Statistica per la ricerca sperimentale e tecnologica
Corso di Laurea in Informatica, Università di Roma "Tor Vergata"
Anno accademico: 2004-2005
Titolare del corso: Claudio Macci
Esame del 6 Luglio 2005

Esercizio 1. Consideriamo il seguente gioco. Si lanciano una moneta equa e due dadi equi: se esce testa nel lancio di moneta, si vince il gioco ottenendo (dai due dadi) due numeri pari; se esce croce nel lancio di moneta si vince il gioco ottenendo (dai due dadi) due volte il numero 1.
D1) Calcolare la probabilità di vincere il gioco.
D2) Calcolare la probabilità di aver ottenuto testa sapendo di aver vinto il gioco.
Una moneta equa viene lanciata 10 volte e sia X la v.a. che conta il numero di volte che si ottiene testa.
D3) Calcolare $P(X = 8)$, cioè la probabilità di ottenere testa esattamente 8 volte.

Esercizio 2. Supponiamo di avere un'urna con 3 palline bianche, 2 rosse e 3 nere. Vengono estratte 3 palline in blocco.
D4) Calcolare la probabilità di estrarre 1 pallina di ciascuno dei tre colori disponibili (cioè 1 bianca, 1 rossa e 1 nera).
Poi sia Y la v.a. che conta il numero di palline nere estratte.
D5) Calcolare la densità discreta di Y.
D6) Calcolare $P(Y \geq 1)$, cioè la probabilità di estrarre almeno 1 pallina nera.

Esercizio 3. Il numero di veicoli che arrivano ad un casello autostradale è descritto da un processo di Poisson (N_t) di intensità $\lambda = 2$. In generale sia T_n l'istante (aleatorio) di arrivo al casello del veicolo n-simo.
D7) Calcolare $P(N_3 \geq 1)$, cioè la probabilità che al tempo $t = 3$ sia arrivato al casello almeno un veicolo.
D8) Calcolare $P(T_2 \leq 10)$, cioè la probabilità che il secondo veicolo sia arrivato ad un tempo t, con $t \leq 10$.
Sia Z una v.a. con densità f_Z definita come segue: $f_Z(t) = t/2$ per $0 < t < 2$; $f_Z(t) = 0$ altrimenti.
D9) Calcolare $\mathbb{E}[Z]$.
D10) Calcolare $P(1/2 < Z < 3/2)$.

Esercizio 4. Sia W una v.a. normale con media μ e varianza $\sigma^2 = 4$.
D11) Calcolare $P(996 < W < 999)$ nel caso in cui $\mu = 1000$.
Poi supponiamo che μ sia incognito. Consideriamo un campione di $n = 16$ osservazioni indipendenti e tutte con la stessa distribuzione di W. La media dei valori osservati è 1000.
D12) Trovare l'intervallo di confidenza per μ al livello $1 - \alpha = 0.95$.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1. Sia T l'evento "esce testa" e sia V l'evento "vincere il gioco".
D1) Per la formula delle probabilità totali si ha $P(V) = P(V|T)P(T) + P(V|T^c)P(T^c) = \left(\frac{3}{6}\right)^2 \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{6}\right)^2 \frac{1}{2} = \left(\frac{9}{36} + \frac{1}{36}\right)\frac{1}{2} = \frac{10}{36} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{36}$.
D2) Per la formula di Bayes e per il valore di $P(V)$ calcolato prima si ha $P(T|V) = \frac{P(V|T)P(T)}{P(V)} = \frac{\left(\frac{3}{6}\right)^2 \frac{1}{2}}{\frac{5}{36}} = \frac{9}{72} \cdot \frac{36}{5} = \frac{9}{10}$.
D3) La v.a. X ha distribuzione binomiale con parametri $n = 10$ (numero dei lanci di moneta) e $p = \frac{1}{2}$ (moneta equa). Allora $P(X = 8) = \binom{10}{8}(\frac{1}{2})^{10} = \frac{45}{1024}$.

Esercizio 2.
D4) Si usa la formula che estende quella della distribuzione ipergeometrica nel caso in cui i tipi di oggetti che si possono estrarre sono 3 anziché 2. La probabilità richiesta è $\frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{3}{1}}{\binom{8}{3}} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 3}{56} = \frac{18}{56} = \frac{9}{28}$.
La v.a. Y ha distribuzione ipergeometrica (bisogna considerare le palline di due tipi: nere e non nere).
D5) Si ha $p_Y(k) = \frac{\binom{3}{k}\binom{5}{3-k}}{\binom{8}{3}}$ per $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ e quindi: $p_Y(0) = \frac{10}{56}$, $p_Y(1) = \frac{30}{56}$, $p_Y(2) = \frac{15}{56}$, $p_Y(3) = \frac{1}{56}$.
D6) Abbiamo $P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \frac{10}{56} = \frac{46}{56} = \frac{23}{28}$.

Esercizio 3. Ricordando le formule per il processo di Poisson abbiamo quanto segue.
D7) Si ha $P(N_3 \geq 1) = 1 - P(N_3 = 0) = 1 - \frac{(2 \cdot 3)^0}{0!} e^{-2 \cdot 3} = 1 - e^{-6}$.
D8) Si ha $P(T_2 \leq 10) = F_{T_2}(10) = 1 - e^{-2 \cdot 10} \sum_{k=0}^{2-1} \frac{(2 \cdot 10)^k}{k!} = 1 - e^{-20}(\frac{20^0}{0!} + \frac{20^1}{1!}) = 1 - 21e^{-20}$.
Ora calcoliamo le quantità richieste per la v.a. Z.
D9) Si ha $\mathbb{E}[Z] = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f_Z(t)dt = \int_0^2 t \cdot \frac{t}{2} dt = \frac{1}{2}[\frac{t^3}{3}]_0^2 = \frac{2^3}{2 \cdot 3} = \frac{4}{3}$.
D10) Si ha $P(1/2 < Z < 3/2) = \int_{1/2}^{3/2} t/2 dt = [t^2/4]_{1/2}^{3/2} = \frac{\frac{9}{4} - \frac{1}{4}}{4} = \frac{\frac{8}{4}}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Esercizio 4.
D11) La v.a. $Z_W = \frac{W - 1000}{\sqrt{4}}$ è la standardizzata di W e si ha $P(996 < W < 999) = P(\frac{996-1000}{\sqrt{4}} < \frac{W-1000}{\sqrt{4}} < \frac{999-1000}{\sqrt{4}}) = P(-4/2 < Z_W < -1/2) = \Phi(-1/2) - \Phi(-2) = 1 - \Phi(1/2) - (1 - \Phi(2)) = \Phi(2) - \Phi(1/2) = \Phi(2) - \Phi(0.5) = 0.97725 - 0.69146 = 0.28579$.
D12) L'intervallo di confidenza richiesto è $\left[\overline{x}_n - \phi_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x}_n + \phi_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$. Si ha $\overline{x}_n = 1000$, $\sigma = \sqrt{4}$, $n = 16$; inoltre $1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975$ segue da $1 - \alpha = 0.95$ e quindi $\phi_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.96$. In conclusione l'intervallo di confidenza richiesto è $[999.02, 1000.98]$.

Commenti.
D5) Si ha $p_Y(0) + p_Y(1) + p_Y(2) + p_Y(3) = 1$ e questo è in accordo con la teoria.
D6) Si poteva procedere anche in questo modo: $P(Y \geq 1) = p_Y(1) + p_Y(2) + p_Y(3) = \frac{30+15+1}{56} = \frac{46}{56} = \frac{23}{28}$.