

## Lezione 2

### MOTO UNIDIMENSIONALE

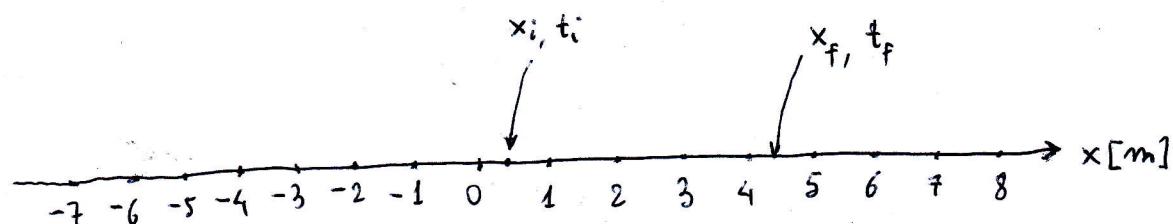
La CINEMATICA è quella branca della fisica che studia il moto dei corpi, senza considerare le cause del moto stesso.

MOTO: variazione nel tempo delle posizioni di un corpo rispetto a un osservatore.

In questo primo approccio trascureremo le strutture interne dei corpi considerati, e considereremo le loro dimensioni trascurabili rispetto all'estensione dell'ambiente entro cui si svolge il moto, avverremo cioè nell'approssimazione di "PUNTO MATERIALE".

Questo è il primo esempio di MODELLO di un sistema fisico.

Il MOTO UNIDIMENSIONALE, o MOTO RETTILINEO, si svolge lungo una direzione fisica (linea retta). È quindi possibile associare alle rette lungo le quali si svolge il moto un sistema di COORDINATE SPAZIALI rappresentato da un ASSE ORIENTATO:



Un corpo in moto lungo le rette considerate, a ogni istante si trova in una certa posizione individuata dalle coordinate  $x(t)$  (che si legge " $x$  di  $t$ ", cioè " $x$  funzione del tempo  $t$ ").

Consideriamo il moto del corpo fra l'istante  $t_i$  e l'istante  $t_f > t_i$ ; indichiamo con il simbolo  $\Delta t$  (che si legge "delta t", essendo  $\Delta$  le lettere greche dette maiuscole) la quantità  $t_f - t_i$ ; cioè,  $\Delta t = t_f - t_i$  è l'INTERVALLO di TEMPO fra l'istante  $t_i$  e l'istante  $t_f$ ; indichiamo poi con  $\Delta x$  la variazione delle posizione del corpo in questo intervallo di tempo, cioè poniamo  $\Delta x = x_f - x_i$ , essendo  $x_i = x(t_i)$  e  $x_f = x(t_f)$ .

Si definisce VELOCITÀ MEDIA del corpo considerato nell'intervallo di tempo  $\Delta t$  la quantità

$$v_{x,\text{med}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i}, \text{ che evidentemente}$$

si misura in  $\text{m/s}$ , che si può anche scrivere  $\text{m s}^{-1}$ .

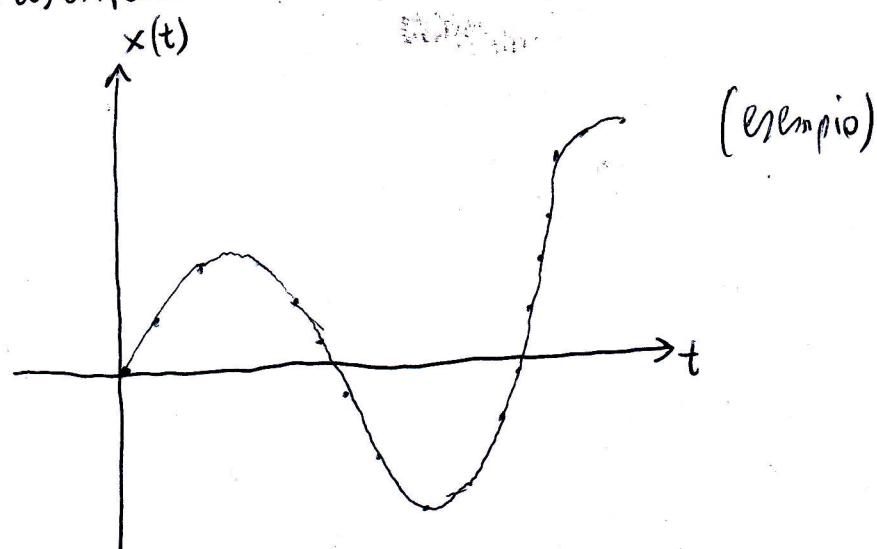
Attenzione! La velocità media così definita non dipende dal percorso seguito fra gli istanti  $t_i$  e  $t_f$ .

Esempio: se con un'auto ci spostiamo lungo una linea retta e rimane  $x_f = x_i$ , la velocità media nell'intervallo di tempo  $\Delta t = t_f - t_i$  è uguale a zero, anche se il tacchimetro durante il viaggio ha indicato una velocità non nulla per la maggior parte del tempo; questo è possibile, ad esempio, se l'auto perde verso destra lungo la retta e poi inverse il moto e torna verso sinistra e si ferma nel punto con coordinate  $x_f = x_i$  (cioè se torna al punto di partenza).

Si puo' definire una VELOCITA' SCALARE MEDIA dividendo la DISTANZA PERCORSA per l'intervalle di tempo impiegato a percorrerla, e in generale puo' non coincidere con le velocita' medie definite in precedenze.

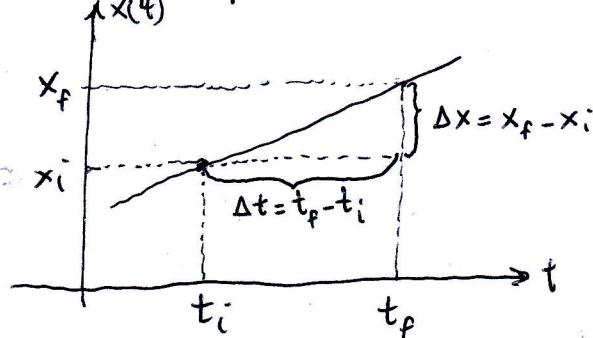
Le velocita' medie e' una quantita' che puo' avere segno positivo o negativo e secondo che risulti  $\Delta x > 0$  oppure  $\Delta x < 0$  ( $\Delta t > 0$  sempre... il tempo scorre sempre "in avanti"!).

Rappresentazione del moto nel piano cartesiano posizione-tempo:



Il grafico delle posizioni  $x$  el venire del tempo  $t$  (o, detto in altro modo, il grafico delle funzione  $x(t)$ ) si dice LEGGE ORARIA del moto del corpo considerato.

