Corso di Laurea in Informatica - A.A. 2020-2021

(Prof. Paolo Camarri – Massimo Bassan)

Cognome:

Nome:

Matricola:

Primo Appello autunnale del corso di Fisica del 02.09.2021

Problema n. 1

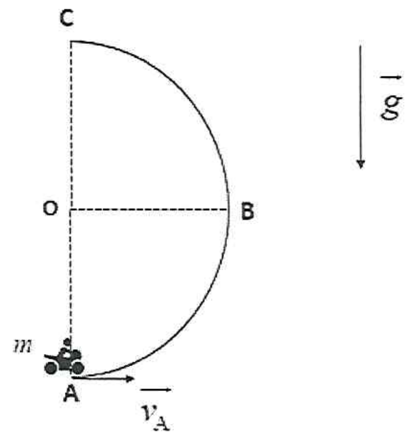
Una motocicletta (da considerare come un punto materiale) avente massa $m = 150$ kg inizia a percorrere, in un piano verticale, la superficie interna di una parete la cui sezione verticale è a forma di semicirconferenza di centro O e raggio $R = 10$ m. Il modulo della velocità iniziale della motocicletta è $v_A = |\overrightarrow{v_A}| = 20 \text{ m s}^{-1}$ e non c'è attrito tra le ruote della motocicletta e la superficie.

$\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = 90°$

$\overline{AO} = \overline{BO} = \overline{CO} = R = 10\text{m}$

$m = 150\text{kg}$

$|\overrightarrow{v_A}| = 20 \text{ ms}^{-1}$



a) Quanto vale il modulo N_A della reazione vincolare della superficie sulla motocicletta quando questa di trova nel punto A (<u>subito dopo avere iniziato a percorrere la traiettoria semicircolare</u>)?

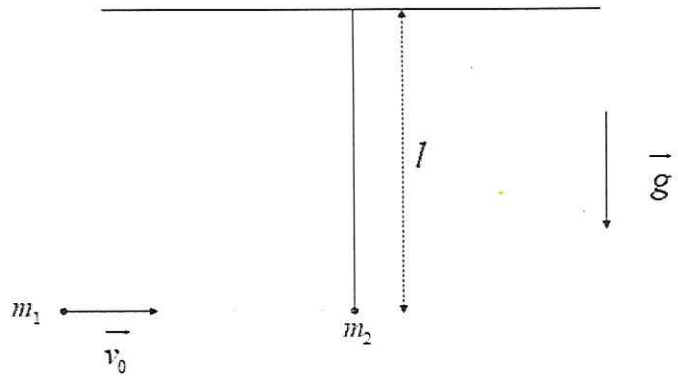
b) Quanto vale il modulo N_B della reazione vincolare della superficie sulla motocicletta quando questa si trova nel punto B?

c) Quale è il minimo valore che deve avere $v_C = |\overrightarrow{v_C}|$ affinché la reazione vincolare della superficie sulla moto nel punto C abbia modulo maggiore o uguale a zero?

d) Con i dati assegnati, a quale quota H al di sopra del punto A la moto si stacca dalla superficie? (può essere utile determinare anzitutto l'angolo $\theta = \widehat{COP}$, dove P è il punto in cui la moto si stacca dalla superficie, non mostrato nella figura)

Problema n. 2

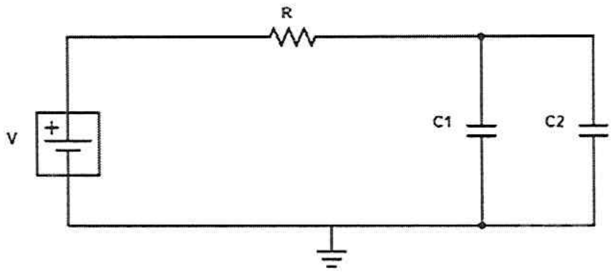
Un punto materiale di massa $m_1 = 0.05\ \mathrm{kg}$ si muove inizialmente di moto rettilineo uniforme lungo la direzione orizzontale, con velocità di modulo $v_0 = |\vec{v_0}| = 6\ \mathrm{m\,s^{-1}}$. All'istante $t = 0$ urta un secondo punto materiale di massa $m_2 = 0.1\ \mathrm{kg}$ attaccato all'estremo inferiore di un filo di lunghezza $l = 2\ \mathrm{m}$ di massa trascurabile e fissato al soffitto all'altro estremo (vedi figura). Nell'urto i due punti materiali restano attaccati l'uno all'altro.



