Laurea Triennale in Scienza e Tecnologia dei Media, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità
Anno accademico: `2018-2019`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Appello del 18 Febbraio 2019
Esercizi 1,2,3,4,5 per gli studenti che sostengono l'esame da 6 crediti.
Esercizi 1,2,3,4,5,6 per gli studenti che sostengono l'esame da 8 crediti.

Esercizio 1.
Un'urna ha 5 palline numerate da 1 a 5. Si estraggono 2 palline, una alla volta e senza reinserimento.
`D1`) Calcolare la probabilità di estrarre la sequenza $(\text{pari}, \text{dispari})$.
`D2`) Calcolare la probabilità di estrarre un numero pari e un numero dispari in un qualsiasi ordine.
`D3`) Trovare la densità discreta della variabile aleatoria X che indica la differenza tra il massimo e il minimo tra i due numeri estratti.

Esercizio 2.
Sia $k \geq 1$ intero. Abbiamo un'urna con k palline bianche. Si lancia una moneta equa: se esce testa l'urna resta inalterata, se esce croce si mettono $2k$ palline nere nell'urna. Poi si estrae una pallina a caso dall'urna.
`D4`) Calcolare la probabilità di aver ottenuto testa nel lancio di moneta sapendo di aver estratto una pallina bianca.

Esercizio 3.
Siano $p, q \in (0,1)$ fissati. Consideriamo la seguente densità congiunta: $p_{X_1,X_2}(k,k) = \frac{1}{2}(1-q)^{k-1}q$ per $k \geq 1$ intero; $p_{X_1,X_2}(k,0) = \frac{1}{2}(1-p)^k p$ per $k \geq 0$ intero.
`D5`) Calcolare $P(X_1 \geq 3, X_2 = 0)$.
`D6`) Calcolare $P((X_1, X_2) \in \{(0,0),(1,1)\})$.

Esercizio 4.
Sia X una variabile aleatoria con distribuzione esponenziale di parametro λ.
`D7`) Calcolare $P(\frac{1}{2\lambda} \leq X \leq \frac{3}{2\lambda})$.
`D8`) Trovare la funzione di distribuzione di $Y = \log X$.

Esercizio 5.
Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.
`D9`) Sia X una variabile aleatoria Normale con media μ e varianza 4. Trovare il valore di μ affinché si abbia $P(X > 5) = 1 - \Phi(1)$.
`D10`) Si lancia 600 volte un dado equo. Facendo riferimento alla funzione Φ con argomento positivo, calcolare la probabilità che il numero 4 esca al massimo 110 volte usando l'approssimazione Normale e la correzione di continuità.

Esercizio 6.
Consideriamo una catena di Markov omogenea $\{X_n : n \geq 0\}$ con spazio degli stati $E = \{1,2,3\}$ e matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} p & q & 1-(p+q) \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

per $p, q \in (0,1)$ tali che $1-(p+q) \in (0,1)$.
`D11`) Calcolare la probabilità che la catena passi per lo stato 3 partendo dallo stato 1.
`D12`) Calcolare i tempi medi di raggiungimento dello stato 2 partendo da 1 e da 3, rispettivamente.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
D1) Con notazioni ovvie la probabilità richiesta è $P(D_1^c \cap D_2) = P(D_2|D_1^c)P(D_1^c) = \frac{3}{4}\frac{2}{5} = \frac{3}{10}$.
D2) Per la teoria della distribuzione Ipergeometrica la probabilità richiesta è $\frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.
Osservazione: la probabilità richiesta è anche uguale a $P(D_1^c \cap D_2) + P(D_1 \cap D_2^c) = \frac{3}{10} + \frac{3}{10} = \frac{3}{5}$; infatti il primo addendo è stato calcolato nella risposta alla domanda precedente, mentre il secondo si calcola in maniera analoga e, in accordo con la teoria (tutte le sequenze con lo stesso numero di successi e fallimenti sono equiprobabili), viene lo stesso valore.
D3) Abbiamo $5 \cdot 4 = 20$ casi tutti equiprobabili. Quindi:

$$p_X(1) = P(\{(1,2),(2,1),(2,3),(3,2),(3,4),(4,3),(4,5),(5,4)\}) = \frac{8}{20} = \frac{4}{10};$$

$$p_X(2) = P(\{(1,3),(3,1),(2,4),(4,2),(3,5),(5,3)\}) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10};$$

$$p_X(3) = P(\{(1,4),(4,1),(2,5),(5,2)\}) = \frac{4}{20} = \frac{2}{10};$$

$$p_X(4) = P(\{(1,5),(5,1)\}) = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}.$$

Osservazione: nel caso di estrazioni casuali in blocco si dovrebbe fare riferimento a $\binom{5}{2} = 10$ casi possibili, ed equiprobabili, costituiti dai sottoinsiemi di 2 elementi di $\{1,2,3,4,5\}$; praticamente si avrebbero gli stessi casi senza distinguere l'ordine, e si ottengono gli stessi valori numerici.

