Laurea Triennale in Scienza e Tecnologia dei Media, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità
Anno accademico: `2018-2019`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Appello del 18 Luglio 2019
Esercizi 1,2,3,4,5 per gli studenti che sostengono l'esame da 6 crediti.
Esercizi 1,2,3,4,5,6 per gli studenti che sostengono l'esame da 8 crediti.

Esercizio 1.
Abbiamo un'urna con 100 palline numerate da 1 a 100. Si considerano estrazioni casuali di una pallina alla volta con reinserimento.
`D1`) Calcolare la probabilità di estrarre almeno una volta il numero 18 su 2 estrazioni.
`D2`) Calcolare la probabilità di estrarre due volte il numero 18 su 2 estrazioni sapendo che tale numero viene estratto almeno una volta.
`D3`) Calcolare la probabilità di estrarre due volte il numero 18 su 300 estrazioni, considerando l'approssimazione della Binomiale con la Poisson.

Esercizio 2.
Abbiamo un'urna di 6 palline da 1 a 6. Si estrae una pallina a caso; tale pallina viene tolta dall'urna, e viene messa nell'urna una pallina con il numero zero. Poi si estrae nuovamente una pallina a caso dall'urna.
`D4`) Calcolare la probabilità che il secondo numero estratto sia minore del primo numero estratto.

Esercizio 3.
Siano $\lambda > 0$ e $p \in (0,1)$. Consideriamo la seguente densità congiunta: $p_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \frac{\lambda^{x_1}}{x_1!}e^{-\lambda}(1-p)^{x_2}p$ per $x_1, x_2 \geq 0$ interi.
`D5`) Trovare le densità marginali di X_1 e X_2.
`D6`) Calcolare $P(X_1 = h | X_1 + X_2 = 2)$ per $h \in \{0,1,2\}$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria continua con densità continua $f_X(x) = \frac{x}{2}1_{(0,2)}(x)$.
`D7`) Trovare la densità continua di $Y = \log X$.
`D8`) Calcolare $P(1 < X < 3)$.

Esercizio 5.
Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$.
`D9`) Sia X una variabile aleatoria Normale con media 9 e varianza 4. Trovare il valore $x \in \mathbb{R}$ per cui si ha $P(x < X < 10) = \Phi(1/2) - \Phi(1/4)$.
`D10`) Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. (indipendenti e identicamente distribuite), con densità continua $f_X(x) = \frac{x}{2}1_{(0,2)}(x)$. Calcolare, al variare di $y \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - \frac{4}{3}n}{\sqrt{n}} \leq y\right),$$

esprimendo il limite con la funzione Φ.

Esercizio 6.
Consideriamo una catena di Markov omogenea $\{X_n : n \geq 0\}$ con spazio degli stati $E = \{1,2,3,4\}$ e matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & p & 1-p & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix},$$

dove $p \in [0,1]$.
`D11`) Per $p \in [0,1)$, calcolare $\lim_{n\to\infty} P(X_n = j)$ (per ogni $j \in E$) dopo aver motivato l'esistenza del limite.
`D12`) Per $p = 1$, calcolare le probabilità di visitare lo stato 4 partendo da 1 e da 3, rispettivamente.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.

In generale indichiamo con X_n la variabile aleatoria che indica il numero di volte che viene estratto il numero 18 su n estrazioni. Ovviamente $P(X_n = k) = \binom{n}{k}(\frac{1}{100})^k(1-\frac{1}{100})^{n-k}$ per $k \in \{0, 1 \ldots, n\}$.

`D1`) La probabilità richiesta è $P(X_2 \geq 1) = P(X_2 = 1) + P(X_2 = 2) = \binom{2}{1}(\frac{1}{100})^1(1-\frac{1}{100})^{2-1} + \binom{2}{2}(\frac{1}{100})^2(1-\frac{1}{100})^{2-2} = \frac{2\cdot 99+1}{10000} = \frac{199}{10000}$, oppure $P(X_2 \geq 1) = 1 - P(X_2 = 0) = 1 - (\frac{99}{100})^2 = \frac{199}{10000}$.

`D2`) La probabilità richiesta è $P(X_2 = 2|X_2 \geq 1) = \frac{P(\{X_2=2\}\cap\{X_2\geq 1\})}{P(X_2\geq 1)} = \frac{P(X_2=2)}{P(X_2\geq 1)} = \frac{1/10000}{199/10000} = \frac{1}{199}$.

