Laurea in Informatica – Laurea in Ingegneria Civile – Laurea in Ingegneria Energetica

Calcolo Numerico

Esame del 17/01/2022

Esercizio 1. Sia $f(x) = 3\sqrt{|\sin(\pi x)|}$.

(a) Scrivere in forma canonica, in forma di Lagrange e in forma di Newton il polinomio d'interpolazione $p(x)$ di $f(x)$ sui nodi $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$.

(b) Supponiamo di aggiungere il nodo $x_3 = \frac{3}{2}$. Scrivere nella forma che si ritiene più opportuna il polinomio d'interpolazione $q(x)$ di $f(x)$ sui nodi x_0, x_1, x_2, x_3.

(c) Sia

$$I = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} f(x)\mathrm{d}x.$$

Osserviamo che $\sin(\pi x) > 0$ per ogni $x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$. Fissato $\varepsilon > 0$, determinare un n tale che la formula dei trapezi I_n fornisca un'approssimazione di I con errore $|I - I_n| \leq \varepsilon$.

(d) Calcolare un'approssimazione di I con errore ≤ 0.05.

Soluzione.

(a) Iniziamo dalla forma di Lagrange di $p(x)$. Notiamo che

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 3\sqrt{|\sin 0|} = 0, \\ f(x_1) &= 3\sqrt{|\sin(\tfrac{\pi}{2})|} = 3, \\ f(x_2) &= 3\sqrt{|\sin \pi|} = 0. \end{aligned}$$

Dunque la forma di Lagrange di $p(x)$ è data da

$$\begin{aligned} p(x) &= f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \\ &= 3\frac{(x-0)(x-1)}{(\frac{1}{2}-0)(\frac{1}{2}-1)} = 3\frac{x(x-1)}{-\frac{1}{4}}. \end{aligned}$$

Sviluppando i calcoli a partire dalla forma di Lagrange, portiamo il polinomio in forma canonica:

$$p(x) = 3\frac{x(x-1)}{-\frac{1}{4}} = -12x(x-1) = -12x^2 + 12x. \tag{1}$$

Per determinare la forma di Newton di $p(x)$, calcoliamo le differenze divise della Tabella 1. Si ha

$$\begin{aligned} f[x_0] &= f(x_0) = 0 \\ f[x_1] &= f(x_1) = 3 \\ f[x_2] &= f(x_2) = 0 \\ f[x_0, x_1] &= \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{3-0}{\frac{1}{2}-0} = 6 \\ f[x_0, x_2] &= \frac{f[x_2] - f[x_0]}{x_2 - x_0} = \frac{0-0}{1-0} = 0 \\ f[x_0, x_1, x_2] &= \frac{f[x_0, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_1} = \frac{0-6}{1-\frac{1}{2}} = -12 \end{aligned}$$

$f[x_0]$		
$f[x_1]$	$f[x_0, x_1]$	
$f[x_2]$	$f[x_0, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2]$

Tabella 1: Tabella delle differenze divise nel caso di tre nodi x_0, x_1, x_2.

$f[x_0]$			
$f[x_1]$	$f[x_0, x_1]$		
$f[x_2]$	$f[x_0, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2]$	
$f[x_3]$	$f[x_0, x_3]$	$f[x_0, x_1, x_3]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$

Tabella 2: Tabella delle differenze divise nel caso di quattro nodi x_0, x_1, x_2, x_3.

Dunque la forma di Newton di $p(x)$ è data da

$$\begin{aligned} p(x) &= f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ &= 0 + 6(x - 0) - 12(x - 0)(x - \tfrac{1}{2}) \\ &= 6x - 12x(x - \tfrac{1}{2}). \end{aligned} \tag{2}$$

Sviluppando i calcoli a partire dalla forma di Newton, otteniamo nuovamente la forma canonica $p(x) = -12x^2 + 12x$ già ottenuta in (1). Questa è una prova della correttezza dei calcoli effettuati.
Osservazione. Non occorreva calcolare $f[x_0, x_1, x_2]$. Infatti, dalla forma di Newton (2) risulta che $f[x_0, x_1, x_2]$ è il coefficiente di x^2 e quindi, per confronto con la forma canonica (1), si poteva immediatamente concludere che $f[x_0, x_1, x_2] = -12$ senza calcolarlo. Non essendo necessario calcolare $f[x_0, x_1, x_2]$, potevamo risparmiarci il calcolo di tutte le differenze divise dell'ultima riga della Tabella 1.

(b) La forma più opportuna in cui scrivere $q(x)$ è la forma di Newton:

$$\begin{aligned} q(x) &= f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\ &= p(x) + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\ &= 6x - 12x(x - \tfrac{1}{2}) + f[x_0, x_1, x_2, x_3]x(x - \tfrac{1}{2})(x - 1). \end{aligned}$$

L'unica cosa da calcolare è $f[x_0, x_1, x_2, x_3]$, che si ottiene calcolando le differenze divise dell'ultima riga della Tabella 2. Si ha

$$\begin{aligned} f[x_3] &= f(x_3) = 3\sqrt{|\sin(\tfrac{3}{2}\pi)|} = 3 \\ f[x_0, x_3] &= \frac{f[x_3] - f[x_0]}{x_3 - x_0} = \frac{3 - 0}{\frac{3}{2} - 0} = 2 \\ f[x_0, x_1, x_3] &= \frac{f[x_0, x_3] - f[x_0, x_1]}{x_3 - x_1} = \frac{2 - 6}{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}} = -4 \\ f[x_0, x_1, x_2, x_3] &= \frac{f[x_0, x_1, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_2} = \frac{-4 - (-12)}{\frac{3}{2} - 1} = 16 \end{aligned}$$

Dunque la forma di Newton di $q(x)$ è data da

$$q(x) = 6x - 12x(x - \tfrac{1}{2}) + 16x(x - \tfrac{1}{2})(x - 1).$$

Se si vuole portare il polinomio in forma canonica, basta sviluppare i calcoli:

$$\begin{aligned}
q(x) &= 6x - 12x(x-\tfrac{1}{2}) + 16x(x-\tfrac{1}{2})(x-1) \\
&= 6x - 12x^2 + 6x + 16x(x^2 - x - \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}) \\
&= -12x^2 + 12x + 16x^3 - 16x^2 - 8x^2 + 8x \\
&= 16x^3 - 36x^2 + 20x.
\end{aligned}$$

(c) Poiché $\sin(\pi x) > 0$ per ogni $x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$, si ha $f(x) = 3\sqrt{\sin(\pi x)}$ per ogni $x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$ e possiamo quindi "sbarazzarci" del modulo. In base al teorema sull'errore della formula dei trapezi—che è applicabile perché la funzione $f(x)$ è di classe $C^\infty\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$ come composizione di $\sin(\pi x) : \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] \to \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$ e $3\sqrt{y} : \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right] \to \mathbb{R}$, entrambe di classe C^∞ sui rispettivi domini—per ogni n si ha

$$|I - I_n| = \left| -\frac{(\frac{1}{2} - \frac{1}{4})f''(\eta)}{12} \left(\frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}}{n} \right)^2 \right| = \frac{|f''(\eta)|}{48} \frac{1}{16n^2} = \frac{|f''(\eta)|}{768n^2},$$

dove $\eta \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$. Calcoliamo $f''(x)$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 3\,\frac{\pi\cos(\pi x)}{2\sqrt{\sin(\pi x)}} = \frac{3\pi\cos(\pi x)}{2\sqrt{\sin(\pi x)}}, \\
f''(x) &= \frac{-3\pi^2\sin(\pi x)\,2\sqrt{\sin(\pi x)} - 3\pi\cos(\pi x)\dfrac{2\pi\cos(\pi x)}{2\sqrt{\sin(\pi x)}}}{4\sin(\pi x)} = \frac{-6\pi^2\sin^2(\pi x) - 3\pi^2\cos^2(\pi x)}{4\sin(\pi x)\sqrt{\sin(\pi x)}} \\
&= -\frac{3\pi^2}{4}\cdot\frac{2\sin^2(\pi x) + \cos^2(\pi x)}{\sin(\pi x)\sqrt{\sin(\pi x)}} = -\frac{3\pi^2}{4}\cdot\frac{\sin^2(\pi x) + 1}{\sin(\pi x)\sqrt{\sin(\pi x)}},
\end{aligned}$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo usato l'identità trigonometrica $\sin^2(\pi x) + \cos^2(\pi x) = 1$. Per ogni $x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$ si ha

$$|f''(x)| = \frac{3\pi^2}{4}\cdot\frac{\sin^2(\pi x) + 1}{\sin(\pi x)\sqrt{\sin(\pi x)}} \le \frac{3\pi^2}{4}\cdot\frac{\sin^2(\frac{\pi}{2}) + 1}{\sin(\frac{\pi}{4})\sqrt{\sin(\frac{\pi}{4})}} = \frac{3\pi^2}{4}\cdot\frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}}} = \frac{3\pi^2}{\sqrt[4]{2}}.$$

Dunque,

$$|I - I_n| = \frac{|f''(\eta)|}{768n^2} \le \frac{3\pi^2}{768\sqrt[4]{2}\,n^2} = \frac{C}{n^2}, \qquad C = \frac{3\pi^2}{768\sqrt[4]{2}}.$$

Poiché

$$\frac{C}{n^2} \le \varepsilon \quad\iff\quad n \ge \sqrt{\frac{C}{\varepsilon}} = n(\varepsilon),$$

concludiamo che $|I - I_n| \le \varepsilon$ per ogni $n \ge n(\varepsilon)$.

(d) Per ottenere un errore $|I - I_n| \le 0.05$ basta prendere un qualsiasi

$$n \ge n(0.05) = \sqrt{\frac{C}{0.05}} = \sqrt{\frac{3\pi^2}{768\sqrt[4]{2}\cdot 0.05}} = 0.805...$$

Quindi è sufficiente prendere $n = 1$. Calcoliamo dunque I_1 che sarà un'approssimazione di I con errore $|I - I_1| \le 0.05$. Applicando la formula dei trapezi con $n = 1$, si ottiene

$$I_1 = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}}{1}\left[\frac{f(\frac{1}{4}) + f(\frac{1}{2})}{2}\right] = \frac{3\sqrt{\sin(\frac{\pi}{4})} + 3\sqrt{\sin(\frac{\pi}{2})}}{8} = \frac{3\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}} + 3}{8} = 0.69033615...$$

Esercizio 2. Sia $n \geq 3$ e si consideri la matrice $n \times n$ data da

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & & & & & \\ 1 & 4 & 1 & & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & 4 & 1 & \\ & & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

(è sottointeso che le componenti non scritte della matrice sono uguali a 0).

(a) Localizzare nel modo più preciso possibile gli autovalori di A.
(b) Dimostrare che gli autovalori di A sono reali e positivi.
(c) Stabilire se la matrice A è definita positiva.
(d) Fornire una stima per il raggio spettrale $\rho(A)$.
(e) Localizzare gli autovalori di $p(A)$, dove $p(\lambda) = 1 + \lambda^2$.

Soluzione.

(a) Per localizzare gli autovalori di A nel modo più preciso possibile, usiamo i teoremi di Gershgorin considerando sia i cerchi per riga $K_1, K_2, \ldots, K_n$ che i cerchi per colonna $H_1, H_2, \ldots, H_n$. Notiamo però che la matrice A è simmetrica, cioè $A^T = A$. Infatti, A^T è la matrice le cui colonne sono le righe di A "scritte in verticale" e le righe di A "scritte in verticale" coincidono con le colonne di A: la prima riga di A coincide con la prima colonna di A, la seconda riga di A coincide con la seconda colonna di A, ecc. Dunque i cerchi per colonna coincidono con quelli per riga ($H_1 = K_1,\ H_2 = K_2,\ \ldots,\ H_n = K_n$) e possiamo perciò limitarci a considerare i cerchi per riga. Indicando con $\mathscr{C}(z_0, r)$ il cerchio nel piano complesso di centro z_0 e raggio r, si ha

$$\begin{aligned} K_1 &= K_n = \mathscr{C}(4, 1), \\ K_2 &= \ldots = K_{n-1} = \mathscr{C}(4, 2); \end{aligned}$$

si veda la Figura 1. L'unione dei cerchi coincide con il cerchio $\mathscr{C}(4, 2)$:

$$K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_n = \mathscr{C}(4, 2).$$

Il secondo teorema di Gershgorin non può essere applicato perché l'unione dei cerchi è un insieme connesso (non può essere suddiviso in due o più sottoinsiemi disgiunti). Passiamo ora al terzo teorema di Gershgorin (debole), che può essere applicato alla matrice A in quanto A è irriducibile. Infatti, il grafo di A è fortemente connesso perché contiene il ciclo

$$1 \to 2 \to 3 \to \cdots \to n \to n-1 \to n-2 \to \cdots \to 1$$

che tocca tutti i nodi; si veda la Figura 2. Il bordo $\mathscr{B}$ dell'unione dei cerchi $\mathscr{C}(4, 2)$ è la circonferenza di centro 4 e raggio 2 (circonferenza rossa in Figura 1). Siccome i punti di $\mathscr{B}$ non stanno sul bordo di tutti i cerchi (infatti non stanno sul bordo dei cerchi piccoli K_1 e K_n), i punti di $\mathscr{B}$ non possono essere autovalori di A. In conclusione, la localizzazione degli autovalori di A che si ottiene con i teoremi di Gershgorin è la seguente: *gli autovalori di A si trovano nel cerchio $\mathscr{C}(4, 2)$ privato del suo bordo.* Siccome A è reale e simmetrica (quindi hermitiana), sappiamo che gli autovalori di A sono reali. Possiamo dunque raffinare ulteriormente la localizzazione: *gli autovalori di A si trovano sia sull'asse reale che nel cerchio $\mathscr{C}(4, 2)$ privato del suo bordo, cioè si trovano nell'intervallo aperto $(2, 6)$.*

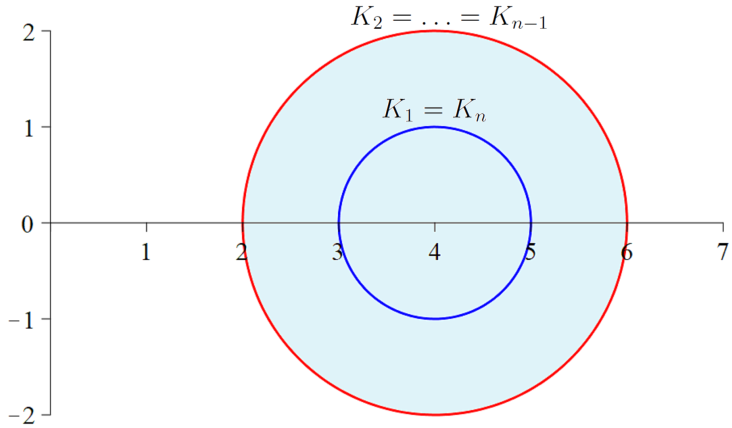

Figura 1: Cerchi di Gershgorin della matrice A dell'Esercizio 2.

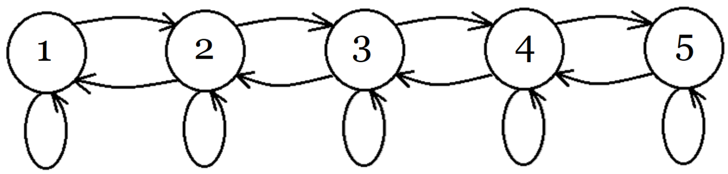

Figura 2: Grafo della matrice A dell'Esercizio 2 nel caso $n = 5$.

(b) Abbiamo visto nel punto (a) che gli autovalori di A sono reali e si trovano nell'intervallo $(2, 6)$, dunque sono reali e positivi.

(c) In base a un teorema, una matrice hermitiana è definita positiva se e solo se i suoi autovalori sono positivi. La matrice A è hermitiana e i suoi autovalori sono positivi per quanto visto nel punto (b), dunque A è definita positiva.

(d) Siccome gli autovalori di A si trovano nell'intervallo $(2, 6)$, abbiamo che $2 < \rho(A) < 6$. Volendo fornire una stima ancora più precisa per $\rho(A)$, possiamo osservare che $\text{traccia}(A) = 4n$. Siccome $\text{traccia}(A)$ è la somma degli autovalori di A, deve per forza esistere almeno un autovalore di A di modulo ≥ 4, perché se tutti gli autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ di A avessero modulo < 4, allora si avrebbe

$$4n = |\text{traccia}(A)| = |\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n| \leq |\lambda_1| + |\lambda_2| + \ldots + |\lambda_n| < 4 + 4 + \ldots + 4 = 4n,$$

il che è assurdo. Siccome dunque esiste almeno un autovalore di A di modulo ≥ 4, concludiamo che $\rho(A) = \max(|\lambda_1|, |\lambda_2|, \ldots, |\lambda_n|) \geq 4$. In conclusione, otteniamo la stima $4 \leq \rho(A) < 6$.

