Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)
Anno accademico: `2011-2012`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Appello del 6 Febbraio 2012

Esercizio 1. Un'urna ha 3 palline numerate: due palline con il numero 4, e una pallina con il numero 7.
`D1`) Si estraggono a caso 4 palline, una alla volta e con reinserimento. Calcolare la probabilità di estrarre almeno una volta la pallina con il numero 7.
`D2`) Si estraggono a caso 2 palline in blocco e sia S la variabile aleatoria che indica la somma dei due numeri estratti. Trovare la densità discreta di S.

Esercizio 2. Abbiamo due urne: la prima ha 4 palline numerate da 1 a 4, la seconda è vuota. Si estrae a caso una pallina dalla prima urna e sia X la variabile aleatoria che indica il numero estratto. Poi si mettono X palline numerate da 1 a X nella seconda urna; infine si estrae una pallina a caso dalla seconda urna.
`D3`) Calcolare la probabilità di estrarre una pallina con numero dispari dalla seconda urna.
`D4`) Calcolare la probabilità di aver estratto la pallina con il numero 1 dalla prima urna sapendo di aver estratto una pallina con numero dispari dalla seconda urna.

Esercizio 3. Siano $\lambda > 0$ e $p \in (0,1)$. Consideriamo la seguente densità congiunta: $p_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \binom{x_2}{x_1} p^{x_1}(1-p)^{x_2-x_1}\frac{\lambda^{x_2}}{x_2!}e^{-\lambda}$ per x_1, x_2 interi e tali che $0 \le x_1 \le x_2$.
`D5`) Calcolare $P(X_1 + X_2 \le 1)$.
`D6`) Verificare che $Y = X_2 - X_1$ ha distribuzione di Poisson di parametro $\lambda(1-p)$. *Suggerimento*: si osservi che, per $k \ge 0$ intero, si ha $p_Y(k) = P(X_2 - X_1 = k) = \sum_{h=0}^{\infty} P(\{X_2 - X_1 = k\} \cap \{X_1 = h\})$ e continuare i calcoli.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con distribuzione uniforme su $(0,1)$.
`D7`) Trovare la densità continua di $Y = 1 - X^2$.
`D8`) Calcolare $P(\frac{3}{4} < Y < \frac{8}{9})$. *Suggerimento*: i calcoli dovrebbero essere più semplici se si usa la formula $P(a < Y < b) = F_Y(b) - F_Y(a)$ per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$.

Esercizio 5. Sia $N_t = \sum_{n \ge 1} 1_{T_n \le t}$ (per $t \ge 0$) un processo di Poisson con intensità di $\lambda = 2$.
`D9`) Calcolare $P(N_5 \le 1)$.
`D10`) Calcolare $\mathbb{E}[N_4]$.

Esercizio 6. Sia X una variabile aleatoria normale standard.
`D11`) Calcolare $P(X \le 1.7)$.
`D12`) Calcolare $P(|X| \le 0.52)$.

Esercizio 7 (*solo per ST-Materiali*). Consideriamo una catena di Markov omogenea $\{X_n : n \ge 0\}$ con spazio degli stati $E = \{1,2,3\}$ e matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1-q & q & 0 \\ 1-p & 0 & p \end{pmatrix}$$

per $p, q \in (0,1)$.
`D13`) Trovare il valore di p per cui la distribuzione stazionaria è $(\frac{1}{4}, 0, \frac{3}{4})$.
`D14`) Calcolare $P(X_n = 2 | X_0 = 2)$ per ogni $n \ge 1$.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
D1) La variabile aleatoria X che conta il numero di volte che si estrae la pallina con il numero 7 ha distribuzione binomiale. Precisamente si ha $p_X(k) = \binom{4}{k}(\frac{1}{3})^k(1-\frac{1}{3})^{4-k}$ per $k \in \{0,1,2,3,4\}$. Allora la probabilità richiesta è $P(X \geq 1) = \sum_{k=1}^4 p_X(k) = \frac{32+24+8+1}{81} = \frac{65}{81}$.
D2) Abbiamo $\binom{3}{2} = 3$ casi tutti con probabilità $\frac{1}{3}$ e uso i simboli 4_1 e 4_2 per distinguere le due palline con il numero 4: $\{4_1, 4_2\}, \{4_1, 7\}, \{4_2, 7\}$. Allora $p_S(8) = P(\{4_1, 4_2\}) = \frac{1}{3}$ e $p_S(11) = P(\{\{4_1, 7\}, \{4_2, 7\}\}) = \frac{2}{3}$.

