Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità (ed insegnamenti mutuati)
Anno accademico: `2016-2017`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Simulazione 2

Esercizio 1. Consideriamo lanci ripetuti di una moneta, la cui probabilità che esca testa in ogni singolo lancio è $p \in (0,1)$. Sia $k \geq 1$ intero arbitrariamente fissato e sia X la variabile aleatoria che indica a quale lancio esce per la prima volta testa.
`D1`) Calcolare $P(X \leq k)$.
`D2`) Calcolare $P(X \in A_k)$ dove $A_k = \{k, 2k, 3k, \ldots\}$ è l'insieme dei multipli di k.

Esercizio 2. Si lancia una moneta equa. Se esce testa si lanciano 2 dadi equi, se esce croce si lanciano 3 dadi equi. Sia X la variabile aleatoria che conta quante volte esce un numero pari nei lanci di dado effettuati.
`D3`) Trovare la densità discreta di X.
`D4`) Calcolare la probabilità che sia uscita testa nel lancio di moneta sapendo di aver ottenuto tutti numeri dispari nei lanci dei dadi effettuati.

Esercizio 3. Un'urna contiene tre palline numerate con i numeri 1, 2 e 3. Si estraggono a caso 2 palline in blocco. Siano X_1 e X_2 le variabili aleatorie che indicano il minimo e il massimo tra i due numeri estratti, rispettivamente.
`D5`) Trovare la retta di regressione $X_2 = aX_1 + b$.
`D6`) Calcolare $P(X_1 = k | X_2 = 3)$ per $k \in \{1, 2\}$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria continua con densità $f_X(x) = 2x^{-3} 1_{(1,\infty)}(x)$.
`D7`) Trovare la densità discreta di $Y = [X]$ dove $[x] = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$ è la parte intera di x.
`D8`) Trovare la densità continua di $Z = e^{-X}$.

Esercizio 5.
`D9`) Sia $N_t = \sum_{n \geq 1} 1_{T_n \leq t}$ (per $t \geq 0$) un processo di Poisson con intensità di $\lambda = 1$. Calcolare $P(N_t = 1 | N(t) \in \{1, 2\})$.
`D10`) Sia X una variabile aleatoria normale con media 2 e varianza 16. Calcolare $P(6 \leq X \leq 7)$.

Esercizio 6. Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. (indipendenti e identicamente distribuite).
`D11`) Dire per quale valore di m si ha

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\left| \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - m \right| > \varepsilon \right) = 0 \text{ per ogni } \varepsilon > 0,$$

nel caso in cui le variabili aleatorie $\{X_n : n \geq 1\}$ abbiano densità continua $f_X(x) = 3x^2 1_{(0,1)}(x)$.
`D12`) Trovare il valore di $y \in \mathbb{R}$ per cui si ha

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - n/4}{\sqrt{n}} \leq y \right) = \Phi(2/3)$$

nel caso in cui le variabili aleatorie $\{X_n : n \geq 1\}$ abbiano densità continua $f_X(x) = 4e^{-4x} 1_{(0,\infty)}(x)$.

Esercizio 7 (*solo per Lauree Magistrali*). Consideriamo una catena di Markov omogenea $\{X_n : n \geq 0\}$ con spazio degli stati $E = \{1, 2\}$ e matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

`D13`) Presentare le conseguenze del Teorema di Markov dopo aver motivato la sua applicabilità.
`D14`) Trovare la densità discreta di X_2 sapendo che $P(X_0 = 1) = \frac{2}{3}$ e $P(X_0 = 2) = \frac{1}{3}$.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
D1) Si ha $P(X \leq k) = 1 - P(X > k) = 1 - \sum_{h \geq k+1} p_X(h) = 1 - \sum_{h \geq k+1}(1-p)^{h-1}p = 1 - p\frac{(1-p)^k}{1-(1-p)} = 1-(1-p)^k$.
D2) Si ha $P(X \in A_k) = \sum_{h \geq 1} p_X(hk) = \sum_{h \geq 1}(1-p)^{hk-1}p = \frac{p}{1-p}\sum_{h \geq 1}[(1-p)^k]^h = \frac{p}{1-p}\frac{(1-p)^k}{1-(1-p)^k} = \frac{p(1-p)^{k-1}}{1-(1-p)^k}$.

Esercizio 2. Sia T l'evento "esce testa".
D3) Per la formula delle probabilità totali si ha $p_X(k) = P(X = k|T)P(T) + P(X = k|T^c)P(T^c) = \binom{2}{k}(1/2)^2 \cdot 1/2 + \binom{3}{k}(1/2)^3 \cdot 1/2$ per $k \in \{0,1,2,3\}$. Quindi $p_X(0) = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$, $p_X(1) = \frac{1}{4} + \frac{3}{16} = \frac{7}{16}$, $p_X(2) = \frac{1}{8} + \frac{3}{16} = \frac{5}{16}$, $p_X(3) = 0 + \frac{1}{16} = \frac{1}{16}$.
D4) L'evento "ottenuti tutti numeri dispari" è $\{X = 0\}$. Allora, per la formula di Bayes, e per il valore di $p_X(0)$ calcolato prima, si ha $P(T|X=0) = \frac{P(X=0|T)P(T)}{P(X=0)} = \frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}}{3/16} = \frac{1}{8} \cdot \frac{16}{3} = \frac{2}{3}$.

