Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità (ed insegnamenti mutuati)
Anno accademico: 2013-2014. *Titolare del corso:* Claudio Macci
Appello del 27 Giugno 2014

Esercizio 1. Si lanciano due dadi equi e sia X la variabile aleatoria che conta il numero di volte che esce il numero 4.
D1) Trovare la densità discreta della variabile aleatoria X.
D2) Si considerino lanci ripetuti di due dadi equi e sia Y la variabile aleatoria che conta il numero di lanci (dei due dadi) necessari per avere per la prima volta "un solo 4". Calcolare $P(Y \geq k)$ per $k \geq 1$ intero.

Esercizio 2. Si lancia una moneta equa. Se esce testa, si lancia un dado equo; se esce croce, si lancia un dado truccato le cui facce hanno i numeri $1, 2, 3, 4, 5, 5$.
D3) Calcolare la probabilità di ottenere un numero dispari.
D4) Calcolare la probabilità di aver lanciato il dado equo sapendo di aver ottenuto un numero dispari.

Esercizio 3. Consideriamo la seguente densità congiunta: $p_{X_1,X_2}(0,0) = p_{X_1,X_2}(0,1) = p_{X_1,X_2}(1,0) = p_{X_1,X_2}(0,2) = p_{X_1,X_2}(2,0) = \frac{9}{50}$ e $p_{X_1,X_2}(1,1) = \frac{1}{10}$.
D5) Calcolare $P(X_1 > X_2)$.
D6) Calcolare $P(X_1 = X_2 | X_1 + X_2 = 2)$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con distribuzione uniforme in $(-1, 1)$.
D7) Trovare la densità continua di $Y = e^X$.
D8) Calcolare $\mathbb{E}[Y]$.

Esercizio 5.
D9) Sia $N_t = \sum_{n\geq 1} 1_{T_n \leq t}$ (per $t \geq 0$) un processo di Poisson con intensità di $\lambda = 2$. Calcolare $P(N_3 \leq 1)$.
D10) Trovare la distribuzione di $2X_1 + 3X_2$ nel caso in cui X_1 e X_2 sono variabili aleatorie Normali indipendenti, entrambe con media 1 e con varianza 2.

Esercizio 6. Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. (indipendenti e identicamente distribuite).
D11) Dire per quale valore di m si ha

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - m\right| > \varepsilon\right) = 0 \text{ per ogni } \varepsilon > 0,$$

nel caso in cui le variabili aleatorie $\{X_n : n \geq 1\}$ abbiano densità continua $f(t) = \frac{1}{10}1_{(1,11)}(t)$.
D12) Calcolare, usando l'approssimazione Normale, $P(X_1 + \cdots + X_{10000} - 10000 \leq 135)$ nel caso in cui le variabili aleatorie $\{X_n : n \geq 1\}$ abbiano distribuzione esponenziale con parametro $\lambda = 1$.

Esercizio 7 (*solo per Lauree Magistrali*). Consideriamo una catena di Markov omogenea $\{X_n : n \geq 0\}$ con spazio degli stati $E = \{1, 2, 3\}$ e matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 1-a \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

per $a \in [0, 1]$.
D13) Calcolare $P(X_1 = 1, X_2 = 3, X_3 = 2, X_4 = 3 | X_0 = 2)$.
D14) Trovare il valore di a per cui $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ è una distribuzione invariante.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
D1) La variabile aleatoria X ha distribuzione binomiale con parametri $n = 2$ e $p = 1/6$. Quindi $p_X(k) = \binom{2}{k}(\frac{1}{6})^k(1-\frac{1}{6})^{2-k}$ per $k \in \{0,1,2\}$, da cui segue $p_X(0) = \frac{25}{36}$, $p_X(1) = \frac{10}{36}$ e $p_X(2) = \frac{1}{36}$.
D2) Si ha $P(Y \geq k) = \sum_{n=k}^{\infty}(1-p)^{n-1}p$ con $p = p_X(1) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$, e quindi $P(Y \geq k) = \sum_{n=k}^{\infty}(1-\frac{5}{18})^{n-1}\frac{5}{18} = \frac{5}{18}\frac{(1-\frac{5}{18})^{k-1}}{1-(1-\frac{5}{18})} = \frac{5}{18}\frac{(\frac{13}{18})^{k-1}}{\frac{5}{18}} = (\frac{13}{18})^{k-1}$.

Esercizio 2. Sia D l'evento "esce un numero dispari" e E l'evento "si lancia il dado equo".
D3) Per la formula delle probabilità totali si ha $P(D) = P(D|E)P(E) + P(D|E^c)P(E^c) = \frac{3}{6}\frac{1}{2} + \frac{4}{6}\frac{1}{2} = \frac{3+4}{12} = \frac{7}{12}$.
D4) Per la formula di Bayes, e tenendo conto del valore di $P(D)$ calcolato prima, si ha $P(E|D) = \frac{P(D|E)P(E)}{P(D)} = \frac{\frac{3}{6}\frac{1}{2}}{7/12} = \frac{3}{7}$.

Esercizio 3.
D5) Si ha $P(X_1 > X_2) = p_{X_1,X_2}(1,0) + p_{X_1,X_2}(2,0) = \frac{9+9}{50} = \frac{18}{50} = \frac{9}{25}$.
D6) Si ha $P(X_1 = X_2|X_1 + X_2 = 2) = \frac{P(\{X_1=X_2\}\cap\{X_1+X_2=2\})}{P(X_1+X_2=2)} = \frac{p_{X_1,X_2}(1,1)}{p_{X_1,X_2}(2,0)+p_{X_1,X_2}(1,1)+p_{X_1,X_2}(0,2)} = \frac{1/10}{(9/50)+(1/10)+(9/50)} = \frac{1/10}{(9+5+9)/50} = \frac{1}{10}\frac{50}{23} = \frac{5}{23}$.

