Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata

Calcolo delle Probabilità (ed insegnamenti mutuati)

Anno accademico: 2016-2017. *Titolare del corso:* Claudio Macci

Appello del 6 Luglio 2017

Esercizio 1. Un'urna contiene 3 palline bianche, 2 rosse e 1 nera. Si estraggono a caso 3 palline, una alla volta e senza reinserimento.
D1) Calcolare la probabilità di estrarre una pallina di ciascun colore, in un qualsiasi ordine.
D2) Calcolare $\mathbb{E}[X]$ nel caso in cui X sia la variabile aleatoria che conta quante palline bianche vengono estratte.

Esercizio 2. Si lancia un dado equo. Se esce un numero dispari si lanciano 2 monete eque, se esce un numero pari si lanciano 3 monete eque.
D3) Calcolare la probabilità che non esca mai testa nei lanci di moneta effettuati.
D4) Calcolare la probabilità che sia uscito un numero dispari nel lancio del dado sapendo che non è uscita mai testa nei lanci di moneta effettuati.

Esercizio 3. Siano $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ arbitrariamente fissati e consideriamo la seguente densità congiunta: $p_{X_1,X_2}(1,k) = (1-e^{-\lambda_1})^k \cdot \frac{e^{-\lambda_1}}{2}$ e $p_{X_1,X_2}(2,k) = (1-e^{-\lambda_2})^k \cdot \frac{e^{-\lambda_2}}{2}$ per $k \geq 0$ intero.
D5) Trovare la densità discreta di X_1.
D6) Calcolare $P(X_1 + X_2 = 2)$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con densità continua $f_X(x) = \frac{3}{2}x^2 1_{(-1,1)}(x)$.
D7) Trovare la densità continua di $Y = |X|$.
D8) Calcolare $P(Y > 1/2)$.

Esercizio 5.
D9) Sia $N_t = \sum_{n\geq 1} 1_{T_n \leq t}$ (per $t \geq 0$) un processo di Poisson con intensità di $\lambda = 2$. Calcolare $P(N_3 = 2)$.
D10) Sia X una variabile aleatoria Normale con media μ e varianza 4. Trovare il valore di μ per cui si ha $P(X \geq 3) = 1 - \Phi(1)$.

Esercizio 6. Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. (indipendenti e identicamente distribuite).
D11) Dire per quale valore di m si ha

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - m\right| > \varepsilon\right) = 0 \text{ per ogni } \varepsilon > 0,$$

nel caso in cui le variabili aleatorie $\{X_n : n \geq 1\}$ abbiano distribuzione uniforme su $(-100, 300)$.
D12) Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - n}{\sqrt{n}} \leq 9\right)$$

nel caso in cui le variabili aleatorie $\{X_n : n \geq 1\}$ abbiano media 1 e varianza 144.

Esercizio 7 (*solo per Lauree Magistrali*). Consideriamo una catena di Markov omogenea $\{X_n : n \geq 0\}$ con spazio degli stati $E = \{1, 2, 3\}$ e matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 1/6 \end{pmatrix}.$$

D13) Illustrare le conseguenze del Teorema di Markov dopo aver motivato la sua applicabilità.
D14) Calcolare $P(X_1 = 2, X_2 = 1, X_3 = 3, X_4 = 2, X_5 = 1, X_6 = 3 | X_0 = 3)$.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
D1) La probabilità richiesta è $\frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{1}{1}}{\binom{6}{3}} = \frac{3\cdot 2\cdot 1}{20} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$.
D2) La variabile aleatoria X ha distribuzione ipergeometrica. In dettaglio $p_X(k) = \frac{\binom{3}{k}\binom{3}{3-k}}{\binom{6}{3}}$ per $k \in \{0,1,2,3\}$, e quindi $p_X(0) = p_X(3) = \frac{1}{20}$ e $p_X(1) = p_X(2) = \frac{9}{20}$. Quindi $\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{3} kp_X(k) = \frac{30}{20} = \frac{3}{2}$.

Esercizio 2. Indichiamo con E l'evento "non esce mai testa nei lanci di moneta effettuati", e con D l'evento "esce dispari nel lancio del dado".
D3) Per la formula delle probabilità totali si ha $P(E) = P(E|D)P(D) + P(E|D^c)P(D^c) = \binom{2}{0}(\frac{1}{2})^2 \cdot \frac{3}{6} + \binom{3}{0}(\frac{1}{2})^3 \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{2+1}{16} = \frac{3}{16}$.
D4) Per la formula di Bayes, e tenendo conto del valore di $P(E)$ calcolato prima, si ha $P(D|E) = \frac{P(E|D)P(D)}{P(E)} = \frac{\binom{2}{0}(\frac{1}{2})^2\cdot\frac{3}{6}}{3/16} = \frac{1}{8}\frac{16}{3} = \frac{2}{3}$.

Esercizio 3.
D5) Si ha $p_{X_1}(1) = \sum_{k\geq 0} p_{X_1,X_2}(1,k) = \frac{e^{-\lambda_1}}{2}\sum_{k\geq 0}(1-e^{-\lambda_1})^k = \frac{e^{-\lambda_1}}{2}\frac{1}{1-(1-e^{-\lambda_1})} = \frac{1}{2}$ e $p_{X_1}(2) = \sum_{k\geq 0} p_{X_1,X_2}(2,k) = \frac{e^{-\lambda_2}}{2}\sum_{k\geq 0}(1-e^{-\lambda_2})^k = \frac{e^{-\lambda_2}}{2}\frac{1}{1-(1-e^{-\lambda_2})} = \frac{1}{2}$.
D6) Si ha $P(X_1 + X_2 = 2) = p_{X_1,X_2}(1,1) + p_{X_1,X_2}(2,0) = (1-e^{-\lambda_1})\cdot\frac{e^{-\lambda_1}}{2} + \frac{e^{-\lambda_2}}{2}$.