Esercizio 3.
La probabilità di estrarre ciascuno dei sottoinsiemi di numeri $\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}$ è uguale ad $\frac{1}{3}$. Quindi la densità congiunta è $p_{X_1,X_2}(1,2) = p_{X_1,X_2}(1,3) = p_{X_1,X_2}(2,3) = \frac{1}{3}$.
D5) Si verifica facilmente che le densità marginali sono: $p_{X_1}(1) = \frac{2}{3}$ e $p_{X_1}(2) = \frac{1}{3}$; $p_{X_2}(2) = \frac{1}{3}$ e $p_{X_2}(3) = \frac{2}{3}$. Quindi $\mathbb{E}[X_1] = 1 \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$, $\mathbb{E}[X_2] = 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$, $\mathrm{Var}[X_1] = 1^2 \cdot \frac{2}{3} + 2^2 \cdot \frac{1}{3} - (\frac{4}{3})^2 = \frac{2}{9}$. Infine $\mathrm{Cov}(X_1,X_2) = 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} - \frac{4}{3}\frac{8}{3} = \frac{11}{3} - \frac{32}{9} = \frac{1}{9}$, da cui segue $a = \frac{1/9}{2/9} = \frac{1}{2}$ e $b = \frac{8}{3} - \frac{1}{2}\frac{4}{3} = 2$.
D6) Per $k \in \{1,2\}$ si ha $P(X_1 = k|X_2 = 3) = \frac{p_{X_1,X_2}(k,3)}{p_{X_2}(3)} = \frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2}$.

Esercizio 4.
D7) Per $k \geq 1$ intero si ha $p_Y(k) = P(k \leq X < k+1) = \int_k^{k+1} 2x^{-3}dx = [-x^{-2}]_{x=k}^{x=k+1} = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}$.
D8) Si vede che $P(0 \leq e^{-X} \leq e^{-1}) = 1$, da cui $F_Z(z) = 0$ per $z \leq 0$ e $F_Z(z) = 1$ per $z \geq e^{-1}$. Inoltre, per $z \in (0, e^{-1})$, si ha $F_Z(z) = P(e^{-X} \leq z) = P(-X \leq \log z) = P(X \geq -\log z) = \int_{-\log z}^{\infty} 2x^{-3}dx = [-x^{-2}]_{x=-\log z}^{x=\infty} = (\log z)^{-2}$. Quindi la densità è $f_Z(z) = -\frac{2(\log z)^{-3}}{z}1_{(0,e^{-1})}(z)$.

Esercizio 5.
D9) Si ha $P(N_t = 1|N(t) \in \{1,2\}) = \frac{P(N_t=1)}{P(N_t=1)+P(N_t=2)} = \frac{e^{-t}(t^1)/1!}{e^{-t}[(t^1)/1!+(t^2)/2!]} = \frac{t}{t+t^2/2} = \frac{2t}{2t+t^2}$.
D10) Si ha $P(6 \leq X \leq 7) = P(\frac{6-2}{\sqrt{16}} \leq \frac{X-2}{\sqrt{16}} \leq \frac{7-2}{\sqrt{16}}) = \Phi(\frac{7-2}{4}) - \Phi(\frac{6-2}{4}) = \Phi(1.25) - \Phi(1) = 0.89435 - 0.84134 = 0.05301$.

Esercizio 6.
D11) Per la legge dei grandi numeri si ha $m = \int_0^1 x3x^2dx = 3\int_0^1 x^3dx = 3[\frac{x^4}{4}]_{x=0}^{x=1} = \frac{3}{4}$.
D12) Le variabili aleatorie $\{X_n : n \geq 1\}$ hanno distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 4$; quindi la loro media è $\frac{1}{4}$ e la loro varianza è $\frac{1}{4^2}$. Allora per il teorema limite centrale si ha

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - n/4}{\sqrt{n}} \leq y\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - n/4}{\frac{1}{4}\sqrt{n}} \leq \frac{y}{1/4}\right) = \Phi\left(\frac{y}{1/4}\right);$$

quindi si ha $\frac{y}{1/4} = \frac{2}{3}$, da cui segue $4y = \frac{2}{3}$ e $y = \frac{1}{6}$.

Esercizio 7.
D13) Il teorema di Markov è applicabile perché la matrice di transizione a due passi

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

ha tutti gli elementi positivi, e dunque si ha una catena di Markov regolare. In corrispondenza si ha $\lim_{n\to\infty} P(X_n = j|X_0 = i) = \pi_j$ per ogni $i,j \in \{1,2\}$, dove $\pi = (\pi_1,\pi_2)$ è la distribuzione stazionaria. La distribuzione stazionaria è soluzione di

$$(\pi_1,\pi_2)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = (\pi_1,\pi_2),$$

da cui

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\pi_2 = \pi_1 \\ \pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2 = \pi_2; \end{cases}$$

le due equazioni si riducono alla stessa equazione $\frac{1}{2}\pi_2 = 1 - \pi_2$, la cui soluzione è $\pi_2 = \frac{2}{3}$. In conclusione la distribuzione stazionaria è $\pi = (\pi_1, \pi_2) = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$.
`D14`) Tenendo conto della matrice

$$P^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

calcolata sopra, la densità richiesta si ottiene dalla seguente relazione

$$(P(X_2 = 1), P(X_2 = 2)) = (P(X_0 = 1), P(X_0 = 2)) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} = (2/3, 1/3) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Quindi si ha $p_{X_2}(1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$, $p_{X_2}(2) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$.

Commenti.
La somma dei valori di ciascuna densità discreta che appare è 1 in accordo con la teoria.
`D2`) Per $k = 1$ si ha $P(X \in A_k) = 1$; questo è in accordo con il fatto che $A_1 = \{1, 2, 3, \ldots\}$, cioè l'insieme di tutti gli interi positivi.