori soddisfano anche la seconda equazione.

`D14`) Si deve avere

$$(1/2, 1/2, 0)\begin{pmatrix} a & 1-a & 0 \\ 0 & b & 1-b \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (1/4, 1/2, 1/4),$$

da cui seguono le equazioni

$$\begin{cases} a/2 = 1/4 \\ (1-a)/2 + b/2 = 1/2 \\ (1-b)/2 = 1/4. \end{cases}$$

Dalla prima e dalla terza equazione si hanno rispettivamente $a = 1/2$ e $b = 1/2$. Tali valori soddisfano anche la seconda equazione.

Commenti.

La somma dei valori di ciascuna densità discreta che appare è 1 in accordo con la teoria.

`D1`) In altro modo si avrebbe $P(X \geq 2) = \sum_{k=2}^{7} P(X = k) = \sum_{k=2}^{7} \binom{7}{k}(1/2)^7 = \frac{21+35+35+21+7+1}{128} = \frac{120}{128} = \frac{15}{16}$.

`D2`) Si avrebbe lo stesso risultato se si considerasse una qualsiasi altra sequenza fissata con 6 croci e 1 testa al posto di (C, C, C, C, T, C, C). Del resto tutte queste sequenze hanno probabilità $p(1-p)^6$; quindi nel calcolo della probabilità condizionata il numeratore resterebbe lo stesso.

`D4`) Si ha $\sum_{k=1}^{3} P(X = k|Y = 0) = 1$ in accordo con la teoria.

`D8`) In altro modo si ha $P([Y] = 3) = P(3 \leq Y < 4) = \int_3^4 f_Y(y)dy = \int_3^{7/2} \frac{e^y}{e^{7/2}-e}dy = \frac{[e^y]_{y=3}^{y=7/2}}{e^{7/2}-e} = \frac{e^{7/2}-e^3}{e^{7/2}-e}$.