a) Si calcoli il modulo V della velocità del sistema dei due punti materiali immediatamente dopo l'urto.
b) Si calcolino il valore dell'angolo massimo θ_M tra il filo e la direzione verticale successivamente all'urto e la quota h_M (al di sopra della quota iniziale dei due punti materiali) raggiunta dal sistema dei due punti materiali in corrispondenza di tale angolo massimo.
c) Si calcoli il modulo T_0 della tensione del filo subito dopo l'urto.
d) Si calcoli il modulo T_M della tensione del filo in corrispondenza dell'angolo θ_M calcolato al punto b) e lo si confronti con il valore assoluto della componente lungo la direzione del filo della forza peso in tale posizione. Si spieghi il risultato ottenuto e lo si confronti con la situazione descritta al punto c).

Problema n. 3

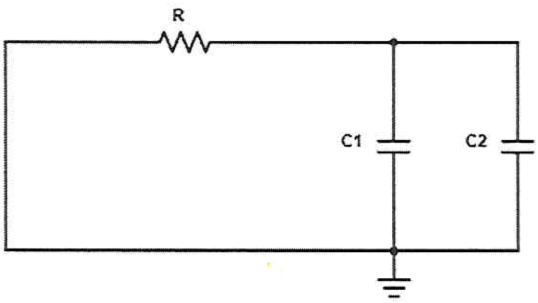
Si consideri il circuito elettrico schematizzato nella figura, con i seguenti valori numerici dei parametri: $V = 10\,\mathrm{V}$, $R = 10\,\Omega$, $C1 = 10^{-9}\,\mathrm{F}$, $C2 = 3 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{F}$. I due condensatori sono inizialmente scarichi, e a un certo istante il generatore di tensione viene acceso.



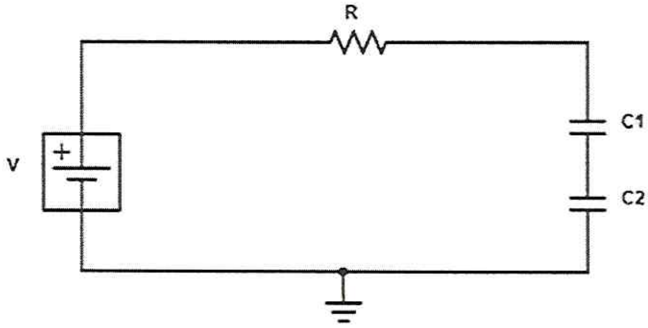
a) Si calcoli la capacità equivalente C_e del sistema costituito dai due condensatori.

b) Si calcolino le cariche elettriche Q_1, Q_2 (rispettivamente sul condensatore $C1$ e sul condensatore $C2$) quando il sistema ha raggiunto le condizioni di regime.

c) Dopo che il sistema ha raggiunto le condizioni di regime, il generatore di tensione viene rimosso, il ramo di sinistra del circuito viene cortocircuitato e i condensatori iniziano a scaricarsi (vedi figura sotto). Si calcolino la costante di tempo τ del circuito in queste condizioni e a quale istante t_1 (a partire dall'istante in cui ha inizio la scarica, $t = 0$) le cariche sui condensatori risultano dimezzate rispetto ai loro valori all'inizio della scarica.



d) Come cambiano le risposte alle domande a) e b) se i due condensatori, inizialmente scarichi, sono connessi nel modo seguente?



Quanto valgono, in condizioni di regime, le differenze di potenziale V_1 e V_2, tra le armature di $C1$ e $C2$ rispettivamente, in questo ultimo caso?

