Università di Roma Tor Vergata
Statistica per la ricerca sperimentale e tecnologica (Informatica) (Esercizi 1-2-3-4-5-6)
Probabilità e Statistica (Scienza dei Media e delle Comunicazioni) (Esercizi 1-2-3-4-5-6)
Probabilità e Statistica (Scienza e Tecnologia dei Materiali) (Esercizi 1-2-3-4-5-7)
Anno accademico: 2008-2009. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Esame del 6 Febbraio 2009

Esercizio 1. Un'urna contiene 5 palline bianche, 5 rosse e 5 nere. Si estraggono a caso 2 palline, una alla volta con reinserimento. Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di palline bianche estratte.
D1) Trovare la densità discreta di X.
D2) Calcolare la probabilità di estrarre i colori bianco e rosso.

Esercizio 2. Consideriamo il seguente gioco. Si lancia un dado equo: se esce il *numero 1*, si lancia nuovamente il dado e si vince se esce ancora il *numero 1*; se esce un numero *diverso da 1*, si lancia una moneta equa e si vince se esce *testa*.
D3) Calcolare la probabilità di vincere il gioco.
D4) Calcolare la probabilità di aver ottenuto il *numero 1* nel lancio iniziale del dado sapendo di aver vinto il gioco.

Esercizio 3. La variabile aleatoria (X_1, X_2) ha la seguente densità congiunta: $p_{(X_1,X_2)}(0,0) = p_{(X_1,X_2)}(0,1) = p_{(X_1,X_2)}(2,0) = \frac{1}{4}$; $p_{(X_1,X_2)}(1,0) = p_{(X_1,X_2)}(1,1) = \frac{1}{8}$.
D5) Trovare la densità marginale di X_2.
D6) Trovare la densità discreta di $Z = |X_1 - X_2|$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria continua con densità f_X definita come segue: $f_X(t) = \frac{2}{3}(2-t)$ per $t \in [0,1]$ e $f_X(t) = 0$ altrimenti.
D7) Calcolare $P(X < 1/4)$.
D8) Calcolare $\mathbb{E}[X^2]$.

Esercizio 5. Sia X una variabile aleatoria normale con media 4 e varianza 25. Poi sia Y un'altra variabile aleatoria normale con media -4 e varianza 75, indipendente da X.
D9) Calcolare $P(3 < X < 6)$.
D10) Calcolare $P(X + Y > 3)$.

Esercizio 6. Sia $N_t = \sum_{n \geq 1} 1_{T_n \leq t}$ (per $t \geq 0$) un processo di Poisson con intensità di $\lambda = 11/2$.
D11) Calcolare $\mathbb{E}[T_{11}]$.
D12) Calcolare $P(N_2 \leq 1)$.

Esercizio 7. Siano $p, q, r > 0$ tali che $p + q + r = 1$. Poi sia (X_n) una catena di Markov omogenea con spazio degli stati $\{1,2,3,4,5\}$ e matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} p & q & r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

D13) Calcolare le probabilità che, partendo dallo *stato 1*, la catena passi per lo *stato 2* e per lo *stato 3*; inoltre, indicando tali probabilità con $\lambda_1^{(2)}$ e $\lambda_1^{(3)}$ rispettivamente, si verifichi che $\lambda_1^{(2)} + \lambda_1^{(3)} = 1$.
D14) Trovare le distribuzioni stazionarie.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
`D1`) La densità discreta di X è $p_X(k) = \binom{2}{k}(\frac{1}{3})^k(1-\frac{1}{3})^{2-k} =$ per $k \in \{0,1,2\}$, da cui segue $p_X(0) = \frac{4}{9}$, $p_X(1) = \frac{4}{9}$ e $p_X(2) = \frac{1}{9}$.
`D2`) La probabilità richiesta è $p_{BR} = \frac{2!}{1!1!0!}(\frac{1}{3})^1(\frac{1}{3})^1(\frac{1}{3})^0 = \frac{2}{9}$ per la teoria della distribuzione multinomiale.

Esercizio 2. Sia V l'evento "vincere il gioco", ed E l'evento "esce il *numero 1* nel lancio del dado".
`D3`) Per la formula delle probabilità totali si ha $P(V) = P(V|E)P(E)+P(V|E^c)P(E^c) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6} = \frac{1}{36}+\frac{5}{12} = \frac{1+15}{36} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$.
`D4`) Per la formula di Bayes e, sfruttando il valore di $P(V)$ calcolato prima, si ha $P(E|V) = \frac{P(V|E)P(E)}{P(V)} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}/\frac{4}{9} = \frac{1}{36}\cdot\frac{9}{4} = \frac{1}{16}$.

