Hash Table

Problema del dizionario

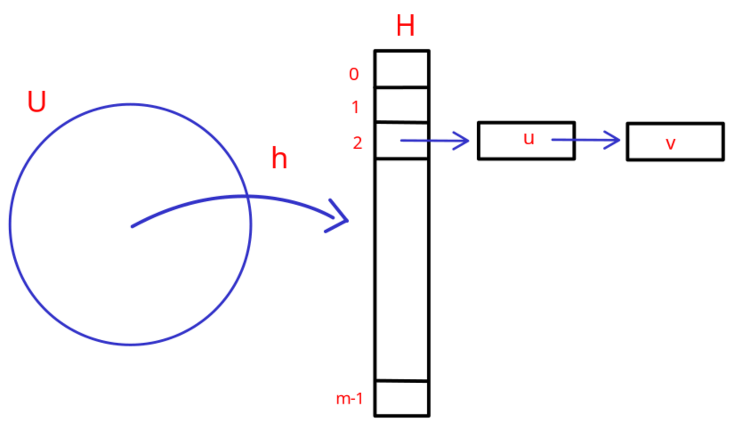
Dato un universo U di possibili elementi, dobbiamo mantenere un sott'insieme $S \subseteq U$ soggetto alle seguenti operazioni:

- `make-dictionary()` : crea un dizionario vuoto
- `insert(u)` : aggiungi l'elemento $u \in U$ a S
- `delete(u)` : cancella u da S se $u \in S$
- `look-up(u)` : determina se u sta in S

Il problema che U può avere una dimensione molto grande, e definire un array di tale dimensione non è efficiente.

Soluzioni:

- *Deterministica* - AVL: $O(|S|)$ spazio e $O(log(|S|))$ costo per ogni operazione.
- *Randomizzata* - Hash Tables: $O(|S|)$ spazio e $O(1)$ costo per ogni operazione.



Idea

L'idea è quella di tenere in memoria un tabella (array H) e ogni $H[i]$ è una linked list di elementi mappati dalla funzione di hash.

Una **collisione** avviene quando, dati due elementi $u \in U$ e $v \in V$ tali che $u \neq v$, e $h(u) = h(v)$.

L'obiettivo è trovare una funzione h di hash tale che rispetti le seguenti caratteristiche:

1. Deterministica: La stessa chiave deve produrre lo stesso indice.
2. Uniforme: Le chiavi devono essere distribuite uniformemente nell'array per minimizzare le collisioni.
3. Veloce da calcolare: Dovrebbe essere computazionalemente efficiente per garantire l'accesso rapido.

- **Fatto I**: Se $|U| > m^2$, per ogni funzione hash h deterministica esiste un insieme S di dimensione n tale che tutti gli elementi di S sono mappati nello stesso slot.
- **Dimostrazione**: Fissato h che dovrà mappare ciascun elemento di U in H, e S può essere scelto in modo opportuno dall'"avversario" rispetto ad h. Dunque esiste almeno uno slot i di H la cui lista di trabocco ha dimensione n. Dunque il costo per ogni operazione è $\theta(n)$

Randomized Hash Functions

In questo approccio iniziale, si tenta di mappare ogni elemento $u \in S$ a uno slot in H in modo indipendente e uniforme. Questo significa che, per ogni elemento u, scegliamo $h(u)$ (il valore hash di u) come un numero random tra gli slot disponibili di H.

Poiché ogni slot in H ha uguale probabilità di essere scelto, la probabilità che un elemento u venga mappato a uno specifico slot i è data da:

$$Pr[h(u) = i] = \frac{1}{m}$$

dove m è il numero di slot di H.

Quando vogliamo fare un'operazione di `insert` o `lookup` per un elemento u, generiamo $h(u)$ come un valore random tra gli slot. Tuttavia, dato che $h(u)$ è scelto casualmente ogni volta, non c'è alcuna garanzia che la stessa chiave u venga mappata sempre allo stesso indice.
Di conseguenza, la stessa chiave u potrebbe essere associata a indici diversi in momenti diversi, rendendo difficile trovare dove u sia stato inserito in precedenza.

Per ovviare a questo problema, è necessario memorizzare esplicitamente ogni coppia $(u,\ h(u))$. Così, ogni volta che vogliamo fare una ricerca (`lookup`), possiamo trovare la posizione esatta di u senza dipendere dalla generazione casuale di $h(u)$.

Tuttavia, memorizzare tutte le coppie $(u,\ h(u))$ equivale essenzialmente a tenere traccia di ogni elemento con il proprio valore hash associato, trasformando questo sistema in un dizionario o una mappa in cui ogni chiave ha un valore associato (quindi stiamo cercando di risolvere il problema del dizionraio mediante un dizionari).

✓ **Success**

Una famiglia $\mathbb{H}$ di funzioni hash si dice **universale** se per ogni $u,\ v \in U\ u \neq v$ la probabilità $\Pr_{h \in \mathbb{H}}[h(u) = h(v)] \leq \frac{1}{m}$

Questo significa che una famiglia di funzioni hash è considerata universale se la probabilità che due elementi distinti u e v dell'universo U vengano mappati allo stesso valore è al più $\frac{1}{m}$ dove m è la dimensione dell'intervallo delle funzioni hash.

