Università di Roma Tor Vergata
Statistica per la ricerca sperimentale e tecnologica (Informatica) (Esercizi 1-2-3-4-5-6)
Probabilità e Statistica (Scienza dei Media e delle Comunicazioni) (Esercizi 1-2-3-4-5-6)
Probabilità e Statistica (Scienza e Tecnologia dei Materiali) (Esercizi 1-2-3-4-5-7)
Anno accademico: 2008-2009. *Titolare del corso:* Claudio Macci
Esame del 20 Febbraio 2009

Esercizio 1. Un'urna contiene 14 palline numerate da 1 a 14. Si estraggono a caso 2 palline in blocco. Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di palline con *numero pari* estratte.
D1) Trovare la densità discreta di X.
D2) Calcolare la probabilità di estrarre i numeri 1 e 2.

Esercizio 2. Consideriamo il seguente gioco. Si lancia una moneta equa: se esce testa si lancia un dado equo e si vince se esce un numero pari; se esce croce si estrae una pallina a caso da un'urna che ne contiene 10 numerate da 1 a 10 e si vince se esce uno dei numeri $\{1, 2, 3\}$.
D3) Calcolare la probabilità di vincere il gioco.
D4) Calcolare la probabilità di aver ottenuto testa nel lancio di moneta sapendo di aver vinto il gioco.

Esercizio 3. La variabile aleatoria (X_1, X_2) ha la seguente densità congiunta: $p_{(X_1,X_2)}(0, 0) = p_{(X_1,X_2)}(1, 1) = \frac{3}{8}$; $p_{(X_1,X_2)}(1, 0) = p_{(X_1,X_2)}(0, 1) = \frac{1}{8}$.
D5) Calcolare $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$.
D6) Trovare la densità discreta di $Z = X_1 - X_2$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria uniforme su $[0, 1]$.
D7) Calcolare $\mathbb{E}[e^{2X}]$.
Sia $N_t = \sum_{n\geq 1} 1_{T_n\leq t}$ (per $t \geq 0$) un processo di Poisson con intensità di $\lambda = 1$.
D8) Calcolare $P(N_5 = 2)$.

Esercizio 5. Sia X una variabile aleatoria normale con media 0 e varianza 3. Poi sia Y una variabile aleatoria normale standard e indipendente da X.
D9) Calcolare $P(X > 2\sqrt{3})$.
D10) Qual è la distribuzione di $X - Y$?

Esercizio 6. Sia X una variabile aleatoria esponenziale di parametro $\lambda = 2$. Poi sia (X_n) una successione di variabili aleatorie indipendenti e con la stessa distribuzione di X.
D11) Calcolare $P(3 < X < 5)$.
D12) Dire per quale valore di c si ha $\lim_{n\to\infty} P(|\overline{X}_n - c| \geq \varepsilon) = 0$ per ogni $\varepsilon > 0$, dove $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$.

Esercizio 7. Sia (X_n) una catena di Markov omogenea con spazio degli stati $\{1, 2, 3, 4\}$ e matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D13) Calcolare $P(X_3 = 3|X_0 = 3)$.
D14) Trovare le distribuzioni stazionarie.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
D1) La densità discreta di X è $p_X(k) = \frac{\binom{7}{k}\binom{7}{2-k}}{\binom{14}{2}}$ per $k \in \{0,1,2\}$, da cui segue $p_X(0) = \frac{3}{13}$, $p_X(1) = \frac{7}{13}$ e $p_X(2) = \frac{3}{13}$.
D2) La probabilità richiesta coincide con la probabilità di estrarre un qualsiasi sottoinsieme di 2 elementi di $\{1,\dots,14\}$, che è $1/\binom{14}{2} = 1/91$.

Esercizio 2. Sia V l'evento "vincere il gioco", ed T l'evento "esce testa nel lancio di moneta".
D3) Per la formula delle probabilità totali si ha $P(V) = P(V|T)P(T) + P(V|T^c)P(T^c) = \frac{3}{6}\cdot\frac{1}{2} + \frac{3}{10}\cdot\frac{1}{2} = (\frac{1}{2}+\frac{3}{10})\frac{1}{2} = \frac{5+3}{10}\frac{1}{2} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$.
D4) Per la formula di Bayes e, sfruttando il valore di $P(V)$ calcolato prima, si ha $P(T|V) = \frac{P(V|T)P(T)}{P(V)} = \frac{3}{6}\cdot\frac{1}{2}/\frac{2}{5} = \frac{1}{4}\cdot\frac{5}{2} = \frac{5}{8}$.

Esercizio 3.
D5) Si ha $p_{X_1}(0) = p_{(X_1,X_2)}(0,0)+p_{(X_1,X_2)}(0,1) = \frac{3+1}{8} = \frac{1}{2}$ e $p_{X_1}(1) = p_{(X_1,X_2)}(1,0)+p_{(X_1,X_2)}(1,1) = \frac{1+3}{8} = \frac{1}{2}$, da cui segue $\mathbb{E}[X_1] = 0\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$; $p_{X_2}(0) = p_{(X_1,X_2)}(0,0)+p_{(X_1,X_2)}(1,0) = \frac{3+1}{8} = \frac{1}{2}$ e $p_{X_2}(1) = p_{(X_1,X_2)}(0,1)+p_{(X_1,X_2)}(1,1) = \frac{1+3}{8} = \frac{1}{2}$, da cui segue $\mathbb{E}[X_2] = 0\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Infine $\mathbb{E}[X_1X_2] = 0\cdot 0\cdot\frac{3}{8}+0\cdot 1\cdot\frac{1}{8}+1\cdot 0\cdot\frac{1}{8}+1\cdot 1\cdot\frac{3}{8} = \frac{3}{8}$, da cui segue $\mathrm{Cov}(X_1,X_2) = \mathbb{E}[X_1X_2]-\mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[X_2] = \frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3-2}{8} = \frac{1}{8}$.
D6) Si ha $p_Z(0) = p_{(X_1,X_2)}(0,0)+p_{(X_1,X_2)}(1,1) = \frac{3}{8}+\frac{3}{8} = \frac{6}{8}$, $p_Z(1) = p_{(X_1,X_2)}(1,0) = \frac{1}{8}$ e $p_Z(-1) = p_{(X_1,X_2)}(0,1) = \frac{1}{8}$.

