Prova di esame dei corsi di Fondamenti di Informatica e Informatica Teorica

18 luglio 2016

Problema 1. Sia T una macchina di Turing di tipo riconoscitore, ad un nastro, definita sull'alfabeto $\{0,1\}$. Definire una nuova macchina T_0, a due nastri e definita su un alfabeto opportunamente introdotto, che utilizza i soli stati interni q_0, q_A e q_R e che è equivalente a T.

Suggerimento: utilizzare il secondo nastro di T_0 per memorizzare lo stato interno in cui si trova T.

Problema 2. Si consideri il seguente problema decisionale: dati un grafo (non orientato) $G = (V,E)$ ed un intero $k \in \mathbb{N}$, con $k \geq 3$, decidere se (almeno) una delle seguenti due affermazioni è vera:

- G è 2-colorabile
- G contiene un sottografo completo di almeno k nodi.

Dopo aver formalizzato la definizione del suddetto problema mediante la tripla $\langle I,S,\pi\rangle$, dimostrarne la **NP**-completezza o, in alternativa, l'appartenenza alla classe **P**.

Problema 3. Un grafo bipartito completo è una grafo non orientato il cui insieme di nodi è partizionato in due sottoinsiemi V_1 e V_2 e gli archi connettono ogni elemento di V_1 ad ogni elemento di V_2: formalmente, $G = (V,E)$ è bipartito completo se $V = V_1 \cup V_2$, con $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, e

$$(u,v) \in E \;\Leftrightarrow\; u \in V_1 \;\wedge\; v \in V_2,$$

Si consideri il seguente problema SOTTOGRAFO BIPARTITO COMPLETO (in breve, *SBC*): dati un grafo non orientato $G = (V,E)$ ed un intero $k \in \mathbb{N}$, decidere se G contiene un sottografo bipartito completo di almeno $2k$ nodi.

Si ricordi la definizione del problema CLIQUE e si consideri la seguente funzione f che trasforma istanze di CLIQUE in istanze di *SBC*: data una istanza $\langle G = (V,E),k\rangle$ di CLIQUE, $f(G,k) = \langle \overline{G} = (\overline{V},\overline{E}),k\rangle$ dove

- $\overline{V} = \{u_1,u_2 : u \in V\}$ (ossia, ogni nodo in V è sostituito da una coppia di nodi in $\overline{V}$),
- $\overline{E} = \{(u_1,u_2) : u \in V\} \cup \{(u_1,v_2),(u_2,v_1) : (u,v) \in E\}$ (ossia, $\overline{E}$ contiene tutti gli archi che collegano coppie di nodi, u_1 e u_2, corrispondenti allo stesso nodo u in V, e inoltre, ogni arco $(u,v) \in E$ è sostituito in $\overline{E}$ dalla coppia di archi (u_1,v_2) e (u_2,v_1)).

Dopo aver formalizzato la definizione del problema *SBC* mediante la tripla $\langle I,S,\pi\rangle$, si dimostri se f è una riduzione polinomiale da CLIQUE a *SBC*.

Soluzione

Problema 1. In quanto segue, descriviamo una macchina T_0 a due nastri a testine indipendenti.
Poiché, come indicato nel suggerimento, il secondo nastro di T_0 contiene gli stati interni di T,, allora l'alfabeto di lavoro di T_0 è $\{0,1\} \cup Q$, dove Q è l'insieme degli stati di Q.

La macchina T_0, non avendo possibilità di cambiare stato (se non quando entra in uno stato finale), deve utilizzare il secondo nastro per tener traccia dei cambiamenti di stato di T, durante le sue computazioni, e per scegliere in base ad essi le quintuple da eseguire.

