Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità (ed insegnamenti mutuati)
Anno accademico: `2013-2014`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Appello del 5 Febbraio 2014

Esercizio 1. Un'urna ha 10 palline bianche e 20 nere. Si estraggono a caso 3 palline dall'urna, una alla volta e con reinserimento.
`D1`) Trovare la densità discreta della variabile aleatoria X che conta il numero di palline bianche estratte.
`D2`) Calcolare la probabilità di estrarre la sequenza di colori (bianca, nera, bianca).

Esercizio 2. Un'urna contiene 3 palline numerate da 1 a 3. Si estrae una pallina a caso e viene reinserita nell'urna insieme ad un'altra pallina con lo stesso numero. Poi si estrae nuovamente una pallina a caso.
`D3`) Calcolare la probabilità di estrarre due numeri uguali.
`D4`) Calcolare la probabilità di aver estratto il numero k alla prima estrazione (per $k \in \{1,2,3\}$) sapendo di aver estratto due numeri uguali.

Esercizio 3. Definiamo la seguente densità congiunta: $p_{X_1,X_2}(k,k) = (\frac{1}{2})^{k+2}$ per $k \geq 1$ intero, e $p_{X_1,X_2}(k,0) = 3\frac{4^{k-1}}{k!}e^{-4}$ per $k \geq 0$ intero.
`D5`) Calcolare $P(X_2 = 0)$.
`D6`) Calcolare $P(X_1 = X_2)$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con densità continua $f_X(t) = \frac{1}{2} \cdot e^{-|t|} 1_{(-\infty,\infty)}(t)$.
`D7`) Trovare la funzione di distribuzione di $Y = X^2$.
`D8`) Calcolare $P(\{|X| < 10\}|\{X > 0\})$.

Esercizio 5.
`D9`) Sia $N_t = \sum_{n\geq 1} 1_{T_n \leq t}$ (per $t \geq 0$) un processo di Poisson con intensità di $\lambda = 1$. Calcolare $P(N_4 \leq 2)$.
`D10`) Calcolare $P(X_1 - X_2 \leq 1.5\sqrt{2})$ nel caso in cui X_1 e X_2 sono variabili aleatorie Normali standard indipendenti.

Esercizio 6. Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. (indipendenti e identicamente distribuite).
`D11`) Dire per quale valore di m si ha

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - m\right| > \varepsilon\right) = 0 \text{ per ogni } \varepsilon > 0,$$

nel caso in cui le variabili aleatorie $\{X_n : n \geq 1\}$ abbiano la seguente densità discreta: $p_X(0) = p_X(2) = \frac{1}{6}$ e $p_X(1) = \frac{4}{6}$.
`D12`) Dire per quale valore di y si ha

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} - 1}{y/\sqrt{n}} \leq 2\right) = \Phi(1/2)$$

nel caso in cui le variabili aleatorie $\{X_n : n \geq 1\}$ abbiano densità continua $f(t) = e^{-t}1_{(0,\infty)}(t)$.

Esercizio 7 (*solo per Lauree Magistrali*). Consideriamo una catena di Markov omogenea $\{X_n : n \geq 0\}$ con spazio degli stati $E = \{1,2,3\}$ e matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

`D13`) Trovare la/e distribuzione/i stazionaria/e.
`D14`) Dire per quali valori di n si ha $P(X_n = j|X_0 = i) = 1_{\{i=j\}}$ per ogni $i,j \in \{1,2,3\}$.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
D1) La variabile aleatoria X ha distribuzione binomiale e precisamente si ha $p_X(k) = \binom{3}{k}(\frac{10}{30})^k(1-\frac{10}{30})^{3-k}$ per $k \in \{0,1,2,3\}$; quindi $p_X(0) = \frac{8}{27}$, $p_X(1) = \frac{12}{27}$, $p_X(2) = \frac{6}{27}$ e $p_X(3) = \frac{1}{27}$.
D2) Con notazioni ovvie la probabilità richiesta è $P(B_1 \cap N_2 \cap B_3) = P(B_1)P(N_2)P(B_3) = \frac{10}{30}\frac{20}{30}\frac{10}{30} = \frac{2}{27}$.