Esercizio 4.
D7) Si ha $\mathbb{E}[e^{2X}] = \int_0^1 e^{2t}dt = \frac{1}{2}\int_0^1 2e^{2t}dt = \frac{1}{2}[e^{2t}]_{t=0}^{t=1} = \frac{e^2-1}{2}$.
D8) Si ha $P(N_5 = 2) = \frac{(1\cdot 5)^2}{2!}e^{-1\cdot 5} = \frac{25}{2}e^{-5}$.

Esercizio 5.
D9) Si ha $P(X > 2\sqrt{3}) = P(\frac{X-0}{\sqrt{3}} > \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}) = P(\frac{X-0}{\sqrt{3}} > 2) = 1-\Phi(2) = 1-0.97725 = 0.02275$.
D10) La variabile aleatoria $X-Y$ ha distribuzione normale con media $0-0=0$ e varianza $3+(-1^2)\cdot 1 = 4$.

Esercizio 6.
D11) Si ha $P(3 < X < 5) = F_X(5)-F(3) = 1-e^{-2\cdot 5}-(1-e^{-2\cdot 3}) = e^{-6}-e^{-10}$.
D12) Per la legge dei grandi numeri (e per formule note sulla distribuzione esponenziale) si ha $c = \mathbb{E}[X_n] = 1/\lambda = 1/2$.

Commenti.
D1) Si ha $p_X(0)+p_X(1)+p_X(2) = \frac{3+7+3}{13} = 1$ in accordo con la teoria.
D2) In altro modo, se Y è la variabile aleatoria che conta il numero di *successi* (dove per successo si intende l'estrazione di uno dei due numeri 1 e 2), la probabilità richiesta è $p_Y(2) = \frac{\binom{2}{2}\binom{18}{0}}{\binom{14}{2}} = \frac{1}{\binom{14}{2}} = 1/91$.
D6) Si ha $p_Z(-1)+p_Z(0)+p_Z(1) = \frac{1+6+1}{8} = 1$ in accordo con la teoria.

Esercizio 7.

`D13`) Se la catena parte da 3, quando lascia tale stato finisce nello stato assorbente 4 e non torna in 3. Quindi, indicando con p_{ij} gli elementi della matrice di transizione P, si ha

$$P(X_3 = 3|X_0 = 3) = p_{33} \cdot p_{33} \cdot p_{33} = (1/3)^3 = 1/27.$$

`D14`) Gli stati $\{1, 2\}$ comunicano tra loro (la catena oscilla tra i due stati senza aleatorietà). Lo stato 3 comunica con lo stato 4 ma non vale il viceversa perché 4 è uno stato assorbente. Allora, se $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4)$ è una distribuzione stazionaria, si ha $\pi_3 = 0$. Possiamo dunque dire che tutte le distribuzioni stazionarie si ottengono come combinazione lineare convessa delle uniche distribuzioni stazionarie che competono alle classi chiuse $\{1, 2\}$ e $\{4\}$, cioè

$$\pi^{(\alpha)} = \alpha\pi^{(12)} + (1 - \alpha)\pi^{(4)} \quad (\text{per ogni } \alpha \in [0, 1])$$

dove: $\pi^{(12)} = (\beta, 1 - \beta, 0, 0)$, con $(\beta, 1 - \beta)$ distribuzione stazionaria della catena ristretta agli stati $\{1, 2\}$; $\pi^{(4)} = (0, 0, 0, 1)$ distribuzione stazionaria della catena ristretta allo stato assorbente $\{4\}$. In particolare si ha

$$(\beta, 1 - \beta)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (\beta, 1 - \beta)$$

da cui segue

$$\begin{cases} 1 - \beta = \beta \\ \beta = 1 - \beta. \end{cases}$$

Le equazioni coincidono e hanno soluzione $\beta = 1/2$. In conclusione le distribuzioni stazionarie sono

$$\pi^{(\alpha)} = (\alpha/2, \alpha/2, 0, 1 - \alpha) \quad (\text{per ogni } \alpha \in [0, 1]). \tag{1}$$

Commenti.

`D14`) In altro modo, se $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4)$ è una distribuzione stazionaria, si ha

$$(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4),$$

da cui segue il sistema

$$\begin{cases} \pi_2 = \pi_1 \\ \pi_1 = \pi_2 \\ \pi_3/3 = \pi_3 \\ \pi_4 = \pi_4. \end{cases}$$

Allora si deve avere

$$\pi = (\gamma, \gamma, 0, 1 - 2\gamma) \quad (\text{per qualche } \gamma \in [0, 1/2]),$$

dove i valori assunti da γ consentono di avere componenti non negative e a somma 1. Cambiando parametrizzazione con $\alpha = 2\gamma$ e osservando che in questo modo si ha $\alpha \in [0, 1]$, otteniamo tutte e sole le distribuzioni nella formula (1).