All'inizio della computazione, il nastro di T contiene l'input $x \in \{0,1\}^*$ e, quindi, corrispondentemente, il nastro 1 di T_0 contiene x e il nastro 2 è vuoto. Quando T esegue la prima quintupla, è possibile che essa cambi stato: in corrispondenza, quando T_0 esegue la prima quintupla, leggendo $\square$ sul secondo nastro, scrive lo stato di arrivo della corrispondente quintupla di T sul secondo nastro. Formalmente: ad ogni quintupla $\langle q_0, a, b, q', m\rangle$ di T (con $m \in \{\texttt{sinistra}, \texttt{fermo}, \texttt{destra}$ e $a, b \in \{0,1\}$) corrisponde in T_0 la quintupla

$$\langle q_0, (a, \square), (b, q'), q_0, (m, \texttt{fermo})\rangle.$$

Successivamente, il contenuto del secondo nastro di T_0 sarà utilizzato per capire quale quintupla di T eseguire. Quindi, ad ogni quintupla $\langle q, a, b, q', m\rangle$ di T corrisponde in T_0 la quintupla

$$\langle q_0, (a, q), (b, q'), q_0, (m, \texttt{fermo})\rangle.$$

Infine, quando T_0 legge sul nastro 2 lo stato q_a o q_R, entra nello stao corrispondente e termina: quindi, anche le seguenti due quintuple fanno parte delle istruzioni di T_0

$$\langle q_0, (a, q_A), (a, q_A), q_A, (\texttt{fermo}, \texttt{fermo})\rangle,$$

$$\langle q_0, (a, q_R), (a, q_R), q_R, (\texttt{fermo}, \texttt{fermo})\rangle,$$

per ogni $a \in \{0,1\}$.

Problema 2. Il problema in esame, che indicheremo, in breve, con l'acronimo $2COL \vee CL$, può essere formalizzato come di seguito descritto:

- $I_{2COL\vee CL} = \{\langle G = (V, E), k\rangle : G$ è un grafo non orientato $\wedge\ k \in \mathbb{N}\ \wedge\ k \geq 3\}$;
- $S_{2COL\vee CL}(G) = \{\langle c, V'\rangle :\ c : V \to \{1,2\}\ \wedge\ V' \subseteq V\}\ \}$;
- $\pi_{2COL\vee CL}(G, S_{2COL\vee CL}(G)) = \exists \langle c, V'\rangle \in S_{2COL\vee CL}(G) :\ \{\forall (u,v) \in E\ [\ c(u) \neq c(v)\ ]\ \} \vee$
  $\{\ |V'| \geq k \wedge \forall u, v \in V'\ [(u,v) \in E\ ]\ \}.$

Un certificato per una istanza $\langle G = (V, E), k\rangle$ di $2COL \vee CL$ è una coppia $\langle c, V'\rangle \in S_{2COL\vee CL}(G)$, e, dunque, poiché $|c| \in \mathbf{O}(|V|)$ e $|V'| \in \mathbf{O}(|V|)$, ha lunghezza $\mathbf{O}(|V|)$. Per verificare un certificato è necessario verificare che c sia una colorazione valida per G (ossia, che colori con colori diversi nodi adiacenti) o che V' sia una clique in G di dimensione non superiore a k: poiché sia il problema COLORABILITÀ che il problema CLIQUE sono in **NP**, sappiamo che tale verifica richiede tempo polinomiale in $|V|$ e $|E|$). Questo prova che il problema è in **NP**.

Dimostriamo, ora, la completezza del problema per la classe **NP** mediante una riduzione polinomiale dal problema CLIQUE.
Prima di procedere, cerchiamo di capire perché riduciamo da CLIQUE invece che da 2COL. A questo scopo,

osserviamo che il problema 2COL è in **P** e ridurre da un problema in **P** non sarebbe di alcuna utilità per mostrare la **NP**-completezza di $2COL \vee CL$. Osserviamo, inoltre, che il problema CLIQUE ristretto ad istanze $\langle G = (V,E), k\langle$ tali che $k \geq 3$ rimane un problema **NP**-completo.
Sia, dunque, $\langle G = (V,E), k\rangle$ una istanza di CLIQUE tale che $k \geq 3$; l'istanza corrispondente di $2COL \vee CL$ è $\langle \overline{G} = (\overline{V}, \overline{E}), k\rangle$, dove il grafo $\overline{G} = (\overline{V}, \overline{E})$ è ottenuto aggiungendo a G un nuovo sottografo, costituito da un ciclo di 5 nuovi nodi, che non ha archi che lo collegano a G. Più in dettaglio:

- $\overline{V} = V \cup \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 : x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \not\in V\}$, e
- $\overline{E} = E \cup \{(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_4), (x_4, x_5), (x_5, x_1)\}$.

