Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
**Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)**
*Anno accademico:* 2011-2012. *Titolare del corso:* Claudio Macci
**Simulazione 2**

**Esercizio 1**. Abbiamo un'urna con 10 palline numerate da 1 a 10. Si estraggono 3 palline a caso, una alla volta e senza reinserimento.
D1) Calcolare la probabilità di estrarre almeno un numero pari.
D2) Calcolare la probabilità di estrarre la sequenza $(1, \mathrm{pari}, \mathrm{dispari})$.

**Esercizio 2**. Abbiamo un'urna con 3 palline con i numeri 1,2,3. Si estrae una pallina a caso e sia $X$ la variabile aleatoria che indica il numero estratto. Poi si lancia $X$ volte una moneta equa.
D3) Calcolare la probabilità di avere "almeno una volta testa", e indicheremo tale evento con $E$.
D4) Calcolare $P(X = k|E)$ per $k \in \{1, 2, 3\}$.

**Esercizio 3**. Consideriamo la seguente densità congiunta per $p, q \in (0, 1)$: per $x_1 \geq 1$ e $0 \leq x_2 \leq x_1$ con $x_1$ e $x_2$ interi, si ha $p_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = (1 - q)^{x_1-1}q\binom{x_1}{x_2}p^{x_2}(1 - p)^{x_1-x_2}$.
D5) Calcolare $P(X_1 = X_2)$.
D6) Calcolare $P(X_2 = 0)$.

**Esercizio 4**. Sia $X$ una variabile aleatoria uniforme in $(\sqrt{a}, \sqrt{b})$ per $a, b > 0$.
D7) Trovare la densità continua di $Y = X^2$.
D8) Calcolare $\mathbb{E}[Y\sqrt{Y}]$.

**Esercizio 5**. Sia $N_t = \sum_{n\geq1} 1_{T_n\leq t}$ (per $t \geq 0$) un processo di Poisson con intensità di $\lambda = 1$.
D9) Calcolare $P(N_2 \geq 1)$.
D10) Trovare il valore di $a$ per cui si ha $\lim_{n\to\infty} P(|\frac{N_n}{n} - a| > \varepsilon) = 0$ per ogni $\varepsilon > 0$.

**Esercizio 6**. Sia $X$ una variabile aleatoria con distribuzione normale standard.
D11) Calcolare $P(X > 0.75)$.
Inoltre siano $X_1$ e $X_2$ due variabili aleatorie normali standard indipendenti.
D12) Confrontare $P(2X > 2)$ e $P(X_1 + X_2 > 2)$ (cioè dire qual è la probabilità maggiore tra le due).

**Esercizio 7** (*solo per ST-Materiali*). Consideriamo una catena di Markov omogenea $\{X_n : n \geq 0\}$ con spazio degli stati $E = \{1, 2, 3\}$ e matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 2a & a & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

per $a \in (0, 1)$.
D13) Trovare il valore di $a$ e la/e distribuzione/i stazionaria/e.
D14) Calcolare $P(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 3)$ nel caso in cui abbia la seguente distribuzione iniziale: $(P(X_0 = 1), P(X_0 = 2), P(X_0 = 3)) = (\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{5})$.

**Cenno alle soluzioni** (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

**Esercizio 1.**
`D1`) Sia $X$ la variabile aleatoria che indica il numero di palline con numero pari estratte. Allora si ha $p_X(k) = \frac{\binom{5}{k}\binom{5}{3-k}}{\binom{10}{3}}$, da cui segue $p_X(0) = p_X(3) = \frac{1}{12}$ e $p_X(1) = p_X(2) = \frac{5}{12}$. Quindi la probabilità richiesta è $P(X \geq 1) = p_X(1) + p_X(2) + p_X(3) = \frac{5+5+1}{12} = \frac{11}{12}$.
`D2`) La probabilità richiesta è $\frac{1}{10}\frac{5}{9}\frac{4}{8} = \frac{1}{36}$.

