Laurea Triennale in Scienza e Tecnologia dei Media, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità
Anno accademico: `2017-2018`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Simulazione 1
Esercizi 1,2,3,4,5 per gli studenti che sostengono l'esame da 6 crediti.
Esercizi 1,2,3,4,5,6 per gli studenti che sostengono l'esame da 8 crediti.

Esercizio 1. Un'urna contiene 3 palline numerate da 1 a 3. Si estraggono a caso due palline una alla volta e con reinserimento.
D1) Calcolare la probabilità di estrarre un numero dispari.
D2) Calcolare la probabilità di estrarre due numeri uguali o la cui differenza in valore assoluto sia al più 1.
D3) Supponiamo di ripetere il procedimento più volte. Calcolare la probabilità che si ottenga "due volte 1" per la prima volta ad un tentativo pari (il secondo, il quarto, il sesto, ecc.).

Esercizio 2. Abbiamo due urne, ciascuna delle quali ha 1 pallina bianca, 2 rosse e 3 nere. Si estrae una pallina a caso dalla prima urna e viene inserita nella seconda urna. Poi si estrae a caso una pallina dalla seconda urna.
D4) Calcolare la probabilità di aver estratto una pallina di un qualsiasi colore fissato (bianca, rossa e nera) dalla prima urna sapendo di aver estratto due palline dello stesso colore.

Esercizio 3. Si lanciano due dadi con i numeri $1, 2, 3, 4, 5, 5$. Sia X_k la variabile aleatoria che indica il numero che esce dal lancio del k-simo dado (per $k \in \{1, 2\}$).
D5) Calcolare $P(X_1 + X_2 = 4|X_1 = X_2)$.
D6) Calcolare $\mathbb{E}[X_1 + X_2]$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con densità continua $f_X(x) = x^{-2}1_{(1,\infty)}(x)$.
D7) Calcolare $P(X > t + s|X > s)$ per $t > 0$ e $s > 1$.
D8) Trovare la funzione di distribuzione di $Y = \log X$.

Esercizio 5.
Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$.
D9) Sia X una variabile aleatoria normale con media 0 e varianza σ^2. Dire per quale valore di σ^2 si ha $P(|X| \leq 1) = 2\Phi(3/4) - 1$.
D10) Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. (indipendenti e identicamente distribuite) con densità continua $f_X(x) = 6x(1 - x)1_{(0,1)}(x)$. Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - n/2}{\sqrt{n}} \leq -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

esprimendo tale limite con la funzione $\Phi(y)$ per qualche $y \geq 0$.

Esercizio 6.
Consideriamo una catena di Markov omogenea $\{X_n : n \geq 0\}$ con spazio degli stati $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix}.$$

Supponiamo che la catena parta dallo stato 4.
D11) Trovare la densità discreta di X_2.
D12) Calcolare la probabilità che la catena raggiunga l'insieme $C = \{1, 2\}$ evitando lo stato 3.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
D1) La probabilità richiesta è $\binom{2}{1}(\frac{2}{3})^1(1-\frac{2}{3})^{2-1}=\frac{4}{9}$.
D2) Abbiamo uno spazio di probabilità uniforme discreto, dove l'insieme $\Omega=\{\omega=(\omega_1,\omega_2):\omega_1,\omega_2\in\{1,2,3\}\}$ ha 9 elementi. Allora la probabilità richiesta è

$$\frac{\#\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1),(2,3),(3,2)\}}{9}=\frac{7}{9}.$$

D3) La probabilità richiesta è $\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{2k-1}p$ con $p=\frac{1}{9}$, che è uguale a

$$\frac{1}{9}\sum_{k=1}^{\infty}(8/9)^{2k-1}=\frac{1}{9}\frac{9}{8}\sum_{k=1}^{\infty}(64/81)^k=\frac{1}{8}\frac{64/81}{1-64/81}=\frac{1}{8}\frac{64}{17}=\frac{8}{17}.$$

Esercizio 2.
D4) Vengono richieste le probabilità condizionate $P(B|E),P(R|E),P(N|E)$, dove E è l'evento "estratte due palline dello stesso colore". Allora

$$P(E)=P(E|B)P(B)+P(E|R)P(R)+P(E|N)P(N)=\frac{2}{7}\frac{1}{6}+\frac{3}{7}\frac{2}{6}+\frac{4}{7}\frac{3}{6}=\frac{2+6+12}{42}=\frac{10}{21}$$

per la formula delle probabilità totali. Quindi, per la formula di Bayes,

$$P(B|E)=\frac{P(E|B)P(B)}{P(E)}=\frac{1}{10},\ P(R|E)=\frac{P(E|R)P(R)}{P(E)}=\frac{3}{10},\ P(N|E)=\frac{P(E|N)P(N)}{P(E)}=\frac{6}{10}.$$

Osservazione: si ha $P(B|E)+P(R|E)+P(N|E)=1$ in accordo con la teoria.

