Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)
Anno accademico: 2011-2012. *Titolare del corso:* Claudio Macci
Appello del 16 Luglio 2012

Esercizio 1. Si lancia un dado equo 2 volte.
D1) Calcolare la probabilità che esca almeno una volta il *numero 5*.
D2) Calcolare la probabilità che esca almeno una volta il *numero 5* sapendo che la somma dei due numeri ottenuti è 8.

Esercizio 2. Abbiamo due urne con palline numerate: la prima con due palline con i numeri 1 e 2; la seconda con tre palline con i numeri 1, 2 e 3. Si estrae una pallina a caso dalla prima urna e la si mette nella seconda; poi si estrae a caso una pallina dalla seconda urna.
D3) Calcolare la probabilità di estrarre una pallina con *numero dispari* dalla seconda urna.
D4) Calcolare la probabilità di aver estratto la pallina con il *numero 2* dalla prima urna sapendo di aver estratto una pallina con *numero dispari* dalla seconda urna.

Esercizio 3. Consideriamo la seguente densità congiunta: $p_{X_1,X_2}(1,k) = (\frac{1}{2})^{k+1}$ per $k \geq 1$ intero; $p_{X_1,X_2}(2,2k) = (\frac{1}{2})^{k+2}$ per $k \geq 0$ intero.
D5) Trovare la densità marginale di X_1.
D6) Calcolare che $P(X_1 \geq X_2)$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con distribuzione uniforme su $(0,1)$.
D7) Trovare la densità continua di $Y = 2 - \sqrt{X}$.
D8) Calcolare $\mathbb{E}[Y]$.

Esercizio 5. Sia $N_t = \sum_{n\geq 1} 1_{T_n \leq t}$ (per $t \geq 0$) un processo di Poisson con intensità di $\lambda = 3$.
D9) Calcolare $P(N_5 \leq 1)$.
D10) Calcolare $\mathbb{E}[T_9]$.

Esercizio 6. Sia X una variabile aleatoria normale standard.
D11) Calcolare $P(-0.25 \leq X \leq 1)$.
D12) Verificare che, per ogni $z > 0$, si ha $P(-z \leq X \leq z | X > 0) = 2\Phi(z) - 1$.

Esercizio 7 (*solo per ST-Materiali*). Consideriamo una catena di Markov omogenea $\{X_n : n \geq 0\}$ con spazio degli stati $E = \{1,2,3\}$ e matrice di transizione

$$P = \left(\begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

D13) Trovare la/e distribuzione/i stazionaria/e.
D14) Calcolare $P(X_1 \neq 3, X_2 \neq 3 | X_0 = 1)$. *Suggerimento*: è utile esprimere la probabilità richiesta come somma di 4 termini, cioè

$$P(X_1 \neq 3, X_2 \neq 3 | X_0 = 1) = \sum_{x_1=1}^{2} \sum_{x_2=1}^{2} P(X_1 = x_1, X_2 = x_2 | X_0 = 1).$$

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
D1) Sia X la variabile aleatoria che indica il numero di volte che esce il *numero 5* nei due lanci del dado equo. Allora $p_X(k) = \binom{2}{k}(\frac{1}{6})^k(1-\frac{1}{6})^{2-k}$ per $k \in \{0,1,2\}$. Quindi la probabilità richiesta è $P(X \geq 1) = p_X(1) + p_X(2) = \frac{10+1}{36} = \frac{11}{36}$.
D2) Indichiamo con E l'evento "la somma dei numeri ottenuti è 8". Allora l'evento $\{X \geq 1\} \cap E$ è costituito dalle coppie $(3,5)$ e $(5,3)$, mentre l'evento E è costituito dalle coppie $(2,6)$, $(3,5)$, $(4,4)$, $(5,3)$ e $(6,2)$. Quindi $P(X \geq 1|E) = \frac{P(\{X\geq 1\}\cap E)}{P(E)} = \frac{2/36}{5/36} = \frac{2}{5}$.

Esercizio 2. Sia D l'evento "estratto un *numero dispari* dalla seconda urna"; inoltre sia X la variabile aleatoria che indica il numero estratto dalla prima urna.
D3) Per la formula delle probabilità totali si ha $P(D) = P(D|X=1)P(X=1) + P(D|X=2)P(X=2) = \frac{3}{4}\frac{1}{2} + \frac{2}{4}\frac{1}{2} = \frac{3}{8} + \frac{2}{8} = \frac{5}{8}$.
D4) Per la formula di Bayes (e per il valore di $P(D)$ calcolato prima) si ha $P(X=2|D) = \frac{P(D|X=2)P(X=2)}{P(D)} = \frac{\frac{2}{4}\frac{1}{2}}{\frac{5}{8}} = \frac{2}{5}$.

Esercizio 3.
D5) Si ha $p_{X_1}(1) = \sum_{k=1}^{\infty} p_{X_1,X_2}(1,k) = \sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^{k+1} = \frac{(1/2)^2}{1-1/2} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}$ e $p_{X_1}(2) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{X_1,X_2}(2,2k) = \sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^{k+2} = \frac{(1/2)^2}{1-1/2} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}$.
D6) Si ha $P(X_1 \geq X_2) = p_{X_1,X_2}(1,1) + p_{X_1,X_2}(2,2) + p_{X_1,X_2}(2,0) = (\frac{1}{2})^{1+1} + (\frac{1}{2})^{1+2} + (\frac{1}{2})^{0+2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{2+1+2}{8} = \frac{5}{8}$.