Esercizio 2. Sia E l'evento "estratti due numeri uguali" e sia X la variabile aleatoria che indica il numero estratto alla prima estrazione.
D3) Per la formula delle probabilità totali si ha $P(E) = \sum_{k=1}^{3} P(E|X=k)P(X=k) = \sum_{k=1}^{3} \frac{2}{4}\frac{1}{3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.
D4) Per la formula di Bayes, e tenendo conto del valore di $P(E)$ calcolato prima, si ha $P(X=k|E) = \frac{P(E|X=k)P(X=k)}{P(E)} = \frac{\frac{2}{4}\frac{1}{3}}{1/2} = \frac{1}{3}$.

Esercizio 3.
D5) Si ha $P(X_2 = 0) = \sum_{k\geq 0} p_{X_1,X_2}(k,0) = 3\sum_{k\geq 0} \frac{4^{k-1}}{k!}e^{-4} = \frac{3}{4}\sum_{k\geq 0}\frac{4^k}{k!}e^{-4} = \frac{3}{4}$.
D6) Si ha $P(X_1 = X_2) = \sum_{k\geq 0} p_{X_1,X_2}(k,k) = \frac{3}{4}e^{-4} + \sum_{k\geq 1}(\frac{1}{2})^{k+2} = \frac{3}{4}e^{-4} + \frac{1}{4}\frac{1/2}{1-(1/2)} = \frac{3}{4}e^{-4} + \frac{1}{4}$.

Esercizio 4.
D7) Si vede che $P(X^2 \geq 0) = 1$, da cui $F_Y(y) = 0$ per $y \leq 0$. Per $y > 0$ si ha (ad un certo punto si sfrutta che si ha l'integrale di una funzione pari su un intervallo simmetrico) $F_Y(y) = P(X^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{1}{2}e^{-|t|}dt = 2\int_0^{\sqrt{y}} \frac{1}{2}e^{-|t|}dt = \int_0^{\sqrt{y}} e^{-t}dt = [-e^{-t}]_{t=0}^{t=\sqrt{y}} = 1 - e^{-\sqrt{y}}$.
D8) Si ha $P(\{|X| < 10\}|\{X > 0\}) = \frac{P(\{|X|<10\}\cap\{X>0\})}{P(X>0)} = \frac{P(0<X<10)}{P(X>0)} = \frac{\int_0^{10}\frac{1}{2}e^{-|t|}dt}{\int_0^{\infty}\frac{1}{2}e^{-|t|}dt} = \frac{\int_0^{10}e^{-t}dt}{\int_0^{\infty}e^{-t}dt} = \frac{[-e^{-t}]_{t=10}^{t=1}}{[-e^{-t}]_{t=0}^{t=\infty}} = 1 - e^{-10}$.

Esercizio 5.
D9) Si ha $P(N_4 \leq 2) = \sum_{j=0}^{2}\frac{(1\cdot 4)^j}{j!}e^{-1\cdot 4} = (1+4+8)e^{-4} = 13e^{-4}$.
D10) Detta $Z_{X_1-X_2}$ la standardizzata di $X_1 - X_2$, si ha $P(X_1 - X_2 \leq 1.5\sqrt{2}) = P(Z_{X_1-X_2} \leq \frac{1.5\sqrt{2}-0}{\sqrt{2}}) = \Phi(1.5) = 0.93319$.

Esercizio 6.
D11) Per la legge dei grandi numeri si ha $m = 0\cdot\frac{1}{6} + 1\cdot\frac{4}{6} + 2\cdot\frac{1}{6} = 1$.
D12) Le variabili aleatorie $\{X_n : n \geq 1\}$ sono esponenziali di parametro $\lambda = 1$, e quindi la loro varianza è $\frac{1}{\lambda^2} = 1$. Indichiamo con $Z_{\bar{X}_n}$ la standardizzata di $\bar{X}_n = \frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$. Allora $\left\{\frac{\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}-1}{y/\sqrt{n}} \leq 2\right\} = \left\{Z_{\bar{X}_n} \leq 2y\right\}$ e, per il teorema limite centrale, si deve avere $2y = \frac{1}{2}$, da cui segue $y = \frac{1}{4}$.