Se $\langle G = (V,E), k\rangle$ è una istanza sì di CLIQUE, allora esiste una colorazione $V' \subseteq V$ tale che $|V'| \geq k$ e ogni coppia di nodi di V' è collegata da un arco; allora V' gode delle stesse proprietà in $\overline{G}$ che, pertanto è una istanza sì di $2COL \vee CL$.
Se, invece, $\langle G = (V,E), k\rangle$ è una istanza no di CLIQUE, allora non esiste alcun sottografo completo di almeno k nodi in G; allora, poiché il grafo che abbiamo aggiunto a G per ottenere $\overline{G}$ èe un ciclo di 5 nodi e, dunque, non èe un grafo completo, allora anche $\overline{G}$ non contiene alcun sottografo completo di almeno k nodi. Allora, $\overline{G}$ è una istanza no di $2COL \vee CL$.
Poiché costruire $\overline{G}$ a partire da G richiede tempo lineare in $|V|$ e $|E|$, questo dimostra che il problema $2COL \vee CL$ è **NP**-completo.

Problema 3. Il problema in esame, che indicheremo, in breve, con l'acronimo *SBC*, può essere formalizzato come di seguito descritto:

- $I_{SBC} = \{\langle G = (V,E), k\rangle : G \text{ è un grafo non orientato} \wedge k \in \mathbb{N}\}$;
- $S_{SBC}(G,k) = \{\langle\langle V_1, V_2\rangle : \ V_1 \subseteq V \ \wedge \ V_2 \subseteq V \ \wedge \ V_1 \cap V_2 = \emptyset \ \} \ \}$;
- $\pi_{SBC}(G, k, S_{3COL \vee SBC}(G,k)) = \exists \langle V_1, V_2\rangle \in S_{SBC}(G,k) : \ V_1 \cap V_2 = \emptyset \ \wedge \ |V_1 \cup V_2| \geq 2k \ \wedge \ \forall u \in V_1 \ \forall v \in V_2 \ [(u,v) \in E]$
  $$\wedge \ \forall u, v \in V_1 \ [(u,v) \not\in E] \ \wedge \ \forall u, v \in V_2 \ [(u,v) \not\in E].$$

Ricordiamo che il problema CLIQUE (in breve, *CL*) può essere formalizzato come segue:

- $I_{CL} = \{\langle G = (V,E), k\rangle : G \text{ è un grafo non orientato} \wedge k \in \mathbb{N}\}$;
- $S_{CL}(G,k) = \{\langle V' \subseteq \}$;
- $\pi_{CL}(G, k, S_{CL}(G,k)) = \exists V' \in S_{SBC}(G,k) : \ |V'| \geq k \ \wedge \ \forall u, v \in V' \ [(u,v) \in E]$.

Dimostriamo che f è una riduzione polinomiale da CLIQUE a *SBC*. Sia $\langle G = (V,E), k\rangle$ una istanza *CL* e sia $f(G,k) = \langle \overline{G} = (\overline{V}, \overline{E}), k\rangle$. Osserviamo che, per costruzione, l'insieme $\overline{V}$ risulta naturalmente partizionato nei due sottoinsiemi $\overline{V}_1 = \{u_1 : u \in V\}$ e $\overline{V}_2 = \{u_2 : u \in V\}$.

