Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità (ed insegnamenti mutuati)
Anno accademico: `2015-2016`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Appello del 26 Gennaio 2016

Esercizio 1. Un'urna contiene 5 palline con i numeri $0, 1, 2, 3, 4$. Si estraggono a caso 2 palline in blocco.
`D1`) Calcolare la probabilità di estrarre i due numeri dispari.
`D2`) Calcolare la probabilità che la somma dei due numeri estratti sia uguale a 3.

Esercizio 2. Abbiamo un dado truccato e la probabilità che esca il numero 4 ad ogni lancio è $\frac{1}{5}$. Il dado viene lanciato tante volte fino a quando esce per la prima volta il numero 4. Poi si lancia una moneta equa tante volte quante è stato lanciato il dado.
`D3`) Calcolare la probabilità che esca sempre croce nei lanci di moneta effettuati.
`D4`) Calcolare la probabilità di aver lanciato il dado (e la moneta) n volte (per $n \geq 1$ intero) sapendo che è uscita sempre croce nei lanci di moneta effettuati.

Esercizio 3. Consideriamo la seguente densità congiunta: $p_{X_1,X_2}(k, 6-k) = \binom{6}{k}\frac{1}{64}$ per $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
`D5`) Calcolare $P(X_1X_2 = 0)$.
`D6`) Calcolare $P(X_1 = X_2)$.

Esercizio 4. Siano $a, b > 0$ fissati con $b > a$, e sia X una variabile aleatoria con distribuzione uniforme su $(\log a, \log b)$.
`D7`) Trovare la funzione di distribuzione di $Y = e^X$.
`D8`) Calcolare $\mathbb{E}[|X|]$ nel caso in cui $a \in (0, 1)$ e $b > 1$.

Esercizio 5.
`D9`) Sia $N_t = \sum_{n\geq 1} 1_{T_n \leq t}$ (per $t \geq 0$) un processo di Poisson con intensità di $\lambda = \frac{1}{3}$. Calcolare $\mathbb{E}[N_{12}]$.
`D10`) Sia X una variabile aleatoria Normale con media $\mu = 2$ e varianza $\sigma^2 = 16$. Calcolare $P(X \geq 3)$.

Esercizio 6. Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. (indipendenti e identicamente distribuite).
`D11`) Dire per quale valore di m si ha

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - m\right| > \varepsilon\right) = 0 \text{ per ogni } \varepsilon > 0,$$

nel caso in cui le variabili aleatorie $\{X_n : n \geq 1\}$ abbiano densità discreta $p_X(2) = \frac{2}{5}$, $p_X(4) = \frac{1}{5}$ e $p_X(6) = \frac{2}{5}$.
`D12`) Sia $\alpha > 0$ fissato. Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} P\left(X_1 + \cdots + X_n - n \leq \sqrt{n/\alpha}\right)$$

nel caso in cui le variabili aleatorie $\{X_n : n \geq 1\}$ abbiano densità continua $f_X(x) = \frac{\alpha^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\alpha x} 1_{(0,\infty)}(x)$.

Esercizio 7 (*solo per Lauree Magistrali*). Siano $a, b > 0$ fissati. Consideriamo una catena di Markov omogenea $\{X_n : n \geq 0\}$ con spazio degli stati $E = \{1, 2, 3, 4\}$ e matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} e^{-a} & 1-e^{-a} & 0 & 0 \\ 1-e^{-a} & e^{-a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-e^{-b} & e^{-b} \\ 0 & 0 & e^{-b} & 1-e^{-b} \end{pmatrix}.$$

`D13`) Trovare la/e distribuzione/i stazionaria/e.
`D14`) Calcolare $P(X_1 = \cdots = X_n = 3 | X_0 = 3)$.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
Consideriamo l'insieme $\Omega = \{\{0,1\},\{0,2\},\{0,3\},\{0,4\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\}$ che rappresenta tutti i possibili 10 modi (equiprobabili) di estrarre 2 palline in blocco tra le 5 nell'urna.
D1) La probabilità richiesta è $P(\{\{1,3\}\}) = \frac{1}{10}$.
D2) La probabilità richiesta è $P(\{\{0,3\},\{1,2\}\}) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$.

