Laurea Triennale in Scienza e Tecnologia dei Media, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità
Anno accademico: 2017-2018. *Titolare del corso:* Claudio Macci
Appello del 9 Febbraio 2018
Esercizi 1,2,3,4,5 per gli studenti che sostengono l'esame da 6 crediti.
Esercizi 1,2,3,4,5,6 per gli studenti che sostengono l'esame da 8 crediti.

Esercizio 1.
Si lancia un dado equo 3 volte.
D1) Calcolare la probabilità che escano 2 numeri dispari in un qualsiasi ordine.
D2) Calcolare la probabilità che escano 2 numeri dispari e il numero 4 in un qualsiasi ordine.
D3) Calcolare la probabilità di ottenere la sequenza $(\text{dispari}, 4, \text{dispari})$ sapendo che si è verificato l'evento alla domanda precedente.

Esercizio 2.
Un'urna ha 3 palline bianche e 2 nere. Si estrae una pallina a caso, e viene reinserita insieme ad un'altra pallina dello stesso colore di quella estratta. Poi si estraggono a caso due palline in blocco.
D4) Calcolare la probabilità che le due palline estratte in blocco siano di colori diversi.

Esercizio 3.
Sia $p_1, p_2 \in (0,1)$ fissati. Consideriamo la seguente densità congiunta: $p_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = p_1^{x_1}(1-p_1)p_2^{x_2}(1-p_2)$, per $x_1, x_2 \geq 0$ interi.
D5) Calcolare $P(X_1 = 1 | X_1 + X_2 = 1)$.
D6) Calcolare $P(X_1 = X_2)$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria continua con densità $f_X(x) = \frac{\log x}{a \log a - a + 1} 1_{(1,a)}(x)$ per $a > 1$.
D7) Calcolare $\mathbb{E}\left[\frac{1}{\log X}\right]$.
D8) Trovare la funzione di distribuzione di $Y = \log X$.
Suggerimento: una primitiva di $g(x) = \log x$ è $G(x) = x \log x - x$.

Esercizio 5.
Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.
D9) Siano X e Y due variabili aleatorie Normali indipendenti, centrate e di varianze 9 e 16 rispettivamente. Calcolare $P(X + Y > 5)$ esprimendo tale valore con la funzione $\Phi(y)$ per qualche $y \geq 0$.
D10) Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. (indipendenti e identicamente distribuite), con distribuzione uniforme su $(1,2)$. Trovare il valore di $y \in \mathbb{R}$ per cui si ha

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - \frac{3}{2}n}{\sqrt{n}} \leq \frac{y}{\sqrt{12}}\right) = \Phi(1/2).$$

Esercizio 6.
Consideriamo una catena di Markov omogenea $\{X_n : n \geq 0\}$ con spazio degli stati $E = \{1,2,3,4\}$ e matrice di transizione

$$P = \left(\begin{array}{llll} 0 & 1/2 & (1-p)/2 & p/2 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right),$$

dove $p \in (0,1)$.
D11) Calcolare la probabilità che, partendo da $i \in \{1,2\}$, la catena raggiunga lo stato 3 evitando lo stato 4.
D12) Trovare le distribuzioni stazionarie (potrebbe essere una sola ...).

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
D1) Per la teoria della distribuzione Binomiale la probabilità richiesta è $\binom{3}{2}(\frac{1}{2})^3 = \frac{3}{8}$.
D2) Per la teoria della distribuzione Multinomiale la probabilità richiesta è $\frac{3!}{2!1!0!}(\frac{3}{6})^2(\frac{1}{6})^1(\frac{2}{6})^0 = \frac{1}{8}$.
Osservazione: si ottiene lo stesso valore per l'evento "escono 2 numeri dispari e il numero 2" e per l'evento "escono 2 numeri dispari e il numero 6"; inoltre, se si sommano queste tre probabilità, si ottiene $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8} = \frac{3}{8}$ che coincide (come deve) con la probabilità che escano 2 numeri dispari che abbiamo calcolato alla prima domanda.
D3) Viene richiesta una probabilità condizionata ed usiamo la notazione $P(A|B)$. Si ha $A \subset B$ e quindi $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)}$. Inoltre si ha $P(A) = \frac{3}{6}\frac{1}{6}\frac{3}{6} = \frac{1}{24}$, mentre il valore $P(B)$ è quello calcolato nella domanda precedente, cioè quindi $P(B) = \frac{1}{8}$. In conclusione $P(A|B) = \frac{1/24}{1/8} = \frac{1}{3}$.
Osservazione: il valore 1/3 ottenuto è in accordo con il fatto che l'evento B si verifica in uno dei seguenti tre casi, i quali sono equiprobabili: $(\text{dispari}, \text{dispari}, 4)$, $(\text{dispari}, 4, \text{dispari})$, $(4, \text{dispari}, \text{dispari})$.

