Statistica per la ricerca sperimentale e tecnologica
Corso di Laurea in Informatica, Università di Roma "Tor Vergata"
Anno accademico: `2004-2005`
Titolare del corso: `Claudio Macci`
Esame del 16 Giugno 2005

Esercizio 1. Supponiamo di avere un'urna con 3 palline bianche e 4 rosse. Si estraggono due palline a caso, una alla volta e senza reinserimento. Indichiamo con B_k l'evento "la k-sima pallina estratta è bianca" (per $k \in \{1, 2\}$).
`D1`) Calcolare $P(B_1 \cap B_2^c)$, cioè la probabilità di estrarre la sequenza di colori (bianca,rossa).
`D2`) Calcolare $P(B_1 \cup B_2^c)$ la probabilità che la prima pallina estratta sia bianca oppure la seconda sia rossa.
Sia X la v.a. che conta il numero di palline bianche estratte.
`D3`) Calcolare la densità discreta di X.

Esercizio 2. In questo esercizio supporremo sempre di avere inizialmente un mazzo di 90 carte numerate da 1 a 90, e di estrarre casualmente una carta alla volta e con reinserimento.
`D4`) Calcolare la probabilità di estrarre la sequenza di numeri (1,2) in due estrazioni.
Sia Y la v.a. che conta il numero di volte che si estrae un numero dispari prima di estrarre per la prima volta un numero pari.
`D5`) Calcolare $P(Y = 3)$, cioè la probabilità di estrarre tre numeri dispari seguiti da un numero pari.
Sia Z la v.a. che conta il numero di volte che viene estratto il numero 35 su 90 estrazioni.
`D6`) Usando l'approssimazione della distribuzione binomiale con la distribuzione di Poisson, calcolare $P(Z = 5)$, cioè la probabilità di estrarre il numero 35 esattamente 5 volte.

Esercizio 3. Una v.a. Z ha densità f_Z definita come segue: $f_Z(t) = ct$ per $1 < t < 2$, dove c è una costante da determinare; $f_Z(t) = 0$ altrimenti.
`D7`) Trovare il valore della costante c.
Due v.a. Y_1 e Y_2, entrambe con distribuzione esponenziale di parametri $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$ rispettivamente, indicano i tempi di funzionamento di due apparecchiature. Sia S il sistema costituito dalle due apparecchiature collegate in serie, e sia $Y_3 = \min\{Y_1, Y_2\}$ il tempo di funzionamento di S. Si supponga che Y_1 e Y_2 siano indipendenti.
`D8`) Dire che Y_3 ha una certa distribuzione, essendo il minimo tra due v.a. esponenziali indipendenti (questa cosa è stata dimostrata durante il corso; qui basta solo richiamare il risultato). Poi calcolare $P(Y_3 > 5)$, cioè la probabilità che il sistema S funzioni per un tempo maggiore di 5.
`D9`) Calcolare $\mathbb{E}[Y_1 + Y_2]$.
`D10`) Calcolare $\mathrm{Var}[Y_1 + Y_2]$.

Esercizio 4. Sia W una v.a. normale standard (cioè con media 0 e varianza 1).
`D11`) Calcolare $P(-1 < W < 3/4)$.
Sia (X_n) una successione di v.a. uniformi in $[2, 4]$ e indipendenti. Sia $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ per ogni $n \geq 1$.
`D12`) Dire per quale valore di m si ha $\lim_{n\to\infty} P(|\overline{X}_n - m| > \varepsilon) = 0$ per ogni $\varepsilon > 0$.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1. Useremo formule note per le probabilità dell'intersezione e dell'unione tra eventi. Inoltre X ha distribuzione ipergeometrica.
`D1`) $P(B_1 \cap B_2^c) = P(B_2^c|B_1)P(B_1) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{7} = \frac{2}{7}$.
`D2`) Si ha $P(B_1 \cup B_2^c) = P(B_1) + P(B_2^c) - P(B_1 \cap B_2^c)$, dove $P(B_1 \cap B_2^c)$ è stata calcolata in `D1`). Inoltre, per la formula delle probabilità totali, si ha $P(B_2^c) = P(B_2^c|B_1)P(B_1) + P(B_2^c|B_1^c)P(B_1^c) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{7} + \frac{3}{6} \cdot \frac{4}{7} = \frac{2}{7} + \frac{2}{7} = \frac{4}{7}$. Quindi $P(B_1 \cup B_2^c) = \frac{3}{7} + \frac{4}{7} - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$.
`D3`) Si ha $p_X(k) = \frac{\binom{3}{k}\binom{4}{2-k}}{\binom{7}{2}}$ per $k \in \{0, 1, 2\}$ e quindi: $p_X(0) = \frac{6}{21}$, $p_X(1) = \frac{12}{21}$, $p_X(2) = \frac{3}{21}$.