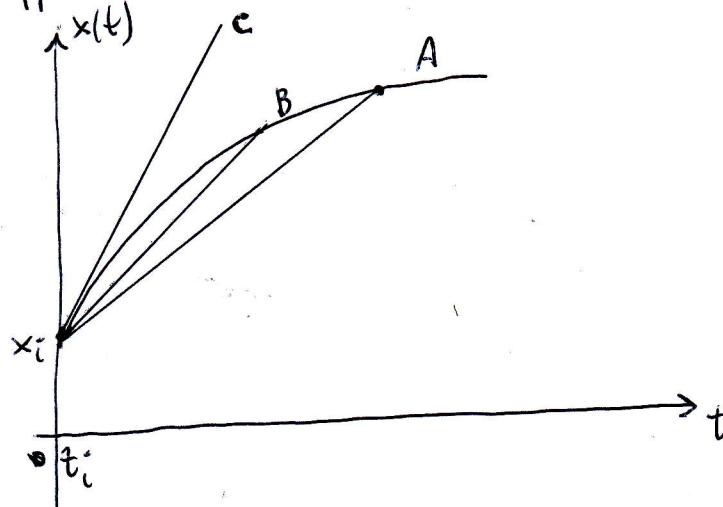
Per come e' definita, le velocita' medie di un corpo e' uguale al coefficiente angolare (anche detto "pendente") delle rette che passano per i punti  $(t_i, x_i)$  e  $(t_f, x_f)$  nel piano cartesiano tempo-posizione:



N.B.: in molti libri di testo si definisce la velocità media come la tangente trigonometrica dell'angolo formato dalle rette passante per  $(t_i, x_i)$  e  $(t_f, x_f)$  con il semiasse  $x$  positivo; ma è una definizione poco chiara: infatti, le grandezze  $x$  e  $t$  hanno dimensioni diverse (cioè non sono grandezze tra loro omogenee), e le scelte delle scale scelte sui due assi l'angolo in questione può assumere valori diversi. Meglio mantenere solo il concetto di coefficiente angolare come rapporto fra  $\Delta x$  e  $\Delta t$ .

Che cosa accade alle velocità medie di un corpo quando si considerano intervalli di tempo sempre più piccoli?

Consideriamo il grafico della funzione  $x(t)$ . Supponiamo che le posizioni del corpo vengano misurate e esistenti molto vicini tra loro, in modo che il grafico sia rappresentato di fatto da una funzione continua.



A questo punto manteniamo fissa la posizione  $(t_i, x_i)$  e consideriamo  $(t_f, x_f)$  in punti man mano sempre più vicini a  $(t_i, x_i)$ .

Man mano che  $(t_f, x_f)$  si avvicina a  $(t_i, x_i)$ ,

la direzione delle rette che congiungono i due punti tende a coincidere con la direzione della retta TANGENTE al grafico di  $x(t)$  nel punto  $(t_i, x_i)$ .

Attenzione! Al tendere di  $(t_f, x_f)$  e  $(t_i, x_i)$  i due intervalli  $\Delta t$  e  $\Delta x$  diventano entrambi sempre più piccoli, ma il loro rapporto  $\frac{\Delta x}{\Delta t}$  tende ad assumere un valore ben definito.

Si definisce quindi la VELOCITA' ISTANTANEA all'istante  $t_i$ :

$$v_x(t_i) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = x'(t) \Big|_{t=t_i}$$

(derivate prime rispetto  
al tempo delle funzione  
 $x(t)$ , calcolata per  $t=t_i$ ).

Per completezza, è essenziale dire che in fisica si usano diverse notazioni per indicare le derivate rispetto al tempo, tutte equivalenti e utilizzabili indifferentemente:

$$x'(t) = \frac{d x(t)}{dt} = \dot{x}(t) = D x(t)$$

Le prime e l'ultima notazione sono usate prevalentemente dai matematici, le seconde e le terze prevalentemente dai fisici ( $\frac{d x(t)}{dt}$ ) e le notazioni introdotte da Gottfried Wilhelm von Leibniz,  $\dot{x}(t)$  è la notazione introdotte da Isaac Newton)

Le velocità indicate del tacchimetro di un'auto è le velocità istantanee.

L'indice "x" nel simbolo  $v_x$  sta ovviamente a indicare le "velocità lungo l'asse x".

Esempio 1 Consideriamo un punto materiale che si muove di moto rettilineo con legge oraria

$$x(t) = 3t^2 \text{ (m)}$$

Attenzione anzitutto alle dimensioni fisiche di queste quantità!  
Se  $t$  e' misurato in secondi, il coefficiente 3 non puo' essere un numero puramente adimensionale, in quanto le quantita'

$3t^2$  deve avere le dimensioni di una lunghezza!  
Dunque, in questo caso, la quantita' "3" dovrà essere una grandezza finita avente come dimensioni  $L \cdot T^{-2}$ , cioè  $3 \text{ m/s}^2$ . Negli esercizi seguenti non preciseremo ulteriormente questo fatto, che comunque dovrà sempre essere tenuto presente.

La velocità istantanea in funzione del tempo sarà quindi

$$v_x(t) = x'(t) = 3 \cdot 2t = 6t \text{ (m/s)}$$

Esempio 2

$$x(t) = -4t + 2t^2 \text{ (m)}$$

a) Determinare lo spostamento del corpo fra gli istanti  $t_i=0$  e  $t_f=1\text{s}$ :

$$\Delta x_1 = x(t_f=1\text{s}) - x(t_i=0) = (-4 \cdot 1 + 2 \cdot 1^2) \text{ m} - 0 \text{ m} = -2 \text{ m}$$

E fra gli istanti  $t_i=1\text{s}$  e  $t_f=3\text{s}$ :

$$\begin{aligned} \Delta x_2 &= x(t_f=3\text{s}) - x(t_i=1\text{s}) = ((-4 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2) - (-4 \cdot 1 + 2 \cdot 1^2)) \text{ m} = \\ &= (6 - (-2)) \text{ m} = 8 \text{ m} \end{aligned}$$

b) Calcolare le velocità medie nei due intervalli di tempo considerati sopra:

$$v_{m,1} = \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1} = \frac{-2 \text{ m}}{1 \text{ s}} = -2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad ; \quad v_{m,2} = \frac{\Delta x_2}{\Delta t_2} = \frac{8 \text{ m}}{(3-1)\text{s}} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (6)$$

c) Trovare le velocità istantanee del corpo all'istante

$$t = 2,5 \text{ s} :$$

$$v_x(t) = x'(t) = (-4 + 2 \cdot 2t) \text{ m/s} = (-4 + 4t) \text{ m/s}$$

Dunque:

$$v_x(t=2,5 \text{ s}) = (-4 + 4 \cdot 2,5) \text{ m/s} = (-4 + 10) \text{ m} = 6 \text{ m/s}$$

Per come e' definita, la velocità istantanea di un corpo e' nulla negli istanti in cui la funzione  $x(t)$  presenta un minimo relativo o un massimo relativo o un flesso orizzontale, cioè negli istanti in cui risulta  $x'(t)=0$ .

## Moto rettilineo uniforme

Nel caso particolare in cui un corpo si muove con velocità istantanea costante lungo una linea retta, si parla di **MOTO RETTILINEO UNIFORME**.

Teorema: nel moto rettilineo uniforme la velocità media su un qualunque intervallo di tempo coincide con la velocità istantanea costante  $v_x$ .

Dimostrazione: suddividiamo l'intervallo di tempo  $t_f - t_i$  in  $n$  "intervellini"  $\Delta t$  uguali, in modo che risultino  $n$  corrispondenti  $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$  spostamenti in ciascuno di questi "intervellini"; risultante pertanto  $x_f - x_i = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_n$ .

Allora otteniamo:

$$v_{x,\text{med}} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_n}{n \Delta t} = \\ = \frac{1}{n} \left( \frac{\Delta x_1}{\Delta t} + \frac{\Delta x_2}{\Delta t} + \dots + \frac{\Delta x_n}{\Delta t} \right)$$

Per  $n$  molto grande gli "intervellini"  $\Delta t$  diventano molto piccoli, per cui tutti i rapporti  $\frac{\Delta x_1}{\Delta t}, \frac{\Delta x_2}{\Delta t}, \dots, \frac{\Delta x_n}{\Delta t}$  tendono alla velocità istantanea  $v_x$ , che per ipotesi è costante. Allora otteniamo infine:

$$v_{x,\text{med}} = \frac{1}{n} \cdot n v_x = v_x \quad (\text{n grande})$$

e questo dimostra il teorema.