(e) In base a un teorema, gli autovalori della matrice $p(A) = I + A^2$ sono

$$\begin{aligned} p(\lambda_1) &= 1 + \lambda_1^2, \\ p(\lambda_2) &= 1 + \lambda_2^2, \\ \vdots\quad &\quad\ \vdots \\ p(\lambda_n) &= 1 + \lambda_n^2, \end{aligned}$$

dove $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sono gli autovalori di A. Siccome

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in (2, 6),$$

si deduce che

$$p(\lambda_1), p(\lambda_2), \ldots, p(\lambda_n) \in p((2, 6)) = \text{immagine di } (2, 6) \text{ tramite } p(\lambda).$$

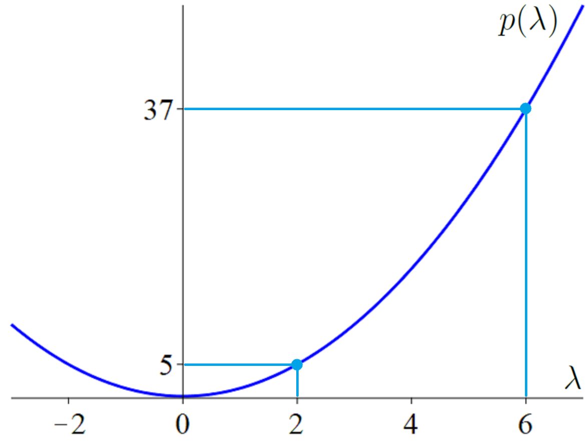

Figura 3: Grafico di $p(\lambda) = 1 + \lambda^2$ (parabola).

Per concludere la localizzazione degli autovalori $p(\lambda_1), p(\lambda_2), \dots, p(\lambda_n)$ di $p(A)$, resta da capire com'è fatto l'insieme $p((2,6))$. Dato che $p(\lambda) = 1 + \lambda^2$ è una funzione crescente su $(2,6)$, si ha

$$p((2,6)) = (p(2), p(6)) = (1 + 2^2, 1 + 6^2) = (5, 37);$$

si veda anche la Figura 3. In conclusione, otteniamo la localizzazione

$$p(\lambda_1), p(\lambda_2), \dots, p(\lambda_n) \in (5, 37).$$

Esercizio 3. Sia

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ \alpha & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

dove $\alpha > 0$ è un numero reale positivo fissato.

(a) Stabilire per quali valori di α il metodo di Jacobi applicato a un sistema lineare di matrice A risulta convergente.

(b) Stabilire per quali valori di α il metodo di Gauss-Seidel applicato a un sistema lineare di matrice A risulta convergente.

(c) Consideriamo il caso $\alpha = \frac{1}{2}$. Quale dei metodi di Jacobi e Gauss-Seidel per risolvere un sistema lineare di matrice A converge più velocemente?

Soluzione.

(a) Per trovare i valori di α richiesti, calcoliamo il raggio spettrale $\rho(J)$, dove J è la matrice d'iterazione del metodo di Jacobi applicato a un sistema lineare di matrice A, e determiniamo i valori di α per i quali $\rho(J) < 1$. Sia

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

la parte diagonale di A. In base a un'osservazione "famosa", gli autovalori di $J = D^{-1}(D - A)$ sono le soluzioni dell'equazione $\det(\lambda D + A - D) = 0$. Si ha

$$\det(\lambda D + A - D) = \begin{vmatrix} 2\lambda & 1 & 2 \\ 1 & -2\lambda & 0 \\ \alpha & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \alpha(4\lambda) - \lambda(-4\lambda^2 - 1) = \lambda(4\lambda^2 + 1 + 4\alpha),$$

per cui gli autovalori di J sono 0 e le due radici quadrate di $-\frac{1+4\alpha}{4}$ (che è un numero negativo in quanto $\alpha > 0$). Dunque gli autovalori di J sono $0, \pm\mathrm{i}\sqrt{\frac{1+4\alpha}{4}}$ e

$$\rho(J) = \max\left(|0|, \left|\mathrm{i}\sqrt{\frac{1+4\alpha}{4}}\right|, \left|-\mathrm{i}\sqrt{\frac{1+4\alpha}{4}}\right|\right) = \max\left(0, \sqrt{\frac{1+4\alpha}{4}}, \sqrt{\frac{1+4\alpha}{4}}\right) = \sqrt{\frac{1+4\alpha}{4}}.$$

Il metodo di Jacobi è dunque convergente se e solo se

$$\rho(J) < 1 \quad \iff \quad \sqrt{\frac{1+4\alpha}{4}} < 1 \quad \iff \quad \frac{1+4\alpha}{4} < 1 \quad \iff \quad 1+4\alpha < 4 \quad \iff \quad \alpha < \frac{3}{4}.$$

(b) Per trovare i valori di α richiesti, procediamo esattamente come nel punto (a): calcoliamo il raggio spettrale $\rho(G)$, dove G è la matrice d'iterazione del metodo di Gauss-Seidel applicato a un sistema lineare di matrice A, e determiniamo i valori di α per i quali $\rho(G) < 1$. Sia

$$E = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ \alpha & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

la parte triangolare inferiore di A. In base a un'osservazione "famosa", gli autovalori di $G = E^{-1}(E-A)$ sono le soluzioni dell'equazione $\det(\lambda E + A - E) = 0$. Si ha

$$\det(\lambda E + A - E) = \begin{vmatrix} 2\lambda & 1 & 2 \\ \lambda & -2\lambda & 0 \\ \alpha\lambda & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \alpha\lambda(4\lambda) - \lambda(-4\lambda^2 - \lambda) = \lambda^2(4\lambda + 1 + 4\alpha),$$

per cui gli autovalori di G sono $0, 0, -\frac{1+4\alpha}{4}$. Dunque,

$$\rho(G) = \max\left(|0|, |0|, \left|-\frac{1+4\alpha}{4}\right|\right) = \frac{1+4\alpha}{4}.$$

Il metodo di Gauss-Seidel è dunque convergente se e solo se

$$\rho(G) < 1 \quad \iff \quad \frac{1+4\alpha}{4} < 1 \quad \iff \quad 1+4\alpha < 4 \quad \iff \quad \alpha < \frac{3}{4}.$$

(c) Per $\alpha = \frac{1}{2}$ si ha

$$\rho(J) = \sqrt{\frac{1+4\alpha}{4}}\Bigg|_{\alpha=\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = 0.8660254...,$$

$$\rho(G) = \frac{1+4\alpha}{4}\Bigg|_{\alpha=\frac{1}{2}} = \frac{3}{4} = 0.75,$$

dunque $\rho(G) = \rho(J)^2 < \rho(J)$ e Gauss-Seidel converge più velocemente di Jacobi.
Osservazione. La relazione $\rho(G) = \rho(J)^2$ vale per tutti gli $\alpha > 0$ e non solo per $\alpha = \frac{1}{2}$. Nel caso in cui $0 < \alpha < \frac{3}{4}$, si ha $\rho(J) < 1$ e $\rho(G) < 1$ (perché sia Jacobi che Gauss-Seidel convergono), e dunque si ha anche $\rho(G) = \rho(J)^2 < \rho(J)$: Gauss-Seidel converge più velocemente di Jacobi sempre, qualunque sia il valore di $\alpha \in (0, \frac{3}{4})$.

Laurea in Informatica – Laurea in Ingegneria Civile – Laurea in Ingegneria Energetica

Calcolo Numerico

Esame del 25/02/2022

Esercizio 1. Sia $f(x) = 6\log_2(1+x)$.

(a) Scrivere in forma canonica, in forma di Lagrange e in forma di Newton il polinomio d'interpolazione $p(x)$ di $f(x)$ sui nodi $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

(b) Fornire una stima dell'errore d'interpolazione $|f(x) - p(x)|$ per ogni $x \in [0, 3]$, cioè determinare una costante C tale che $|f(x) - p(x)| \le C$ per ogni $x \in [0, 3]$. [1]

(c) Sia $I = \int_0^3 f(x)\mathrm{d}x = 22.031489263998...$ e sia I_n la formula dei trapezi di ordine n per approssimare I. Calcolare I_4 e I_8 mostrando fino alla settima cifra decimale.

(d) Sia $p(x)$ il polinomio d'interpolazione dei dati (h_4^2, I_4) e (h_8^2, I_8), dove $h_4 = \frac{3}{4}$ e $h_8 = \frac{3}{8}$ sono i passi di discretizzazione relativi alle formule I_4 e I_8, rispettivamente. Calcolare $p(0)$ mostrando fino alla settima cifra decimale. Quale fra I_4, I_8, $p(0)$ fornisce l'approssimazione migliore di I?

(e) Posto $\varepsilon = |p(0) - I|$, determinare un n in modo tale che la formula dei trapezi I_n fornisca un'approssimazione di I con errore $|I_n - I| \le \varepsilon$.

Soluzione.

(a) Iniziamo dalla forma di Lagrange di $p(x)$. Notiamo che

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 6\log_2(1) = 0, \\ f(x_1) &= 6\log_2(2) = 6, \\ f(x_2) &= 6\log_2(4) = 12. \end{aligned}$$

Dunque la forma di Lagrange di $p(x)$ è data da

$$\begin{aligned} p(x) &= f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \\ &= 6\frac{(x-0)(x-3)}{(1-0)(1-3)} + 12\frac{(x-0)(x-1)}{(3-0)(3-1)} = 6\frac{x(x-3)}{-2} + 12\frac{x(x-1)}{6}. \end{aligned}$$

Sviluppando i calcoli a partire dalla forma di Lagrange, portiamo il polinomio in forma canonica:

$$p(x) = 6\frac{x(x-3)}{-2} + 12\frac{x(x-1)}{6} = -3(x^2 - 3x) + 2(x^2 - x) = -x^2 + 7x. \tag{1}$$

Per determinare la forma di Newton di $p(x)$, calcoliamo le differenze divise della Tabella 1. Si ha

$$\begin{aligned} f[x_0] &= f(x_0) = 0 \\ f[x_1] &= f(x_1) = 6 \\ f[x_2] &= f(x_2) = 12 \\ f[x_0, x_1] &= \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{6-0}{1-0} = 6 \\ f[x_0, x_2] &= \frac{f[x_2] - f[x_0]}{x_2 - x_0} = \frac{12-0}{3-0} = 4 \\ f[x_0, x_1, x_2] &= \frac{f[x_0, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_1} = \frac{4-6}{3-1} = -1 \end{aligned}$$

[1] Può essere utile ricordare la formula del cambio di base

$$\log_2 y = \frac{\log y}{\log 2}, \qquad y > 0,$$

dove "log" indica il logaritmo naturale o logaritmo in base e.

$$
\begin{array}{lll}
f[x_0] & & \\
f[x_1] & f[x_0, x_1] & \\
f[x_2] & f[x_0, x_2] & f[x_0, x_1, x_2]
\end{array}
$$

Tabella 1: Tabella delle differenze divise nel caso di tre nodi x_0, x_1, x_2.

Dunque la forma di Newton di $p(x)$ è data da

$$
\begin{aligned}
p(x) &= f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\
&= 0 + 6(x - 0) - (x - 0)(x - 1) \\
&= 6x - x(x - 1).
\end{aligned} \tag{2}
$$

Sviluppando i calcoli a partire dalla forma di Newton, otteniamo nuovamente la forma canonica $p(x) = -x^2 + 7x$ già ottenuta in (1). Questa è una prova della correttezza dei calcoli effettuati.

Osservazione. Non occorreva calcolare $f[x_0, x_1, x_2]$. Infatti, dalla forma di Newton (2) risulta che $f[x_0, x_1, x_2]$ è il coefficiente di x^2 e quindi, per confronto con la forma canonica (1), si poteva immediatamente concludere che $f[x_0, x_1, x_2] = -1$ senza calcolarlo. Non essendo necessario calcolare $f[x_0, x_1, x_2]$, potevamo risparmiarci il calcolo di tutte le differenze divise dell'ultima riga della Tabella 1.

(b) In base al teorema sull'errore dell'interpolazione (che è applicabile perché la funzione $f(x) = 6\log_2(1+x)$ è di classe $C^\infty[0, 3]$), per ogni $x \in [0, 3]$ si ha

$$
|f(x) - p(x)| = \left| \frac{f'''(\xi)}{3!}(x - 0)(x - 1)(x - 3) \right| \qquad (\xi \text{ è un punto in } (0, 3)) \tag{3}
$$

Calcoliamo la derivata terza di $f(x) = 6\log_2(1 + x) = 6\dfrac{\log(1 + x)}{\log 2}$:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{6}{\log 2}\,\frac{1}{1 + x}, \\
f''(x) &= \frac{6}{\log 2}\,\frac{-1}{(1 + x)^2}, \\
f'''(x) &= \frac{6}{\log 2}\,\frac{2}{(1 + x)^3} = \frac{12}{\log 2\,(1 + x)^3}.
\end{aligned}
$$

Per ogni $x \in [0, 3]$ si ha

$$
|f'''(x)| = \left| \frac{12}{\log 2\,(1 + x)^3} \right| = \frac{12}{\log 2}\,\frac{1}{(1 + x)^3} \le \frac{12}{\log 2}\,\frac{1}{1} = \frac{12}{\log 2}.
$$

Tornando a (3), per ogni $x \in [0, 3]$ si ha

$$
|f(x) - p(x)| = \left| \frac{f'''(\xi)}{6} x(x - 1)(x - 3) \right| = \frac{|f'''(\xi)|}{6}\,|x|\,|x - 1|\,|x - 3| \le \frac{12}{6\log 2} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \approx 51.937.
$$

Volendo ottenere una stima più precisa, si può procedere nel modo seguente. In base a (3), per ogni $x \in [0, 3]$ si ha

$$
\begin{aligned}
|f(x) - p(x)| &= \left| \frac{f'''(\xi)}{6} x(x - 1)(x - 3) \right| = \frac{|f'''(\xi)|}{6} |x(x - 1)(x - 3)| \\
&\le \frac{12}{6\log 2} \max_{y \in [0,3]} \Big| \underbrace{y(y - 1)(y - 3)}_{\omega(y)} \Big|.
\end{aligned} \tag{4}
$$

Andiamo a calcolare il massimo di $|\omega(y)|$ su $[0,3]$. Per farlo, dobbiamo cercare tutti i massimi e i minimi relativi di $\omega(y)$ su $[0,3]$ e scegliere il più grande di essi in modulo. Per un teorema dell'analisi matematica, i massimi e i minimi relativi di $\omega(y)$ si trovano o nei punti di bordo dell'intervallo $[0,3]$ oppure nei punti stazionari di $\omega(y)$ in $[0,3]$, cioè quei punti di $[0,3]$ in cui si annulla la derivata $\omega'(y)$. Si ha

$$\begin{aligned}
&\omega(y) = y(y-1)(y-3) = y(y^2-4y+3) = y^3-4y^2+3y,\\
&\omega'(y) = 3y^2-8y+3,\\
&\omega'(y) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = y_{1,2} = \frac{4\pm\sqrt{16-9}}{3} = \frac{4\pm\sqrt{7}}{3}.
\end{aligned}$$

Siccome $y_{1,2}$ stanno in $[0,3]$, essi sono punti stazionari di $\omega(y)$ in $[0,3]$. Dunque, per quanto detto sopra,

$$\max_{y\in[0,3]}|\omega(y)| = \max\left(|\omega(0)|,\ \left|\omega\Big(\frac{4-\sqrt{7}}{3}\Big)\right|,\ \left|\omega\Big(\frac{4+\sqrt{7}}{3}\Big)\right|,\ |\omega(3)|\right) = 2.11261... \le 2.113.$$

Dunque, tornando a (4), otteniamo

$$|f(x)-p(x)| \le \frac{2}{\log 2}\,2.113 \approx 14.038.$$

(c) Per un n generico, la formula dei trapezi in questione I_n è data da

$$I_n = h\left[\frac{f(0)+f(3)}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} f(jh)\right], \qquad h = \frac{3}{n}.$$

L'esercizio chiede di calcolare I_4 e I_8. Si ha

$$\begin{aligned}
I_4 &= \frac{3}{4}\left[\frac{f(0)+f(3)}{2} + \sum_{j=1}^{3} f\Big(\frac{3j}{4}\Big)\right]\\
&= \frac{3}{4}\left[\frac{0+12}{2} + 6\log_2\Big(\frac{7}{4}\Big) + 6\log_2\Big(\frac{10}{4}\Big) + 6\log_2\Big(\frac{13}{4}\Big)\right]\\
&= 21.7337523...\\
I_8 &= \frac{3}{8}\left[\frac{f(0)+f(3)}{2} + \sum_{j=1}^{7} f\Big(\frac{3j}{8}\Big)\right]\\
&= \frac{3}{8}\left[\frac{0+12}{2} + 6\log_2\Big(\frac{11}{8}\Big) + 6\log_2\Big(\frac{14}{8}\Big) + 6\log_2\Big(\frac{17}{8}\Big) + 6\log_2\Big(\frac{20}{8}\Big)\right.\\
&\qquad \left. +6\log_2\Big(\frac{23}{8}\Big) + 6\log_2\Big(\frac{26}{8}\Big) + 6\log_2\Big(\frac{29}{8}\Big)\right]\\
&= 21.9558603...
\end{aligned}$$

(d) Il polinomio d'interpolazione dei dati (h_4^2, I_4) e (h_8^2, I_8) è dato in forma di Lagrange da

$$p(x) = I_4\frac{x-h_8^2}{h_4^2-h_8^2} + I_8\frac{x-h_4^2}{h_8^2-h_4^2} = I_4\frac{x-h_8^2}{3h_8^2} + I_8\frac{x-4h_8^2}{-3h_8^2},$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo usato il fatto che $h_4 = 2h_8$. Dunque,

$$p(0) = I_4 \frac{0 - h_8^2}{3h_8^2} + I_8 \frac{0 - 4h_8^2}{-3h_8^2} = -\frac{1}{3} I_4 + \frac{4}{3} I_8 = 22.0298963...$$

Confrontando I_4, I_8, $p(0)$ con il valore esatto I, si nota che $p(0)$ è un'approssimazione migliore di I rispetto a I_4 e I_8. Infatti,

$$\begin{aligned} |I_4 - I| &= 0.29773..., \\ |I_8 - I| &= 0.07562..., \\ |p(0) - I| &= 0.00159... \end{aligned}$$

(e) Sia $\varepsilon = |p(0) - I| = 0.00159...$ In base al teorema sull'errore della formula dei trapezi (che è applicabile perché la funzione $f(x) = 6\log_2(1 + x)$ è $C^\infty[0, 3]$), per ogni n si ha

$$\begin{aligned} |I - I_n| &= \left| -\frac{3 \cdot f''(\eta)}{12} \left(\frac{3}{n}\right)^2 \right| \qquad (\eta \text{ è un punto in } [0,3]) \\ &= \frac{9|f''(\eta)|}{4n^2} = \frac{9}{4n^2} \left| \frac{6}{\log 2} \frac{-1}{(1+\eta)^2} \right| \le \frac{9}{4n^2} \frac{6}{\log 2} \frac{1}{1} = \frac{C}{n^2} \qquad \left(C = \frac{27}{2\log 2}\right) \end{aligned}$$

Imponiamo

$$\frac{C}{n^2} \le \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad n \ge \sqrt{\frac{C}{\varepsilon}}.$$

Dunque, se prendiamo $n \ge \sqrt{C/\varepsilon}$ siamo sicuri che $|I - I_n| \le \varepsilon$. Nel nostro caso in cui $\varepsilon = |p(0) - I| = 0.00159...$, dovremo prendere $n \ge \sqrt{C/\varepsilon} \approx 110.7$.

