

Cognome:..... Nome:..... Matr.:.....

### Esercizio 1 [16 punti]

A: *notazione asintotica*. Dire quali delle seguenti relazioni asintotiche sono vere:

$$\begin{aligned} \sqrt{\log n} &= \Theta(\log \sqrt{n}); & n \log n &= o(n^2); & \frac{\sqrt{n^3 + \log n}}{\sqrt{n}} &= o(n); & \sqrt[4]{\log n} &= O(\log \log n); \\ 3^n &= o(2^{2n}); & 2^n &= \Theta(2^{n+\log n}); & 2^{n+2} &= \omega(2^{n/2}); & \frac{2^n}{n^2} &= \omega(2^{n/2}); \end{aligned}$$

B: *equazioni di ricorrenza*. Fornire la soluzione asintotica alle seguenti relazioni di ricorrenza:

$$T(n) = 2T(n/4) + n\sqrt{n}; \quad \text{Soluzione:}$$

$$T(n) = 2T(n-4) + 1; \quad \text{Soluzione:}$$

C: *algoritmi e complessità*. Quale algoritmo useresti e quanto costa se devi:

- In un grafo non orientato e pesato, calcolare la distanza fra tutte le coppie di nodi:
- In un grafo orientato, capire se uno specifico nodo  $s$  può essere raggiunto da tutti gli altri nodi:
- Ordinare un vettore  $V[1 : n]$  di  $n$  bit ( $V[i] \in \{0, 1\}$ ):
- aggiungere  $\sqrt{n}$  elementi ad un heap binario di  $n$  elementi:

### Esercizio 2 [8 punti]

Sia  $A[1 : n]$  un vettore di  $n$  bit, ovvero  $A[i] \in \{0, 1\}$  per ogni  $i$ . Si progetti un *oracolo* (struttura dati) che può essere costruito in tempo  $O(n)$  e che sia in grado di rispondere in tempo costante a domande del tipo:

- $q(i)$ : dato  $i \in 1, \dots, n$ , restituire il più piccolo indice  $j \geq i$  tale che  $A[j] = 1$ . Se tale indice  $j$  non esiste la risposta alla domanda è  $-1$ .

Si forniscano gli pseudocodici dettagliati dell'algoritmo che, preso  $A$ , costruisce in tempo  $O(n)$  l'oracolo, e dell'algoritmo che, dato l'oracolo e un indice  $i$ , restituisce in tempo  $O(1)$  la risposta alla domanda  $q(i)$ .

### Esercizio 3 [10 punti]

La vostra città è modellata come un grafo diretto e pesato  $G = (V, E, w)$ . Voi siete nel nodo  $s$  e dovete raggiungere il nodo  $t$  dove si svolgerà l'esonero del corso di ASD. Ma siete in ritardo. Dovete fare in fretta. Per fortuna avete una bicicletta. Con la vostra bicicletta, attraversare un arco  $e \in E$  richiede tempo  $w(e)$ . La bicicletta non è il solo mezzo che potete usare. Sapete che ci sono dei nodi del grafo, i nodi nell'insieme  $X \subseteq V$ , in cui potete affittare scooter, monopattini e altra roba. Avete soldi per affittare un solo mezzo. Per ogni nodo  $x \in X$ , conoscete due cose: il tempo  $\tau_x$  che vi richiede lo scambio fra la bicicletta e il mezzo che si trova in  $x$ , e il fattore di *speed-up*  $\sigma_x \leq 1$  del mezzo: con il mezzo preso nel nodo  $x$  il tempo di attraversamento di un arco  $e$  scende da  $w(e)$  a  $\sigma_x w(e)$ .

Progettate un algoritmo che in tempo  $O(m + n \log n)$ , calcola la strategia che vi porta a  $t$  nel minor tempo possibile.