Esercizio 2. Sia D l'evento "si estrae una pallina con numero dispari dalla seconda urna".
D3) Per la formula delle probabilità totali si ha $P(D) = \sum_{k=1}^4 P(D|X=k)P(X=k) = 1 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{4} = (1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2})\frac{1}{4} = (2 + \frac{2}{3})\frac{1}{4} = \frac{8}{3}\frac{1}{4} = \frac{2}{3}$.
D4) Per la formula di Bayes (e per il valore di $P(D)$ calcolato prima) si ha $P(X=1|D) = \frac{P(D|X=1)P(X=1)}{P(D)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{4}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{4}\frac{3}{2} = \frac{3}{8}$.

Esercizio 3.
D5) Si ha $P(X_1 + X_2 \leq 1) = p_{X_1,X_2}(0,0) + p_{X_1,X_2}(0,1) = \binom{0}{0}p^0(1-p)^{0-0}\frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda} + \binom{1}{0}p^0(1-p)^{1-0}\frac{\lambda^1}{1!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda} + \lambda(1-p)e^{-\lambda} = (1+\lambda(1-p))e^{-\lambda}$.
D6) Per $k \geq 0$ intero si ha $p_Y(k) = P(X_2 - X_1 = k) = \sum_{h=0}^\infty P(\{X_2 - X_1 = k\} \cap \{X_1 = h\}) = \sum_{h=0}^\infty P(\{X_2 - h = k\} \cap \{X_1 = h\}) = \sum_{h=0}^\infty P(\{X_1 = h\} \cap \{X_2 = h+k\}) = \sum_{h=0}^\infty p_{X_1,X_2}(h, h+k) = \sum_{h=0}^\infty \binom{h+k}{h} p^h (1-p)^{h+k-h} \frac{\lambda^{h+k}}{(h+k)!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda}(1-p)^k \lambda^k \sum_{h=0}^\infty \frac{(h+k)!}{h!(h+k-h)!} p^h \frac{\lambda^h}{(h+k)!} = e^{-\lambda}\frac{(\lambda(1-p))^k}{k!} \sum_{h=0}^\infty \frac{(\lambda p)^h}{h!} = \frac{(\lambda(1-p))^k}{k!} e^{-\lambda} e^{\lambda p} = \frac{(\lambda(1-p))^k}{k!} e^{-\lambda(1-p)}$.

Esercizio 4.
D7) Si vede che $P(0 \leq 1 - X^2 \leq 1) = 1$, da cui $F_Y(y) = 0$ per $y \leq 0$ e $F_Y(y) = 1$ per $y \geq 1$. Per $y \in (0,1)$ si ha $F_Y(y) = P(1 - X^2 \leq y) = P(X^2 \geq 1 - y) = P(X \geq \sqrt{1-y}) = \int_{\sqrt{1-y}}^1 1 dt = 1 - \sqrt{1-y}$. Quindi la densità è $f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{1-y}} 1_{(0,1)}(y)$.
D8) Si ha $P(\frac{3}{4} < Y < \frac{8}{9}) = 1 - \sqrt{1 - \frac{8}{9}} - \left(1 - \sqrt{1 - \frac{3}{4}}\right) = 1 - \sqrt{\frac{1}{9}} - 1 + \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3-2}{6} = \frac{1}{6}$.

