**Statistica per la ricerca sperimentale e tecnologica**
Corso di Laurea in Informatica, Università di Roma "Tor Vergata"
*Anno accademico:* 2007-2008
*Titolare del corso:* `Claudio Macci`
**Simulazione 2**

**Esercizio 1**. Un'urna contiene 3 palline numerate da 1 a 3. Si estraggono a caso 2 palline in blocco e sia $X$ la variabile aleatoria che indica il massimo tra i due numeri estratti.
`D1`) Trovare la densità discreta di $X$ e calcolare $\mathbb{E}[X]$.
Supponiamo di ripetere il procedimento tre volte (ogni volta si comincia con l'urna che ha le 3 palline numerate da 1 a 3) e siano $X_1, X_2, X_3$ le variabili aleatorie che indicano il massimo tra i due numeri estratti in ciascuna delle tre estrazioni a caso delle due palline in blocco.
`D2`) Calcolare $p_{(X_1,X_2,X_3)}(2,3,2)$.

**Esercizio 2**. Si lanci un dado equo: se esce un numero pari si lancia una moneta la cui probabilità che esca testa è $\frac{2}{3}$, se esce un numero dispari si lancia una moneta la cui probabilità che esca testa è $\frac{1}{3}$.
`D3`) Calcolare la probabilità che esca testa.
`D4`) Calcolare la probabilità sia uscito un numero pari nel lancio del dado sapendo che è uscita testa.

**Esercizio 3**. Un'urna contiene 200 palline numerate da 1 a 200. Si estraggono a caso 50 palline, una alla volta e con reinserimento. Sia $X$ la variabile aleatoria che conta il numero di volte che esce il numero 179.
`D5`) Calcolare $\mathbb{E}[X]$.
`D6`) Calcolare $p_X(5)$ sfruttando l'approssimazione di Poisson della binomiale.

**Esercizio 4**. Sia $X$ una variabile aleatoria con densità $f_X(t) = \frac{5}{32}t^4$ per $t \in [0,2]$ e $f_X(t) = 0$ altrimenti. Poi sia $(X_n)$ una successione di variabili aleatorie indipendenti e tutte con la stessa distribuzione di $X$. Infine poniamo $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k$.
`D7`) Calcolare $P(X > 1)$.
`D8`) Trovare il valore di $m$ per cui si ha $\lim_{n\to\infty} P(|\overline{X}_n - m| \geq \varepsilon) = 0$ per ogni $\varepsilon > 0$.

**Esercizio 5**. Sia $X$ una variabile aleatoria con distribuzione uniforme su $S = [0,1] \cup [2,3]$, cioè con densità $f_X(t) = \frac{1}{2}$ per $t \in S$ e $f_X(t) = 0$ altrimenti. Inoltre sia $Y = [X]$ dove $[x] = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$ è la *parte intera* di $x$.
`D9`) Calcolare $\mathbb{E}[X]$.
`D10`) Trovare la densità discreta di $Y$.

**Esercizio 6**. Sia $X$ una variabile aleatoria normale con media $\mu = 4$ e varianza $\sigma^2 = 16$.
`D11`) Calcolare $P(X > 2)$.
Ora supponiamo che $\mu$ sia incognito e consideriamo un campione casuale di $n = 100$ osservazioni con la stessa distribuzione di $X$. Il valore della media campionaria è $\overline{x}_n = 3.8$.
`D12`) Trovare un intervallo di confidenza per $\mu$ al livello $1 - \alpha = 0.95$.

**Cenno alle soluzioni** (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

**Esercizio 1**.
`D1`) Dobbiamo considerare $\Omega = \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}$ e ciascun punto di $\Omega$ ha probabilità $\frac{1}{3}$. Allora $p_X(2) = P(\{\{1,2\}\}) = \frac{1}{3}$ e $p_X(3) = P(\{\{1,3\},\{2,3\}\}) = \frac{2}{3}$, da cui $\mathbb{E}[X] = 2\frac{1}{3} + 3\frac{2}{3} = \frac{2+6}{3} = \frac{8}{3}$.
`D2`) Ovviamente le variabili aleatorie $X_1, X_2, X_3$ sono indipendenti e tutte con la distribuzione di $X$. Quindi $p_{(X_1,X_2,X_3)}(2,3,2) = p_X(2)p_X(3)p_X(2) = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{27}$.

