Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)
Anno accademico: `2012-2013`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Appello dell'8 Luglio 2013

Esercizio 1. Un'urna contiene 4 palline numerate da 1 a 4. Si estraggono a caso 2 palline in blocco.
`D1`) Calcolare la probabilità che il minimo tra i due numeri estratti sia maggiore o uguale a 2.
`D2`) Calcolare la probabilità di estrarre una pallina pari e una dispari.

Esercizio 2. Si lancia ripetutamente un dado equo e sia X la variabile aleatoria che conta il numero di lanci necessari per avere per la prima volta un numero pari. Poi si lanciano X monete eque.
`D3`) Calcolare la probabilità di non ottenere mai testa nei lanci di moneta.
`D4`) Calcolare la probabilità di aver lanciato il dado equo k volte, al variare di $k \geq 1$ intero, sapendo di non aver mai ottenuto testa nei lanci di moneta.

Esercizio 3. Consideriamo la seguente densità congiunta: $p_{X_1,X_2}(0,3) = p_{X_1,X_2}(3,0) = \frac{1}{8}$; $p_{X_1,X_2}(1,2) = p_{X_1,X_2}(2,1) = \frac{3}{8}$.
`D5`) Calcolare $P(X_1 = 0|X_1 < X_2)$.
`D6`) Trovare le densità di $Z = X_1X_2$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con distribuzione uniforme su $(1,2)$.
`D7`) Trovare la densità di $Y = \log X$.
`D8`) Calcolare $\mathbb{E}[e^X]$.

Esercizio 5. Sia $N_t = \sum_{n\geq 1} 1_{T_n \leq t}$ (per $t \geq 0$) un processo di Poisson con intensità di $\lambda = 15$.
`D9`) Calcolare $P(N_1 \geq 2)$.
`D10`) Calcolare $\mathbb{E}[T_{30}]$.

Esercizio 6. Sia X una variabile aleatoria normale di media 0 e varianza 4.
`D11`) Calcolare $P(|X| < 2)$.
`D12`) Calcolare $P(X > 1)$.

Esercizio 7 (*solo per ST-Materiali*). Consideriamo una catena di Markov omogenea $\{X_n : n \geq 0\}$ con spazio degli stati $E = \{1,2,3\}$ e matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

`D13`) Trovare la/e distribuzione/i stazionaria/e.
`D14`) Trovare la/e distribuzione/i iniziale/i per cui si ha $P(X_1 = 2) = 0$.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
`D1`) Abbiamo l'insieme $\Omega = \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\}$ e ciascun elemento di Ω ha probabilità $\frac{1}{6}$. Quindi i casi favorevoli all'evento in questione sono 3, cioè $\{\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\}$, e la probabilità richiesta è $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
`D2`) Facendo riferimento alla teoria della distribuzione ipergeometrica la probabilità richiesta è $\frac{\binom{2}{1}\binom{2}{1}}{\binom{4}{2}} = \frac{2\cdot 2}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Esercizio 2. Sia E l'evento "nessuna testa nei lanci di moneta".
`D3`) Per la formula delle probabilità totali si ha $P(E) = \sum_{k=1}^{\infty} P(E|X=k)P(X=k)$, dove $P(E|X=k) = \binom{k}{0}(\frac{1}{2})^k = (\frac{1}{2})^k$ e $P(X=k) = (1-\frac{1}{2})^{k-1}\cdot\frac{1}{2} = (\frac{1}{2})^k$; quindi $P(E) = \sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^{2k} = \frac{(1/2)^2}{1-(1/2)^2} = \frac{1}{3}$.
`D4`) Per la formula di Bayes (e per il valore di $P(E)$ calcolato prima) si ha $P(X=k|E) = \frac{P(E|X=k)P(X=k)}{P(E)} = \frac{(1/2)^{2k}}{1/3} = \frac{3}{4^k}$.

Esercizio 3.
`D5`) Si ha $P(X_1 = 0|X_1 < X_2) = \frac{P(\{X_1=0\}\cap\{X_1<X_2\})}{P(X_1<X_2)} = \frac{p_{X_1,X_2}(0,3)}{p_{X_1,X_2}(0,3)+p_{X_1,X_2}(1,2)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{8}+\frac{3}{8}} = \frac{1}{4}$.
`D6`) La variabile aleatoria Z assume i valori 0 e 2. Precisamente si ha $p_Z(0) = p_{X_1,X_2}(0,3) + p_{X_1,X_2}(3,0) = \frac{1+1}{8} = \frac{1}{4}$ e $p_Z(2) = p_{X_1,X_2}(1,2) + p_{X_1,X_2}(2,1) = \frac{3+3}{8} = \frac{3}{4}$.

Esercizio 4.
`D7`) Si vede che $P(0 \le Y \le \log 2) = 1$, da cui $F_Y(y) = 0$ per $y \le 0$ e $F_Y(y) = 1$ per $y \ge \log 2$. Per $y \in (0, \log 2)$ si ha $F_Y(y) = P(Y \le y) = P(\log X \le y) = P(X \le e^y) = \int_1^{e^y}\frac{1}{2-1}dt = [t]_{t=1}^{t=e^y} = e^y - 1$. Quindi la densità è $f_Y(y) = e^y 1_{(0,\log 2)}(y)$.
`D8`) Si ha $\mathbb{E}[e^X] = \int_1^2 e^t \frac{1}{2-1}dt = \int_1^2 e^t dt = [e^t]_{t=1}^{t=2} = e^2 - e$.

