Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata

Calcolo delle Probabilità (ed insegnamenti mutuati)

Anno accademico: `2015-2016`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`

Simulazione 1

Esercizio 1. Un'urna contiene 3 palline con i numeri 1,2,3. Vengono estratte palline a caso, una alla volta e con reinserimento.
`D1`) Calcolare la probabilità che il numero 3 venga estratto per la prima volta alla seconda estrazione.
`D2`) Per $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, calcolare la probabilità di estrarre k volte il numero 1 prima di estrarre il numero 3, sapendo che il numero 3 viene estratto per la prima volta alla n-sima estrazione.

Esercizio 2. Si lancia n volte un dado e, in ciascun lancio, i numeri $1, \ldots, 6$ escono con probabilità $p_1, \ldots, p_6$ rispettivamente. In un'urna inizialmente vuota, ad ogni lancio viene messa una pallina con il numero ottenuto nel lancio del dado. Poi si estrae una pallina a caso dall'urna.
`D3`) Per $k \in \{1, \ldots, 6\}$, calcolare la probabilità di estrarre il numero k dall'urna.
`D4`) Per $k \in \{1, \ldots, 6\}$, calcolare la probabilità che il numero k sia uscito in h lanci del dado, per $h \in \{1, \ldots, n\}$, sapendo che il numero k viene estratto dall'urna.

Esercizio 3. Per $\lambda > 0$ consideriamo la seguente densità congiunta: $p_{X_1,X_2}(h,k) = \frac{\lambda^{k-1}}{k!}e^{-\lambda}$ per $k \geq h \geq 1$ interi.
`D5`) Trovare la densità marginale di X_2.
`D6`) Calcolare $P(X_1 = X_2)$ e dire per quale valore di $j \geq 1$ si ha $P(X_1 = X_2) = P(X_1 = j)$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con densità continua $f_X(x) = \frac{16}{9}(\frac{3}{2}t - t^2)1_{(0,3/2)}(t)$.
`D7`) Calcolare $P([X] = 1)$ dove $[x] = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \geq x\}$ è la parte intera di x.
`D8`) Trovare la funzione di distribuzione di $Y = \log X$.

Esercizio 5.
`D9`) Sia $N_t = \sum_{n\geq 1} 1_{T_n \leq t}$ (per $t \geq 0$) un processo di Poisson con intensità di λ. Trovare il valore di λ per cui si ha $P(N_1 = 0|N_1 \leq 1) = \frac{1}{2}$.
`D10`) Sia X una variabile aleatoria normale standard. Calcolare $P(|X| \geq 1.24)$.

Esercizio 6. Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. (indipendenti e identicamente distribuite).
`D11`) Dire per quale valore di m si ha

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - m\right| > \varepsilon\right) = 0 \text{ per ogni } \varepsilon > 0,$$

nel caso in cui le variabili aleatorie $\{X_n : n \geq 1\}$ abbiano densità discreta $p_X(k) = \frac{\binom{5}{k}\binom{5}{4-k}}{\binom{10}{4}}$ per $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.
`D12`) Poniamo $\bar{X}_n = \frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$. Dire per quale valore di s si ha

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\bar{X}_n - 5}{s/\sqrt{n}} \leq x\right) = \Phi(x) \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}$$

nel caso in cui le variabili aleatorie $\{X_n : n \geq 1\}$ abbiano densità continua $f_X(t) = \frac{1}{10} \cdot 1_{(0,10)}(t)$.

Esercizio 7 (*solo per Lauree Magistrali*). Consideriamo una catena di Markov omogenea $\{X_n : n \geq 0\}$ con spazio degli stati $E = \{1, 2, 3, 4\}$ e matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} p & 1-p & 0 & 0 \\ q & 1-q & 0 & 0 \\ a & b & c & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dove $p, q \in (0, 1)$ e $a, b, c, d \in (0, 1)$ tali che $a + b + c + d = 1$.
`D13`) Calcolare la probabilità di assorbimento nello stato 4 partendo dallo stato 3.
`D14`) Calcolare $P(X_1 = \cdots = X_n = k|X_0 = 3)$ al variare di $k \in E$.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
Sia Y la variabile aleatoria che conta il numero di estrazioni necessarie per avere per la prima volta il numero 3.
D1) La probabilità richiesta è $P(Y=2)=(1-\frac{1}{3})^{2-1}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$.
D2) Se E_k è l' evento "esce k volte il numero 1 prima di estrarre il numero 3", la probabilità richiesta è $P(E_k|Y=n)=\frac{P(E_k\cap\{Y=n\})}{P(Y=n)}=\frac{\binom{n-1}{k}(1/3)^k(1/3)^{n-1-k}(1/3)}{(1-1/3)^{n-1}(1/3)}=\binom{n-1}{k}(\frac{1}{2})^{n-1}$.

