Statistica per la ricerca sperimentale e tecnologica
CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA, UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"
Anno accademico: 2006-2007
Titolare del corso: Claudio Macci
Simulazione 1

Esercizio 1. Si lancia un dado equo 3 volte. Per ogni lancio del dado si definisce *successo* l'uscita del numero 1 o del numero 4. Consideriamo le seguenti variabili aleatorie: X indica il numero di successi e Y indica il massimo tra i tre numeri usciti.
D1) Trovare la densità discreta di X.
D2) Calcolare la probabilità di avere la sequenza di numeri $(1, 3, 1)$ sapendo di aver avuto esattamente due successi.
D3) Calcolare $P(Y = 2)$. *Suggerimento*: è utile osservare che $P(Y = k) = P(Y \leq k) - P(Y \leq k-1)$ per ogni k intero.

Esercizio 2. Si consideri il seguente gioco. Si lancia una moneta equa e due volte un dado equo: se esce testa si vince se esce la sequenza di numeri $(1, 2)$; se esce croce si vince se la somma dei numeri usciti è 3.
D4) Calcolare la probabilità di vincere il gioco.
D5) Calcolare la probabilità che sia uscita testa sapendo di aver vinto il gioco.

Esercizio 3. La densità congiunta di (X_1, X_2) è la seguente: $p_{(X_1,X_2)}(0,1) = p_{(X_1,X_2)}(1,0) = p_{(X_1,X_2)}(0,2) = p_{(X_1,X_2)}(2,0) = p_{(X_1,X_2)}(1,2) = p_{(X_1,X_2)}(2,1) = \frac{1}{12}$; $p_{(X_1,X_2)}(1,1) = \frac{1}{2}$.
D6) Trovare la densità discreta di $Z = e^{X_1+X_2}$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con densità $f_X(t) = \frac{c}{t}$ per $t \in [1, 3]$ e $f_X(t) = 0$ altrimenti. Sia $Y = [X]$ dove $[x] = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$ è la *parte intera* di x.
D7) Verificare che $c = \frac{1}{\log 3}$.
D8) Trovare la densità discreta di Y.

Esercizio 5. Siano X_1 e X_2 due variabili aleatorie esponenziali indipendenti con parametri $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 5$ rispettivamente.
D9) Calcolare $\mathbb{E}[3X_1 - 5X_2]$ e dire se si avrebbe lo stesso risultato anche senza l'ipotesi di indipendenza tra X_1 e X_2.
D10) Calcolare $\text{Var}[3X_1 - 5X_2]$.

Esercizio 6. Sia X una variabile aleatoria normale con media $\mu = 0$ e varianza $\sigma^2 = 4$.
D11) Calcolare $P(X > 5)$.
D12) Calcolare $P(X > 5 || X| > 5)$.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
D1) La variabile aleatoria X ha distribuzione binomiale con parametri $n = 3$ (numero dei lanci del dado) e $p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ (probabilità di *successo* in ogni lancio). Quindi $p_X(k) = \binom{3}{k}(\frac{1}{3})^k(1-\frac{1}{3})^{3-k}$ per $k \in \{0,1,2,3\}$, da cui $p_X(0) = \frac{8}{27}$, $p_X(1) = \frac{12}{27}$, $p_X(2) = \frac{6}{27}$ e $p_X(3) = \frac{1}{27}$.
D2) Indichiamo con E l'evento "esce la sequenza $(1,3,1)$" e si ha $P(E|X=2) = \frac{P(E\cap\{X=2\})}{P(X=2)} = \frac{P(E)}{p_X(2)}$ perché $E \subset \{X = 2\}$. Allora, tenendo conto il valore di $p_X(2)$ calcolato prima, otteniamo il seguente risultato: $P(E|X=2) = \frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}}{\frac{6}{27}} = \frac{27}{6^4} = \frac{27}{1296} = \frac{1}{48}$.
D3) Si ha $P(Y=2) = P(Y \leq 2) - P(Y \leq 1) = \frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{2^3-1^3}{6^3} = \frac{7}{216}$.

Esercizio 2. Sia V l'evento "vincere il gioco" e T l'evento "esce testa".
D4) Per la formula delle probabilità totali si ha $P(V) = P(V|T)P(T)+P(V|T^c)P(T^c) = \frac{1}{36}\frac{1}{2}+\frac{2}{36}\frac{1}{2} = \left[\frac{1}{36}+\frac{2}{36}\right]\frac{1}{2} = \frac{3}{36}\frac{1}{2} = \frac{3}{72} = \frac{1}{24}$.
D5) Per la formula di Bayes, e sfruttando il valore di $P(V)$ calcolato prima, si ha $P(T|V) = \frac{P(V|T)P(T)}{P(V)} = \frac{\frac{1}{36}\frac{1}{2}}{\frac{1}{24}} = \frac{24}{72} = \frac{1}{3}$.

