Soluzioni

1) (i) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x^2} = 0$

Dobbiamo verificare che

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists R > 0 : \forall x > R \quad \left|\frac{2}{x^2}\right| < \varepsilon$

Preso allora $\varepsilon > 0$ troviamo R

$$\Rightarrow \left|\frac{2}{x^2}\right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{2}{x^2} < \varepsilon \Rightarrow x^2 > \frac{2}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow x < -\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} \quad e \quad x > \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}$$

Siamo interessati ad un valore R tale per cui se $x > R \Rightarrow \left|\frac{2}{x^2}\right| < \varepsilon$

Basta prendere allora $R := \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}$ (o volendo anche qualsiasi altro valore più grande di $\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}$)

(ii) $\lim_{x\to 8} (\sqrt[3]{x} - 2) = 0$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : |x-8| < \delta \Rightarrow |\sqrt[3]{x} - 2| < \varepsilon$

Sia $\varepsilon > 0$ cerchiamo δ

$$|\sqrt[3]{x} - 2| < \varepsilon \Rightarrow 2 - \varepsilon < \sqrt[3]{x} < 2 + \varepsilon$$

$$(2-\varepsilon)^3 < x < (2+\varepsilon)^3$$

$$8 - \varepsilon^3 - 12\varepsilon + 6\varepsilon^2 < x < 8 + \varepsilon^3 + 12\varepsilon + 6\varepsilon^2$$

$$8 - (\varepsilon^3 - 6\varepsilon^2 + 12\varepsilon) < x < 8 + (\varepsilon^3 + 6\varepsilon^2 + 12\varepsilon)$$

Basta scegliere allora $\delta := \min\{\varepsilon^2 - 6\varepsilon^2 + 12\varepsilon, \varepsilon^3 + 6\varepsilon^2 + 12\varepsilon\}$

(iii) $\lim_{x\to+\infty} x^3+3=+\infty$

Dobbiamo verificare che

$\forall M>0\ \exists R_M>0$ t.c. $x>R_M \Rightarrow x^3+3>M$

$\Rightarrow$ fissato $M>0$ abbiamo che

$$x^3+3>M \Rightarrow x^3>M-3$$
$$x>\sqrt[3]{M-3}$$

Scegliamo allora $R_M:=\sqrt[3]{M-3}$

(iv) $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x}=-\infty$

$\forall M<0\ \exists \delta_M>0$ t.c. $-\delta_M<x<0 \Rightarrow \frac{1}{x}<M$

$$\frac{1}{x}<M \rightarrow x>\frac{1}{M}$$

Allora ci prendiamo $\delta_M:=-\frac{1}{M}$ (perché M é negativo)

(v) $\lim_{x\to 0} e^{-x}=1$

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0$ t.c. $|x|<\delta \Rightarrow |e^{-x}-1|<\varepsilon$

Scegliamo $\varepsilon>0$

Dobbiamo trovare $\delta>0$ t.c. se $-\delta<x<\delta$

$$\Rightarrow 1-\varepsilon<e^{-x}<1+\varepsilon$$
$$\log(1-\varepsilon)<-x<\log(1+\varepsilon)$$
$$-\log(1+\varepsilon)<x<-\log(1-\varepsilon)$$

$$\log\left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right) < x < \log\left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right)$$

Scelto allora $\delta := \min\left\{ \left|\log\left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right)\right|, \left|\log\left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right)\right| \right\}$
abbiamo fatto.