**Esercizio 2**. Sia $T$ l'evento "esce testa" e $D$ l'evento "esce dispari".
`D3`) Per la formula delle probabilità totali si ha $P(T) = P(T|D)P(D)+P(T|D^c)P(D^c) = \frac{1}{3}\frac{3}{6}+\frac{2}{3}\frac{3}{6} = \left[\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right]\frac{3}{6} = 1\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.
`D4`) Per la formula di Bayes, e sfruttando il valore di $P(T)$ calcolato prima, si ha $P(D^c|T) = \frac{P(T|D^c)P(D^c)}{P(T)} = \frac{\frac{2}{3}\frac{3}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$.

**Esercizio 3**. La variabile aleatoria $X$ ha distribuzione ha distribuzione binomiale con parametri $n = 50$ (numero di estrazioni) e $p = \frac{1}{200}$ (probabilità di estrarre il numero 179 in ogni estrazione). Quindi $p_X(k) = \binom{50}{k}(\frac{1}{200})^k(1-\frac{1}{200})^{50-k}$ per $k \in \{0,\dots,50\}$.
`D5`) Si ha $\mathbb{E}[X] = np = 50\frac{1}{200} = \frac{1}{4}$.
`D6`) Si ha $p_X(5) = \binom{50}{5}(\frac{1}{200})^5(\frac{199}{200})^{45}$ e, sfruttando l'approssimazione di Poisson della binomiale $p_X(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ con $\lambda = np = 50\frac{1}{200} = \frac{1}{4}$, otteniamo il valore approssimato $p_X(5) \approx \frac{e^{-\frac{1}{4}}}{4^5 5!}$.

**Esercizio 4**.
`D7`) Si ha $P(X > 1) = \int_1^2 \frac{5}{32}t^4 dt = \left[\frac{5}{32}\frac{t^5}{5}\right]_{t=1}^{t=2} = \frac{2^5-1}{32} = \frac{31}{32}$.
`D8`) Il valore di $m$ richiesto è $m = \mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} t f_X(t)dt = \int_0^2 t\frac{5}{32}t^4 dt = \left[\frac{5}{32}\frac{t^6}{6}\right]_{t=0}^{t=2} = \frac{5}{32}\frac{64}{6} = \frac{5}{3}$.

**Esercizio 5**.
`D9`) Si ha $\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} t f_X(t)dt = \int_0^1 t\frac{1}{2}dt + \int_2^3 t\frac{1}{2}dt = \left[\frac{t^2}{4}\right]_{t=0}^{t=1} + \left[\frac{t^2}{4}\right]_{t=2}^{t=3} = \frac{(1-0)+(9-4)}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$.
`D10`) Si ha $p_Y(0) = P(0 \le X < 1) = \int_0^1 \frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}$ e $p_Y(2) = P(2 \le X < 3) = \int_2^3 \frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}$.

**Esercizio 6**.
`D11`) La v.a. $Z_X = \frac{X-4}{\sqrt{16}}$ è la standardizzata di $X$ e si ha $P(X > 2) = P(\frac{X-4}{\sqrt{16}} > \frac{2-4}{\sqrt{16}}) = P(Z_X > -2/4) = 1 - \Phi(-2/4) = 1 - (1 - \Phi(2/4)) = \Phi(2/4) = \Phi(0.5) = 0.69146$.
`D12`) L'intervallo di confidenza richiesto è $\left[\overline{x}_n - \phi_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x}_n + \phi_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$. Si ha $n = 100$, $\overline{x}_n = \overline{x}_{100} = 3.8$, $\sigma = \sqrt{16} = 4$; inoltre $1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975$ segue da $1 - \alpha = 0.95$ e quindi $\phi_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.96$. In conclusione l'intervallo di confidenza richiesto è $[3.016, 4.584]$.

*Commenti.*
`D1`) Si ha $p_X(2) + p_X(3) = \frac{1+2}{3} = 1$ in accordo con la teoria.
`D9`) Si osservi che abbiamo una densità uniforme su due intervalli disgiunti di uguale lunghezza (cioè $[0,1]$ e $[2,3]$) e separati da un altro intervallo (cioè $[1,2]$). Abbiamo ottenuto che $\mathbb{E}[X] = \frac{3}{2}$, dove $\frac{3}{2}$ è il punto medio dell'intervallo "separatore".
`D10`) Si ha $p_Y(0) + p_Y(2) = \frac{1+1}{2} = 1$ in accordo con la teoria.