Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità (ed insegnamenti mutuati)
Anno accademico: `2015-2016`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Appello del 16 Febbraio 2016

Esercizio 1. Si lancia 4 volte un dado equo.
`D1`) Calcolare la probabilità di ottenere 2 numeri minori di 3.
`D2`) Calcolare la probabilità di ottenere la sequenza $(1, 2, 3, 4)$ sapendo che si è verificato l'evento nella domanda precedente.

Esercizio 2. Abbiamo 2 urne, ciascuna delle quali ha 2 palline bianche e 3 nere. Si estrae una pallina a caso dalla prima urna e viene messa nella seconda. Poi si estrae una pallina a caso dalla seconda urna.
`D3`) Calcolare la probabilità di estrarre una pallina bianca dalla seconda urna.
`D4`) Calcolare la probabilità di aver estratto una pallina nera dalla prima urna sapendo di aver estratto una pallina bianca dalla seconda urna.

Esercizio 3. Consideriamo la seguente densità congiunta: $p_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = e^{-2} \cdot \frac{(1-e^{-1})^{x_1}}{x_2!}$ per $x_1, x_2 \geq 0$ interi.
`D5`) Trovare le densità marginali di X_1 e X_2.
`D6`) Calcolare $P(X_1 + X_2 \leq 1)$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con densità continua $f_X(x) = \frac{x}{8} 1_{(0,4)}(x)$.
`D7`) Trovare la densità continua di $Y = \sqrt{X} + 1$.
`D8`) Trovare la densità discreta di $Z = [X]$, dove $[x] = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$ è la parte intera di x.

Esercizio 5.
`D9`) Sia $N_t = \sum_{n \geq 1} 1_{T_n \leq t}$ (per $t \geq 0$) un processo di Poisson con intensità $\lambda = 1$. Calcolare $P(N_1 \leq 2 | N_1 \geq 1)$.
`D10`) Sia X una variabile aleatoria con distribuzione Normale di media 0 e varianza 4. Trovare il valore x per cui $P(X \geq x) = 1 - \Phi(3/4)$.

Esercizio 6. Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. (indipendenti e identicamente distribuite).
`D11`) Dire per quale valore di m si ha

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - m\right| > \varepsilon\right) = 0 \text{ per ogni } \varepsilon > 0,$$

nel caso in cui le variabili aleatorie $\{X_n : n \geq 1\}$ abbiano densità continua $f_X(x) = \frac{x}{2} 1_{(0,2)}(x)$.
`D12`) Calcolare, usando l'approssimazione Normale, $P(X_1 + \cdots + X_{10000} > 50100)$ nel caso in cui le variabili aleatorie $\{X_n : n \geq 1\}$ abbiano distribuzione uniforme in $(5 - \sqrt{12}, 5 + \sqrt{12})$.

Esercizio 7 (*solo per Lauree Magistrali*). Consideriamo una catena di Markov omogenea $\{X_n : n \geq 0\}$ con spazio degli stati $E = \{1, 2, 3, 4\}$ e matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & 1 - e^{-2} & e^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

per $a, b, c, d \in (0, 1)$ tali che $a + b + c + d = 1$.
`D13`) Calcolare la probabilità di passaggio in $C = \{2, 3\}$ partendo da 1.
`D14`) Calcolare $P(X_1 = 1, X_2 = 2, X_3 = 3 | X_0 = 1)$.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
Sia X la variabile aleatoria che conta quante volte si estrae un numero minore di 3.
D1) La probabilità richiesta è $P(X=2)=\binom{4}{2}(\frac{2}{6})^2(1-\frac{2}{6})^{4-2}=6(\frac{1}{3})^2(\frac{2}{3})^2=\frac{24}{81}=\frac{8}{27}$.
D2) Sia E l'evento "esce la sequenza $(1,2,3,4)$". Allora la probabilità richiesta è $P(E|X=2)=\frac{P(E\cap\{X=2\})}{P(X=2)}=\frac{P(E)}{P(X=2)}=\frac{(1/6)^4}{8/27}=\frac{1}{1296}\frac{27}{8}=\frac{1}{384}$.

Esercizio 2. Indichiamo con B_i l'evento "estratta pallina bianca dalla i-sima urna".
D3) Per la formula delle probabilità totali si ha $P(B_2)=P(B_2|B_1)P(B_1)+P(B_2|B_1^c)P(B_1^c)=\frac{3}{6}\frac{2}{5}+\frac{2}{6}\frac{3}{5}=\frac{6+6}{30}=\frac{12}{30}=\frac{2}{5}$.
D4) Per la formula di Bayes, e tenendo conto di alcuni valori calcolati prima, si ha $P(B_1^c|B_2)=\frac{P(B_2|B_1^c)P(B_1^c)}{P(B_2)}=\frac{\frac{2}{6}\frac{3}{5}}{2/5}=\frac{1}{2}$.

Esercizio 3.
D5) Si ha: $p_{X_1}(x_1)=\sum_{x_2=0}^{\infty}p_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=e^{-2}(1-e^{-1})^{x_1}\sum_{x_2=0}^{\infty}\frac{1}{x_2!}=e^{-2}(1-e^{-1})^{x_1}\sum_{x_2=0}^{\infty}\frac{1^{x_2}}{x_2!}=e^{-2}(1-e^{-1})^{x_1}e^1=(1-e^{-1})^{x_1}e^{-1}$ per ogni $x_1\geq 0$ intero; $p_{X_2}(x_2)=\sum_{x_1=0}^{\infty}p_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=\frac{e^{-2}}{x_2!}\sum_{x_1=0}^{\infty}(1-e^{-1})^{x_1}=\frac{e^{-2}}{x_2!}\frac{(1-e^{-1})^0}{1-(1-e^{-1})}=\frac{e^{-1}}{x_2!}$ per ogni $x_2\geq 0$ intero.
D6) Si ha $P(X_1+X_2\leq 1)=p_{X_1,X_2}(0,0)+p_{X_1,X_2}(0,1)+p_{X_1,X_2}(1,0)=e^{-2}+e^{-2}+e^{-2}(1-e^{-1})=e^{-2}(3-e^{-1})$.

