Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata

Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)

Anno Accademico: `2021-2022`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`

Simulazione 1

Esercizio 1. Si lancia due volte un dado equo. Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di volte che esce un numero maggiore o uguale a 5.
`D1)` Trovare la densità discreta di X.
`D2)` Calcolare $P(X = k|E)$ per $k \in \{0, 1, 2\}$ nel caso in cui E sia l'evento "esce il numero 1 nel primo lancio del dado".
`D3)` Verificare che $\mathbb{E}[e^X] = \frac{(e+2)^2}{9}$.

Esercizio 2. Si lancia una moneta equa: se esce testa si lancia un dado equo; se esce croce si lanciano due dadi equi.
`D4)` Calcolare la probabilità escano tutti numeri pari nei lanci di dado effettuati.

Esercizio 3. Siano $q, r \in (0, 1)$ arbitrariamente fissati. Consideriamo la seguente densità congiunta discreta:

$$p_{X_1,X_2}(k, k^2) = r(1 - q)^k q \quad \text{per } k \geq 0 \text{ intero;}$$

$$p_{X_1,X_2}(0, h) = (1 - r)\frac{1}{2^h} \quad \text{per } h \geq 1 \text{ intero.}$$

`D5)` Calcolare $P(X_2 = X_1^2)$.
`D6)` Calcolare $P(X_1 = 0)$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con distribuzione uniforme su $(0, 3/2)$.
`D7)` Trovare la funzione di distribuzione della variabile aleatoria $Y = \log(1 + X)$.
`D8)` Calcolare $\mathbb{E}[Z]$ dove $Z = [X]$ è la parte intera di X, e quindi $[x] = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \geq x\}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 5. Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.
`D9)` Sia X una variabile aleatoria Normale standard (cioè con media 0 e varianza 1). Verificare che, per ogni $y > 0$, si ha $P(\{X > y\}|\{|X| > y\}) = \frac{1}{2}$.
`D10)` Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. con media 1 e varianza 4. Dire per quale valore di z si ha

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - 1 < \frac{7}{2\sqrt{n}}\right) = \Phi(z).$$

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.

`D1)` La variabile aleatoria X ha distribuzione Binomiale con parametri $n=2$ (il numero dei lanci) e $p=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ (la probabilità che esca un numero maggiore o uguale a 5 in un singolo lancio di dado). Quindi $p_X(k)=\binom{2}{k}(\frac{1}{3})^k(1-\frac{1}{3})^{2-k}$ per $k\in\{0,1,2\}$, da cui segue $p_X(0)=\frac{4}{9}$, $p_X(1)=\frac{4}{9}$ e $p_X(2)=\frac{1}{9}$.

`D2)` Si ha $P(X=k|E)=\frac{P(\{X=k\}\cap E)}{P(E)}=6P(\{X=k\}\cap E)$ per $k\in\{0,1,2\}$, perché $P(E)=\frac{1}{6}$. Poi si ha $\{X=0\}\cap E=\{(1,\leq 4)\}$, $\{X=1\}\cap E=\{(1,\geq 5)\}$, $\{X=2\}\cap E=\emptyset$ da cui segue $P(X=0|E)=6\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$, $P(X=1|E)=6\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ e $P(X=2|E)=0$.

`D3)` Si ha $\mathbb{E}[e^X]=\sum_{k=0}^2 e^k p_X(k)=\frac{4}{9}+\frac{4e}{9}+\frac{e^2}{9}=\frac{e^2+4e+4}{9}=\frac{(e+2)^2}{9}$. In maniera alternativa $\mathbb{E}[e^X]=\sum_{k=0}^2 e^k p_X(k)=\sum_{k=0}^2\binom{2}{k}(\frac{e}{3})^k(1-\frac{1}{3})^{2-k}=\left(\frac{e}{3}+1-\frac{1}{3}\right)^2$ (dove l'ultima uguaglianza segue dal binomio di Newton), e quindi si ha $\mathbb{E}[e^X]=\left(\frac{e+2}{3}\right)^2=\frac{(e+2)^2}{9}$.

