Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità (ed insegnamenti mutuati)
Anno accademico: `2015-2016`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Appello del 25 Luglio 2016

Esercizio 1.
`D1`) Si lanciano 4 dadi equi. Calcolare la probabilità che escano almeno 2 numeri pari.
`D2`) Supponiamo di lanciare 4 dadi equi ripetutamente fino a quando escono per la prima volta almeno 2 numeri pari (in un insieme di 4 dadi lanciati). Calcolare la probabilità vengano effettuati almeno n lanci dei 4 dadi (per $n \geq 1$).

Esercizio 2. Un'urna ha 1 pallina bianca e 1 nera. Si estrae una pallina a caso e viene reinserita nell'urna insieme ad altre 10 palline dello stesso colore di quella estratta. Poi si estrae nuovamente una pallina a caso.
`D3`) Calcolare la probabilità che la seconda pallina estratta sia bianca.
`D4`) Calcolare la probabilità di aver estratto una pallina nera alla prima estrazione sapendo di aver estratto una pallina bianca alla seconda estrazione.

Esercizio 3. Consideriamo la seguente densità congiunta: $p_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = e^{-2} \cdot \frac{(1-e^{-1})^{x_1}}{x_2!}$ per $x_1, x_2 \geq 0$ interi.
`D5`) Calcolare $P(X_1 + X_2 = 1)$.
`D6`) Calcolare $P(X_1 < X_2 | X_1 + X_2 = 1)$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con densità continua $f_X(x) = 2(x-1)1_{(1,2)}(x)$.
`D7`) Trovare la funzione di distribuzione di $Y = X^2 - 1$.
`D8`) Calcolare $P(Y > 2)$.

Esercizio 5.
`D9`) Sia $N_t = \sum_{n \geq 1} 1_{T_n \leq t}$ (per $t \geq 0$) un processo di Poisson con intensità $\lambda = 2/5$. Calcolare $\mathbb{E}[N_{10}]$.
`D10`) Sia X una variabile aleatoria con distribuzione Normale di media 1 e varianza 25. Trovare il valore x per cui $P(X \leq x) = \Phi(2/5)$.

Esercizio 6. Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. (indipendenti e identicamente distribuite).
`D11`) Dire per quale valore di m si ha

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - m\right| > \varepsilon\right) = 0 \text{ per ogni } \varepsilon > 0,$$

nel caso in cui le variabili aleatorie $\{X_n : n \geq 1\}$ abbiano densità continua $f_X(x) = 30x^2(1-x)^2 1_{(0,1)}(x)$.
`D12`) Calcolare, usando l'approssimazione Normale, $P(29700 < X_1 + \cdots + X_{10000} < 30100)$ nel caso in cui le variabili aleatorie $\{X_n : n \geq 1\}$ abbiano distribuzione uniforme in $(3 - \sqrt{12}, 3 + \sqrt{12})$.

Esercizio 7 (*solo per Lauree Magistrali*). Consideriamo una catena di Markov omogenea $\{X_n : n \geq 0\}$ con spazio degli stati $E = \{1, 2\}$ e matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

per $p \in [0, 1]$.
`D13`) Dire per quale valore di p la distribuzione $(5/8, 3/8)$ è stazionaria.
`D14`) Sia $P(X_0 = 1) = P(X_0 = 2) = \frac{1}{2}$. Dire per quale valore di p si ha $(P(X_1 = 1), P(X_1 = 2)) = (4/7, 3/7)$.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.

`D1`) Sia X la variabile aleatoria che conta quante volte esce un numero pari lanciando 4 dadi equi (quindi X ha distribuzione binomiale di parametri $n = 4$ e $p = \frac{1}{2}$). La probabilità richiesta è $P(X \geq 2) = [\binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4}](\frac{1}{2})^4 = \frac{6+4+1}{16} = \frac{11}{16}$.

`D2`) Sia Y la variabile aleatoria che conta quante volte vengono lanciati i 4 dadi. La probabilità richiesta è $P(Y \geq n) = \sum_{k \geq n}(1 - 11/16)^{k-1} 11/16 = \frac{11}{16} \frac{(1-11/16)^{n-1}}{1-(1-11/16)} = (\frac{5}{16})^{n-1}$.

Esercizio 2. Indichiamo con B_i l'evento "estratta pallina bianca alla i-sima estrazione".

`D3`) Per la formula delle probabilità totali si ha $P(B_2) = P(B_2|B_1)P(B_1) + P(B_2|B_1^c)P(B_1^c) = \frac{11}{12}\frac{1}{2} + \frac{1}{12}\frac{1}{2} = \frac{11+1}{24} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$.