`D3`) La probabilità richiesta è $P(X_{300} = 2) = \binom{300}{2}(\frac{1}{100})^2(1-\frac{1}{100})^{300-2}$; inoltre la densità discreta di X_{300} si approssima con quella di una distribuzione di Poisson di parametro $\lambda = 300\frac{1}{100} = 3$. Quindi $P(X_{300} = 2) \approx \frac{3^2}{2!}e^{-3} = \frac{9}{2}e^{-3}$.

Esercizio 2.

`D4`) Sia E l'evento "il secondo numero estratto è minore del primo" e sia E_k l'evento "il primo numero estratto è k" per $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Allora, per la formula delle probabilità totali, la probabilità richiesta è

$$P(E) = \sum_{k=1}^{6} P(E|E_k)P(E_k) = \left(\frac{1}{6}+\frac{2}{6}+\frac{3}{6}+\frac{4}{6}+\frac{5}{6}+\frac{6}{6}\right)\frac{1}{6} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}.$$

Esercizio 3.

`D5`) Si ha

$$p_{X_1}(x_1) = \sum_{x_2\geq 0} p_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \frac{\lambda^{x_1}}{x_1!}e^{-\lambda}p\sum_{x_2\geq 0}(1-p)^{x_2} = \frac{\lambda^{x_1}}{x_1!}e^{-\lambda}p\frac{1}{1-(1-p)} = \frac{\lambda^{x_1}}{x_1!}e^{-\lambda} \text{ (per } x_1 \geq 0)$$

e

$$p_{X_2}(x_2) = \sum_{x_2\geq 0} p_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = (1-p)^{x_2}pe^{-\lambda}\sum_{x_1\geq 0}\frac{\lambda^{x_1}}{x_1!} = (1-p)^{x_2}pe^{-\lambda}e^{\lambda} = (1-p)^{x_2}p \text{ (per } x_2 \geq 0).$$

Osservazione: possiamo dire che X_1 ha distribuzione di Poisson di parametro λ, X_2 ha distribuzione geometrica di parametro p, e X_1 e X_2 sono indipendenti.

`D6`) Si ha

$$P(X_1 = h|X_1 + X_2 = 2) = \frac{P(X_1 = h, X_1 + X_2 = 2)}{P(X_1 + X_2 = 2)}$$

$$= \frac{P(X_1 = h, X_2 = 2-h)}{P((X_1, X_2) \in \{(0, 2), (1, 1), (2, 0)\})} = \frac{p_{X_1,X_2}(h, 2-h)}{\sum_{j=0}^{2} p_{X_1,X_2}(j, 2-j)} = \begin{cases} \frac{(1-p)^2}{(1-p)^2+\lambda(1-p)+\frac{\lambda^2}{2}} & \text{per } h = 0 \\ \frac{\lambda(1-p)}{(1-p)^2+\lambda(1-p)+\frac{\lambda^2}{2}} & \text{per } h = 1 \\ \frac{\lambda^2/2}{(1-p)^2+\lambda(1-p)+\frac{\lambda^2}{2}} & \text{per } h = 2. \end{cases}$$

Esercizio 4.

`D7`) Si ha $P(Y \leq \log 2) = 1$, da cui segue $F_Y(y) = 1$ per $y \geq \log 2$. Per $y < \log 2$ si ha

$$F_Y(y) = P(\log X \leq y) = P(X \leq e^y) = \int_0^{e^y} \frac{x}{2}dx = \frac{[x^2]_{x=0}^{x=e^y}}{4} = \frac{e^{2y}}{4}.$$

Quindi la densità continua richiesta è $f_Y(y) = \frac{e^{2y}}{2}1_{(-\infty,\log 2)}$.

`D8`) La probabilità richiesta è

$$P(1 < X < 3) = \int_1^3 f_X(x)dx = \int_1^2 \frac{x}{2}dx = \frac{[x^2]_{x=1}^{x=2}}{4} = \frac{2^2-1^2}{4} = \frac{3}{4}.$$

Esercizio 5.

`D9`) Abbiamo

$$\Phi(1/2) - \Phi(1/4) = P(x < X < 10) = \Phi\left(\frac{10-9}{\sqrt{4}}\right) - \Phi\left(\frac{x-9}{\sqrt{4}}\right) = \Phi(1/2) - \Phi\left(\frac{x-9}{2}\right),$$

da cui segue $\Phi(1/4) = \Phi\left(\frac{x-9}{2}\right)$; quindi $\frac{x-9}{2} = \frac{1}{4}$ e, con semplici calcoli, si ottiene $x = 9 + \frac{1}{2} = \frac{19}{2} = 9.5$.
`D10`) Le variabili aleatorie $\{X_n : n \geq 1\}$ hanno media

$$\mu = \int_0^2 x \frac{x}{2} dx = \frac{1}{2} \int_0^2 x^2 dx = \frac{1}{2} \frac{[x^3]_{x=0}^{x=2}}{3} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

e varianza

$$\sigma^2 = \int_0^2 x^2 \frac{x}{2} dx - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{1}{2} \int_0^2 x^3 dx - \frac{16}{9} = \frac{1}{2} \frac{[x^4]_{x=0}^{x=2}}{4} - \frac{16}{9} = \frac{16}{8} - \frac{16}{9} = 2 - \frac{16}{9} = \frac{2}{9}.$$