Esercizio 4.
D7) Si vede che $P(1\leq Y\leq 3)=1$ e quindi $F_Y(y)=0$ per $y\leq 1$ e $F_Y(y)=1$ per $y\geq 3$. Per $y\in(1,3)$ si ha $F_Y(y)=P(\sqrt{X}+1\leq y)=P(\sqrt{X}\leq y-1)=P(X\leq (y-1)^2)=\int_0^{(y-1)^2}\frac{x}{8}dx=\frac{1}{8}[\frac{x^2}{2}]_{x=0}^{x=(y-1)^2}=\frac{(y-1)^4}{16}$. Quindi la densità continua di Y è $f_Y(y)=\frac{(y-1)^3}{4}1_{(1,3)}(y)$.
D8) Si ha $p_Z(z)=\int_z^{z+1}\frac{x}{8}dx=\frac{1}{8}[\frac{x^2}{2}]_{x=z}^{x=z+1}=\frac{(z+1)^2-z^2}{16}=\frac{2z+1}{16}$ per $z\in\{0,1,2,3\}$; quindi $p_z(0)=\frac{1}{16}$, $p_z(1)=\frac{3}{16}$, $p_z(2)=\frac{5}{16}$ e $p_z(3)=\frac{7}{16}$.

Esercizio 5.
D9) Si ha $P(N_1\leq 2|N_1\geq 1)=\frac{P(\{N_1\leq 2\}\cap\{N_1\geq 1\})}{P(N_1\geq 1)}=\frac{P(1\leq N_1\leq 2)}{P(N_1\geq 1)}=\frac{\sum_{k=1}^{2}\frac{1^k}{k!}e^{-1}}{1-P(N_1=0)}=\frac{(3/2)e^{-1}}{1-e^{-1}}$.
D10) Si ha $P(X\geq x)=P(\frac{X-0}{\sqrt{4}}\geq\frac{x-0}{\sqrt{4}})=1-\Phi(\frac{x}{\sqrt{4}})$, da cui segue $\frac{x}{2}=\frac{3}{4}$, e quindi $x=\frac{3}{2}$.

Esercizio 6.
D11) Per la legge dei grandi numeri il valore di m richiesto è $m=\int_0^2 x\cdot\frac{x}{2}dx=\frac{1}{2}\int_0^2 x^2dx=\frac{1}{2}[\frac{x^3}{3}]_{x=0}^{x=2}=\frac{1}{2}\frac{8}{3}=\frac{4}{3}$.
D12) Le variabili aleatorie $\{X_n:n\geq 1\}$ hanno media $\frac{5-\sqrt{12}+5+\sqrt{12}}{2}=5$ e varianza $\frac{(5+\sqrt{12}-(5-\sqrt{12}))^2}{12}=\frac{(2\sqrt{12})^2}{12}=\frac{4\cdot 12}{12}=4$ per le formule sulla distribuzione uniforme. Quindi, se indichiamo con Z la standardizzata di $X_1+\cdots+X_{10000}$, si ha $\{X_1+\cdots+X_{10000}>50100\}=\{Z>\frac{50100-50000}{\sqrt{4}\sqrt{10000}}\}$ e, per l'approssimazione Normale, $P(X_1+\cdots+X_{10000}>50100)=1-\Phi(100/200)=1-\Phi(0.5)=1-0.69146=0.30854$.

Esercizio 7.
D13) L'insieme D_C degli stati che comunicano con $C=\{2,3\}$ e che non appartengono a C è $D_C=\{1\}$; infatti lo stato 4 è assorbente. Allora, detta λ la probabilità di passaggio richiesta, questa è soluzione della seguente equazione:

$$\lambda=b+c+a\lambda.$$

In corrispondenza si ottiene $\lambda=\frac{b+c}{1-a}$ con semplici calcoli.
D14) La probabilità richiesta è $P(X_1=1,X_2=2,X_3=3|X_0=1)=p_{11}p_{12}p_{23}=abe^{-2}$.

Commenti.
La somma dei valori di ciascuna densità discreta che appare è 1 in accordo con la teoria.
D5) Possiamo dire che: X_1 ha distribuzione geometrica (quella che parte da 0, quella che conta il numero dei fallimenti prima del primo successo) di parametro $p=e^{-1}$; X_2 ha distribuzione di Poisson di parametro $\lambda=1$; X_1 e X_2 sono indipendenti.

D13) La probabilità richiesta si può calcolare in altro modo notando che

$$\begin{aligned}\lambda =&P(X_1 \in C|X_0 = 1) + \sum_{k=2}^{\infty} P(X_1 = 1, \ldots, X_{k-1} = 1, X_k \in C|X_0 = 1)\\ =&(b + c) + \sum_{k=2}^{\infty} a^{k-1}(b + c) = (b + c)\sum_{k=0}^{\infty} a^k = (b + c) \cdot \frac{1}{1 - a} = \frac{b + c}{1 - a}.\end{aligned}$$

Inoltre, osservando che $\lambda = \frac{b+c}{b+c+d}$ (riscrivendo il denominatore diversamente perché $a+b+c+d = 1$), abbiamo la seguente interpretazione: si tratta di considerare la probabilità di andare da 1 in C, e di normalizzare con la probabilità che, partendo da 1, si finisca in 2 o in 3 o in 4 (lasciando lo stato 1 definitivamente).