Esercizio 2.
`D4`) Gli eventi "estrarre 1 alla prima estrazione" e "estrarre 2 alla seconda estrazione" hanno entrambi probabilità $\frac{1}{90}$ e sono indipendenti perché le estrazioni sono con reinserimento. Quindi la probabilità richiesta è $\frac{1}{90} \cdot \frac{1}{90} = \frac{1}{8100}$.
`D5`) Abbiamo 45 carte pari e 45 dispari. Quindi, per le formule viste durante il corso, si ha $P(Y = 3) = (1 - \frac{45}{90})^3 \frac{45}{90} = (\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{16}$.
`D6`) Abbiamo che $n = 90$ è il numero di estrazioni e $p = \frac{1}{90}$ è la probabilità di estrarre il numero 35 in ogni estrazione. Allora si ha $P(Z = k) \approx \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ con $\lambda = np = 90 \cdot \frac{1}{90} = 1$ e, ponendo $k = 5$, si ha $P(Z = 5) \approx \frac{1^5}{5!}e^{-1} = \frac{1}{120}e^{-1}$.

Esercizio 3.
`D7`) Il valore c soddisfa la seguente condizione: $1 = c\int_1^2 tdt$. Allora, poiché $\int_1^2 tdt = [\frac{t^2}{2}]_1^2 = \frac{2^2-1^2}{2} = \frac{4-1}{2} = \frac{3}{2}$, abbiamo $c = \frac{2}{3}$.
`D8`) La v.a. Y_3 ha distribuzione esponenziale di parametro $\lambda_1 + \lambda_2 = 1 + 2 = 3$. Allora si ha $P(Y_3 > 5) = 1 - F_{Y_3}(5) = 1 - (1 - e^{-3\cdot 5}) = e^{-15}$.
`D9`) Si ha $\mathbb{E}[Y_1 + Y_2] = \mathbb{E}[Y_1] + \mathbb{E}[Y_2] = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.
`D10`) Si ha $\mathrm{Var}[Y_1 + Y_2] = \mathrm{Var}[Y_1] + \mathrm{Var}[Y_2] = \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} = \frac{5}{4}$.

Esercizio 4.
`D11`) Si ha $P(-1 < W < 3/4) = \Phi(3/4) - \Phi(-1) = \Phi(3/4) - (1 - \Phi(1)) = \Phi(0.75) + \Phi(1) - 1 = 0.77337 + 0.84134 - 1 = 0.61471$.
`D12`) Il valore m richiesto è la speranza matematica comune delle v.a. (X_n) per la legge dei grandi numeri. Quindi, per le formule note sulla distribuzione uniforme, si ha $m = \frac{2+4}{2} = 3$.

Commenti.
`D2`) Si poteva procedere anche in questo modo (usando la formula di De Morgan): $P(B_1 \cup B_2^c) = 1 - P((B_1 \cup B_2^c)^c) = 1 - P(B_1^c \cap B_2) = 1 - P(B_2|B_1^c)P(B_1^c) = 1 - \frac{3}{6} \cdot \frac{4}{7} = 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$.
`D2`) Si ha che $P(B_2^c) = \frac{4}{7} = P(B_1^c)$. Uguaglianze di questo tipo si riscontrano sempre nel caso di estrazioni casuali di un oggetto alla volta senza reinserimento (anche nel caso con reinserimento, ma questo è meno sorprendente).
`D3`) Si ha $p_X(0) + p_X(1) + p_X(2) = 1$ e questo è in accordo con la teoria. Ovviamente si possono fare delle semplificazioni: $p_X(0) = \frac{2}{7}$, $p_X(1) = \frac{4}{7}$, $p_X(2) = \frac{1}{7}$.
`D9`) L'uguaglianza vale anche senza richiedere l'indipendenza tra Y_1 e Y_2.
`D10`) L'uguaglianza vale anche se Y_1 e Y_2 sono non correlate (cioè $\mathrm{Cov}(Y_1, Y_2) = 0$). In generale esistono casi in cui due v.a. non sono indipendenti ma sono non correlate.