Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata

Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)

Anno accademico: `2009-2010`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`

Simulazione 3

Esercizio 1. Si estraggono a caso 4 carte da un mazzo di carte numerate da 1 a 40, una alla volta e con reinserimento. Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di carte estratte con i numeri da 1 a 10.

`D1`) Trovare la densità di X.

`D2`) Calcolare la probabilità di estrarre almeno una volta un numero pari.

Esercizio 2. Sia X la variabile aleatoria che indica il numero che esce lanciando un dado equo. Dopo aver lanciato il dado si mettono X palline numerate da 1 a X in un'urna inizialmente vuota. Poi si estrae una pallina a caso tra quelle inserite nell'urna.

`D3`) Calcolare la probabilità di estrarre un numero dispari.

`D4`) Calcolare la probabilità di aver ottenuto il numero k ($k \in \{1, \ldots, 6\}$) nel lancio del dado sapendo di aver estratto un numero dispari.

Esercizio 3. Consideriamo la seguente densità congiunta: $p_{(X_1,X_2)}(k, 0) = (\frac{1}{4})^k$ ($k \geq 1$ intero), $p_{(X_1,X_2)}(1, 1) = p_{(X_1,X_2)}(2, 1) = \frac{1}{3}$.

`D5`) Trovare le densità marginali di X_1 e X_2.

`D6`) Calcolare $P(X_1 + X_2 \leq 2)$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con densità continua $f_X(t) = \frac{3}{2}(t-1)^2 1_{(0,2)}(t)$.

`D7`) Calcolare $P(X > 1 | 1 - t < X < 1 + t)$ per $t \in [0, 1]$.

`D8`) Trovare la densità continua di $Y = \log(1 + X)$.

Esercizio 5. Sia $N_t = \sum_{n \geq 1} 1_{T_n \leq t}$ (per $t \geq 0$) un processo di Poisson con intensità di $\lambda = 2$.

`D9`) Calcolare $P(1 \leq N_5 \leq 3)$.

`D10`) Calcolare $P(T_2 \geq 7)$.

Esercizio 6. Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di variabili aleatorie indipendenti e tutte normali con media incognita μ e varianza $\sigma^2 = 1$.

`D11`) Trovare l'intervallo di confidenza per μ al livello $1 - \alpha = 0.95$ nel caso in cui si ha un campione di 100 osservazioni e la media aritmetica dei valori osservati è $\overline{x}_{100} = 0.2$.

`D12`) Calcolare $P(X_n \geq 1.6)$ nel caso in cui $\mu = 0$.

Esercizio 7 (*solo per ST-Materiali*). Consideriamo una catena di Markov omogenea $\{X_n : n \geq 0\}$ con matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

`D13`) Calcolare $P(X_1 = 2, X_2 = 1)$ nel caso in cui $P(X_0 = i) = \frac{1}{4}$ per $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

`D14`) Trovare le distribuzioni stazionarie.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
D1) La variabile aleatoria X ha distribuzione binomiale: $p_X(k) = \binom{4}{k}(\frac{10}{40})^k(1-\frac{10}{40})^{4-k}$ ($k \in \{0,1,2,3,4\}$). Quindi $p_X(0) = \frac{81}{256}$, $p_X(1) = \frac{108}{256}$, $p_X(2) = \frac{54}{256}$, $p_X(3) = \frac{12}{256}$ e $p_X(4) = \frac{1}{256}$.
D2) La variabile aleatoria Y che indica il numero di carte con numero pari estratte ha distribuzione binomiale e la probabilità richiesta è $P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \binom{4}{0}(\frac{1}{2})^4 = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$.

Esercizio 2. Sia D l'evento "si estrae un numero dispari" e sia E_i l'evento di "esce i nel lancio del dado" ($i \in \{1,2,3,4,5,6\}$).
D3) Per la formula delle probabilità totali si ha $P(D) = \sum_{i=1}^6 P(D|E_i)P(E_i) = \frac{1}{6}(1+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{2}{4}+\frac{3}{5}+\frac{3}{6}) = \frac{1}{6}(1+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{3}{5}+\frac{1}{2}) = \frac{1}{6}\frac{30+15+20+15+18+15}{30} = \frac{113}{180}$.
D4) Per la formula di Bayes (e per il valore di $P(D)$ calcolato prima) si ha $P(E_k|D) = \frac{P(D|E_k)P(E_k)}{P(D)} = \frac{P(D|E_k)\frac{1}{6}}{\frac{113}{180}} = P(D|E_k)\frac{30}{113}$. Quindi $P(E_1|D) = \frac{30}{113}$, $P(E_2|D) = P(E_4|D) = P(E_6|D) = \frac{15}{113}$, $P(E_3|D) = \frac{20}{113}$, $P(E_5|D) = \frac{18}{113}$.

