

ESERCIZI SU
CAMPO ELETTRICO,
POTENZIALE ELETTRICO
E CORRENTE ELETTRICA

Un filo infinitamente lungo ha una densità lineare di carica λ e si trova a una distanza d dal punto O come mostrato nella figura.

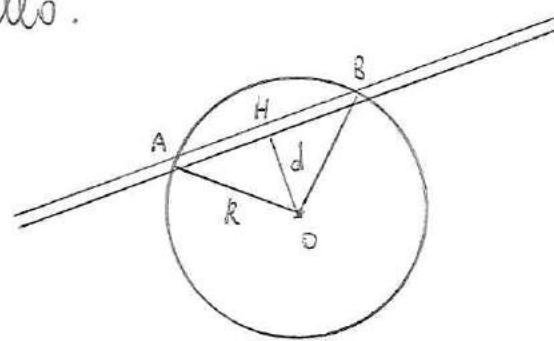
Determinare il flusso elettrico totale attraverso la superficie sferica di raggio R

centrata in O , generato da questa distribuzione di carica. Considerare i casi:

$$a) R < d \quad ; \quad b) R > d$$

a) $R < d$. In questo caso la superficie sferica non tocca il filo carico, per cui all'interno della superficie sferica la carica netta totale è nulla. Dunque, per il teorema di Gauss il flusso elettrico totale attraverso la superficie sferica è nullo.

$$b) R > d$$



Risultato

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= 2\overline{AH} = 2\sqrt{\overline{AO}^2 - \overline{OH}^2} = \\ &= 2\sqrt{R^2 - d^2} \end{aligned}$$

In questo caso la carica netta totale all'interno della superficie sferica è $q_{\text{tot}} = \lambda \cdot \overline{AB} = 2\lambda\sqrt{R^2 - d^2}$, per cui, per il teorema di Gauss, il flusso elettrico totale attraverso la superficie sferica è

$$\Phi_B = \frac{q_{\text{tot}}}{\epsilon_0} = \frac{2\lambda}{\epsilon_0} \sqrt{R^2 - d^2}$$

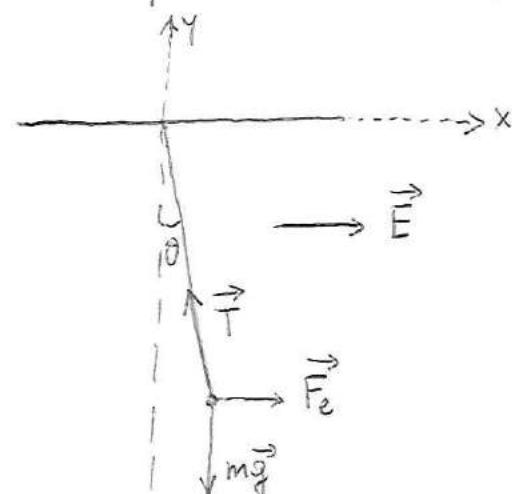
(c)

Una pallina di plastica avente massa $m = 2 \text{ g}$ e' sospesa mediante un filo di lunghezza $l = 20 \text{ cm}$ in un campo elettrico uniforme come mostrato nella figura.

Il modulo del campo elettrico e'

$$E = |\vec{E}| = 10^3 \text{ N/C}.$$

Se la pallina e' in equilibrio quando il filo forma un angolo $\theta = 15^\circ$ con la direzione verticale, qual e' la carica elettrica della pallina?



Come schematizzato nella figura, all'equilibrio sulla pallina agiscono le forze peso $m\vec{g}$, le forze elettostatiche $\vec{F}_e = q\vec{E}$ e le forze esercitate dal filo \vec{T} .

$$\text{Deve risultare } \vec{T} + m\vec{g} + \vec{F}_e = 0$$

Introduciamo un sistema di assi cartesiani ortogonali (x, y) come nella figura. Posto $q = |\vec{q}|$, $E = |\vec{E}|$ e $T = |\vec{T}|$,

$$\text{risulta: } (m\vec{g})_x = 0; \quad F_{e,x} = qE; \quad T_x = -T \sin \theta$$

$$(m\vec{g})_y = -mg; \quad F_{e,y} = 0; \quad T_y = T \cos \theta$$

Dunque, deve essere verificato il sistema di equazioni seguente:

$$\begin{cases} (\vec{mg})_x + F_{ex} + T_x = 0 \\ (\vec{mg})_y + F_{ey} + T_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} qE - T \sin\theta = 0 \\ -mg + T \cos\theta = 0 \end{cases}$$

Dunque:

$$\begin{cases} T \sin\theta = qE \\ T \cos\theta = mg \end{cases}$$

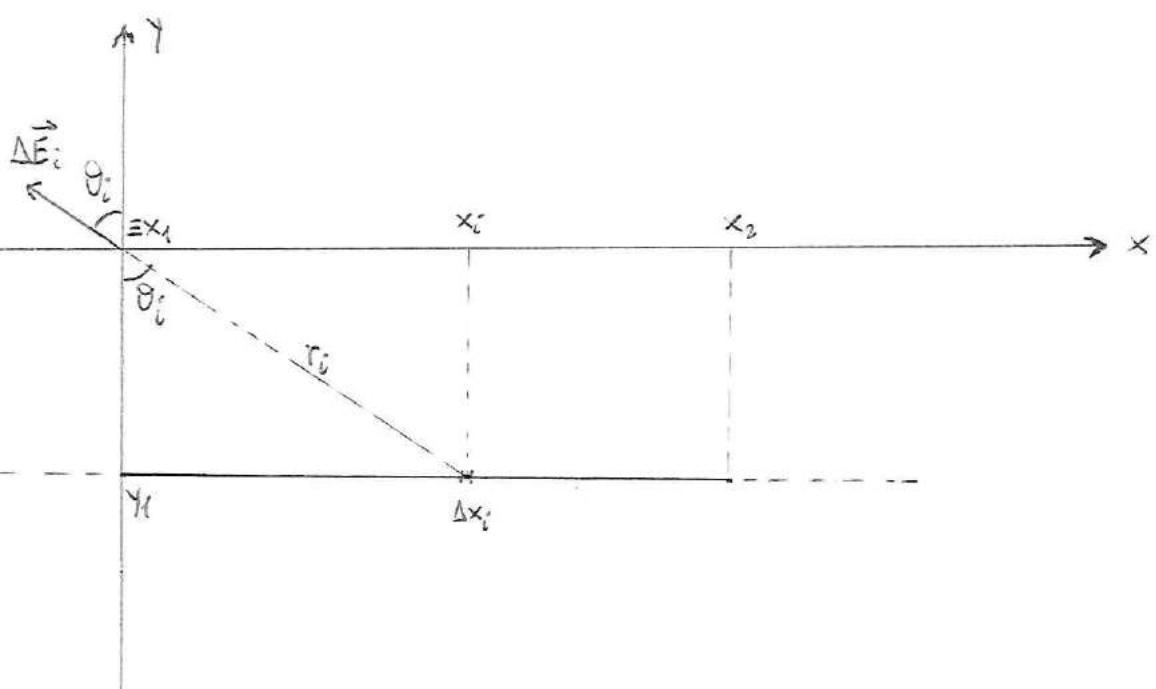
Essendo $T > 0$, poniamo di dividere le due equazioni membro a membro:

$$\tan\theta = \frac{qE}{mg}, \text{ da cui ricaviamo}$$

$$q = \frac{mg \tan\theta}{E} = \frac{(2 \times 10^{-3} \text{ kg}) \cdot (9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}) \cdot \tan 15^\circ}{10^3 \frac{\text{N}}{\text{C}}} = 5,2572 \mu\text{C}$$

Serway, pr. 19.71

In filo uniformemente carico con densità lineare di carica $\lambda = 35 \text{ nC/m}$ si trova sulle rette $y = y_1 = -15 \text{ cm}$ tra i punti di coordinate $x_1 = 0$ e $x_2 = 40 \text{ cm}$. Determinare il campo elettrico generato nell'origine.



Nella figura qui sopra e' schematizzata la situazione del problema. Suddividiamo il tratto di filo in piccoli segmenti di lunghezza Δx_i ; il segmento generico che si trova nel punto di coordinate (x_i, y_i) (con $0 \leq x_i \leq x_2$), si trova alla distanza

$$r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2} \text{ dall'origine del sistema di assi cartesiani.}$$

Nella figura e' rappresentato anche il contributo $\Delta \vec{E}_i$ di questo segmento carico al campo elettrico nell'origine.

Risulta: $|\Delta \vec{E}_i| = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Delta q_i}{r_i^2} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Delta x_i}{(y_i^2 + x_i^2)^{3/2}}$ (essendo $\Delta q_i = \lambda \Delta x_i$)

Componenti di $\Delta \vec{E}_i$ lungo gli assi cartesiani:

$$(\Delta \vec{E}_i)_x = - |\Delta \vec{E}_i| \sin \theta_i \quad (\Delta \vec{E}_i)_y = |\Delta \vec{E}_i| \cos \theta_i$$

Risulta dalla geometria della figura:

$$\sin \theta_i = \frac{x_i}{r_i} = \frac{x_i}{(y_i^2 + x_i^2)^{1/2}} ; \cos \theta_i = \frac{|y_i|}{(y_i^2 + x_i^2)^{1/2}}$$

Risulte quindi:

$$(\Delta \vec{E}_i)_x = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{x_i \Delta x_i}{(y_i^2 + x_i^2)^{3/2}} ; \quad (\Delta \vec{E}_i)_y = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{|y_i| \Delta x_i}{(y_i^2 + x_i^2)^{3/2}}$$

Le componenti del campo elettrico nel punto $(0, 0)$ generato dal tratto di filo considerato si ottengono sommando questi contributi infinitesimi:

$$E_x = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{x_i \Delta x_i}{(y_i^2 + x_i^2)^{3/2}} = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{x_2} \frac{x}{(y_i^2 + x^2)^{3/2}} dx$$

$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{|y_i| \Delta x_i}{(y_i^2 + x_i^2)^{3/2}} = \frac{\lambda |y_i|}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{x_2} \frac{1}{(y_i^2 + x^2)^{3/2}} dx$$

Il primo integrale si puo' risolvere con:

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\lambda}{8\pi\epsilon_0} \int_0^{x_2} \frac{2x}{(y_i^2 + x^2)^{3/2}} dx = -\frac{\lambda}{8\pi\epsilon_0} \int_0^{x_2} \left[(y_i^2 + x^2)^{-3/2} \cdot (2x) \right] dx = \\ &= -\frac{\lambda}{8\pi\epsilon_0} \left. \frac{(y_i^2 + x^2)^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} \right|_0^{x_2} = \frac{\lambda}{48\pi\epsilon_0} \left. \frac{1}{\frac{1}{2}} \left(y_i^2 + x^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \right|_0^{x_2} = \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[\left(y_i^2 + x_2^2 \right)^{-\frac{1}{2}} - \left(y_i^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \right] = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|y_i|} - \frac{1}{\sqrt{(y_i^2 + x_2^2)^{1/2}}} \right] = \\ &= -\frac{(35 \times 10^{-3} C/m)}{4\pi \cdot (8,854187817 \times 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2})} \left[\frac{1}{0,15 m} - \frac{1}{\sqrt{(0,15 m)^2 + (0,4 m)^2}^{1/2}} \right] = \\ &= -1,36076 \times 10^3 \frac{N}{C} \end{aligned}$$

Il secondo integrale conviene risolverlo mediante sostituzione:

$$x = |y_1| \operatorname{tg} \theta, \text{ da cui ottieniamo } \frac{dx}{d\theta} = \frac{|y_1|}{(\cos \theta)^2}$$

Risulta poi: $(y_1^2 + x^2)^{3/2} = [y_1^2 + y_1^2 \operatorname{tg}^2 \theta]^{3/2} = |y_1|^3 (1 + \operatorname{tg}^2 \theta)^{3/2} =$

$$= \frac{|y_1|^3}{[(\cos \theta)^2]^{3/2}} = \frac{|y_1|^3}{(\cos \theta)^3}$$

Ottieniamo quindi:

$$E_y = \frac{\lambda |y_1|}{4\pi \epsilon_0} \int_0^{\theta_M} \frac{(\cos \theta)^3}{|y_1|^2} \frac{|x_1|}{(\cos \theta)^2} d\theta, \quad \text{con } \theta_M = \operatorname{arctg} \frac{x_2}{|y_1|}$$