Esercizio 2. Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & 14 \end{bmatrix}.$$

(a) Localizzare nel modo più preciso possibile gli autovalori di A.
(b) Dimostrare che gli autovalori di A sono reali e positivi.
(c) Dimostrare che $12 < \rho(A) < 16$.
(d) Motivando la risposta, dire quanto vale il limite

$$\lim_{k\to\infty} \frac{A^k}{16^k}.$$

Soluzione.

(a) Per localizzare gli autovalori di A nel modo più preciso possibile, usiamo i teoremi di Gershgorin considerando sia i cerchi per riga K_1, K_2, K_3 che i cerchi per colonna H_1, H_2, H_3. Indicando con $\mathscr{C}(z_0, r)$ il cerchio nel piano complesso di centro z_0 e raggio r, si ha

$$\begin{aligned} K_1 &= \mathscr{C}(1, 3), & H_1 &= \mathscr{C}(1, 1), \\ K_2 &= \mathscr{C}(5, 3), & H_2 &= \mathscr{C}(5, 2), \\ K_3 &= \mathscr{C}(14, 2), & H_3 &= \mathscr{C}(14, 5). \end{aligned}$$

In base al primo teorema di Gershgorin, gli autovalori di A si trovano in

$$(K_1 \cup K_2 \cup K_3) \cap (H_1 \cup H_2 \cup H_3) = H_1 \cup H_2 \cup K_3;$$

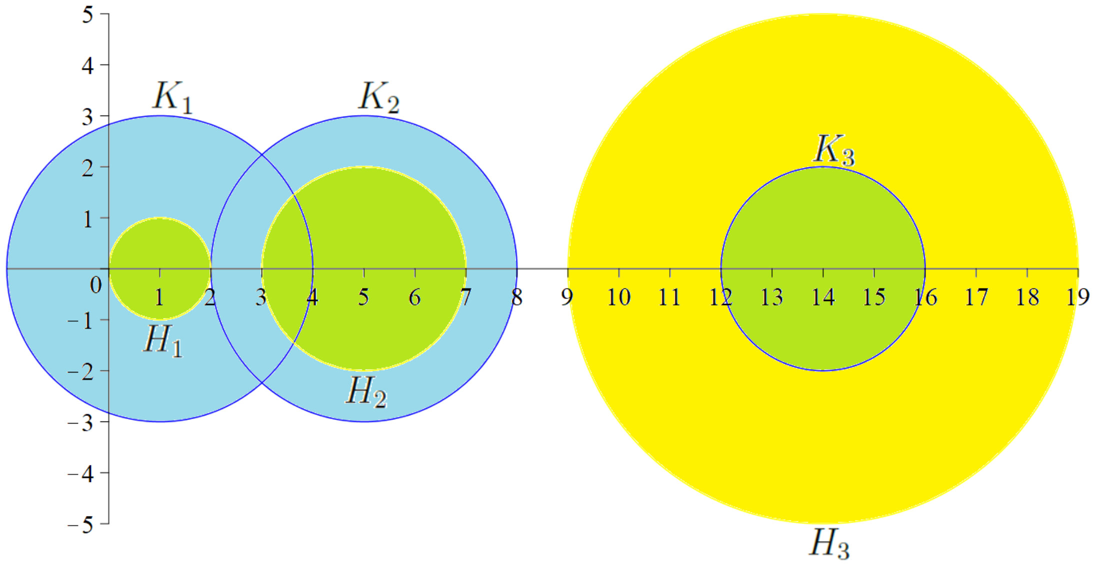

Figura 1: Cerchi di Gershgorin per riga K_1, K_2, K_3 (in blu) e per colonna H_1, H_2, H_3 (in giallo) della matrice A dell'Esercizio 2. L'intersezione $(K_1 \cup K_2 \cup K_3) \cap (H_1 \cup H_2 \cup H_3) = H_1 \cup H_2 \cup K_3$ è evidenziata in verde.

si veda la Figura 1.
In base al secondo teorema di Gershgorin applicato ai cerchi per riga, due autovalori di A stanno in $K_1 \cup K_2$ e uno sta in K_3. In base al secondo teorema di Gershgorin applicato ai cerchi per colonna, un autovalore di A sta in H_1, uno sta in H_2 e uno sta in H_3. Mettendo assieme le informazioni, concludiamo che un autovalore di A sta in H_1, uno sta in H_2 e uno sta in K_3.
Osserviamo ora che la matrice A è irriducibile (il suo grafo contiene il ciclo $1 \to 2 \to 3 \to 1$ che tocca tutti i nodi). Possiamo dunque applicare il terzo teorema di Gershgorin (debole). Applicandolo prima ai cerchi per riga, concludiamo che nessun punto del bordo di $K_1 \cup K_2 \cup K_3$ può essere autovalore di A perché nessun punto del bordo di $K_1 \cup K_2 \cup K_3$ sta sul bordo di tutti i singoli cerchi K_1, K_2, K_3. Applicandolo ai cerchi per colonna, concludiamo che nessun punto del bordo di $H_1 \cup H_2 \cup H_3$ può essere autovalore di A perché nessun punto del bordo di $H_1 \cup H_2 \cup H_3$ sta sul bordo di tutti i singoli cerchi H_1, H_2, H_3. Mettendo assieme le informazioni, concludiamo che nessun punto del bordo dell'insieme $H_1 \cup H_2 \cup K_3$ evidenziato in verde in Figura 1 può essere un autovalore di A.
Mostriamo ora che l'autovalore λ che sta in H_1 privato del bordo è reale (e dunque sta nell'intervallo aperto $(0, 2)$). Se λ non fosse reale, allora il suo complesso coniugato $\overline{\lambda} \neq \lambda$ sarebbe un altro autovalore di A che sta in H_1. Questo perché il polinomio caratteristico di A è a coefficienti reali (essendo A a coefficienti reali) e dunque le sue radici compaiono in coppie complesse coniugate. Siccome abbiamo già detto che H_1 contiene un solo autovalore di A, λ dev'essere per forza reale. Lo stesso discorso vale anche per l'autovalore che sta in H_2 (privato del bordo) e per l'autovalore che sta in K_3 (privato del bordo).
Conclusione: un autovalore di A si trova nell'intervallo $(0, 2)$, un autovalore di A si trova nell'intervallo $(3, 7)$, e un autovalore di A si trova nell'intervallo $(12, 16)$.

(b) Già dimostrato risolvendo il punto (a).
(c) In base al punto (a), $\rho(A)$ coincide con l'autovalore massimo di A, cioè l'autovalore λ_3 che si trova in $(12, 16)$. Dunque $12 < \rho(A) < 16$.
(d) In base a un teorema noto, indicando con O la matrice nulla, per ogni matrice quadrata B si ha

$$\lim_{k\to\infty} B^k = O \quad \iff \quad \rho(B) < 1.$$

La matrice $B = A/16$ è un polinomio di A, precisamente $B = p(A)$ con $p(\lambda) = \lambda/16$. Pertanto, in base a un altro teorema noto, gli autovalori di B sono $\lambda_1/16$, $\lambda_2/16$, $\lambda_3/16$, dove $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ sono gli autovalori di A. Siccome $\lambda_3 = \rho(A) < 16$, risulta $\rho(B) = \lambda_3/16 = \rho(A)/16 < 1$ e dunque

$$\lim_{k\to\infty} \frac{A^k}{16^k} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{A}{16}\right)^k = \lim_{k\to\infty} B^k = O.$$

Esercizio 3. Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ \alpha & 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

dove $\alpha > 0$ è un numero reale positivo fissato.

(a) Stabilire per quali valori di α il metodo iterativo associato alla decomposizione

$$A = M - (M - A), \qquad M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

risulta convergente quando applicato al sistema dato.

(b) Nel caso $\alpha = \frac{1}{10}$, calcolare le prime 4 iterazioni $\mathbf{x}^{(1)}$, $\mathbf{x}^{(2)}$, $\mathbf{x}^{(3)}$, $\mathbf{x}^{(4)}$ del metodo iterativo al punto (a) partendo dal vettore $\mathbf{x}^{(0)} = [0, 0, 0]^T$ e confrontarle con la soluzione esatta $\mathbf{x}$ del sistema dato, calcolando in particolare $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|_\infty$ per $k = 1, 2, 3, 4$.

Soluzione.

(a) Osserviamo innanzitutto che la matrice M è invertibile in quanto $\det(M) = 5 \neq 0$. Risulta quindi ben definito il metodo iterativo associato alla decomposizione $A = M - (M - A)$ e la sua matrice d'iterazione è data da

$$P = M^{-1}(M - A) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}}_{M^{-1}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{5} \\ \alpha & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Per stabilire per quali valori di α il metodo è convergente, calcoliamo il raggio spettrale di P e stabiliamo per quali valori di α risulta $\rho(P) < 1$. Il polinomio caratteristico di P è

$$C_P(\lambda) = \det(\lambda I - P) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & \lambda & \frac{2}{5} \\ -\alpha & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 + \frac{4}{5}\alpha\lambda = \lambda\Big(\lambda^2 + \frac{4}{5}\alpha\Big).$$

Gli autovalori di P sono quindi $0, \pm\mathrm{i}\sqrt{\frac{4\alpha}{5}}$, per cui $\rho(P) = \left|\mathrm{i}\sqrt{\frac{4\alpha}{5}}\right| = \sqrt{\frac{4\alpha}{5}}$. Si ha

$$\rho(P) < 1 \quad\iff\quad \sqrt{\frac{4\alpha}{5}} < 1 \quad\iff\quad \frac{4\alpha}{5} < 1 \quad\iff\quad \alpha < \frac{5}{4}.$$

Il metodo è dunque convergente per $\alpha < \frac{5}{4}$ e non convergente per $\alpha \geq \frac{5}{4}$.

(b) Fissiamo $\alpha = \frac{1}{10}$. La soluzione esatta $\mathbf{x}$ del sistema possiamo calcolarla con il metodo di Gauss:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad\iff\quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 = 1 \\ \frac{1}{10}x_1 - x_3 = 1 \end{cases} \quad\iff\quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 - 10x_3 = 10 \end{cases}$$

$$\iff\quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1 \\ 5x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_2 - 10x_3 = 9 \end{cases} \qquad (R_2 \to R_2 - 2R_1,\ \ R_3 \to R_3 - R_1)$$

$$\iff\quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1 \\ 5x_2 + 2x_3 = -1 \\ -\frac{54}{5}x_3 = \frac{47}{5} \end{cases} \qquad (R_3 \to R_3 - \tfrac{2}{5}R_2)$$

$$\iff\quad \begin{cases} x_1 = 1 + 2x_2 = \dfrac{35}{27} \\ x_2 = \dfrac{-1 - 2x_3}{5} = \dfrac{4}{27} \\ x_3 = -\dfrac{47}{54} \end{cases} \quad\iff\quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{35}{27} \\ \frac{4}{27} \\ -\frac{47}{54} \end{bmatrix}$$

Calcoliamo le prime 4 iterazioni del metodo iterativo al punto (a). L'equazione del metodo è la seguente:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = P\mathbf{x}^{(k)} + M^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{10} & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}^{(k)} + \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Le prime 4 iterazioni partendo da $\mathbf{x}^{(0)} = [0, 0, 0, 0]^T$ sono

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{10} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{10} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{5} \\ \frac{1}{5} \\ -\frac{47}{50} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{x}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{10} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{7}{5} \\ \frac{1}{5} \\ -\frac{47}{50} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{169}{125} \\ \frac{22}{125} \\ -\frac{43}{50} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{x}^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{10} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{169}{125} \\ \frac{22}{125} \\ -\frac{43}{50} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{161}{125} \\ \frac{18}{125} \\ -\frac{1081}{1250} \end{bmatrix}.$$

Le norme ∞ delle loro distanze da $\mathbf{x}$ sono

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}\|_\infty &= 0.69629..., \\ \|\mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}\|_\infty &= 0.10370..., \\ \|\mathbf{x}^{(3)} - \mathbf{x}\|_\infty &= 0.05570..., \\ \|\mathbf{x}^{(4)} - \mathbf{x}\|_\infty &= 0.00829... \end{aligned}$$

Si nota come $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|_\infty$ decresce al crescere di k, indice del fatto che $\mathbf{x}^{(k)}$ converge a $\mathbf{x}$ per $k \to \infty$.

Laurea in Informatica – Laurea in Ingegneria Civile – Laurea in Ingegneria Energetica

Calcolo Numerico

Esame del 13/06/2022

Esercizio 1. Sia $f(x) = -\alpha x \cos(\pi x)$ dove $\alpha > 0$ è un numero fissato.

(a) Scrivere in forma canonica, in forma di Lagrange e in forma di Newton il polinomio d'interpolazione $p(x)$ di $f(x)$ sui nodi $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$.

(b) Supponiamo di aggiungere il nodo $x_3 = \frac{3}{2}$. Scrivere nella forma che si ritiene più opportuna il polinomio d'interpolazione $q(x)$ di $f(x)$ sui nodi x_0, x_1, x_2, x_3.

(c) Calcolare $p(-1)$ e $q(-1)$. Dire quali sono i valori di α per i quali $q(-1)$ fornisce un'approssimazione di $f(-1)$ migliore di $p(-1)$ e quali sono i valori di α per i quali $p(-1)$ fornisce un'approssimazione di $f(-1)$ migliore di $q(-1)$.

Esercizio 2. Sia $f(x) = \frac{1}{x+1}$ e sia $I = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

(a) Sia $p(x)$ il polinomio d'interpolazione di $f(x)$ sui nodi $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$. Calcolare gli integrali I e $\tilde{I} = \int_0^1 p(x)\mathrm{d}x$, e l'errore $|\tilde{I} - I|$.

(b) Sia I_n la formula dei trapezi di ordine n per approssimare I. Per ogni fissato $\varepsilon > 0$ determinare un n tale che $|I_n - I| \le \varepsilon$.

(c) Posto $\varepsilon = |\tilde{I} - I|$, determinare un $\hat{n}$ tale che $|I_{\hat{n}} - I| \le \varepsilon$. Calcolare successivamente $I_{\hat{n}}$ e verificare che effettivamente risulta $|I_{\hat{n}} - I| \le \varepsilon$.

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

(a) Localizzare nel modo più preciso possibile gli autovalori di A.

(b) Dimostrare che A è invertibile e che $1 < \rho(A) < 6$.

(c) Stabilire se i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel applicati a un sistema lineare di matrice A sono convergenti oppure no.

(d) Sia G la matrice d'iterazione del metodo di Gauss-Seidel. Calcolare il raggio spettrale $\rho(G)$ e il limite

$$\lim_{k\to\infty} (2^k G^k + G^k).$$

Laurea in Informatica – Laurea in Ingegneria Civile – Laurea in Ingegneria Energetica

Calcolo Numerico

Esame del 26/07/2022

Esercizio 1. Sia $f(x) = 9\alpha x^2 \cos(\frac{3\pi}{2}x)$ dove $\alpha > 0$ è un numero fissato.

(a) Scrivere in forma canonica, in forma di Lagrange e in forma di Newton il polinomio d'interpolazione $p(x)$ di $f(x)$ sui nodi $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{2}{3}$, $x_3 = 1$.

(b) Determinare un polinomio $q(x) \in \mathbb{R}_3[x]$ che soddisfa le seguenti quattro condizioni:

$$q(0) = f(0), \qquad q'(0) = f'(0), \qquad q(1) = f(1), \qquad q'(1) = f'(1).$$

Il polinomio $q(x)$ è unico?

(c) Calcolare $p(\frac{1}{2})$ e $q(\frac{1}{2})$. Dire quali sono i valori di α per i quali $q(\frac{1}{2})$ fornisce un'approssimazione di $f(\frac{1}{2})$ migliore di $p(\frac{1}{2})$ e quali sono i valori di α per i quali $p(\frac{1}{2})$ fornisce un'approssimazione di $f(\frac{1}{2})$ migliore di $q(\frac{1}{2})$.