Esercizio 3.
`D5`) Si ha $p_{X_2}(0) = p_{(X_1,X_2)}(0,0) + p_{(X_1,X_2)}(1,0) + p_{(X_1,X_2)}(2,0) = \frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{4} = \frac{5}{8}$ e $p_{X_2}(1) = p_{(X_1,X_2)}(0,1) + p_{(X_1,X_2)}(1,1) = \frac{1}{4}+\frac{1}{8} = \frac{3}{8}$.
`D6`) Si ha $p_Z(0) = p_{(X_1,X_2)}(0,0)+p_{(X_1,X_2)}(1,1) = \frac{1}{4}+\frac{1}{8} = \frac{3}{8}$, $p_Z(1) = p_{(X_1,X_2)}(0,1)+p_{(X_1,X_2)}(1,0) = \frac{1}{4}+\frac{1}{8} = \frac{3}{8}$ e $p_Z(2) = p_{(X_1,X_2)}(2,0) = \frac{1}{4} = \frac{2}{8}$.

Esercizio 4.
`D7`) Si ha $P(X < 1/4) = \int_0^{1/4}\frac{2}{3}(2-t)dt = \frac{2}{3}[2t-t^2/2]_{t=0}^{t=1/4} = \frac{2}{3}(2\cdot\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{16}) = \frac{2}{3}(\frac{1}{2}-\frac{1}{32}) = \frac{2}{3}\cdot\frac{16-1}{32} = \frac{15}{48} = \frac{5}{16}$.
`D8`) Si ha $\mathbb{E}[X^2] = \int_0^1 t^2\frac{2}{3}(2-t)dt = \frac{2}{3}\int_0^1 2t^2-t^3dt = \frac{2}{3}[2\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{4}]_{t=0}^{t=1} = \frac{2}{3}(\frac{2}{3}-\frac{1}{4}) = \frac{2}{3}\cdot\frac{8-3}{12} = \frac{5}{18}$.

Esercizio 5.
`D9`) Si ha $P(3 < X < 6) = P(\frac{3-4}{\sqrt{25}} < \frac{X-4}{\sqrt{25}} < \frac{6-4}{\sqrt{25}}) = P(-\frac{1}{5} < \frac{X-4}{\sqrt{25}} < \frac{2}{5}) = \Phi(2/5)-\Phi(-1/5) = \Phi(0.4)-(1-\Phi(0.2)) = \Phi(0.4)+\Phi(0.2)-1 = 0.65542+0.57926-1 = 0.23468$.
`D10`) La variabile aleatoria $X+Y$ ha distribuzione normale con media $4+(-4) = 0$ e varianza $25+75 = 100$. Quindi si ha $P(X+Y > 3) = P(\frac{X+Y-0}{\sqrt{100}} > \frac{3-0}{\sqrt{100}}) = P(\frac{X+Y-0}{\sqrt{100}} > \frac{3}{10}) = 1-\Phi(3/10) = 1-\Phi(0.3) = 1-0.61791 = 0.38209$.

Esercizio 6.
`D11`) La variabile aleatoria T_{11} ha distribuzione Gamma di parametri $\alpha = 11$ e $\lambda = 11/2$; quindi $\mathbb{E}[T_{11}] = \frac{11}{11/2} = 2$.
`D12`) Si ha $P(N_2 \leq 1) = P(N_2 = 0) + P(N_2 = 1) = (\frac{11^0}{0!}+\frac{11^1}{1!})e^{-11} = 12e^{-11}$.

Commenti.
`D1`) Si ha $p_X(0)+p_X(1)+p_X(2) = \frac{4+4+1}{9} = 1$ in accordo con la teoria.
`D2`) In altro modo, se B_i è l'evento "i-sima pallina estratta bianca" e R_i è l'evento "i-sima pallina estratta rossa" (per $i \in \{1,2\}$), si ha $p_{BR} = P((B_1\cap R_2)\cup(R_1\cap B_2)) = P(B_1\cap R_2)+P(R_1\cap B_2) = P(B_1)P(R_2)+P(R_1)P(B_2) = \frac{1}{3}\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\frac{1}{3} = \frac{2}{9}$.
`D1-D2`) La probabilità di estrarre i colori bianco e nero è $p_{BN} = \frac{2!}{1!0!1!}(\frac{1}{3})^1(\frac{1}{3})^0(\frac{1}{3})^1 = \frac{2}{9}$. Per costruzione si deve avere $p_X(1) = p_{BR}+p_{BN}$ e tale uguaglianza si verifica sostituendo i valori numerici: $\frac{4}{9} = \frac{2+2}{9}$.
`D5`) Si ha $p_{X_2}(0)+p_{X_2}(1) = \frac{5+3}{8} = 1$ in accordo con la teoria.
`D6`) Si ha $p_Z(0)+p_Z(1)+p_Z(2) = \frac{3+3+2}{8} = 1$ in accordo con la teoria.

