Statistica per la ricerca sperimentale e tecnologica
CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA, UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"
Anno accademico: `2007-2008`
Titolare del corso: `Claudio Macci`
Esame del 28 Gennaio 2008

Esercizio 1. Un'urna ha 6 palline numerate da 1 a 6. Si estraggono a caso 3 palline dall'urna, una alla volta con reinserimento.
`D1`) Calcolare la probabilità di estrarre almeno una volta un numero pari.
`D2`) Calcolare la probabilità di estrarre la sequenza di numeri $(2, 4, 4)$.

Esercizio 2. Abbiamo due urne: la prima ha 2 palline bianche e 2 nere, la seconda è vuota. Si estraggono a caso 2 palline in blocco dalla prima urna e vengono messe nella seconda urna. Poi si estrae una pallina a caso dalla seconda urna.
`D3`) Calcolare la probabilità che la pallina estratta dalla seconda urna sia bianca.
`D4`) Calcolare la probabilità che le palline estratte dalla prima urna siano entrambe bianche sapendo che la pallina estratta dalla seconda urna è bianca.

Esercizio 3. La variabile aleatoria (X_1, X_2) ha la seguente densità congiunta: $p_{(X_1,X_2)}(0,0) = p_{(X_1,X_2)}(1,0) = p_{(X_1,X_2)}(0,1) = \frac{1}{8}$; $p_{(X_1,X_2)}(1,1) = \frac{5}{8}$.
`D5`) Calcolare $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$.
`D6`) Trovare la densità discreta di $Z = X_1 \cdot X_2$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con densità uniforme su $[0, 10]$.
`D7`) Calcolare $\mathrm{Var}[X]$.
`D8`) Calcolare $P([X] = 7)$, dove $[x] = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$ è la *parte intera* di x.
`D9`) Calcolare $\mathbb{E}[10X - 50]$.

Esercizio 5. Sia (N_t) un processo di Poisson con intensità $\lambda = 2$.
`D10`) Calcolare $P(N_5 \leq 3)$.

Esercizio 6. Sia X una variabile aleatoria normale con media $\mu = 1$ e varianza $\sigma^2 = 1$.
`D11`) Calcolare $P(X > 3/2)$.
`D12`) Confrontare $P(X > 3/2)$ con $P(X < 0)$, cioè dire quale delle seguenti affermazioni è vera: $P(X < 0) < P(X > 3/2)$; $P(X < 0) = P(X > 3/2)$; $P(X < 0) > P(X > 3/2)$.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
`D1`) Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di palline con numero pari estratte, la quale ha distribuzione binomiale con parametri $n = 3$ (numero delle estrazioni) e $p = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ (probabilità di estrarre un numero pari in ogni estrazione). La probabilità richiesta è $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{3}{0}(\frac{1}{2})^3 = \frac{7}{8}$.
`D2`) La probabilità richiesta è $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$ per indipendenza di eventi legati ad estrazioni diverse.

Esercizio 2. Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di palline bianche estratte dalla prima urna e sia B l'evento "la pallina estratta dalla seconda urna è bianca".
`D3`) Per la formula delle probabilità totali si ha $P(B) = \sum_{k=0}^{2} P(B|X = k)P(X = k) = 0\frac{\binom{2}{0}\binom{2}{2}}{\binom{4}{2}} + \frac{1}{2}\frac{\binom{2}{1}\binom{2}{1}}{\binom{4}{2}} + 1\frac{\binom{2}{2}\binom{2}{0}}{\binom{4}{2}} = 0\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\frac{4}{6} + 1\frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
`D4`) Per la formula di Bayes, e sfruttando i valori di $P(B|X = 2)$, $P(X = 2)$ e $P(B)$ calcolati prima, si ha $P(X = 2|B) = \frac{P(B|X=2)P(X=2)}{P(B)} = \frac{1\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Esercizio 3.
`D5`) Si ha: $p_{X_1}(0) = p_{(X_1,X_2)}(0,0)+p_{(X_1,X_2)}(0,1) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$, $p_{X_1}(1) = p_{(X_1,X_2)}(1,0)+p_{(X_1,X_2)}(1,1) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$, da cui $\mathbb{E}[X_1] = 0\frac{1}{4} + 1\frac{3}{4} = \frac{3}{4}$; $p_{X_2}(0) = p_{(X_1,X_2)}(0,0) + p_{(X_1,X_2)}(1,0) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$, $p_{X_2}(1) = p_{(X_1,X_2)}(0,1)+p_{(X_1,X_2)}(1,1) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$, da cui $\mathbb{E}[X_2] = 0\frac{1}{4}+1\frac{3}{4} = \frac{3}{4}$; $\mathbb{E}[X_1X_2] = (0\cdot 0)\frac{1}{8}+(0\cdot 1)\frac{1}{8}+(1\cdot 0)\frac{1}{8}+(1\cdot 1)\frac{5}{8} = \frac{5}{8}$. Quindi $\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = \mathbb{E}[X_1X_2]-\mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[X_2] = \frac{5}{8} - \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4} = \frac{5}{8} - \frac{9}{16} = \frac{10-9}{16} = \frac{1}{16}$.
`D6`) Si ha $p_Z(0) = p_{(X_1,X_2)}(0,0) + p_{(X_1,X_2)}(0,1) + p_{(X_1,X_2)}(1,0) = \frac{3}{8}$ e $p_Z(1) = p_{(X_1,X_2)}(1,1) = \frac{5}{8}$.

