Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)
Anno accademico: 2009-2010. *Titolare del corso:* Claudio Macci
Simulazione 1

Esercizio 1. Si lancia una moneta e sia p la probabilità che esca testa in ogni lancio.
D1) Calcolare la probabilità di avere la sequenza (testa,testa, croce,testa).
D2) Calcolare la probabilità di ottenere per la prima volta testa ad un lancio pari, ed ad un lancio dispari.

Esercizio 2. Abbiamo un'urna con 2 pallina bianche e 3 palline nere. Si estrae una pallina a caso e viene rimessa nell'urna insieme ad altre 2 palline dello stesso colore di quella estratta. Poi viene estratta ancora una pallina a caso.
D3) Calcolare la probabilità che la prima pallina estratta sia bianca sapendo che la seconda è nera.
D4) Calcolare la probabilità che la prima pallina estratta è bianca oppure la seconda è nera.

Esercizio 3. Un'urna contiene tre palline con i numeri 0, 1 e 2. Si estraggono a caso due palline, una alla volta e senza reinserimento. Siano X_1 e X_2 le variabili aleatorie che indicano il primo e il secondo numero estratto rispettivamente. Sia $Y = X_1 - X_2$ e $Z = X_1X_2$.
D5) Trovare la densità congiunta di (Y, Z).
D6) Trovare le densità marginali di Y e Z.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con densità continua $f_X(t) = \frac{t}{50}1_{(0,a)}(t)$, dove a è una costante positiva.
D7) Trovare il valore della costante a.
D8) Trovare la densità continua di $Y = e^X$.

Esercizio 5. Sia $N_t = \sum_{n\geq 1} 1_{T_n\leq t}$ (per $t \geq 0$) un processo di Poisson con intensità di $\lambda = 5$.
D9) Calcolare $P(N_3 \geq 2)$.
D10) Calcolare $P(T_1 \leq 4)$.

Esercizio 6. Sia X una variabile aleatoria normale con media $\mu_X = 1$ e varianza $\sigma_X^2 = 4$.
D11) Calcolare $P(X \geq 2)$.
Sia Y una variabile aleatoria normale di media $\mu_Y = -1$ e varianza $\sigma_Y^2 = 12$, e indipendente da X.
D12) Calcolare $P(|X + Y| \geq 1)$.

Esercizio 7 (*solo per ST-Materiali*). Consideriamo una catena di Markov omogenea $\{X_n : n \geq 0\}$ con matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

D13) Calcolare $P(X_1 = 2, X_2 = 3|X_0 = i)$ per $i \in \{1, 2, 3\}$.
D14) Calcolare $P(X_5 = 1)$ nel caso in cui si abbia la seguente distribuzione iniziale $\pi_i = P(X_0 = i)$ (per $i \in \{1, 2, 3\}$): $(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = (\frac{32}{35}, \frac{2}{35}, \frac{1}{35})$.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
D1) La probabilità richiesta è $p \cdot p(1-p)p = p^3(1-p)$ perché eventi legati a lanci di moneta diversi sono indipendenti.
D2) Sia X la variabile aleatoria che indica a quale lancio esce per la prima volta testa. Allora le probabilità richieste sono: $P(\cup_{k\geq 1}\{X=2k\}) = \sum_{k\geq 1}(1-p)^{2k-1}p = \frac{p}{1-p}\frac{(1-p)^2}{1-(1-p)^2} = \frac{p(1-p)}{2p-p^2} = \frac{1-p}{2-p}$ e $P(\cup_{k\geq 1}\{X=2k-1\}) = \sum_{k\geq 1}(1-p)^{2k-1-1}p = \frac{p}{1-(1-p)^2} = \frac{1}{2-p}$.

Esercizio 2. Sia B_i l'evento "estratta una pallina bianca alla i-sima estrazione" ($i \in \{1,2\}$).
D3) Per la formula di Bayes (e la formula delle probabilità totali per $P(B_2^c)$ a denominatore) si ha $P(B_1|B_2^c) = \frac{P(B_2^c|B_1)P(B_1)}{P(B_2^c)} = \frac{P(B_2^c|B_1)P(B_1)}{P(B_2^c|B_1)P(B_1)+P(B_2^c|B_1^c)P(B_1^c)} = \frac{\frac{3}{7}\frac{2}{5}}{\frac{3}{7}\frac{2}{5}+\frac{5}{7}\frac{3}{5}} = \frac{2}{7}$.
D4) Osservando che $P(B_1 \cap B_2^c) = P(B_2^c|B_1)P(B_1) = \frac{3}{7}\frac{2}{5} = \frac{6}{35}$ e che (usando la formula delle probabilità totali come nella domanda precedente) $P(B_2^c) = P(B_2^c|B_1)P(B_1) + P(B_2^c|B_1^c)P(B_1^c) = \frac{3}{7}\frac{2}{5} + \frac{5}{7}\frac{3}{5} = \frac{21}{35}$, si ha $P(B_1 \cup B_2^c) = P(B_1) + P(B_2^c) - P(B_1 \cap B_2^c) = \frac{2}{5} + \frac{21}{35} - \frac{6}{35} = \frac{14+21-6}{35} = \frac{29}{35}$.