Esercizio 2.
D4) Indichiamo con E l'evento di cui vogliamo calcolare la probabilità. Sia B l'evento "estratta bianca" alla prima estrazione. Allora, per la formula delle probabilità totali, la probabilità richiesta è

$$P(E) = P(E|B)P(B) + P(E|B^c)P(B^c) = \frac{\binom{4}{1}\binom{2}{1}}{\binom{6}{2}}\frac{3}{5} + \frac{\binom{3}{1}\binom{3}{1}}{\binom{6}{2}}\frac{2}{5} = \frac{24+18}{75} = \frac{14}{25}.$$

Esercizio 3.
D5) Si ha

$$\begin{aligned} P(X_1 = 1|X_1+X_2=1) &= \frac{P(\{X_1=1\}\cap\{X_1+X_2=1\})}{P(X_1+X_2=1)} = \frac{P(\{X_1=1\}\cap\{X_2=0\})}{P(X_1+X_2=1)} \\ &= \frac{p_{X_1,X_2}(1,0)}{p_{X_1,X_2}(1,0)+p_{X_1,X_2}(0,1)} = \frac{p_1(1-p_1)(1-p_2)}{p_1(1-p_1)(1-p_2)+(1-p_1)p_2(1-p_2)} = \frac{p_1}{p_1+p_2}. \end{aligned}$$

D6) Si ha

$$\begin{aligned} P(X_1 = X_2) &= \sum_{k=0}^{\infty} p_{X_1,X_2}(k,k) = \sum_{k=0}^{\infty} p_1^k(1-p_1)p_2^k(1-p_2) \\ &= (1-p_1)(1-p_2)\sum_{k=0}^{\infty}(p_1p_2)^k = \frac{(1-p_1)(1-p_2)}{1-p_1p_2}. \end{aligned}$$

Esercizio 4.
D7) Si ha

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{\log X}\right] = \int_1^a \frac{1}{\log x}\cdot\frac{\log x}{a\log a - a+1}dx = \int_1^a \frac{1}{a\log a-a+1}dx = \left[\frac{x}{a\log a-a+1}\right]_{x=1}^{x=a} = \frac{a-1}{a\log a-a+1}.$$

Osservazione: in alternativa (però non conviene) si potrebbe trovare la densità continua f_Z di $Z = \frac{1}{\log X}$, e poi calcolare $\int_{-\infty}^{\infty} z f_Z(z)dz$.
D8) Si ha $P(0 \le Y \le \log a) = 1$, da cui segue $F_Y(y) = 0$ per $y \le 0$ e $F_Y(y) = 1$ per $y \ge \log a$. Per $y \in (0, \log a)$ si ha

$$F_Y(y) = P(\log X \le y) = P(X \le e^y) = \int_1^{e^y}\frac{\log x}{a\log a-a+1}dx = \left[\frac{x\log x - x}{a\log a-a+1}\right]_{x=1}^{x=e^y} = \frac{ye^y-e^y+1}{a\log a-a+1}.$$

Osservazione: la densità continua di Y è $f_Y(y) = \frac{ye^y}{a\log a-a+1}1_{(0,\log a)}(y)$, e in corrispondenza

$$\int_0^{\log a}\frac{1}{y}\cdot\frac{ye^y}{a\log a-a+1}dy = \int_0^{\log a}\frac{e^y}{a\log a-a+1}dy = \left[\frac{e^y}{a\log a-a+1}\right]_{y=0}^{y=\log a} = \frac{a-1}{a\log a-a+1}$$

coincide (come deve) con $\mathbb{E}\left[\frac{1}{\log X}\right]$ calcolato nella domanda precedente.