`D4`) Per la formula di Bayes, e tenendo conto di alcuni valori calcolati prima, si ha $P(B_1^c|B_2) = \frac{P(B_2|B_1^c)P(B_1^c)}{P(B_2)} = \frac{\frac{1}{12}\frac{1}{2}}{1/2} = \frac{1}{12}$.

Esercizio 3.

`D5`) Si ha $P(X_1 + X_2 = 1) = p_{X_1,X_2}(0, 1) + p_{X_1,X_2}(1, 0) = e^{-2}(1 + 1 - e^{-1}) = 2e^{-2} - e^{-3}$.

`D6`) Si ha $P(X_1 < X_2|X_1 + X_2 = 1) = \frac{P(\{X_1<X_2\}\cap\{X_1+X_2=1\})}{P(X_1+X_2=1)} = \frac{p_{X_1,X_2}(0,1)}{p_{X_1,X_2}(0,1)+p_{X_1,X_2}(1,0)} = \frac{e^{-2}}{e^{-2}(1+1-e^{-1})} = \frac{1}{2-e^{-1}}$.

Esercizio 4.

`D7`) Si vede che $P(0 \leq Y \leq 3) = 1$ e quindi $F_Y(y) = 0$ per $y \leq 0$ e $F_Y(y) = 1$ per $y \geq 3$. Per $y \in (0, 3)$ si ha $F_Y(y) = P(X^2 - 1 \leq y) = P(X^2 \leq y + 1) = P(X \leq \sqrt{y + 1}) = \int_1^{\sqrt{y+1}} 2(x - 1)dx = 2[\frac{(x-1)^2}{2}]_{x=1}^{x=\sqrt{y+1}} = (\sqrt{y + 1} - 1)^2$.

`D8`) Si ha $P(Y > 2) = 1 - F_Y(2) = 1 - (\sqrt{2 + 1} - 1)^2 = 1 - (\sqrt{3} - 1)^2 = 1 - (3 + 1 - 2\sqrt{3}) = 2\sqrt{3} - 3$.

Esercizio 5.

`D9`) Si ha $\mathbb{E}[N_{10}] = \frac{2}{5} \cdot 10 = 4$.

`D10`) Si ha $P(X \leq x) = P(\frac{X-1}{\sqrt{25}} \leq \frac{x-1}{\sqrt{25}})$, da cui segue $\frac{x-1}{\sqrt{25}} = \frac{2}{5}$, e quindi $x = 3$.

Esercizio 6.

`D11`) Per la legge dei grandi numeri il valore di m richiesto è $m = \int_0^1 x \cdot 30x^2(1 - x)^2dx = 30 \int_0^1 x^3(1 - 2x + x^2)dx = 30 \int_0^1 x^3 - 2x^4 + x^5dx = 30[\frac{x^4}{4} - 2\frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6}]_{x=0}^{x=1} = 30(\frac{1}{4} - \frac{2}{5} + \frac{1}{6}) = 30 \cdot \frac{15-24+10}{60} = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}$.

`D12`) Le variabili aleatorie $\{X_n : n \geq 1\}$ hanno media $\frac{3-\sqrt{12}+3+\sqrt{12}}{2} = 3$ e varianza $\frac{(3+\sqrt{12}-(3-\sqrt{12}))^2}{12} = \frac{(2\sqrt{12})^2}{12} = \frac{4\cdot 12}{12} = 4$ per le formule sulla distribuzione uniforme. Quindi, se indichiamo con Z la standardizzata di $X_1+\cdots+X_{10000}$, si ha $\{29700 < X_1+\cdots+X_{10000} < 30100\} = \{\frac{29700-30000}{\sqrt{4}\sqrt{10000}} < Z < \frac{30100-30000}{\sqrt{4}\sqrt{10000}}\}$ e, per l'approssimazione Normale, la probabilità richiesta è $P(29700 < X_1+\cdots+X_{10000} < 30100) = \Phi(100/200) - \Phi(-300/200) = \Phi(0.5) - \Phi(-1.5) = \Phi(0.5) - (1 - \Phi(1.5)) = \Phi(0.5) + \Phi(1.5) - 1 = 0.69146 + 0.93319 - 1 = 0.62465$.

Esercizio 7.