(vi) $\lim_{x\to-\infty} x^2 - 1 = +\infty$

Dobbiamo verificare che

$\forall M>0 \ \exists R<0$ t.c. $\forall x<R \Rightarrow x^2-1>M$

Sia $M>0$

$\Rightarrow x^2-1>M \qquad x^2>M+1$

$\rightarrow x<-\sqrt{M+1} \ \cup \ x>\sqrt{M+1}$

Dunque scegliamo come $R := -\sqrt{M+1}$

2) (i) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{e^x-1} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}\left(1-\frac{1}{e^x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{e^x}} = 1$$

(ii) $\lim_{x\to+\infty} e^{\sqrt{\frac{4x+1}{x-3}}}$

$$= \lim_{x\to+\infty} e^{\sqrt{\frac{4\cancel{x}(1+1/4x)}{\cancel{x}(1-3/x)}}} = \lim_{x\to+\infty} e^{2\sqrt{\frac{1+\frac{1}{4x}}{1-3/x}}} = e^2$$

(iii) $\lim_{x\to-2} \dfrac{x^3+8}{x^2-4} = \left[\dfrac{0}{0}\right]$

$$= \lim_{x\to-2} \frac{\cancel{(x+2)}(x^2-2x+4)}{\cancel{(x+2)}(x-2)} = \frac{4+4+4}{-4} = -3$$

(iv) $\lim_{x\to0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = \left[\dfrac{0}{0}\right]$

$$= \lim_{x\to0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} \cdot \frac{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{(1+x)-(1-x)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \lim_{x\to0} \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{2}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = 1$$

(v) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3-\sqrt{5x-1}}{x^2-4} = \left[\dfrac{0}{0}\right]$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(3-\sqrt{5x-1})}{x^2-4}\frac{(3+\sqrt{5x-1})}{(3+\sqrt{5x-1})}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{9-(5x-1)}{(x+2)(x-2)(3+\sqrt{5x-1})}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{-5\cancel{(x-2)}}{(x+2)\cancel{(x-2)}(3+\sqrt{5x-1})} = \frac{-5}{4(6)} = -\frac{5}{24}$$

(vi) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|2x-1|-|2x+1|}{x} = \left[\dfrac{0}{0}\right]$

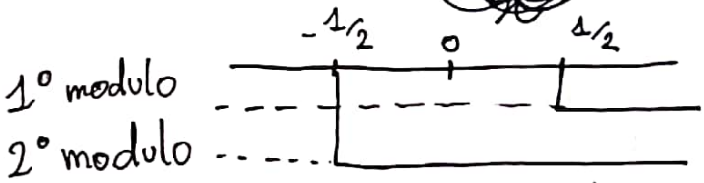
Studio moduli

$|2x-1| \rightarrow 2x-1>0$

$x > \dfrac{1}{2}$

$|2x+1| \rightarrow 2x+1>0$

$x > -\dfrac{1}{2}$



Dunque siccome stiamo andando a fare un limite in 0, al primo modulo dobbiamo cambiare il segno, mentre al secondo lasciamo il segno invariato.

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{1-2x-(2x+1)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-4x}{x} = -4$$

(vii) $\lim_{x \to +\infty} \frac{|2x-1| - |2x+1|}{x} = \left[\frac{+\infty - \infty}{\infty} \right]$

Vale lo studio del modulo fatto prima, però ora lasciamo per entrambi i moduli i segni invariati

$$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{2x} - 1 - \cancel{2x} - 1}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-2}{x} = 0$$

(viii) $\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x}$

Teorema dei carabinieri $\Rightarrow$

$$\lim_{x \to 0} -x \leq \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} \leq \lim_{x \to 0} x$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$0 \qquad\qquad\qquad\qquad 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

(ix) $\lim_{x \to +\infty} x + \sin x$

Ancora thm dei carabinieri

$$\underbrace{\lim_{x \to +\infty} x \mp 1}_{= +\infty} \leq \lim_{x \to +\infty} x + \sin x \leq \underbrace{\lim_{x \to +\infty} x + 1}_{= +\infty}$$

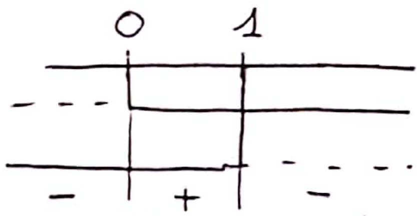
$$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} x + \sin x = +\infty$$