(d) Sia I_n la formula dei trapezi di ordine n per approssimare $I = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$. Per ogni fissato $\varepsilon > 0$ determinare un n tale che $|I_n - I| \leq \varepsilon$.

Esercizio 2. Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 12 \end{bmatrix}.$$

(a) Localizzare nel modo più preciso possibile gli autovalori di A. Gli autovalori di A sono tutti reali?

(b) Dimostrare che A è invertibile, che $11 \leq \rho(A) \leq 13$, e che $\min\{|\lambda| : \lambda \text{ è un autovalore di } A\} \geq 1$.

(c) Stabilire se i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel applicati a un sistema lineare di matrice A sono convergenti oppure no.

(d) Sia G la matrice d'iterazione del metodo di Gauss-Seidel. Calcolare gli autovalori di $I + 2G - 3G^3 + G^8$, dove I è la matrice identità 4×4.

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 2 & 1 \\ -\alpha & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

dove $\alpha > 0$. Poiché $\det(A) = 3 + 2\alpha^2$, la matrice A è invertibile per ogni $\alpha > 0$.

(a) Sia

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Verificare che M è invertibile e stabilire per quali valori di α il metodo iterativo associato alla decomposizione $A = M - (M - A)$ per risolvere un sistema lineare di matrice A risulta convergente.

(b) Calcolare $\|P\|_1$ e $\|P\|_\infty$, dove P è la matrice d'iterazione associata al metodo iterativo del punto (a).

Laurea in Informatica – Laurea in Ingegneria Civile – Laurea in Ingegneria Energetica

Calcolo Numerico

Esame del 05/09/2022

Esercizio 1. Sia $f(x) = (9x^2 - 9x + 2)\log(1 + x)$.

(a) Scrivere in forma canonica, in forma di Lagrange e in forma di Newton il polinomio d'interpolazione $p(x)$ di $f(x)$ sui nodi $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{2}{3}$, $x_3 = 1$.

(b) Stimare l'errore d'interpolazione $|f(x) - p(x)|$ per $x \in [0, 1]$ determinando una costante C tale che $|f(x) - p(x)| \leq C$ per ogni $x \in [0, 1]$.

(c) Consideriamo l'integrale

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 10\log(2) - \frac{27}{4} = 0.181471805599...$$

Poiché il polinomio d'interpolazione $p(x)$ è un'approssimazione di $f(x)$ sull'intervallo $[0, 1]$, possiamo aspettarci che $\int_0^1 p(x)\mathrm{d}x \approx \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$. Calcolare $\tilde{I} = \int_0^1 p(x)\mathrm{d}x$ e confrontarlo con $I = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ determinando l'errore $\delta = |\tilde{I} - I|$.

(d) Sia I_n la formula dei trapezi di ordine n per approssimare I. Per ogni fissato $\varepsilon > 0$ determinare un intero n tale che $|I_n - I| \leq \varepsilon$. Determinare successivamente un intero $\bar{n}$ tale che $|I_{\bar{n}} - I| \leq \delta$, dove δ è l'errore al punto (c).

Esercizio 2. Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} -9 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

(a) Localizzare nel modo più preciso possibile gli autovalori di A. La matrice A possiede autovalori reali?

(b) Dimostrare che A è invertibile e che $8 < \rho(A) < 10$.

(c) Stabilire se i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel applicati a un sistema lineare di matrice A sono convergenti oppure no.

(d) Sia J la matrice d'iterazione del metodo di Jacobi e siano $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ gli autovalori di J. Dimostrare che per ogni $i = 1, 2, 3, 4$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(1 + |\lambda_i|^n + \frac{1}{n})}{|\lambda_i|^n + \frac{1}{n}} = 1.$$

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 2 & \alpha \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

dove $\alpha > 0$. Poiché $\det(A) = \alpha + 4$, la matrice A è invertibile per ogni $\alpha > 0$.

(a) Stabilire per quali valori di α il metodo di Gauss-Seidel applicato a un sistema lineare di matrice A risulta convergente.

(b) Consideriamo il metodo di Gauss-Seidel modificato, cioè il metodo iterativo associato alla decomposizione $A = M - (M - A)$ con M data dalla parte triangolare *superiore* di A (inclusa la diagonale). Stabilire per quali valori di α il metodo di Gauss-Seidel modificato applicato a un sistema lineare di matrice A risulta convergente.

(c) Per ciascun valore di α per cui sia il metodo di Gauss-Seidel che il metodo di Gauss-Seidel modificato convergono, stabilire quale dei due converge più velocemente.

Laurea in Informatica – Laurea in Ingegneria Civile – Laurea in Ingegneria Energetica

Calcolo Numerico

Esame del 26/09/2022

Esercizio 1. Sia $f(x) = \frac{2\sqrt{x}-1}{x+1}$.

(a) Scrivere in forma canonica, in forma di Lagrange e in forma di Newton il polinomio d'interpolazione $p(x)$ di $f(x)$ sui nodi $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = 1$.

(b) Sia

$$I = \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = 0.5717153224...$$

e sia I_n la formula dei trapezi di ordine n per approssimare I. Calcolare I_4 e I_8 mostrando fino alla settima cifra decimale.

(c) Applicare la procedura di estrapolazione usando le formule dei trapezi I_4 e I_8 per calcolare il valore estrapolato E. Stabilire quale fra I_4, I_8, E fornisce l'approssimazione migliore di I.

(d) Per ogni fissato $\varepsilon > 0$, determinare un intero n tale che $|I_n - I| \le \varepsilon$. Quanto vale n se $\varepsilon = |E - I|$?

Esercizio 2. Sia $n \ge 3$ e si consideri la matrice $n \times n$ data da

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

(è sottointeso che le componenti non scritte della matrice sono uguali a 0).

(a) Localizzare nel modo più preciso possibile gli autovalori di A.

(b) Dimostrare che gli autovalori di A sono reali e positivi e che $\rho(A) < 4$. La matrice A è definita positiva?

(c) Stabilire se i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel applicati a un sistema lineare di matrice A sono convergenti oppure no.

(d) Dimostrare che esiste almeno un autovalore di A nell'intervallo $[2, 4)$ e che $2 \le \rho(A) < 4$.
Suggerimento. Considerare la traccia(A).

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ -1 & 2 \end{bmatrix},$$

dove $\alpha > 0$. Poiché $\det(A) = 2 + \alpha$, la matrice A è invertibile per ogni $\alpha > 0$.

(a) Calcolare $\rho(J)$ e $\rho(G)$, dove J e G sono le matrici d'iterazione dei metodi di Jacobi e Gauss-Seidel per risolvere un sistema lineare di matrice A.

(b) Stabilire per quali valori di α il metodo di Jacobi converge e per quali valori di α il metodo di Gauss-Seidel converge. Per i valori di α per cui entrambi convergono, dire quale dei due converge più velocemente.

(c) Calcolare $\|A^{-1}\|_\infty$.

Laurea in Informatica – Laurea in Ingegneria Civile – Laurea in Ingegneria Energetica

Calcolo Numerico

Esame del 23/01/2023

Esercizio 1. Sia $f(x) = 8x\,4^{-x}$ e siano $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$.

(a) Supponiamo di voler approssimare la funzione $f(x)$ sull'intervallo $[0, 2]$ mediante una funzione $g(x)$ ottenuta "incollando" insieme due polinomi $p_1(x)$ e $p_2(x)$, dove $p_1(x)$ è il polinomio d'interpolazione di $f(x)$ sui nodi x_0, x_1, x_2 mentre $p_2(x)$ è il polinomio d'interpolazione di $f(x)$ sui nodi x_2, x_3. Il risultato di questa "incollatura" è

$$g(x) = \begin{cases} p_1(x), & x \in [0, 1], \\ p_2(x), & x \in [1, 2]. \end{cases}$$

Determinare $g(x)$ scrivendo in forma canonica $p_1(x)$ e $p_2(x)$.

(b) Stimare l'errore $|f(x) - g(x)|$ per $x \in [0, 1]$ determinando una costante C tale che $|f(x) - g(x)| \le C$ per ogni $x \in [0, 1]$.
Suggerimento. $4^{-x} = \mathrm{e}^{-x \log 4}$.

Esercizio 2. Sia $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ e sia I_n la formula dei trapezi di ordine n per approssimare $\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$, dove $a > 0$ è un parametro fissato.

(a) Calcolare I_2.

(b) Per ogni fissato $\varepsilon > 0$ determinare un intero n tale che $|I_n - I| \le \varepsilon$. Quanto vale n se $\varepsilon = 10^{-7}$ e $a = 1$?

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \\ -1 & -3 & -4 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Localizzare nel modo più preciso possibile gli autovalori di A.

(b) Possiamo affermare che la matrice A possiede almeno un autovalore reale? Motivare la risposta.

(c) Determinare un numero $a > 0$ tale che la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho(A)^n}{x^n}$$

converge per ogni $x \ge a$. Calcolare inoltre la somma di tale serie per ogni $x \ge a$.
Suggerimento. La serie geometrica di ragione q data da $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ converge se e solo se $|q| < 1$, e in tal caso la sua somma è data dalla formula $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

Esercizio 4. Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

(a) Stabilire se i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel applicati a un sistema lineare di matrice A sono convergenti.

(b) Sia $\omega > 0$ e sia

$$M = \begin{bmatrix} 2/\omega & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Consideriamo il metodo iterativo associato alla decomposizione $A = M - (M - A)$ per risolvere un sistema lineare di matrice A. Si scriva la matrice d'iterazione P di questo metodo e si calcoli il raggio spettrale $\rho(P)$.

(c) Stabilire per quali valori di $\omega \in (0, \infty)$ il metodo menzionato al punto (b) risulta convergente.

(d) Determinare il valore ω_* di $\omega \in (0, \infty)$ che minimizza il raggio spettrale $\rho(P)$. Quanto vale il raggio spettrale minimo? Qual è il valore di $\omega \in (0, \infty)$ per il quale il metodo menzionato al punto (b) converge più velocemente?

(e) Sia $\mathbf{b} = [1, 1]^T$. Partendo da $\mathbf{x}^{(0)} = [0, 0]^T$ e scegliendo $\omega = \omega_*$, calcolare le prime 2 iterazioni del metodo menzionato al punto (b) per risolvere il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ e confrontarle con la soluzione esatta $\mathbf{x}$. Che cosa si nota?

Laurea in Informatica – Laurea in Ingegneria Civile – Laurea in Ingegneria Energetica

Calcolo Numerico

Esame del 13/02/2023

Esercizio 1. Un'approssimazione di $\sqrt{5}$ può essere ottenuta calcolando $p(5)$, dove $p(x)$ è un opportuno polinomio d'interpolazione di $\sqrt{x}$.

(a) Stimare l'errore $|\sqrt{5} - p(5)|$ che si commette approssimando $\sqrt{5}$ con $p(5)$, dove $p(x)$ è il polinomio d'interpolazione di $\sqrt{x}$ sui nodi $(2.1)^2$, $(2.15)^2$, $(2.2)^2$, $(2.25)^2$, $(2.3)^2$, $(2.35)^2$, $(2.4)^2$.

(b) Spiegare perché $p(5)$ è un numero razionale e perché il calcolo di $p(5)$ può essere fatto solo attraverso operazioni di somma, sottrazione, moltiplicazione, divisione di numeri razionali (quindi senza estrazioni di radice).

Esercizio 2. Sia $f(x) = (\cos x)^\alpha$, dove $\alpha > 2$ è un parametro assegnato, e sia I_n la formula dei trapezi di ordine n per approssimare $I = \int_0^{\pi/3} f(x)\mathrm{d}x$.

(a) Calcolare I_3.

(b) Per ogni fissato $\varepsilon > 0$ determinare un intero n tale che $|I_n - I| \le \varepsilon$. Quanto vale n se $\varepsilon = 10^{-7}$ e $\alpha = 3$?

Esercizio 3. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^2[a, b]$, sia I_n la formula dei trapezi di ordine n per approssimare $I = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, e sia $\{a_n\}_n$ una successione di numeri reali positivi tale che $a_n \to +\infty$. Dimostrare che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2|I_n - I|}{a_n} = 0.$$

Suggerimento. Usare il teorema sull'errore della formula dei trapezi.

Esercizio 4. Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -3 & 1 \\ 0 & 0 & \mathrm{i} & 7 \end{bmatrix}.$$

(a) Localizzare nel modo più preciso possibile gli autovalori di A.

(b) Fornire la stima più precisa possibile del raggio spettrale $\rho(A)$ sulla base della localizzazione del punto (a).

(c) Possiamo affermare che la matrice A possiede almeno un autovalore reale? Motivare la risposta.

(d) Determinare un numero $R > 0$ tale che la successione di matrici x^kA^k converge alla matrice nulla per ogni $x \in \mathbb{C}$ tale che $|x| < R$.

Esercizio 5. Sia $\alpha > 0$ e si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1+\alpha \\ \alpha & 3 \end{bmatrix}.$$

(a) Stabilire per quali valori di α il metodo di Jacobi risulta convergente quando applicato a un sistema lineare di matrice A.

(b) Stabilire per quali valori di α il metodo di Gauss-Seidel risulta convergente quando applicato a un sistema lineare di matrice A.

Laurea in Informatica – Laurea in Ingegneria Civile – Laurea in Ingegneria Energetica

Calcolo Numerico

Esame del 13/06/2023

Esercizio 1. Sia $f(x) = x(2\alpha - x^2)$, dove $\alpha \in \mathbb{R}$, e sia $\beta \in [2, 3]$.

(a) Scrivere in forma canonica, in forma di Lagrange e in forma di Newton il polinomio d'interpolazione $p(x)$ di $f(x)$ sui nodi $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = \beta$.

(b) Determinare per quale valore di $\beta \in [2, 3]$ la pendenza del polinomio $p(x)$ approssima meglio la pendenza della funzione $f(x)$ in $x = 0$, nel senso che l'errore $|p'(0) - f'(0)|$ risulta minimo.

(c) Supponiamo di aggiungere un nuovo nodo x_3 diverso da x_0, x_1, x_2. Dimostrare che il polinomio d'interpolazione di $f(x)$ sui nodi x_0, x_1, x_2, x_3 coincide con la funzione $f(x)$ stessa.

Soluzione.

(a) Iniziamo dalla forma di Lagrange di $p(x)$. Notiamo che

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 0(2\alpha - 0^2) = 0, \\ f(x_1) &= 1(2\alpha - 1^2) = 2\alpha - 1, \\ f(x_2) &= \beta(2\alpha - \beta^2). \end{aligned}$$

Dunque la forma di Lagrange di $p(x)$ è data da

$$\begin{aligned} p(x) &= f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \\ &= (2\alpha-1)\frac{(x-0)(x-\beta)}{(1-0)(1-\beta)} + \beta(2\alpha-\beta^2)\frac{(x-0)(x-1)}{(\beta-0)(\beta-1)} \\ &= (2\alpha-1)\frac{x(x-\beta)}{1-\beta} + \beta(2\alpha-\beta^2)\frac{x(x-1)}{\beta(\beta-1)}. \end{aligned}$$

Sviluppando i calcoli a partire dalla forma di Lagrange, portiamo il polinomio in forma canonica:

$$\begin{aligned} p(x) &= (2\alpha-1)\frac{x(x-\beta)}{1-\beta} + \beta(2\alpha-\beta^2)\frac{x(x-1)}{\beta(\beta-1)} = \frac{1-2\alpha}{\beta-1}(x^2-\beta x) + \frac{2\alpha-\beta^2}{\beta-1}(x^2-x) \\ &= \frac{1-\beta^2}{\beta-1}x^2 + \frac{-\beta+2\alpha\beta-2\alpha+\beta^2}{\beta-1}x = \frac{(1-\beta)(1+\beta)}{\beta-1}x^2 + \frac{2\alpha(\beta-1)+\beta(\beta-1)}{\beta-1}x \\ &= -(1+\beta)x^2 + (2\alpha+\beta)x. \end{aligned} \tag{1}$$

Per determinare la forma di Newton di $p(x)$, calcoliamo le differenze divise della Tabella 1. Si ha

$$\begin{aligned} f[x_0] &= f(x_0) = 0 \\ f[x_1] &= f(x_1) = 2\alpha - 1 \\ f[x_2] &= f(x_2) = \beta(2\alpha - \beta^2) \\ f[x_0, x_1] &= \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{2\alpha - 1 - 0}{1 - 0} = 2\alpha - 1 \\ f[x_0, x_2] &= \frac{f[x_2] - f[x_0]}{x_2 - x_0} = \frac{\beta(2\alpha - \beta^2) - 0}{\beta - 0} = 2\alpha - \beta^2 \\ f[x_0, x_1, x_2] &= \frac{f[x_0, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_1} = \frac{2\alpha - \beta^2 - 2\alpha + 1}{\beta - 1} = \frac{1 - \beta^2}{\beta - 1} = \frac{(1-\beta)(1+\beta)}{\beta - 1} = -(1+\beta) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lll} f[x_0] & & \\ f[x_1] & f[x_0, x_1] & \\ f[x_2] & f[x_0, x_2] & f[x_0, x_1, x_2] \end{array}$$

Tabella 1: Tabella delle differenze divise nel caso di tre nodi x_0, x_1, x_2.