$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{|y_1|} \int_0^{\theta_M} \cos \theta d\theta = \frac{\lambda}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{|y_1|} \left. \sin \theta \right|_0^{\theta_M} =$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{|y_1|} \sin \theta_M = \frac{\lambda}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{|y_1|} \frac{\operatorname{tg} \theta_M}{\sqrt{1 + (\operatorname{tg} \theta_M)^2}} =$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{|y_1|} \frac{x_2 / |y_1|}{\sqrt{1 + \frac{x_2^2}{y_1^2}}} = \frac{\lambda}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{|y_1|} \frac{x_2}{|y_1|} \frac{|x_1|}{\sqrt{y_1^2 + x_2^2}} =$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{x_2}{|y_1| \sqrt{y_1^2 + x_2^2}} =$$

$$= \frac{(35 \times 10^{-9} \text{ C/m})}{4\pi \cdot (8,854187817 \times 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2})} \cdot \frac{0,4 \text{ m}}{(0,15 \text{ m}) \sqrt{(0,15 \text{ m})^2 + (0,4 \text{ m})^2}}$$

$$= 1,96357 \times 10^3 \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

In definitiva otteniamo:

$$E_x = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|y_1|} - \frac{1}{(y_1^2 + x_2^2)^{1/2}} \right] = -1,36076 \times 10^3 \frac{N}{C}$$

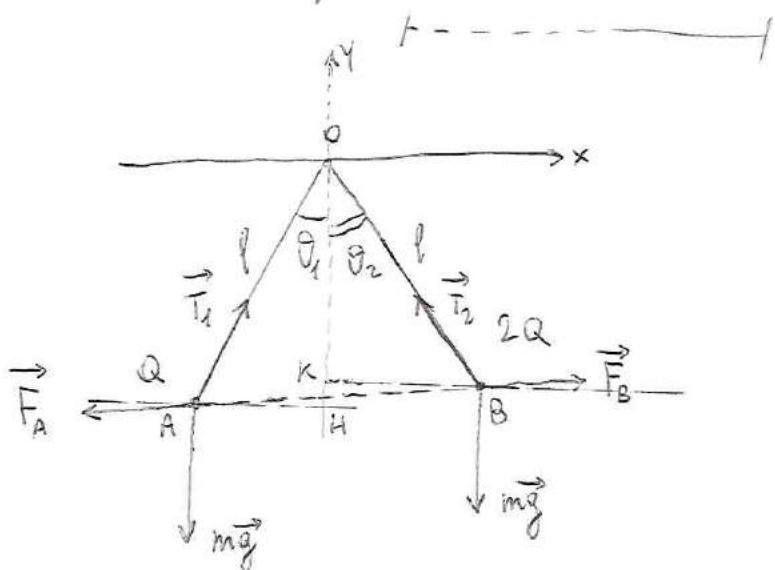
$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{x_2}{|y_1| (y_1^2 + x_2^2)^{1/2}} = 1,96357 \times 10^3 \frac{N}{C}$$

Serway, pr. 19.72

Due piccole sfere di massa m sono sospese con dei fili di lunghezza l finiti a uno stesso punto. Una sfera ha carica Q e l'altra ha carica 2Q. I fili formano angoli θ_1 e θ_2 con la direzione verticale.

- Trovare quale relazione esiste tra θ_1 e θ_2 .
- Calcolare le distanze tra le due sfere all'equilibrio se θ_1 e θ_2 sono angoli molto piccoli.

a)



$$\overline{OA} = \overline{OB} = l$$

$$\hat{OAB} = \hat{OBA} =$$

$$= \frac{1}{2} [\pi - (\theta_1 + \theta_2)]$$

$$\hat{OAH} = \frac{\pi}{2} - \theta_1 \quad \hat{OBK} = \frac{\pi}{2} - \theta_2$$

$$\hat{OAH} - \hat{OAB} = \frac{\pi}{2} - \theta_1 - \frac{1}{2} + \frac{\theta_1}{2} + \frac{\theta_2}{2} = \frac{1}{2} (\theta_2 - \theta_1)$$

$$\hat{OBA} - \hat{OBK} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \theta_1 - \frac{1}{2} \theta_2 - \frac{\pi}{2} + \theta_2 = \frac{1}{2} (\theta_2 - \theta_1)$$

All' equilibrio, basandoci sullo schema delle figure, deve risultare:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{T}_1 + \vec{F}_A + m\vec{g} = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{T}_2 + \vec{F}_B + m\vec{g} = 0 \end{array} \right.$$

on le condizioni $\vec{F}_A + \vec{F}_B = 0$ per la terza legge della dinamica.

Risulta: $\overline{AB} = \sqrt{l^2 + l^2 - 2l^2 \cos(\theta_1 + \theta_2)} = l\sqrt{2} \sqrt{1 - \cos(\theta_1 + \theta_2)}$ per il teorema del coseno applicato al triangolo OAB.

$$\text{Dunque: } |\vec{F}_A| = |\vec{F}_B| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2Q \cdot Q}{\overline{AB}^2} = \frac{Q^2}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{2l^2[1 - \cos(\theta_1 + \theta_2)]} =$$

$$= \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{l^2[1 - \cos(\theta_1 + \theta_2)]}$$

Componenti delle forze lungo gli assi cartesiani.

$$T_{1,x} = |\vec{T}_1| \cos \hat{\alpha}_{AH} = |\vec{T}_1| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right) = T_1 \sin \theta_1 \quad (T_1 = |\vec{T}_1|)$$

$$(m\vec{g})_x = 0$$

$$F_{A,x} = -|\vec{F}_A| \cos\left[\frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1)\right] = -\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\cos\left[\frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1)\right]}{l^2[1 - \cos(\theta_1 + \theta_2)]}$$

$$T_{1,y} = |\vec{T}_1| \cos \theta_1 = T_1 \cos \theta_1$$

$$(m\vec{g})_y = -mg$$

$$F_{A,y} = -|\vec{F}_A| \sin\left[\frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1)\right] = -\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\sin\left[\frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1)\right]}{l^2[1 - \cos(\theta_1 + \theta_2)]}$$

$$T_{2,x} = -|\vec{T}_2| \sin \theta_2 = -T_2 \sin \theta_2 \quad (T_2 = |\vec{T}_2|)$$

$$(m\vec{g})_x = 0$$

$$F_{B,x} = |\vec{F}_B| \cos \left[\frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1) \right] = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\cos \left[\frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1) \right]}{l^2 [1 - \cos(\theta_1 + \theta_2)]}$$

$$T_{2,y} = |\vec{T}_2| \cos \theta_2 = T_2 \cos \theta_2$$

$$(m\vec{g})_y = -mg$$

$$F_{B,y} = |\vec{F}_B| \sin \left[\frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1) \right] = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\sin \left[\frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1) \right]}{l^2 [1 - \cos(\theta_1 + \theta_2)]}$$

Dovendo quindi vedere le seguenti relazioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} T_1 \sin \theta_1 - \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\cos \left[\frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1) \right]}{l^2 [1 - \cos(\theta_1 + \theta_2)]} = 0 \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} T_1 \cos \theta_1 - mg - \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\sin \left[\frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1) \right]}{l^2 [1 - \cos(\theta_1 + \theta_2)]} = 0 \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} -T_2 \sin \theta_2 + \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\cos \left[\frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1) \right]}{l^2 [1 - \cos(\theta_1 + \theta_2)]} = 0 \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} T_2 \cos \theta_2 - mg + \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\sin \left[\frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1) \right]}{l^2 [1 - \cos(\theta_1 + \theta_2)]} = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} T_1 \sin \theta_1 = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\cos \left[\frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1) \right]}{l^2 [1 - \cos(\theta_1 + \theta_2)]} \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} T_1 \cos \theta_1 = mg + \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\sin \left[\frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1) \right]}{l^2 [1 - \cos(\theta_1 + \theta_2)]} \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} T_2 \sin \theta_2 = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\cos \left[\frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1) \right]}{l^2 [1 - \cos(\theta_1 + \theta_2)]} \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} T_2 \cos \theta_2 = mg + \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\sin \left[\frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1) \right]}{l^2 [1 - \cos(\theta_1 + \theta_2)]} \end{array} \right.$$

dividendo membri e membri la prima e la seconda equazione, e poi la terza e la quarta equazione, ottieniamo

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \operatorname{tg} \theta_2, \text{ da cui ricaviamo } \boxed{\theta_1 = \theta_2}$$

b) Posto $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ ottieniamo quindi:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 mg} \cdot \frac{l}{l^2(1-\cos(2\theta))}$$

Se θ è un angolo molto piccolo, risulta $\operatorname{tg} \theta \approx \theta$ (con θ in radienti), e $1 - \cos(2\theta) \approx 1 - \left[1 - \frac{1}{2}(2\theta)^2\right] = \frac{1}{2} \cdot 4\theta^2 = 2\theta^2$

Allora: $\theta \approx \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 mg l^2} \cdot \frac{1}{2\theta^2} \Rightarrow \theta^3 \approx \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 mg l^2}$, e quindi

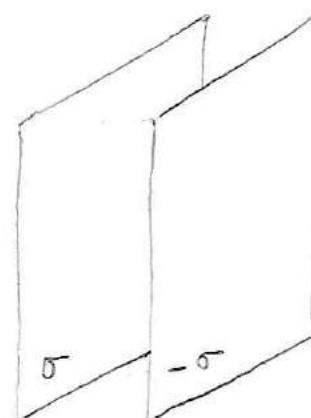
$$\theta \approx \left(\frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 mg l^2} \right)^{1/3}$$

Le distanze \overline{AB} , in queste approssimazioni, diventano:

$$\overline{AB} = l\sqrt{2} \cdot \sqrt{1-\cos(2\theta)} \approx l\sqrt{2} \cdot \sqrt{2\theta^2} = 2l\theta, \text{ cioè}$$

$$\boxed{\overline{AB} \approx 2l \left(\frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 mg l^2} \right)^{1/3} = \left(\frac{8l^3 Q^2}{8\pi\epsilon_0 mg l^2} \right)^{1/3} = \left(\frac{l Q^2}{\pi\epsilon_0 mg} \right)^{1/3}}$$

Due superfici piene cariche, infinite e non conduttrici sono tra di loro parallele. La superficie di sinistra ha una densità di carica superficiale uniforme σ , e quella di destra ha una densità superficiale uniforme $-\sigma$.

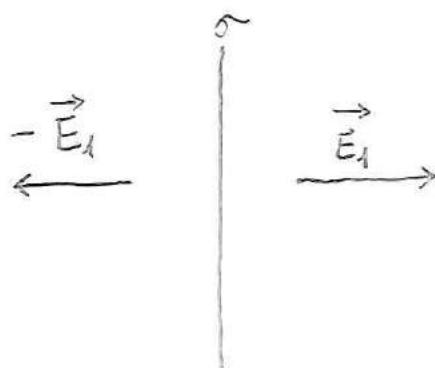


Calcolare il campo elettrico:

- nei punti a sinistra delle superfici;
 - tra le due superfici;
 - nei punti a destra delle superfici.
- d) Trovare i campi elettrici in tutte e tre le regioni se entrambe le superfici hanno una densità superficiale di carica positiva uniforme di valore σ .

—————

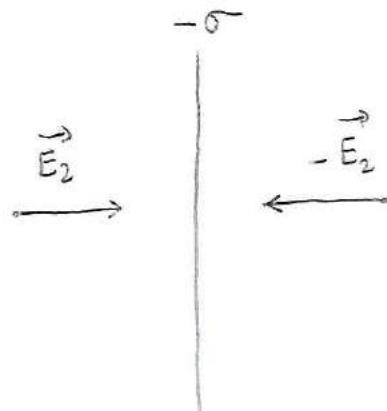
- Vinte di profilo per il campo elettrico generato dalla sola superficie di sinistra:



$$|\vec{E}_1| = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

(costante, indipendente dalle distanze dalle superficie).