Scrivere il nome su ogni foglio consegnato.

Lasciare per la correzione il terzo superiore della prima pagina, con il solo nome.

NON correggeremo soluzioni numeriche prive di una corrispondente equazione simbolica.

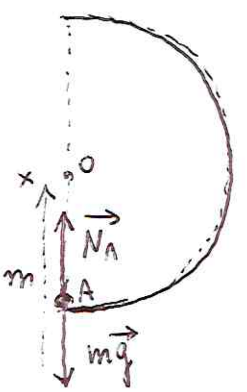
Risultati sul sito del corso

PROVA SCRITTA DI FISICA PER INFORMATICA

1° APPELLO AUTUNNALE 02/09/2021

PROBLEMA N. 1

a) Subito dopo che la motocicletta ha iniziato a percorrere la traiettoria semicircolare, il diagramma delle forze agenti sulla motocicletta è il seguente:



Poniamo $N_A = |\vec{N}_A|$, $g = |\vec{g}|$, e consideriamo un asse x diretto lungo il raggio AO, con verso positivo da A verso O.

Applichiamo la seconda legge della dinamica alla motocicletta in tale istante:

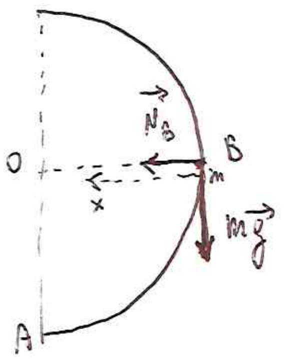
$$\vec{N}_A + m\vec{g} = m\,\vec{a}_A\,,$$ essendo $\vec{a}_A$ il vettore accelerazione della motocicletta in tale istante. Nel punto A, subito dopo che la motocicletta ha iniziato a percorrere la traiettoria semicircolare, l'accelerazione della motocicletta è solo centripeta (la componente tangenziale della sua accelerazione è nulla in quanto, in tale istante, la componente tangenziale della risultante delle forze applicate alla motocicletta è nulla, vedi figura sopra).

Pertanto, passando alle componenti dei vettori lungo l'asse x e tenuto conto che risulta $|\vec{a}_A| = \frac{|\vec{v}_A|^2}{R}$, possiamo scrivere:

$$N_A - mg = m\frac{v_A^2}{R},$$ da cui ricaviamo

$$\boxed{N_A = m\left(g + \frac{v_A^2}{R}\right) = (150\ kg)\cdot\left(9{,}81\ \frac{m}{s^2} + \frac{(20\ m\ s^{-1})^2}{(10\ m)}\right) \simeq 0{,}747 \times 10^4\ N}$$

b)



Nel punto B il diagramma delle forze agenti sulla motocicletta è schematizzato qui a fianco.
Stavolta l'unica forza che ha componente non nulla lungo la direzione radiale BO è la reazione vincolare della superficie nel punto B. Pertanto la seconda legge della dinamica adesso ci permette di scrivere l'equazione seguente:

$\vec{N}_B + m\vec{g} = m\vec{a}_B$; per quanto riguarda le componenti dei vettori lungo la direzione x (verso positivo da B verso O), risulta quindi:

$$N_B = m\,a_{B,x}, \quad \text{con} \quad N_B = |\vec{N}_B|$$

La componente x di $\vec{a}_B$ è la componente centripeta dell'accelerazione, per cui risulta $a_{B,x} = \frac{|\vec{v}_B|^2}{R}$

Per calcolare $|\vec{v}_B|^2$ si sfrutta il fatto che l'energia meccanica della motocicletta si conserva durante il moto, in quanto non sono presenti forze di attrito (ipotesi del problema) e l'unica forza che compie lavoro è la forza peso, che è conservativa (la reazione vincolare non compie lavoro poiché è, a ogni istante, diretta perpendicolarmente alla direzione della velocità istantanea). Dunque:

$$\frac{1}{2}\cancel{m}\,|\vec{v}_B|^2 + \cancel{m}gR = \frac{1}{2}\cancel{m}\,|\vec{v}_A|^2 \quad , \quad \text{da cui:}$$

$$|\vec{v}_B|^2 = |\vec{v}_A|^2 - 2gR = v_A^2 - 2gR \quad ; \quad \text{allora:}$$

$$\boxed{N_B = m\,a_{B,x} = m\,\frac{|\vec{v}_B|^2}{R} = m\left(\frac{v_A^2}{R} - 2g\right) \simeq 3{,}057 \times 10^3\ N}$$

c)