Dunque la forma di Newton di $p(x)$ è data da

$$\begin{aligned} p(x) &= f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ &= 0 + (2\alpha - 1)(x - 0) - (1 + \beta)(x - 0)(x - 1) \\ &= (2\alpha - 1)x - (1 + \beta)x(x - 1). \end{aligned} \tag{2}$$

Sviluppando i calcoli a partire dalla forma di Newton, otteniamo nuovamente la forma canonica $p(x) = -(1 + \beta)x^2 + (2\alpha + \beta)x$ già ottenuta in (1). Questa è una prova della correttezza dei calcoli effettuati.

Osservazione. Non occorreva calcolare $f[x_0, x_1, x_2]$. Infatti, dalla forma di Newton (2) risulta che $f[x_0, x_1, x_2]$ è il coefficiente di x^2 e quindi, per confronto con la forma canonica (1), si poteva immediatamente concludere che $f[x_0, x_1, x_2] = -(1 + \beta)$ senza calcolarlo. Non essendo necessario calcolare $f[x_0, x_1, x_2]$, potevamo risparmiarci il calcolo di tutte le differenze divise dell'ultima riga della Tabella 1.

(b) Osserviamo che le derivate di $p(x) = -(1 + \beta)x^2 + (2\alpha + \beta)x$ e di $f(x) = x(2\alpha - x^2) = 2\alpha x - x^3$ sono date da

$$\begin{aligned} p'(x) &= -2(1 + \beta)x + 2\alpha + \beta, \\ f'(x) &= 2\alpha - 3x^2, \end{aligned}$$

per cui

$$\begin{aligned} p'(0) &= 2\alpha + \beta, \\ f'(0) &= 2\alpha, \\ |p'(0) - f'(0)| &= |2\alpha + \beta - 2\alpha| = |\beta| = \beta, \end{aligned}$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo tolto il modulo perché $\beta \in [2, 3]$ è positivo. Dunque, il valore di $\beta \in [2, 3]$ che minimizza l'errore $|p'(0) - f'(0)|$ è $\beta = 2$.

(c) Sia $q(x)$ il polinomio d'interpolazione di $f(x)$ sui nodi x_0, x_1, x_2, x_3. Dobbiamo dimostrare che $q(x)$ coincide con $f(x)$. Per il teorema di esistenza e unicità del polinomio d'interpolazione, $q(x)$ è l'unico polinomio in $\mathbb{R}_3[x]$ che soddisfa la condizione $q(x_i) = f(x_i)$ per ogni $i = 0, 1, 2, 3$. D'altra parte, la funzione $f(x)$ è essa stessa un polinomio in $\mathbb{R}_3[x]$ che soddisfa (ovviamente) la condizione $f(x_i) = f(x_i)$ per ogni $i = 0, 1, 2, 3$. Pertanto, per l'unicità del polinomio d'interpolazione, $q(x)$ deve coincidere con $f(x)$.

Osservazione. Un altro modo per dimostrare che $q(x)$ coincide con $f(x)$ è quello di scrivere esplicitamente $q(x)$ e verificare che coincide con $f(x)$. Per scrivere esplicitamente $q(x)$, si può utilizzare ad esempio la forma di Newton, che è la forma più conveniente per l'aggiunta di un nodo. Lasciamo al lettore il compito di scrivere esplicitamente $q(x)$ e verificare che effettivamente coincide con $f(x)$.

Esercizio 2. Sia $f(x) = (\log x)^\alpha$, dove $\alpha > 2$ è un parametro assegnato, e sia I_n la formula dei trapezi di ordine n per approssimare $I = \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.

(a) Calcolare I_3.

(b) Per ogni fissato $\varepsilon > 0$ determinare un intero n tale che $|I_n - I| \leq \varepsilon$. Quanto vale n se $\varepsilon = 10^{-7}$ e $\alpha = 3$?

Soluzione.

(a) Per un n generico, la formula dei trapezi I_n è data da

$$I_n = h\left[\frac{f(1)+f(2)}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} f(1+jh)\right], \qquad h = \frac{1}{n}.$$

Per $n = 3$, si ha

$$I_3 = \frac{1}{3}\left[\frac{f(1)+f(2)}{2} + \sum_{j=1}^{2} f\Big(1+\frac{j}{3}\Big)\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{(\log 1)^\alpha + (\log 2)^\alpha}{2} + \Big(\log\frac{4}{3}\Big)^\alpha + \Big(\log\frac{5}{3}\Big)^\alpha\right]$$
$$= \frac{1}{3}\left[\frac{(\log 2)^\alpha}{2} + \Big(\log\frac{4}{3}\Big)^\alpha + \Big(\log\frac{5}{3}\Big)^\alpha\right].$$

(b) Osserviamo che

$$f'(x) = \alpha(\log x)^{\alpha-1}\,\frac{1}{x} = \frac{\alpha(\log x)^{\alpha-1}}{x},$$
$$f''(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)(\log x)^{\alpha-2}\,\frac{1}{x}\cdot x - \alpha(\log x)^{\alpha-1}\cdot 1}{x^2} = \frac{\alpha(\log x)^{\alpha-2}(\alpha-1-\log x)}{x^2}.$$

Siccome $\alpha > 2$, l'esponente $\alpha - 2$ è positivo e la funzione $f''(x)$ è continua sull'intervallo $[1,2]$, per cui $f \in C^2[1,2]$. Possiamo dunque applicare il teorema sull'errore della formula dei trapezi: per ogni n si ha

$$|I - I_n| = \left|-\frac{(2-1)f''(\eta)}{12}\Big(\frac{2-1}{n}\Big)^2\right| = \frac{|f''(\eta)|}{12n^2},$$

dove $\eta \in [1,2]$. Per ogni $x \in [1,2]$ si ha $\log x \geq 0$ e

$$|f''(x)| = \left|\frac{\alpha(\log x)^{\alpha-2}(\alpha-1-\log x)}{x^2}\right| = \frac{\alpha(\log x)^{\alpha-2}|\alpha-1-\log x|}{x^2} \leq \frac{\alpha(\log x)^{\alpha-2}(\alpha+1+\log x)}{x^2}$$
$$\leq \frac{\alpha(\log 2)^{\alpha-2}(\alpha+1+\log 2)}{1^2} = C_\alpha, \qquad C_\alpha = \alpha(\log 2)^{\alpha-2}(\alpha+1+\log 2).$$

Dunque,

$$|I - I_n| = \frac{|f''(\eta)|}{12n^2} \leq \frac{C_\alpha}{12n^2}.$$

Poiché

$$\frac{C_\alpha}{12n^2} \leq \varepsilon \quad\iff\quad n \geq \sqrt{\frac{C_\alpha}{12\varepsilon}} = n_\alpha(\varepsilon),$$

concludiamo che $|I - I_n| \leq \varepsilon$ per ogni $n \geq n_\alpha(\varepsilon)$. In particolare, se $\varepsilon = 10^{-7}$ e $\alpha = 3$, si ha $n_\alpha(\varepsilon) = n_3(10^{-7}) = 2851.772...$, e dunque prenderemo $n = 2852$ per garantire che $|I - I_n| \leq 10^{-7}$.

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & \mathrm{i} & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 7\mathrm{i} \end{bmatrix}.$$

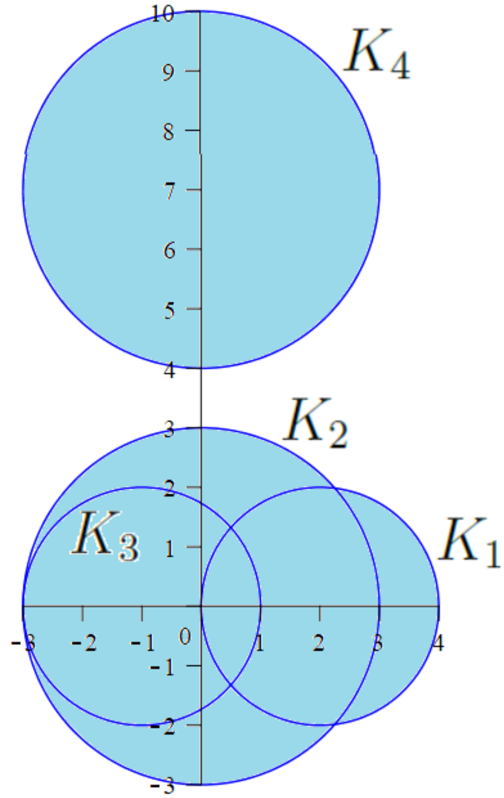

Figura 1: Cerchi di Gershgorin per riga K_1, K_2, K_3, K_4 della matrice A dell'Esercizio 3. L'unione $K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup K_4$ è evidenziata in azzurro.

(a) Localizzare nel modo più preciso possibile gli autovalori di A.
(b) Fornire la stima più precisa possibile del raggio spettrale $\rho(A)$ sulla base della localizzazione del punto (a).
(c) Possiamo affermare che la matrice A possiede almeno un autovalore reale? Motivare la risposta.
(d) Consideriamo la successione

$$a_n = \frac{\alpha^n}{\alpha^n + \rho(A)^n},$$

dove α è un numero positivo assegnato. Dimostrare che $a_n \to 0$ se $\alpha \leq 4$ e $a_n \to 1$ se $\alpha \geq 10$.

Soluzione.

(a) Per localizzare gli autovalori di A nel modo più preciso possibile, usiamo i teoremi di Gershgorin considerando sia i cerchi per riga K_1, K_2, K_3, K_4 che i cerchi per colonna H_1, H_2, H_3, H_4. Indicando con $\mathscr{C}(z_0, r)$ il cerchio nel piano complesso di centro z_0 e raggio r, si ha

$$\begin{aligned} K_1 &= \mathscr{C}(2,2), & H_1 &= \mathscr{C}(2,2), \\ K_2 &= \mathscr{C}(0,3), & H_2 &= \mathscr{C}(0,3), \\ K_3 &= \mathscr{C}(-1,2), & H_3 &= \mathscr{C}(-1,2), \\ K_4 &= \mathscr{C}(7\mathrm{i},3), & H_4 &= \mathscr{C}(7\mathrm{i},3). \end{aligned}$$

Notiamo che i cerchi per colonna coincidono con i cerchi per riga, quindi possiamo limitarci a considerare solo i cerchi per riga. In base al primo teorema di Gershgorin, gli autovalori di A si trovano in $K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup K_4$; si veda la Figura 1.
In base al secondo teorema di Gershgorin, tre autovalori di A stanno in $K_1 \cup K_2 \cup K_3$ e uno sta in K_4.

Osserviamo ora che la matrice A è irriducibile (il suo grafo contiene il ciclo $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1$ che tocca tutti i nodi). Possiamo dunque applicare il terzo teorema di Gershgorin (debole). Concludiamo così che nessun punto del bordo dell'unione $K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup K_4$ può essere autovalore di A perché nessun punto del bordo dell'unione $K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup K_4$ sta sul bordo di tutti i singoli cerchi K_1, K_2, K_3, K_4.

(b) In base alla localizzazione degli autovalori ottenuta nel punto (a), l'autovalore λ_4 di A che sta in K_4 è quello di modulo massimo. Infatti, la sua distanza dall'origine, che è proprio il suo modulo $|\lambda_4|$, è sicuramente maggiore di 4 in quanto λ_4 sta fuori dal cerchio di centro l'origine e raggio 4: $|\lambda_4| > 4$. Invece, gli altri tre autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ di A stanno in $K_1 \cup K_2 \cup K_3$ e dunque hanno distanza dall'origine minore di 4 in quanto stanno dentro il cerchio di centro 0 e raggio 4: $|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3| < 4$. In conclusione, $\rho(A) = |\lambda_4|$. Poiché λ_4 sta fuori dal cerchio di centro l'origine e raggio 4 (come già osservato) e sta dentro il cerchio di centro l'origine e raggio 10 (come risulta dalla Figura 1), si conclude che $4 < |\lambda_4| < 10$, cioè $4 < \rho(A) < 10$.

(c) Sulla base delle informazioni spettrali ottenute, non possiamo affermare che A possiede almeno un autovalore reale.
Osservazione. Possiamo invece affermare che A possiede almeno un autovalore non reale. Infatti, l'autovalore λ_4 che sta in K_4 non sta sull'asse reale e dunque non è reale.

(d) Per ogni n si ha

$$a_n = \frac{\alpha^n}{\alpha^n + \rho(A)^n} = \frac{\alpha^n}{\alpha^n[1 + (\rho(A)/\alpha)^n]} = \frac{1}{1 + (\rho(A)/\alpha)^n}.$$

Ricordiamo che $\alpha > 0$ per ipotesi e dunque anche $\rho(A)/\alpha > 0$. Ricordiamo inoltre che $4 < \rho(A) < 10$ per il punto (b). Pertanto, si ha quanto segue.
– Se $\alpha \leq 4$ allora $\rho(A)/\alpha > 1$, per cui $(\rho(A)/\alpha)^n \to +\infty$ per $n \to +\infty$ e dunque $a_n \to 0$ per $n \to +\infty$.
– Se $\alpha \geq 10$ allora $\rho(A)/\alpha < 1$, per cui $(\rho(A)/\alpha)^n \to 0$ per $n \to +\infty$ e dunque $a_n \to 1$ per $n \to +\infty$.

Esercizio 4. Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ \alpha & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix},$$

dove $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{11/2\}$ di modo che $\det(A) = 22 - 4\alpha \neq 0$.

(a) Stabilire per quali valori di α il metodo di Jacobi risulta convergente quando applicato a un sistema lineare di matrice A.

(b) Stabilire per quali valori di α il metodo di Gauss-Seidel risulta convergente quando applicato a un sistema lineare di matrice A.

Soluzione.

(a) Per trovare i valori di α richiesti, calcoliamo il raggio spettrale $\rho(J)$, dove J è la matrice d'iterazione del metodo di Jacobi applicato a un sistema lineare di matrice A, e determiniamo i valori di α per i quali $\rho(J) < 1$. Sia

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

la parte diagonale di A. In base a un'osservazione "famosa", gli autovalori di $J = D^{-1}(D - A)$ sono le soluzioni dell'equazione $\det(\lambda D + A - D) = 0$. Si ha

$$\det(\lambda D + A - D) = \begin{vmatrix} 2\lambda & 1 & 0 \\ \alpha & 3\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 4\lambda \end{vmatrix} = 2\lambda(12\lambda^2 - 1) - 4\alpha\lambda = 2\lambda(12\lambda^2 - 1 - 2\alpha),$$

per cui gli autovalori di J sono 0 e le due radici quadrate di $\frac{2\alpha+1}{12}$. Dunque, gli autovalori di J sono

$$\begin{aligned} &0,\ \pm\sqrt{\frac{2\alpha+1}{12}}, && \text{se } 2\alpha+1>0,\\ &0,\ \pm\mathrm{i}\sqrt{\frac{-(2\alpha+1)}{12}}, && \text{se } 2\alpha+1<0, \end{aligned}$$

e si ha

$$\begin{aligned} \rho(J) &= \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2\alpha+1}{12}}, & \text{se } 2\alpha+1>0,\\ \sqrt{\dfrac{-(2\alpha+1)}{12}}, & \text{se } 2\alpha+1<0, \end{cases}\\ &= \sqrt{\left|\frac{2\alpha+1}{12}\right|}, \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza vale in entrambi i casi, sia che $2\alpha+1>0$ sia che $2\alpha+1<0$. In conclusione, il metodo di Jacobi è convergente se e solo se

$$\begin{aligned} \rho(J)<1 \quad &\iff \quad \sqrt{\left|\frac{2\alpha+1}{12}\right|}<1 \quad \iff \quad \left|\frac{2\alpha+1}{12}\right|<1 \quad \iff \quad -1<\frac{2\alpha+1}{12}<1\\ &\iff \quad -12<2\alpha+1<12 \quad \iff -\frac{13}{2}<\alpha<\frac{11}{2}. \end{aligned}$$

(b) Per trovare i valori di α richiesti, procediamo esattamente come nel punto (a): calcoliamo il raggio spettrale $\rho(G)$, dove G è la matrice d'iterazione del metodo di Gauss-Seidel applicato a un sistema lineare di matrice A, e determiniamo i valori di α per i quali $\rho(G)<1$. Sia

$$E = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0\\ \alpha & 3 & 0\\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

la parte triangolare inferiore di A. In base a un'osservazione "famosa", gli autovalori di $G=E^{-1}(E-A)$ sono le soluzioni dell'equazione $\det(\lambda E+A-E)=0$. Si ha

$$\det(\lambda E+A-E) = \begin{vmatrix} 2\lambda & 1 & 0\\ \alpha\lambda & 3\lambda & 1\\ 0 & \lambda & 4\lambda \end{vmatrix} = 2\lambda(12\lambda^2-\lambda)-4\alpha\lambda^2 = 2\lambda^2(12\lambda-1-2\alpha),$$

per cui gli autovalori di G sono $0, 0, \frac{2\alpha+1}{12}$. Dunque,

$$\rho(G) = \left|\frac{2\alpha+1}{12}\right|.$$

In conclusione, il metodo di Gauss-Seidel è convergente se e solo se

$$\begin{aligned} \rho(G)<1 \quad &\iff \quad \left|\frac{2\alpha+1}{12}\right|<1 \quad \iff \quad -1<\frac{2\alpha+1}{12}<-1 \quad \iff \quad -12<2\alpha+1<12\\ &\iff \quad -\frac{13}{2}<\alpha<\frac{11}{2}. \end{aligned}$$

Laurea in Informatica – Laurea in Ingegneria Civile – Laurea in Ingegneria Energetica

Calcolo Numerico

Esame del 11/07/2023

Esercizio 1. Sia $f(x) = (x - a)\sin(\pi x)$, dove $a \in \mathbb{R}$, e siano $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$.