Vista di profilo per il campo elettrico generato dalla sola superficie di destra:



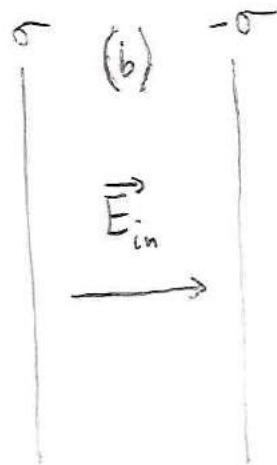
$$|\vec{E}_2| = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = |\vec{E}_1|$$

(costante, indipendente dalla distanza dalla superficie).

Il campo elettrico complessivo si ottiene sovrapponendo gli effetti delle superfici singole:

(a)

$$\vec{E}_{TOT} = 0$$



(b)

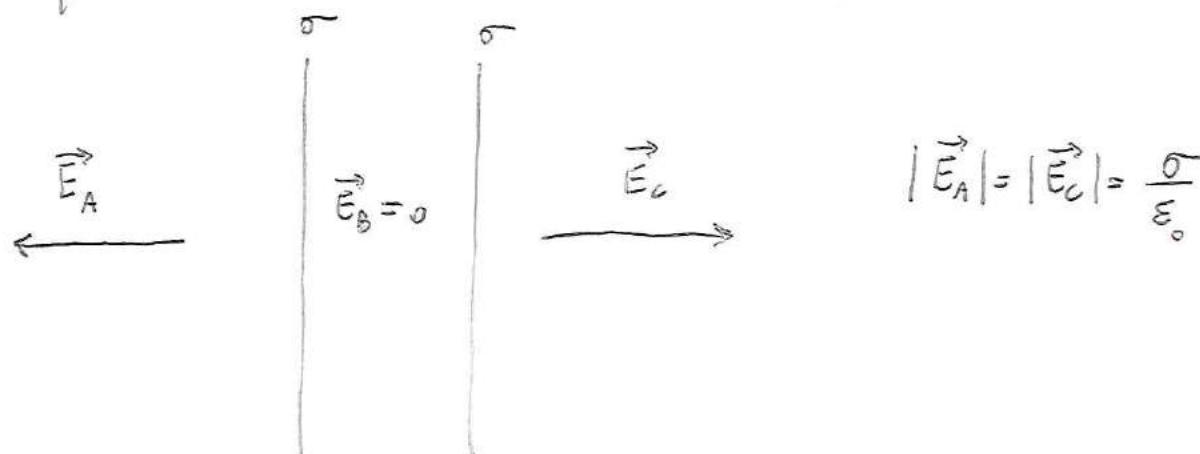
$$\vec{E}_{in}$$

(c)

$$\vec{E}_{TOT} = 0$$

$$|\vec{E}_{in}| = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

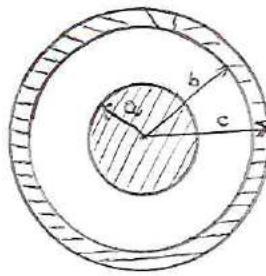
d) In questo caso la situazione e' la seguente:



$$|\vec{E}_A| = |\vec{E}_C| = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Una sfera piena, isolante, di raggio a ha una densità di
lume di carica uniforme e una carica totale Q . Concentrica
con questa sfera c'è presente una sfera cava conduttrice non
carica i cui raggi, interno ed esterno, sono rispettivamente
 b e c . Vogliamo determinare il comportamento delle cariche
e dei campi elettrici in ogni punto.

- a) Determinare la carica contenuta in una sfera di raggio $r < a$.
- b) Da questo valore, determinare il modulo del campo elettrico per $r < a$.
- c) Che carica c'è contenuta in una sfera di raggio r quando $a < r < b$?
- d) Da questo valore, determinare il modulo del campo elettrico per $a < r < b$.
- e) Adesso consideriamo r quando $b < r < c$. Quel è il modulo del campo elettrico per questo intervallo di valori di r ?
- f) Da questo valore, quale deve essere la carica sulla superficie interna della sfera cava?
- g) Del punto (f), quale deve essere la carica sulla superficie esterna della sfera cava?
- h) Si considerino le tre superfici sfliche di raggi a, b e c . Quali di queste superfici ha in modulo la maggior densità di carica superficiale?



- a) La densità di carica all'interno della sfera centrale piena isolante è costante e uniforme, per cui è uguale a:

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4\pi}{3} a^3} = \frac{3Q}{4\pi a^3}$$

Dunque le cariche contenute in una sfera di raggio $r < a$ è

$$q(r) = \rho V = \rho \cdot \frac{4\pi}{3} r^3 = \frac{3Q}{4\pi a^3} \cdot \frac{4\pi}{3} r^3, \text{ cioè}$$

$$q(r) = Q \left(\frac{r}{a} \right)^3$$

- b) Per simmetria, il campo elettrico all'interno delle sfere ha modulo costante su ogni superficie sferica di raggio r concentrica alla sfera isolante, ed è diretto radialmente verso l'esterno. Applicando il teorema di Gauss alla superficie sferica di raggio r , otteniamo:

$$\Phi_E(r) = \frac{q(r)}{\epsilon_0}, \text{ cioè: } 4\pi r^2 |\vec{E}(r)| = \frac{Q}{\epsilon_0} \frac{r^3}{a^3}, \text{ e quindi:}$$

$$|\vec{E}(r)| = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \frac{r}{a^3} \quad (r < a)$$

c) Una sfera di raggio r , con $a < r < b$, contiene una carica costante $q(r) = Q$

d) Dunque, applicando il teorema di Gauss a queste sfera, otteniamo:

$$\Phi_E(r) = \frac{q(r)}{\epsilon_0}, \text{ cioè } 4\pi r^2 |\vec{E}(r)| = \frac{Q}{\epsilon_0}, \text{ e quindi:}$$

$$|\vec{E}(r)| = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \quad (a < r < b)$$

e) Per $b < r < c$ ci troviamo all'interno dello strato sferico conduttore. All'equilibrio elettostatico risulta quindi

$$|\vec{E}(r)| = 0 \quad \text{per} \quad b < r < c$$

f) Applicando il teorema di Gauss a una superficie sferica di raggio r , con $b < r < c$, ottieniamo quindi

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0, \text{ per cui la carica complessivamente}$$

contenuta all'interno di queste superficie sferiche è nulla.

Dato che la carica elettrica nulla sfera isolante interna è Q ,

[dove pertanto deve essere presente una carica elettrica $-Q$ nulla]
superficie interna dello strato sferico conduttore.

g) Poiché lo strato sferico nel complesso ha carica nulla,
nella superficie esterna in $r=c$ deve trovarsi una
carica elettrica Q .

b) La densità di carica superficiale sulle sfere interne è infinitesima: infatti, se ρ è la densità di carica di volume le quantità di carica in uno strato sferico di spessore Δr vicino alla superficie esterna delle sfere è:

$$\Delta Q = \rho \cdot 4\pi a^2 \Delta r = \frac{3Q}{4\pi a^2} 4\pi a^2 \Delta r = 3 \frac{Q \Delta r}{a},$$

e la densità superficiale di carica è quindi:

$$\sigma_0 = \frac{\Delta Q}{4\pi a^2} = \frac{3Q \Delta r}{4\pi a^3}, \text{ quantità infinitesima per } \Delta r \rightarrow$$

La densità di carica superficiale sulle facce interne dello strato sferico conduttore è, in valore assoluto:

$$|\sigma_{int}| = \frac{Q}{4\pi b^2}$$

La densità di carica superficiale sulle facce esterne dello strato sferico conduttore è

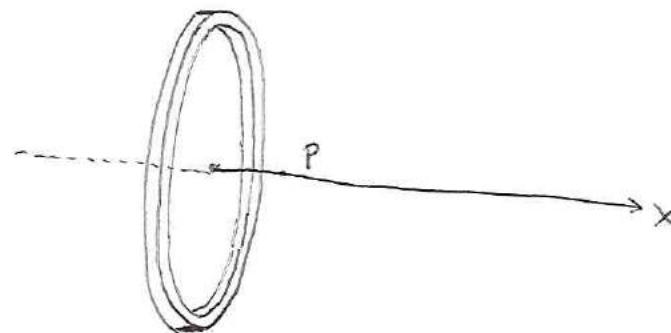
$$\sigma_{ext} = \frac{Q}{4\pi c^2}$$

Poiché $b < c$, risulta quindi $|\sigma_{int}| > \sigma_{ext} > \sigma_0$, gli cui le massime densità di carica superficiale si trovano sulle superficie interne dello strato sferico conduttore.

Una particella carica negativamente (carica $-q$) è posta al centro di un anello carico uniformemente; l'anello ha una carica totale positiva Q e raggio a ; sia m la massa della particella. Le particelle, costrette a muoversi lungo l'asse dell'anello, coincidente con l'asse x , viene spostata di un piccolo tratto $|x|$ lungo l'asse x (con $|x| \ll a$) e lasciata libera di muoversi.

Dimostrare che in questo limite le particelle segue un moto armonico semplice, di cui si dovrà di calcolare la frequenza.

—————/



Durante le lezioni abbiamo calcolato il campo elettrico generato da un anello carico in un punto P lungo il suo asse:

$$E_x = \frac{k_e x}{(a^2 + x^2)^{3/2}} Q$$

Dunque, le forze agente su una carica elettrica $-q$ posta nel punto P è:

$$F_x = -q E_x = -\frac{k_e x}{(a^2 + x^2)^{3/2}} q Q ,$$

e quindi, applicando la seconda legge delle dinamiche alla particella, ottieniamo:

$m \ddot{x} = F_x$, cioè:

$$m \ddot{x} = -\frac{k_e x}{(x^2 + a^2)^{3/2}} q Q$$

Se $|x| \ll a$, otteniamo quindi:

$$m \ddot{x} + \frac{k_e q Q}{a^3} x = 0, \quad \text{e quindi:}$$

$$\boxed{[x(t)]'' + \frac{k_e q Q}{m a^3} x(t) = 0}$$

equazione di un moto
armónico

La pulsazione del moto armónico è

$$\omega = \left(\frac{k_e q Q}{m a^3} \right)^{1/2}, \quad \text{e quindi la frequenza del
moto armónico è}$$

$$\boxed{f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{k_e q Q}{m a^3} \right)^{1/2}}$$

Una sfera di raggio $2a$

e' fatta con un materiale

non conduttore avente densita'

di carica volumica uniforme ρ

(si assume che il materiale non

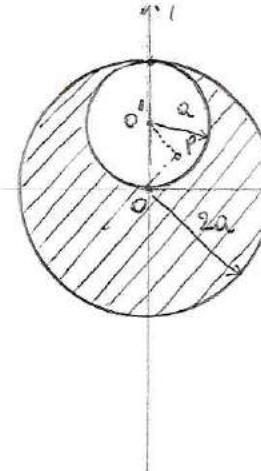
influisca il campo elettrico). Una cavita' sferica di raggio a viene "scavata" nella sfera come mostrato nella figura.

Si dimostri che il campo elettrico all'interno della cavita' e' uniforme, e se ne calcolino le componenti cartesiane.

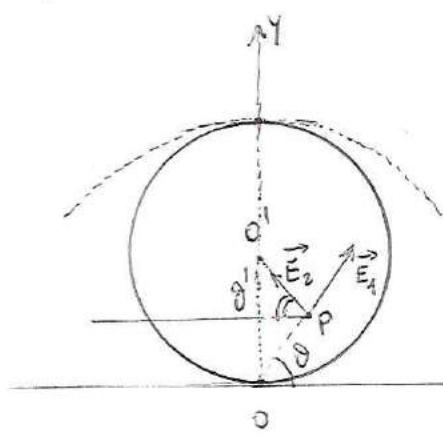
F-----

La distribuzione di carica elettrica delle sfere con le cavita' e' equivalente a quelle di una sfera piena di raggio $2a$ uniformemente carica sommate a quelle di una sfera piena di raggio a ritruota esternamente dove si trova la cavita', con densita' di carica volumica uniforme $-\rho$.