Esercizio 3. La densità congiunta per (X_1, X_2) ha distribuzione uniforme sull'insieme finito $\{(0,1),(0,2),(1,0),(1,2),(2,0),(2,1)\}$ (costituito da $\#D_{3,2} = 3 \cdot 2 = 6$ casi).
D5) Si ha $p_{(Y,Z)}(\pm 1, 0) = p_{(Y,Z)}(\pm 2, 0) = p_{(Y,Z)}(\pm 1, 2) = \frac{1}{6}$.
D6) Si ha $p_Y(-2) = p_{(Y,Z)}(-2,0) = \frac{1}{6}$, $p_Y(-1) = p_{(Y,Z)}(-1,0) + p_{(Y,Z)}(-1,2) = \frac{2}{6}$, $p_Y(1) = p_{(Y,Z)}(1,0) + p_{(Y,Z)}(1,2) = \frac{2}{6}$, $p_Y(2) = p_{(Y,Z)}(2,0) = \frac{1}{6}$ e $p_Z(0) = p_{(Y,Z)}(-2,0) + p_{(Y,Z)}(-1,0) + p_{(Y,Z)}(1,0) + p_{(Y,Z)}(2,0) = \frac{4}{6}$, $p_Z(2) = p_{(Y,Z)}(-1,2) + p_{(Y,Z)}(1,2) = \frac{2}{6}$.

Esercizio 4.
D7) Si ha $1 = \int_0^a \frac{t}{50}dt = [\frac{t^2}{100}]_{t=0}^{t=a} = \frac{a^2}{100}$, da cui segue $a^2 = 100$ e quindi $a = 10$.
D8) Si ha $P(1 < Y < e^{10}) = 1$, da cui segue $F_Y(y) = 0$ per $y \leq 1$ e $F_Y(y) = 1$ per $y \geq e^{10}$. Per $1 < y < e^{10}$ si ha $F_Y(y) = P(e^X \leq y) = P(X \leq \log y) = \int_0^{\log y} \frac{t}{50}dt = [\frac{t^2}{100}]_{t=0}^{t=\log y} = \frac{(\log y)^2}{100}$. Quindi la densità è $f_Y(y) = \frac{\log y}{50y}1_{(1,e^{10})}(y)$.

Esercizio 5.
D9) Si ha $P(N_3 \geq 2) = 1 - (P(N_3 = 0) + P(N_3 = 1)) = 1 - (\frac{(5\cdot 3)^0}{0!} + \frac{(5\cdot 3)^1}{1!})e^{-5\cdot 3} = 1 - 16e^{-15}$.
D10) Si ha $P(T_1 \leq 4) = 1 - e^{-5\cdot 4} = 1 - e^{-20}$.

Esercizio 6.
D11) Si ha $P(X \geq 2) = P(\frac{X-\mu_X}{\sigma_X} \geq \frac{2-1}{\sqrt{4}}) = 1 - \Phi(\frac{1}{2}) = 1 - \Phi(0.5) = 1 - 0.69146 = 0.30854$.
D12) La variabile aleatoria $X + Y$ è normale con media $\mu = \mu_X + \mu_Y = 1 - 1 = 0$ e varianza $\sigma^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 = 4 + 12 = 16$. Quindi si ha $P(|X+Y| \geq 1) = 1 - P(|X+Y| < 1) = 1 - P(-1 < X+Y < 1) = 1 - P(\frac{-1-0}{\sqrt{16}} < \frac{X+Y-\mu}{\sigma} < \frac{1-0}{\sqrt{16}}) = 1 - (\Phi(\frac{1}{4}) - \Phi(-\frac{1}{4})) = 1 - (\Phi(0.25) - (1 - \Phi(0.25))) = 2(1 - \Phi(0.25)) = 2(1 - 0.59871) = 2 \cdot 0.40129 = 0.80258$.

Esercizio 7.
D13) Al variare di $i \in \{1,2,3\}$ si ha $P(X_1 = 2, X_2 = 3|X_0 = i) = p_{i2}p_{23} = p_{i2}$. Quindi

$$P(X_1 = 2, X_2 = 3|X_0 = i) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{per } i = 1 \\ 0 & \text{per } i = 2 \\ 1 & \text{per } i = 3. \end{cases}$$

D14) Si ha $P(X_5 = 1) = \sum_{i=1}^{3} P(X_5 = 1|X_0 = i)P(X_0 = i)$. Inoltre osserviamo che la catena non torna nello stato 1 dopo averlo lasciato; quindi

$$P(X_5 = 1|X_0 = i) = \begin{cases} p_{11}^5 = (\frac{1}{2})^5 = \frac{1}{32} & \text{per } i = 1 \\ 0 & \text{per } i \in \{2, 3\}. \end{cases}$$

In conclusione $P(X_5 = 1) = \frac{\pi_1}{32} = \frac{1}{35}$.

Commenti.
`D2`) Si ha $P(\cup_{k\geq 1}\{X = 2k\}) + P(\cup_{k\geq 1}\{X = 2k-1\}) = \frac{(1-p)+1}{2-p} = 1$ in accordo con la teoria.
`D4`) In altro modo $P(B_1 \cup B_2^c) = 1 - P((B_1 \cup B_2^c)^c) = 1 - P(B_1^c \cap B_2) = 1 - P(B_2|B_1^c)P(B_1^c) = 1 - \frac{2}{7}\frac{3}{5} = 1 - \frac{6}{35} = \frac{29}{35}$.
`D5-D6`) La somma dei valori delle densità è 1 in accordo con la teoria.