# Prova di esame dei corsi di Fondamenti di Informatica e Informatica Teorica

**15 febbraio 2017**

**Problema 1.** Sia $\Sigma = \{a,b,c,d\}$. Si consideri la macchina di Turing $T$ definita sull'alfabeto $\Sigma$ descritta dal seguente insieme di quintuple:

$$\begin{array}{ll}
\langle q_0,a,a,q_1,d\rangle & \langle q_0,x,x,q_R,f\rangle\ \forall x \in \Sigma \cup \{\square\} - \{a\} \\
\langle q_1,b,b,q_2,d\rangle & \langle q_1,x,x,q_R,f\rangle\ \forall x \in \Sigma \cup \{\square\} - \{b\} \\
\langle q_2,x,x,q_2,d\rangle\ \forall x \in \Sigma - \{\square\} & \langle q_2,\square,\square,q_3,s\rangle \\
\langle q_3,d,d,q_4,s\rangle & \langle q_3,x,x,q_R,f\rangle\ \forall x \in \Sigma \cup \{\square\} - \{d\} \\
\langle q_4,c,c,q_A,f\rangle & \langle q_4,x,x,q_R,f\rangle\ \forall x \in \Sigma \cup \{\square\} - \{c\},
\end{array}$$

dove $q_0$, $q_A$ e $q_R$ sono, rispettivamente gli stati iniziale, di accettazione e di rigetto di $T$.

Dopo aver definito il linguaggio $L \subseteq \Sigma^*$ deciso da $T$, si trasformi $T$ in una macchina $T'$ definita sull'alfabeto $\{0,1\}$ equivalente a $T$.

**Problema 2.** Si consideri il problema seguente: dato un intero $n$, decidere se esistono due interi $h > 1$ e $k > 1$ tali che $n = hk$.

2.a) Dire se il seguente frammento di codice è un algoritmo non deterministico che decide il problema, argomentando la propria risposta:

1. **Input**: $n$;
2. **scegli** l'intero $h$ nell'insieme $\{2,\ldots,n-1\}$;
3. **scegli** l'intero $k$ nell'insieme $\{2,\ldots,n-1\}$;
4. **if** $(n = h \cdot k)$ **then Output**: accetta;
5. **else Output**: rigetta.

2.b) Dire se il seguente frammento di codice che decide il problema opera in tempo polinomiale, argomentando la propria risposta:

1. **Input**: $n$;
2. **for** $(h \leftarrow 2;\ h \leq n-1;\ h \leftarrow h+1)$ **do**
3.     **for** $(k \leftarrow 2;\ k \leq n-1;\ k \leftarrow k+1)$ **do**
4.         **if** $(n = h \cdot k)$ **then Output**: accetta;
5. **Output**: rigetta.

Anche alla luce dei punti 2.a) e 2.d) sopra, cosa si può dire circa l'appartenenza del problema alla classe **P** o alla classe **NP**? Motivare la propria risposta.

**Problema 3.** Si considerino i due problemi seguenti:

a) dati un grafo non orientato $G = (V,E)$ ed un intero $k \in \mathbb{N}$, decidere se $G$ contiene una Clique di cardinalità $< k$;

b) dati un grafo non orientato $G = (V,E)$ ed un intero $k \in \mathbb{N}$, decidere se ogni Clique in $G$ ha cardinalità $< k$.

Dopo aver formalizzato la definizione dei suddetti problemi mediante la tripla $\langle I,S,\pi\rangle$, si collochi ciascuno di essi nella corretta classe di complessità.

# Soluzione

**Problema 1.** Il linguaggio $L(T)$, deciso dalla macchina $T$, è costituito dalle parole in $\Sigma^*$ che iniziano con $ab$ e terminano con $cd$ ed è definito formalmente nel modo seguente

$$L(T) = \{abxcd : x \in \Sigma^*\}.$$

Definiamo, innanzi tutto, una codifica $\chi : \Sigma \to \{0,1\}^*$: sia, dunque, $\chi(a) = 00$, $\chi(b) = 01$, $\chi(c) = 10$ e $\chi(d) = 11$.
La macchina $T_{01}$ definita sull'alfabeto $\{0,1\}$ che decide il linguaggio $L(T)$ codificato secondo la codifica $\chi$ utilizza l'insieme di stati $Q_{01} = \{q_0, q_0(0), q_1, q_1(0), q_2, q_3, q_3(1), q_4, q_4(0), q_A, q_R\}$, ove $q_0$ è lo stato iniziale, ed è descritta dal seguente insieme di quintuple:

$$\begin{array}{ll}
\langle q_0, 0, 0, q_0(0), d\rangle & \langle q_0, x, x, q_R, f\rangle \ \forall x \in \{1, \square\} \\
\langle q_0(0), 0, 0, q_1, d\rangle & \langle q_0(0), x, x, q_R, f\rangle \ \forall x \in \{1, \square\} \\
\langle q_1, 0, 0, q_1(0), d\rangle & \langle q_1, x, x, q_R, f\rangle \ \forall x \in \{1, \square\} \\
\langle q_1(0), 1, 1, q_2, d\rangle & \langle q_1(0), x, x, q_R, f\rangle \ \forall x \in \{0, \square\} \\
\langle q_2, x, x, q_2, d\rangle \ \forall x \in \{0,1\} & \langle q_2, \square, \square, q_3, s\rangle \\
\langle q_3, 1, 1, q_3(1), s\rangle & \langle q_3, x, x, q_R, f\rangle \ \forall x \in \{0, \square\} \\
\langle q_3(1), 1, d, q_4, s\rangle & \langle q_3(1), x, x, q_R, f\rangle \ \forall x \in \{0, \square\} \\
\langle q_4, 0, 0, q_4(0), s\rangle & \langle q_4, x, x, q_R, f\rangle \ \forall x \in \{1, \square\}, \\
\langle q_4(0), 1, 1, q_A, f\rangle & \langle q_4(0), x, x, q_R, f\rangle \ \forall x \in \{0, \square\},
\end{array}$$

**Problema 2.** Il frammento di codice di cui al punto 2.a) non è un algoritmo non deterministico in quanto l'operazione non deterministica **scegli** può effettuare una scelta all'interno di un insieme di dimensione *costante*, mentre nel frammento di codice del punto 2.a) l'insieme in cui viene effettuata la scelta è l'insieme $\{2, \dots, n-1\}$ la cui dimensione è funzione dell'istanza e, pertanto, non costante.

Nel caso peggiore (che si presenta quando $n$ è un numero primo), il frammento di codice di cui al punto 2.b) esegue $(n-2)^2$ volte l'istruzione alla linea 4. Dunque, esso richiede tempo $\geq (n-2)^2$. Poiché la codifica binaria del numero $n$ richiede spazio $\lceil \log_2 n \rceil$, allora per qualunque codifica ragionevole di $n$ si ha che $|n| = \mathbf{O}(\log_2 n)$. Conseguentemente, il tempo richiesto dal frammento di codice è

$$\geq (n-2)^2 = \mathbf{O}(2^{|n|}).$$

Il frammento di codice, dunque, opera in tempo pseudopolinomiale, ma non in tempo polinomale.

La discussione sopra dei due punti 2.a) e 2.b) non ci permette di trarre alcuna conclusione circa l'appartenenza del problema alla classe **P** o alla classe **NP**.
Tuttavia, possiamo osservare che un certificato per una istanza del problema è una coppia di interi $\langle h, k\rangle$: poiché $|h| \leq |n|$ e $|k| \leq |n|$, e poiché per verificare se un certificato è una soluzione effettiva è sufficiente calcolare il prodotto $hk$ e tale operazione è eseguibile in tempo polinomiale in $|h|$ e $|k|$, possiamo concludere che il problema appartiene alla classe **NP**.

**Problema 3.** Indicheremo i due problemi in esame, rispettivamente, con l'acronimo $\Gamma_a$ e $\Gamma_b$.
Entrambi i problemi sono definiti sull'insieme di istanze $I_\Gamma$ e sull'insieme di soluzioni possibili $_\Gamma$ di seguito descritti:

- $I_\Gamma = \{ \langle G=(V,E),k \rangle : G$ è un grafo non orientato e $k \in \mathbb{N}^+ \}$;
- $S_\Gamma(G,k) = \{ V' : V' \subseteq V \}$ }.