Dunque, poiché  $N_{x,\text{med}} = N_x$  (costante), possiamo scrivere:

$$\frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} = N_x \Rightarrow x_f - x_i = N_x (t_f - t_i) \Rightarrow x_f = x_i + N_x (t_f - t_i)$$

Preso  $t_i = 0$  e  $t_f = t$  (istante generico), possiamo quindi scrivere

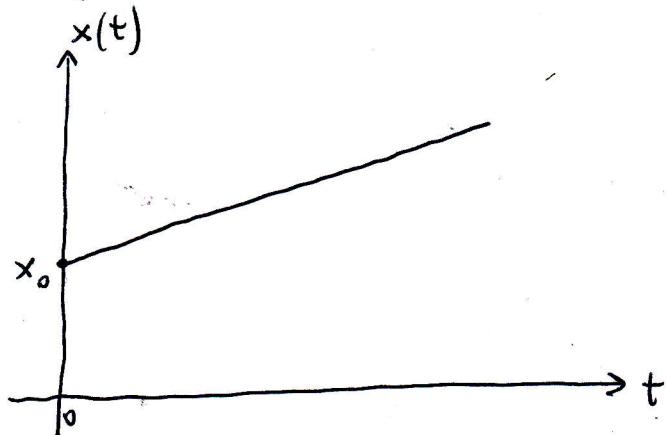
$$x_f(t) = x_i + N_x t$$

LEGGE ORARIA DEL MOTO  
RETTILINEO UNIFORME

In definitiva il moto rettilineo uniforme è descritto dalle seguenti leggi (eliminando l'indice f):

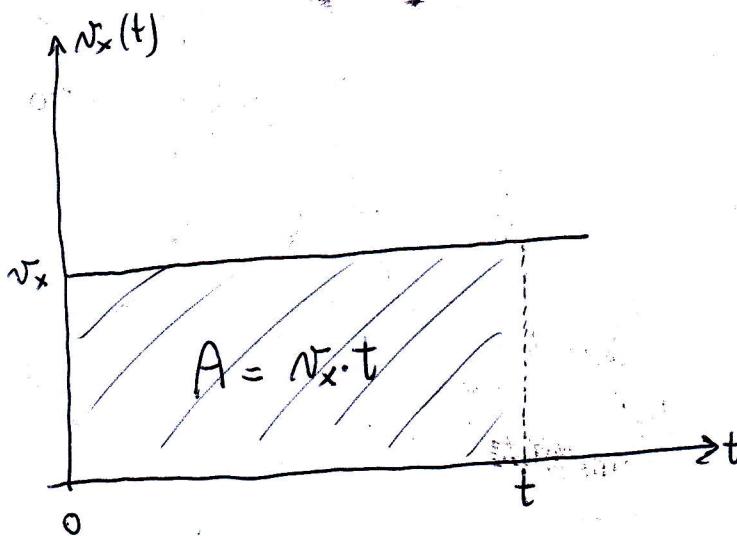
$$\begin{cases} N_x(t) = N_x \text{ costante} \\ x(t) = x_0 + N_x t \end{cases}, \quad \text{avendo posto } x_i = x(t=0) \equiv x_0$$

Ad esempio, nel caso  $N_x > 0$ , il grafico di  $x(t)$  può essere migliore a questo:



retta con pendenza positiva  
nel piano cartesiano  $(t, x)$ .  
( $N_x > 0$ )

E' essenziale considerare l'"interpretazione geometrica" del moto rettilineo uniforme. Consideriamo il grafico delle funzione  $N_x(t) = N_x$  costante nel piano cartesiano  $(t, N_x)$ :



l'area del rettangolo  
avente per lati i due  
intervalli  $[0, t]$  e  $[0, N_x]$   
e' chiaramente uguale  
a  $N_x \cdot t$ .

Ne abbiamo visto che risulta  $N_x \cdot t = x(t) - x_0$ ; dunque,  
nel piano cartesiano  $(t, N_x)$  l'area delimitata tra  
l'asse dei tempi e il grafico di  $N_x(t)$  tra gli istanti  
 $0$  e  $t$  e' uguale allo spostamento  $x(t) - x_0$  del corpo  
tra questi due istanti. Questo e' ovviamente vero anche se  $N_x < 0$ .

### Esempio

Corpo che si muove di moto rettilineo uniforme

$$x_i = 0 \quad x_f = 20 \text{ m} \quad \Delta t = t_f - t_i = 4,4 \text{ s}$$

$$\text{Poiché } N_{x,\text{med}} = N_x, \text{ risulta } N_x = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} = \frac{(20 - 0) \text{ m}}{4,4 \text{ s}} = 4,5 \text{ m/s}$$

Posto  $t_i = 0$  e  $x_i = 0$ , quale e' la posizione del corpo  
all'istante  $t = 10 \text{ s}$ ?

$$x(t=10 \text{ s}) = x_i + N_x \cdot (10 \text{ s}) = (4,5 \cdot 10) \text{ m} = 45 \text{ m}$$

Osservazione: le leggi del moto rettilineo uniforme si possono applicare, con le dovute attenzioni, anche al caso di moto non rettilineo purché con velocità scelere costante; in tal caso occorre immaginare di "rettificare" le traiettorie, e considerare come  $\Delta x$  la distanza percorsa lungo le traiettorie.

Esempio. Traiettorie circolare con raggio  $r = 10 \text{ m}$ , percorso con velocità scelere costante  $v = 5 \text{ m/s}$ . Quanto tempo è necessario per percorrere un giro completo?

Dalle leggi  $\Delta x = v \cdot \Delta t$  ottieniamo

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v} = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi \cdot 10 \text{ m}}{5 \text{ m/s}} = 12,575$$

## Moto accelerato

Si parla di "moto accelerato" quando la velocità istantanea di un corpo varia nel tempo.

Sia  $v_{x,i}$  la velocità istantanea di un corpo all'istante  $t_i$ ,  
cioè poniamo  $v_x(t_i) = v_{x,i}$ .

Analogamente poniamo  $v_x(t_f) = v_{x,f}$ .

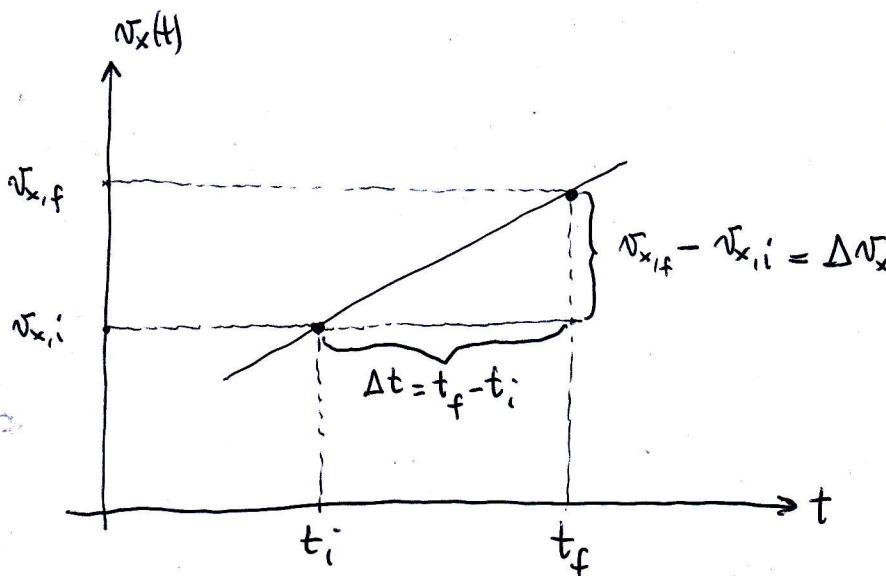
Definiamo l'ACCELERAZIONE MEDIA del corpo tra gli istanti  $t_i$  e  $t_f$  le quantità seguenti:

$$a_{x,\text{med}} = \frac{v_{x,f} - v_{x,i}}{t_f - t_i} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t},$$

che evidentemente si misura in  $\frac{m/s}{s} = \frac{m}{s^2}$ ,

anche indicato  $m \cdot s^{-2}$ .

