Università di Roma Tor Vergata
Statistica per la ricerca sperimentale e tecnologica (Informatica) (Esercizi 1-2-3-4-5-6)
Probabilità e Statistica (Scienza e Tecnologia dei Materiali) (Esercizi 1-2-3-4-5-7)
Anno accademico: 2008-2009. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Esame del 9 Giugno 2009

Esercizio 1. Un'urna contiene 7 palline numerate da 1 a 7. Si estraggono a caso 2 palline, una alla volta con reinserimento. Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di palline con *numero pari* estratte.
D1) Trovare la densità discreta di X.
D2) Calcolare la probabilità di estrarre la sequenza $(\text{pari}, \text{dispari})$.

Esercizio 2. Consideriamo il seguente gioco. Si lancia un dado equo: se esce il *numero 1* si lanciano due dadi equi e si vince se esce almeno un numero diverso da 6 (cioè si perde solo se esce la coppia $(6,6)$); se esce un numero *diverso da 1* si lanciano due dadi equi e si vince se esce la coppia $(6,6)$.
D3) Calcolare la probabilità di vincere il gioco.
D4) Calcolare la probabilità di aver ottenuto il numero 1 nel lancio iniziale del dado sapendo di aver vinto il gioco.

Esercizio 3. La variabile aleatoria (X_1, X_2) ha la seguente densità congiunta: $p_{(X_1,X_2)}(0,3) = p_{(X_1,X_2)}(3,0) = \frac{1}{3}$; $p_{(X_1,X_2)}(1,2) = p_{(X_1,X_2)}(2,1) = \frac{1}{6}$.
D5) Calcolare $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$.
D6) Trovare la densità discreta di $Z = \max\{X_1, X_2\}$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria uniforme su $[10, 20]$.
D7) Calcolare $\mathbb{E}[e^X]$.
D8) Calcolare $P(X > 15|X < 17)$.

Esercizio 5. Sia $N_t = \sum_{n\geq 1} 1_{T_n \leq t}$ (per $t \geq 0$) un processo di Poisson con intensità di $\lambda = 2$.
D9) Calcolare $P(N_1 = 0)$ e $\mathbb{E}[N_4]$.
D10) Calcolare $P(T_1 \leq 1)$ e $\mathbb{E}[T_3]$.

Esercizio 6. Sia X una variabile aleatoria normale standard.
D11) Calcolare $P(X > 1.2)$.
Poi sia Y una variabile aleatoria normale con media 0 e varianza 4.
D12) Calcolare $P(|Y| > 2)$.

Esercizio 7. Sia (X_n) una catena di Markov omogenea con spazio degli stati $\{1, 2, 3\}$ e matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ q & 0 & 1-q \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

dove $q \in (0, 1)$ è un valore fissato arbitrariamente.
D13) Calcolare $P(X_{2n+1} = j|X_0 = 2)$ per ogni $j \in \{1, 2, 3\}$, verificando che non dipende da $n \geq 0$.
D14) Trovare la distribuzione stazionaria (dopo aver motivato esistenza e unicità).

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
`D1`) La densità discreta di X è $p_X(k) = \binom{2}{k}(\frac{3}{7})^k(1-\frac{3}{7})^{2-k}$ per $k \in \{0,1,2\}$, da cui segue $p_X(0) = \frac{16}{49}$, $p_X(1) = \frac{24}{49}$ e $p_X(2) = \frac{9}{49}$.
`D2`) La probabilità richiesta è $p_{\mathrm{PD}} = \frac{3}{7}\frac{4}{7} = \frac{12}{49}$ perché eventi legati ad estrazioni diverse sono indipendenti.

Esercizio 2. Sia V l'evento "vincere il gioco", ed E l'evento "esce il numero 1 nel lancio di dado iniziale".
`D3`) Per la formula delle probabilità totali si ha $P(V) = P(V|E)P(E) + P(V|E^c)P(E^c) = \frac{35}{36}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{36}\cdot\frac{5}{6} = \frac{35+5}{216} = \frac{40}{216} = \frac{5}{27}$.
`D4`) Per la formula di Bayes e, sfruttando il valore di $P(V)$ calcolato prima, si ha $P(E|V) = \frac{P(V|E)P(E)}{P(V)} = \frac{35}{36}\cdot\frac{1}{6}/\frac{40}{216} = \frac{35}{40} = \frac{7}{8}$.