Nell'istante in cui la motocicletta arriva nel punto C, il diagramma delle forze agenti sulla motocicletta è schematizzato qui a fianco. La seconda legge della dinamica ci permette di scrivere l'equazione seguente:

$$\vec{N}_c + m\vec{g} = m\vec{a}_c$$

Per quanto riguarda le componenti dei vettori lungo la direzione x (verso positivo da C verso O), risulta quindi

$$N_c + mg = m\,a_{c,x} \quad , \quad \text{con} \quad N_c = |\vec{N}_c|$$

La componente x di $\vec{a}_c$ e' la componente centripeta dell' accelerazione, per cui risulta

$$a_{c,x} = \frac{|\vec{v}_c|^2}{R}$$

Dunque possiamo scrivere

$$N_c = m\left(a_{c,x} - g\right) = m\left(\frac{v_c^2}{R} - g\right)$$

Affinché risulti $N_c \geq 0$ (condizione necessaria affinché la motocicletta sia a contatto con la superficie nel punto C), deve quindi valere la condizione

$$\frac{v_c^2}{R} - g \geq 0, \quad \text{da cui ricaviamo}$$

$$v_c^2 \geq gR \quad , \quad \text{cioe'} \quad v_c \geq \sqrt{gR}$$

Pertanto, il minimo valore che deve avere v_c affinché risulti $N_c \geq 0$ e'

$$\boxed{v_{c,min} = \sqrt{gR} = \sqrt{(9{,}81\ m\,s^{-2})\cdot(10\ m)} \simeq 9{,}9045\ m\,s^{-1}}$$

d) Affinché la motocicletta possa arrivare nel punto C con $|\vec{V}_C|$ sufficiente a mantenere la motocicletta a contatto con la superficie, deve risultare $|\vec{V}_A| = V_A \geq V_{A,min}$.

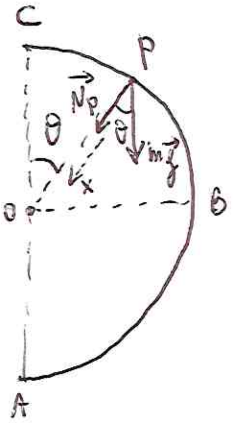
Per la legge di conservazione dell'energia meccanica deve risultare

$$\frac{1}{2} m V_A^2 = \frac{1}{2} m V_C^2 + mg \cdot (2R), \text{ da cui}$$

$$V_A^2 = V_C^2 + 4gR \geq gR + 4gR = 5gR$$

Dunque $V_{A,min} = \sqrt{5gR} \simeq 22,147 \text{ m s}^{-1}$

Dato che $V_A = 20 \text{ m s}^{-1}$ in questo problema, la motocicletta non potrà raggiungere il punto C, e si staccherà dalla superficie in un punto P che si trova lungo l'arco BC della superficie: in questo punto il modulo della reazione vincolare si annulla.



Per la seconda legge della dinamica possiamo scrivere:

$$\vec{N}_P + m\vec{g} = m\vec{a}_P$$

Poniamo $N_P = |\vec{N}_P|$, e $C\hat{O}P = \theta$ (come suggerito dal testo del problema).

