Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)
Anno accademico: 2019-2020. *Titolare del corso:* Claudio Macci
Simulazione 1

Esercizio 1.
Un'urna ha 2 palline bianche, 3 rosse e 5 nere. Si estraggono a caso 3 palline, una alla volta e senza reinserimento.
D1) Trovare la densità discreta della variabile aleatoria X che conta il numero di palline nere estratte.
D2) Calcolare la probabilità di estrarre la sequenza di colori $(\text{bianco}, \text{nero}, \text{rosso})$ sapendo di aver estratto una pallina nera.
D3) Calcolare la probabilità di estrarre la sequenza di colori $(\text{rosso}, \text{rosso}, \text{rosso})$ sapendo di non aver estratto nessuna pallina nera.

Esercizio 2.
Abbiamo un'urna con 3 palline con i numeri 1,2,3. Si estraggono a caso in blocco 2 palline e vengono sostituite con due palline aventi entrambe il numero 2, le quali vengono reinserite nell'urna. Infine si estrae una pallina a caso dall'urna.
D4) Calcolare la probabilità di estrarre una pallina con il numero 2 (nell'estrazione finale di una pallina singola).

Esercizio 3.
Siano $p_1, p_2 \in (0,1)$ arbitrariamente fissati. Consideriamo la seguente densità congiunta discreta: $p_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = (1-p_1)^{x_1} p_1 (1-p_2)^{x_2} p_2$ per $x_1, x_2 \geq 0$ interi.
D5) Calcolare $P(X_2 \geq kX_1)$ per $k \geq 0$ intero.
D6) Calcolare $P(X_1 = k | X_1 + X_2 = 2)$ per $k \in \{0,1,2\}$.

Esercizio 4.
Sia X una variabile aleatoria con distribuzione uniforme su $(-b, b)$, con $b > 0$.
D7) Trovare la densità continua di $Y = b - |X|$.
D8) Calcolare $\mathbb{E}[Y]$.

Esercizio 5.
Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.
D9) Sia X una variabile aleatoria Normale con media $b > 0$ e varianza b. Dire per quale valore di b si ha $P(X > 0) = \Phi(2)$.
D10) Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. (indipendenti e identicamente distribuite), con distribuzione uniforme su $(0, \sqrt{12})$. Calcolare, al variare di $x > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(-2x < \frac{X_1 + \cdots + X_n - \frac{n\sqrt{12}}{2}}{\sqrt{n}} < x\right)$$

esprimendo il risultato con la funzione $\Phi(y)$ per qualche $y \geq 0$.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.

D1) Per la teoria della distribuzione ipergeometrica si ha $p_X(k) = \frac{\binom{5}{k}\binom{5}{3-k}}{\binom{10}{3}}$ per $k \in \{0,1,2,3\}$, da cui segue $p_X(0) = p_X(3) = \frac{1}{12}$ e $p_X(1) = p_X(2) = \frac{5}{12}$.

D2) Sia E l'evento che si riferisce alla sequenza di colori indicata. La probabilità richiesta è $P(E|X=1)$ da cui segue $P(E|X=1) = \frac{P(E\cap\{X=1\})}{P(X=1)} = \frac{P(E)}{P(X=1)} = \frac{(2/10)(5/9)(3/8)}{5/12} = \frac{1/24}{5/12} = \frac{1}{10}$.

D3) Sia F l'evento che si riferisce alla sequenza di colori indicata. La probabilità richiesta è $P(F|X=0)$ da cui segue $P(F|X=0) = \frac{P(F\cap\{X=0\})}{P(X=0)} = \frac{P(F)}{P(X=0)} = \frac{(3/10)(2/9)(1/8)}{1/12} = \frac{1/120}{1/12} = \frac{1}{10}$.

Osservazione: la probabilità $P(F|X=0)$ coincide con quella che si ottiene considerando l'urna senza palline nere; infatti si ha $\frac{\binom{3}{3}\binom{2}{0}}{\binom{5}{3}} = \frac{1}{10}$.

Esercizio 2.

D4) Abbiamo 3 possibili modi di estrarre due palline in blocco, tutti equiprobabili: $\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}$. Sia E l'evento di interesse e per la formula delle probabilità totali si ha

$$\begin{aligned}P(E) &= P(E|\{1,2\})P(\{1,2\}) + P(E|\{1,3\})P(\{1,3\}) + P(E|\{2,3\})P(\{2,3\}) \\ &= \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} + 1\cdot\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{2+3+2}{9} = \frac{7}{9}.\end{aligned}$$

Esercizio 3.