✓ **Success**

Teorema: Sia $\mathbb{H}$ una famiglia di funzioni hash universale. Sia $S \subseteq U$ di n elementi. Sia $u \in S$. Scegliamo uniformemente random una funzione h all'interno di $\mathbb{H}$ e sia X una varibiale aleatoria che conta il numero di elementi di S mappati nello slot $h(u)$. Allora

$$E[X] = 1 + \frac{n}{m}$$

Dimostrazione: Fissato u, per ogni $s \in S$,

$$X_s = \begin{cases} 1 & \text{se } h(s) = h(u) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e $X = \sum_{s \in S} X_s$.

$$E[X] = E\left[\sum_{s \in S} X_s\right] = \sum_{s \in S} E[X_s] = \sum_{s \in S} Pr[h(s) = h(u)] = 1 + \sum_{s \in S - \{u\}} Pr[h(s) = h(u$$

Osservazione: Il teorema ci dice che, fissato un elemento $u \in S$, il numero atteso di elementi in S mappati nello stesso bucket di $h(u)$ è $E[X] = 1 + \frac{n}{m}$. Questo significa che nel bucket associato a $h(u)$, oltre a u stesso, ci aspettiamo in **MEDIA** $\frac{n}{m}$ altri elementi di S.
Conoscendo n, possiamo scegliere $m = O(n)$ in modo tale che la dimensione di ciascun bucket sia $\approx O(1)$. In altre parole, **se il numero di bucket è proporzionale al numero di elementi**, ci aspettiamo che ogni bucket contenga in media un numero costante di elementi.

Una prima famiglia di funzione hash randomizzate

Come progettisti della funzione hash, ci è dato sapere alcune informazioni: $|U| = N$, $|S| = n$. Adesso con queste informazioni dobbiamo determinare la dimensione corretta della Hash Table. Sia m dunque la dimensione della Hash Table, un numero **primo** tale che $n \leq m \leq 2n$, e tale numero m esiste sempre grazie ad un teorema dimostrato da *Chebyshev*.

Il secondo step, è quello di codificare ciascun elemento $x \in U$ come un intero in base m, di r cifre, $x = \langle x_1, x_2, \ldots, x_r \rangle$. La quantità totale di combinazioni possibili con r cifre è m^r. Per garantire che ogni elemento dell'universo possa essere rappresentato senza collisioni, è necessario che il numero totale di combinazioni sia almeno pari al numero di elementi nell'universo, ovvero deve vale che $m^r \geq N$.

$$m^r \geq N \Rightarrow log(m^r) \geq log(N) \Rightarrow r\ log(m) \geq log(N) \Rightarrow r \geq \frac{log(N)}{log(M)}$$

Definiamo ora una generica funzione hash della nostra famiglia $\mathbb{H}$. Per ogni $a \in U$ fissato, scriviamo a in m-ario, ovvero $a = \langle a_1, a_2, \ldots, a_r \rangle$, dove $a_i \in [m]$ per ogni $i = 1, 2, \ldots, r$.

$$h_a(x) = \Big(\sum_{i=1}^{r} a_i x_i \Big)\ \ mod\ m$$

Quindi, la nostra famiglia di funzioni $\mathbb{H} = \{h_a : a \in U\}$. Per memorizzare una singola funzione h, necessitiamo di $r = \theta(\frac{log(N)}{log(M)})$ cifre, ciascuna di dimensione $log(m)$.

Costo computazionale nel modello RAM

Nel modello **RAM (Random Access Machine)**, supponiamo che ogni operazione aritmetica su parole (addizioni e modulo) richieda $O(1)$ tempo. Questo ci consente di:

- Accedere a ciascun valore a_i e moltiplicarlo per x_i in tempo $O(1)$.
- Sommare i prodotti parziali e fare il modulo m, tutto in tempo costante.

Nel modello **RAM**

- **Memorizzare** una funzione h_a richiede $O(1)$ spazio per la stringa a.
- **Calcolare** $h_a(x)$ richie $O(1)$ tempo grazie all'accesso e alla manipolazione costante delle parole.

Pertanto, il costo complessivo per memorizzare e computare $h_a(x)$ è molto efficiente e supporta operazioni di hashing rapide nel modello a registri (RAM).

Success

Teorema: $\mathbb{H} = \{h_a : a \in U\}$ è universale.
Dimostrazione: Per dimostrare che $\mathbb{H} = \{h_a : a \in U\}$ è universale dobbiamo dimostrare che, presi due elementi $x = (x_1, x_2, \dots, x_r) \in U$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_r) \in U$, tale che $x \neq y$,

$$Pr[h_a(x) = h_a(y)] \leq \frac{1}{m}$$

Siccome $x \neq y$, allora $\exists\ j$ intero tale che: $x_j \neq y_j$.

$$Pr[h_a(x) = h_a(y)] = Pr\ \Big[\ \sum_{i=1}^{r} a_i x_i \ mod\ m = \sum_{i=1}^{r} a_i y_i \ mod\ m\ \Big]$$

Adesso, da entrambi i termini tiriamo fuori x_j e y_j che per ipotesi sono diversi.

$$Pr\ \Big[\ a_j(x_j - y_j) = \sum_{i=1, i\neq j}^{r} a_i(x_i - y_i)\ mod\ m\ \Big]$$

Per il *Principle Of Deffered Decision*, $\sum_{i=1,i\neq j}^{r} a_i(x_i - y_i)\ mod\ m$ è un numero fissato non più una variabile random, dunque l'unica variabile random è a_j. La probabilità che valga quell'uguaglianza è $\frac{1}{m}$ in quando è la probabilità di scegliere $a_j \in [m]$ necessario per rendere verà l'uguaglianza.

Conclusione: $\mathbb{H} = \{h_a : a \in U\}$ è universale in quanto $Pr[h_a(x) = h_a(y)] \leq \frac{1}{m}$.