`D13`) Se $(\alpha, 1 - \alpha)$ è una distribuzione stazionaria, allora si ha

$$(\alpha, 1 - \alpha) \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = (\alpha, 1 - \alpha),$$

da cui seguono le equazioni

$$\begin{cases} \alpha p + \frac{1-\alpha}{2} = \alpha \\ \alpha(1 - p) + \frac{1-\alpha}{2} = 1 - \alpha. \end{cases}$$

Entrambe le equazioni si riducono (con alcuni passaggi) a

$$\alpha = \frac{1/2}{3/2 - p}$$

e, imponendo $\alpha = \frac{5}{8}$, si ottiene

$$\frac{3}{2} - p = \frac{4}{5},\ p = \frac{3}{2} - \frac{4}{5} = \frac{15-8}{10} = \frac{7}{10}.$$

`D14`) Si deve avere

$$(1/2, 1/2)\begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = (4/7, 3/7),$$

da cui seguono le equazioni

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(p + \frac{1}{2}) = \frac{4}{7} \\ \frac{1}{2}(1 - p + \frac{1}{2}) = \frac{3}{7}. \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ha

$$p + \frac{1}{2} = \frac{8}{7},\ p = \frac{8}{7} - \frac{1}{2} = \frac{16-7}{14} = \frac{9}{14}.$$

La stessa soluzione si ottiene anche a partire dalla seconda equazione; infatti si ha

$$1 - p + \frac{1}{2} = \frac{6}{7},\ p = 1 + \frac{1}{2} - \frac{6}{7} = \frac{14+7-12}{14} = \frac{9}{14}.$$

Commenti.
La somma dei valori di ciascuna densità discreta che appare è 1 in accordo con la teoria.
`D1`) In altro modo si avrebbe $P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - [\binom{4}{0} + \binom{4}{1}](\frac{1}{2})^4 = 1 - \frac{1+4}{16} = \frac{16-5}{16} = \frac{11}{16}$.
`D2`) Come caso particolare si ottiene un risultato banale, cioè $P(Y \geq 1) = (\frac{5}{16})^{1-1} = 1$.
`D3`) Supponiamo che, dopo l'estrazione della prima pallina, questa venga reinserita nell'urna con $k \geq 1$ palline dello stesso colore (quindi k generico anziché $k = 10$). Allora si otterrebbe lo stesso risultato. Infatti si avrebbe $P(B_2) = P(B_2|B_1)P(B_1) + P(B_2|B_1^c)P(B_1^c) = \frac{k+1}{k+2}\frac{1}{2} + \frac{1}{k+2}\frac{1}{2} = \frac{k+1+1}{k+2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.
`D6`) In maniera analoga si vede che $P(X_1 > X_2|X_1+X_2 = 1) = \frac{1-e^{-1}}{2-e^{-1}}$ e $P(X_1 = X_2|X_1+X_2 = 1) = 0$. Quindi si ha $P(X_1 < X_2|X_1 + X_2 = 1) + P(X_1 > X_2|X_1 + X_2 = 1) + P(X_1 = X_2|X_1 + X_2 = 1) = \frac{1+(1-e^{-1})+0}{2-e^{-1}} = 1$ in accordo con la teoria.
`D8`) In altro modo si ha $P(Y > 2) = P(X^2 - 1 > 2) = P(X^2 > 3) = P(X > \sqrt{3}) = \int_{\sqrt{3}}^2 2(x-1)dx = 2[\frac{(x-1)^2}{2}]_{x=\sqrt{3}}^{x=2} = 1 - (\sqrt{3}-1)^2 = 1 - (3 + 1 - 2\sqrt{3}) = 2\sqrt{3} - 3$.
`D7-D8`) In altro modo, poiché la densità continua di Y è $f_Y(y) = (1 - \frac{1}{\sqrt{y+1}})1_{(0,3)}(y)$ (questo si verifica con alcuni calcoli a partire dalla espressione di F_Y, svolgendo il quadrato e derivando rispetto a y), si ha $P(Y > 2) = \int_2^3 1 - \frac{1}{\sqrt{y+1}}dy = [y - \frac{(y+1)^{1-1/2}}{1-1/2}]_{y=2}^{y=3} = 3 - 2\sqrt{4} - (2 - 2\sqrt{3}) = 3 - 4 - 2 + 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3} - 3$.
`D11`) Il valore richiesto m è la speranza matematica di una qualsiasi variabile aleatoria X con densità continua $f_X(x) = 30x^2(1-x)^2 1_{(0,1)}(x)$. Il valore $m = 1/2$ poteva essere ricavato senza fare calcoli osservando che f_X è simmetrica rispetto a $x = 1/2$; infatti, se in generale si ha speranza matematica finita (e questo accade nel caso in questione perché la densità f_X è diversa da zero in un insieme limitato, cioè $[0, 1]$) e se si ha una densità è simmetrica rispetto ad un certo valore x_0, la speranza matematica coincide con il valore x_0.