Esercizio 5.
`D9`) Si ha $P(N_1 \ge 2) = 1 - P(N_1 \le 1) = 1 - \sum_{k=0}^{1} P(N_1 = k) = 1 - \sum_{k=0}^{1}\frac{(15\cdot 1)^k}{k!}e^{-15\cdot 1} = 1 - (1+15)e^{-15} = 1 - 16e^{-15}$.
`D10`) Si ha $\mathbb{E}[T_{30}] = \frac{30}{15} = 2$.

Esercizio 6.
Osserviamo che $Z_X = \frac{X}{\sqrt{4}} = \frac{X}{2}$ è la standardizzata di X.
`D11`) Si ha $P(|X| < 2) = P(-2 < X < 2) = P(-\frac{2}{\sqrt{4}} < Z_X < \frac{2}{\sqrt{4}})$, e quindi $P(|X| < 2) = P(-1 < Z_X < 1) = \Phi(1) - \Phi(-1) = \Phi(1) - (1 - \Phi(1)) = 2\Phi(1) - 1 = 2 \cdot 0.84134 - 1 = 0.68268$.
`D12`) Si ha $P(X > 1) = P(Z_X > \frac{1}{\sqrt{4}}) = P(Z_X > \frac{1}{2}) = 1 - \Phi(\frac{1}{2}) = 1 - 0.69146 = 0.30854$.

Esercizio 7.
`D13`) Indichiamo la generica distribuzione iniziale con (a, b, c). Si deve considerare la seguente relazione matriciale

$$(a,b,c)\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = (a,b,c)$$

che fornisce le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \frac{a+b}{2} = a \\ \frac{a+c}{2} = b \\ \frac{b+c}{2} = c. \end{cases}, \quad \begin{cases} b = a \\ a + c = 2b \\ b = c. \end{cases}$$

Quindi si ha $a = b = c$ (segue subito dalla prima e dalla terza equazione; la seconda è in accordo con tali uguaglianze), e possiamo concludere che l'unica distribuzione stazionaria è $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.
`D14`) Indichiamo le distribuzioni iniziali cercate con (p, q, r) e, impostando un sistema simile al precedente, si ha

$$\begin{cases} \frac{p+q}{2} = P(X_1 = 1) \\ \frac{p+r}{2} = P(X_1 = 2) = 0 \\ \frac{q+r}{2} = P(X_1 = 3). \end{cases}$$

Quindi si ha $\frac{p+r}{2} = 0$, da cui segue $p = r = 0$ (essendo $p, q, r \geq 0$ e a somma 1), e $q = 1$. In conclusione $(0, 1, 0)$ è l'unica distribuzione iniziale che soddisfa la condizione richiesta.

Commenti.
La somma dei valori di ciascuna densità discreta che appare è 1 in accordo con la teoria.
`D1-D2`) In effetti gli eventi favorevoli all'evento "estrarre una palina pari e una dispari" sono 4, cioè $\{\{1,2\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{3,4\}\}$.
`D4`) Si verifica che $\sum_{k=1}^{\infty} P(X = k|E) = 1$ in accordo con la teoria; infatti $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{4^k} = 3\sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{4})^k = 3\frac{1/4}{1-(1/4)} = 1$.
`D5-D6`) Si verifica che X_1 e X_2 hanno marginali binomiali di parametri $n = 3$ e $p = \frac{1}{2}$. Inoltre $X_2 = 3 - X_1$. Quindi X_1 e X_2 contano il numero di successi e di insuccessi (o viceversa) nel caso di 3 prove indipendenti con probabilità $\frac{1}{2}$.
`D8`) Possiamo procedere in altro modo (anche se meno conveniente). Posto $Z = e^X$, si vede che $P(e \leq e^X \leq e^2) = 1$, da cui $F_Z(z) = 0$ per $z \leq e$ e $F_Z(z) = 1$ per $z \geq e^2$. Per $z \in (e, e^2)$ si ha $F_Z(z) = P(e^X \leq z) = P(X \leq \log z) = \int_1^{\log z} \frac{1}{2-1} dt = [t]_{t=1}^{t=\log z} = \log z - 1$. Quindi la densità di Z è $f_Z(z) = \frac{1}{z} 1_{(e,e^2)}(z)$. In conclusione si ha $\mathbb{E}[e^X] = \mathbb{E}[Z] = \int_e^{e^2} z \cdot \frac{1}{z} dz = e^2 - e$.
`D13`) Si può verificare che $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ è l'unica distribuzione stazionaria senza fare calcoli. Infatti si verifica che la somma di ciascuna riga della matrice di transizione è uguale a 1 (in questo caso è noto che la distribuzione uniforme - in questo caso specifico la distribuzione $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ - è stazionaria) e si verifica che la catena è irriducibile (in questo caso la catena ammette un'unica distribuzione stazionaria).