→ Se $\langle G = (V,E), k\rangle$ è una istanza sì di *CL*, allora, esiste $V' \subseteq V$ tale che $|V'| \geq k$ e, per ogni $u, v \in V'$, $(u,v) \in E$. Allora, consideriamo i seguenti due sottoinsiemi U_1 e U_2 dell'insieme $\overline{V}$:
  - $U_1 = \{u_1 \in \overline{V} : u \in V'\}$, e
  - $U_2 = \{u_1 \in \overline{V} : u \in V'\}$.
  Poiché $|V'| \geq k$, allora $|U_1 \cup U_2| \geq 2k$. Inoltre, per costruzione, per ogni coppia di nodi u_1 e v_1 in U_1, $(u_1, v_1) \not\in \overline{E}$ e, per ogni coppia di nodi u_2 e v_2 in U_2, $(u_2, v_2) \not\in \overline{E}$. Infine, poiché per ogni coppia di nodi u e v in V', $(u,v) \in E$, ancora per costruzione si ha che, per ogni coppia di nodi u_1 in U_1 e v_2 in U_2, $(u_1, v_1) \in \overline{E}$. Quindi, $U_1 \cup U_2$ induce un sottografo bipartito completo di almeno $2k$ nodi in $\overline{G}$, e questo dimostra che $\langle\langle \overline{G} = (\overline{V}, \overline{E}), k\langle$ è una istanza sì di *SBC*.

$\leftarrow$ Viceversa, se $f(G,k) = \langle \overline{G} = (\overline{V}, \overline{E}), k \langle$ è una istanza sì di *SBC*, allora esistono due sottoinsiemi indipendenti U_1 e U_2 dell'insieme $\overline{V}$ tali che $|U_1 \cup U_2| \geq 2k$ e $U_1 \cup U_2$ induce un sottografo bipartito completo in $\overline{G}$. Senza perdita di generalità, possiamo assumere che $U_1 \subseteq \overline{V}_1$ e $U_2 \subseteq \overline{V}_2$: infatti, poiché $\overline{V}_1$ e $\overline{V}_2$ sono due insiemi indipendenti in $\overline{G}$ e poich'e U_1 e U_2 inducono un sottografo bipartito completo in $\overline{G}$, se esiste un nodo $x_1 \in U_2$ allora U_1 deve essere costituito da soli nodi in $\overline{V}_2$ (o x_1 non potrebbe essere adiacente a qualcuno di essi) e questo, a sua volta, per la stessa ragione, implica che U_2 deve essere costituito da soli nodi in $\overline{V}_1$; se questo accadesse, sarebbe allora sufficiente scambiare i due insiemi U_1 e U_2. Inoltre, ancora senza perdita di generalità, possiamo assumere che, per ogni $u \in V$,

$$u_1 \in U_1 \Leftrightarrow u_2 \in U_2;$$

infatti, se $u_1 \in U_1$, allora u_1 è adiacente a tutti i nodi in U_2 e quindi, per costruzione, u_2 è adiacente a tutti i nodi di U_1 e può, pertanto, essere inserito in U_2 lasciando vera la proprietà che $U_1 \cup U_2$ inducono in $\overline{G}$ un grafo bipartito completo e $|U_1 \cup U_2| \geq 2k$. Di conseguenza, $|U_1| = |U_2| \geq k$.
Sia V' l'insieme dei nodi in V che corrispondono a nodi in U_1 (o equivalentemente, per quanto appena osservato, in U_2), ossia,

$$V' = \{u \in V : u_1 \in U_1\} = \{u \in V : u_1 \in U_1\}.$$

Consideriamo due generici nodi u, v in V': poiché $u, v \in V'$, allora esistono $u_1, v_1 \in U_1$ e $u_2, v_2 \in U_2$; poiché $U_1 \cup U_2$ induce in $\overline{G}$ un sottografo bipartito completo, allora $(u_1, v_2) \in \overline{E}$ e $(u_2, v_1) \in \overline{E}$. Ma, per definizione della funzione f, se $(u_1, v_2) \in \overline{E}$ e $(u_2, v_1) \in \overline{E}$, allora $(u, v) \in E$. Siccome u e v sono due nodi generici in V', questo dimostra che, per ogni $u, v \in V'$, $(u, v) \in E$, ossia, V' induce in G un sottografo completo. Infine, poiché $|V'| = |U_1| = |U_2| \geq k$, allora $\langle G = (V, E), k \langle$ è una istanza sì di CLIQUE.

Quindi, f è una riduzione da CLIQUE a *SBC*. Infine, poiché costruire $\overline{G}$ a partire da G richiede tempo lineare in $|V|$ e $|E|$, questo dimostra che f è una riduzione polinomiale da CLIQUE a *SBC*..