Esercizio 3.
D5) Si ha $p_{X_1}(1) = p_{(X_1,X_2)}(1,0) + p_{(X_1,X_2)}(1,1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{3+4}{12} = \frac{7}{12}$, $p_{X_1}(2) = p_{(X_1,X_2)}(2,0) + p_{(X_1,X_2)}(2,1) = (\frac{1}{4})^2 + \frac{1}{3} = \frac{3+16}{48} = \frac{19}{48}$, $p_{X_1}(k) = p_{(X_1,X_2)}(k,0) = (\frac{1}{4})^k$ ($k \geq 3$ intero) e $p_{X_2}(0) = \sum_{k\geq 0} p_{(X_1,X_2)}(k,0) = \sum_{k\geq 1}(\frac{1}{4})^k = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$, $p_{X_2}(1) = p_{(X_1,X_2)}(1,1) + p_{(X_1,X_2)}(1,2) = \frac{1+1}{3} = \frac{2}{3}$.
D6) Si ha $P(X_1+X_2 \leq 2) = p_{(X_1,X_2)}(1,0)+p_{(X_1,X_2)}(2,0)+p_{(X_1,X_2)}(1,1) = \frac{1}{4}+(\frac{1}{4})^2+\frac{1}{3} = \frac{12+3+16}{48} = \frac{31}{48}$.

Esercizio 4.
D7) Si ha $P(X > 1|1-t < X < 1+t) = \frac{P(\{X>1\}\cap\{1-t<X<1+t\})}{P(1-t<X<1+t)} = \frac{P(1<X<1+t)}{P(1-t<X<1+t)} = \frac{\int_1^{1+t}\frac{3}{2}(x-1)^2dx}{\int_{1-t}^{1+t}\frac{3}{2}(x-1)^2dx} = \frac{[\frac{(x-1)^3}{2}]_{x=1}^{x=1+t}}{[\frac{(x-1)^3}{2}]_{x=1-t}^{x=1+t}} = \frac{t^3}{t^3-(-t)^3} = \frac{1}{2}$.
D8) Si ha $P(0 < Y < \log 3) = 1$, da cui segue $F_Y(y) = 0$ per $y \leq 0$ e $F_Y(y) = 1$ per $y \geq \log 3$. Per $0 < y < \log 3$ si ha $F_Y(y) = P(\log(1+X) \leq y) = P(X \leq e^y - 1) = \int_0^{e^y-1}\frac{3}{2}(t-1)^2dt = [\frac{3}{2}\frac{(t-1)^3}{3}]_{t=0}^{t=e^y-1} = \frac{(e^y-2)^3+1}{2}$. Quindi la densità è $f_Y(y) = \frac{3}{2}(e^y-2)^2e^y 1_{(0,\log 3)}(y)$.

Esercizio 5.
D9) Si ha $P(1 \leq N_5 \leq 3) = \sum_{k=1}^3 \frac{(2\cdot 5)^k}{k!}e^{-2\cdot 5} = (10+\frac{100}{2}+\frac{1000}{6})e^{-10} = (10+50+\frac{500}{3})e^{-10} = \frac{680}{3}e^{-10}$.
D10) Si ha $P(T_2 \geq 7) = 1 - (1 - \sum_{k=0}^{2-1}\frac{(2\cdot 7)^k}{k!}e^{-2\cdot 7}) = 1 - 1 + (1+14)e^{-14} = 15e^{-14}$.

Esercizio 6.
D11) L'intervallo di confidenza richiesto è $\left[\overline{x}_n - \phi_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x}_n + \phi_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$. Si ha $n = 100$, $\overline{x}_n = \overline{x}_{100} = 0.2$, $\sigma = \sqrt{1} = 1$; inoltre $1-\frac{\alpha}{2} = 0.975$ segue da $1-\alpha = 0.95$ e quindi $\phi_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.96$. In conclusione l'intervallo di confidenza richiesto è $[0.004, 0.396]$.
D12) Si ha $P(X_n \geq 1.6) = 1 - \Phi(1.6) = 1 - 0.9452 = 0.0548$.