D5) Si ha $P(X_2 \geq kX_1) = p_1p_2\sum_{x_1=0}^{\infty}(1-p_1)^{x_1}\sum_{x_2=kx_1}^{\infty}(1-p_2)^{x_2}$, da cui segue

$$\begin{aligned}P(X_2 \geq kX_1) &= p_1p_2\sum_{x_1=0}^{\infty}(1-p_1)^{x_1}\frac{(1-p_2)^{kx_1}}{1-(1-p_2)} \\ &= p_1\sum_{x_1=0}^{\infty}[(1-p_1)(1-p_2)^k]^{x_1} = \frac{p_1}{1-(1-p_1)(1-p_2)^k}.\end{aligned}$$

Osservazione: il risultato che abbiamo trovato al variare di k è in accordo con quel che accade per $k=0$ (si ha $P(X_2 \geq kX_1) = P(X_2 \geq 0) = 1$) e per $k \to \infty$ (si ha $P(X_2 \geq kX_1) \to P(X_1 = 0) = (1-p_1)^0 p_1 = p_1$).

D6) Si ha $P(X_1 = k|X_1+X_2=2) = \frac{P(\{X_1=k\}\cap\{X_1+X_2=2\})}{P(X_1+X_2=2)} = \frac{P(\{X_1=k\}\cap\{X_2=2-k\})}{P(X_1+X_2=2)}$, da cui segue

$$\begin{aligned}P(X_1 = k|X_1+X_2=2) &= \frac{(1-p_1)^k p_1(1-p_2)^{2-k}p_2}{\sum_{j=0}^{2}(1-p_1)^j p_1(1-p_2)^{2-j}p_2} \\ &= \frac{(1-p_1)^k(1-p_2)^{2-k}}{\sum_{j=0}^{2}(1-p_1)^j(1-p_2)^{2-j}} = \begin{cases} \frac{(1-p_2)^2}{(1-p_2)^2+(1-p_2)(1-p_1)+(1-p_1)^2} & \text{per } k=0 \\ \frac{(1-p_2)(1-p_1)}{(1-p_2)^2+(1-p_2)(1-p_1)+(1-p_1)^2} & \text{per } k=1 \\ \frac{(1-p_1)^2}{(1-p_2)^2+(1-p_2)(1-p_1)+(1-p_1)^2} & \text{per } k=2. \end{cases}\end{aligned}$$

Esercizio 4.

D7) Si ha $P(0 < Y < b) = 1$, e quindi $F_Y(y) = 0$ per $y \leq 0$ e $F_Y(y) = 1$ per $y \geq b$. Per $y \in (0,b)$, sfruttando la simmetria di $f_X(x) = \frac{1}{b-(-b)}1_{(-b,b)}(x) = \frac{1}{2b}1_{(-b,b)}(x)$ rispetto a $x=0$, si ha $F_Y(y) = P(b-|X| \leq y) = P(|X| \geq b-y) = 2P(X > b-y) = 2\int_{b-y}^{b}\frac{1}{2b}dx = 2\frac{[x]_{x=b-y}^{x=b}}{2b} = \frac{b-(b-y)}{b} = \frac{y}{b}$. Quindi la densità continua richiesta è $f_Y(y) = \frac{1}{b}1_{(0,b)}(y)$; in particolare Y ha distribuzione uniforme su $(0,b)$.

D8) Avendo notato nella risposta alla domanda precedente che Y ha distribuzione uniforme, si può subito dire che $\mathbb{E}[Y] = \frac{b}{2}$.
Osservazione: si poteva rispondere a questa domanda anche senza tenere conto della risposta alla domanda precedente; infatti (tenendo conto che in quel che segue si ha un integrando simmetrico e un intervallo simmetrico) si ha

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[b - |X|] = b - \mathbb{E}[|X|] = b - \int_{-b}^{b} |x| \frac{1}{2b} dx \\ = b - 2\int_0^b \frac{x}{2b} dx = b - \frac{2}{2b}[x^2/2]_{x=0}^{x=b} = b - \frac{b^2 - 0^2}{2b} = b - \frac{b}{2} = \frac{b}{2}.\end{aligned}$$

Esercizio 5.
D9) Si ha

$$\Phi(2) = P(X > 0) = P\left(\frac{X - b}{\sqrt{b}} > \frac{0 - b}{\sqrt{b}}\right) = 1 - \Phi(-\sqrt{b}) = 1 - (1 - \Phi(\sqrt{b})) = \Phi(\sqrt{b})$$

da cui segue $\sqrt{b} = 2$ e quindi $b = 4$.
D10) Osserviamo che $\mathbb{E}[X_1] = \frac{\sqrt{12}}{2}$ e $\mathrm{Var}[X_1] = \frac{(\sqrt{12})^2}{12} = 1$. Allora, per il teorema limite centrale, si ha

$$\lim_{n\to\infty} P\left(-2x < \frac{X_1 + \cdots + X_n - \frac{n\sqrt{12}}{2}}{\sqrt{n}} < x\right) = \Phi(x) - \Phi(-2x).$$

Infine, per far apparire Φ con argomenti positivi, il valore limite si riscrive come segue:

$$\Phi(x) - \Phi(-2x) = \Phi(x) - (1 - \Phi(2x)) = \Phi(x) + \Phi(2x) - 1.$$