(a) Consideriamo le due approssimazioni $p(x)$ e $q(x)$ di $f(x)$ costruite nel modo seguente:
- $p(x)$ è il polinomio d'interpolazione di $f(x)$ sui nodi x_0, x_1, x_2;
- $q(x) = (x - a)s(x)$, dove $s(x)$ è il polinomio d'interpolazione di $\sin(\pi x)$ sui nodi x_0, x_1, x_2.

Scrivere $p(x)$ e $q(x)$ in forma canonica.

(b) Consideriamo le due approssimazioni $p(\frac{3}{2})$ e $q(\frac{3}{2})$ di $f(\frac{3}{2})$. Stabilire per quali valori di a l'approssimazione $p(\frac{3}{2})$ è migliore e per quali valori di a l'approssimazione $q(\frac{3}{2})$ è migliore.

Esercizio 2. Sia $f(x) = \log(1 + x)$.

(a) Calcolare $I = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ e $J = \int_0^1 p(x)\mathrm{d}x$, dove $p(x)$ è il polinomio d'interpolazione di $f(x)$ sui nodi $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$.
Suggerimento. Per calcolare I, notare che $f(x) = 1 \cdot f(x)$ e applicare il metodo d'integrazione per parti.

(b) Sia $\delta = |I - J|$ l'errore commesso approssimando I con J. Sia inoltre I_n la formula dei trapezi di ordine n per approssimare I. Determinare un n tale che I_n fornisca un'approssimazione di I con errore $|I - I_n| \leq \delta$.

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5\mathrm{i} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7\mathrm{i} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 20\mathrm{i} \end{bmatrix}.$$

(a) Localizzare nel modo più preciso possibile gli autovalori di A.

(b) Fornire la stima più precisa possibile del raggio spettrale $\rho(A)$ sulla base della localizzazione del punto (a).

(c) Dimostrare che se λ è un autovalore di modulo minimo di A allora $|\lambda| > 3$.

(d) Sia $11 \leq \alpha \leq 19$. Per ciascuno degli autovalori λ di A, dire quanto vale il limite

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|\lambda|^n}{\alpha^n}.$$

Esercizio 4. Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -12 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Supponiamo di voler risolvere un sistema lineare di matrice A usando il metodo iterativo associato alla decomposizione $A = M - (M - A)$ con $M = \frac{1}{\omega}D$, dove D è la parte diagonale di A (come nel metodo di Jacobi) e $\omega > 0$ è un parametro positivo assegnato. Questo metodo di chiama *metodo di Jacobi con rilassamento*. Il parametro ω si chiama *parametro di rilassamento*. Osserviamo che per $\omega = 1$ si ha $M = D$ e dunque si ottiene il metodo di Jacobi classico.

(a) Sia J_ω la matrice d'iterazione del metodo di Jacobi con rilassamento. Calcolare il raggio spettrale $\rho(J_\omega)$ in funzione di ω.

(b) Stabilire per quali valori di ω il metodo di Jacobi con rilassamento risulta convergente.

(c) Determinare il valore ω_{opt} di ω tale che la velocità di convergenza del metodo di Jacobi con rilassamento risulta massima. Determinare inoltre il raggio spettrale $\rho(J_\omega)$ per $\omega = \omega_{\text{opt}}$.

Laurea in Informatica – Laurea in Ingegneria Civile – Laurea in Ingegneria Energetica

Calcolo Numerico

Esame del 01/09/2023

Esercizio 1. Sia $f(x) = \sin(\pi x)$.

(a) Calcolare $I = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

(b) Calcolare $I(a) = \int_0^1 p(x)\mathrm{d}x$, dove $p(x)$ è il polinomio d'interpolazione di $f(x)$ sui nodi $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = a$ e $a \in (\frac{1}{2}, 1]$ è un parametro fissato. Osserviamo che $I(a)$ può essere vista come un'approssimazione di I che cambia a seconda del valore di a.

(c) Determinare il valore ottimale di $a \in \{\frac{3}{5}, \frac{3}{4}, 1\}$ tale per cui l'approssimazione di I data da $I(a)$ risulta migliore. Chiamiamo a_* il valore ottimale ottenuto.

(d) Sia I_n la formula dei trapezi di ordine n per approssimare I. Per ogni fissato $\varepsilon > 0$, determinare un intero n tale che $|I_n - I| \le \varepsilon$. Quanto vale n se $\varepsilon = |I - I(a_*)|$?

Esercizio 2. Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & \alpha \\ 1 & 4 & \mathrm{i} \\ \alpha & 0 & 7 \end{bmatrix},$$

dove $\alpha \in (0, 1)$ è un parametro assegnato.

(a) Localizzare nel modo più preciso possibile gli autovalori di A.

(b) Fornire la stima più precisa possibile del raggio spettrale $\rho(A)$ sulla base della localizzazione del punto (a).

(c) Dimostrare che i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel *non* possono essere utilizzati per risolvere un sistema lineare di matrice A.

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 3 \end{bmatrix},$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}$ è un parametro assegnato.

(a) Calcolare $\rho(A)$ in funzione di α.

(b) Calcolare $\|A\|_\infty$ in funzione di α.

(c) È vero che $\rho(A) \le \|A\|_\infty$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$? Motivare la risposta.

Esercizio 4. Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \alpha \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

dove $\alpha \neq 4$. Poiché $\det(A) = 4 - \alpha$, la matrice A è invertibile per ogni $\alpha \neq 4$.

(a) Stabilire per quali valori di α il metodo di Gauss-Seidel applicato a un sistema lineare di matrice A risulta convergente.

(b) Consideriamo il metodo di Gauss-Seidel modificato, cioè il metodo iterativo associato alla decomposizione $A = M - (M - A)$ in cui il precondizionatore M è dato dalla parte triangolare *superiore* di A (inclusa la diagonale). Stabilire per quali valori di α il metodo di Gauss-Seidel modificato applicato a un sistema lineare di matrice A risulta convergente.

(c) Per ciascun valore di α nell'intervallo $(-8, -\frac{1}{6})$, stabilire quale fra il metodo di Gauss-Seidel e il metodo di Gauss-Seidel modificato conviene utilizzare per risolvere un sistema lineare di matrice A e motivare la risposta.

Laurea in Informatica – Laurea in Ingegneria Civile – Laurea in Ingegneria Energetica

Calcolo Numerico

Esame del 18/09/2023

Esercizio 1. Sia $f(x) = 3\sqrt{|\cos(\pi x)|}$.

(a) Sia $p(x)$ il polinomio d'interpolazione di $f(x)$ sui nodi $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$, $x_3 = \frac{3}{2}$. Calcolare $p(2)$ utilizzando l'algoritmo di valutazione in un punto del polinomio d'interpolazione studiato durante il corso. Si scrivano esplicitamente tutti i passaggi dell'algoritmo.

(b) Sia

$$I = \int_0^{1/4} f(x)\mathrm{d}x.$$

Osserviamo che $\cos(\pi x) > 0$ per ogni $x \in [0, 1/4]$. Fissato $\varepsilon > 0$, determinare un n tale che la formula dei trapezi I_n fornisca un'approssimazione di I con errore $|I - I_n| \le \varepsilon$.

(c) Calcolare un'approssimazione di I con errore ≤ 0.01.

Esercizio 2. Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 3 & \mathrm{i} \\ \alpha & -\mathrm{i} & 1 \end{bmatrix},$$

dove α è un parametro assegnato tale che $0 < \alpha < 2$ e $\alpha \neq \sqrt{6}/3$ (quest'ultima condizione su α serve a far sì che A sia invertibile).

(a) Localizzare nel modo più preciso possibile gli autovalori di A. La matrice A possiede autovalori reali? Motivare la risposta.

(b) Fornire la stima più precisa possibile del raggio spettrale $\rho(A)$ sulla base della localizzazione del punto (a).

(c) Determinare i valori di α per i quali la matrice A è definita positiva. Come può essere migliorata la localizzazione del punto (a) per tali valori di α? Motivare la risposta.

(d) Determinare i valori di α per i quali il metodo di Gauss-Seidel applicato a un sistema lineare di matrice A risulta convergente. Che cosa si nota confrontando tali valori di α con quelli ottenuti nel punto (c)?

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & -3 \end{bmatrix},$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}$ è un parametro assegnato.

(a) Sia $C_A(\lambda)$ il polinomio caratteristico di A. Calcolare esplicitamente $C_A(A)$. Che cosa si nota?

(b) Utilizzando il risultato del punto (a), scrivere A^2 come $q(A)$, dove $q(\lambda)$ è un polinomio di grado 1.

(c) Calcolare $\rho(A)$ in funzione di α.

(d) Calcolare $\|A\|_1$ in funzione di α.

(e) È vero che $\rho(A) \le \|A\|_1$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$? Motivare la risposta.

(f) Stabilire per quali valori di α risulta

$$\lim_{k\to\infty} \frac{A^k}{4^k} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Laurea in Informatica – Laurea in Ingegneria Civile – Laurea in Ingegneria Energetica

Calcolo Numerico

Esame del 29/01/2024

Esercizio 1. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione assegnata e siano x_0, x_1, x_2 tre punti distinti di $[a, b]$ tali che

$$f(x_i) = x_i + 2, \qquad i = 0, 1, 2.$$

(a) Scrivere in forma canonica il polinomio d'interpolazione di $f(x)$ sul nodo x_0.
(b) Scrivere in forma canonica il polinomio d'interpolazione di $f(x)$ sui nodi x_0, x_1.
(c) Scrivere in forma canonica il polinomio d'interpolazione di $f(x)$ sui nodi x_0, x_1, x_2.

Esercizio 2. Sia $f(x) = \mathrm{e}^{-\alpha x^2}$, dove $\alpha > 0$ è un parametro assegnato, e sia I_n la formula dei trapezi di ordine n per approssimare $I = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.
(a) Calcolare I_3.
(b) Per ogni fissato $\varepsilon > 0$ determinare un intero n tale che $|I_n - I| \le \varepsilon$. Quanto vale n se $\varepsilon = 10^{-7}$ e $\alpha = 1$?

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\mathrm{i}}{2} \\ \frac{1}{2} & 1+\mathrm{i} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 4 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 5 \end{bmatrix}.$$

(a) Localizzare nel modo più preciso possibile gli autovalori di A.
(b) Possiamo affermare che la matrice A possiede almeno un autovalore reale? Motivare la risposta.
(c) Fornire la stima più precisa possibile del raggio spettrale $\rho(A)$ sulla base della localizzazione del punto (a).
(d) Stabilire se la matrice A è definita positiva.

Esercizio 4. Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2a & -2 & -9 \\ 0 & 2 & 1 & \frac{9}{2} \\ 4 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

dove $a \ge 0$. Poiché $\det(A) = 8 + 8a$, la matrice A è invertibile qualunque sia $a \ge 0$.
(a) Stabilire per quali valori di a il metodo di Gauss-Seidel applicato a un sistema lineare di matrice A risulta convergente.
(b) Dimostrare che la matrice

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2a & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ottenuta dalla matrice A ponendo uguali a 0 tutti gli elementi sull'ultima riga e colonna tranne l'elemento in posizione $(4, 4)$, è invertibile qualunque sia $a \ge 0$.
(c) Stabilire per quali valori di a il metodo associato alla decomposizione $A = M - (M - A)$ per risolvere un sistema lineare di matrice A risulta convergente.
(d) Per i valori di a per i quali entrambi i metodi ai punti (a) e (c) sono convergenti, stabilire quale dei due converge più velocemente.

Laurea in Informatica – Laurea in Ingegneria Civile – Laurea in Ingegneria Energetica

Calcolo Numerico

Esame del 19/02/2024

Esercizio 1. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione assegnata e siano $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$ otto punti distinti di $[a, b]$ tali che

$$f(x_i) = x_i^2 + x_i + \alpha, \qquad i = 0, \ldots, 7,$$

dove $\alpha > 0$ è una costante fissata.

(a) Scrivere in forma canonica il polinomio d'interpolazione $p(x)$ di $f(x)$ sui nodi x_0, x_7.
Quanto vale $p(x)$ nel caso in cui $x_7 = -x_0 = \sqrt{\alpha}$?

(b) Scrivere in forma canonica il polinomio d'interpolazione $q(x)$ di $f(x)$ sui nodi $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$.

Esercizio 2. Sia $f(x) = \mathrm{e}^{-\alpha x^2}$, dove $\alpha > 0$ è una costante fissata, e sia $p(x)$ il polinomio d'interpolazione di $f(x)$ sui nodi $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$.

(a) Fornire una stima dell'errore d'interpolazione $|f(x) - p(x)|$ per ogni $x \in [0, 1]$, cioè determinare una costante C_α, che può dipendere dalla costante fissata α, tale che $|f(x) - p(x)| \le C_\alpha$ per ogni $x \in [0, 1]$.

(b) Dimostrare che

$$\left| \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \int_0^1 p(x)\mathrm{d}x \right| \le C_\alpha,$$

dove C_α è la costante determinata nel punto (a).

(c) Determinare un intero n_α, che può dipendere dalla costante fissata α, tale che $|I_{n_\alpha} - I| \le C_\alpha$, dove C_α è la costante determinata nel punto (a), $I = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$, e per ogni $n \ge 1$ il simbolo I_n denota la formula dei trapezi di ordine n per approssimare I. Quanto vale n_α se $\alpha = \frac{1}{5}$?

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \mathrm{i} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 4 + 4\mathrm{i} \end{bmatrix}.$$

(a) Localizzare nel modo più preciso possibile gli autovalori di A.

(b) Fornire la stima più precisa possibile del raggio spettrale $\rho(A)$ sulla base della localizzazione del punto (a).

(c) Dimostrare che -1 è un autovalore di A.

Esercizio 4. Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2a & 1 \\ \frac{1}{a} & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

dove $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Poiché $\det(A) = \frac{2a^2+1}{a}$, la matrice A è invertibile qualunque sia $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(a) Stabilire per quali valori di a il metodo di Gauss-Seidel applicato a un sistema lineare di matrice A risulta convergente.

(b) Stabilire per quali valori di a la matrice A risulta definita positiva.

Laurea in Informatica – Laurea in Ingegneria Civile – Laurea in Ingegneria Energetica

Calcolo Numerico

Esame del 17/06/2024

Esercizio 1. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un polinomio di grado ≤ 3.

(a) Dimostrare che se $n \geq 3$ e $p(x)$ è il polinomio d'interpolazione di $f(x)$ su $n+1$ nodi distinti qualsiasi $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, allora $p(x)$ coincide con $f(x)$.

(b) Supponiamo di sapere che $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $f(3) = a$, dove $a \in \mathbb{R}$ è un numero assegnato. Scrivere in forma canonica il polinomio $f(x)$.

(c) Esistono dei valori di a per i quali il polinomio $f(x)$ del punto (b) ha grado strattemente minore di 3? In caso affermativo, determinare tali valori di a.

Esercizio 2. Sia $f(x) = \sin(\pi x)$ e sia $I = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

(a) Sia $p(x)$ il polinomio d'interpolazione di $f(x)$ sui nodi $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$. Calcolare gli integrali I e $\tilde{I} = \int_0^1 p(x)\mathrm{d}x$, e l'errore $|\tilde{I} - I|$.

(b) Sia I_n la formula dei trapezi di ordine n per approssimare I. Per ogni fissato $\varepsilon > 0$ determinare un n tale che $|I_n - I| \leq \varepsilon$.

(c) Posto $\varepsilon = |\tilde{I} - I|$, determinare un $\hat{n}$ tale che $|I_{\hat{n}} - I| \leq \varepsilon$. Calcolare successivamente $I_{\hat{n}}$ e verificare che effettivamente risulta $|I_{\hat{n}} - I| \leq \varepsilon$.

Esercizio 3. Sia $0 < a \leq 1$ un numero fissato e si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{a}{2} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \frac{a}{2} \\ 0 & 0 & a\mathrm{i} & 5 - 5\mathrm{i} \end{bmatrix}.$$

(a) Localizzare nel modo più preciso possibile gli autovalori di A.

(b) Fornire la stima più precisa possibile del raggio spettrale $\rho(A)$ sulla base della localizzazione del punto (a).

Esercizio 4. Sia $a \in \mathbb{R}$ e si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}.$$

(a) Stabilire per quali valori di a la matrice A è definita positiva.

(b) Utilizzando il principio d'induzione e la convenzione che $\alpha^0 = 1$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, dimostrare che per ogni $k \geq 1$ vale la seguente proprietà $\mathscr{P}(k)$: [1]

$$A^k = \begin{bmatrix} a^k & ka^{k-1} \\ 0 & a^k \end{bmatrix}.$$

(c) Stabilire per quali valori di a risulta che $A^n \to O$ per $n \to \infty$.

(d) Assumiamo che $a \neq 0$, in modo tale che la matrice A sia invertibile e i suoi elementi diagonali siano diversi da 0. Stabilire per quali valori di a il metodo di Gauss-Seidel applicato a un sistema lineare di matrice A risulta convergente.

[1] Ricordiamo il principio d'induzione: per dimostrare che una data proprietà $\mathscr{P}(k)$ vale ogni numero naturale $k \geq 1$ è sufficiente dimostrare che:

- la proprietà $\mathscr{P}(1)$ vale;
- fissato $k \geq 1$ e assunto che la proprietà $\mathscr{P}(k)$ valga, si deduce che anche la proprietà $\mathscr{P}(k+1)$ vale.