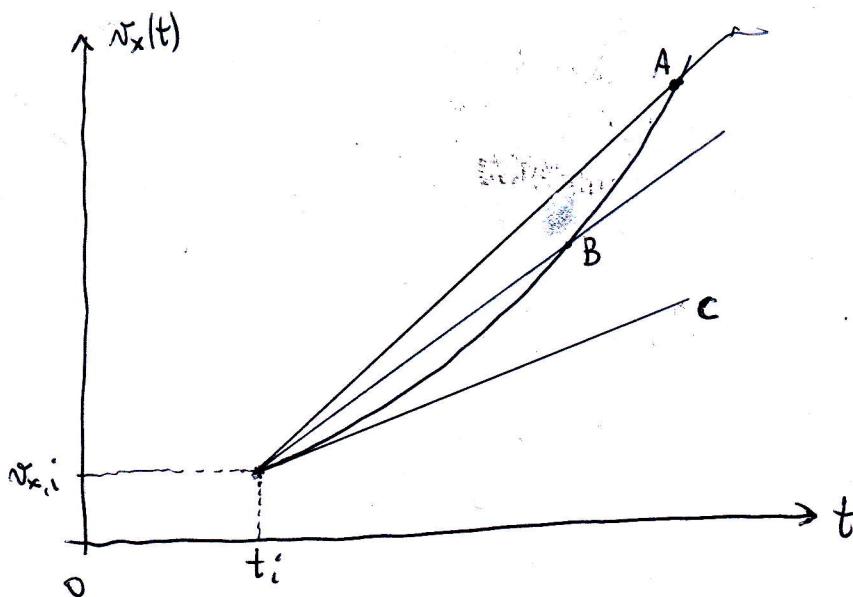
Per come è definita, l'accelerazione media di un corpo nell'intervalle  $[t_i, t_f]$  è uguale al coefficiente angolare delle rette che passa per i punti  $(t_i, v_{x,i})$  e  $(t_f, v_{x,f})$  nel piano cartesiano  $(t, v_x)$ :



Che cosa accade all'accelerazione media di un corpo quando si considerano intervalli di tempo sempre più piccoli?

Consideriamo il grafico delle funzione  $v_x(t)$ .

Supponiamo che le velocità istantanee del corpo venga misurata a istanti molto vicini tra loro, in modo che il grafico sia rappresentato di fatto da una funzione continua.



A questo punto  
manteniamo fisso il  
punto  $(t_i, v_{x,i})$  e  
consideriamo  $(t_f, v_{x,f})$   
in punti sempre più  
vicini a  $(t_i, v_{x,i})$ .

Non meno che  $(t_f, v_{x,f})$  si avvicina a  $(t_i, v_{x,i})$ , la  
direzione delle rette che congiunge i due punti tende a  
coincidere con la direzione della retta tangente al grafico  
di  $v_x(t)$  nel punto  $(t_i, v_{x,i})$ .

Come già visto nel caso di  $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ , anche nel caso del rapporto  $\frac{\Delta v_x}{\Delta t}$  i due intervalli  $\Delta v_x$  e  $\Delta t$  diventano sempre più  
piccoli al tendere di  $(t_f, v_{x,f})$  a  $(t_i, v_{x,i})$ , ma il rapporto  
 $\frac{\Delta v_x}{\Delta t}$  tende ad assumere un valore ben definito.

Si definisce quindi l'ACCELERAZIONE ISTANTANEA all'istante  $t_i$ :

$$a_x(t_i) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = v_x'(t)$$

Quando si usa il solo termine "accelerazione" in genere si intende l'accelerazione istantanea.

Per come e' definita, l'accelerazione istantanea di un corpo e' nulla negli istanti in cui la funzione  $v_x(t)$  presenta un massimo relativo o un minimo relativo o un flesso orizzontale, cioe' negli istanti in cui risulta  $v_x'(t) = 0$ .

Risulta anche, come conseguenza delle leggi determinate

giornate:

$$a_x(t) = x''(t) \quad (\text{essendo } v_x(t) = x'(t))$$

Quando  $v_x(t)$  e  $a_x(t)$  hanno lo stesso segno,  $|v_x(t)|$  aumenta nel tempo.

Quando  $v_x(t)$  e  $a_x(t)$  hanno segni opposti,  $|v_x(t)|$  decresce nel tempo.

Attenzione: un corpo che si muove di moto rettilineo uniforme ha accelerazione nulla. Infatti risulta

$$a_x(t) = v_x'(t) = 0 \quad \text{se} \quad v_x(t) = v_x \text{ costante.}$$

Esempio. Un corpo si muove di moto rettilineo con legge oraria

$$x(t) = 2 + 3t - t^2 \quad (\text{m})$$

Primitiva per tempo:

$$v_x(t) = x'(t) = 3 - 2t \quad (\text{m/s})$$

$$a_x(t) = -2 \text{ m/s}^2 \quad (= v_x'(t))$$

All'istante  $t = 3 \text{ s}$  risulta:

$$x(t=3 \text{ s}) = (2 + 3 \cdot 3 - 3^2) \text{ m} = 2 \text{ m}$$

$$v_x(t=3 \text{ s}) = (3 - 2 \cdot 3) \text{ m/s} = -3 \text{ m/s}$$

$$a_x(t=3 \text{ s}) = -2 \text{ m/s}^2 \quad (a_x \text{ e' costante in questo caso, non dipende dal tempo})$$

Il grafico di  $x(t)$  e' rappresentato da una parabola con asse parallelo all'asse delle ordinate, concavita' rivolta verso il basso, e vertice nel punto di ascisse

$$t_v = \frac{-3}{-2} \text{ s} = 1,5 \text{ s}$$

ordinata del vertice della parabola:

$$\begin{aligned} x_v = x\left(t = \frac{3}{2} \text{ s}\right) &= \left(2 + 3 \cdot \frac{3}{2} - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right) \text{ m} = \left(2 + \frac{9}{2} - \frac{9}{4}\right) \text{ m} = \\ &= \left(2 + \frac{9}{4}\right) \text{ m} = \frac{17}{4} \text{ m} = 4,25 \text{ m} \end{aligned}$$

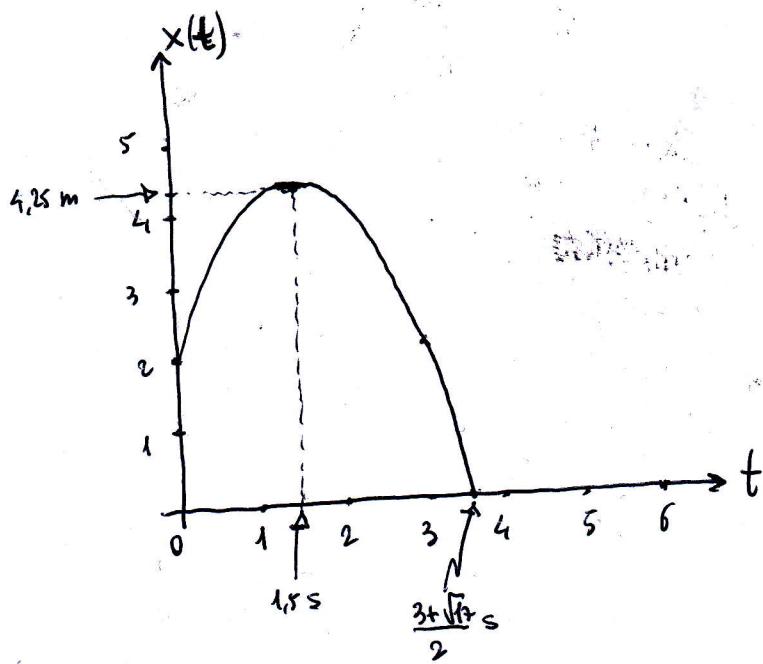
A quale istante risulta  $x = 0$ ? Considerare solo valori  $t \geq 0$ .