(x) $$\lim_{x \to \frac{1}{2}^+} \frac{2x-1}{\sqrt{1 - \left|\frac{1-x}{x}\right|}}$$

Studiamoci il modulo

$$\frac{1-x}{x} > 0 \Rightarrow \begin{array}{l} 1-x > 0 \Rightarrow x < 1 \\ x > 0 \end{array}$$

$\Rightarrow$



Siccome stiamo facendo il limite in $\frac{1}{2}$ il segno del modulo rimane invariato perché tra 0 e 1 $\frac{1-x}{x}$ è positivo

$$\Rightarrow \lim_{x \to \frac{1}{2}^+} \frac{2x-1}{\sqrt{1 - \frac{1-x}{x}}} = \lim_{x \to \frac{1}{2}^+} \frac{2x-1}{\sqrt{\frac{2x-1}{x}}}$$

$$= \lim_{x \to \frac{1}{2}^+} 2x-1 \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2x-1}} = \lim_{x \to \frac{1}{2}^+} \sqrt{2x-1} \cdot \sqrt{x}$$

$$= 0$$

3) (i) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]^\infty$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1+2}{x-1}\right)^x = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x-1}+\frac{2}{x-1}\right)^x$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^x \qquad \boxed{x-1=t}$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{2}{t}\right)^{t+1}$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\underbrace{\left(1+\frac{2}{t}\right)^t}_{\downarrow\, e^2}\cdot\underbrace{\left(1+\frac{2}{t}\right)}_{\downarrow\, 1} = e^2$$

Qui ho usato il limite notevole

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{n}{x}\right)^x = e^n$$

(ii) $\lim_{x \to 1} (x)^{\frac{1}{x^2-1}} = [1^\infty]$

$$= \lim_{x \to 1} e^{\log x^{\frac{1}{x^2-1}}} = \lim_{x \to 1} e^{\frac{\log x}{x^2-1}}$$

$$\boxed{x - 1 = t}$$

limite notevole logaritmo

$$\Rightarrow \lim_{t \to 0} e^{\frac{\log(1+t)}{t(t+2)}} = \lim_{t \to 0} e^{\frac{\log(1+t)}{t} \cdot \frac{1}{t+2}}$$

$$\frac{\log(1+t)}{t} \to 1 \qquad \frac{1}{t+2} \to 1/2$$

$$= e^{1/2}$$

(iii) $\lim_{x \to 0^+} x^x = [0^0]$

$$= \lim_{x \to 0^+} e^{\log x^x} = \lim_{x \to 0^+} e^{x \log x}$$

$$\boxed{x = \frac{1}{t}}$$

$$= \lim_{t \to +\infty} e^{\frac{1}{t} \log \frac{1}{t}} = \lim_{t \to +\infty} e^{-\frac{\log t}{t}} = 1$$

$$\frac{\log t}{t} \to 0$$

Perché $\lim_{t \to +\infty} \frac{\log t}{t} = 0$

(iv) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{3x} = \frac{1}{3}$

Qui si puó concludere col limite noterde $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$. Altrimenti porché $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{3x} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\downarrow\, 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{3\cos x}}_{\downarrow\, 1/3} = \frac{1}{3}$$

(v) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(\log(1+x))}{x}$

$$= \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\operatorname{tg}(\log(1+x))}{\log(1+x)}}_{\downarrow\, 1} \cdot \underbrace{\frac{\log(1+x)}{x}}_{\downarrow\, 1} = 1$$

Qui abbiamo usato il limite noterole del logaritmo e della tangente. Se puō aiutare si puō porre $\log(1+x) = t$

(vi) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(1-\cos 5x)}{x}$

$$= \lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{\sin(1-\cos 5x)}{(1-\cos 5x)}}_{\downarrow \, 1} \cdot \underbrace{\frac{1-\cos 5x}{5x}}_{\downarrow \, 1/2} \cdot 5$$

$= 5/2$

Qui abbiamo usato il limite notevole del seno e del coseno.