Dunque, il campo elettrico in un punto dello spazio e' dato dalla somma vettoriale del campo elettrico generato dalla sfera piena di raggio $2a$, con centro in $(0, 0, 0)$ e densita' di carica di volume uniforme ρ , e del campo elettrico generato dalla sfera piena di raggio a , con centro in $(0, a, 0)$ e densita' di carica di volume $-\rho$.



Celoliamo quindi il campo elettrico in un punto $P(x, y, z)$ tale che $x^2 + (y-a)^2 + z^2 < a^2$, cioè intorno alla cavità. Il problema presenta simmetria di rotazione attorno all'asse y , per cui risulta $E_z = E_x$ sulle base di queste proprietà è sufficiente quindi risolverlo nella sezione xy mostrata nelle figure. Risulta $\overline{OP} = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\overline{O'P} = \sqrt{x^2 + (y-a)^2}$



Indichiamo con \vec{E}_1 il contributo del campo elettrico in P dovuto alle sfera grande carica positivamente, e con \vec{E}_2 il contributo del campo elettrico in P dovuto alla sfera piccola carica negativamente. Risulta $|\vec{E}_1| = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\overline{OP}}{(2a)^3} =$

$$= \frac{4\pi}{3} (2a)^3 \rho \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overline{OP}}{(2a)^3} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \overline{OP};$$

$$|\vec{E}_2| = \dots \frac{\rho}{3\epsilon_0} \overline{O'P}, \quad \text{dove abbiamo utilizzato il risultato}$$

ottenuto a pag. ⑯ e abbiamo indicato con Q la carica elettrica totale delle sfera piccole di raggio $2a$.

Risulta poi (vedi figure): $\cos\vartheta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\sin\vartheta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$\cos\vartheta' = \frac{x}{\sqrt{x^2+(y-a)^2}}, \quad \sin\vartheta' = \frac{a-y}{\sqrt{x^2+(y-a)^2}}$$

Dunque, le componenti contenute dai campi elettrici sono:

$$E_{1,x} = |\vec{E}_1| \cos \vartheta = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \sqrt{x^2+y^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} x$$

$$E_{1,y} = |\vec{E}_1| \sin \vartheta = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \sqrt{x^2+y^2} \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} y$$

$$E_{2,x} = -|\vec{E}_2| \cos \vartheta' = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \sqrt{x^2+(y-a)^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+(y-a)^2}} = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} x$$

$$E_{2,y} = |\vec{E}_2| \sin \vartheta' = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \sqrt{x^2+(y-a)^2} \cdot \frac{a-y}{\sqrt{x^2+(y-a)^2}} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} (a-y)$$

Dunque otteniamo:

$$E_x = E_{1,x} + E_{2,x} = 0 = E_z$$

$$E_y = E_{1,y} + E_{2,y} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} a$$

Pertanto, nella cavità rimane

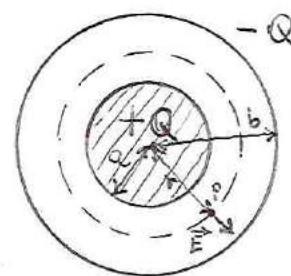
$$\boxed{\vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} a \hat{j}}, \quad \text{dove } |\vec{E}| = \frac{\rho}{3\epsilon_0} a \text{ (costante)}$$

\vec{E} e' uniforme nella cavita'.

Un condensatore sferico e' costituito da un guscio conduttore sferico di raggio b in cui e' depositata una carica elettrica $-Q$, concentrico con una sfera conduttrice piu' piccola, di raggio $a < b$, in cui e' depositata una carica elettrica $+Q$.

- Calcolare l'espressione della capacità del condensatore sferico.
- Calcolare il limite a cui tende la capacità del condensatore sferico per $b \rightarrow +\infty$.

- Calcoliamo il modulo del campo elettrico nelle regioni $a < r < b$ (cioe', nello spazio tra le due armature), usando



il teorema di Gauss per una superficie sferica di raggio r concentrica con le due armature. Osserviamo che \vec{E} e' diretto radialmente per ragioni di simmetria del problema, e che $|\vec{E}|$ e' costante su ogni superficie sferica di raggio r nello spazio tra le due armature. Dunque risulta:

$$4\pi r^2 |\vec{E}| = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow |\vec{E}(r)| = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2}$$

Poniamo quindi calcolare le differenze di potenziale tra l'ernestina interna positiva e l'ernestina esterna negativa:

Va:

$$V_{in} - V_{out} = \int_a^b |\vec{E}(r)| dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{1}{r^2} dr = \\ = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r} \Big|_a^b \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

Per tanto, la capacità del condensatore sferico è:

$$\boxed{C = \frac{Q}{V_{in} - V_{out}} = \frac{4\pi\epsilon_0}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} = 4\pi\epsilon_0 \left(\frac{ab}{b-a} \right)}$$

b) Risultato

$$\boxed{\lim_{b \rightarrow \infty} C = 4\pi\epsilon_0 a}$$

Una particella di massa m_1 e carica positiva q_1 e' lanciata in linea retta con velocità v nel verso positivo delle x da distanza molto grande, verso una seconda particella, inizialmente in quiete ma libera di muoversi, di massa m_2 e carica positiva q_2 . Entrambe le particelle sono vincolate a muoversi lungo l'asse x .

a) Nell'intante in cui le due cariche sono alla minima distanza esse hanno le medesime velocità. Trovare queste velocità.

b) Trovare la distanza minima tra le due cariche.

Dopo l'interazione, le due particelle si allontanano nuovamente. Quando la distanza tra loro e' molto grande, trovare le velocità.

c) delle particelle di massa m_1 ,

d) delle particelle di massa m_2 .



a) Le due particelle costituiscono un sistema isolato, per cui la velocità del loro centro di massa resta costante durante il moto del sistema. Nell'intante in cui le due cariche hanno le stesse velocità, questa velocità coincide con la velocità del centro di massa del sistema.

Poiché \vec{V}_{CM} è costante per il motivo spiegato in precedenza, $|\vec{V}_{CM}|$ può essere calcolato utilizzando i dati iniziali del problema:

$$\vec{V}_{CM} = |\vec{V}_{CM}| \hat{i} = \left(\frac{m_1 v}{m_1 + m_2} \right) \hat{i}$$

b) Poiché la forza elettrostatica è conservativa, l'energia totale del sistema si conserva durante il moto del sistema.

Inizialmente risulta: $K_{TOT,i} = \frac{1}{2} m_1 v^2$, $U_i = 0$,

poiché la particella di massa m_2 è ferma e la distanza tra le due particelle è molto grande.

Nell'istante in cui le due particelle raggiungono la minima distanza d risulta:

$$K_{TOT,f} = \frac{1}{2} m_1 V_{CM}^2 + \frac{1}{2} m_2 V_{CM}^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V_{CM}^2 = \frac{m_1^2 v^2}{2(m_1 + m_2)}$$

$$U_f = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{d}$$

Per la conservazione dell'energia deve risultare:

$$E_{TOT,f} = E_{TOT,i} \Rightarrow \frac{m_1^2 v^2}{2(m_1 + m_2)} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{d} = \frac{1}{2} m_1 v_i^2$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{d} = \frac{1}{2} m_1 V^2 - \frac{m_1^2 V^2}{2(m_1 + m_2)}$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{d} = \frac{1}{2} m_1 V^2 \left[1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \right]$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{d} = \frac{1}{2} m_1 V^2 \left(\frac{m_1 + m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right)$$

$$\frac{1}{2 \cancel{\pi\epsilon_0}} \frac{q_1 q_2}{d} = \frac{1}{2} \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right) V^2, \quad \text{e quindi:}$$

$$d = \frac{q_1 q_2}{2 \pi \epsilon_0} \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \right) \frac{1}{V^2}$$

c), d) L'intero processo, tra l'istante iniziale e l'istante finale, e' assimileabile a un moto unidimensionale elastico, in quanto le forze agenti sulle particelle durante l'interazione sono conservative. Dunque le velocita' finali sono (tenuto conto che la particella 2 e' inizialmente in quiete):

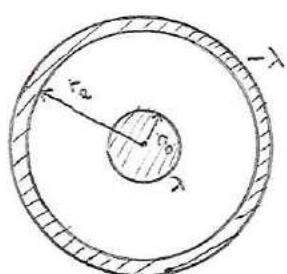
$$v_{1f,x} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) v$$

$$v_{2f,x} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right) v$$

Un tubo di Geiger-Müller (contatore Geiger) è un rivelatore di radiazioni che consiste essenzialmente di un cilindro metallico cavo e chiuso (il catodo) di raggio interno r_a , e di un filo cilindrico centrale (l'anodo) di raggio r_b . La carica per unità di lunghezza nell'anodo è λ , e la carica per unità di lunghezza sul catodo è $-\lambda$. Un gas riempie lo spazio fra gli elettri di. Quando il tubo è in uso e una particella elementare carica di alto energia passa attraverso questo spazio, essa può ionizzare un atomo del gas. Il forte campo elettrico fa sì che la ione e l'elettrone vengano accelerati in versi opposti.

Entra intanto altre molecole del gas ionizzandole, producendo uno sciamone di cariche elettriche. L'impulso di corrente elettrica fra il filo e il cilindro viene conteggiato da un circuito esterno.

- Calcolare le differenze di potenziale tra il filo e il cilindro.
- Calcolare il modulo del campo elettrico nello spazio tra il catodo e l'anodo.



"Nel corso delle lezioni abbiamo calcolato la capacità per unità di lunghezza di un condensatore cilindrico di raggio interno r_b e raggio esterno r_e :

$$\frac{C}{l} = \frac{1}{2k_e \ln\left(\frac{r_e}{r_b}\right)} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln\left(\frac{r_e}{r_b}\right)}$$

La struttura di un contatore Geiger è analoga a quella di un condensatore cilindrico; se λ è la carica per unità di lunghezza accumulata nel condensatore, e se $C = \frac{Q}{\Delta V}$ è la relazione tra la capacità, la carica totale accumulata Q e la differenza di potenziale ΔV fra le armature, allora risultate

$$\frac{C}{l} = \frac{\lambda}{\Delta V}, \quad \text{da cui si ottiene:}$$

$$\boxed{\Delta V = \frac{\lambda}{\frac{C}{l}} = 2k_e \lambda \ln\left(\frac{r_e}{r_b}\right) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_e}{r_b}\right)}$$

b) Nell'ultimo sette e mezzo tempo abbiamo ricevuto l'espressione del modulo del campo elettrico nello spazio fra le due armature:

$$E = 2k_e \lambda \cdot \frac{1}{r}, \quad \text{usando il teorema di Gauss,}$$

nella riporta al punto (a) abbiamo ottenuto la relazione

$$2k_e \lambda = \frac{\Delta V}{\ln(r_e/r_b)}, \quad \text{per cui poniamo inoltre}$$

$$\boxed{E = \frac{\Delta V}{\ln(r_e/r_b)} \cdot \left(\frac{1}{r}\right)}$$

Serway, pr. 20.78.

Calcolare il lavoro che deve essere svolto per caricare un guscio sferico di raggio R con una carica complessiva pari a Q .

Supponiamo che sul guscio sferico sia depositata una carica q all'interno t ; il potenziale elettrico sulla superficie sferica è:

$$V(q) = \frac{l}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{R}$$

Il lavoro necessario per portare una carica Δq dall'infinito alla superficie sferica è quindi:

$$\Delta W = V(q) \cdot \Delta q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R} \Delta q$$

Dunque, il lavoro necessario per caricare completamente il guscio sferico, inizialmente scarico, con una carica Q , è:

$$W = \int_0^Q \frac{l}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R} dq = \frac{l}{4\pi\epsilon_0 R} \int_0^Q q dq = \frac{l}{4\pi\epsilon_0 R} \frac{q^2}{2} \Big|_0^Q, \text{ cioè}$$

$$W = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R} = \frac{k_e Q^2}{2R}$$

Un condensatore piano con capacità $C = 2 \text{ nF}$ è caricato a una differenza di potenziale iniziale $\Delta V_i = 100 \text{ V}$ e poi isolato.