Allora, ponendo $\sigma = \frac{\sqrt{2}}{3}$, per il teorema limite centrale si ha

$$P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - \frac{4}{3}n}{\sqrt{n}} \leq y\right) = P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - \frac{4}{3}n}{\sigma\sqrt{n}} \leq \frac{y}{\sigma}\right) \to \Phi\left(\frac{y}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{3y}{\sqrt{2}}\right)$$

per ogni $y \in \mathbb{R}$.

Esercizio 6.
`D11`) Per $p \in [0,1)$ la catena è regolare perché è irriducibile (ovvio) ed esiste almeno un elemento della diagonale principale positivo. Allora l'esistenza dei limiti e il loro valore seguono dal teorema di Markov; si ha $\lim_{n\to\infty} P(X_n = j) = q_j$ (per ogni $j \in E$), dove $(q_1, \ldots, q_4)$ è l'unica distribuzione invariante della catena. Ora calcoliamo tale distribuzione stazionaria. Si ha la seguente relazione matriciale

$$(q_1, q_2, q_3, q_4) \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & p & 1-p & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = (q_1, q_2, q_3, q_4),$$

da cui segue (come sempre si può scartare una delle equazioni; qui scarteremo la terza)

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{q_1}{4} + \frac{q_3}{2} = q_1 \\ \frac{q_1}{4} + q_2 p + \frac{q_4}{2} = q_2 \\ \frac{q_1}{4} + q_2(1-p) + \frac{q_3}{2} = q_3 \\ \frac{q_1}{4} + \frac{q_4}{2} = q_4, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} q_3 = \frac{3}{2}q_1 \\ \frac{q_1}{4} + \frac{q_1}{4} = q_2(1-p) \\ \ldots \\ q_4 = \frac{q_1}{2}, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} q_3 = \frac{3}{2}q_1 \\ q_2 = \frac{q_1}{2(1-p)} \\ \ldots \\ q_4 = \frac{q_1}{2}; \end{array}\right.$$

allora, tenendo conto che $q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 1$, si ottiene la condizione $q_1(1 + \frac{1}{2(1-p)} + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}) = 1$ e quindi $q_1 = \frac{2(1-p)}{6(1-p)+1}$. In conclusione, sostituendo, si ha

$$(q_1, q_2, q_3, q_4) = \left(\frac{2(1-p)}{6(1-p)+1}, \frac{1}{6(1-p)+1}, \frac{3(1-p)}{6(1-p)+1}, \frac{1-p}{6(1-p)+1}\right).$$

`D12`) Per $p = 1$ lo stato 2 è assorbente. Dobbiamo considerare le probabilità di passaggio $\{\lambda_i : i \in D_C\}$ per $C = \{4\}$, dove D_C è l'insieme degli stati che non appartengono a C e che comunicano con tale insieme. Allora abbiamo $D_C = \{1,3\}$ e si ha

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda_1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\lambda_1 + \frac{1}{4}\lambda_3 \\ \lambda_3 = \frac{1}{2}\lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_3. \end{array}\right.$$

Ovviamente λ_1 e λ_3 sono le probabilità di passaggio richieste. La seconda equazione fornisce la condizione $\lambda_1 = \lambda_3$, e sostituendo nella prima equazione si ha $\frac{1}{2}\lambda_1 = \frac{1}{4}$ e $\lambda_1 = \frac{1}{2}$. In conclusione si ha $\lambda_1 = \lambda_3 = \frac{1}{2}$.
Osservazione: in ogni caso, sia che la catena parta da 1 o che parta da 3, ad un certo punto, passerà per 1 e, se non va in 3, abbiamo due casi: o va in 4 (e si realizza l'evento che interessa), o va in 2 (e non si realizza perché 2 è assorbente); allora per certi versi ci si aspetta che $\lambda_1 = \lambda_3 = \frac{p_{14}}{p_{12}+p_{14}}$ e questo è quel che accade.