Occorre risolvere l'equazione nell'incognita t:

$$2+3t-t^2=0 \Rightarrow t^2-3t-2=0$$

$$t_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+8}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

la soluzione accettabile è  $t_2 = \frac{3+\sqrt{17}}{2} s \approx 3,56 s$



## Moto rettilineo uniformemente accelerato

Nel caso particolare in cui un corpo si muove con accelerazione istantanea costante lungo una linea retta, si parla di **MOTO RETTILINEO UNIFORMEMENTE ACCELERATO**.

Teorema: nel moto rettilineo uniformemente accelerato l'accelerazione media su un qualunque intervallo di tempo coincide con l'accelerazione istantanea costante  $a_x$ .

Dimostrazione: suddividiamo l'intervallo di tempo  $t_f - t_i$  in  $n$  "intervallini"  $\Delta t$  uguali, in modo che risulti  $t_f - t_i = n \Delta t$ . Siano  $\Delta v_{x,1}, \Delta v_{x,2}, \dots, \Delta v_{x,n}$  le corrispondenti variazioni delle velocità istantanee in ciascuno di questi "intervallini"; risulta pertanto:

$$v_{x,f} - v_{x,i} = \Delta v_{x,1} + \Delta v_{x,2} + \dots + \Delta v_{x,n}.$$

Allora otteniamo:

$$a_{x,med} = \frac{v_{x,f} - v_{x,i}}{t_f - t_i} = \frac{\Delta v_{x,1} + \Delta v_{x,2} + \dots + \Delta v_{x,n}}{n \Delta t} =$$

$$= \frac{1}{n} \left( \frac{\Delta v_{x,1}}{\Delta t} + \frac{\Delta v_{x,2}}{\Delta t} + \dots + \frac{\Delta v_{x,n}}{\Delta t} \right)$$

Per  $n$  molto grande gli "intervallini"  $\Delta t$  diventano molto piccoli, per cui tutti i rapporti  $\frac{\Delta v_{x,1}}{\Delta t}, \frac{\Delta v_{x,2}}{\Delta t}, \dots, \frac{\Delta v_{x,n}}{\Delta t}$  tendono all'accelerazione istantanea  $a_x$ , che per ipotesi è costante.

Allora otteniamo infine:

$$a_{x,med} = \frac{1}{n} \cdot n a_x = a_x \quad (n \text{ grande})$$

e questo dimostra il teorema.

Dunque, poiché  $\alpha_{x,\text{med}} = \alpha_x$  (costante), possiamo scrivere:

$$\frac{v_{x,f} - v_{x,i}}{t_f - t_i} = \alpha_x \Rightarrow v_{x,f} - v_{x,i} = \alpha_x (t_f - t_i) \Rightarrow v_{x,f} = v_{x,i} + \alpha_x (t_f - t_i)$$

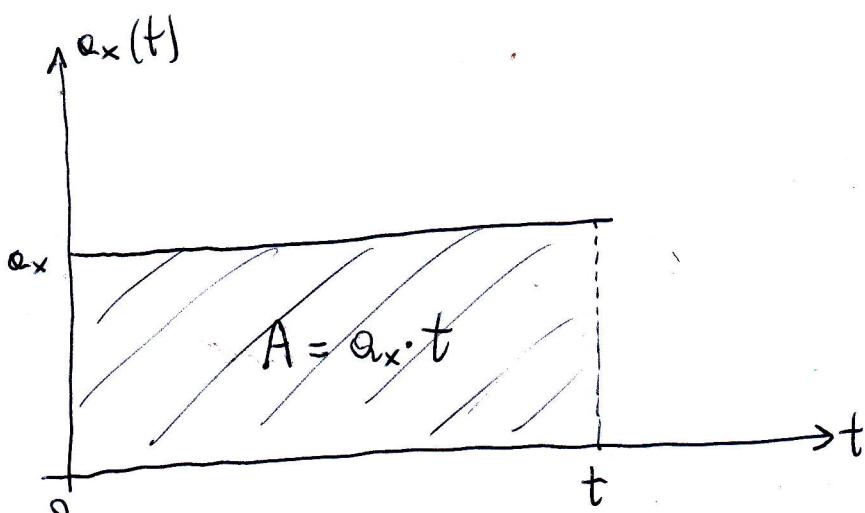
Presso  $t_i = 0$  e  $t_f = t$  (istante generico), possiamo quindi scrivere:

$$v_{x,f}(t) = v_{x,i} + \alpha_x t \quad (\alpha_x \text{ costante})$$

Poiché  $t_i = 0$ , eliminando l'indice f possiamo scrivere, in generale, per il moto rettilineo uniformemente accelerato:

$$v_x(t) = v_{x,0} + \alpha_x t$$

Anche in questo caso è possibile dare un'interpretazione geometrica. Consideriamo il grafico delle funzione  $\alpha_x(t) = \alpha_x$  costante nel piano cartesiano  $(t, \alpha_x)$ :



L'area del rettangolo ovale per le due intervalli  $[0, t]$  e  $[0, \alpha_x]$  è chiaramente uguale a  $\alpha_x \cdot t$ .

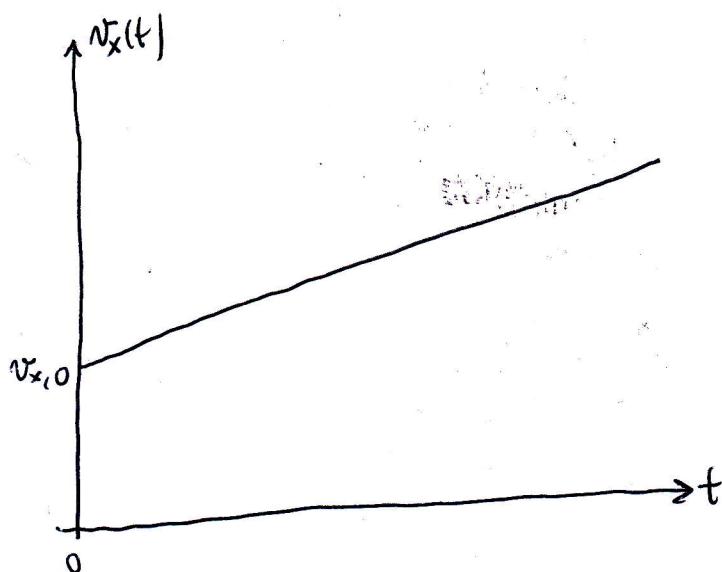
Ma abbiamo visto che risulta  $\alpha_x \cdot t = v_x(t) - v_{x,0}$ ; dunque, nel piano cartesiano  $(t, \alpha_x)$ , l'area delimitata tra l'asse dei tempi e il grafico di  $\alpha_x(t)$  tra gli istanti 0 e  $t$  è uguale alla variazione  $v_x(t) - v_{x,0}$  delle velocità istantanee del corpo tra questi due istanti. Questo è ovviamente vero anche se  $\alpha_x < 0$ .

