Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità (ed insegnamenti mutuati)
Anno accademico: `2016-2017`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Appello del 6 Settembre 2017

Esercizio 1. Un'urna contiene 7 palline numerate da 1 a 7. Si estraggono a caso 3 palline in blocco.
`D1`) Calcolare la probabilità di estrarre una pallina con un numero dispari.
`D2`) Calcolare la probabilità di estrarre almeno una pallina con uno dei numeri $1, 2, 3, 4$.

Esercizio 2. Abbiamo un dado con i numeri $1, 2, 3, 4, 5, 5$ e un'urna con 1 pallina bianca e 1 nera. Si lancia il dado: se esce un numero pari si mette una pallina bianca nell'urna, se esce un numero dispari si mette una pallina nera nell'urna. Poi si estrae una pallina a caso dall'urna.
`D3`) Calcolare la probabilità di estrarre una pallina bianca.
`D4`) Calcolare la probabilità di aver ottenuto un numero dispari nel lancio del dado sapendo di aver estratto una pallina bianca.

Esercizio 3. Siano $\lambda > 0$ arbitrariamente fissato e consideriamo la seguente densità congiunta: $p_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{1+x_1+x_2} \cdot \frac{\lambda^{x_1+x_2}}{(x_1+x_2)!} e^{-\lambda}$ per $x_1, x_2 \geq 0$ interi.
`D5`) Trovare la distribuzione di $Y = X_1 + X_2$.
`D6`) Calcolare $P(X_1 = 1|X_1 + X_2 = 1)$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con distribuzione uniforme su (e^2, e^4).
`D7`) Trovare la funzione di distribuzione di $Y = \log X$.
`D8`) Calcolare $\mathbb{E}[\sqrt{X}]$.

Esercizio 5.
`D9`) Sia $N_t = \sum_{n\geq 1} 1_{T_n \leq t}$ (per $t \geq 0$) un processo di Poisson con intensità di $\lambda = \frac{2}{5}$. Calcolare $P(N_5 = 3)$.
`D10`) Sia X una variabile aleatoria Normale standard. Calcolare $P(X > 1.75)$.

Esercizio 6. Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. (indipendenti e identicamente distribuite).
`D11`) Dire per quale valore di m si ha

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - m\right| > \varepsilon\right) = 0 \text{ per ogni } \varepsilon > 0,$$

nel caso in cui le variabili aleatorie $\{X_n : n \geq 1\}$ abbiano densità discreta $p_X(k) = \frac{\binom{10}{k}\binom{10}{4-k}}{\binom{20}{4}}$ per $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.
`D12`) Trovare il valore di y per cui si ha

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - n}{\sqrt{n}} \leq y\right) = \Phi(\sqrt{3}/2)$$

nel caso in cui le variabili aleatorie $\{X_n : n \geq 1\}$ abbiano distribuzione uniforme su $(0, 2)$.

Esercizio 7 (*solo per Lauree Magistrali*). Consideriamo una catena di Markov omogenea $\{X_n : n \geq 0\}$ con spazio degli stati $E = \{1, 2\}$ e matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

`D13`) Trovare la densità discreta di X_1 nel caso in cui $P(X_0 = 1) = P(X_0 = 2) = 1/2$.
`D14`) Trovare la densità discreta di X_2 nel caso in cui $P(X_0 = 2) = 1$.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
D1) La probabilità richiesta è $\frac{\binom{4}{1}\binom{3}{2}}{\binom{7}{3}} = \frac{4\cdot 3}{35} = \frac{12}{35}$.
D2) La probabilità richiesta è $\sum_{k=1}^{3} \frac{\binom{4}{k}\binom{3}{3-k}}{\binom{7}{3}} = \frac{4\cdot 3+6\cdot 3+4\cdot 1}{35} = \frac{34}{35}$.

Esercizio 2. Indichiamo con B l'evento "estratta pallina bianca", e con D l'evento "esce dispari nel lancio del dado".
D3) Per la formula delle probabilità totali si ha $P(B) = P(B|D^c)P(D^c) + P(B|D)P(D) = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{6} + \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{6} = \frac{4+4}{18} = \frac{4}{9}$.
D4) Per la formula di Bayes, e tenendo conto del valore di $P(B)$ calcolato prima, si ha $P(D|B) = \frac{P(B|D)P(D)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{6}}{4/9} = \frac{4}{18}\frac{9}{4} = \frac{1}{2}$.

Esercizio 3.
D5) Per $k \geq 0$ intero si ha $p_{X_1+X_2}(k) = \sum_{x_1,x_2\geq 0, x_1+x_2=k} p_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \sum_{x_1,x_2\geq 0, x_1+x_2=k} \frac{1}{1+k}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = (k+1)\cdot\frac{1}{1+k}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ (in particolare abbiamo tenuto conto che si hanno $k+1$ coppie di interi non negativi la cui somma è k: $(0,k),(1,k-1),\ldots,(k-1,1),(k,0)$).
D6) Si ha $P(X_1 = 1|X_1+X_2 = 1) = \frac{P(X_1=1, X_1+X_2=1)}{P(X_1+X_2=1)} = \frac{P(X_1=1,X_2=0)}{P(X_1+X_2=1)} = \frac{p_{X_1,X_2}(1,0)}{p_{X_1+X_2}(1)} = \frac{\frac{1}{1+1+0}\cdot\frac{\lambda^{1+0}}{(1+0)!}e^{-\lambda}}{\frac{\lambda^1}{1!}e^{-\lambda}} = \frac{1}{2}$.

