Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)
Anno accademico: `2010-2011`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Simulazione 2

Esercizio 1. Un'urna ha 5 palline numerate da 1 a 5. Si estraggono 3 palline a caso, una alla volta e con reinserimento.
`D1`) Trovare la densità della variabile aleatoria X che conta il numero di palline con il *numero 1* estratte.
`D2`) Calcolare la probabilità di ottenere la sequenza di numeri $(1, \text{pari}, \text{dispari})$ sapendo di aver estratto il *numero 1* esattamente una volta.

Esercizio 2. Abbiamo due urne: la *prima* con 1 pallina bianca e 2 nere; la *seconda* con 2 palline bianche e 2 nere. Si sceglie a caso un'urna e si estrae a caso una pallina dall'urna scelta.
`D3`) Calcolare la probabilità di aver scelto la *prima* urna sapendo di aver estratto una pallina nera.
Supponiamo di ripetere questo procedimento fino a quando viene estratta una pallina bianca per la prima volta.
`D4`) Trovare la densità della variabile aleatoria X che conta il numero di ripetizioni del procedimento.

Esercizio 3. Sia $p \in (0,1)$ e consideriamo la seguente densità congiunta: $p_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = (1-p)^{x_1-1}p\frac{1}{x_1}$ per $x_1 \geq 1$ intero e $x_2 \in \{1,\ldots,x_1\}$.
`D5`) Trovare la densità marginale di X_1.
`D6`) Verificare che $P(X_1 > X_2|X_1 \leq 2) = \frac{1-p}{4-2p}$ e $P(X_1 = X_2|X_1 \leq 2) = \frac{3-p}{4-2p}$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria continua con densità $f_X(t) = ct1_{(0,b)}(t)$, dove $b, c > 0$ sono costanti da determinare.
`D7`) Determinare il valore di c in funzione di ogni scelta di b.
`D8`) Poniamo $b = 3$. Trovare la densità di $Y = e^{-X}$.

Esercizio 5. Sia $N_t = \sum_{n\geq 1} 1_{T_n \leq t}$ (per $t \geq 0$) un processo di Poisson con intensità di $\lambda = 11$.
`D9`) Calcolare $P(N_3 \geq 2)$.
`D10`) Calcolare $\mathbb{E}[N_2]$.

Esercizio 6. Sia X una variabile aleatoria con distribuzione normale standard.
`D11`) Calcolare $P(X > 2.1)$.
`D12`) Trovare la distribuzione di $3X - 5Y$, dove Y una variabile aleatoria con distribuzione normale standard indipendente da X.

Esercizio 7 (*solo per ST-Materiali*). Consideriamo una catena di Markov omogenea $\{X_n : n \geq 0\}$ con spazio degli stati $E = \{1, 2\}$ e matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

`D13`) Presentare le conseguenze del Teorema di Markov dopo aver motivato la sua applicabilità.
`D14`) Determinare per quali valori di $n \geq 1$ (intero) si ha $P(\cap_{j=1}^{n}\{X_j = 1\}|X_0 = 2) \leq \frac{1}{100}$.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
`D1`) La variabile aleatoria X ha distribuzione binomiale di parametri $n = 3$ (numero di estrazioni) e $p = \frac{1}{5}$ (probabilità di estrarre il *numero 1* ad ogni estrazione). Dunque si ha $p_X(k) = \binom{3}{k}(\frac{1}{5})^k(1-\frac{1}{5})^{3-k}$ per $k \in \{0, 1, 2, 3\}$, da cui segue $p_X(0) = \frac{64}{125}$, $p_X(1) = \frac{48}{125}$, $p_X(2) = \frac{12}{125}$, $p_X(3) = \frac{1}{125}$.
`D2`) Abbiamo $P((1, \mathrm{pari}, \mathrm{dispari})|X = 1) = \frac{P((1,\mathrm{pari},\mathrm{dispari})\cap\{X=1\})}{P(X=1)} = \frac{P((1,\mathrm{pari},\{3,5\}))}{P(X=1)} = \frac{\frac{1}{5}\frac{2}{5}\frac{2}{5}}{\frac{48}{125}} = \frac{4}{48} = \frac{1}{12}$.