Esercizio 5.
`D9`) Si ha

$$P(X+Y>5)=P\left(\frac{X+Y-0}{\sqrt{9+16}}>\frac{5-0}{\sqrt{9+16}}\right)=1-P\left(\frac{X+Y-0}{\sqrt{9+16}}\leq 1\right)=1-\Phi(1).$$

`D10`) Le variabili aleatorie $\{X_n:n\geq 1\}$ hanno media $\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2}$ e varianza $\frac{(2-1)^2}{12}=\frac{1}{12}$. Allora, ponendo $\sigma=1/\sqrt{12}$, per il teorema limite centrale si ha

$$P\left(\frac{X_1+\cdots+X_n-\frac{3}{2}n}{\sqrt{n}}\leq\frac{y}{\sqrt{12}}\right)=P\left(\frac{X_1+\cdots+X_n-\frac{3}{2}n}{\sigma\sqrt{n}}\leq\frac{y}{\sigma\sqrt{12}}\right)\to\Phi\left(\frac{y}{\sigma\sqrt{12}}\right)=\Phi(y).$$

In corrispondenza si ha $y=\frac{1}{2}$.

Esercizio 6.
`D11`) Dobbiamo considerare la matrice di transizione

$$\tilde{P}=\begin{pmatrix}0&1/2&(1-p)/2&p/2\\0&1/3&1/3&1/3\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

dove $\{3,4\}$ vengono resi stati assorbenti. Dobbiamo considerare il sistema delle probabilità di passaggio per $C=\{3\}$ tenendo conto che $D_C=\{1,2\}$. Si ha

$$\begin{cases}\lambda_1=\frac{1-p}{2}+\frac{1}{2}\lambda_2\\\lambda_2=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\lambda_2,\end{cases}\quad\begin{cases}\lambda_1=\frac{1-p}{2}+\frac{1}{2}\lambda_2\\\frac{2}{3}\lambda_2=\frac{1}{3},\end{cases}\quad\begin{cases}\lambda_1=\frac{1-p}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3-2p}{4}\\\lambda_2=\frac{1}{2}.\end{cases}$$

`D12`) Sia $\pi=(\pi_1,\pi_2,\pi_3,\pi_4)$ una generica distribuzione stazionaria. Allora si ha

$$(\pi_1,\pi_2,\pi_3,\pi_4)\begin{pmatrix}0&1/2&(1-p)/2&p/2\\0&1/3&1/3&1/3\\0&0&1/2&1/2\\0&0&1/2&1/2\end{pmatrix}=(\pi_1,\pi_2,\pi_3,\pi_4)$$

da cui si ottiene il seguente sistema

$$\begin{cases}0=\pi_1\\\frac{1}{2}\pi_1+\frac{1}{3}\pi_2=\pi_2\\\frac{1-p}{2}\pi_1+\frac{1}{3}\pi_2+\frac{1}{2}\pi_3+\frac{1}{2}\pi_4=\pi_3\\\frac{p}{2}\pi_1+\frac{1}{3}\pi_2+\frac{1}{2}\pi_3+\frac{1}{2}\pi_4=\pi_4,\end{cases}\qquad\begin{cases}\pi_1=0\\\pi_2=0\\\pi_3=\pi_4\\\pi_3=\pi_4.\end{cases}$$

Quindi, essendo $\pi_1+\pi_2+\pi_3+\pi_4=1$, si ottiene $\pi_3=\pi_4=\frac{1}{2}$; in conclusione l'unica distribuzione invariante è $\pi=(0,0,1/2,1/2)$.
Osservazione: Si poteva raggiungere questa stessa conclusione senza fare calcoli osservando che: $T=\{1,2\}$ è la classe degli stati transitori (quindi $\pi_1=\pi_2=0$); $C=\{3,4\}$ è una classe chiusa irriducibile e la catena ristretta a C ha matrice di transizione con somma degli elementi di ogni colonna uguale a 1 (quindi l'unica distribuzione invariante della sottocatena ristretta a C è $(\pi_3,\pi_4)=(1/2,1/2)$).