Per quanto riguarda le componenti dei vettori lungo la direzione x (verso positivo da P a O) risulta quindi:

$$N_P + mg\cos\theta = m\,a_{P,x}$$

La componente x di $\vec{a}_P$ e' la componente centripeta dell'accelerazione, per cui risulta

$$a_{P,x} = \frac{|\vec{v}_P|^2}{R}$$

Calcoliamo $|\vec{v}_P|^2$ sfruttando la conservazione dell'energia meccanica:

$$\frac{1}{2}m|\vec{v}_P|^2 + mg(R + R\cos\theta) = \frac{1}{2}m|\vec{v}_A|^2, \quad \text{da cui}$$

$$|\vec{v}_P|^2 = |\vec{v}_A|^2 - 2gR(1+\cos\theta)$$

Otteniamo quindi:

$$N_P = m(a_{P,x} - g\cos\theta) = m\left(\frac{|\vec{v}_P|^2}{R} - g\cos\theta\right) =$$

$$= m\left(\frac{|\vec{v}_A|^2}{R} - 2g(1+\cos\theta) - g\cos\theta\right) = m\left(\frac{|\vec{v}_A|^2}{R} - g(2+3\cos\theta)\right)$$

Pertanto, l'angolo θ per cui N_P si annulla si ricava risolvendo l'equazione seguente:

$$\frac{|\vec{v}_A|^2}{R} - g(2+3\cos\theta) = 0, \quad \text{da cui:}$$

$$g(2+3\cos\theta) = \frac{|\vec{v}_A|^2}{R} \Rightarrow 2+3\cos\theta = \frac{|\vec{v}_A|^2}{gR} \Rightarrow 3\cos\theta = \frac{|\vec{v}_A|^2}{gR} - 2,$$

e infine $\cos\theta = \frac{1}{3}\left(\frac{|\vec{v}_A|^2}{gR} - 2\right) \simeq 0{,}69249 \Rightarrow \theta \simeq 0{,}806 \text{ rad} \simeq 46°$

Pertanto la quota del punto P è

$$\boxed{H = R(1+\cos\theta) = R\left[1 + \frac{|\vec{v}_A|^2}{3gR} - \frac{2}{3}\right] = \frac{R}{3}\left(1 + \frac{|\vec{v}_A|^2}{gR}\right) \simeq 16{,}925\ m}$$

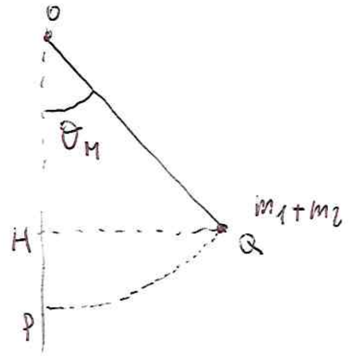
PROBLEMA N. 2

a) Poiché durante l'urto le forze agenti sul sistema sono tutte dirette lungo la direzione verticale (forze peso dei due punti materiali e tensione del filo), la componente orizzontale della forza risultante è nulla, per cui la componente orizzontale della quantità di moto totale del sistema dei due punti materiali si conserva nell'urto. Per le ipotesi del problema l'urto è totalmente anelastico, per cui possiamo scrivere:

$$(m_1+m_2)V = m_1 v_0 \quad , \quad \text{da cui otteniamo}$$

$$\boxed{V = \frac{m_1 v_0}{m_1+m_2} = \frac{(0.05\ kg)\cdot(6\ m\,s^{-1})}{0.05\ kg + 0.1\ kg} \simeq 2\ m\,s^{-1}}$$

b) Dopo l'urto, l'energia meccanica del sistema si conserva dato che l'unica forza che compie lavoro è la forza peso, che è conservativa.



Dallo schema qui a fianco ricaviamo la quota del sistema delle due masse (al di sopra del punto P in cui è avvenuto l'urto) in corrispondenza dell'angolo ϑ_M:

$$h_M = \overline{PH} = \overline{OP} - \overline{OH} = \ell - \ell\cos\vartheta_M = \ell(1-\cos\vartheta_M)$$

Allora, dato che per $\vartheta = \vartheta_M$ la velocità istantanea del sistema delle due masse è nulla, possiamo scrivere:

$$\cancel{(m_1+m_2)}g\ell(1-\cos\vartheta_M) = \frac{1}{2}\cancel{(m_1+m_2)}V^2,$$ da cui:

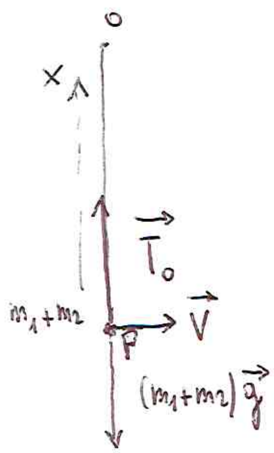
$$1-\cos\vartheta_M = \frac{V^2}{2g\ell} \Rightarrow \cos\vartheta_M = 1-\frac{V^2}{2g\ell},$$ e quindi

$$\boxed{\vartheta_M = \arccos\left(1-\frac{V^2}{2g\ell}\right) = \arccos\left[1-\frac{1}{2g\ell}\left(\frac{m_1 V_0}{m_1+m_2}\right)^2\right] \simeq 0{,}455 \text{ rad} \simeq 26^\circ}$$

Quindi otteniamo anche

$$\boxed{h_M = \ell(1-\cos\vartheta_M) = \frac{V^2}{2g} = \frac{1}{2g}\left(\frac{m_1 V_0}{m_1+m_2}\right)^2 \simeq 0{,}204 \text{ m}}$$

)



Il diagramma delle forze agenti sul sistema dei due punti materiali subito dopo l'urto è rappresentato qui a fianco.

Dalla seconda legge della dinamica otteniamo:

$$\vec{T}_0 + (m_1+m_2)\,\vec{g} = (m_1+m_2)\,\vec{a}_0 \quad ,$$

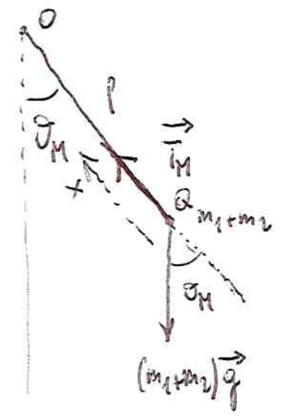
dove $\vec{T}_0$ è la tensione del filo in tale posizione e $\vec{a}_0$ è l'accelerazione del sistema in tale posizione.

Passando alle componenti dei vettori lungo l'asse x (verso positivo da P a O), possiamo quindi scrivere, posto $T_0 = |\vec{T}_0|$, $g = |\vec{g}|$, e tenuto conto che $|\vec{a}_0| = \frac{V^2}{\ell}$:

$$T_0 - (m_1+m_2)g = (m_1+m_2)\frac{V^2}{\ell}, \quad \text{da cui}$$

$$\boxed{T_0 = (m_1+m_2)\left(g + \frac{V^2}{\ell}\right) = 1.7715\ N}$$

d)



Il diagramma delle forze agenti sul sistema dei due punti materiali nella posizione $\vartheta = \vartheta_M$ è rappresentato qui a fianco.

Dalla seconda legge della dinamica otteniamo:

$$\vec{T}_M + (m_1 + m_2)\vec{g} = (m_1 + m_2)\vec{a}_M ,$$

dove $\vec{T}_M$ è la tensione del filo in tale posizione e $\vec{a}_M$ è l'accelerazione del sistema in tale posizione.

Passando alle componenti dei vettori lungo l'asse x (verso positivo da Q a O), possiamo quindi scrivere, posto $T_M = |\vec{T}_M|$, $g = |\vec{g}|$ e tenuto conto che $a_{M,x} = \frac{|\vec{v}_Q|^2}{\ell} = 0$, in quanto $|\vec{v}_Q| = 0$ in tale posizione:

$$T_M - (m_1 + m_2)\, g \cos\vartheta_M = 0, \quad \text{da cui}$$

$$\boxed{T_M = (m_1 + m_2)\, g \cos\vartheta_M = (m_1 + m_2)\, g \left(1 - \frac{V^2}{2g\ell}\right) = 1.3215\ N}$$

T_M coincide con il valore assoluto della componente lungo la direzione del filo della forza peso in tale posizione: infatti, poiché la velocità istantanea del sistema dei due corpi in tale punto è nulla, è nulla anche l'accelerazione centripeta del sistema dei due corpi in tale punto, e quindi la componente lungo la direzione del filo della forza risultante agente sul sistema dei due corpi è nulla in tale punto, e questo spiega il risultato ottenuto.

