Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)
Anno Accademico: 2020-2021. *Titolare del corso:* Claudio Macci
Simulazione 2

Esercizio 1. Un'urna ha 6 palline con i numeri 0,1,1,2,2,3. Si estraggono a caso 2 palline in blocco.
D1) Trovare la densità discreta della variabile aleatoria X che conta il numero di palline estratte con il numero maggiore o uguale a 2.
D2) Calcolare $\mathbb{E}[Y]$ dove Y è la variabile aleatoria che conta il numero di palline estratte con il numero 1.
D3) Calcolare la probabilità che il massimo tra i due numeri estratti sia uguale a 2.

Esercizio 2. Abbiamo due urne: l'urna A con 1 pallina nera e 3 rosse; l'urna B con 2 palline nere e 2 rosse. Si sceglie una delle due urne: l'urna A con probabilità p e l'urna B con probabilità $1-p$. Poi si estrae una pallina a caso dall'urna scelta.
D4) Calcolare la probabilità di aver scelto l'urna A sapendo di aver estratto una pallina nera.

Esercizio 3. Siano X_1 e X_2 due variabili aleatorie discrete indipendenti con le seguenti densità marginali:

$$p_{X_1}(x_1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x_1+1} \quad \text{per } x_1 \geq 0 \text{ intero;}$$

$$p_{X_2}(x_2) = \frac{2^{x_2}}{x_2!}e^{-2} \quad \text{per } x_2 \geq 0 \text{ intero.}$$

D5) Calcolare $P(X_1 = X_2)$.
D6) Calcolare $P(X_1 + X_2 = 2)$.

Esercizio 4. Sia $b > 0$ e sia X una variabile aleatoria con distribuzione uniforme su $(-b, b)$.
D7) Trovare la densità continua della variabile aleatoria $Y = e^{|X|}$.
D8) Supponiamo che $b \geq \log 2$, e quindi $\frac{e^b}{2} \geq 1$. Calcolare $P(Y > \frac{e^b}{2})$.

Esercizio 5. Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.
Sia X una v.a. Normale con media 0 e varianza σ^2.
D9) Calcolare $P(|X| > 2\sigma)$ esprimendo il risultato con la funzione Φ calcolata in argomento positivo.
Siano $X_1, \ldots, X_{100}$ v.a. i.i.d. con media 0 e varianza 16.
D10) Calcolare $P(X_1 + \cdots + X_{100} > 70)$ con l'approssimazione Normale esprimendo il risultato con la funzione Φ calcolata in argomento positivo.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
`D1)` Si fa riferimento alla distribuzione ipergeometrica e si ha $p_X(k) = \frac{\binom{3}{k}\binom{3}{2-k}}{\binom{6}{2}}$ per $k \in \{0,1,2\}$, da cui segue $p_X(0) = \frac{1\cdot 3}{15} = \frac{1}{5}$, $p_X(1) = \frac{3\cdot 3}{15} = \frac{3}{5}$ e $p_X(2) = \frac{3\cdot 1}{15} = \frac{1}{5}$.
`D2)` Si ha ancora una variabile aleatoria ipergeometrica e, per la teoria di tale distribuzione (si estraggono 2 palline e abbiamo 2 palline con il numero 1 su 6 in totale), si ha $\mathbb{E}[Y] = 2 \cdot \frac{2}{6} = \frac{2}{3}$.
`D3)` Abbiamo $\binom{6}{2} = 15$ casi possibili tutti equiprobabili e, distinguendo tra palline con lo stesso numero, sono i seguenti:

$$\{0,1_a\},\{0,1_b\},\{0,2_a\},\{0,2_b\},\{0,3\},\{1_a,1_b\},\{1_a,2_a\},\{1_a,2_b\},\{1_a,3\},$$
$$\{1_b,2_a\},\{1_b,2_b\},\{1_b,3\},\{2_a,2_b\},\{2_a,3\},\{2_b,3\}.$$

Noi siamo interessati all'evento E dato dagli insiemi che hanno come massimo il valore 2:

$$E = \{\{0,2_a\},\{0,2_b\},\{1_a,2_a\},\{1_a,2_b\},\{1_b,2_a\},\{1_b,2_b\},\{2_a,2_b\}\}.$$

Quindi $P(E) = \frac{\#E}{15} = \frac{7}{15}$.

Esercizio 2.
`D4)` Con notazioni ovvie viene chiesto di calcolare una probabilità condizionata $P(A|N)$. Per la formula di Bayes (e la formula delle probabilità totali per $P(N)$) si ha

$$P(A|N) = \frac{P(N|A)P(A)}{P(N)} = \frac{P(N|A)P(A)}{P(N|A)P(A) + P(N|B)P(B)} = \frac{\frac{1}{4}\cdot p}{\frac{1}{4}\cdot p + \frac{2}{4}\cdot(1-p)} = \frac{p}{2-p}.$$

Esercizio 3.
Per ipotesi di indipendenza in generale si ha $p_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = p_{X_1}(x_1)p_{X_2}(x_2)$.
`D5)` Si ha $P(X_1 = X_2) = \sum_{k\geq 0} p_{X_1,X_2}(k,k) = \sum_{k\geq 0}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\frac{2^k}{k!}e^{-2} = \frac{e^{-2}}{2}\sum_{k\geq 0}\frac{1^k}{k!} = \frac{e^{-2}\cdot e^1}{2} = \frac{e^{-1}}{2}$.
`D6)` Si ha $P(X_1+X_2 = 2) = p_{X_1,X_2}(0,2)+p_{X_1,X_2}(1,1)+p_{X_1,X_2}(2,0) = \left(\frac{1}{2}\right)^{0+1}\frac{2^2}{2!}e^{-2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{1+1}\frac{2^1}{1!}e^{-2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{2+1}\frac{2^0}{0!}e^{-2} = \{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\}e^{-2} = \frac{13}{8}e^{-2}$.