Il materiale dielettrico fra le armature è mica, con costante dielettrica relativa $\epsilon_r = 5$.

- Quanto lavoro è necessario per allontanare il foglio di mica?
- Qual è la differenza di potenziale del condensatore dopo l'estrazione della mica?

-----/

- Le cariche elettriche accumulate nel condensatore è

$$Q_0 = C \Delta V_i = 200 \text{ nC}$$

Dato che il condensatore viene isolato una volta che è stato caricato, le cariche nel condensatore si conservano.

L'energia accumulata inizialmente nel condensatore è:

$$U_i = \frac{Q_0^2}{2C} = \frac{Q_0^2}{2\epsilon_r C_0} = \frac{1}{2} C (\Delta V_i)^2 \quad \text{essendo } C = \epsilon_r C_0, \text{ dove } C_0 \text{ è la capacità del condensatore in assenza di dielettrico tra le armature}$$

Dopo che il materiale dielettrico è stato interamente estraatto, l'energia accumulata nel condensatore è

$$U_f = \frac{Q_0^2}{2C_0} = \frac{C^2 (\Delta V_i)^2}{2 \cancel{C}/\epsilon_r} = \frac{1}{2} \epsilon_r C (\Delta V_i)^2$$

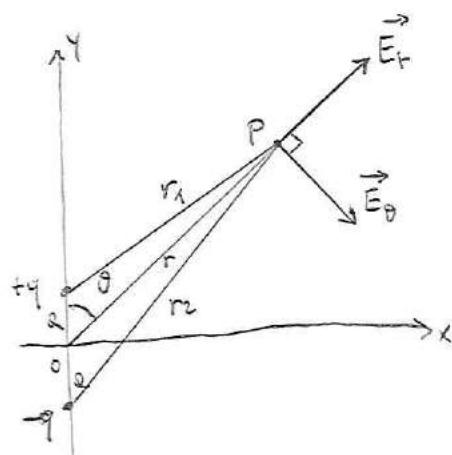
Dunque, il lavoro necessario per estrarre il foglio di nissc del condensatore è:

$$W = U_f - U_i = \frac{1}{2} (\epsilon_r - 1) C (\Delta V_i)^2 = \frac{1}{2} \cdot (5-1) \cdot (2 \times 10^{-9} F) \cdot (100 V)^2 = \\ = 4 \times 10^{-5} J = 40 \mu J$$

b) Dopo l'estrazione del foglio di nissc risulta:

$$\Delta V_f = \frac{Q_0}{C_0} = \frac{C \Delta V_i}{\epsilon_r \epsilon_0} = \epsilon_r \Delta V_i = 5 \times 100 V = 500 V$$

Un doppio elettrico è posto lungo l'asse y , come schematizzato nella figura.



Il modulo del suo momento di doppio elettrico è definito da $p = |\vec{p}| = 2qa$

a) Nel punto P , lontano del doppio ($r \gg a$), calcolare il potenziale elettrico.

b) Calcolare le componenti radiale E_r e la componente perpendicolare E_θ del campo elettrico nel punto P . Vedi la legge

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} .$$

Questi risultati sembrano ragionevoli per

c) $\theta = 90^\circ$ e $\theta = 0^\circ$?

d) Per $r=0$?

e) Per il doppio in esame, esprimere V in funzione delle coordinate cartesiane.

f) Usando questi risultati e ponendo ancora $r \gg a$, calcolare le componenti E_x e E_y del campo elettrico.

a) Dalle geometrie del sistema, per il teorema del coseno si ha

$$r_1 = \sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos\theta} ; \quad r_2 = \sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos(\pi - \theta)} = \\ = \sqrt{r^2 + a^2 + 2ar \cos\theta}$$

Il potenziale nel punto P è:

$$V(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos\theta}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2 + 2ar \cos\theta}} \right] = \\ = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{a}{r}\right)^2 - 2\frac{a}{r} \cos\theta}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{a}{r}\right)^2 + 2\frac{a}{r} \cos\theta}} \right] = \\ = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \left\{ \left[1 + \left(\frac{a}{r}\right)^2 - 2\frac{a}{r} \cos\theta \right]^{-\frac{1}{2}} - \left[1 + \left(\frac{a}{r}\right)^2 + 2\frac{a}{r} \cos\theta \right]^{-\frac{1}{2}} \right\}$$

A questo punto usiamo l'approssimazione

$(1+x)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{1}{2}x$ per $|x| \ll 1$, trascurando i termini di ordine $(\frac{a}{r})^2$ rispetto ai termini di ordine $(\frac{a}{r})$ per $r \gg a$. Risulta quindi:

$$V(r, \theta) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \left\{ 1 + \frac{a}{r} \cos\theta - 1 + \frac{a}{r} \cos\theta \right\}, \text{ e quindi:}$$

$$V(r, \theta) = \frac{l}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2qa \cos\theta}{r^2} = \frac{l}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p \cos\theta}{r^2}, \text{ posto } p = 2qa$$

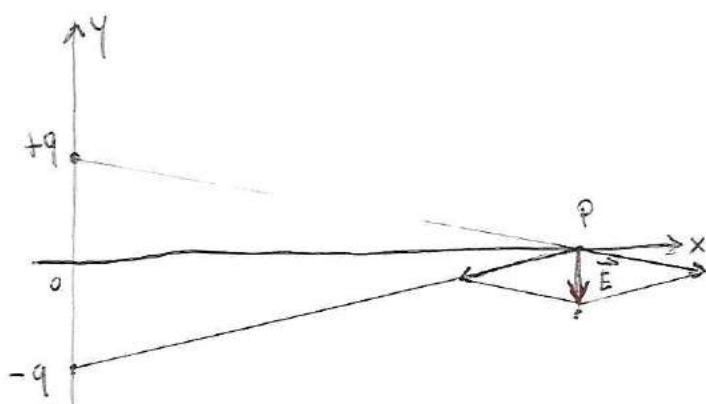
b) Calcoliamo le componenti E_r e E_θ del campo elettrico e partire dal risultato del punto (a), valido per $r \gg a$:

$$E_r = -\frac{\partial V(r, \theta)}{\partial r} = -\frac{P \cos \theta}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^2} \right) = \frac{2P \cos \theta}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^3}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial V(r, \theta)}{\partial \theta} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{P}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} (\cos \theta) = \frac{P \sin \theta}{4\pi \epsilon_0 r^3}$$

c) Per $\theta = 90^\circ$ risulta $E_r(\theta = 90^\circ) = 0$; $E_\theta(\theta = 90^\circ) = \frac{P}{4\pi \epsilon_0 r^3}$

Questo risultato è ragionevole: per $\theta = 90^\circ$ il punto P si trova sull'asse x, a uguali distanze dalle due cariche, e a causa del segno opposto delle due cariche la componente radiale del campo elettrico è nulla; resta la sola componente perpendicolare.



Per $\theta = 0^\circ$ risulta $E_r(\theta = 0^\circ) = \frac{2P}{4\pi \epsilon_0 r^3}$; $E_\theta(\theta = 0^\circ) = 0$

Anche questo risultato è ragionevole: per $\theta = 0^\circ$ il punto P si trova sull'asse y nelle rette lungo le quali si trovano le due cariche, per cui la componente perpendicolare del campo elettrico è nulla.

d) Per $r=0$ il risultato trovato al punto a) e al punto b) non è valido, in quanto i calcoli sono stati fatti nel limite $r \gg a$

e) In coordinate cartesiane, per un punto P nel piano (x, y) , risulta:

$$r_1 = \sqrt{x^2 + (y-a)^2} \quad r_2 = \sqrt{x^2 + (y+a)^2}$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2} \quad \text{GSD} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Il potenziale nel punto P, in coordinate cartesiane, è quindi

$$\boxed{V(x, y) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2+(y-a)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+(y+a)^2}} \right]}$$

f) Per $r \gg a$, cioè per $x^2+y^2 \gg a^2$, risulta:

$$\begin{aligned} x^2 + (y-a)^2 &= x^2 + y^2 - 2ay + a^2 = \\ &= (x^2+y^2) \left(1 - \frac{2ay}{x^2+y^2} + \frac{a^2}{x^2+y^2} \right) \approx (x^2+y^2) \left(1 - \frac{2ay}{x^2+y^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 + (y+a)^2 &= x^2 + y^2 + 2ay + a^2 = \\ &= (x^2+y^2) \left(1 + \frac{2ay}{x^2+y^2} + \frac{a^2}{x^2+y^2} \right) \approx (x^2+y^2) \left(1 + \frac{2ay}{x^2+y^2} \right) \end{aligned}$$

Dunque, risulta, nel limite $r \gg a$:

$$V(x, y) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \left[\left(1 - \frac{2ay}{x^2+y^2} \right)^{-\frac{1}{2}} - \left(1 + \frac{2ay}{x^2+y^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] \approx$$

$$\approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \left[\sqrt{1 + \frac{xy}{x^2+y^2}} - \sqrt{1 + \frac{-xy}{x^2+y^2}} \right], \text{ e quindi risulta:}$$

$$V(x,y) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2xy}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Py}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$P = 2qa$$

A questo punto poniamo calcolare le componenti di \vec{E} lungo gli assi x e y :

$$E_x = - \frac{\partial V(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{3}{2} \frac{Py}{(x^2+y^2)^{5/2}} \cdot x = \frac{3Px^2y}{4\pi\epsilon_0 (x^2+y^2)^{5/2}}$$

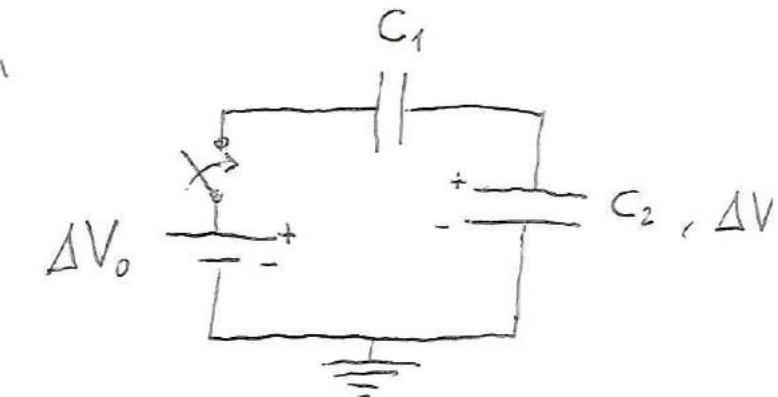
$$E_y = - \frac{\partial V(x,y)}{\partial y} = \frac{P}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}} + \frac{3}{2} \frac{y \cdot Px}{(x^2+y^2)^{5/2}} \right] =$$

$$= \frac{P}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}} + \frac{3y^2}{(x^2+y^2)^{5/2}} \right] =$$

$$= \frac{P}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3y^2}{(x^2+y^2)^{5/2}} - \frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}} \right]$$

Un condensatore avente capacità

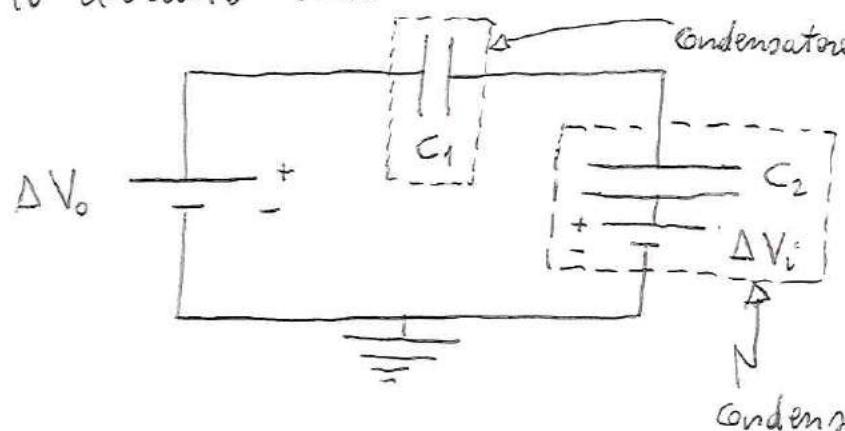
$C_2 = 10 \mu F$ è caricato con una differenza di potenziale tra le armature $\Delta V_i = 15 V$.