Esercizio 2.
Sia X_k la variabile aleatoria che conta quante volte esce il numero k negli n lanci di dado equo. Poi sia E_k l'evento "il numero k viene estratto dall'urna".
D3) Per la formula delle probabilità totali si ha (si osservi che X_k ha un' opportuna distribuzione binomiale) $P(E_k)=\sum_{i=0}^n P(E_k|X_k=i)P(X_k=i)=\sum_{i=0}^n \frac{i}{n}\binom{n}{i}p_k^i(1-p_k)^{n-i}=\frac{1}{n}\mathbb{E}[X_k]=\frac{1}{n}\cdot np_k=p_k$.
D4) Per la formula di Bayes, e tenendo conto di alcuni valori calcolati prima, si ha $P(X_k=h|E_k)=\frac{P(E_k|X_k=h)P(X_k=h)}{P(E_k)}=\frac{\frac{h}{n}\binom{n}{h}p_k^h(1-p_k)^{n-h}}{p_k}=\binom{n-1}{h-1}p_k^{h-1}(1-p_k)^{n-h}$.

Esercizio 3.
D5) Si ha $P(X_2=k)=\sum_{h=1}^k\frac{\lambda^{k-1}}{k!}e^{-\lambda}=k\cdot\frac{\lambda^{k-1}}{k!}e^{-\lambda}=\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda}$ per $k\geq 1$.
D6) Si ha $P(X_1=X_2)=\sum_{k\geq 1}\frac{\lambda^{k-1}}{k!}e^{-\lambda}=\frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\sum_{k\geq 1}\frac{\lambda^k}{k!}=\frac{e^{-\lambda}}{\lambda}(e^\lambda-1)=\frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}$. Inoltre $P(X_1=h)=\sum_{k\geq h}\frac{\lambda^{k-1}}{k!}e^{-\lambda}$ per ogni $h\geq 1$ intero, e quindi il valore richiesto è $j=1$.

Esercizio 4.
D7) Si ha $P([X]=1)=P(1\leq X<2)=\int_1^2 f_X(t)dt=\int_1^{3/2}\frac{16}{9}(\frac{3}{2}t-t^2)dt=\frac{16}{9}\left[\frac{3}{4}t^2-\frac{t^3}{3}\right]_{t=1}^{t=3/2}=\frac{16}{9}\left(\frac{27}{16}-\frac{27}{24}-\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\right)=\frac{16}{9}\cdot\frac{81-54-36+16}{48}=\frac{7}{27}$.
D8) Si vede che $P(\log X\leq\log 3/2)=1$, da cui $F_Y(y)=1$ per $y\geq\log 3/2$. Per $y\in(-\infty,\log 3/2)$ si ha $F_Y(y)=P(\log X\leq y)=P(X\leq e^y)=\int_0^{e^y}\frac{16}{9}(\frac{3}{2}t-t^2)dt=\frac{16}{9}\left[\frac{3}{4}t^2-\frac{t^3}{3}\right]_{t=0}^{t=e^y}=\frac{16}{9}\left(\frac{3}{4}e^{2y}-\frac{e^{3y}}{3}\right)$.

Esercizio 5.
D9) Si ha $P(N_1=0|N_1\leq 1)=\frac{P(\{N_1=0\}\cap\{N_1\leq 1\})}{P(N_1\leq 1)}=\frac{P(N_1=0)}{P(N_1\leq 1)}=\frac{(\lambda^0/0!)e^{-\lambda}}{(\lambda^0/0!)e^{-\lambda}+(\lambda^1/1!)e^{-\lambda}}=\frac{1}{1+\lambda}$. Quindi si deve avere $\frac{1}{1+\lambda}=\frac{1}{2}$, da cui segue $1+\lambda=2$ e quindi $\lambda=1$.
D10) Si ha $P(|X|\geq 1.24)=P(X\leq -1.24)+P(X\geq 1.24)=\Phi(-1.24)+1-P(X<1.24)=1-\Phi(1.24)+1-\Phi(1.24)=2-2\Phi(1.24)=2-2\cdot 0.89251=0.21498$.