Esercizio 2. Sia N l'evento "si estrae una pallina nera" e sia U_k l'evento "si sceglie l'urna k" per $k \in \{1, 2\}$.
`D3`) Per la formula di Bayes e per la formula delle probabilità totali per il denominatore, si ha $P(U_1|N) = \frac{P(N|U_1)P(U_1)}{P(N|U_1)P(U_1)+P(N|U_2)P(U_2)} = \frac{\frac{2}{3}\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}\frac{1}{2}+\frac{2}{4}\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}} = \frac{\frac{4}{12}}{\frac{7}{12}} = \frac{4}{7}$.
`D4`) Si ha $p_X(k) = (1-q)^{k-1}q$ per $k \geq 1$ intero, dove $q = P(N^c) = P(N^c|U_1)P(U_1)+P(N^c|U_2)P(U_2) = \frac{1}{3}\frac{1}{2} + \frac{2}{4}\frac{1}{2} = \frac{2+3}{12} = \frac{5}{12}$.

Esercizio 3.
`D5`) Per $x_1 \geq 1$ intero si ha $p_{X_1}(x_1) = \sum_{x_2\geq 1} p_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \sum_{x_2=1}^{x_1}(1-p)^{x_1-1}p\frac{1}{x_1} = (1-p)^{x_1-1}p\frac{1}{x_1}x_1 = (1-p)^{x_1-1}p$.
`D6`) Si ha $P(X_1 > X_2|X_1 \leq 2) = \frac{P(\{X_1>X_2\}\cap\{X_1\leq 2\})}{P(X_1\leq 2)} = \frac{p_{X_1,X_2}(2,1)}{p_{X_1}(1)+p_{X_1}(2)} = \frac{(1-p)p\frac{1}{2}}{p+(1-p)p} = \frac{(1-p)p}{2p(1+1-p)} = \frac{1-p}{2(2-p)} = \frac{1-p}{4-2p}$ e $P(X_1 = X_2|X_1 \leq 2) = \frac{P(\{X_1=X_2\}\cap\{X_1\leq 2\})}{P(X_1\leq 2)} = \frac{p_{X_1,X_2}(1,1)+p_{X_1,X_2}(2,2)}{p_{X_1}(1)+p_{X_1}(2)} = \frac{p+(1-p)p\frac{1}{2}}{p+(1-p)p} = \frac{(2+1-p)p}{2p(1+1-p)} = \frac{3-p}{2(2-p)} = \frac{3-p}{4-2p}$.

Esercizio 4.
`D7`) Si ha $1 = c\int_0^b tdt = c[\frac{t^2}{2}]_{t=0}^{t=b} = c\frac{b^2}{2}$, da cui segue $c = \frac{2}{b^2}$.
`D8`) Per $b = 3$ si vede che $P(e^{-3} \leq e^{-X} \leq 1) = 1$, da cui $F_Y(y) = 0$ per $y \leq e^{-3}$ e $F_Y(y) = 1$ per $y \geq 1$. Inoltre, tenendo conto del valore di c appena calcolato, per $y \in (e^{-3}, 1)$ si ha $F_Y(y) = P(e^{-X} \leq y) = P(-X \leq \log y) = P(X \geq -\log y) = \int_{-\log y}^3 \frac{2}{3^2}tdt = \frac{2}{9}[\frac{t^2}{2}]_{t=-\log y}^{t=3} = \frac{2}{9}\frac{9-\log^2 y}{2} = 1 - \frac{1}{9}\log^2 y$. Quindi la densità è $f_Y(y) = -\frac{2\log y}{9y}1_{(e^{-3},1)}(y)$.

Esercizio 5.
`D9`) Si ha $P(N_3 \geq 2) = 1 - (P(N_3 = 0) + P(N_3 = 1)) = 1 - \left(\frac{(11\cdot 3)^0}{0!} + \frac{(11\cdot 3)^1}{1!}\right)e^{-11\cdot 3} = 1 - 34e^{-33}$.
`D10`) Si ha $\mathbb{E}[N_2] = 11 \cdot 2 = 22$.

