Laurea Triennale in Scienza e Tecnologia dei Media, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità
Anno accademico: `2018-2019`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Appello del 3 Settembre 2019
Esercizi 1,2,3,4,5 per gli studenti che sostengono l'esame da 6 crediti.
Esercizi 1,2,3,4,5,6 per gli studenti che sostengono l'esame da 8 crediti.

Esercizio 1.
Un'urna ha 2 palline bianche, 2 nere e 1 rossa. Si estraggono a caso 3 palline, una alla volta e con reinserimento.
`D1`) Calcolare la probabilità di estrarre al più 1 pallina bianca.
`D2`) Calcolare la probabilità di estrarre 3 colori diversi (una bianca, una nera e una rossa in un qualsiasi ordine).
`D3`) Calcolare la probabilità di estrarre 3 palline bianche sapendo di aver estratto 3 palline dello stesso colore.

Esercizio 2.
Abbiamo due monete: la moneta 1 e la moneta 2. Per $i \in \{1,2\}$ sia p_i la probabilità di ottenere testa lanciando la moneta i. Poi si lancia un dado equo. Se esce 1 si lancia la moneta 1, altrimenti (se esce un numero diverso da 1) si lancia la moneta 2.
`D4`) Calcolare la probabilità che esca testa nel lancio di moneta effettuato.

Esercizio 3.
Siano $p, q \in (0,1)$. Consideriamo la seguente densità congiunta: $p_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \binom{x_2}{x_1} p^{x_1}(1-p)^{x_2-x_1}(1-q)^{x_2} q$ per $0 \leq x_1 \leq x_2$ interi.
`D5`) Calcolare $P(X_1 = X_2)$.
`D6`) Calcolare $P(X_1 = 0 | X_2 = 2)$.

Esercizio 4. Sia $b > 0$. Sia X una variabile aleatoria continua con densità continua $f_X(x) = bx^{b-1} 1_{(0,1)}(x)$.
`D7`) Trovare la funzione di distribuzione di $Y = \frac{e^X - 1}{e-1}$.
`D8`) Dire per quale valore di b si ha $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{2}$.

Esercizio 5.
Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.
`D9`) Sia X una variabile aleatoria Normale con media 2 e varianza 144. Trovare il valore $y \in \mathbb{R}$ per cui si ha $P(X < y) = \Phi(3)$.
`D10`) Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. (indipendenti e identicamente distribuite), con media μ e varianza 121. Calcolare, al variare di $y \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\frac{\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \mu}{1/\sqrt{n}} > y \right),$$

esprimendo il limite con la funzione Φ.

Esercizio 6.
Consideriamo una catena di Markov omogenea $\{X_n : n \geq 0\}$ con spazio degli stati $E = \{1,2,3\}$ e matrice di transizione

$$P = \left(\begin{array}{ccc} 1-p & p & 0 \\ 0 & 1-q & q \\ 0 & 1-q & q \end{array} \right),$$

dove $p, q \in (0,1)$.
`D11`) Supponiamo che $P(X_0 = 1) = 1$. Calcolare la densità discreta di X_2.
`D12`) Calcolare i tempi medi di primo passaggio per lo stato 3 partendo da 1 e da 2.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
D1) Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di palline bianche estratte. La probabilità richiesta è $P(X \leq 1) = \sum_{k=0}^{1} P(X = k) = \binom{3}{0}(\frac{2}{5})^0(1-\frac{2}{5})^{3-0} + \binom{3}{1}(\frac{2}{5})^1(1-\frac{2}{5})^{3-1} = \frac{27+54}{125} = \frac{81}{125}$.
D2) Con riferimento alla distribuzione multinomiale, la probabilità richiesta è $\frac{3!}{1!1!1!}(\frac{2}{5})^1(\frac{2}{5})^1(\frac{1}{5})^1 = \frac{24}{125}$.
D3) Indichiamo con B, N e R gli eventi "estratte tutte bianche", "estratte tutte nere" ed "estratte tutte rosse". La probabilità richiesta è $P(B|B \cup N \cup R) = \frac{P(B\cap(B\cup N\cup R))}{P(B\cup N\cup R)} = \frac{P(B)}{P(B)+P(N)+P(R)} = \frac{(\frac{2}{5})^3}{(\frac{2}{5})^3+(\frac{2}{5})^3+(\frac{1}{5})^3} = \frac{8}{8+8+1} = \frac{8}{17}$.

Esercizio 2.
D4) Sia T l'evento "esce testa" e sia E l'evento "esce 1 nel lancio del dado". Allora, per la formula delle probabilità totali, la probabilità richiesta è

$$P(E) = P(T|E)P(E) + P(T|E^c)P(E^c) = \frac{p_1 + 5p_2}{6}.$$

Esercizio 3.
D5) Si ha

$$P(X_1 = X_2) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{X_1,X_2}(k,k) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k}{k} p^k(1-p)^{k-k}(1-q)^k q = q\sum_{k=0}^{\infty}(p(1-q))^k = \frac{q}{1-p(1-q)}.$$