**Esercizio 2.**
`D3`) Per la formula delle probabilità totali si ha $P(E) = \sum_{k=1}^{3} P(E|X = k)P(X = k) = \sum_{k=1}^{3}(1 - \binom{k}{0}(\frac{1}{2})^k)\frac{1}{3} = \frac{1}{3}(1 - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{8}) = \frac{1}{3}(\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{7}{8}) = \frac{1}{3}(\frac{4+6+7}{8}) = \frac{17}{24}$.
`D4`) Per la formula di Bayes (e per il valore di $P(E)$ calcolato prima) si ha $P(X = k|E) = \frac{P(E|X=k)P(X=k)}{P(E)} = \frac{P(E|X=k)\frac{1}{3}}{\frac{17}{24}} = P(E|X = k)\frac{8}{17}$ per $k \in \{1, 2, 3\}$, da cui segue $P(X = 0|E) = (1 - \frac{1}{2})\frac{8}{17} = \frac{4}{17}$, $P(X = 1|E) = (1 - \frac{1}{4})\frac{8}{17} = \frac{6}{17}$, $P(X = 2|E) = (1 - \frac{1}{8})\frac{8}{17} = \frac{7}{17}$.

**Esercizio 3.**
`D5`) Si ha $P(X_1 = X_2) = \sum_{x_1=1}^{\infty}(1 - q)^{x_1-1}q\binom{x_1}{x_1}p^{x_1}(1 - p)^{x_1-x_1} = \sum_{x_1=1}^{\infty}(1 - q)^{x_1-1}qp^{x_1} = qp\sum_{x_1=1}^{\infty}(1 - q)^{x_1-1}p^{x_1-1} = \frac{qp}{1-(1-q)p} = \frac{qp}{1-p+qp}$.
`D6`) Si ha $P(X_2 = 0) = \sum_{x_1=1}^{\infty}(1 - q)^{x_1-1}q\binom{x_1}{0}p^0(1 - p)^{x_1-0} = \sum_{x_1=1}^{\infty}(1 - q)^{x_1-1}q(1 - p)^{x_1} = q(1 - p)\sum_{x_1=1}^{\infty}(1 - q)^{x_1-1}(1 - p)^{x_1-1} = \frac{q(1-p)}{1-(1-q)(1-p)} = \frac{q(1-p)}{p+q(1-p)}$.

**Esercizio 4.**
`D7`) Si vede che $P(a \leq X^2 \leq b) = 1$, da cui $F_Y(y) = 0$ per $y \leq a$ e $F_Y(y) = 1$ per $y \geq b$. Per $y \in (a, b)$ si ha $F_Y(y) = P(X^2 \leq y) = P(X \leq \sqrt{y}) = \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}dt = \frac{\sqrt{y}-\sqrt{a}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}$. Quindi la densità è $f_Y(y) = \frac{1}{2(\sqrt{b}-\sqrt{a})\sqrt{y}}1_{(a,b)}(y)$.
`D8`) Si ha $\mathbb{E}[Y\sqrt{Y}] = \int_a^b y\sqrt{y}\frac{1}{2(\sqrt{b}-\sqrt{a})\sqrt{y}}dy = \frac{1}{2(\sqrt{b}-\sqrt{a})}\int_a^b ydy = \frac{1}{2(\sqrt{b}-\sqrt{a})}\frac{[y^2]_{y=a}^{y=b}}{2} = \frac{b^2-a^2}{4(\sqrt{b}-\sqrt{a})}$.

**Esercizio 5.**
`D9`) Si ha $P(N_2 \geq 1) = 1 - P(N_2 = 0) = 1 - \frac{(1\cdot 2)^0}{0!}e^{-1\cdot 2} = 1 - e^{-2}$.
`D10`) Ricordando le proprietà delle somme di variabili aleatorie indipendenti con distribuzione di Poisson, per ogni $n \geq 1$ si ha che $N_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ dove $\{X_n : n \geq 1\}$ è una successione di variabili aleatorie i.i.d. con distribuzione di Poisson di parametro $\lambda = 1$. Quindi, per la legge dei grandi numeri, il valore richiesto è $a = \mathbb{E}[X_1] = 1$.