Esercizio 4.
`D7)` Si ha $P(1 \leq Y \leq e^b) = 1$ e quindi $F_Y(y) = 0$ per $y \leq 1$ e $F_Y(y) = 1$ per $y \geq e^b$. Per $y \in (1, e^b)$ si ha $F_Y(y) = P(e^{|X|} \leq y) = P(|X| \leq \log y) = P(-\log y \leq X \leq \log y) = \int_{-\log y}^{\log y}\frac{1}{b-(-b)}dx = \frac{1}{2b}[x]_{x=-\log y}^{x=\log y} = \frac{\log y-(-\log y)}{2b} = \frac{2\log y}{2b} = \frac{\log y}{b}$. Quindi $f_Y(y) = \frac{1}{by}1_{(1,e^b)}(y)$.
`D8)` Si ha $P(Y > \frac{e^b}{2}) = \int_{e^b/2}^{\infty} f_Y(y)dy = \int_{e^b/2}^{e^b}\frac{1}{by}dy = \frac{1}{b}[\log y]_{y=e^b/2}^{y=e^b} = \frac{b-(b-\log 2)}{b} = \frac{\log 2}{b}$.

Esercizio 5.
`D9)` La standardizzata di X è $X^* = \frac{X-0}{\sigma} = \frac{X}{\sigma}$; quindi si ha $P(|X| > 2\sigma) = P(X > 2\sigma) + P(X < -2\sigma) = P(X^* > 2) + P(X^* < -2) = 1 - \Phi(2) + \Phi(-2) = 1 - \Phi(2) + 1 - \Phi(2) = 2(1-\Phi(2))$.
`D10)` Si ha $P(X_1 + \cdots + X_{100} > 70) = P\left(\frac{X_1+\cdots+X_{100}-100\cdot 0}{\sqrt{16}\sqrt{100}} > \frac{70-100\cdot 0}{\sqrt{16}\sqrt{100}}\right) \approx 1 - \Phi\left(\frac{70-100\cdot 0}{\sqrt{16}\sqrt{100}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{7}{4}\right)$.

Commenti alle soluzioni.
`D2)` Si può anche fare il conto esplicito a partire dalla densità discreta $p_Y(k) = \frac{\binom{2}{k}\binom{4}{2-k}}{\binom{6}{2}}$ per $k \in \{0,1,2\}$. Si ha $p_Y(0) = \frac{1\cdot 6}{15} = \frac{6}{15}$, $p_Y(1) = \frac{2\cdot 4}{15} = \frac{8}{15}$ e $p_Y(2) = \frac{1\cdot 1}{15} = \frac{1}{15}$, da cui segue $\mathbb{E}[Y] = \sum_{k=0}^{2} kp_Y(k) = 0\cdot\frac{6}{15} + 1\cdot\frac{8}{15} + 2\cdot\frac{1}{15} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$.

D8) In altro modo, senza dover fare riferimento alla f_Y ottenuta nella domanda precedente, si ha $P(Y > \frac{e^b}{2}) = P(e^{|X|} > \frac{e^b}{2}) = P(|X| > b - \log 2) = P(X > b - \log 2) + P(X < -(b - \log 2)) = \int_{b-\log 2}^{b} \frac{1}{b-(-b)} dx + \int_{-b}^{-(b-\log 2)} \frac{1}{b-(-b)} dx = \frac{1}{2b}[x]_{x=b-\log 2}^{x=b} + \frac{1}{2b}[x]_{x=-b}^{x=-(b-\log 2)} = \frac{b-(b-\log 2)}{2b} + \frac{-(b-\log 2)-(-b)}{2b} = \frac{\log 2}{2b} + \frac{\log 2}{2b} = \frac{2\log 2}{2b} = \frac{\log 2}{b}$.

D8) L'uguaglianza ottenuta $P(Y > \frac{e^b}{2}) = \frac{\log 2}{b}$ ci consente di dire che si ha effettivamente un numero in $[0, 1]$ come deve essere perché $b \geq \log 2 > 0$. Anzi possiamo dire che: $P(Y > \frac{e^b}{2}) \neq 0$ per ogni $b > 0$ (perché $\log 2 > 0$); $P(Y > \frac{e^b}{2}) = 1$ se e solo se $b = \log 2$ (del resto in tal caso si ha $\frac{e^b}{2} = 1$ e già sappiamo che $P(Y \geq 1) = 1$ dalla domanda precedente).

D8) Se avessimo $b < \log 2$ si avrebbe $\frac{e^b}{2} < 1$ e quindi si avrebbe $P(Y > \frac{e^b}{2}) = 1$.

D9) In altro modo si può anche fare riferimento alla probabilità dell'evento complementare e si ha $P(|X| > 2\sigma) = 1 - P(|X| < 2\sigma) = 1 - P(-2\sigma < X < 2\sigma) = 1 - P(-2 < X^* < 2) = 1 - (\Phi(2) - \Phi(-2)) = 1 - \Phi(2) + \Phi(-2) = 1 - \Phi(2) + 1 - \Phi(2) = 2(1 - \Phi(2))$.