Esercizio 4.
D7) Si vede che $P(2 \leq Y \leq 4) = 1$ e quindi $F_Y(y) = 0$ per $y \leq 2$ e $F_Y(y) = 1$ per $y \geq 4$. Per $y \in (2,4)$ si ha $F_Y(y) = P(\log X \leq y) = P(X \leq e^y) = \int_{e^2}^{e^y} \frac{1}{e^4-e^2}dx = \frac{1}{e^4-e^2}[x]_{x=e^2}^{x=e^y} = \frac{e^y-e^2}{e^4-e^2}$.
D8) Si ha $\mathbb{E}[\sqrt{X}] = \int_{e^2}^{e^4} \sqrt{x}\cdot\frac{1}{e^4-e^2}dx = \frac{1}{e^4-e^2}[\frac{x^{3/2}}{3/2}]_{x=e^2}^{x=e^4} = \frac{2(e^6-e^3)}{3(e^4-e^2)} = \frac{2e^3(e^3-1)}{3e^2(e^2-1)} = \frac{2e(e^2+e+1)}{3(e+1)}$.

Esercizio 5.
D9) Si ha $P(N_5 = 3) = \frac{(\frac{2}{5}\cdot 5)^3}{3!}e^{-\frac{2}{5}\cdot 5} = \frac{4}{3}e^{-2}$.
D10) Si ha $P(X > 1.75) = 1 - \Phi(1.75) = 1 - 0.95994 = 0.04006$.

Esercizio 6.
D11) Per la legge dei grandi numeri il valore di m richiesto è $m = \sum_{k=0}^{4} k\cdot\frac{\binom{10}{k}\binom{10}{4-k}}{\binom{20}{4}}$. Facendo i calcoli si ha $m = \frac{0\cdot 210+1\cdot 1200+2\cdot 2025+3\cdot 1200+4\cdot 210}{4845} = 2$. In alternativa, per la teoria della distribuzione ipergeometrica, più rapidamente si ha $m = 4\cdot\frac{10}{20} = 2$.
D12) La standardizzata di $X_1+\cdots+X_n$ è $\frac{X_1+\cdots+X_n-n}{\sqrt{\frac{(2-0)^2}{12}}\sqrt{n}}$. Allora $\left\{\frac{X_1+\cdots+X_n-n}{\sqrt{n}} \leq y\right\} = \left\{\frac{X_1+\cdots+X_n-n}{\sqrt{1/3}\sqrt{n}} \leq \frac{y}{\sqrt{1/3}}\right\}$ e, per il teorema limite centrale, si deve avere $\frac{y}{\sqrt{1/3}} = \sqrt{3}/2$, da cui segue $\sqrt{3}y = \sqrt{3}/2$ e $y = \frac{1}{2}$.

Esercizio 7.
D13) Si ha

$$(p_{X_1}(1), p_{X_1}(2)) = (1/2, 1/2)\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$
$$= \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6}, \frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{5}{12}, \frac{7}{12}\right).$$

D14) Si ha

$$(p_{X_2}(1), p_{X_2}(2)) = (0,1)\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$
$$= (1/3, 2/3)\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{1}{6} + \frac{2}{9}, \frac{1}{6} + \frac{4}{9}\right) = \left(\frac{7}{18}, \frac{11}{18}\right).$$

Commenti.
La somma dei valori di ciascuna densità discreta che appare è 1 in accordo con la teoria.

`D2`) In altro modo (più rapido) la probabilità richiesta è uguale a $1-\frac{\binom{4}{0}\binom{3}{3}}{\binom{7}{3}}=1-\frac{1}{35}=\frac{34}{35}$.
`D6`) In generale, dati $k\geq 0$ e $j\in\{0,\dots,k\}$, si ha $P(X_1=j|X_1+X_2=k)=\frac{P(X_1=j,X_1+X_2=k)}{P(X_1+X_2=k)}=\frac{P(X_1=j,X_2=k-j)}{P(X_1+X_2=k)}=\frac{p_{X_1,X_2}(j,k-j)}{p_{X_1+X_2}(k)}=\frac{\frac{1}{1+j+(k-j)}\cdot\frac{\lambda^{j+(k-j)}}{(j+(k-j))!}e^{-\lambda}}{\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}}=\frac{1}{1+k}$. Si recupera il caso dell'esercizio con $j=1$ e $k=1$.
`D8`) In altro modo, meno rapido, si ha può fare riferimento alla densità di $Z=\sqrt{X}$. Si ha $P(e\leq Z\leq e^2)=1$, da cui segue $F_Z(z)=0$ per $z\leq e$ e $F_Z(z)=1$ per $z\geq e^2$. Inoltre, per $z\in(e,e^2)$, si ha $F_Z(z)=P(X\leq z^2)=\frac{z^2}{e^4-e^2}$, e quindi $f_Z(z)=\frac{2z}{e^4-e^2}1_{(e,e^2)}(z)$. Allora $\mathbb{E}[\sqrt{X}]=\int_e^{e^2}z\frac{2z}{e^4-e^2}dz=\frac{2}{e^4-e^2}\int_e^{e^2}z^2dz=\frac{2}{e^4-e^2}[\frac{z^3}{3}]_{z=e}^{z=e^2}=\frac{2(e^6-e^3)}{3(e^4-e^2)}$.