Esercizio 3.
Si ha $p_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=p_{X_1}(x_1)p_{X_2}(x_2)$ e, per $i\in\{1,2\}$, si ha $p_{X_i}(1)=p_{X_i}(2)=p_{X_i}(3)=p_{X_i}(4)=\frac{1}{6}$ e $p_{X_i}(5)=\frac{2}{6}$.
D5) La probabilità condizionata richiesta è uguale a

$$\frac{P(\{X_1+X_2=4\}\cap\{X_1=X_2\})}{P(X_1=X_2)}=\frac{p_{X_1,X_2}(2,2)}{\sum_{k=1}^{5}p_{X_1,X_2}(k,k)}=\frac{(1/6)^2}{4(1/6)^2+(2/6)^2}=\frac{1}{8}.$$

D6) Sfruttando la linearità del valore atteso si ha

$$\mathbb{E}[X_1+X_2]=\mathbb{E}[X_1]+\mathbb{E}[X_2]=\sum_{i=1}^{2}\sum_{k=1}^{5}kp_{X_i}(k)=2\cdot\left(1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{2}{6}\right)=\frac{20}{3}.$$

Esercizio 4.
D7) La probabilità condizionata richiesta è uguale a

$$\frac{P(\{X>t+s\}\cap\{X>s\})}{P(X>s)}=\frac{P(X>t+s)}{P(X>s)}=\frac{\int_{t+s}^{\infty}x^{-2}dx}{\int_s^{\infty}x^{-2}dx}=\frac{[-x^{-1}]_{x=t+s}^{x=\infty}}{[-x^{-1}]_{x=s}^{x=\infty}}=\frac{s}{t+s}.$$

D8) Si ha $P(Y\geq 0)=1$ e quindi $F_Y(y)=0$ per $y\leq 0$. Per $y>0$ si ha

$$F_Y(y)=P(\log X\leq y)=P(X\leq e^y)=\int_1^{e^y}x^{-2}dx=[-x^{-1}]_{x=1}^{x=e^y}=1-e^{-y}.$$

Osservazione: Y ha distribuzione esponenziale di parametro 1.

Esercizio 5.
D9) Si ha

$$\begin{aligned}P(|X|\leq 1)&=P(-1\leq X\leq 1)=P(-1/\sigma\leq X/\sigma\leq 1/\sigma)\\&=\Phi(1/\sigma)-\Phi(-1/\sigma)=\Phi(1/\sigma)-(1-\Phi(1/\sigma))=2\Phi(1/\sigma)-1.\end{aligned}$$

Quindi $1/\sigma = 3/4$, da cui segue $\sigma = 4/3$ e $\sigma^2 = 16/9$.
`D10`) Si ha

$$\mathbb{E}[X_n] = \int_0^1 x6x(1-x)dx = 6\int_0^1 x^2 - x^3 dx = 6\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_{x=0}^{x=1} = 6\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

e

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[X_n] = \mathbb{E}[X_n^2] - \mathbb{E}^2[X_n] = \int_0^1 x^2 6x(1-x)dx - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ = 6\int_0^1 x^3 - x^4 dx - \frac{1}{4} = 6\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right]_{x=0}^{x=1} - \frac{1}{4} = \frac{6}{20} - \frac{1}{4} = \frac{1}{20}.\end{aligned}$$

Allora, ponendo $\sigma = \sqrt{\frac{1}{20}} = \frac{1}{2\sqrt{5}}$, per il teorema limite centrale si ha

$$P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - n/2}{\sqrt{n}} \le -\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - n/2}{\sigma\sqrt{n}} \le -\frac{1/\sqrt{5}}{\sigma}\right) \to \Phi(-2) = 1 - \Phi(2).$$

Esercizio 6. Si ha $P(X_0 = 4) = 1$; quindi la distribuzione iniziale è $\pi = (0,0,0,1,0)$.
`D11`) La densità richiesta è data dal vettore riga $\pi^{(2)} = (p_{X_2}(k))_{k\in E}$, dove $\pi^{(2)} = \pi P^2$. Quindi si ha

$$\begin{aligned}\pi^{(2)} = (0,0,0,1,0)\begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix} \\ = (0,0,0,1/3,2/3)\begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix} = (2/15, 2/15, 2/15, 11/45, 16/45).\end{aligned}$$

`D12`) Dobbiamo considerare la matrice di transizione

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix},$$

dove $\{1,2,3\}$ vengono resi stati assorbenti. Dobbiamo considerare il sistema delle probabilità di passaggio per C tenendo conto che $D_C = \{4,5\}$. Si ha

$$\begin{cases} \lambda_4 = \frac{1}{3}\lambda_4 + \frac{2}{3}\lambda_5 \\ \lambda_5 = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}\lambda_4 + \frac{1}{5}\lambda_5, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{2}{3}\lambda_4 = \frac{2}{3}\lambda_5 \\ \frac{4}{5}\lambda_5 = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}\lambda_4, \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_4 = \lambda_5 \\ \frac{3}{5}\lambda_5 = \frac{2}{5}, \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_4 = 2/3 \\ \lambda_5 = 2/3. \end{cases}$$

La probabilità richiesta è $\lambda_4 = 2/3$.
Osservazione: è noto che la catena o finisce in C o finisce in $\{3\}$ (non raggiungendo C); inoltre, in entrambi i casi, la catena passerà per lo stato 5; quindi per certi versi è ragionevole che λ_4 e λ_5 coincidano, e il valore ottenuto dal sistema si spiega con il seguente rapporto

$$\frac{p_{51} + p_{52}}{p_{51} + p_{52} + p_{53}} = \frac{1/5 + 1/5}{1/5 + 1/5 + 1/5} = 2/3.$$