Nella situazione descritta al punto c), invece, risulta

$T_0 > (m_1 + m_2) g$, in quanto il sistema dei due corpi, muovendosi con velocità istantanea $V \neq 0$, ha una accelerazione centripeta, per cui la componente lungo la direzione del filo della forza risultante agente nel sistema dei due corpi non può essere nulla, ~~e~~ dunque T_0 non è uguale alla componente lungo la direzione del filo (in valore assoluto) della forza peso del sistema dei due corpi nella posizione P studiata al punto c)

PROBLEMA N. 3

a) La capacità equivalente del sistema di due condensatori in parallelo è, come noto:

$$\boxed{C_e = C_1 + C_2 = 10^{-9}\,F + 3\cdot 10^{-9}\,F = 4\cdot 10^{-9}\,F}$$

b) A regime, non scorre più corrente attraverso il resistore e la differenza di potenziale ai capi di ciascuno dei due condensatori è $V = 10\ V$.

Pertanto le cariche elettriche sulle armature dei due condensatori sono le seguenti:

$$\boxed{Q_1 = C_1 V = (10^{-9}\,F)\cdot(10\ V) = 10^{-8}\,C = 10\ nC}$$

$$\boxed{Q_2 = C_2 V = (3\cdot 10^{-9}\,F)\cdot(10\ V) = 3\cdot 10^{-8}\,C = 30\ nC}$$

c) La costante di tempo del circuito si ottiene sostituendo ai due condensatori in parallelo la corrispondente capacità equivalente, in serie con il resistore. Allora la costante di tempo è

$$\boxed{\tau = R C_e = R(C_1 + C_2) = 4\times 10^{-8}\,s = 40\ ns}$$

L'andamento temporale delle cariche su ciascun condensatore segue una legge del tipo $q(t) = q_0\, e^{-t/\tau}$

Pertanto, se $t = t_1$ è l'istante in cui risulta $q(t_1) = q_0/2$, possiamo scrivere:

$$\frac{q(t_1)}{q(0)} = \frac{q_0\, e^{-t_1/\tau}}{q_0} = \frac{1}{2} \Rightarrow \quad e^{-t_1/\tau} = \frac{1}{2}, \quad \text{cioè}$$

$$e^{t_1/\tau} = 2, \quad \text{da cui} \quad \frac{t_1}{\tau} = \ln 2, \quad \text{e infine}$$

$$\boxed{t_1 = \tau \ln 2 = R(C_1 + C_2)\ln 2 \simeq 2{,}77 \times 10^{-8}\, s = 27.7\, ns}$$

d) La capacità equivalente dei due condensatori collegati in serie è

$$\boxed{C_e = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{(10^{-9}\,F)\cdot(3\times 10^{-9}\,F)}{4\times 10^{-9}\,F} = 0.75 \times 10^{-3}\,F = 0.75\, mF}$$

Nel collegamento in serie, a regime la carica è la stessa sui due condensatori (che erano inizialmente scarichi).

Pertanto, posto $Q = Q_1 = Q_2$, imponiamo che la somma delle differenze di potenziale dei due condensatori sia uguale a $V = 10\, V$:

$$\frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = V$$, cioè $\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) Q = V$, e infine

$$\boxed{Q = Q_1 = Q_2 = \frac{V}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} = \frac{C_1 C_2 V}{C_1 + C_2} \cong 0.75 \times 10^{-8} C = 7.5 \, nC}$$

Infine, le differenze di potenziale tra le armature di ciascuno dei due condensatori sono:

$$\boxed{\begin{aligned} V_1 &= \frac{Q}{C_1} = \frac{C_2 V}{C_1 + C_2} = 7.5 \, V \\ V_2 &= \frac{Q}{C_2} = \frac{C_1 V}{C_1 + C_2} = 2.5 \, V \end{aligned}}$$