Ma quale è la legge oraria del moto rettilineo uniformemente accelerato?

Consideriamo il grafico della funzione  $v_x(t)$ .

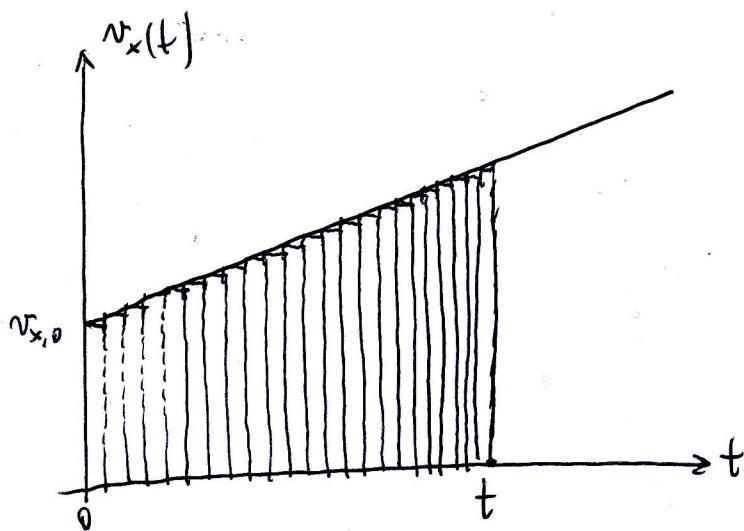
Risulta:  $v_x(t) = v_{x,0} + \alpha_x t$  (vedi sopra).

Ad es., nel caso  $\alpha_x > 0$ , l'andamento del grafico di  $v_x(t)$  può essere di questo tipo:



retta con pendenza costante ( $\alpha_x$  costante)

E' necessario procedere in questo modo: suddividiamo l'intervallo  $[0, t]$  in  $n$  rettangolini aventi tutti base  $\Delta t$  nell'asse dei tempi, e ciascuno effettua per il valore di  $v_x(t)$  nell'estremo inferiore del corrispondente "intervallino"  $\Delta t$ :



Poniamo  $t_0 = 0$ ; risultare

$$t_{n-1} = t - \Delta t \quad \text{e} \quad t_n = t$$

Per  $\Delta t \rightarrow 0$ , la somma delle aree dei rettangolini tende all'area della regione compresa (nel piano cartesiano  $(t, v_x)$ ) tra l'area dei tempi e il grafico di  $v_x(t)$  nell'intervalle  $[0, t]$ .  
 Questa regione piena è chiaramente un trapezio rettangolo, e le sue aree (che coincide con lo spostamento del corpo lungo l'asse  $x$  tra gli istanti 0 e  $t$  dato che questo è vero per ogni intervallo  $\Delta t$ ) è facilmente calcolabile:

$$x(t) - x_0 = \frac{[v_{x,0} + v_{x,t}] \cdot t}{2} = \frac{[(v_{x,0} + \alpha_x t) + v_{x,0}] \cdot t}{2} =$$

$$= \frac{(2v_{x,0} + \alpha_x t) \cdot t}{2} = v_{x,0} t + \frac{1}{2} \alpha_x t^2$$

Riordinando i termini, ottieniamo infine

$$x(t) = x_0 + v_{x,0} t + \frac{1}{2} \alpha_x t^2$$

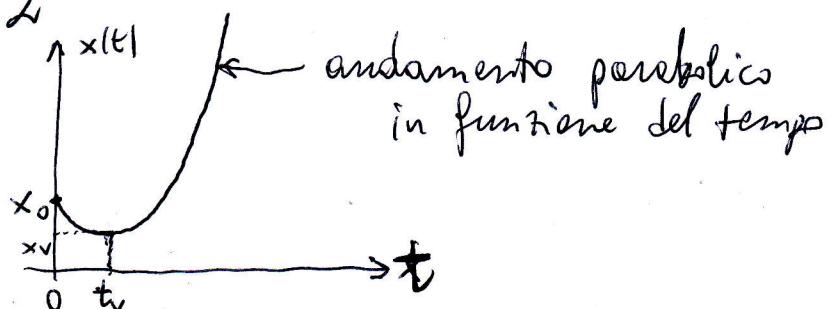
LEGGE ORARIA DEL  
MOTORETILINEO  
UNIFORMEMENTE ACCELERATO

In definitiva, il moto rettilineo uniformemente accelerato è descritto dalle seguenti leggi:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_x(t) = \alpha_x \text{ costante} \\ v_x(t) = v_{x,0} + \alpha_x t \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = x_0 + v_{x,0} t + \frac{1}{2} \alpha_x t^2 \end{array} \right.$$

Ad es., per  $\alpha_x > 0$ :



Dalle equazioni che  $v_x(t)$  e  $x(t)$  è possibile ricavare un'equazione che lega  $v_x$  direttamente a  $x$  nel moto rettilineo uniformemente accelerato.

Da  $v_x(t) = v_{x,0} + \alpha_x t$  possiamo ricavare:

$$t = \frac{v_x(t) - v_{x,0}}{\alpha_x} \quad (\text{se } \alpha_x \neq 0, \text{ ovviamente}).$$

Sostituendo queste espressione al posto di  $t$  nell'espressione delle leggi orarie:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \frac{v_{x,0}[v_x(t) - v_{x,0}]}{\alpha_x} + \frac{1}{2} \alpha_x \frac{[v_x(t) - v_{x,0}]^2}{\alpha_x^2} = \\ &= x_0 + \frac{1}{2\alpha_x} \left[ 2v_{x,0}v_x(t) - 2v_{x,0}^2 + (v_x(t))^2 - 2v_{x,0}v_x(t) + v_{x,0}^2 \right] = \\ &= x_0 + \frac{1}{2\alpha_x} \left[ (v_x(t))^2 - v_{x,0}^2 \right] \end{aligned}$$

Questa relazione può anche essere scritta nelle forme

$$(v_x(t))^2 = v_{x,0}^2 + 2\alpha_x [x(t) - x_0]$$

Esempio Un corpo ha inizialmente velocità istantanea  $v_{x,0} = 632 \text{ miglia/h}$  ( $1 \text{ miglio} = 1609,35 \text{ m}$ ), e viene portato a riposo (cioè viene fermato) in un intervallo di tempo  $T = 1,40 \text{ s}$  con accelerazione costante.

a) Si calcoli l'accelerazione del corpo

Dalle leggi  $v_x(t) = v_{x,0} + a_x t$ , supponiamo che:

risulta  $v_x(t=T) = 0$ , per cui poniamo di avere

$$v_{x,0} + a_x T = 0 \Rightarrow a_x = -\frac{v_{x,0}}{T} = -\frac{632 \cdot 1609,35}{3600 \cdot 1,40} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Abbiamo usato l'identità  $1 \frac{\text{miglio}}{\text{h}} = \frac{1 \cdot 1609,35 \text{ m}}{3600 \text{ s}}$ ,

essendo  $1 \text{ h} = 3600 \text{ s}$

$$\text{Allora: } a_x = -\frac{v_{x,0}}{T} \approx -201,81 \text{ m/s}^2$$

b) si calcoli le distanze percorse dal corpo tra l'istante  $t=0$  e l'istante  $T$ :

Uniamo la legge oraria del moto rettilineo uniformemente accelerato:

$$x(t) = x_0 + v_{x,0} t + \frac{1}{2} a_x t^2, \text{ ponendo } t=T \text{ e } a_x = -\frac{v_{x,0}}{T},$$

essendo  $x_0 = 0$ :

$$x(T) = v_{x,0} T - \frac{1}{2} \frac{v_{x,0}}{T} \cdot T^2 = \frac{1}{2} v_{x,0} T = \frac{1}{2} \cdot 632 \cdot \frac{1609,35}{3600} \cdot 1,40 \text{ m} = 197,77 \text{ m}$$

Esempio Un corpo si muove di moto rettilineo uniformemente accelerato partendo da fermo all'istante  $t=0$ , e raggiungendo una velocità istantanea pari a  $V_f = 10,37 \text{ km/s}$  dopo avere percorso un tratto lungo 220 m.