Viene poi collegato in serie con un condensatore serico avente capacità $C_1 = 5 \mu F$. Infine, i due condensatori collegati in serie vengono collegati a una batteria ai cui capi è impostata una differenza di potenziale $\Delta V_0 = 50 V$ (vedi figura). Trovare le differenze di potenziale ai capi dei due condensatori dopo che l'interruttore è stato chiuso.



Il condensatore inizialmente caricato con una differenza di potenziale ΔV_i tra le armature è equivalente a un condensatore di capacità C_2 inizialmente scarico, in serie con una batteria che ha ai suoi capi una differenza di potenziale ΔV_0 . Dunque, dopo la chiusura dell'interruttore, il circuito schematizzato in alto equivale al seguente:



dove C_1 e C_2 sono due condensatori inizialmente scarichi.

condensatore 2

Seguendo il ragionamento fatto per il caso di due condensatori inizialmente scesi chi collegati in serie, e se indichiamo con Q_1 e Q_2 le cariche accumulate rispettivamente sul condensatore C_1 e sul condensatore C_2 all'equilibrio, deve risultare $Q_1 = Q_2 = Q$.

Inoltre, tenuto conto dello schema del circuito, deve risultare

$$\Delta V_o - \frac{Q}{C_1} - \frac{Q}{C_2} = \Delta V_i$$

Da queste ultime equazioni ottieniamo:

$$\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) Q = \Delta V_o - \Delta V_i, \text{ e quindi risulta:}$$

$$Q = \frac{\Delta V_o - \Delta V_i}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

Pertanto, le differenze di potenziale ai capi dei due condensatori all'equilibrio sono (tenuto conto delle cariche iniziali del condensatore 2):

$$\Delta V_1 = \frac{Q}{C_1} = \frac{\Delta V_o - \Delta V_i}{1 + \frac{C_1}{C_2}} = \frac{35 \text{ V}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \cdot 35 \text{ V} = 23,33 \text{ V}$$

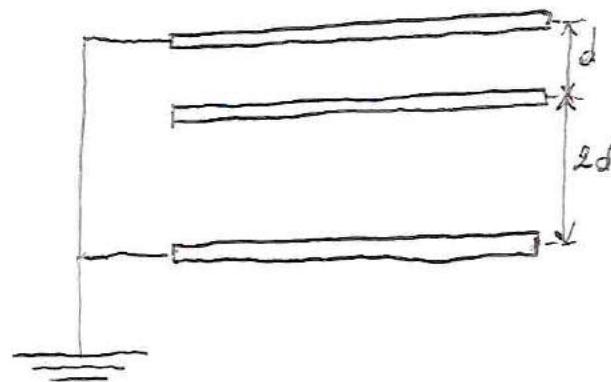
$$\Delta V_2 = \frac{Q}{C_2} + \Delta V_i = \frac{\Delta V_o - \Delta V_i}{1 + \frac{C_2}{C_1}} + \Delta V_i = \frac{35 \text{ V}}{3} + 15 \text{ V} = 26,67 \text{ V}$$

Due larghe piastre di metallo, ognuna di area A , sono orientate orizzontalmente e separate da una distanza $3d$.

Un conduttore collega tra loro le due piastre ed è collegato a terra, e inizialmente le due piastre sono scariche.

Successivamente, una terza piastra identica alle prime due ma con una carica Q depositata su di essa viene inserita tra le due piastre, parallelamente a esse e posta a una distanza d dalla cernitina superiore.

a) Quanto vale la carica indotta che compare su ciascuna delle due piastre?



b) Quanto vale la differenza di potenziale tra la piastra centrale e ciascuna delle altre due piastre?

a)
All'equilibrio, sulle facce superiore delle piastre centrali sono depositate una carica Q_1 , e sulle facce inferiori una carica Q_2 , in modo che $Q_1 + Q_2 = Q$ per la conservazione della carica elettrica totale nelle piastre centrali infilata. Di conseguenza, all'equilibrio sulle piastre in alto dovrà esserci una carica $-Q_1$, e sulle piastre in basso una carica $-Q_2$.

Inoltre, poiché le piastre in alto e le piastre in basso si trovano allo stesso potenziale, le differenze di potenziale tra le piastre centrali e le piastre in alto è uguale alle differenze di potenziale tra le piastre centrali e le piastre in basso. Infine, sappiamo che le due opposte piastre centrale - piastre superiore e piastre centrale - piastre inferiore sono due condensatori pieni.

Allora vale il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} Q_1 + Q_2 = Q \\ \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2} \end{cases}, \quad \text{con } C_1 = \epsilon_0 \frac{A}{d}, \quad C_2 = \epsilon_0 \frac{A}{2d}, \\ \text{cioè } C_2 = \frac{1}{2} C_1$$

$$\text{Allora: } \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2} \Rightarrow \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_{1/2}} \Rightarrow \frac{Q_1}{C_1} = \frac{2Q_2}{\epsilon_0 A}$$

$$\Rightarrow Q_1 = 2Q_2, \quad \text{e dalla prima equazione del}$$

sistema ottieniamo:

$$2Q_2 + Q_2 = Q \Rightarrow 3Q_2 = Q \Rightarrow Q_2 = \frac{1}{3}Q$$

$$\text{Dunque: } Q_1 = \frac{2}{3}Q; \quad Q_2 = \frac{1}{3}Q, \quad \text{e quindi,}$$

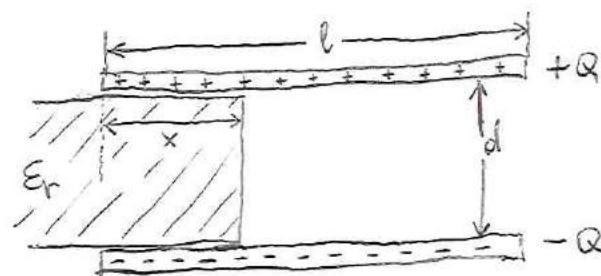
sulla piastre superiore viene indotta la carica $-Q_1 = -\frac{2}{3}Q$, e sulla piastre inferiore viene indotta la carica $-Q_2 = -\frac{1}{3}Q$

b) La differenza di potenziale tra le piastre centrali e ciascuna delle altre due piastre e' quindi:

$$\Delta V_1 = \Delta V_2 = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{\frac{2}{3}Q}{\epsilon_0 \frac{A}{d}} = \frac{\epsilon Q d}{3 \epsilon_0 A}$$

Serway, pr. 20.85

Un condensatore e' costruito con due piastrine quadrate di lato l , e distanti d . Il condensatore viene caricato con cariche $+Q$ e $-Q$ e poi isolato. Un materiale con costante dielettrica relativa ϵ_r viene inserito fra le piastrine per un treno di lunghezza x (vedi figura). Si assume che risulti $d \ll x$.



- Trovare la capacità equivalente del dispositivo.
- Calcolare l'energia immagazzinata nel condensatore.
- Trovare il verso e il modulo delle forze esercitate dalle armature sul dielettrico.
- Calcolare il valore numerico per le forze, assumendo che:

$x = \frac{l}{2}$; $l = 5 \text{ cm}$; $d = 2 \text{ mm}$; il dielettrico e' vetro ($\epsilon_r = 4,5$); il condensatore inizialmente e' stato caricato applicando una differenza di potenziale fra le due armature $\Delta V = 2 \times 10^3 \text{ V}$ prima dell'inserimento del dielettrico.

a) Il sistema schematizzato nelle figure e pag. 41 puo' essere considerato come due condensatori collegati in parallelo: uno con il dielettrico tra le due armature, e uno senza il dielettrico. L'area delle perte di condensatore con il dielettrico e' pari a una frazione $\frac{x}{l}$ dell'area delle piazzette, e quindi l'area delle perte di condensatore senza il dielettrico e' pari a una frazione $1 - \frac{x}{l}$ dell'area delle piazzette. La capacità delle perte di condensatore con il dielettrico e' quindi:

$$C_1 = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A_1}{d} = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{l}{d} \cdot \frac{x}{l} \cdot l^2 = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{l}{d} x$$

La capacità delle perte di condensatore senza il dielettrico e' allora:

$$C_2 = \epsilon_0 \frac{A_2}{d} = \epsilon_0 \frac{l}{d} \cdot \left(1 - \frac{x}{l}\right) l^2 = \epsilon_0 \frac{l}{d} (l-x)$$

La capacità equivalente del dispositivo e', quindi:

$$C_{eq} = C_1 + C_2 = \epsilon_0 \frac{l}{d} \left(\epsilon_r x + l - x \right) = \epsilon_0 \frac{l}{d} [l + (\epsilon_r - 1)x]$$

b) L'energia immagazzinata nel condensatore e' allora:

$$U_E = \frac{Q^2}{2 C_{eq}} = \frac{Q^2 d}{2 \epsilon_0 l [l + (\epsilon_r - 1)x]}$$

c) Al crescere di x , U_E decresce, quindi le forze che le ormetate esercitano sul dielettrico e' dirette nel verso entrante, cioè tende a "rimuovere" il dielettrico verso l'interno del condensatore, lungo l'asse orizzontale x .

Risulta quindi:

$$F_x = -[U_E(x)]' = \frac{Q^2 d}{2 \epsilon_0 l} \frac{\epsilon_r - 1}{[l + (\epsilon_r - 1)x]^2}$$

d) Dai dati forniti del testo del problema poniamo ricavare anzitutto la carica sul condensatore:

$$Q = C_0 \Delta V = \epsilon_0 \frac{l^2}{d} \Delta V$$

Pertanto, la forza agente sul dielettrico e':

$$F_x = \frac{\epsilon_0 l^3 (\Delta V)^2}{d^2} \frac{d}{2 \epsilon_0 l} \frac{\epsilon_r - 1}{[l + (\epsilon_r - 1)x]^2} =$$

$$= \frac{\epsilon_0 l^3 (\Delta V)^2}{2d} \frac{\epsilon_r - 1}{[l + (\epsilon_r - 1)x]^2} = \frac{(8,854187817 \times 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2})(0,05m)^3 (2 \times 10^3 V)^2}{2 \cdot (2 \times 10^{-3} m) [0,05m + (4,5 - 1) \cdot (0,025m)]^2}$$

$$= 2,048903 \times 10^{-4} N = 204,8903 \mu N$$

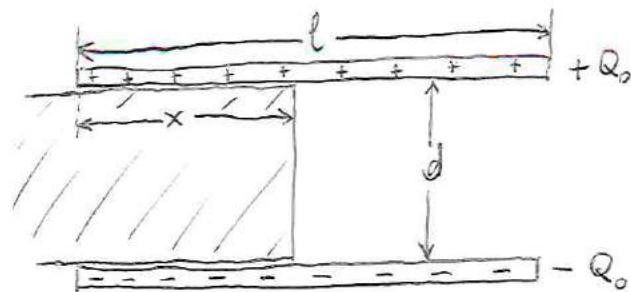
Fig.

Due piastre quadrate di lato l sono poste parallellamente l'una rispetto all'altra con

una separazione d (vedi figura). Si può assumere $d \ll l$.

Le armature del condensatore sono caricate uniformemente con cariche $+Q_0$ e $-Q_0$. Un blocco di metallo ha lunghezze lunghezze l e spessore leggermente inferiore a d . Viene inserito per un tratto di lunghezza x all'interno delle armature. Le cariche sulle piastre rimangono distribuite uniformemente quando il blocco scivola all'interno. In una situazione statica, un metallo impedisce che al suo interno penetri un campo elettrico.

