Statistica per la ricerca sperimentale e tecnologica
Corso di Laurea in Informatica, Università di Roma "Tor Vergata"
Anno accademico: 2005-2006
Titolare del corso: Claudio Macci
Simulazione 1

Esercizio 1. Un'urna contiene 2 palline bianche, 3 rosse e 2 nere. Si estraggono a caso 3 palline, una alla volta e senza reinserimento.
D1) Calcolare la probabilità di ottenere la sequenza di colori (bianco,rosso,nero).
D2) Calcolare la probabilità di avere almeno una pallina rossa.

Esercizio 2. Si consideri il seguente gioco. Si lancia un dado equo: se esce il numero 1 si lancia un altro dado e si vince se esce un numero pari; se esce un numero diverso da 1 si lanciano due monete eque e si vince se escono due teste.
D3) Calcolare la probabilità di vincere il gioco.
D4) Calcolare la probabilità di aver lanciato le due monete sapendo di aver vinto il gioco.

Esercizio 3. Siano X_1 e X_2 due variabili aleatorie indipendenti con distribuzione di Poisson con parametri λ_1 e λ_2 rispettivamente.
D5) Verificare che $\mathrm{Cov}(X_1, X_1 + X_2) = \lambda_1$.
D6) Verificare che $P(\{X_1 = 0\} \cap \{X_2 = 0\}) = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con densità $f_X(t) = 2t$ per $t \in [0,1]$ e $f_X(t) = 0$ altrimenti.
D7) Calcolare $\mathbb{E}[X]$.
D8) Calcolare $P(X > 1/3|X < 3/4)$.

Esercizio 5. Sia U una variabile aleatoria con distribuzione uniforme su $[5,7]$.
D9) Calcolare $\mathbb{E}[U]$.
D10) Calcolare $\mathrm{Var}[U]$.

Esercizio 6. Sia Y una variabile aleatoria normale con media $\mu = 3$ e varianza $\sigma^2 = 9$.
D11) Calcolare $P(Y < 0)$.
Sia Z un'altra variabile aleatoria e supponiamo quanto segue: Z ha distribuzione normale standard; Y e Z sono indipendenti.
D12) Trovare la distribuzione di $W = Y - 2Z$.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
D1) Con notazioni ovvie si ha $P(B_1 \cap R_2 \cap N_3) = P(N_3|R_2 \cap B_1)P(R_2|B_1)P(B_1) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{7} = \frac{2}{35}$.
D2) Se X indica il numero di palline rosse estratte, la probabilità richiesta è $P(X \geq 1)$. Allora $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{\binom{3}{0}\binom{4}{3}}{\binom{7}{3}} = 1 - \frac{4}{35} = \frac{31}{35}$.

Esercizio 2. Sia V l'evento "vincere il gioco" e E l'evento "esce 1 nel lancio iniziale del dado".
D3) Per la formula delle probabilità totali si ha $P(V) = P(V|E)P(E) + P(V|E^c)P(E^c) = \frac{3}{6}\frac{1}{6} + [(1/2)(1/2)]\frac{5}{6} = \frac{1}{12} + \frac{5}{24} = \frac{2+5}{24} = \frac{7}{24}$.
D4) Si lanciano le monete se e solo se si verifica E^c. Allora, per la formula di Bayes e sfruttando il valore di $P(V)$ calcolato prima, si ha $P(E^c|V) = \frac{P(V|E^c)P(E^c)}{P(V)} = \frac{[(1/2)(1/2)]\frac{5}{6}}{7/24} = \frac{5}{7}$.

Esercizio 3.
D5) Si ha $\mathrm{Cov}(X_1, X_1 + X_2) = \mathrm{Cov}(X_1, X_1) + \mathrm{Cov}(X_1, X_2) = \mathrm{Var}[X_1] + 0 = \lambda_1$. Infatti la prima uguaglianza e $\mathrm{Cov}(X_1, X_1) = \mathrm{Var}[X_1]$ valgono sempre; $\mathrm{Var}[X_1] = \lambda_1$ perché X_1 ha distribuzione di Poisson di parametro λ_1; $\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = 0$ segue dall'indipendenza tra X_1 e X_2.
D6) Si ha $P(\{X_1 = 0\} \cap \{X_2 = 0\}) = P(X_1 = 0)P(X_2 = 0) = \frac{\lambda_1^0}{0!}e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_2^0}{0!}e^{-\lambda_2} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}$. La prima uguaglianza segue dall'indipendenza tra X_1 e X_2 e la seconda dalla definizione di distribuzione di Poisson; il resto è immediato.

Esercizio 4.
D7) Si ha $\mathbb{E}[X] = \int_0^1 t \cdot 2tdt = 2\int_0^1 t^2dt = 2[t^3/3]_0^1 = 2/3$.
D8) Si ha $P(X > 1/3|X < 3/4) = \frac{P(\{X>1/3\}\cap\{X<3/4\})}{P(X<3/4)} = \frac{P(1/3<X<3/4)}{P(X<3/4)}$, da cui
$P(X > 1/3|X < 3/4) = \frac{\int_{1/3}^{3/4} 2tdt}{\int_0^{3/4} 2tdt} = \frac{[t^2]_{1/3}^{3/4}}{[t^2]_0^{3/4}} = \frac{\frac{9}{16} - \frac{1}{9}}{\frac{9}{16}} = \ldots = \frac{65}{81}$.

Esercizio 5. Sfruttando le formule per la distribuzione uniforme abbiamo i seguenti risultati.
D9) $\mathbb{E}[U] = \frac{5+7}{2} = 6$.
D10) $\mathrm{Var}[U] = \frac{(7-5)^2}{12} = 1/3$.

Esercizio 6.
D11) La v.a. $Z_Y = \frac{Y-3}{\sqrt{9}}$ è la standardizzata di Y e si ha $P(Y < 0) = P(\frac{Y-3}{\sqrt{9}} < \frac{0-3}{\sqrt{9}}) = P(Z_Y < -1) = \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0.84134 = 0.15866$.
D12) W ha distribuzione normale essendo combinazione lineare di normali indipendenti. Inoltre $\mu_W = \mu_Y - 2\mu_Z = 3 - 2 \cdot 0 = 3$ e $\sigma_W^2 = \sigma_Y^2 + (-2)^2\sigma_Z^2 = 9 + 4 \cdot 1 = 13$.

Commenti.
D2) Si poteva procedere anche in questo modo: $P(X \geq 1) = p_X(1)+p_X(2)+p_X(3) = \frac{18+12+1}{35} = \frac{31}{35}$.