Esercizio 3.
`D5`) Si ha $p_{X_1}(0) = p_{(X_1,X_2)}(0,3) = \frac{1}{3}$, $p_{X_1}(3) = p_{(X_1,X_2)}(3,0) = \frac{1}{3}$, $p_{X_1}(1) = p_{(X_1,X_2)}(1,2) = \frac{1}{6}$ e $p_{X_1}(2) = p_{(X_1,X_2)}(2,1) = \frac{1}{6}$, da cui segue $\mathbb{E}[X_1] = 0\cdot\frac{1}{3} + 1\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{6} + 3\cdot\frac{1}{3} = \frac{0+1+2+6}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$.
Si ha $p_{X_2}(0) = p_{(X_1,X_2)}(3,0) = \frac{1}{3}$, $p_{X_2}(3) = p_{(X_1,X_2)}(0,3) = \frac{1}{3}$, $p_{X_2}(1) = p_{(X_1,X_2)}(2,1) = \frac{1}{6}$ e $p_{X_2}(2) = p_{(X_1,X_2)}(1,2) = \frac{1}{6}$, da cui segue $\mathbb{E}[X_2] = 0\cdot\frac{1}{3} + 1\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{6} + 3\cdot\frac{1}{3} = \frac{0+1+2+6}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$.
Infine $\mathbb{E}[X_1X_2] = 0\cdot 3\cdot\frac{1}{3} + 1\cdot 2\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot 1\cdot\frac{1}{6} + 3\cdot 0\cdot\frac{1}{3} = \frac{2+2}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, da cui segue $\mathrm{Cov}(X_1,X_2) = \mathbb{E}[X_1X_2] - \mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[X_2] = \frac{2}{3} - \frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2} = \frac{2}{3} - \frac{9}{4} = \frac{8-27}{12} = -\frac{19}{12}$.
`D6`) Si ha $p_Z(2) = p_{(X_1,X_2)}(1,2) + p_{(X_1,X_2)}(2,1) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ e $p_Z(3) = p_{(X_1,X_2)}(0,3) + p_{(X_1,X_2)}(3,0) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Esercizio 4.
`D7`) Si ha $\mathbb{E}[e^X] = \int_{10}^{20} e^t \frac{1}{20-10}dt = \frac{1}{20-10}\int_{10}^{20} e^t dt = \frac{1}{10}[e^t]_{t=10}^{t=20} = \frac{e^{20}-e^{10}}{10}$.
`D8`) Si ha $P(X > 15|X < 17) = \frac{P(\{X>15\}\cap\{X<17\})}{P(X<17)} = \frac{P(15<X<17)}{P(X<17)} = \frac{\int_{15}^{17}\frac{1}{20-10}dt}{\int_{10}^{17}\frac{1}{20-10}dt} = \frac{(17-15)/10}{(17-10)/10} = \frac{2}{7}$.

Esercizio 5.
`D9`) Si ha $P(N_1 = 0) = \frac{(2\cdot 1)^0}{0!}e^{-2\cdot 1} = e^{-2}$ e $\mathbb{E}[N_4] = 2\cdot 4 = 8$.
`D10`) Si ha $P(T_1 \le 1) = 1 - e^{-2\cdot 1} = 1 - e^{-2}$ e $\mathbb{E}[T_3] = \frac{3}{2}$.

Esercizio 6.
`D11`) Si ha $P(X > 1.2) = 1 - P(X \le 1.2) = 1 - \Phi(1.2) = 1 - 0.88493 = 0.11507$.
`D12`) Si ha $P(|Y| > 2) = 1 - P(|Y| \le 2) = 1 - P(-2 \le Y \le 2) = 1 - P(\frac{-2-0}{\sqrt{4}} \le \frac{Y-0}{\sqrt{4}} \le \frac{2-0}{\sqrt{4}}) = 1 - (\Phi(2/\sqrt{4}) - \Phi(-2/\sqrt{4})) = 1 - \Phi(1) + \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) + 1 - \Phi(1) = 2(1-\Phi(1)) = 2(1-0.84134) = 2\cdot 0.15866 = 0.31732$.