Esercizio 6.
`D11`) Si ha $P(X > 2.1) = 1 - \Phi(2.1) = 1 - 0.98214 = 0.01786$.
`D12`) La variabile aleatoria $3X - 5Y$ ha distribuzione normale perché è combinazione lineare di normali indipendenti; la media è $3 \cdot 0 - 5 \cdot 0 = 0$ e la varianza è $3^2 \cdot 1 + (-5)^2 \cdot 1 = 9 + 25 = 34$.

Esercizio 7.
`D13`) Il teorema di Markov è applicabile perché la matrice di transizione ha tutti gli elementi positivi, e dunque si ha una catena di Markov regolare. In corrispondenza si ha $\lim_{n\to\infty} P(X_n = j|X_0 = i) = \pi_j$ per ogni $i, j \in \{1, 2\}$, dove $\pi = (\pi_1, \pi_2)$ è la distribuzione stazionaria. La distribuzione stazionaria è soluzione di

$$(\pi_1, \pi_2)\left(\begin{array}{cc} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array}\right) = (\pi_1, \pi_2),$$

da cui

$$\begin{cases} \frac{5}{6}\pi_1 + \frac{1}{4}\pi_2 = \pi_1 \\ \frac{1}{6}\pi_1 + \frac{3}{4}\pi_2 = \pi_2; \end{cases}$$

le due equazioni si riducono alla stessa equazione $\frac{1}{6}\pi_1 = \frac{1}{4}(1-\pi_1)$, la cui soluzione è $\pi_1 = \frac{3}{5}$. In conclusione la distribuzione stazionaria è $\pi = (\pi_1, \pi_2) = (\frac{3}{5}, \frac{2}{5})$.

`D14`) Dobbiamo imporre la seguente condizione su n: $p_{21}p_{11}^{n-1} \leq \frac{1}{100}$. Quindi si ha $\frac{1}{4}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \leq \frac{1}{100}$, $\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \leq \frac{1}{25}$, $(n-1)\log\frac{5}{6} \leq \log\frac{1}{25}$. In conclusione la condizione è soddisfatta per $n \geq n_0$, dove $n_0 = 1 + \frac{\log\frac{1}{25}}{\log\frac{5}{6}} = 1 + \frac{\log 25}{\log\frac{6}{5}}$.

Commenti.

La somma dei valori di ciascuna densità discreta che appare è 1 in accordo con la teoria.

`D4`) In altro modo, e sfruttando i calcoli con la formula delle formula delle probabilità totali per $P(N)$ (domanda precedente), si ha $q = P(N^c) = 1 - P(N) = 1 - (P(N|U_1)P(U_1) + P(N|U_2)P(U_2)) = 1 - (\frac{2}{3}\frac{1}{2} + \frac{2}{4}\frac{1}{2}) = 1 - (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) = 1 - \frac{4+3}{12} = 1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$.

`D5`) La variabile aleatoria X_1 ha distribuzione geometrica "che parte da 1".

`D6`) Abbiamo $P(X_1 > X_2|X_1 \leq 2) + P(X_1 = X_2|X_1 \leq 2) = \frac{1-p}{4-2p} + \frac{3-p}{4-2p} = \frac{4-2p}{4-2p} = 1$ e questa uguaglianza è in accordo con la teoria. Infatti si ha $P(X_1 \geq X_2) = 1$ e, per proprietà della probabilità condizionata, si ha $P(X_1 \geq X_2|X_1 \leq 2) = 1$; inoltre si ha ovviamente $P(X_1 \geq X_2|X_1 \leq 2) = P(X_1 > X_2|X_1 \leq 2) + P(X_1 = X_2|X_1 \leq 2)$.

`D14`) Non è sorprendente che la condizione ottenuta sia del tipo $n \geq n_0$ perché, per n che tende ad infinito, $P(\cap_{j=1}^{n}\{X_j = 1\}|X_0 = 2) = p_{21}p_{11}^{n-1}$ tende a zero decrescendo. Inoltre n_0 non è intero; quindi, invece di $n \geq n_0$, per maggiore precisione si dovrebbe scrivere $n \geq [n_0] + 1$, dove $[n_0] = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq n_0\}$ è la *parte intera* di n_0.