**Esercizio 6.**
`D11`) Si ha $P(X > 0.75) = 1 - \Phi(0.75) = 1 - 0.77337 = 0.22663$.
`D12`) Si ha $P(2X > 2) = P(X > 1) = 1-\Phi(1)$ e, poiché $X_1+X_2$ ha distribuzione normale di media 0 e varianza 2, $P(X_1 + X_2 > 2) = P(Z_{X_1+X_2} > \frac{2}{\sqrt{2}}) = 1 - \Phi(\sqrt{2})$. Quindi, essendo $\Phi(1) < \Phi(\sqrt{2})$ perché $\sqrt{2} > 1$, abbiamo $P(2X > 2) = 1 - \Phi(1) > 1 - \Phi(\sqrt{2}) = P(X_1 + X_2 > 2)$. Quindi la prima probabilità è maggiore della seconda.

**Esercizio 7.**
`D13`) Il valore di $a$ si determina imponendo che la somma degli elementi della prima riga è uguale a 1; quindi si ha $2a + a + \frac{1}{4} = 1$, da cui segue $3a = \frac{3}{4}$, e quindi $a = \frac{1}{4}$. La distribuzione stazionaria

sarà del tipo $(\alpha, \beta, \gamma)$. La relazione matriciale

$$(\alpha, \beta, \gamma) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = (\alpha, \beta, \gamma)$$

fornisce le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{2} = \alpha \\ \frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = \beta \\ \frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = \gamma. \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ottiene $\alpha = 0$ e, sostituendo nella seconda e nella terza, otteniamo $\beta = \gamma$. Allora, poiché $\alpha + \beta + \gamma = 1$, l'unica distribuzione stazionaria è $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

`D14`) Si ha $P(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 3) = \sum_{j=1}^{3} P(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 3 | X_0 = j) P(X_0 = j) = \sum_{j=1}^{3} p_{j1} p_{11} p_{13} P(X_0 = j)$ e, osservando che $p_{21} = p_{31} = 0$, si ottiene (tenendo ancora conto che $a = \frac{1}{4}$) $P(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 3) = p_{11}^2 p_{13} P(X_0 = 1) = (\frac{1}{2})^2 \frac{1}{4} \frac{1}{5} = \frac{1}{80}$.

*Commenti.*
*La somma dei valori di ciascuna densità discreta che appare è 1 in accordo con la teoria.*

`D1`) In altro modo la probabilità richiesta è $1 - p_X(0) = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$.

`D8`) In altro modo si ha $\mathbb{E}[Y\sqrt{Y}] = \mathbb{E}[X^2\sqrt{X^2}] = \mathbb{E}[X^3] = \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} x^3 \frac{1}{\sqrt{b}-\sqrt{a}} dx = \frac{1}{\sqrt{b}-\sqrt{a}} \frac{[x^4]_{x=\sqrt{a}}^{x=\sqrt{b}}}{4} = \frac{b^2-a^2}{4(\sqrt{b}-\sqrt{a})}$.

`D12`) Osserviamo che $P(2X > 2) = P(Y_1 + Y_2 > 2)$ con $Y_1 = Y_2 = X$, quindi con $Y_1$ e $Y_2$ normali standard non indipendenti. In questo caso si vede che $Y_1 + Y_2$ ha una varianza maggiore di $X_1 + X_2$ e quindi non sorprende che la probabilità di una coda (che non contiene la media 0, comune ad entrambi i casi) sia maggiore nel caso di varianza maggiore.

`D13`) Si poteva subito dire che, se $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ è una distribuzione stazionaria, allora $\pi_1 = 0$. Infatti 1 è uno stato transitorio perché comunica con ciascuno degli stati 2 e 3, ma questi non comunicano con lo stato 1. Inoltre $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ rappresenta la distribuzione stazionaria relativa alla matrice di transizione

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

ottenuta eliminando lo stato 1; si osservi che ciascuna colonna della matrice ottenuta in questo modo ha somma degli elementi uguale ad 1 ed è noto che la distribuzione uniforme è stazionaria quando vale questa condizione.