Esercizio 6.
D11) Per la legge dei grandi numeri si ha $m=\sum_{k=0}^4 k\cdot\frac{\binom{5}{k}\binom{5}{4-k}}{\binom{10}{4}}=\frac{0\cdot 5+1\cdot 50+2\cdot 100+3\cdot 50+4\cdot 5}{210}=\frac{420}{210}=2$.
D12) Per il teorema limite centrale si ha $s=\sqrt{\mathrm{Var}[X_n]}$ (che non dipende da n). Inoltre, poiché le variabili aleatorie hanno distribuzione uniforme su $(0,10)$, si ha $s=\sqrt{\frac{(10-0)^2}{12}}=\frac{10}{\sqrt{12}}=\frac{5}{\sqrt{3}}=\frac{5}{3}\sqrt{3}$.

Esercizio 7.
D13) Si ha $C=\{4\}$ e $D_C=\{3\}$. Allora la probabilità richiesta λ è la soluzione della seguente equazione:

$$\lambda=d+\lambda c.$$

In corrispondenza si ha $\lambda(1-c)=d$ da cui segue $\lambda=\frac{d}{1-c}$, oppure $\lambda=\frac{d}{a+b+d}$.
D14) Si ha

$$P(X_1=\cdots=X_n=k|X_0=3)=p_{3k}p_{kk}^{n-1}=\begin{cases} a\cdot p^{n-1} & \text{se } k=1\\ b\cdot(1-q)^{n-1} & \text{se } k=2\\ c\cdot c^{n-1}=c^n & \text{se } k=3\\ d\cdot 1^{n-1}=d & \text{se } k=4.\end{cases}$$

Commenti.
La somma dei valori di ciascuna densità discreta che appare è 1 in accordo con la teoria.
D2) Si ha $P(E_k|Y=n)=\binom{n-1}{k}(\frac{1}{2})^{n-1}$ per $k\in\{0,\dots,n-1\}$. Quindi il secondo membro è la densità

discreta della variabile aleatoria che conta il numero di successi su $n-1$ prove indipendenti (quelle prima dell'n-sima dove esce il numero 3 per la prima volta); in ciascuna prova possono uscire i numeri 1 (successo) e 2 (fallimento) con probabilità $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$ rispettivamente.
D4) Si ha $P(X_k = h|E_k) = \binom{n-1}{h-1} p_k^{h-1}(1-p_k)^{(n-1)-(h-1)}$ per $h \in \{1,\dots,n\}$; quindi abbiamo la densità discreta di Z_k+1, dove Z_k è una variabile aleatoria distribuzione binomiale di parametri $n-1$ e p_k. Allora, se consideriamo gli n lanci di dado come prove indipendenti, e il "successo" in ogni prova è l'uscita del numero k, condizionatamente all'estrazione del numero k dall'urna (evento E_k) abbiamo la seguente interpretazione: il numero di successi è $X_k = Z_k + 1$ dove, essendo stato estratto il numero k dall' urna, abbiamo avuto un successo in un lancio del dado, e Z_k (che come abbiamo detto ha distribuzione binomiale di parametri $n-1$ e p_k) conta il numero di successi negli altri $n-1$ lanci.
D5) La densità discreta di X_2 coincide con quella di $Y+1$ dove Y è una variabile aleatoria con distribuzione di Poisson di parametro λ.
D7) In altro modo si ha $P([X]=1) = 1 - P([X]=0) = 1 - P(0 \leq X < 1) = 1 - \int_0^1 f_X(t)dt = 1 - \int_0^1 \frac{16}{9}(\frac{3}{2}t - t^2)dt = 1 - \frac{16}{9}\left[\frac{3}{4}t^2 - \frac{t^3}{3}\right]_{t=0}^{t=1} = 1 - \frac{16}{9}\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{16}{9}\cdot\frac{9-4}{12} = 1 - \frac{4}{9}\cdot\frac{5}{3} = 1 - \frac{20}{27} = \frac{7}{27}$.
D11) Il valore m richiesto è la speranza matematica di una variabile aleatoria con distribuzione ipergeometrica. È noto che tale distribuzione riguarda le variabili aleatorie che contano il numero di "successi" su un certo numero di estrazioni casuali senza reinserimento; inoltre è anche noto che si ha la stessa speranza matematica che si avrebbe nel caso di estrazioni casuali con reinserimento. Quindi, con riferimento alla distribuzione binomiale, in altro modo si ha $m = 4 \cdot \frac{5}{5+5} = \frac{20}{10} = 2$.
D14) Osserviamo che, quando la catena di Markov lascia lo stato 3, viene assorbita o in $\{1,2\}$ o in $\{4\}$. Allora abbiamo la seguente interpretazione naturale del valore λ: è dato dalla probabilità di compiere una transizione da 3 in 4, diviso la probabilità di compiere una transizione da 3 in un qualsiasi stato diverso da 3.