Quanto vale l'accelerazione?

Possiamo utilizzare le leggi del moto rettilineo uniformemente accelerato; poniamo  $d = 220 \text{ m}$ .

Poniamo  $x_0 = 0$  e  $V_{x,0} = 0$ , poniamo subito:

$$\left\{ \begin{array}{l} d = \frac{1}{2} a_x t^2 \\ V_f = a_x t \end{array} \right. \Rightarrow \text{Ricaviamo } t \text{ dalla seconda equazione:}$$

$t = \frac{V_f}{a_x}$  e sostituisciamone queste espressione alla variabile  $t$  nella prima equazione:

$$d = \frac{1}{2} a_x \cdot \frac{V_f^2}{a_x^2} \Rightarrow a_x = \frac{V_f^2}{2d} = \frac{(10,37 \cdot 10^3)^2}{2 \cdot 220} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 2,735 \times 10^5 \text{ m/s}^2$$

Possiamo anche usare la legge che collega direttamente  $x$  e  $V_x$ :

$$a_x = \frac{V_f^2 - V_{x,0}^2}{2(d-x_0)} = \frac{V_f^2}{2d}, \text{ che si identifica con quella trovata in precedenza.}$$

## Accelerazione di gravità vicino alla superficie terrestre

Galileo Galilei osservò che un corpo in caduta libera in prossimità della superficie terrestre si muove di moto uniformemente accelerato lungo tratti di cadute brevi.

In particolare, se vengono eliminati tutti gli effetti, si osserva che tutti i corpi, senza eccezioni, cadono con la stessa accelerazione.

Al livello del mare queste accelerazione vale  $9,81 \text{ m/s}^2$

(media su tutti i punti della superficie terrestre al livello del mare) e si indica tradizionalmente con la lettera  $g$  ( $g$  minuscola).

Esempio. Un corpo viene lanciato verso l'alto con velocità iniziale  $V_{x,0} = 6 \text{ m/s}$

a) Quale è la massima altezza raggiunta dal corpo?



Consideriamo un asse  $x$  verticale, orientato positivamente verso l'alto. Con queste scelte risulta  $V_{x,0} = 6 \text{ m/s}$ ,  $a_x = -g = -9,81 \text{ m/s}^2$ , in quanto l'accelerazione di gravità tende a rallentare i corpi che si muovono verso l'alto.

Dalla legge  $V_x(t) = V_{x,0} + a_x t = V_{x,0} - gt$  otteniamo

l'istante  $t_1$  in cui risulta  $V_x(t_1) = 0$ , cioè l'istante in cui il corpo raggiunge la massima altezza lungo la sua traiettoria:

$$t_1 = \frac{V_{x,0}}{g}$$

Sostituendo queste espressione nella legge oraria del moto rettilineo uniformemente accelerato otteniamo le quote raggiunte dal corpo all'istante  $t = t_1$ :

$$x(t_1) = V_{x,0}t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2 = V_{x,0}\left(\frac{V_{x,0}}{g}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{V_{x,0}}{g}\right)^2 =$$

$$= \frac{V_{x,0}^2}{g} - \frac{1}{2}g\frac{V_{x,0}^2}{g^2} = \frac{V_{x,0}^2}{2g} = \frac{6^2}{2 \cdot 9,81} \text{ m} = 1,83 \text{ m}$$

Si potere ottenere lo stesso risultato utilizzando le leggi che legge  $v_x$  e  $x$  direttamente:

$$x(t_1) - x_0 = \frac{(v_x(t_1))^2 - v_{x,0}^2}{2a_x}$$

Con  $x_0 = 0$ ,  $v_x(t_1) = 0$  e  $a_x = -g$  otteniamo:

$$x(t_1) = \frac{-v_{x,0}^2}{-2g} = \frac{v_{x,0}^2}{2g} \quad \text{che coincide con il risultato ottenuto precedentemente.}$$

- b) A partire dall'istante  $t = 0$ , dopo quanto tempo il corpo ritorna alla quota  $x = 0$ ?

Dalla legge oraria  $x(t) = V_{x,0}t - \frac{1}{2}gt^2$  (essendo  $x_0 = 0$ ),

la condizione  $x(t) = 0$  porta all'equazione

$$V_{x,0}t - \frac{1}{2}gt^2 = 0; \quad \text{mettiamo } t \text{ in evidenza:}$$

$t(V_{x,0} - \frac{1}{2}gt) = 0$ ; si ottengono quindi due soluzioni:

$$t_1 = 0 \quad (\text{ovvia}) \quad \text{e} \quad t_2 = \frac{2V_{x,0}}{g} = \frac{2 \cdot 6}{9,81} \text{ s} = 1,22 \text{ s} \quad \text{che e' la soluzione concreta}$$

Problema. Una pietra e' lasciata cadere in un pozzo con acqua sul fondo. Quando la pietra colpisce l'acqua, il rumore si propaga con velocità costante verso l'alto,  $v_s = 343,4 \text{ m/s}$ . L'osservatore fa partire il cronometro nell'istante in cui lascia cadere la pietra e lo ferme nell'istante in cui sente il rumore. L'intervalle di tempo misurato e' 5 s. Sapendo che la pietra cade con accelerazione costante  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ , determinare la profondità del pozzo.

L'intervalle di tempo misurato e' dato dalla somma di due intervalli di tempo:

$T_1$  = intervallo di tempo fra l'istante in cui l'osservatore lascia cadere la pietra da ferme dell'imboccatura del pozzo all'istante in cui la pietra tocca la superficie dell'acqua.

$T_2$  = intervallo di tempo necessario affinché il rumore dell'urto delle pietre nell'acqua raggiunga l'orecchio dell'osservatore dopo avere risalito il pozzo.

Indichiamo con  $h$  la profondità delle grotte, fra l'imboccatura e la superficie dell'acqua.

Si risulta quindi:

$$h = \frac{1}{2} g T_1^2$$
, in quanto il moto di caduta delle pietre e' rettilineo uniformemente accelerato, con accelerazione costante  $g$  e velocità iniziale nulla.

$h = V_s T_2$ , in quanto ~~osserva~~ il suono dell'urto delle pietre sulla superficie dell'acqua risale lungo il percorso con velocità costante  $V_s$ .