Esercizio 4.
D7) Si vede che $P(1 \leq 2 - \sqrt{X} \leq 2) = 1$, da cui $F_Y(y) = 0$ per $y \leq 1$ e $F_Y(y) = 1$ per $y \geq 2$. Per $y \in (1,2)$ si ha $F_Y(y) = P(2-\sqrt{X} \leq y) = P(\sqrt{X} \geq 2-y) = P(X \geq (2-y)^2) = \int_{(2-y)^2}^1 dt = [t]_{t=(2-y)^2}^{t=1} = 1-(2-y)^2$. Quindi la densità è $f_Y(y) = 2(2-y)1_{(1,2)}(y)$.
D8) Si ha $\mathbb{E}[Y] = \int_1^2 y2(2-y)dy = \int_1^2(4y-2y^2)dy = [4\frac{y^2}{2} - 2\frac{y^3}{3}]_{y=1}^{y=2} = 8 - \frac{16}{3} - 2 + \frac{2}{3} = 6 - \frac{14}{3} = \frac{18-14}{3} = \frac{4}{3}$.

Esercizio 5.
D9) Si ha $P(N_5 \leq 1) = \sum_{k=0}^{1} P(N_5 = k) = \sum_{k=0}^{1} \frac{(3\cdot 5)^k}{k!}e^{-3\cdot 5} = (1+15)e^{-15} = 16e^{-15}$.
D10) Si ha $\mathbb{E}[T_9] = \frac{9}{3} = 3$.

Esercizio 6.
D11) Si ha $P(-0.25 \leq X \leq 1) = \Phi(1) - \Phi(-0.25) = \Phi(1) - (1-\Phi(0.25)) = \Phi(1) + \Phi(0.25) - 1 = 0.84134 + 0.59871 - 1 = 0.44005$.
D12) Per ogni $z > 0$ si ha $P(-z \leq X \leq z|X>0) = \frac{P(\{-z\leq X\leq z\}\cap\{X>0\})}{P(X>0)} = \frac{P(0<X\leq z)}{1-\Phi(0)} = \frac{\Phi(z)-\Phi(0)}{1-\Phi(0)} = \frac{\Phi(z)-0.5}{1-0.5} = 2(\Phi(z)-0.5) = 2\Phi(z)-1$.

Esercizio 7.
D13) Se indichiamo la distribuzione stazionaria con (α,β,γ), si ha la relazione matriciale

$$(\alpha,\beta,\gamma)\left(\begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right) = (\alpha,\beta,\gamma)$$

che fornisce le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{2}+\gamma=\alpha \\ \frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}=\beta \\ \frac{\beta}{2}=\gamma. \end{cases}$$

Ricordiamo che cerchiamo le soluzioni (α,β,γ) del sistema tali che $\alpha,\beta,\gamma\geq 0$ e $\alpha+\beta+\gamma=1$; quindi, poiché si ha $\alpha=\beta$ dalla seconda equazione e $\beta=2\gamma$ dalla terza equazione, possiamo dire che $(\alpha,\beta,\gamma)=(2\gamma,2\gamma,\gamma)$, da cui segue $5\gamma=1$, $\gamma=\frac{1}{5}$. In conclusione l'unica distribuzione stazionaria è $(\alpha,\beta,\gamma)=(2/5,2/5,1/5)$.
`D14`) Seguendo il suggerimento e per la teoria sulle catene di Markov, si ha

$$\begin{aligned} P(X_1\neq 3,X_2\neq 3|X_0=1)=&\sum_{x_1=1}^{2}\sum_{x_2=1}^{2}p_{1x_1}p_{x_1x_2}=p_{11}p_{11}+p_{11}p_{12}+p_{12}p_{21}+p_{12}p_{22}\\ =&\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot 0+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Commenti.
La somma dei valori di ciascuna densità discreta che appare è 1 in accordo con la teoria.
`D1`) In altro modo si ha $P(X\geq 1)=1-p_X(0)=1-\frac{25}{36}=\frac{11}{36}$. Del resto l'evento $\{X\geq 1\}$ è composto dalle seguenti 11 coppie: $(1,5)$, $(5,1)$, $(2,5)$, $(5,2)$, $(3,5)$, $(5,3)$, $(4,5)$, $(5,4)$, $(5,5)$, $(5,6)$, $(6,5)$.
`D8`) In altro modo si ha $\mathbb{E}[Y]=\mathbb{E}[2-\sqrt{X}]=2-\mathbb{E}[\sqrt{X}]=2-\int_0^1\sqrt{x}dx=2-[\frac{x^{1+1/2}}{1+1/2}]_{x=0}^{x=1}=2-\frac{1}{3/2}=2-\frac{2}{3}=\frac{6-2}{3}=\frac{4}{3}$.
`D13`) L'unicità della distribuzione stazionaria segue dalla irriducibilità della catena di Markov.
`D14`) In altro modo si ha

$$\begin{aligned} P(X_1\neq 3,X_2\neq 3|X_0=1)=&1-P(\{X_1=3\}\cup\{X_2=3\}|X_0=1)\\ =&1-(P(X_1=3|X_0=1)+P(X_2=3|X_0=1)\\ &-P(\{X_1=3\}\cap\{X_2=3\}|X_0=1)) \end{aligned}$$

e, tenendo conto che $P(X_1=3|X_0=1)=p_{13}=0$, si ottiene

$$\begin{aligned} P(X_1\neq 3,X_2\neq 3|X_0=1)=&1-(P(X_2=3|X_0=1)-P(\{X_1=3\}\cap\{X_2=3\}|X_0=1))\\ =&1-P(\{X_1\neq 3\}\cap\{X_2=3\}|X_0=1)=1-\sum_{x_1=1}^{2}p_{1x_1}p_{x_13}\\ =&1-(p_{11}p_{13}+p_{12}p_{23})=1-\left(\frac{1}{2}\cdot 0+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}. \end{aligned}$$