Esercizio 4.
`D7`) La varianza di una variabile aleatoria con distribuzione uniforme su $[a, b]$ è $\frac{(b-a)^2}{12}$; quindi $\mathrm{Var}[X] = \frac{(10-0)^2}{12} = \frac{100}{12} = \frac{25}{3}$.
`D8`) Si ha $P([X] = 7) = P(7 \leq X < 8) = \int_7^8 \frac{1}{10}dt = \left[\frac{1}{10}t\right]_{t=7}^{t=8} = \frac{1}{10}(8-7) = \frac{1}{10}$.
`D9`) Il valore atteso di una variabile aleatoria con distribuzione uniforme su $[a, b]$ è $\frac{b+a}{2}$ (il punto medio dell'intervallo) e quindi, per la linearità della speranza matematica, si ha $\mathbb{E}[10X - 50] = 10\mathbb{E}[X] - 50 = 10\frac{10+0}{2} - 50 = 10 \cdot 5 - 50 = 50 - 50 = 0$.

Esercizio 5.
`D10`) Si ha $P(N_5 \leq 3) = \sum_{k=0}^{3} P(N_5 = k) = \sum_{k=0}^{3} \frac{(2\cdot 5)^k}{k!}e^{-2\cdot 5} = \left(\frac{10^0}{0!} + \frac{10^1}{1!} + \frac{10^2}{2!} + \frac{10^3}{6!}\right)e^{-10} = \left(1 + 10 + \frac{100}{2} + \frac{1000}{6}\right)e^{-10} = \left(1 + 10 + 50 + \frac{500}{3}\right)e^{-10} = \frac{683}{3}e^{-10}$.

Esercizio 6.
La variabile aleatoria standardizzata di X è $Z_X = \frac{X-1}{1}$.
`D11`) Si ha $P(X > 3/2) = P(Z_X > 1/2) = 1 - \Phi(1/2) = 1 - \Phi(0.5) = 1 - 0.69146 = 0.30854$.
`D12`) Si ha $P(X < 0) = P(Z_X < -1) = \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0.84134 = 0.15866$; quindi si ha $P(X < 0) < P(X > 3/2)$ per il valore di $P(X > 3/2)$ calcolato prima.

Commenti.
`D1`) In altro modo $P(X \geq 1) = p_X(1) + p_X(2) + p_X(3) = (\binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3})(\frac{1}{2})^3 = \frac{3+3+1}{8} = \frac{7}{8}$.
`D6`) Si ha $p_Z(0) + p_Z(1) = \frac{3+5}{8} = 1$ in accordo con la teoria.
`D12`) Non c'è bisogno di usare le tavole. Infatti dobbiamo confrontare la probabilità di due code (una a sinistra e l'altra a destra di $\mathbb{E}[X]$): $P(X < 0) = P(X < \mathbb{E}[X] - 1)$ e $P(X > 3/2) = P(X > \mathbb{E}[X] + 1/2)$. Quindi $P(X < 0) < P(X > 3/2)$ perché $1/2 < 1$. Oppure, per i calcoli fatti in `D11-D12`, si ha $P(X < 0) = 1 - \Phi(1) < 1 - \Phi(0.5) = P(X > 3/2)$ perché $\Phi(1) > \Phi(0.5)$.