Esercizio 1. Sia $f(x) = \frac{6x}{x+1}$.

(a) Scrivere in forma canonica il polinomio d'interpolazione $p(x)$ di $f(x)$ sui nodi $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$.

(b) Supponiamo di aggiungere il nodo $x_3 = a$ con $a \in (-1, \infty) \setminus \{0, \frac{1}{2}, 1\}$. Scrivere in forma canonica il polinomio d'interpolazione $q(x)$ di $f(x)$ sui nodi x_0, x_1, x_2, x_3.

(c) Dire quali sono i valori di a per i quali $q(2)$ fornisce un'approssimazione di $f(2)$ migliore di $p(2)$.

Soluzione.

(a) Conviene iniziare a scrivere il polinomio $p(x)$ in forma di Lagrange o in forma di Newton, e poi portarlo in forma canonica successivamente, sviluppando i calcoli. Poiché il punto (b) prevede l'aggiunta di un nodo, conviene scrivere $p(x)$ in forma di Newton anziché in forma di Lagrange. Scriviamo dunque $p(x)$ in forma di Newton, calcolando le differenze divise della Tabella 1. Si ha

$$\begin{aligned}
f[x_0] &= f(x_0) = 0 \\
f[x_1] &= f(x_1) = 2 \\
f[x_2] &= f(x_2) = 3 \\
f[x_0, x_1] &= \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{2 - 0}{\frac{1}{2} - 0} = 4 \\
f[x_0, x_2] &= \frac{f[x_2] - f[x_0]}{x_2 - x_0} = \frac{3 - 0}{1 - 0} = 3 \\
f[x_0, x_1, x_2] &= \frac{f[x_0, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_1} = \frac{3 - 4}{1 - \frac{1}{2}} = -2
\end{aligned}$$

Dunque la forma di Newton di $p(x)$ è data da

$$\begin{aligned}
p(x) &= f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\
&= 0 + 4(x - 0) - 2(x - 0)(x - \tfrac{1}{2}) \\
&= 4x - 2x(x - \tfrac{1}{2}).
\end{aligned}$$

Sviluppando i calcoli a partire dalla forma di Newton, otteniamo la forma canonica:

$$p(x) = 4x - 2x(x - \tfrac{1}{2}) = 5x - 2x^2.$$

(b) Sfruttando quanto già fatto nel punto (a), scriviamo il polinomio $q(x)$ in forma di Newton per poi portarlo in forma canonica successivamente, sviluppando i calcoli. La forma di Newton di $q(x)$ è

$$\begin{aligned}
q(x) &= f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\
&= p(x) + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\
&= 4x - 2x(x - \tfrac{1}{2}) + f[x_0, x_1, x_2, x_3]x(x - \tfrac{1}{2})(x - 1).
\end{aligned}$$

$$
\begin{array}{lll}
f[x_0] & & \\
f[x_1] & f[x_0,x_1] & \\
f[x_2] & f[x_0,x_2] & f[x_0,x_1,x_2]
\end{array}
$$

Tabella 1: Tabella delle differenze divise nel caso di tre nodi x_0, x_1, x_2.

$$
\begin{array}{llll}
f[x_0] & & & \\
f[x_1] & f[x_0,x_1] & & \\
f[x_2] & f[x_0,x_2] & f[x_0,x_1,x_2] & \\
f[x_3] & f[x_0,x_3] & f[x_0,x_1,x_3] & f[x_0,x_1,x_2,x_3]
\end{array}
$$

Tabella 2: Tabella delle differenze divise nel caso di quattro nodi x_0, x_1, x_2, x_3.

L'unica cosa da calcolare è $f[x_0, x_1, x_2, x_3]$, che si ottiene calcolando le differenze divise dell'ultima riga della Tabella 2. Si ha

$$
\begin{aligned}
f[x_3] &= f(x_3) = \frac{6a}{a+1} \\
f[x_0, x_3] &= \frac{f[x_3] - f[x_0]}{x_3 - x_0} = \frac{\frac{6a}{a+1} - 0}{a - 0} = \frac{6}{a+1} \\
f[x_0, x_1, x_3] &= \frac{f[x_0, x_3] - f[x_0, x_1]}{x_3 - x_1} = \frac{\frac{6}{a+1} - 4}{a - \frac{1}{2}} = \frac{6 - 4(a+1)}{(a - \frac{1}{2})(a+1)} = \frac{2(1-2a)}{\frac{1}{2}(2a-1)(a+1)} = -\frac{4}{a+1} \\
f[x_0, x_1, x_2, x_3] &= \frac{f[x_0, x_1, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_2} = \frac{-\frac{4}{a+1} - (-2)}{a-1} = \frac{-4 + 2(a+1)}{(a-1)(a+1)} = \frac{2(a-1)}{(a-1)(a+1)} \\
&= \frac{2}{a+1}
\end{aligned}
$$

Dunque la forma di Newton di $q(x)$ è data da

$$q(x) = 4x - 2x(x - \tfrac{1}{2}) + \tfrac{2}{a+1}x(x - \tfrac{1}{2})(x-1).$$

Sviluppando i calcoli a partire dalla forma di Newton, otteniamo la forma canonica:

$$
\begin{aligned}
q(x) &= 4x - 2x(x - \tfrac{1}{2}) + \tfrac{2}{a+1}x(x - \tfrac{1}{2})(x-1) \\
&= 5x - 2x^2 + \tfrac{2}{a+1}x(x^2 - \tfrac{3}{2}x + \tfrac{1}{2}) \\
&= 5x - 2x^2 + \tfrac{2}{a+1}x^3 - \tfrac{3}{a+1}x^2 + \tfrac{1}{a+1}x \\
&= (5 + \tfrac{1}{a+1})x - (2 + \tfrac{3}{a+1})x^2 + \tfrac{2}{a+1}x^3.
\end{aligned}
$$

(c) Calcolando $f(2)$, $p(2)$ e $q(2)$, si ottiene

$$
\begin{aligned}
f(2) &= \tfrac{6\cdot 2}{2+1} = 4 \\
p(2) &= 5 \cdot 2 - 2 \cdot 2^2 = 2 \\
q(2) &= (5 + \tfrac{1}{a+1}) \cdot 2 - (2 + \tfrac{3}{a+1}) \cdot 2^2 + \tfrac{2}{a+1} \cdot 2^3 = 2 + \tfrac{6}{a+1}
\end{aligned}
$$

I valori di a per i quali $q(2)$ fornisce un'approssimazione di $f(2)$ migliore di $p(2)$ sono i valori di a tali che l'errore $|q(2) - f(2)|$ risulta minore dell'errore $|p(2) - f(2)|$. Si ha

$$\begin{aligned} |q(2) - f(2)| < |p(2) - f(2)| &\iff \left|-2 + \tfrac{6}{a+1}\right| < 2 \\ &\iff -2 < -2 + \tfrac{6}{a+1} < 2 \\ &\iff 0 < \tfrac{6}{a+1} < 4 \\ &\iff 0 < 6 < 4(a+1)^* \\ &\iff 6 < 4a + 4^\dagger \\ &\iff a > \tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

In conclusione, i valori di a per i quali $q(2)$ fornisce un'approssimazione di $f(2)$ migliore di $p(2)$ sono i valori in $(\frac{1}{2}, \infty)$.

Esercizio 2. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^2[a, b]$, sia I_n la formula dei trapezi di ordine n per approssimare $I = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, e sia $\{a_n\}_n$ una successione di numeri reali positivi tale che $a_n \to +\infty$. Dimostrare che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2|I_n - I|}{a_n} = 0.$$

Suggerimento. Usare il teorema sull'errore della formula dei trapezi.

Soluzione. In base al teorema sull'errore della formula dei trapezi, per ogni fissato n esiste un punto $\eta = \eta_n \in [a, b]$ (che dipenderà da n) tale che

$$|I - I_n| = \left| -\frac{(b-a)f''(\eta)}{12} h^2 \right| = \frac{(b-a)|f''(\eta)|}{12} h^2,$$

dove $h = \frac{b-a}{n}$ è il passo di discretizzazione della formula I_n. Siccome $f \in C^2[a, b]$, la derivata seconda $f''(x)$ è una funzione continua su $[a, b]$ e quindi anche il suo modulo $|f''(x)|$ è una funzione continua su $[a, b]$, essendo la funzione composta delle due funzioni continue $f''(x) : [a, b] \to \mathbb{R}$ e $|y| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Di conseguenza, per il teorema di Weierstrass, $|f''(x)|$ assume un valore massimo M sull'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$:

$$M = \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|.$$

Pertanto, per ogni fissato n si ha

$$0 \le |I - I_n| = \frac{(b-a)|f''(\eta)|}{12} h^2 = \frac{(b-a)^3|f''(\eta)|}{12n^2} \le \frac{(b-a)^3 M}{12n^2},$$

e moltiplicando per il numero positivo n^2/a_n otteniamo

$$0 \le \frac{n^2|I - I_n|}{a_n} \le \frac{(b-a)^3 M}{12a_n}.$$

Siccome $a_n \to \infty$ per ipotesi, la successione di destra $(b-a)^3M/(12a_n)$ tende a 0 per $n \to \infty$, e ovviamente anche la successione di sinistra 0, essendo identicamente nulla, tende a 0 per $n \to \infty$. In conclusione, per il teorema dei due carabinieri, la successione $n^2|I - I_n|/a_n$ tende a 0 per $n \to \infty$, e dunque la tesi è dimostrata.

*Abbiamo moltiplicato ambo i membri della disuguaglianza per $a + 1$ che è positivo essendo $a > -1$ per ipotesi.

†La disuguaglianza $0 < 6$ è sempre vera e quindi rimane solo la disuguaglianza $6 < 4a + 4$.

Esercizio 3. Sia $0 < a < 1$ un numero fissato e si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} -3-3\mathrm{i} & 0 & \mathrm{i} & 0 \\ -1 & -3+3\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3+3\mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ 0 & a & 0 & 3-3\mathrm{i} \end{bmatrix}.$$

(a) Localizzare nel modo più preciso possibile gli autovalori di A.
(b) Fornire la stima più precisa possibile del raggio spettrale $\rho(A)$ sulla base della localizzazione del punto (a).
(c) Dimostrare che

$$\lim_{k\to\infty} \frac{A^k}{6^k} = O.$$

Soluzione.

(a) Per localizzare gli autovalori di A nel modo più preciso possibile, usiamo i teoremi di Gershgorin considerando sia i cerchi per riga K_1, K_2, K_3, K_4 che i cerchi per colonna H_1, H_2, H_3, H_4. Indicando con $\mathscr{C}(z_0, r)$ il cerchio nel piano complesso di centro z_0 e raggio r, si ha[‡]

$$\begin{aligned} K_1 &= \mathscr{C}(-3-3\mathrm{i}, 1), & H_1 &= \mathscr{C}(-3-3\mathrm{i}, 1), \\ K_2 &= \mathscr{C}(-3+3\mathrm{i}, 1), & H_2 &= \mathscr{C}(-3+3\mathrm{i}, a), \\ K_3 &= \mathscr{C}(3+3\mathrm{i}, 1), & H_3 &= \mathscr{C}(3+3\mathrm{i}, 1), \\ K_4 &= \mathscr{C}(3-3\mathrm{i}, a), & H_4 &= \mathscr{C}(3-3\mathrm{i}, 1). \end{aligned}$$

In base al primo teorema di Gershgorin, gli autovalori di A si trovano in

$$(K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup K_4) \cap (H_1 \cup H_2 \cup H_3 \cup H_4) = K_1 \cup H_2 \cup K_3 \cup K_4;$$

si veda la Figura 1.
In base al secondo teorema di Gershgorin applicato ai cerchi per riga, abbiamo un autovalore di A in K_1, uno in K_2, uno in K_3 e uno in K_4. In base al secondo teorema di Gershgorin applicato ai cerchi per colonna, abbiamo un autovalore di A in H_1, uno in H_2, uno in H_3 e uno in H_4. Mettendo assieme le informazioni, abbiamo un autovalore di A in K_1, uno in H_2, uno in K_3 e uno in K_4.
Osserviamo ora che la matrice A è irriducibile (il suo grafo contiene il ciclo $1 \to 3 \to 4 \to 2 \to 1$ che tocca tutti i nodi). Possiamo dunque applicare il terzo teorema di Gershgorin (debole). Applicandolo prima ai cerchi per riga, concludiamo che nessun punto del bordo di $K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup K_4$ può essere autovalore di A perché nessun punto del bordo di $K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup K_4$ sta sul bordo di tutti i singoli cerchi K_1, K_2, K_3, K_4. Applicandolo ai cerchi per colonna, concludiamo che nessun punto del bordo di $H_1 \cup H_2 \cup H_3 \cup H_4$ può essere autovalore di A perché nessun punto del bordo di $H_1 \cup H_2 \cup H_3 \cup H_4$ sta sul bordo di tutti i singoli cerchi H_1, H_2, H_3, H_4. Mettendo assieme le informazioni, deduciamo che nessun punto del bordo dell'insieme $K_1 \cup H_2 \cup K_3 \cup K_4$ evidenziato in verde in Figura 1 può essere un autovalore di A.
Conclusione. Abbiamo un autovalore di A in K_1 privato del bordo, uno in H_2 privato del bordo, uno in K_3 privato del bordo e uno in K_4 privato del bordo.

(b) Indichiamo con λ_1 l'autovalore di A in K_1 privato del bordo, con λ_2 l'autovalore di A in H_2 privato del bordo, con λ_3 l'autovalore di A in K_3 privato del bordo e con λ_4 l'autovalore di A in K_4 privato del bordo. Facciamo le seguenti osservazioni relative a K_1 e all'autovalore λ_1 in esso contenuto.

[‡]Si tenga presente che $|\mathrm{i}| = |-\mathrm{i}| = 1$ e $0 < a < 1$.

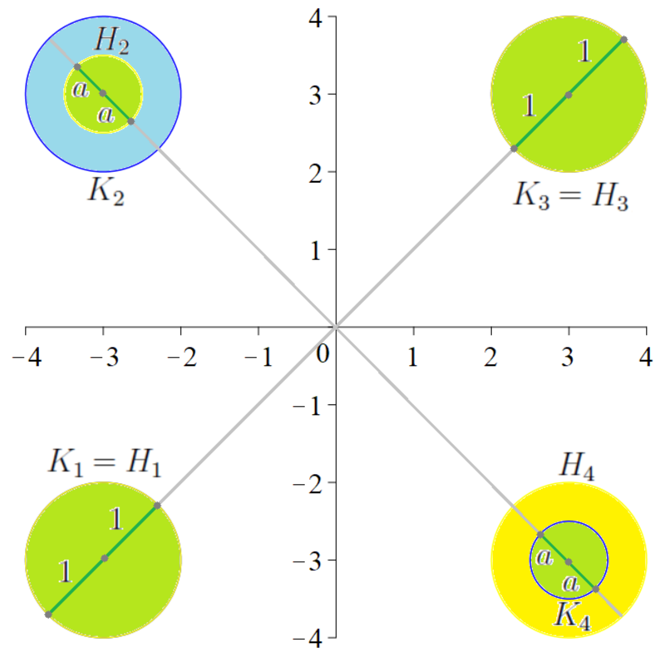

Figura 1: Cerchi di Gershgorin per riga K_1, K_2, K_3, K_4 (in blu) e per colonna H_1, H_2, H_3, H_4 (in giallo) della matrice A dell'Esercizio 3. L'intersezione $(K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup K_4) \cap (H_1 \cup H_2 \cup H_3 \cup H_4) = K_1 \cup H_2 \cup K_3 \cup K_4$ è evidenziata in verde.

- Il centro di K_1 è $-3-3\mathrm{i}$ e la sua distanza da 0 è $|-3-3\mathrm{i}| = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$.
- Il punto di K_1 più vicino a 0 è il punto grigio segnato in Figura 1 che si trova a "nord-est" del centro $-3-3\mathrm{i}$. Infatti, questo punto grigio sta sul bordo del cerchio di centro 0 e raggio $3\sqrt{2}-1$, per cui la sua distanza da 0 è $3\sqrt{2}-1$. Invece, tutti gli altri punti di K_1 stanno fuori dal cerchio di centro 0 e raggio $3\sqrt{2}-1$, per cui la loro distanza da 0 è maggiore di $3\sqrt{2}-1$.
- Il punto di K_1 più lontano da 0 è il punto grigio segnato in Figura 1 che si trova a "sud-ovest" del centro $-3-3\mathrm{i}$. Infatti, questo punto grigio sta sul bordo del cerchio di centro 0 e raggio $3\sqrt{2}+1$, per cui la sua distanza da 0 è $3\sqrt{2}+1$. Invece, tutti gli altri punti di K_1 stanno all'interno del cerchio di centro 0 e raggio $3\sqrt{2}+1$, per cui la loro distanza da 0 è minore di $3\sqrt{2}+1$.
- Siccome $|\lambda_1|$ è la distanza di λ_1 da 0 e siccome λ_1 sta in K_1 privato del bordo, dalle due osservazioni precedenti deduciamo che
$$3\sqrt{2}-1 < |\lambda_1| < 3\sqrt{2}+1.$$

Utilizzando osservazioni simili alle precedenti per i cerchi H_2, K_3, K_4 e per gli autovalori λ_2, λ_3, λ_4 in essi contenuti, deduciamo che

$$3\sqrt{2}-a < |\lambda_2| < 3\sqrt{2}+a, \qquad 3\sqrt{2}-1 < |\lambda_3| < 3\sqrt{2}+1, \qquad 3\sqrt{2}-a < |\lambda_4| < 3\sqrt{2}+a.$$

Questo ci permette di concludere che[§]

$$\rho(A) = \max(|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|, |\lambda_4|) \geq |\lambda_2| > 3\sqrt{2}-a,$$
$$\rho(A) = \max(|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|, |\lambda_4|) < 3\sqrt{2}+1,$$

e dunque

$$3\sqrt{2}-a < \rho(A) < 3\sqrt{2}+1.$$

[§]Si ricordi che $0 < a < 1$.