I predicati dei due problemi sono, invece, distinti.

Il predicato $\pi_{\Gamma_a}$ del problema $\Gamma_a$ è molto simile al predicato che definisce il problema CLIQUE, e differisce da quest'ultimo soltanto per la cardinalità del sottografo completo richiesto:

$$\pi_{\Gamma_a}(G,k,S_\Gamma(G,k)) = \exists\, V' \in S_\Gamma(G,k) :\ |V'| < k \ \wedge\ \forall\, u,v \in V' \ [\ (u,v) \in E\ ].$$

Osserviamo che, nel predicato del problema (così come in quello del problema CLIQUE), viene assunto implicitamente $u \neq v$, ossia, il predicato richiede che esista una soluzione possibile in cui ogni coppia di nodi *distinti* sia collegata da un arco. Esso, più propriamente, dovrebbe essere scritto nel modo seguente:

$$\exists\, V' \in S_\Gamma(G,k) :\ |V'| < k \ \wedge\ \forall\, u,v \in V' :\ u \neq v\ [\ (u,v) \in E\ ].$$

Pertanto, ciascun insieme $V'$ contenente un solo nodo soddisfa banalmente il predicato, in quanto non contiene una coppia di nodi distinti. In altre parole, un singolo nodo di $G$ è un sottografo completo di di dimensione 1.
Analogamente, l'insieme vuoto soddisfa banalmente il predicato in quanto non contiene alcun nodo. Ossia, l'insieme vuoto è un sottografo completo di $G$ di dimensione 0. Quindi, per decidere se una istanza $\langle G=(V,E),k \rangle$ di $\Gamma_a$ è una istanza sì è sufficiente verificare se $k > 0$: in caso affermativo $\langle G=(V,E),k \rangle$ è una istanza sì, in caso negativo $\langle G=(V,E),k \rangle$ è una istanza no. Questo prova che il problema $\Gamma_a$ è in **P**.

Il predicato $\pi_{\Gamma_b}$ del problema $\Gamma_b$, pur essendo collegato al predicato di CLIQUE, è sostanzialmente diverso da esso in quanto richiede che *ogni* soluzione possibile soddisfi una certa proprietà. In particolare, $\pi_{\Gamma_b}$ richiede che, se una soluzione possibile è un sottografo completo, allora la sua cardinalità deve essere minore di $k$:

$$\pi_{\Gamma_b}(G,k,S_\Gamma(G,k)) = \forall\, V' \in S_\Gamma(G,k)\ \big[\ \forall\, u,v \in V'\ [\ (u,v) \in E\ ]\ \rightarrow |V'| < k\ \big],$$

che può essere anche scritto

$$\pi_{\Gamma_b}(G,k,S_\Gamma(G,k)) = \forall\, V' \in S_\Gamma(G,k)\ \big[\ \neg\big(\forall\, u,v \in V'\ [\ (u,v) \in E\ ]\ \big)\ \vee\ |V'| < k\ \big].$$

Consideriamo ora la negazione del predicato $\pi_{\Gamma_b}$:

$$\neg\ [\pi_{\Gamma_b}(G,k,S_\Gamma(G,k)) = \exists\, V' \in S_\Gamma(G,k) :\ \forall\, u,v \in V'\ [\ (u,v) \in E\ ]\ \wedge\ |V'| \geq k.$$

Osserviamo, ora, che detti $I_{Cl}$, $S_{Cl}$ e $\pi_{Cl}$, rispettivamente, l'insieme delle istanze, l'insieme delle soluzioni possibili e il predicato del problema CLIQUE, si ha che $I_{Cl} = I_\Gamma$ e, per ogni $\langle G=(V,E),k \rangle \in I_\Gamma$, $S_{Cl}(G,k) = S_\Gamma(G,k)$ e $\neg\ [\ \pi_{\Gamma_b}(G,k,S_\Gamma(G,k)) = \pi_{Cl}(G,k,S_{VC}(G,k))$. Questo significa che il problema $\Gamma_b^c$, complemento di $\Gamma_b$, coincide con il problema CLIQUE. Quindi, $\Gamma_b^c$ è **NP**-completo e $\Gamma_b$ è co**NP**-completo.