Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)
Anno Accademico: 2022-2023. *Titolare del corso:* Claudio Macci
Simulazione 2

Esercizio 1. Un'urna ha h palline bianche e h palline nere, per $h \geq 2$ intero. Si estraggono a caso 3 palline, una alla volta e senza reinserimento. Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di palline bianche estratte.
D1) Verificare che la densità discreta di X è

$$p_X(k) = \begin{cases} \frac{h-2}{8h-4} & \text{se } k \in \{0,3\} \\ \frac{3h}{8h-4} & \text{se } k \in \{1,2\}. \end{cases}$$

D2) Verificare che $P(X \geq 2) = \frac{1}{2}$.
D3) Calcolare $\mathbb{E}[X]$.

Esercizio 2. Un'urna ha 2 palline bianche e 1 nera. Si lancia una moneta equa: se esce testa si mettono 2 palline nere nell'urna, se esce croce si mette 1 pallina bianca nell'urna. Poi si estrae una pallina a caso dall'urna.
D4) Calcolare la probabilità di aver ottenuto testa nel lancio di moneta sapendo di aver estratto una pallina bianca.

Esercizio 3. Consideriamo la seguente densità congiunta discreta:

$$p_{X_1,X_2}(1,1) = \frac{5}{12}, \quad p_{X_1,X_2}(h,h^2) = \left(\frac{1}{2}\right)^h \text{ e } p_{X_1,X_2}(h,h^3) = \left(\frac{1}{4}\right)^h \text{ per ogni } h \geq 2 \text{ intero.}$$

D5) Calcolare $P(X_2 = X_1^2)$.
D6) Calcolare $P(X_2 = 4|X_1 = 2)$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con distribuzione uniforme su $(-1, 2)$.
D7) Trovare la funzione di distribuzione della variabile aleatoria $Y = X^3$.
D8) Calcolare $\mathbb{E}[Y^{2/3}]$.

Esercizio 5. Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.
D9) Sia X una variabile aleatoria Normale con media 1 e varianza 4. Verificare che si ha $P(|X - 1| \leq 3) = 2\Phi(3/2) - 1$.
D10) Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. con media 2 e varianza 16. Calcolare $P(X_1 + \cdots + X_{100} < 202)$ con l'approssimazione Normale esprimendo il risultato con la funzione Φ.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.

`D1)` Per $k \in \{0,1,2,3\}$ si ha $p_X(k) = \frac{\binom{h}{k}\binom{h}{3-k}}{\binom{2h}{3}}$. Quindi

$$p_X(0) = p_X(3) = \frac{\binom{h}{0}\binom{h}{3}}{\binom{2h}{3}} = \frac{1 \cdot \frac{h(h-1)(h-2)}{3!}}{\frac{2h(2h-1)(2h-2)}{3!}} = \frac{(h-1)(h-2)}{4(2h-1)(h-1)} = \frac{h-2}{4(2h-1)} = \frac{h-2}{8h-4}$$

e

$$p_X(1) = p_X(2) = \frac{\binom{h}{1}\binom{h}{2}}{\binom{2h}{3}} = \frac{h \cdot \frac{h(h-1)}{2!}}{\frac{2h(2h-1)(2h-2)}{3!}} = \frac{3h(h-1)}{4(2h-1)(h-1)} = \frac{3h}{4(2h-1)} = \frac{3h}{8h-4}.$$

Osservazione. In generale si ha $p_X(0)+p_X(1)+p_X(2)+p_X(3) = 1$ in accordo con la teoria. Inoltre per $h = 2$ si ha $p_X(0) = p_X(3) = 0$ e $p_X(1) = p_X(2) = \frac{1}{2}$ (e forse non è sorprendente ...).

`D2)` Si ha $P(X \geq 2) = p_X(2) + p_X(3) = \frac{3h}{8h-4} + \frac{h-2}{8h-4} = \frac{4h-2}{4(2h-1)} = \frac{2(2h-1)}{4(2h-1)} = \frac{1}{2}$.

`D3)` Per proprietà della ipergeometrica si ha $\mathbb{E}[X] = 3\frac{h}{h+h} = \frac{3h}{2h} = \frac{3}{2}$.

Osservazione. Si può ottenere $\mathbb{E}[X]$ anche dalla densità discreta di X scritta sopra e usando la seguente formula: $\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{3} kp_X(k)$.