D6) Si ha

$$\begin{aligned} P(X_1 = 0|X_2 = 2) &= \frac{P(X_1 = 0, X_2 = 2)}{P(X_2 = 2)} = \frac{p_{X_1,X_2}(0,2)}{\sum_{k=0}^{2} p_{X_1,X_2}(k,2)} \\ &= \frac{\binom{2}{0}p^0(1-p)^{2-0}(1-q)^2 q}{\sum_{k=0}^{2}\binom{2}{k}p^k(1-p)^{2-k}(1-q)^2 q} = \frac{(1-p)^2(1-q)^2 q}{(1-q)^2 q\sum_{k=0}^{2}\binom{2}{k}p^k(1-p)^{2-k}} = \frac{(1-p)^2}{\sum_{k=0}^{2}\binom{2}{k}p^k(1-p)^{2-k}} \end{aligned}$$

e, osservando che $\sum_{k=0}^{2}\binom{2}{k}p^k(1-p)^{2-k} = p^2 + 2p(1-p) + (1-p)^2 = p^2 + 2p - 2p^2 + 1 + p^2 - 2p = 1$ (si poteva anche dire che $\sum_{k=0}^{2}\binom{2}{k}p^k(1-p)^{2-k} = (p+1-p)^2 = 1$ per il binomio di Newton), si conclude che $P(X_1 = 0|X_2 = 2) = (1-p)^2$.

Esercizio 4.
D7) Si ha $P(0 \leq Y \leq 1) = 1$, da cui segue $F_Y(y) = 0$ per $y \leq 0$ e $F_Y(y) = 1$ per $y \geq 1$. Per $y \in (0,1)$ si ha

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\left(\frac{e^X - 1}{e-1} \leq y\right) = P(e^X - 1 \leq (e-1)y) = P(e^X \leq 1 + (e-1)y) \\ &= P(X \leq \log(1+(e-1)y)) = \int_0^{\log(1+(e-1)y)} bx^{b-1}dx = b\frac{[x^{b-1+1}]_{x=0}^{x=\log(1+(e-1)y)}}{b-1+1} = (\log(1+(e-1)y))^b. \end{aligned}$$

D8) Si ha $\mathbb{E}[X] = \int_0^1 xbx^{b-1}dx = b\int_0^1 x^b dx = b[\frac{x^{b+1}}{b+1}]_{x=0}^{x=1} = \frac{b}{b+1}$. Quindi si considera l'equazione $\frac{b}{b+1} = \frac{1}{2}$, da cui segue $2b = b+1$ e $b = 1$.
Osservazione. Per $b = 1$ la variabile aleatoria X ha distribuzione uniforme su $(0,1)$ e in effetti, per note proprietà delle distribuzioni uniformi, il valor medio concide con il punto medio dell'intervallo (che in questo caso è $1/2$).

Esercizio 5.
D9) Abbiamo

$$\Phi(3) = P(X < y) = P\left(\frac{X-2}{\sqrt{144}} < \frac{y-2}{\sqrt{144}}\right) = \Phi\left(\frac{y-2}{\sqrt{144}}\right),$$

da cui segue $\frac{y-2}{\sqrt{144}} = 3$ e, con semplici calcoli, si ottiene $y = 2 + 3\sqrt{144} = 2 + 36 = 38$.
D10) In generale, se indichiamo la varianza delle variabili aleatorie $\{X_n : n \geq 1\}$ con σ^2, per il teorema limite

centrale si ha

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1+\cdots+X_n-\mu n}{\sigma\sqrt{n}}\leq y\right)=\Phi(y).$$

Da questo limite, dividendo per n numeratore e denominatore, come visto a lezione si ottiene una versione con le medie al posto delle somme:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\leq y\right)=\Phi(y).$$

Nel nostro caso si ha

$$P\left(\frac{\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}-\mu}{1/\sqrt{n}}>y\right)=1-P\left(\frac{\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}-\mu}{\sqrt{121}/\sqrt{n}}\leq\frac{y}{\sqrt{121}}\right)\to 1-\Phi\left(\frac{y}{\sqrt{121}}\right)=1-\Phi\left(\frac{y}{11}\right).$$

Esercizio 6.
`D11`) La densità discreta richiesta si ottiene (come vettore riga) dalla seguente relazione matriciale:

$$(p_{X_2}(1),p_{X_2}(2),p_{X_2}(3))=(1,0,0)\left(\begin{array}{ccc}1-p & p & 0\\ 0 & 1-q & q\\ 0 & 1-q & q\end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc}1-p & p & 0\\ 0 & 1-q & q\\ 0 & 1-q & q\end{array}\right).$$

Quindi si ha

$$\begin{aligned}(p_{X_2}(1),p_{X_2}(2),p_{X_2}(3))&=(1-p,p,0)\left(\begin{array}{ccc}1-p & p & 0\\ 0 & 1-q & q\\ 0 & 1-q & q\end{array}\right)\\ &=((1-p)^2,(1-p)p+p(1-q),pq)=((1-p)^2,p(2-p-q),pq).\end{aligned}$$

`D12`) Indichiamo con μ_1 e μ_2 i due tempi medi richiesti. Tali valori sono soluzione del seguente sistema

$$\begin{cases}\mu_1=1+(1-p)\mu_1+p\mu_2\\ \mu_2=1+(1-q)\mu_2\end{cases}$$

La seconda equazione fornisce il valore $\mu_2=\frac{1}{q}$ con semplici passaggi. Sostiteuendo nella prima si ottiene $p\mu_1=1+\frac{p}{q}$, da cui segue $\mu_1=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$.
Osservazione. I valori ottenuti si potevano dedurre dalle proprietà della distribuzione geometrica traslata (quella che parte da 1). Infatti il tempo di primo passaggio in 3 partendo da 2 ha tale distribuzione con parametro q, mentre il tempo di primo passaggio in 3 partendo da 1 è la somma di due variabili aleatorie indipendenti, con distribuzione geometrica traslata di parametri p e q rispettivamente (l'indipendenza è ininfluente nel calcolo della speranza matematica della somma delle variabili aleatorie).