Esercizio 7.
D13) Indichiamo la distribuzione stazionaria con (p,q,r). Allora si deve avere la relazione matriciale

$$(p,q,r)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (p,q,r),$$

che fornisce il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} q = p \\ r = q \\ p = r. \end{cases}$$

Quindi $\pi = (\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ è l'unica distribuzione stazionaria.
D14) I valori di n richiesti sono tutti e soli quelli per cui si ha

$$P^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dove P^n è la potenza n-sima della matrice P nel senso del prodotto righe per colonne. Si verifica che

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } P^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

quindi $n = 3$ è uno dei valori richiesti. Continuando con le potenze si vede che $P^4 = P$, $P^5 = P^2$ e $P^6 = P^3$; quindi un altro valore richiesto è $n = 6$. Iterando il procedimento si vede che tutti e soli i valori richiesti n sono i multipli di 3, cioè $\{n = 3k : k \geq 1 \text{ intero}\} = \{3, 6, 9, 12, 15, \ldots\}$.

Commenti.
La somma dei valori di ciascuna densità discreta che appare è 1 in accordo con la teoria.
`D1-D2`) Si verifica che $P(B_1 \cap B_2 \cap N_3) = P(N_1 \cap B_2 \cap B_3) = \frac{2}{27}$; quindi $P(B_1 \cap B_2 \cap N_3) + P(B_1 \cap N_2 \cap B_3) + P(N_1 \cap B_2 \cap B_3) = \frac{2+2+2}{27} = \frac{6}{27}$ coincide con $p_X(2) = \frac{6}{27}$ in accordo con la teoria.
`D3-D4`) Il procedimento si generalizza al caso di n palline numerate da 1 a n (e si recuperano i valori ottenuti per $n = 3$): $P(E) = \sum_{k=1}^n P(E|X = k)P(X = k) = \sum_{k=1}^n \frac{2}{n+1}\frac{1}{n} = \frac{2}{n+1}$ e $P(X = k|E) = \frac{P(E|X=k)P(X=k)}{P(E)} = \frac{\frac{2}{n+1}\frac{1}{n}}{2/(n+1)} = \frac{1}{n}$. Inoltre, per ogni $k \in \{1, \ldots, n\}$, gli eventi $\{X = k\}$ ed E sono indipendenti perché $P(X = k|E) = P(X = k) = \frac{1}{n}$.
`D8`) Gli eventi $\{|X| < 10\}$ e $\{X > 0\}$ sono indipendenti. Infatti $P(|X| < 10) = \int_{-10}^{10} \frac{1}{2}e^{-|t|}dt = 2\int_0^{10} \frac{1}{2}e^{-t}dt = [-e^{-t}]_{t=0}^{t=10} = 1 - e^{-10}$ coincide con $P(\{|X| < 10\}|\{X > 0\})$. Si può dire la stessa cosa nel caso in cui si considera un generico evento $\{|X| < b\}$ (per qualche $b > 0$) al posto di $\{|X| < 10\}$.
`D11`) Il valore atteso $m = 1$ non è sorprendente perché la densità discreta è simmetrica rispetto al valore $k = 1$.
`D13`) Si poteva dire che $\pi = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ è l'unica distribuzione stazionaria senza fare calcoli. Infatti la catena è irriducibile e quindi ammette un'unica distribuzione invariante. Inoltre, poiché la somma degli elementi di ciascuna riga della matrice P è uguale a 1, è noto che la distribuzione uniforme $\pi = (\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n})$ su E, dove n è la cardinalità di E, è invariante.
`D14`) Le matrici P^2, P^3 e in generale P^n si possono ottenere senza fare i prodotti righe per colonne. Infatti le transizioni sono deterministiche. Quindi P^n si ottiene considerando n transizioni deterministiche a partire dai vari possibili stati iniziali.