Esercizio 7.
D13) Si ha $P(X_1 = 2, X_2 = 1) = \sum_{i=1}^4 P(X_1 = 2, X_2 = 1|X_0 = i)P(X_0 = i) = \sum_{i=1}^4 p_{i2}p_{21}P(X_0 = i) = \frac{1}{4}\frac{1}{4}\sum_{i=1}^4 p_{i2} = \frac{1}{16}(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+0+0) = \frac{1}{16}\frac{5}{4} = \frac{5}{64}$.
D14) Abbiamo due classi irriducibili: $\{1,2\}$ e $\{3,4\}$. Quindi le distribuzioni stazionarie sono

$\{\pi^{(\alpha)} : \alpha \in [0,1]\}$ del tipo
$$\pi^{(\alpha)} = \alpha\pi^{(1)} + (1-\alpha)\pi^{(0)},$$
dove: $\pi^{(1)} = (p, 1-p, 0, 0)$ con $(p, 1-p)$ distribuzione stazionaria relativa alla catena ristretta agli stati $\{1,2\}$; $\pi^{(0)} = (0, 0, q, 1-q)$ con $(q, 1-q)$ distribuzione stazionaria relativa alla catena ristretta agli stati $\{3,4\}$. Si ha
$$(p, 1-p)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} = (p, 1-p)$$
da cui si ottengono le equazioni
$$\begin{cases} \frac{p}{2} + \frac{1-p}{4} = p \\ \frac{p}{2} + \frac{3(1-p)}{4} = 1-p, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2p + 1 - p = 4p \\ 2p + 3 - 3p = 4 - 4p, \end{cases}$$
e l'unica soluzione per entrambe le equazioni è $p = \frac{1}{3}$. In maniera analoga si ha
$$(q, 1-q)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (q, 1-q)$$
da cui si ottengono due equazioni coincidenti $1 - q = q$, la cui soluzione è $q = \frac{1}{2}$. In conclusione le distribuzioni stazionarie sono
$$\pi^{(\alpha)} = \left(\frac{\alpha}{3}, \frac{2\alpha}{3}, \frac{1-\alpha}{2}, \frac{1-\alpha}{2}\right)$$
al variare di $\alpha \in [0,1]$.

Commenti.
`D1-D5`) La somma dei valori delle densità è 1 in accordo con la teoria.
`D4`) Si ha $\sum_{k=1}^{6} P(E_k|D) = \frac{30+15+20+15+18+15}{113} = 1$ in accordo con la teoria.
`D7`) Il valore ottenuto (indipendente dalla scelta di t) è in accordo con il fatto che la densità $f_X(t)$ è simmetrica rispetto a $t = 1$.
`D10`) In altro modo $P(T_2 \geq 7) = P(T_2 > 7) = P(N_7 \leq 1) = \sum_{k=0}^{1} \frac{(2\cdot 7)^k}{k!} e^{-2\cdot 7} = (1+14)e^{-15} = 15e^{-14}$.
`D14`) In altro modo possiamo considerare il sistema
$$(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4).$$
Si ottengono quattro equazioni, alcune delle quali coincidenti; si verifica che le equazioni distinte sono
$$\begin{cases} \pi_1 = \frac{\pi_2}{2} \\ \pi_3 = \pi_4. \end{cases}$$
Poniamo $\beta = \pi_3 = \pi_4$ e $\gamma = \pi_1$; quindi $\pi_2 = 2\gamma$ e $\gamma + 2\gamma + \beta + \beta = 1$ da cui segue $\beta = \frac{1-3\gamma}{2}$. Quindi le distribuzioni stazionarie sono
$$\left(\gamma, 2\gamma, \frac{1-3\gamma}{2}, \frac{1-3\gamma}{2}\right)$$
al variare di $\gamma \in [0, \frac{1}{3}]$ (questo insieme di valori per γ garantisce che si abbiano valori non negativi; inoltre si vede che la somma delle componenti è uguale a 1). Ponendo $\gamma = \frac{\alpha}{3}$ (e quindi $\alpha \in [0,1]$), si ottengono tutte e sole le distribuzioni stazionarie che abbiamo ottenuto sopra.