Esercizio 2.

`D4)` Con notazioni ovvie, usando la formula di Bayes (e l'uguaglianza $P(B) = P(B|T)P(T) + P(B|T^c)P(T^c)$ per la formula delle probabilità totali) si ha

$$P(T|B) = \frac{P(B|T)P(T)}{P(B|T)P(T) + P(B|T^c)P(T^c)} = \frac{\frac{2}{5}\frac{1}{2}}{\frac{2}{5}\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\frac{1}{2}} = \frac{2/5}{2/5 + 3/4} = \frac{8}{8+15} = \frac{8}{23}.$$

Esercizio 3.

`D5)` $P(X_2 = X_1^2) = p_{X_1,X_2}(1,1) + \sum_{h\geq 2} p_{X_1,X_2}(h,h^2) = \frac{5}{12} + \sum_{h\geq 2} \left(\frac{1}{2}\right)^h = \frac{5}{12} + \frac{(1/2)^2}{1-1/2} = \frac{5}{12} + \frac{2}{4} = \frac{5}{12} + \frac{6}{12} = \frac{11}{12}$.

`D6)` Si ha $P(X_2 = 4|X_1 = 2) = \frac{P(\{X_2=4\}\cap\{X_1=2\})}{P(X_1=2)} = \frac{p_{X_1,X_2}(2,4)}{p_{X_1,X_2}(2,4)+p_{X_1,X_2}(2,8)} = \frac{(1/2)^2}{(1/2)^2+(1/4)^2} = \frac{1/4}{1/4+1/16} = \frac{4}{4+1} = \frac{4}{5}$.

Esercizio 4.

`D7)` Si ha $P(-1 \leq Y \leq 8) = 1$ e quindi $F_Y(y) = 0$ per $y \leq -1$ e $F_Y(y) = 1$ per $y \geq 8$. Per $y \in (-1,8)$ si ha $F_Y(y) = P(X^3 \leq y)P(X \leq y^{1/3}) = \int_{-1}^{y^{1/3}} \frac{1}{2-(-1)}dx = [\frac{x}{3}]_{x=-1}^{x=y^{1/3}} = \frac{y^{1/3}+1}{3}$.

`D8)` Dalla domanda precedente (derivando ...) si ha $f_Y(y) = \frac{y^{-2/3}}{9}1_{(-1,8)}(y)$. Quindi $\mathbb{E}[Y^{2/3}] = \int_{-1}^{8} y^{2/3}\frac{y^{-2/3}}{9}dy = \int_{-1}^{8} \frac{1}{9}dy = [\frac{y}{9}]_{y=-1}^{y=8} = \frac{8-(-1)}{9} = \frac{9}{9} = 1$.

Osservazione. In altro modo, senza sfruttare la risposta alla domanda precedente, si ha $\mathbb{E}[Y^{2/3}] = \mathbb{E}[(X^3)^{2/3}] = \mathbb{E}[X^2] = \int_{-1}^{2} x^2\frac{1}{2-(-1)}dx = \frac{1}{3}[\frac{x^3}{3}]_{x=-1}^{x=2} = \frac{2^3-(-1)^3}{3\cdot 3} = \frac{8-(-1)}{9} = \frac{9}{9} = 1$.

Esercizio 5.

`D9)` La variabile aleatoria $X^* = \frac{X-1}{\sqrt{4}} = \frac{X-1}{2}$ è Normale standard. Allora si ha $P(|X-1| \leq 3) = P(-3 \leq X-1 \leq 3) = P(-\frac{3}{2} \leq X^* \leq \frac{3}{2}) = \Phi(3/2)-\Phi(-3/2) = \Phi(3/2)-(1-\Phi(3/2)) = 2\Phi(3/2)-1$.

`D10)` Si ha $P(X_1 + \cdots + X_{100} < 202) = P(\frac{X_1+\cdots+X_{100}-2\cdot 100}{\sqrt{16}\sqrt{100}} < \frac{202-2\cdot 100}{\sqrt{16}\sqrt{100}}) = P(\frac{X_1+\cdots+X_{100}-2\cdot 100}{\sqrt{16}\sqrt{100}} < \frac{202-200}{40}) \approx \Phi(2/40) = \Phi(1/20)$.