Commenti.
`D1`) Si ha $p_X(0) + p_X(1) + p_X(2) = \frac{16+24+9}{49} = 1$ in accordo con la teoria.
`D1-D2`) Si verifica che, in accordo con la teoria, vale l'uguaglianza $p_X(1) = p_{\mathrm{PD}} + p_{\mathrm{DP}}$ dove $p_{\mathrm{DP}} = \frac{4}{7}\frac{3}{7} = \frac{12}{49}$ è la probabilità di estrarre la sequenza (dispari, pari). Infatti si ha $\frac{24}{49} = \frac{12}{49} + \frac{12}{49}$.
`D5`) Si ha $P(X_1 + X_2 = 3) = 1$. Quindi, in altro modo, $\mathrm{Cov}(X_1,X_2) = \mathrm{Cov}(X_1, 3 - X_1) = \mathrm{Cov}(X_1,3) - \mathrm{Cov}(X_1,X_1) = 0 - \mathrm{Var}[X_1] = -(\mathbb{E}[X_1^2] - \mathbb{E}^2[X_1]) = -(0^2\frac{1}{3} + 1^2\frac{1}{6} + 2^2\frac{1}{6} + 3^2\frac{1}{3} - (\frac{3}{2})^2) = -(\frac{1+4+18}{6} - \frac{9}{4}) = \frac{9}{4} - \frac{23}{6} = \frac{27-46}{12} = -\frac{19}{12}$.
`D6`) Si ha $p_Z(2) + p_Z(3) = \frac{1+2}{3} = 1$ in accordo con la teoria.
`D9-D10`) Si verifica che, in accordo con la teoria, vale l'uguaglianza $P(T_1 \le 1) = 1 - P(N_1 = 0)$ perché $\{T_1 \le 1\} = \{N_1 = 0\}^c$. Infatti si ha $1 - e^{-2} = 1 - e^{-2}$.

Esercizio 7.

`D13`) Per $n \geq 0$ sia $\pi^{(n)} = (\pi_1^{(n)}, \pi_2^{(n)}, \pi_3^{(n)})$ dove $\pi_j^{(n)} = P(X_n = j | X_0 = 2)$ per ogni $j \in \{1,2,3\}$. Allora $\pi^{(0)} = (\pi_1^{(0)}, \pi_2^{(0)}, \pi_3^{(0)}) = (0,1,0)$ è la distribuzione iniziale corrispondente a $P(X_0 = 2) = 1$; inoltre

$$\pi_j^{(n)} = \sum_{i=1}^{3} \pi_i^{(0)} (P^n)_{ij},$$

dove $(P^n)_{ij}$ è l'elemento generico della matrice P^n. Poi osserviamo che $P^{2n+1} = P$ e $P^{2n} = P^2$ per ogni $n \geq 1$, dove

$$P^2 = \begin{pmatrix} q & 0 & 1-q \\ 0 & 1 & 0 \\ q & 0 & 1-q \end{pmatrix}.$$

Allora per ogni $n \geq 0$ si ha

$$\pi_j^{(2n+1)} = \sum_{i=1}^{3} \pi_i^{(0)} (P^1)_{ij} = \begin{cases} 0 \cdot 0 + 1 \cdot q + 0 \cdot 0 = q & \text{se } j = 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0 & \text{se } j = 2 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot (1-q) + 0 \cdot 0 = 1-q & \text{se } j = 3. \end{cases}$$

`D14`) La catena è irriducibile (e a stati finiti) e quindi ammette un'unica distribuzione stazionaria che indicheremo con $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$. Allora si ha

$$(\pi_1, \pi_2, \pi_3) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ q & 0 & 1-q \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3),$$

da cui segue il sistema

$$\begin{cases} q\pi_2 = \pi_1 \\ \pi_1 + \pi_3 = \pi_2 \\ (1-q)\pi_2 = \pi_3. \end{cases} \tag{1}$$

La seconda equazione in (1) segue dalla prima e la terza in (1) (basta sommare membro a membro). Allora, tenendo conto della condizione

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1, \tag{2}$$

si sostituisce in (2) la prima e la terza equazione in (1) ottenendo

$$q\pi_2 + \pi_2 + (1-q)\pi_2 = 1,$$

da cui segue $(q + 1 + 1 - q)\pi_2 = 1$, $2\pi_2 = 1$, e infine si ottiene la soluzione $\pi_2 = \frac{1}{2}$. Quindi si ha $\pi_1 = q\frac{1}{2} = \frac{q}{2}$ e $\pi_3 = (1-q)\frac{1}{2} = \frac{1-q}{2}$. In conclusione l'unica distribuzione stazionaria è $\pi = (\frac{q}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1-q}{2})$.

Commenti.

`D14`) Si ha $\frac{q}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1-q}{2} = \frac{q+1+1-q}{2} = 1$ in accordo con la (2).