Esercizio 3.
D6) Si ha: $p_Z(e) = p_{(X_1,X_2)}(1,0)+p_{(X_1,X_2)}(0,1) = \frac{1+1}{12} = \frac{2}{12}$, $p_Z(e^2) = p_{(X_1,X_2)}(2,0)+p_{(X_1,X_2)}(0,2)+p_{(X_1,X_2)}(1,1) = \frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{2} = \frac{1+1+6}{12} = \frac{8}{12}$, $p_Z(e^3) = p_{(X_1,X_2)}(1,2)+p_{(X_1,X_2)}(2,1) = \frac{1+1}{12} = \frac{2}{12}$.

Esercizio 4.
D7) Si ha $1 = c\int_1^3 \frac{1}{t}dt = c[\log t]_1^3 = c\log 3$, da cui $c = \frac{1}{\log 3}$.
D8) Si ha: $p_Y(1) = P(1 \leq X < 2) = \int_1^2 \frac{1}{t\log 3}dt = \left[\frac{\log t}{\log 3}\right]_{t=1}^{t=2} = \frac{\log 2}{\log 3}$, $p_Y(2) = P(2 \leq X < 3) = \int_2^3 \frac{1}{t\log 3}dt = \left[\frac{\log t}{\log 3}\right]_{t=2}^{t=3} = \frac{\log 3 - \log 2}{\log 3} = 1 - \frac{\log 2}{\log 3}$.

Esercizio 5. Sfruttando le formule per la distribuzione esponenziale (e le formule generali per speranza matematica e varianza) abbiamo i seguenti risultati.
D9) Anche senza l'ipotesi di indipendenza si ha $\mathbb{E}[3X_1 - 5X_2] = 3\mathbb{E}[X_1] - 5\mathbb{E}[X_2] = 3\frac{1}{3} - 5\frac{1}{5} = 0$.
D10) $\mathrm{Var}[3X_1 - 5X_2] = 3^2\mathrm{Var}[X_1] + (-5)^2\mathrm{Var}[X_2] = 3^2\frac{1}{3^2} + 5^2\frac{1}{5^2} = 2$.

Esercizio 6.
D11) La v.a. $Z_X = \frac{X-0}{\sqrt{4}}$ è la standardizzata di X e si ha $P(X > 5) = P(\frac{X-0}{\sqrt{4}} > \frac{5-0}{\sqrt{4}}) = P(Z_X > 5/2) = 1 - \Phi(5/2) = 1 - \Phi(2.5) = 1 - 0.99379 = 0.00621$.
D12) Osservando che $\{X > 5\} \subset \{|X| > 5\}$ e che $\{|X| > 5\} = \{X > 5\} \cup \{X < -5\}$ è un'unione disgiunta, si ha $P(X > 5||X| > 5) = \frac{P(\{X>5\}\cap(\{X>5\}\cup\{X<-5\}))}{P(\{X>5\}\cup\{X<-5\})} = \frac{P(X>5)}{P(X>5)+P(X<-5)}$. Il valore $P(X > 5)$ è già stato calcolato; inoltre $P(X < -5) = P(\frac{X-0}{\sqrt{4}} < \frac{-5-0}{\sqrt{4}}) = P(Z_X < -5/2) = \Phi(-5/2) = 1 - \Phi(5/2) = 1 - \Phi(2.5) = 1 - 0.99379 = 0.00621$. In conclusione otteniamo $P(X > 5||X| > 5) = \frac{0.00621}{0.00621+0.00621} = \frac{0.00621}{0.01242} = 0.5$.

Commenti.
D1) Si ha $p_X(0) + p_X(1) + p_X(2) + p_X(3) = \frac{8+12+6+1}{27} = 1$ in accordo con la teoria.
D6) Si ha $p_Z(e) + p_Z(e^2) + p_Z(e^3) = \frac{2+8+2}{12} = 1$ in accordo con la teoria.
D8) Si ha $p_Y(1) + p_Y(2) = \frac{\log 2}{\log 3} + \left(1 - \frac{\log 2}{\log 3}\right) = 1$ in accordo con la teoria.
D12) Arrivati all'uguaglianza $P(X > 5||X| > 5) = \frac{P(X>5)}{P(X>5)+P(X<-5)}$, e osservando che $P(X > 5) = P(X < -5)$ per simmetria della densità della normale rispetto a $\mu = 0$, si ha $P(X > 5||X| > 5) = \frac{P(X>5)}{2P(X>5)} = 0.5$ senza aver bisogno di usare le tavole per sapere che $P(X > 5) = 0.00621$.