Esercizio 2.

`D4)` Con notazioni ovvie, usando la formula delle probabilità totali si ha

$$P(E)=P(E|T)P(T)+P(E|T^c)P(T^c)=\frac{3}{6}\frac{1}{2}+\frac{3}{6}\frac{3}{6}\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}.$$

Esercizio 3.

`D5)` Si ha $P(X_2=X_1^2)=\sum_{k\geq 0}p_{X_1,X_2}(k,k^2)=\sum_{k\geq 0}r(1-q)^k q=rq\frac{(1-q)^0}{1-(1-q)}=\frac{rq}{q}=r$.

`D6)` Si ha $P(X_1=0)=p_{X_1,X_2}(0,0)+\sum_{h\geq 1}p_{X_1,X_2}(0,h)=r(1-q)^0 q+\sum_{h\geq 1}(1-r)\frac{1}{2^h}=rq+(1-r)\frac{(1/2)^1}{1-1/2}=rq+1-r$.

Esercizio 4.

`D7)` Si ha $P(0\leq Y\leq\log(5/2))=1$ e quindi $F_Y(y)=0$ per $y\leq 0$ e $F_Y(y)=1$ per $y\geq\log(5/2)$. Per $y\in(0,\log(5/2))$ si ha $F_Y(y)=P(\log(1+X)\leq y)=P(1+X\leq e^y)=P(X\leq e^y-1)=\int_0^{e^y-1}\frac{1}{3/2-0}dx=\frac{2}{3}\int_0^{e^y-1}dx=\frac{2}{3}[x]_{x=0}^{x=e^y-1}=\frac{2}{3}(e^y-1)$.

`D8)` Si ha $p_Z(0)=P(0\leq X<1)=\int_0^1\frac{1}{3/2-0}dx=\frac{2}{3}\int_0^1 dx=\frac{2}{3}[x]_{x=0}^{x=1}=\frac{2}{3}$ e $p_Z(1)=P(1\leq X<2)=\int_1^{3/2}\frac{1}{3/2-0}dx=\frac{2}{3}\int_1^{3/2}dx=\frac{2}{3}[x]_{x=1}^{x=3/2}=\frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}-1\right)=\frac{2}{3}\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$, da cui segue $\mathbb{E}[Z]=\sum_{k=0}^1 kp_Z(k)=0\cdot p_Z(0)+1\cdot p_Z(1)=0\cdot\frac{2}{3}+1\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$ (del resto Z ha distribuzione Bernoulliana di parametro $p=\frac{1}{3}$).

Esercizio 5.

`D9)` Si ha $\{X>y\}\subset\{|X|>y\}=\{X>y\}\cup\{X<-y\}$, che è un'unione di eventi disgiunti, e quindi $P(\{X>y\}|\{|X|>y\})=\frac{P(\{X>y\}\cap\{|X|>y\})}{P(\{|X|>y\})}=\frac{P(X>y)}{P(X>y)+P(X<-y)}=\frac{1-\Phi(y)}{1-\Phi(y)+\Phi(-y)}=\frac{1-\Phi(y)}{1-\Phi(y)+1-\Phi(y)}=\frac{1-\Phi(y)}{2(1-\Phi(y))}=\frac{1}{2}$.

`D10)` Si ha $P\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}-1<\frac{7}{2\sqrt{n}}\right)=P\left(\frac{\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}-1}{\sqrt{4}/\sqrt{n}}<\frac{7/2}{\sqrt{4}}\right)$ e, per il Teorema Limite Centrale, si ha

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}-1}{\sqrt{4}/\sqrt{n}}<\frac{7/2}{\sqrt{4}}\right)=\Phi\left(\frac{7/2}{\sqrt{4}}\right)=\Phi\left(\frac{7}{4}\right).$$

Quindi $z=\frac{7}{4}$.