(c) In base a un teorema noto, indicando con O la matrice nulla, per ogni matrice quadrata B si ha

$$\lim_{k\to\infty} B^k = O \qquad \Longleftrightarrow \qquad \rho(B) < 1.$$

La matrice $B = A/6$ è un polinomio di A, precisamente $B = p(A)$ con $p(\lambda) = \lambda/6$. Pertanto, in base a un altro teorema noto, gli autovalori di B sono $\lambda_1/6$, $\lambda_2/6$, $\lambda_3/6$, $\lambda_4/6$, dove λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 sono gli autovalori di A. Siccome $\rho(A) < 3\sqrt{2}+1 \approx 5.24 < 6$, risulta

$$\begin{aligned}\rho(B) &= \max\left(\left|\frac{\lambda_1}{6}\right|, \left|\frac{\lambda_2}{6}\right|, \left|\frac{\lambda_3}{6}\right|, \left|\frac{\lambda_4}{6}\right|\right) = \max\left(\frac{|\lambda_1|}{6}, \frac{|\lambda_2|}{6}, \frac{|\lambda_3|}{6}, \frac{|\lambda_4|}{6}\right) = \frac{1}{6}\max(|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|, |\lambda_4|)\\ &= \frac{\rho(A)}{6} < 1\end{aligned}$$

e dunque

$$\lim_{k\to\infty} \frac{A^k}{6^k} = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{A}{6}\right)^k = \lim_{k\to\infty} B^k = O.$$

Esercizio 4. Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -12 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Supponiamo di voler risolvere un sistema lineare di matrice A usando il metodo iterativo associato alla decomposizione $A = M - (M - A)$ con $M = \frac{1}{\omega}E$, dove E è la parte triangolare inferiore di A (come nel metodo di Gauss-Seidel) e $\omega > 0$ è un parametro positivo assegnato. Osserviamo che per $\omega = 1$ si ha $M = E$ e dunque si ottiene il metodo di Gauss-Seidel.

(a) Sia G_ω la matrice d'iterazione del metodo assegnato. Calcolare il raggio spettrale $\rho(G_\omega)$ in funzione di ω.
(b) Stabilire per quali valori di ω il metodo assegnato risulta convergente.
(c) Determinare il valore ω_{opt} di ω tale che la velocità di convergenza del metodo assegnato risulta massima. Determinare inoltre il raggio spettrale $\rho(G_\omega)$ per $\omega = \omega_{\text{opt}}$.
(d) Nel caso in cui $\omega = \omega_{\text{opt}}$, partendo dal vettore iniziale nullo, calcolare le prime due iterazioni del metodo assegnato per risolvere il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $\mathbf{b} = [1, 0]^T$.

Soluzione. (a) Per calcolare il raggio spettrale $\rho(G_\omega)$ potremmo sfruttare un'osservazione "famosa" ed evitare di calcolare esplicitamente G_ω. Tuttavia, il calcolo di G_ω per $\omega = \omega_{\text{opt}}$ sarebbe comunque necessario per risolvere il punto (d), per cui tanto vale calcolare subito G_ω per ogni $\omega > 0$. Poiché

$$M = \frac{1}{\omega}E = \frac{1}{\omega}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\omega} & 0 \\ \frac{1}{\omega} & \frac{3}{\omega} \end{bmatrix},$$

si ha¶

$$M^{-1} = \frac{1}{6/\omega^2}\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{\omega} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \frac{3}{\omega} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \frac{2}{\omega} & 1 \\ \frac{1}{\omega} & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \frac{2}{\omega} & 0 \\ \frac{1}{\omega} & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \frac{\omega^2}{6}\begin{bmatrix} \frac{3}{\omega} & 0 \\ -\frac{1}{\omega} & \frac{2}{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{\frac{\omega}{2}} & \boxed{0} \\ -\frac{\omega}{6} & \boxed{\frac{\omega}{3}} \end{bmatrix},$$

¶Le componenti riquadrate erano già note senza ricorrere alla formula per l'inversa di una matrice. Ricordiamo infatti che *l'inversa di una matrice triangolare inferiore è ancora una matrice triangolare inferiore con elementi diagonali dati dagli inversi di quelli della matrice di partenza.*

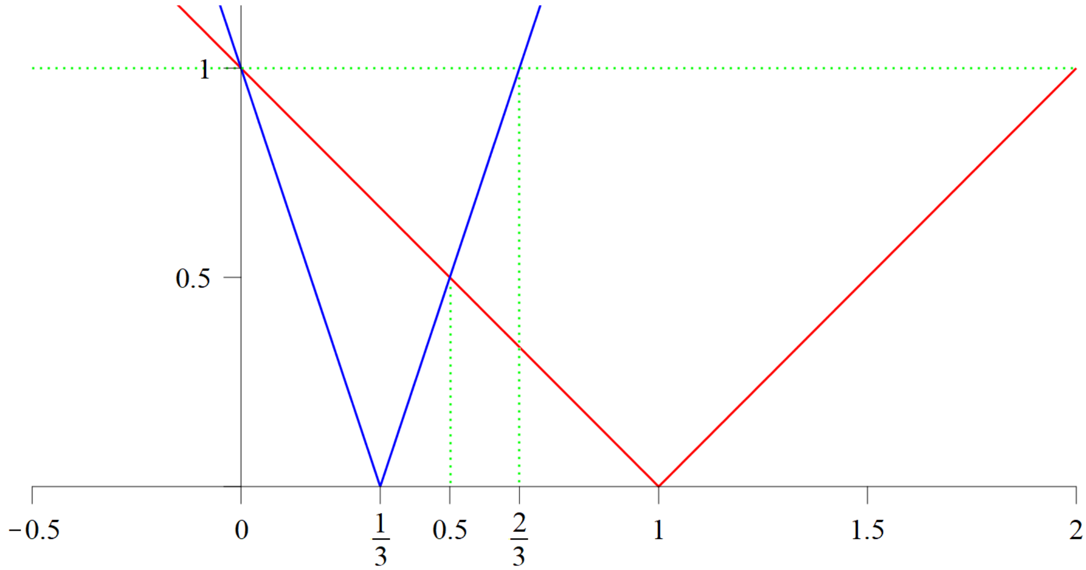

Figura 2: Grafici delle funzioni $|1-\omega|$ (rosso) e $|1-3\omega|$ (blu).

per cui

$$G_\omega = M^{-1}(M-A) = \begin{bmatrix} \frac{\omega}{2} & 0 \\ -\frac{\omega}{6} & \frac{\omega}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{\omega}-2 & 12 \\ \frac{1}{\omega}-1 & \frac{3}{\omega}-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\omega & 6\omega \\ 0 & 1-3\omega \end{bmatrix}.$$

Poiché G_ω è una matrice triangolare superiore, possiamo subito affermare che gli autovalori di G_ω sono gli elementi diagonali, cioè $1-\omega$ e $1-3\omega$. Dunque,

$$\rho(G_\omega) = \max(|1-\omega|, |1-3\omega|).$$

(b) Il metodo assegnato è convergente per i valori di ω tali che $\rho(G_\omega) < 1$. Si ha

$$\rho(G_\omega) < 1 \quad\iff\quad \begin{cases} |1-\omega| < 1 \\ |1-3\omega| < 1 \end{cases} \quad\iff\quad \begin{cases} -1 < 1-\omega < 1 \\ -1 < 1-3\omega < 1 \end{cases} \quad\iff\quad \begin{cases} 0 < \omega < 2 \\ 0 < \omega < \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

$$\iff\quad 0 < \omega < \frac{2}{3}.$$

In conclusione, il metodo assegnato è convergente per $0 < \omega < \frac{2}{3}$ e non convergente per gli altri valori di ω.

(c) Il valore ω_{opt} di ω che rende massima la velocità di convergenza del metodo assegnato è quello che minimizza il raggio spettrale $\rho(G_\omega)$. Dobbiamo quindi cercare il valore di ω che minimizza il raggio spettrale $\rho(G_\omega) = \max(|1-\omega|, |1-3\omega|)$. Optiamo per una risoluzione grafica. La Figura 2 mostra i grafici delle funzioni $|1-\omega|$ e $|1-3\omega|$, da cui si vede che il valore di ω che rende minimo $\rho(G_\omega)$ è $\omega_{\text{opt}} = \frac{1}{2}$. Il valore ω_{opt} è l'ascissa del punto d'intersezione delle rette di equazione $y = 1-\omega$ e $y = -1+3\omega$, e si ottiene risolvendo l'equazione $1-\omega = -1+3\omega$. Per $\omega = \omega_{\text{opt}} = \frac{1}{2}$ si ottiene il raggio spettrale minimo $\rho(G_{\omega_{\text{opt}}}) = \rho(G_{1/2}) = \max(|1-\frac{1}{2}|, |1-\frac{3}{2}|) = \frac{1}{2}$.

(d) Calcoliamo le prime 2 iterazioni del metodo assegnato per risolvere $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ partendo dal vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = [0,0]^T$ e fissando $\omega = \omega_{\text{opt}}$. L'equazione del metodo assegnato è la seguente:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = G_\omega \mathbf{x}^{(k)} + M^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1-\omega & 6\omega \\ 0 & 1-3\omega \end{bmatrix} \mathbf{x}^{(k)} + \begin{bmatrix} \frac{\omega}{2} & 0 \\ -\frac{\omega}{6} & \frac{\omega}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\omega & 6\omega \\ 0 & 1-3\omega \end{bmatrix} \mathbf{x}^{(k)} + \begin{bmatrix} \frac{\omega}{2} \\ -\frac{\omega}{6} \end{bmatrix}.$$

Nel caso $\omega = \omega_{\text{opt}} = \frac{1}{2}$, l'equazione del metodo diventa

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 3 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \mathbf{x}^{(k)} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{12} \end{bmatrix}.$$

Le prime 2 iterazioni partendo da $\mathbf{x}^{(0)} = [0, 0]^T$ sono

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 3 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{12} \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 3 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{24} \end{bmatrix}.$$

Laurea in Informatica – Laurea in Ingegneria Civile – Laurea in Ingegneria Energetica

Calcolo Numerico

Esame del 02/09/2024

Esercizio 1. Sia $[a, b]$ un fissato intervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$ e si consideri la funzione

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \mathrm{e}^x.$$

Siano $x_0, x_1, \ldots, x_n$ gli $n + 1$ nodi uniformi in $[a, b]$ dati da

$$x_i = a + i\,\frac{b-a}{n}, \qquad i = 0, 1, \ldots, n,$$

e sia $p_n(x)$ il polinomio d'interpolazione di $f(x)$ su $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Sia infine

$$M_n = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - p_n(x)|$$

il massimo errore commesso approssimando $f(x)$ con $p_n(x)$ quando x varia in $[a, b]$. Dimostrare che

$$\lim_{n\to\infty} M_n = 0.$$

Suggerimento. Usare il teorema sull'errore dell'interpolazione polinomiale e osservare che per dimostrare il risultato non è necessario calcolare il massimo M_n.

Esercizio 2. Sia $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$, sia

$$I = \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 0.88208139076242...$$

e sia I_n la formula dei trapezi di ordine n per approssimare I.

(a) Calcolare I_3 e I_6 mostrando fino alla settima cifra decimale.

(b) Applicare la procedura di estrapolazione usando le formule dei trapezi I_3 e I_6 per calcolare il valore estrapolato E. Stabilire quale fra I_3, I_6, E fornisce l'approssimazione migliore di I.

(c) Per ogni fissato $\varepsilon > 0$, determinare un intero n tale che $|I_n - I| \le \varepsilon$. Quanto vale n se $\varepsilon = |E - I|$?

Esercizio 3. Sia $0 < a < 1$ un numero fissato e si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & \mathrm{i} & 0 \\ -1 & 7\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -\mathrm{i} \\ 0 & a & 0 & -5\mathrm{i} \end{bmatrix}.$$

(a) Localizzare nel modo più preciso possibile gli autovalori di A.

(b) Fornire la stima più precisa possibile del raggio spettrale $\rho(A)$ sulla base della localizzazione del punto (a).

(c) Sulla base della stima del punto (b), dire se esiste e, in caso affermativo, qual è il più piccolo numero positivo $\alpha > 0$ per il quale si ha certezza che

$$\lim_{k\to\infty} \frac{A^k}{\alpha^k} = O.$$

Motivare la risposta.

Esercizio 4. Siano $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ una matrice fissata avente autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ e $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$ un vettore fissato. Si consideri il sistema lineare

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{1}$$

e il metodo iterativo

$$\begin{aligned} &\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{C}^n \text{ dato,} \\ &\mathbf{x}^{(k+1)} = (I - \omega A)\mathbf{x}^{(k)} + \omega \mathbf{b}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{2}$$

dove $\omega \in \mathbb{R}$ è un parametro assegnato. Il metodo (2) si chiama *metodo di Richardson-Eulero*.

(a) Stabilire per quali valori di ω il metodo (2) è consistente con il sistema (1).

(b) Determinare gli autovalori e il raggio spettrale della matrice d'iterazione del metodo (2) in funzione di ω e degli autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ di A.

(c) Dimostrare che se esistono due autovalori di A che hanno parte reale di segno opposto, cioè due autovalori λ_i e λ_j tali che $\mathrm{Re}(\lambda_i)\mathrm{Re}(\lambda_j) < 0$, allora il metodo (2) non è convergente, qualunque sia il valore di ω.

Suggerimento. Può essere utile confrontare i due numeri $|1 - \omega\lambda_i|$ e $|1 - \omega\lambda_j|$ con 1, considerando prima il caso in cui $\omega \geq 0$ e poi quello in cui $\omega < 0$.

Laurea in Informatica – Laurea in Ingegneria Civile – Laurea in Ingegneria Energetica

Calcolo Numerico

Esame del 20/09/2024

Esercizio 1. Sia $f(x) = x \log(\frac{1}{2} + x)$, dove "log" indica il logaritmo naturale (logaritmo in base e).

(a) Scrivere in forma canonica il polinomio d'interpolazione $p(x)$ di $f(x)$ sui nodi $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$.

(b) Stimare l'errore d'interpolazione $|f(x) - p(x)|$ per $x \in [0, 1]$ determinando una costante C tale che $|f(x) - p(x)| \leq C$ per ogni $x \in [0, 1]$.

(c) Consideriamo l'integrale

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \frac{3}{8}\log 3 - \frac{1}{2}\log 2 = 0.065406017970...$$

Poiché il polinomio d'interpolazione $p(x)$ è un'approssimazione di $f(x)$ sull'intervallo $[0, 1]$, possiamo aspettarci che $\int_0^1 p(x)\mathrm{d}x \approx \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$. Calcolare $\tilde{I} = \int_0^1 p(x)\mathrm{d}x$ e confrontarlo con $I = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ determinando l'errore $\delta = |\tilde{I} - I|$.

(d) Sia I_n la formula dei trapezi di ordine n per approssimare I. Per ogni fissato $\varepsilon > 0$ determinare un intero n tale che $|I_n - I| \leq \varepsilon$. Determinare successivamente un intero $\bar{n}$ tale che $|I_{\bar{n}} - I| \leq \delta$, dove δ è l'errore al punto (c).

Esercizio 2. Siano $a, b \in \mathbb{R}$ e si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} a + b\mathrm{i} & 1 & \mathrm{i} & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -\mathrm{i} & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Stabilire al variare di $a, b \in \mathbb{R}$ qual è la norma ∞ della matrice A.

(b) Stabilire per quali valori di a e b la matrice A è Hermitiana.

(c) Stabilire per quali valori di a e b la matrice A è definita positiva.

(d) Supponiamo che $a = 10$ e $b = 0$, e si consideri il vettore (colonna) $\mathbf{x}_\alpha = [1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3]^T$, dove $\alpha \in \mathbb{R}$. Dimostrare che il numero

$$R(\alpha) = \mathbf{x}_\alpha^T A \mathbf{x}_\alpha$$

è reale qualunque sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e determinarne il segno (positivo, negativo o nullo) al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & \alpha \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

dove $\alpha \neq 5$. Poiché $\det(A) = 5 - \alpha$, la matrice A è invertibile qualunque sia $\alpha \neq 5$.

(a) Stabilire per quali valori di α il metodo di Gauss-Seidel applicato a un sistema lineare di matrice A risulta convergente.

(b) Consideriamo il metodo di Gauss-Seidel modificato, cioè il metodo iterativo associato alla decomposizione $A = M - (M - A)$ in cui il precondizionatore M è dato dalla parte triangolare *superiore* di A (inclusa la diagonale). Stabilire per quali valori di α il metodo di Gauss-Seidel modificato applicato a un sistema lineare di matrice A risulta convergente.

(c) Per ciascun valore di $\alpha > 0$ (con $\alpha \neq 5$), stabilire quale fra il metodo di Gauss-Seidel e il metodo di Gauss-Seidel modificato conviene utilizzare per risolvere un sistema lineare di matrice A e motivare la risposta.