- Calcolare l'energia immagazzinata in funzione di x .
- Trovare la direzione, il verso e il modulo delle forze che agiscono sul blocco metallico.
- L'area delle facce del blocco che avanza tra le due armature è essenzialmente uguale a ld . Considerando che le forze sul blocco agiscono su questa faccia, trovare lo "sfogo" (forza per unità di superficie) su di essa.
- Esprire la densità di energia del campo elettrico fra le armature del condensatore in funzione di Q_0 , l , d e ϵ_0 .
- Spiegare come le risposte alle domande (c) e (d) sono collegate l'una all'altra.



a) Poiché c'è presente un campo elettrico solo nelle regioni di spazio in cui non c'è il conduttore, l'energia immagazzinata nel condensatore è immagazzinata solo in tale regione.
La densità di carica sulla smetura positiva è

$$\sigma = \frac{Q_0}{l^2}, \quad \text{per cui (essendo } \sigma \text{ costante su tutta}$$

la testa) la carica che si trova nella parte di condensatore in cui non c'è il conduttore tra le due smenture

$$\text{è } Q = \frac{Q_0}{l^2} \cdot R(l-x) = \frac{Q_0}{l}(l-x)$$

La capacità di queste parti del condensatore è:

$$C = \epsilon_0 \frac{l(l-x)}{d}, \quad \text{per cui l'energia accumulata è}$$

$$\boxed{U_E(x) = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q_0^2}{l^2} \frac{(l-x)^2}{\epsilon_0 l (l-x)} = \frac{\epsilon_0 d}{2 \epsilon_0 l^3} (l-x)}$$

b) Poiché $U_E(x)$ decresce al crescere di x , sul blocco metallico agisce una forza che tende a "rimuoverlo" verso l'interno delle smenture tra le due smenture. La forza è diretta quindi orizzontalmente verso destra nelle figure e pag. 44.

Risulta quindi:

$$\boxed{F_x = -[U_E(x)]' = \frac{\epsilon_0 d}{2 \epsilon_0 l^3}}$$

c) Dunque, la forza per unità di superficie agente sulle facce del blocco che sta avanzando tra le due armature è:

$$\boxed{P = \frac{F_x}{l d} = \frac{Q_0^2}{2 \epsilon_0 l^4}}$$

d) La densità di energia del campo elettrico fra le armature del condensatore è:

$$\boxed{U_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 |\vec{E}|^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \cdot \left(\frac{\sigma}{\epsilon_0}\right)^2 = \frac{\sigma^2}{2 \epsilon_0} = \\ = \frac{1}{2 \epsilon_0} \frac{Q_0^2}{l^4} = \frac{Q_0^2}{2 \epsilon_0 l^4}}$$

e) Si ottiene immediatamente che risulta $P = U_E$.

Vediamo perché queste uguaglianze si verifichino.

Risulta infatti: $U_E = \frac{\Delta V_E}{\Delta V}$ all'interno della regione in cui c'è presente il campo elettrico fra le armature del condensatore. Se come elemento di volume consideriamo una sottile striscia verticale, di spessore Δx lungo l'asse orizzontale, osserviamo che a un aumento Δx del treno di condutture inserito fra le due armature corrisponde una diminuzione del volume in cui c'è presente il campo elettrico pari a $l d \Delta x$ (in valore assoluto), cioè risulta

$$\Delta V = -l d \Delta x$$

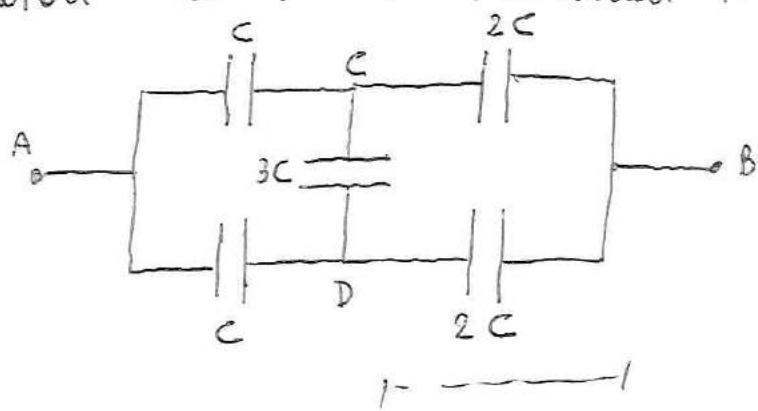
Dunque risulta:

$$u_E = -\frac{1}{ld} \frac{\Delta U_E}{\Delta x}, \text{ che per } \Delta x \text{ piccolo diventa}$$

$$u_E = \frac{F_x}{ld} = \rho, \text{ e questo giustifica l'uguaglianza tra le risposte ai punti (c) e (d) del problema.}$$

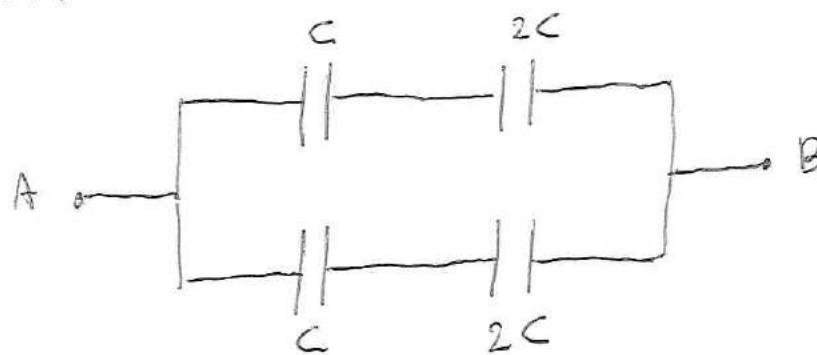
Serway, pr. 20.87

Determinare le capacità equivalenti delle seguenti reti di condensatori tra i due terminali A e B:



Osserviamo preliminarmente che queste reti di condensatori con le geometrie e i valori di capacità indicati, è simmetrica rispetto alle reti orizzontali presenti per i terminali A e B. In particolare, proprio a causa di questa simmetria, a ogni istante i punti C e D non traranno allo stesso potenziale, per cui nel condensatore centrale di capacità $3C$ le cariche accumulate saranno nulli a ogni istante. Pertanto possiamo escludere questo condensatore nel calcolo delle capacità equivalenti.

Dunque, occorre calcolare le capacità equivalenti delle seguenti reti di condensatori:



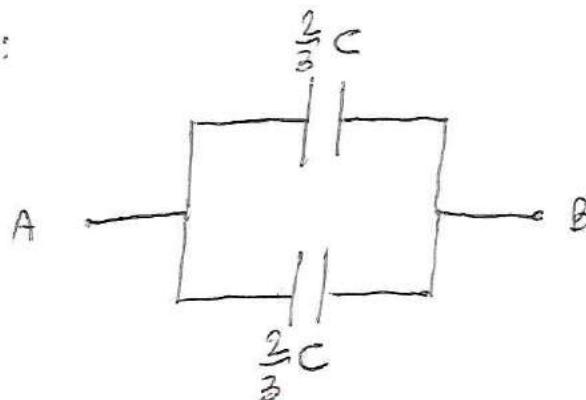
La capacità equivalente del ramo superiore è

$$C_{\text{sup}} = \frac{1}{\frac{1}{C} + \frac{1}{2C}} = \frac{1}{\frac{3}{2C}} = \frac{2}{3}C, \quad \text{in quanto}$$

è costituito da due condensatori collegati in serie, di capacità C e $2C$.

Il ramo inferiore è identico al ramo superiore, per cui risulta $C_{\text{inf}} = C_{\text{sup}} = \frac{2}{3}C$

Pertanto la rete si riduce al collegamento in parallelo seguente:



la cui capacità equivalente è

$$C_{\text{eq}} = \frac{2}{3}C + \frac{2}{3}C = \frac{4}{3}C$$

Un filo cilindrico rettilineo che giace lungo l'asse x ha una lunghezza L e un diametro d . Esso è costituito da un materiale ohmico

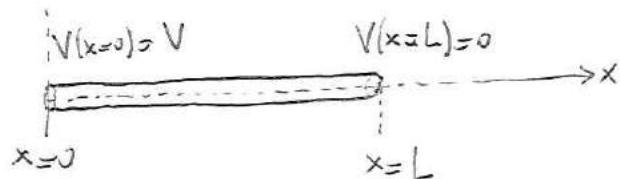
di resistività ρ . Si assume che un potenziale V sia mantenuto in $x=0$, e che il potenziale sia zero in $x=L$.

In funzione di L , d , V , ρ e delle costanti fisiche, derivare un'espressione per

- il modulo e il verso del campo elettrico nel filo,
- la resistenza del filo,
- il valore assoluto e il segno della corrente elettrica nel filo,
- la densità di corrente nel filo.



a)



Risultato $V(x=0) - V(x=L) = E_x \cdot L$, per cui $E_x = \frac{V}{L}$, e

stesso

$$\vec{E} = \frac{V}{L} \hat{i}$$

b) Risultato

$$R = \rho \frac{L}{A} = \rho \frac{L}{\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \frac{4\rho L}{\pi d^2}$$

- c) Se $V > 0$, la corrente scorre verso destra;
 se $V < 0$, la corrente scorre verso sinistra.

Per la legge di Ohm risulta:

$$\boxed{I = \frac{V}{R} = \frac{\pi d^2 V}{4 \rho L}}$$

- d) La densità di corrente nel filo è:

$$\boxed{J = |\vec{J}| = \frac{|I|}{\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \frac{\pi d^2 |V|}{4 \rho L} \frac{A}{\pi d^2} = \frac{|V|}{\rho L} = \frac{|\vec{E}|}{\rho}}$$

Vede la relazione vettoriale $\vec{J} = \frac{l}{\rho} \vec{E}$.

Un oceanografo sta studiando come la concentrazione di ioni nell'acqua di mare dipende dalle profondità.

Esegue delle misure immergendo nell'acqua una coppia di cilindri metallici concentrici (vedi figura) all'estremo di un cavo e prendendo dati per determinare le resistenze fra questi elettrodi in funzione delle profondità. L'acqua fra i due cilindri forma un guscio cilindrico di raggio interno r_a , raggio esterno $r_b > r_a$ e lunghezza $L \gg r_b$.

Lo scienziato applica una differenza di potenziale ΔV fra le superfici interna ed esterna, producendo una corrente radiale I verso l'esterno. Indichiamo con ρ la resistività dell'acqua.

- Trovare le resistenze dell'acqua fra i cilindri in funzione di L, ρ, r_a e r_b .
- Esprimere la resistività dell'acqua in funzione delle grandezze misurate $L, r_a, r_b, \Delta V$ e I .



c) Consideriamo un tubo cilindrico di acque, di spessore Δr_i e raggio r_i con $r_a < r_i < r_b$.

Considerando la corrente radiale, la resistenza di questo tubo di acque è:

$$\Delta R_i = \rho \frac{\Delta r_i}{A} = \rho \frac{\Delta r_i}{2\pi L r_i} = \frac{\rho}{2\pi L} \frac{\Delta r_i}{r_i}$$

Dunque, la resistenza complessiva di tutto il guscio cilindrico di acque con $r_a < r < r_b$ è:

$$R = \sum_i \Delta R_i = \sum_i \frac{\rho}{2\pi L} \frac{\Delta r_i}{r_i} = \frac{\rho}{2\pi L} \sum_i \frac{\Delta r_i}{r_i} = \\ = \frac{\rho}{2\pi L} \int_{r_a}^{r_b} \frac{1}{r} dr = \frac{\rho}{2\pi L} \ln\left(\frac{r_b}{r_a}\right)$$

b) Per la legge di Ohm risultò

$$R = \frac{\Delta V}{I}, \quad \text{per cui ottieniamo:}$$

$$\frac{\rho}{2\pi L} \ln\left(\frac{r_b}{r_a}\right) = \frac{\Delta V}{I}, \quad \text{e quindi:}$$

$$\rho = \frac{2\pi L}{\ln\left(\frac{r_b}{r_a}\right)} \cdot \frac{\Delta V}{I}$$

I valori delle componenti di un circuito RC semplice contenente un interruttore

(vedi figura) sono $C = 1 \mu\text{F}$, $R = 2 \text{ M}\Omega$, $\mathcal{E} = 10 \text{ V}$.

