Corso di Laurea in Informatica, Università di Roma "Tor Vergata"
Statistica per la ricerca sperimentale e tecnologica (A.A. 2004-2005)
Dott. Claudio Macci
Esonero del 27 Maggio 2005

Esercizio 1. Siano X e Y due v.a. con densità congiunta discreta definita come segue: $p_{(X,Y)}(-1,1) = p_{(X,Y)}(-1,0) = p_{(X,Y)}(0,0) = p_{(X,Y)}(1,0) = p_{(X,Y)}(1,1) = \frac{1}{5}$.
D1) Trovare le densità marginali di X e Y.
D2) Calcolare $\mathrm{Cov}(X,Y)$.
D3) Dire se X e Y sono indipendenti.

Esercizio 2. Sia X una v.a. con distribuzione uniforme sull'intervallo $[-1,1]$.
D4) Calcolare $P\Big(\frac{1}{4} < X < \frac{1}{2}\Big)$.
D5) Calcolare $\mathbb{E}[X]$ e $\mathrm{Var}[X]$.
Un processo di Poisson (N_t) di intensità $\lambda = 10$ conta il numero delle telefonate ricevute da un centralino nel tempo. In generale T_n indica l'istante (aleatorio) in cui arriva la n-sima telefonata (ed è noto che T_1 ha distribuzione esponenziale di parametro λ).
D6) Calcolare $P(N_1 = 2)$, cioè la probabilità che al tempo $t = 1$ siano arrivate esattamente 2 telefonate.
D7) Calcolare $P(T_1 > 5)$, cioè la probabilità che la prima telefonata sia arrivata dopo l'istante $t = 5$.
D8) Calcolare $P(3 < T_1 < 5)$, cioè la probabilità che la prima telefonata sia arrivata dopo l'istante $t = 3$ e prima dell'istante $t = 5$.
D9) Calcolare $\mathbb{E}[T_1 + X]$.
Sia Y una v.a. con densità f_Y definita come segue: $f_Y(t) = 2t$ per $0 < t < 1$; $f_Y(t) = 0$ altrimenti.
D10) Calcolare $P(Y > 1/2 | Y < 1)$.

Esercizio 3. Si estrae un campione di 100 individui da una popolazione normale di media μ incognita e varianza $\sigma^2 = 144$. La media dei valori osservati dal campione è $\overline{x}_n = 50$.
D11) Trovare l'intervallo di confidenza per μ al livello $1 - \alpha = 0.95$.
Sia X una v.a. con distribuzione $N(\mu = 50, \sigma^2 = 144)$ (dunque si può pensare che X sia il valore di un'osservazione del campione nel caso in cui $\mu = 50$).
D12) Calcolare $P(44 < X < 62)$.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.

`D1`) Le densità marginali di X e Y sono le seguenti:
$p_X(-1) = p_{(X,Y)}(-1,1) + p_{(X,Y)}(-1,0) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$; $p_X(0) = p_{(X,Y)}(0,0) = \frac{1}{5}$; $p_X(1) = p_{(X,Y)}(1,1) + p_{(X,Y)}(1,0) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$;
$p_Y(0) = p_{(X,Y)}(-1,0) + p_{(X,Y)}(0,0) + p_{(X,Y)}(1,0) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$; $p_Y(1) = p_{(X,Y)}(-1,1) + p_{(X,Y)}(1,1) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$.
`D2`) Useremo la formula $\text{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$. Sfruttando le densità marginali di X e Y si ha $\mathbb{E}[X] = -1 \cdot \frac{2}{5} + 0 \cdot \frac{1}{5} + 1 \cdot \frac{2}{5} = 0$ e $\mathbb{E}[Y] = 0 \cdot \frac{3}{5} + 1 \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$. Poi si ha $\mathbb{E}[XY] = \sum_{x=-1}^{1} \sum_{y=0}^{1} xy p_{(X,Y)}(x,y) = \frac{(-1)\cdot 1 + (-1)\cdot 0 + 0\cdot 0 + 1\cdot 0 + 1\cdot 1}{5} = 0$. Quindi $\text{Cov}(X,Y) = 0$.
`D3`) Si può dire subito che non c'è indipendenza perché i punti con densità congiunta positiva non si dispongono su un prodotto cartesiano; infatti $p_{(X,Y)}(0,1) = 0$. Questo ci consente di spiegare subito che la densità congiunta non è uguale al prodotto delle densità marginali; infatti basta osservare che $p_{(X,Y)}(0,1) = 0$ e $p_X(0)p_Y(1) = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{5} \neq 0$.