Esercizio 2. Indichiamo con E l'evento "esce sempre croce nei lanci di moneta effettuati", e con X la variabile aleatoria che conta il numero di lanci di dado (e di moneta) effettuati.
D3) Per la formula delle probabilità totali si ha $P(E) = \sum_{k=1}^{\infty} P(E|X=n)P(X=n) = \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^n(1-\frac{1}{5})^{n-1}\frac{1}{5} = \frac{1}{5}\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^{n-1}(\frac{4}{5})^{n-1} = \frac{1}{10}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2}{5})^{n-1} = \frac{1}{10}\frac{(2/5)^0}{1-2/5} = \frac{1}{10}\frac{1}{3/5} = \frac{1}{6}$.
D4) Per la formula di Bayes, e tenendo conto di alcuni valori calcolati prima, si ha $P(X=n|E) = \frac{P(E|X=n)P(X=n)}{P(E)} = \frac{(\frac{1}{2})^n(1-\frac{1}{5})^{n-1}\frac{1}{5}}{1/6} = \frac{6}{5}(\frac{1}{2})^n(\frac{4}{5})^{n-1} = \frac{6}{5}\frac{1}{2}(\frac{1}{2})^{n-1}(\frac{4}{5})^{n-1} = \frac{3}{5}(\frac{2}{5})^{n-1}$.

Esercizio 3.
D5) Si ha $P(X_1X_2 = 0) = p_{X_1,X_2}(6,0) + p_{X_1,X_2}(0,6) = \binom{6}{0}\frac{1}{64} + \binom{6}{6}\frac{1}{64} = \frac{1+1}{64} = \frac{1}{32}$.
D6) Si ha $P(X_1 = X_2) = p_{X_1,X_2}(3,3) = \binom{6}{3}\frac{1}{64} = \frac{20}{64} = \frac{5}{16}$.

Esercizio 4.
D7) Si vede che $P(a \leq Y \leq b) = 1$ e quindi $F_Y(y) = 0$ per $y \leq a$ e $F_Y(y) = 1$ per $y \geq b$. Per $y \in (a,b)$ si ha $F_Y(y) = P(e^X \leq y) = P(X \leq \log y) = \int_{\log a}^{\log y} \frac{1}{\log b - \log a}dx = [\frac{x}{\log b - \log a}]_{x=\log a}^{x=\log y} = \frac{\log y - \log a}{\log b - \log a}$.
D8) Si ha $\mathbb{E}[|X|] = \int_{\log a}^{\log b} |x| \cdot \frac{1}{\log b - \log a}dx = \int_{\log a}^{0} \frac{-x}{\log b - \log a}dx + \int_{0}^{\log b} \frac{x}{\log b - \log a}dx = [\frac{-x^2}{2(\log b - \log a)}]_{x=\log a}^{x=0} + [\frac{x^2}{2(\log b - \log a)}]_{x=0}^{x=\log b} = \frac{0-(-\log^2 a)}{2(\log b - \log a)} + \frac{\log^2 b - 0}{2(\log b - \log a)} = \frac{\log^2 b + \log^2 a}{2(\log b - \log a)}$.

Esercizio 5.
D9) Si ha $\mathbb{E}[N_{12}] = \frac{1}{3} \cdot 12 = 4$.
D10) Si ha $P(X \geq 3) = P(\frac{X-2}{\sqrt{16}} \geq \frac{3-2}{\sqrt{16}}) = 1 - \Phi(1/4) = 1 - 0.59871 = 0.40129$.

Esercizio 6.
D11) Per la legge dei grandi numeri il valore di m richiesto è $m = 2 \cdot \frac{2}{5} + 4 \cdot \frac{1}{5} + 6 \cdot \frac{2}{5} = \frac{4+4+12}{5} = \frac{20}{5} = 4$.
D12) Prima di tutto, per proprietà della distribuzione Gamma, le variabili aleatorie $\{X_n : n \geq 1\}$ hanno media $\frac{\alpha}{\alpha} = 1$ e varianza $\frac{\alpha}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha}$; quindi la standardizzata di $X_1 + \cdots + X_n$ è $\frac{X_1+\cdots+X_n-n}{\sqrt{1/\alpha}\sqrt{n}}$. Allora $\left\{X_1 + \cdots + X_n - n \leq \sqrt{n/\alpha}\right\} = \left\{\frac{X_1+\cdots+X_n-n}{\sqrt{1/\alpha}\sqrt{n}} \leq 1\right\}$ e, per il teorema limite centrale, il limite richiesto è uguale a $\Phi(1) = 0.84134$.