Esercizio 4.
D7) Si ha $f_X(t) = \frac{1}{2}1_{(-1,1)}(t)$. Si vede che $P(e^{-1} \leq e^X \leq e) = 1$, da cui $F_Y(y) = 0$ per $y \leq e^{-1}$ e $F_Y(y) = 1$ per $y \geq e$. Per $y \in (e^{-1}, e)$ si ha $F_Y(y) = P(e^X \leq y) = P(X \leq \log y) = \int_{-1}^{\log y}\frac{1}{2}dt = [\frac{t}{2}]_{t=-1}^{t=\log y} = \frac{1+\log y}{2}$. Quindi la densità è $f_Y(y) = \frac{1}{2y}1_{(e^{-1},e)}(y)$.
D8) Si ha $\mathbb{E}[Y] = \int_{e^{-1}}^{e} y\frac{1}{2y}dy = \int_{e^{-1}}^{e}\frac{1}{2}dy = [\frac{t}{2}]_{t=e^{-1}}^{t=e} = \frac{e-e^{-1}}{2}$.

Esercizio 5.
D9) Si ha $P(N_3 \leq 1) = \sum_{k=0}^{1}\frac{(2\cdot 3)^k}{k!}e^{-2\cdot 3} = (1+6)e^{-6} = 7e^{-6}$.
D10) Ricordando le proprietà delle combinazioni lineari di variabili aleatorie Normali indipendenti, $2X_1+3X_2$ ha distribuzione Normale con media $2\cdot 1 + 3\cdot 1 = 5$ e varianza $2^2\cdot 2 + 3^2\cdot 2 = 26$.

Esercizio 6.
D11) Per la legge dei grandi numeri (e ricordando la speranza matematica delle variabili aleatorie con distribuzione uniforme; in questo caso abbiamo variabili aleatorie uniformi in $(1, 11)$) si ha $m = \frac{1+11}{2} = \frac{12}{2} = 6$.
D12) Le variabili aleatorie $\{X_n : n \geq 1\}$ hanno media 1 e varianza 1. Quindi, se indichiamo con Z la standardizzata di $X_1 + \cdots + X_{10000}$, si ha $\{X_1 + \cdots + X_{10000} - 10000 \leq 135\} = \{Z \leq \frac{135}{\sqrt{1}\sqrt{10000}}\} = \{Z \leq 1.35\}$ e, per l'approssimazione normale, $P(X_1 + \cdots + X_{10000} - 10000 \leq 135) = \Phi(1.35) = 0.91149$.

Esercizio 7.
D13) Si ha $P(X_1 = 1, X_2 = 3, X_3 = 2, X_4 = 3|X_0 = 2) = p_{21}p_{13}p_{32}p_{23} = a\cdot 1\cdot 1\cdot(1-a) = a(1-a)$.
D14) Si ha che $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ è una distribuzione invariante se vale la seguente relazione matriciale

$$(\pi_1, \pi_2, \pi_3)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 1-a \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3),$$

che fornisce il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} a\pi_2 = \pi_1 \\ \pi_3 = \pi_2 \\ \pi_1 + (1-a)\pi_2 = \pi_3. \end{cases}$$

Allora le distribuzioni invarianti sono del tipo $(a\alpha, \alpha, \alpha)$ per qualche α (si vede bene dalle prime due equazioni; poi si verifica che anche la terza equazione è soddisfatta); inoltre, poiché si deve avere $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$, si ha $(a+2)\alpha = 1$, e quindi $\alpha = \frac{1}{a+2}$. In corrispondenza, per $a \in [0,1]$ fissato, $(\frac{a}{a+2}, \frac{1}{a+2}, \frac{1}{a+2})$ è l'unica distribuzione invariante. In conclusione dobbiamo trovare il valore di a per cui $(\frac{a}{a+2}, \frac{1}{a+2}, \frac{1}{a+2}) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, e il valore di a richiesto è $a = 1$.

Commenti.
La somma dei valori di ciascuna densità discreta che appare è 1 in accordo con la teoria.
`D2`) In particolare si ha $P(Y \geq 1) = (\frac{13}{18})^{1-1} = 1$ come deve essere per come è definita la variabile aleatoria Y.
`D7-D8`) In altro modo $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[e^X] = \int_{-1}^{1} e^x \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2}[e^x]_{x=-1}^{x=1} = \frac{e-e^{-1}}{2}$. Si osservi che qui non abbiamo usato la densità f_Y.
`D14`) È noto che, se le somma degli elementi di ciascuna colonna della matrice di transizione è uguale a 1, allora la distribuzione uniforme (cioè quella che assegna probabilità uguale a $1/(\#E)$ a ciascuno stato) è invariante. In effetti questo è quello che accade per $a = 1$.
L'unicità della distribuzione invariante per $a \neq 0$ (con probabilità tutte positive) è in accordo con l'irriducibilità della catena. La distribuzione invariante $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ nel caso $a = 0$ si può ricavare senza calcoli come segue: lo stato 1 è transitorio (una volta che si lascia lo stato 1 non ci si torna più); $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ è la distribuzione invariante della matrice di transizione

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ristretta alla componente irriducibile che si ottiene considerando gli stati $\{2, 3\}$.