Esercizio 2.

`D4`) La v.a. X ha densità f_X definita come segue: $f_X(t) = 1/2$ per $-1 < t < 1$; $f_X(t) = 0$ altrimenti. Quindi si ha $P\left(\frac{1}{4} < X < \frac{1}{2}\right) = \int_{1/4}^{1/2} \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2}[t]_{1/4}^{1/2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$.
`D5`) Per note formule sulla distribuzione uniforme si ha $\mathbb{E}[X] = \frac{1-1}{2} = 0$ e $\text{Var}[X] = \frac{(1-(-1))^2}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.
`D6`) La v.a. N_1 ha distribuzione di Poisson di parametro $\lambda \cdot 1 = 10$ e quindi $P(N_1 = 2) = \frac{(10)^2}{2} e^{-10} = 50e^{-10}$.
`D7`) Basta considerare l'espressione della funzione di distribuzione di T_1 e si ha $P(T_1 > 5) = 1 - (1 - e^{-10 \cdot 5}) = e^{-50}$.
`D8`) Si considera ancora l'espressione della funzione di distribuzione di T_1 e si ha $P(3 < T_1 < 5) = 1 - e^{-10\cdot 5} - (1 - e^{-10\cdot 3}) = 1 - e^{-50} - 1 + e^{-30} = e^{-30} - e^{-50}$.
`D9`) Per linearità della speranza matematica e tenendo conto i valori attesi delle distribuzioni notevoli (esponenziale e uniforme) si ha $\mathbb{E}[T_1 + X] = \mathbb{E}[T_1] + \mathbb{E}[X] = \frac{1}{10} + 0 = \frac{1}{10}$.
`D10`) Per definizione di probabilità condizionata si ha $P(Y > 1/2 | Y < 1) = \frac{P(\{Y>1/2\} \cap \{Y<1\})}{P(Y<1)} = \frac{P(1/2<Y<1)}{P(Y<1)} = \frac{\int_{1/2}^{1} 2t dt}{\int_0^1 2t dt} = \frac{[t^2]_{1/2}^1}{[t^2]_0^1} = \frac{1^2 - (1/2)^2}{1^2 - 0^2} = \frac{3}{4}$.

Esercizio 3.

`D11`) L'intervallo di confidenza richiesto è $\left[\overline{x}_n - \phi_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x}_n + \phi_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$. Si ha $\overline{x}_n = 50$, $\sigma = \sqrt{144}$, $n = 100$; inoltre $1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975$ segue da $1 - \alpha = 0.95$ e quindi $\phi_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.96$. In conclusione l'intervallo di confidenza richiesto è $[47.648, 52.352]$.
`D12`) La probabilità richiesta è $P(44 < X < 62) = \Phi(\frac{62-50}{\sqrt{144}}) - \Phi(\frac{44-50}{\sqrt{144}}) = \Phi(1) - \Phi(-0.5) = \Phi(1) - (1 - \Phi(0.5)) = \Phi(1) + \Phi(0.5) - 1 = 0.84134 + 0.69146 - 1 = 0.5328$.

Commenti.

`D10`) Si verifica che $P(Y > 1/2 | Y < 1) = P(Y > 1/2)$. Questa uguaglianza non sorprende se si osserva che $P(Y < 1) = 1$.