Dieci secondi dopo che è stato chiuso l'interruttore, calcolare:

- la carica accumulata sul condensatore,
- la corrente che scorre nel circuito,
- la velocità con cui l'energia viene immagazzinata nel condensatore,
- la velocità con cui l'energia viene fornita dalla batteria

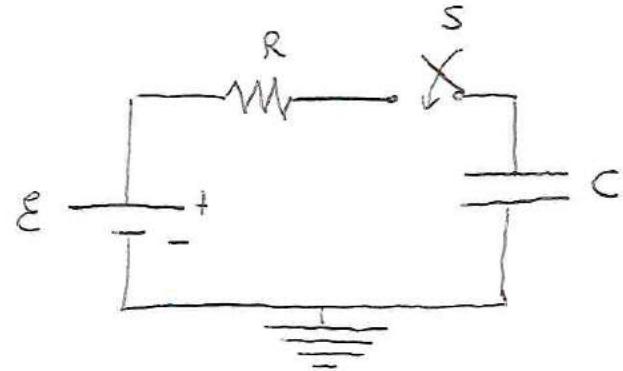
a) La legge che descrive l'andamento temporale della carica accumulata sul condensatore è

$$q(t) = C \mathcal{E} \left(1 - e^{-t/\tau}\right), \quad \text{con } \tau = RC = (10^{-6} \text{ F}) \cdot (2 \times 10^6 \Omega) = 2 \text{ s}$$

Allora, per $t = t_1 = 10 \text{ s}$ risultò

$$q(t = t_1) = C \mathcal{E} \left(1 - e^{-t_1/\tau}\right) = (10^{-6} \text{ F}) \cdot (10 \text{ V}) [1 - e^{-5}] =$$

$$= 0,9933 \times 10^{-5} \text{ C} = 9,933 \mu\text{C}$$



b) La corrente che scorre nel resistore è:

$$I(t) = [q(t)]' = \frac{C \varepsilon}{\tau} e^{-t/\tau} = \frac{\varepsilon}{R} e^{-t/\tau}, \text{ per cui ottieniamo}$$

$$\boxed{I(t=t_1) = \frac{\varepsilon}{R} e^{-t_1/\tau} = \frac{10 \text{ V}}{(2 \times 10^6 \Omega)} e^{-5} = 3,3690 \times 10^{-8} \text{ A} = 33,690 \text{ nA}}$$

c) L'energia accumulata nel condensatore all'istante t è:

$$U_E(t) = \frac{(q(t))^2}{2C}, \text{ per cui la velocità con cui queste energie viene accumulate è:}$$

$$\begin{aligned} P_E(t) &= [U_E(t)]' = \frac{1}{2C} \cdot 2q(t) \cdot [q(t)]' = \frac{1}{C} q(t) I(t) = \\ &= \frac{1}{C} \cancel{C} \varepsilon (1 - e^{-t/\tau}) \frac{\varepsilon}{R} e^{-t/\tau} = \frac{\varepsilon^2}{R} (e^{-\frac{t}{\tau}} - e^{-\frac{2t}{\tau}}) \end{aligned}$$

Dunque:

$$\boxed{P_E(t=t_1) = \frac{\varepsilon^2}{R} \left(e^{-\frac{t_1}{\tau}} - e^{-\frac{2t_1}{\tau}} \right) =}$$

$$\boxed{= \frac{(10 \text{ V})^2}{(2 \times 10^6 \Omega)} \left(e^{-5} - e^{-10} \right) = 3,3463 \times 10^{-7} \text{ W} = 334,63 \text{ nW}}$$

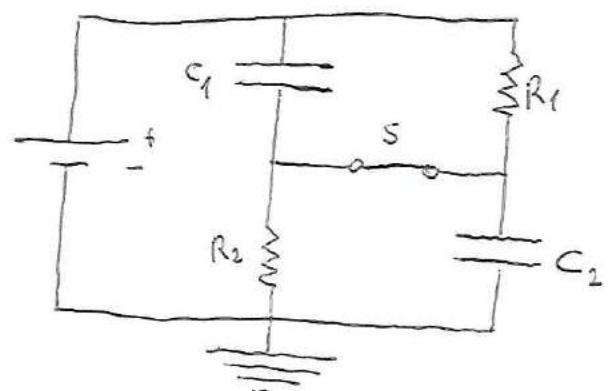
d) le potenze fornite delle batterie e'

$$P(t) = E I(t) = \frac{E^2}{R} e^{-t/\tau}, \quad \text{per cui ottieniamo}$$

$$P(t=t_1) = \frac{E^2}{R} e^{-t_1/\tau} = \frac{(10 \text{ V})^2}{(2 \times 10^6 \Omega)} e^{-5} = 3,3690 \times 10^{-7} \text{ W} = 336,90 \text{ nW}$$

Serway, pr. 21.69

L'interruttore S mostrato nella figura è fisso e chiuso da molto tempo, e nel circuito elettrico circola una corrente costante.



Risulta $C_1 = 3 \mu\text{F}$, $C_2 = 6 \mu\text{F}$, $R_1 = 4 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 7 \text{ k}\Omega$.

Le potenze fornite a R₂ e' $P_2 = 2,4 \text{ W}$.

a) Trovare le cariche accumulate su C₁.

b) successivamente l'interruttore viene aperto. Di quanto varia la carica su C₂ dopo molti millisecondi?

e) con l'interruttore S chiuso, il regime avremo corrente che circola attraverso le serie delle due resistenze R_1 e R_2 : infatti quando lo corrente è costante, non fluisce corrente attraverso i vari contenenti condensatori.

La corrente che circola in questa situazione è quindi

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2}, \quad \text{dove } \mathcal{E} \text{ è la f.e.m. delle batterie.}$$

La potenza fornita al resistore R_2 è:

$$P_2 = R_2 I^2 = \frac{R_2 \mathcal{E}^2}{(R_1 + R_2)^2}, \quad \text{da cui ottieniamo}$$

$$\mathcal{E}^2 = (R_1 + R_2)^2 \frac{P_2}{R_2} \Rightarrow \mathcal{E} = (R_1 + R_2) \sqrt{\frac{P_2}{R_2}}$$

Le differenze di potenziale ai capi del condensatore C_1 e uguali alle differenze di potenziale ai capi del resistore R_1

$$\Delta V_1 = R_1 I = \frac{R_1 \mathcal{E}}{R_1 + R_2} = R_1 \sqrt{\frac{P_2}{R_2}},$$

e quindi la carica accumulata a regime in C_1 è:

$$\boxed{Q_1 = C_1 \Delta V_1 = R_1 C_1 \sqrt{\frac{P_2}{R_2}} = (4 \times 10^3 \Omega)(3 \times 10^{-6} F) \sqrt{\frac{8,4 W}{7 \times 10^3 \Omega}} = 2,22 \times 10^{-4} C = 222,2 \mu C}$$

b) Dopo le riaperture dell'interruttore, i regimi ci saranno cariche Q_{1f} e Q_{2f} accumulate rispettivamente sul condensatore C_1 e sul condensatore C_2 , con corrente finale nulla a regime.

Alla fine, le differenze di potenziale ai capi dei due condensatori saranno le stesse:

$$\Delta V_{1,f} = \Delta V_{2,f} = E = (R_1 + R_2) \sqrt{\frac{P_2}{R_2}} \quad (\text{vedi risoluzione del punto (a)})$$

Dunque, la carica accumulata alla fine su C_2 è

$$Q_{2f} = C_2 \Delta V_{2,f} = C_2 E = C_2 (R_1 + R_2) \sqrt{\frac{P_2}{R_2}}$$

La carica che era accumulata su C_2 subito prima che fosse aperto l'interruttore S è:

$Q_{2i} = C_2 \Delta V_{2,i} = C_2 R_2 I$, dove I è la corrente calcolata al punto (a); dunque:

$$Q_{2i} = C_2 R_2 \frac{E}{R_1 + R_2} = C_2 R_2 \sqrt{\frac{P_2}{R_2}} = C_2 \sqrt{P_2 R_2}$$

Pertanto, la variazione delle cariche su C_2 , dopo un tempo lungo successivo alla apertura dell'interruttore, è:

$$\boxed{\Delta Q_2 = Q_{2f} - Q_{2i} = C_2 \sqrt{\frac{P_2}{R_2}} (R_1 + R_2 - R_2) = R_1 C_2 \sqrt{\frac{P_2}{R_2}} = -442 \text{ nC} = 444,39 \mu\text{C}}$$

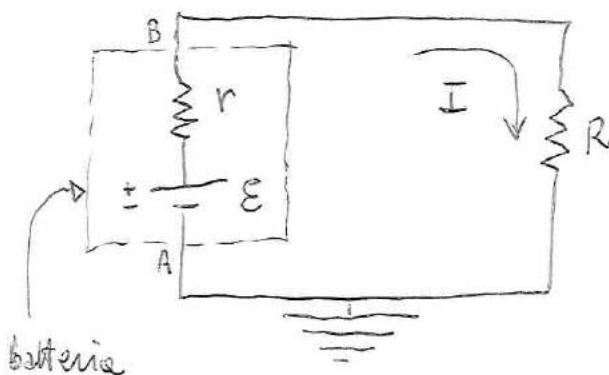
Una batteria ha una f.e.m. \mathcal{E} e una resistenza interna r .

Un resistore di carico variabile R e' collegato ai capi delle batterie.

- Determinare il valore di R che rende massima la differenza di potenziale ai terminali.
- Determinare il valore di R che rende massima la corrente nel circuito.
- Determinare il valore di R che rende massime le potenze fornite al resistore di carico.

-----/

Lo schema circuitale del problema in esame e' il seguente:



- La corrente I che circola nel circuito e' calcolabile usando la legge di Kirchhoff delle maglie applicate all'unica maglia che costituisce il circuito in esame:

$$\mathcal{E} - rI - RI = 0 \Rightarrow (R+r)I = \mathcal{E} \Rightarrow I = \frac{\mathcal{E}}{R+r}$$

La differenza di potenziale ai terminali delle batterie e'

$$\Delta V = \mathcal{E} - rI = \mathcal{E} - \frac{r\mathcal{E}}{R+r} = \left(1 - \frac{r}{R+r}\right)\mathcal{E} =$$
$$= \left(\frac{R+r-r}{R+r}\right)\mathcal{E} = \frac{R\mathcal{E}}{R+r}$$

Vediamo come varia ΔV al variare di R :

$$[\Delta V(R)]^l = \mathcal{E} \frac{1 \cdot (R+r) - R \cdot 1}{(R+r)^2} = \mathcal{E} \left[\frac{R+r-R}{(R+r)^2} \right] =$$
$$= \frac{\mathcal{E} r}{(R+r)^2} > 0 \quad \text{per ogni valore di } R.$$

Dunque, poiché $\lim_{R \rightarrow \infty} \Delta V(R) = \mathcal{E}$, e poiché $\Delta V(R)$ è una

funzione crescente di R , ΔV risulta minima per $R \rightarrow 0$, e

b) $(\Delta V)_{\max} = \mathcal{E}$

la corrente che scorre nel circuito, come abbiamo calcolato al punto (a), è:

$$I(R) = \frac{\mathcal{E}}{R+r} ; \quad \text{risulta } [I(R)]^l = -\frac{\mathcal{E}}{(R+r)^2} < 0 ,$$

$$\text{e } I(R=0) = \frac{\mathcal{E}}{r} .$$

Dunque, poiché $I(R)$ è una funzione decrescente di R , I risulta minima per $R=0$, e risulta $I_{\max} = \frac{\mathcal{E}}{r}$.

c) La potenza fornita al resistore di carico e':

$$P(R) = I^2 R = \frac{E^2 R}{(R+r)^2}$$

Risulte $P(0) = 0$ e $\lim_{R \rightarrow \infty} P(R) = 0$

Poi risulta $[P(R)]' = E^2 \frac{1 \cdot (R+r) - R \cdot 2(R+r)}{(R+r)^3} = E^2 \left[\frac{R+r - 2R}{(R+r)^3} \right] =$

$$= E^2 \frac{r-R}{(R+r)^3} \geq 0 \text{ per } R \leq r.$$

Dunque, $P(R)$ ha un minimo relativo (che e' anche assoluto) per $r = R$, e risulta

$$\boxed{P_{\max} = \frac{E^2 r}{(r+r)^2} = \frac{E^2}{4r} \quad \text{per} \quad R=r}$$