Esercizio 5.
D9) Si ha $P(N_5 \leq 1) = \sum_{k=0}^1 P(N_5 = k) = \sum_{k=0}^1 \frac{(2 \cdot 5)^k}{k!} e^{-2 \cdot 5} = (1+10)e^{-10} = 11e^{-10}$.
D10) Si ha $\mathbb{E}[N_4] = 2 \cdot 4 = 8$.

Esercizio 6.
D11) Si ha $P(X \leq 1.7) = \Phi(1.7) = 0.95543$.
D12) Si ha $P(|X| \leq 0.52) = P(-0.52 \leq X \leq 0.52) = \Phi(0.52) - \Phi(-0.52) = \Phi(0.52) - (1 - \Phi(0.52)) = 2\Phi(0.52) - 1 = 2 \cdot 0.69847 - 1 = 0.39694$.

Esercizio 7.
D13) Si deve considerare la seguente relazione matriciale

$$\left(\frac{1}{4}, 0, \frac{3}{4}\right) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1-q & q & 0 \\ 1-p & 0 & p \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{4}, 0, \frac{3}{4}\right)$$

che fornisce le seguenti equazioni con incognita p:

$$\begin{cases} \frac{1}{8}+\frac{3}{4}(1-p)=\frac{1}{4} \\ 0=0 \\ \frac{1}{8}+\frac{3}{4}p=\frac{3}{4}. \end{cases} \tag{1}$$

Consideriamo l'ultima equazione e si ha $\frac{3}{4}p=\frac{3}{4}-\frac{1}{8}$, $\frac{3}{4}p=\frac{6-1}{8}$, $\frac{3}{4}p=\frac{5}{8}$, $p=\frac{5}{8}\frac{4}{3}=\frac{5}{6}$. Si verifica che anche la prima equazione fornisce la stessa soluzione.

`D14`) Osserviamo che, se si parte dallo stato 2 e si va in un altro stato, si resta sempre nella classe chiusa irriducibile costituita dagli stati 1 e 3. Quindi, per ogni $n\geq 1$, si ha $P(X_n=2|X_0=2)=P(\cap_{k=1}^n\{X_k=2\}|X_0=2)=q^n$.

Commenti.

La somma dei valori di ciascuna densità discreta che appare è 1 in accordo con la teoria.

`D1`) In altro modo $P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-\frac{16}{81}=\frac{81-16}{81}=\frac{65}{81}$.

`D8`) In altro modo $P(\frac{3}{4}<Y<\frac{8}{9})=\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{8}{9}}\frac{1}{2\sqrt{1-y}}dy=\frac{1}{2}[-\frac{(1-y)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}]_{y=\frac{3}{4}}^{y=\frac{8}{9}}=\sqrt{1-\frac{3}{4}}-\sqrt{1-\frac{8}{9}}=\sqrt{\frac{1}{4}}-\sqrt{\frac{1}{9}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{3-2}{6}=\frac{1}{6}$, oppure (sfruttando l'ipotesi di distribuzione uniforme per X) $P(\frac{3}{4}<Y<\frac{8}{9})=P(\frac{3}{4}<1-X^2<\frac{8}{9})=P(-\frac{1}{4}<-X^2<-\frac{1}{9})=P(\frac{1}{9}<X^2<\frac{1}{4})=P(\frac{1}{3}<X<\frac{1}{2})=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{3-2}{6}=\frac{1}{6}$.

`D13`) Osserviamo che lo stato 2 è transitorio e che $\{1,3\}$ è una classe irriducibile chiusa. Quindi il problema assegnato ha la seguente formulazione equivalente: trovare il valore di p affinché la catena di Markov con spazio degli stati $\{1,3\}$ e matrice di transizione

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$

abbia distribuzione stazionaria $(\frac{1}{4},\frac{3}{4})$. In effetti si verifica che in corrispondenza si ottengono le stesse equazioni del sistema (1) escludendo la seconda equazione (cioè l'equazione banale $0=0$).