Ottieniamo pertanto:

$$T_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}, \quad T_2 = \frac{h}{V_s}$$

Se  $T = T_1 + T_2$  è l'intervalle di tempo totale misurato dall'osservatore, poniamo impostare la seguente equazione:

$$\sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{h}{V_s} = T$$

Lasciamo il radicale al 1° membro, isolato:

$$\sqrt{\frac{2h}{g}} = T - \frac{h}{V_s}$$

Le quantità al 1° membro erano positive, per cui al 2° membro deve valere la condizione

$$T - \frac{h}{V_s} \geq 0, \quad \text{da cui} \quad h \leq V_s T$$

Dovremo pertanto accettare le sole soluzioni che rispettano queste condizioni. A questo punto eliminiamo il quadrato i due membri dell'equazione:

$$\frac{2h}{g} = T^2 - \frac{2T}{V_s} h + \frac{h^2}{V_s^2}$$

e riordiniamo i termini dell'equazione!

$$\frac{h^2}{V_s^2} - 2 \left( \frac{T}{V_s} + \frac{1}{g} \right) h + T^2 = 0$$

Moltiplichiamo i due membri per  $V_s^2$ :

$$h^2 - 2 \left( V_s T + \frac{V_s^2}{g} \right) h + V_s^2 T^2 = 0$$

Troviamo le radici dell'equazione usando la formula ridotta  
(legittima, in quanto il coefficiente del termine di 1° grado  
ha un fattore 2 in evidente):

$$\begin{aligned} h_{1,2} &= V_s T + \frac{V_s^2}{g} \pm \sqrt{\left( V_s T + \frac{V_s^2}{g} \right)^2 - V_s^2 T^2} = \\ &= V_s T + \frac{V_s^2}{g} \pm \sqrt{V_s^2 T^2 + 2 \frac{V_s^3 T}{g} + \frac{V_s^4}{g^2} - V_s^2 T^2} = \\ &= V_s T + \frac{V_s^2}{g} \pm \sqrt{\frac{V_s^4}{g^2} \left( 1 + \frac{2gT}{V_s} \right)} = \\ &= V_s T + \frac{V_s^2}{g} \pm \frac{V_s^2}{g} \sqrt{1 + \frac{2gT}{V_s}} \end{aligned}$$

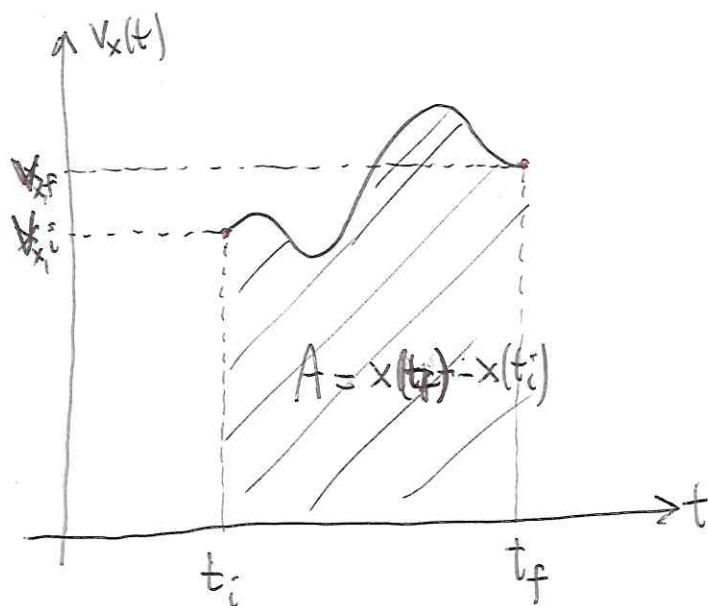
La soluzione con il segno + davanti alla radice e' chiaramente  
maggiore di  $V_s T$ , per cui non e' accettabile. La soluzione  
accettabile e' quindi

$$h = V_s T - \frac{V_s^2}{g} \left( \sqrt{1 + \frac{2gT}{V_s}} - 1 \right) = \left[ 1717 - \frac{343,4^2}{9,81} \left( \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 9,81 \cdot 5}{343,4}} - 1 \right) \right] m =$$

$$\approx (1717 - 1609,273) m \approx 107,72 m$$

## Moto rettilineo vero

Nel caso più generale, la funzione  $v_x(t)$  nel moto rettilineo potrebbe non essere costante né avere un andamento lineare al variare del tempo. Ad esempio:

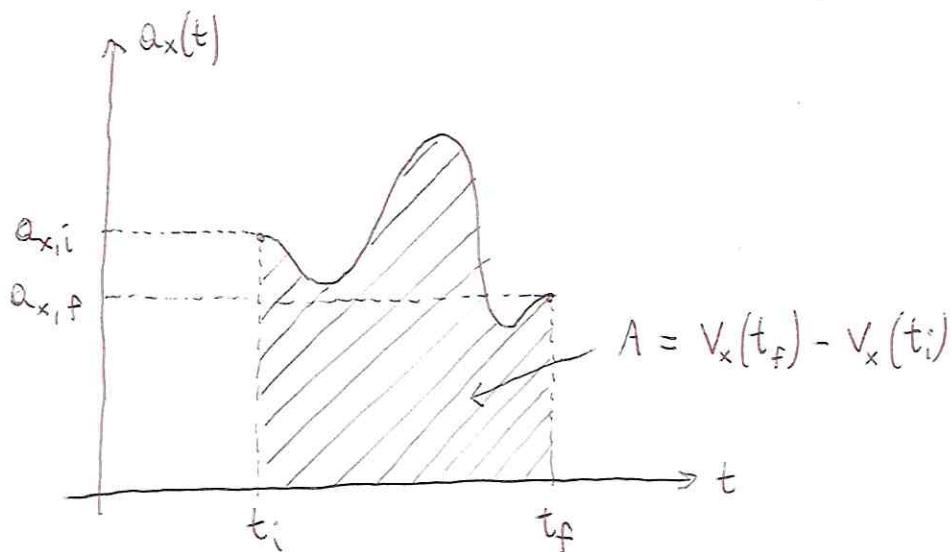


Tuttavia, è possibile ripetere esattamente lo stesso ragionamento fatto nel caso del moto rettilineo uniformemente accelerato. La conclusione è la stessa: lo spostamento del corpo fra l'istante  $t_i$  e l'istante  $t_f$  è dato dall'area della regione compresa (nel piano cartesiano  $(t, v_x)$ ) fra l'asse dei tempi e il grafico di  $v_x(t)$  nell'intervalle  $[t_i, t_f]$ . Mettemettemente possiamo quindi scrivere:

$$x_f - x_i = \int_{t_i}^{t_f} v_x(t) dt$$

; nei casi  $v_x(t) = v_x$  costante e  $v_x(t) = v_{x,0} + a_x t$ , con  $a_x$  costante, queste formule fornisce i risultati già ottenuti in precedenza per altre vie.

Sempre nel caso più generale, la funzione  $a_x(t)$  nel moto rettilineo potrebbe non essere costante. Ad esempio:



Tuttavia, è possibile ripetere esattamente lo stesso ragionamento fatto nel caso del moto rettilineo uniformemente accelerato.

La conclusione è la stessa: la variazione delle velocità istantanee del corpo fra l'istante  $t_i$  e l'istante  $t_f$  è data dall'area della regione compresa (nel piano cartesiano  $(t, a_x)$ ) fra l'asse dei tempi e il grafico di  $a_x(t)$  nell'intervallo  $[t_i, t_f]$ . Vale quindi la legge

$$v_{x,f} - v_{x,i} = \int_{t_i}^{t_f} a_x(t) dt ; \text{ il caso } a_x(t) = a_x = \text{costante}$$

cioè il caso del moto rettilineo uniformemente accelerato, e il caso  $a_x(t) = 0$ , cioè il caso del moto rettilineo uniforme, si ritrovano subito come casi particolari di queste leggi.

Posto  $t_i = 0$  e  $t_f = t$  (istante generico), le leggi orarie e le velocità istantanee in funzione del tempo nel moto rettilineo vero si possono esprimere nel modo seguente, quindi:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v_x(\tau) d\tau ; \quad v_x(t) = v_{x,0} + \int_0^t a_x(\tau) d\tau$$