Esercizio 7.
D13) Indichiamo la distribuzione stazionaria con (p,q,r,s). Allora si deve avere la relazione matriciale

$$(p,q,r,s)\begin{pmatrix} e^{-a} & 1-e^{-a} & 0 & 0 \\ 1-e^{-a} & e^{-a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-e^{-b} & e^{-b} \\ 0 & 0 & e^{-b} & 1-e^{-b} \end{pmatrix} = (p,q,r,s),$$

che fornisce il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} pe^{-a} + q(1-e^{-a}) = p \\ p(1-e^{-a}) + qe^{-a} = q \\ r(1-e^{-b}) + se^{-b} = r \\ re^{-b} + s(1-e^{-b}) = s. \end{cases}$$

Le prime due equazioni si riducono a $p(1-e^{-a}) = q(1-e^{-a})$, e quindi $p = q$; le altre due equazioni invece si riducono a $se^{-b} = re^{-b}$, e quindi $r = s$. In conclusione, poiché si deve avere $p+q+r+s = 1$, le distribuzioni stazionarie sono del tipo $(\alpha,\alpha,\beta,\beta)$ con $2\alpha + 2\beta = 1$, che equivale ad avere $\alpha + \beta = \frac{1}{2}$.
D14) Si ha $P(X_1 = \cdots = X_n = 3|X_0 = 3) = p_{33}^n = (1-e^{-b})^n$.

Commenti.
La somma dei valori di ciascuna densità discreta che appare è 1 in accordo con la teoria.

`D1`) In altro modo, per la teoria della distribuzione ipergeometrica, la probabilità richiesta è $\frac{\binom{2}{2}\binom{3}{0}}{\binom{5}{2}} = \frac{1}{10}$.

`D4`) La variabile aleatoria X ha distribuzione geometrica traslata (quella che parte da 1, quella che conta il numero di prove per avere il primo successo); infatti si ha $P(X = n) = (1-p)^{n-1}p$ (per $n \geq 1$ intero) con $p = \frac{1}{5}$. Si ha lo stesso tipo di espressione anche con il condizionamento rispetto all'evento E; infatti si ha $P(X = n|E) = (1-p)^{n-1}p$ (per $n \geq 1$ intero) con $p = \frac{3}{5}$.

`D13`) Si poteva giungere alla stessa conclusione senza fare calcoli. Infatti: abbiamo due classi chiuse e irriducibili, cioè $\{1, 2\}$ e $\{3, 4\}$; le matrici di transizione ristrette a queste due classi sono tali che la somma degli elementi di ciascuna colonna è 1, e quindi la distribuzione stazionaria per ciascuna classe chiusa irriducibile è $(1/2, 1/2)$ (perché ciascuna delle classe ha 2 elementi); allora, in accordo con la teoria, le distribuzioni stazionarie sono una combinazione lineare convessa delle distribuzioni stazionarie legate alle singole classi irriducibili, e cioè $\gamma(1/2, 1/2, 0, 0) + (1-\gamma)(0, 0, 1/2, 1/2)$ con $\gamma \in [0, 1]$. In riferimento a quanto visto nella soluzione possiamo dire che γ e $1-\gamma$ giocano il ruolo di 2α e 2β rispettivamente.

`D13`) La somma degli elementi di ciascuna riga della matrice di transizione è uguale a 1. Quindi (anche se ne abbiamo altre ...) la distribuzione uniforme $(1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$ è stazionaria e in effetti si ottiene ponendo $\alpha = \beta = \frac{1}{4}$ (che soddisfa la condizione $\alpha + \beta = \frac{1}{2}$).