Esercizio 4.
D7) Si vede che $P(0 \leq Y \leq 1) = 1$ e quindi $F_Y(y) = 0$ per $y \leq 0$ e $F_Y(y) = 1$ per $y \geq 1$. Per $y \in (0,1)$ si ha $F_Y(y) = P(|X| \leq y) = P(-y \leq X \leq y) = \int_{-y}^{y}\frac{3}{2}x^2dx = \frac{3}{2}[\frac{y^3}{3}]_{x=-y}^{x=y} = \frac{y^3-(-y)^3}{2} = y^3$. In conclusione si ha $f_Y(y) = 3y^2 1_{(0,1)}(y)$.
D8) Sfruttando la densità f_Y calcolata prima, si ha $P(Y > 1/2) = \int_{1/2}^{1} 3y^2dy = 3[\frac{y^3}{3}]_{y=1/2}^{y=1} = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$.

Esercizio 5.
D9) Si ha $P(N_3 = 2) = \frac{(2\cdot 3)^2}{2!}e^{-2\cdot 3} = 18e^{-6}$.
D10) Si ha $P(X \geq 3) = P(\frac{X-\mu}{\sqrt{4}} \geq \frac{3-\mu}{\sqrt{4}}) = 1 - \Phi(\frac{3-\mu}{2})$; quindi si deve avere $\frac{3-\mu}{2} = 1$, da cui si ottiene $\mu = 1$.

Esercizio 6.
D11) Per la legge dei grandi numeri il valore di m richiesto è $m = \frac{-100+300}{2} = 100$.
D12) La standardizzata di $X_1+\cdots+X_n$ è $\frac{X_1+\cdots+X_n-n}{\sqrt{144}\sqrt{n}}$. Allora $\left\{\frac{X_1+\cdots+X_n-n}{\sqrt{n}} \leq 9\right\} = \left\{\frac{X_1+\cdots+X_n-n}{\sqrt{144}\sqrt{n}} \leq \frac{9}{\sqrt{144}}\right\}$ e, per il teorema limite centrale, il limite richiesto è uguale a $\Phi(\frac{9}{\sqrt{144}}) = \Phi(\frac{9}{12}) = \Phi(0.75) = 0.77337$.

Esercizio 7.
D13) Il Teorema di Markov è applicabile perché la catena di Markov $\{X_n : n \geq 0\}$ è regolare; infatti la catena è irriducibile ed inoltre esiste $h \in E$ tale che $p_{hh} > 0$ (si ha $p_{33} = \frac{1}{6} > 0$). Allora, se indichiamo l'unica distribuzione stazionaria con (π_1, π_2, π_3), qualunque sia la distribuzione iniziale si ha $\lim_{n\to\infty} P(X_n = j) = \pi_j$ per ogni $j \in \{1,2,3\}$. A questo punto otteniamo i valori numerici della distribuzione stazionaria considerando la seguente relazione matriciale

$$(\pi_1, \pi_2, \pi_3)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 1/6 \end{pmatrix} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3),$$

che fornisce il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \pi_2 + \frac{\pi_3}{3} = \pi_1 \\ \frac{\pi_3}{2} = \pi_2 \\ \pi_1 + \frac{\pi_3}{6} = \pi_3. \end{cases}$$

La terza equazione fornisce la condizione $\pi_1 = \frac{5}{6}\pi_3$; quindi, tenendo conto della seconda equazione e che $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$, si ha $\frac{5}{6}\pi_3 + \frac{\pi_3}{2} + \pi_3 = 1$, da cui segue $\pi_3 = \frac{3}{7}$, $\pi_2 = \frac{3}{14}$ e $\pi_1 = \frac{5}{14}$ (si osservi che questi valori soddisfano anche la prima equazione). In conclusione si ha $(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = (5/14, 3/14, 3/7)$.

D14) Si ha $P(X_1=2,X_2=1,X_3=3,X_4=2,X_5=1,X_6=3|X_0=3)=p_{32}p_{21}p_{13}p_{32}p_{21}p_{13}=(\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1)^2=\frac{1}{4}$.

Commenti.
La somma dei valori di ciascuna densità discreta che appare è 1 in accordo con la teoria.
D2) Per la teoria sulla distribuzione ipergeometrica possiamo dire che $\mathbb{E}[X]=3\cdot\frac{3}{6}=\frac{3}{2}$ (la stessa media della variabile aleatoria che si avrebbe se le estrazioni fossero con reinserimento, la quale ha distribuzione binomiale).
D8) In altro modo, senza sfruttare la densità f_Y calcolata prima, si ha $P(Y>1/2)=P(|X|>1/2)=P(\{X>1/2\}\cup\{X<-1/2\})=\frac{3}{2}\int_{1/2}^{1}x^2dx+\frac{3}{2}\int_{-1}^{-1/2}x^2dx=\frac{3}{2}[\frac{x^3}{3}]_{x=1/2}^{x=1}+\frac{3}{2}[\frac{x^3}{3}]_{x=-1}^{x=-1/2}=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{8})+\frac{1}{2}(-\frac{1}{8}-(-1))=\frac{1}{2}\frac{7}{8}+\frac{1}{2}\frac{7}{8}=\frac{7}{8}$.