Esercizio 2.
D4) Indichiamo con T l'evento "esce testa nel lancio di moneta" e con B l'evento "estratta pallina bianca". Allora, per la formula di Bayes, la probabilità condizionata richiesta è (si osservi che $P(B|T) = \frac{k}{k} = 1$ e $P(B|T^c) = \frac{k}{3k} = \frac{1}{3}$ non dipendono da k; lo stesso vale anche per le altre quantità che appaiono nella formula di Bayes)

$$P(T|B) = \frac{P(B|T)P(T)}{P(B)} = \frac{P(B|T)P(T)}{P(B|T)P(T) + P(B|T^c)P(T^c)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{2}}{1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{3}{4}.$$

Osservazione: possiamo dire che $P(T|B) > P(T)$; quindi T e B non sono indipendenti ma correlati positivamente.

Esercizio 3.
D5) Si ha

$$P(X_1 \geq 3, X_2 = 0) = \sum_{k=3}^{\infty} p_{X_1,X_2}(k,0) = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{2}(1-p)^k p = \frac{p}{2}\frac{(1-p)^3}{1-(1-p)} = \frac{(1-p)^3}{2}.$$

D6) Si ha

$$P((X_1, X_2) \in \{(0,0),(1,1)\}) = p_{X_1,X_2}(0,0) + p_{X_1,X_2}(1,1) = \frac{p+q}{2}.$$

Esercizio 4.
D7) Si ha

$$P\left(\frac{1}{2\lambda} \leq X \leq \frac{3}{2\lambda}\right) = \int_{1/(2\lambda)}^{3/(2\lambda)} \lambda e^{-\lambda x} dx = [-e^{-\lambda x}]_{x=1/(2\lambda)}^{x=3/(2\lambda)} = e^{-1/2} - e^{-3/2}.$$

D8) Per ogni $y \in \mathbb{R}$ si ha $F_Y(y) = P(\log X \leq y) = P(X \leq e^y) = \int_0^{e^y} \lambda e^{-\lambda x} dx = [-e^{-\lambda x}]_{x=0}^{x=e^y} = 1 - e^{-\lambda e^y}$.

Esercizio 5.
D9) Si ha

$$P(X > 5) = P\left(\frac{X-\mu}{\sqrt{4}} > \frac{5-\mu}{\sqrt{4}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{5-\mu}{\sqrt{4}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{5-\mu}{2}\right),$$

da cui segue $\frac{5-\mu}{2} = 1$, e $\mu = 5 - 2 = 3$.
`D10`) La probabilità richiesta è $P(S \leq 110) = P(S \leq 110.5)$ dove S è una variabile aleatoria Binomiale di parametri $n = 600$ e $p = 1/6$. Quindi $S = X_1 + \cdots + X_{600}$, dove gli addendi sono Bernoulliani indipendenti di parametro $p = 1/6$. Allora per l'approssimazione Normale si ha

$$P(S \leq 110.5) = P\left(\frac{S - 600 \cdot \frac{1}{6}}{\sqrt{600 \cdot \frac{1}{6}(1 - \frac{1}{6})}} \leq \frac{110.5 - 600 \cdot \frac{1}{6}}{\sqrt{600 \cdot \frac{1}{6}(1 - \frac{1}{6})}}\right) \approx \Phi\left(\frac{110.5 - 100}{9.1287}\right) \approx \Phi(1.15).$$

Osservazione: per completezza, anche se non richiesto per l'esame, $\Phi(1.15) = 0.87493$.

Esercizio 6.
`D11`) Si deve fare riferimento al sistema di equazioni per le probabilità di passaggio per l'insieme $C = \{3\}$. Tenendo conto che l'insieme $D_C = \{1\}$, il sistema si riduce alla seguente unica equazione per la probabilità richiesta λ:

$$\lambda = 1 - (p + q) + \lambda p.$$

In corrispondenza si ha $\lambda = \frac{1-p-q}{1-p}$.
`D12`) I valori richiesti sono μ_1 e μ_3 e abbiamo il seguente sistema

$$\begin{cases} \mu_1 = 1 + p\mu_1 + (1 - (p + q))\mu_3 \\ \mu_3 = 1 + 1 \cdot \mu_1 + 0 \cdot \mu_3, \end{cases} \quad \begin{cases} \mu_1(1 - p) = 1 + (1 - (p + q))\mu_3 \\ \mu_3 = 1 + \mu_1. \end{cases}$$

Quindi, sostituendo la seconda nella prima equazione, si ha

$$\mu_1(1 - p) = 1 + (1 - (p + q))(1 + \mu_1)$$

$$\mu_1(1 - p - 1 + p + q) = 1 + 1 - (p + q), \ \mu_1 = \frac{2 - (p + q)}{q}.$$

In conclusione le soluzioni del sistema sono

$$\begin{cases} \mu_1 = \frac{2-p}{q} - 1 \\ \mu_3 = \frac{2-p}{q}. \end{cases}$$