Esercizio 7.

D13) In generale, per le probabilità di passaggio per un insieme C, si ha un sistema di k equazioni e k incognite dove k è la cardinalità dell'insieme D_C degli stati che comunicano con C e non appartenenti a C. Qui siamo interessati a $C = \{2\}$ e $C = \{3\}$ e, in entrambi i casi, si ha $D_C = \{1\}$ e una sola incognita: $\lambda_1^{(2)}$ nel primo caso; $\lambda_1^{(3)}$ nel secondo caso. Indicando con p_{ij} gli elementi della matrice di transizione P, abbiamo i due seguenti casi: per $C = \{2\}$ si ha

$$\lambda_1^{(2)} = p_{12} + p_{11}\lambda_1^{(2)}, \quad \text{che diventa} \quad \lambda_1^{(2)} = q + p\lambda_1^{(2)}, \quad \text{da cui segue} \quad \lambda_1^{(2)} = \frac{q}{1-p};$$

per $C = \{3\}$ si ha

$$\lambda_1^{(3)} = p_{13} + p_{11}\lambda_1^{(3)}, \quad \text{che diventa} \quad \lambda_1^{(3)} = r + p\lambda_1^{(3)}, \quad \text{da cui segue} \quad \lambda_1^{(3)} = \frac{r}{1-p}.$$

Dunque si verifica immediatamente anche l'uguaglianza richiesta:

$$\lambda_1^{(2)} + \lambda_1^{(3)} = \frac{q+r}{1-p} = \frac{1-p}{1-p} = 1.$$

D14) Gli stati $\{1, 2, 3\}$ sono transitori. Infatti, per ogni $i \in \{1, 2, 3\}$, esiste uno stato j tale che i comunica con j e j non comunica con i; basta scegliere $j = 4$ oppure $j = 5$ per ogni scelta di $i \in \{1, 2, 3\}$. Allora, se $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5)$ è una distribuzione stazionaria, si ha necessariamente $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = 0$. Quindi $(\pi_4, \pi_5) = (\alpha, 1-\alpha)$ rappresenta l'unica distribuzione stazionaria relativa alla catena ristretta alla classe chiusa $\{4, 5\}$ e si ha

$$(\alpha, 1-\alpha)\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = (\alpha, 1-\alpha)$$

da cui segue

$$\begin{cases} \frac{\alpha+1-\alpha}{2} = \alpha \\ \frac{\alpha+1-\alpha}{2} = 1-\alpha. \end{cases}$$

Entrambe le equazioni hanno soluzione $\alpha = 1/2$. In conclusione l'unica distribuzione stazionaria è $(0, 0, 0, 1/2, 1/2)$.

Commenti.

D13) In altro modo, se consideriamo le variabili aleatorie $T_i = \inf\{n \geq 1 : X_n = i\}$ per $i \in \{2, 3\}$ con la convenzione $\inf \emptyset = \infty$, possiamo dire che $\lambda_1^{(i)} = P(T_i < \infty | X_0 = 1)$ e si ha

$$\lambda_1^{(i)} = \sum_{1 \leq k < \infty} P(T_i = k | X_0 = 1) = \begin{cases} \sum_{1\leq k<\infty} qp^{k-1} = \frac{q}{1-p} & \text{se } i = 2 \\ \sum_{1\leq k<\infty} rp^{k-1} = \frac{r}{1-p} & \text{se } i = 3. \end{cases}$$

D14) Si verifica che, se una catena irriducibile che ha matrice di transizione con righe uguali, la sua unica distribuzione stazionaria coincide con una delle righe uguali. Quindi potevamo subito dire che, nel caso in cui la la matrice di transizione è

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix},$$

l'unica distribuzione stazionaria è $(1/2, 1/2)$.