Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)
Anno Accademico: `2020-2021`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Simulazione 1

Esercizio 1. Si lancia ripetutamente un dado equo.
`D1)` Calcolare la probabilità che esca almeno una volta un numero pari nei primi 3 lanci.
`D2)` Calcolare la probabilità che esca per la prima volta il numero 5 ad un lancio dispari.
`D3)` Calcolare la probabilità che nei primi due lanci escano due numeri minori o uguali a 3 sapendo che in tali lanci sono usciti due numeri pari.

Esercizio 2. Un'urna ha tre palline bianche. Si sceglie a caso una carta tra tre disponibili, con i numeri 2, 3 e 4 e sia X la variabile aleatoria che indica il numero sulla carta scelta. Poi si mettono X palline nere nell'urna e si estrae una pallina a caso.
`D4)` Calcolare la probabilità di estrarre una pallina bianca.

Esercizio 3. Consideriamo la seguente densità congiunta discreta:

$$p_{X_1,X_2}(k,2-k)=\binom{2}{k}\frac{1}{2^3} \quad \text{per } k\in\{0,1,2\};$$

$$p_{X_1,X_2}(h,3-h)=\binom{3}{h}\frac{1}{2^4} \quad \text{per } h\in\{0,1,2,3\}.$$

`D5)` Calcolare $P(X_1=X_2)$.
`D6)` Calcolare $P(X_1X_2=0)$.

Esercizio 4. Sia $\alpha>0$ e sia X una variabile aleatoria con densità continua $f_X(x)=\alpha x^{\alpha-1}1_{(0,1)}(x)$.
`D7)` Trovare la funzione di distribuzione della variabile aleatoria $Y=10(1-X)^2$.
`D8)` Trovare la mediana della variabile aleatoria X, cioè il valore $m\in(0,1)$ tale che $F_X(m)=\frac{1}{2}$.

Esercizio 5. Poniamo $\Phi(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$.
`D9)` Sia X una v.a. Normale standard (cioè con media 0 e varianza 1).
Dire per quale valore di $y>0$ si ha $P(-0.67<X<y|X>0)=2\Phi(1)-1$.
`D10)` Sia $\{X_n:n\geq 1\}$ una successione di v.a. i.i.d. con media 1 e varianza 9.
Dire per quale valore di $z\in\mathbb{R}$ si ha

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}-1}{1/\sqrt{n}}\geq 2\right)=\Phi(z).$$

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.

`D1)` Si fa riferimento all'evento complementare (nessun numero pari su 3 lanci di dado) e quindi la probabilità richiesta è $1-(\frac{3}{6})^3 = 1-(\frac{1}{2})^3 = 1-\frac{1}{8} = \frac{7}{8}$.

`D2)` Si fa riferimento ad una geometrica traslata di parametro $p = \frac{1}{6}$ (numero dei lanci necessari affinché esca per la prima volta il numero 5). Quindi la probabilità richiesta è (sostituisco $p = \frac{1}{6}$ alla fine)

$$\sum_{k\geq 1}(1-p)^{2k-1-1}p = p\sum_{k\geq 1}(1-p)^{2(k-1)} = p\frac{((1-p)^2)^0}{1-(1-p)^2} = \frac{p}{2p-p^2} = \frac{1}{2-p} = \frac{1}{2-1/6} = \frac{6}{11}.$$

`D3)` Viene chiesto di calcolare una probabilità condizionata $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ dove A è l'evento "escono due numeri minori o uguali a 3", e B è l'evento "escono due numeri pari". L'evento $A\cap B$ si verifica se e solo se esce la sequenza $(2,2)$ e quindi $P(A\cap B) = \frac{1}{6}\frac{1}{6} = \frac{1}{36}$; inoltre $P(B) = \frac{3}{6}\frac{3}{6} = \frac{9}{36}$ e quindi $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{1/36}{9/36} = \frac{1}{9}$.

Esercizio 2.

`D4)` Con notazioni ovvie, usando la formula delle probabilità totali si ha

$$P(B) = \sum_{k=1}^{3} P(B|X=k)P(X=k) = \frac{3}{5}\frac{1}{3} + \frac{3}{6}\frac{1}{3} + \frac{3}{7}\frac{1}{3} = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} = \frac{42+35+30}{210} = \frac{107}{210}.$$

Esercizio 3.

`D5)` Si ha $P(X_1 = X_2) = p_{X_1,X_2}(1,1) = \binom{2}{1}\frac{1}{2^3} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

`D6)` Si ha $P(X_1X_2 = 0) = p_{X_1,X_2}(0,2) + p_{X_1,X_2}(2,0) + p_{X_1,X_2}(0,3) + p_{X_1,X_2}(3,0) = \binom{2}{0}\frac{1}{2^3} + \binom{2}{2}\frac{1}{2^3} + \binom{3}{0}\frac{1}{2^4} + \binom{3}{3}\frac{1}{2^4} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{2+2+1+1}{16} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$.

Esercizio 4.

`D7)` Si ha $P(0 \leq Y \leq 10) = 1$ e quindi $F_Y(y) = 0$ per $y \leq 0$ e $F_Y(y) = 1$ per $y \geq 10$. Per $y \in (0,10)$ si ha $F_Y(y) = P(10(1-X)^2 \leq y) = P((1-X)^2 \leq y/10) = P(1-X \leq \sqrt{y/10}) = P(X \geq 1-\sqrt{y/10}) = \int_{1-\sqrt{y/10}}^{1} \alpha x^{\alpha-1}dx = [x^\alpha]_{x=1-\sqrt{y/10}}^{x=1} = 1-(1-\sqrt{y/10})^\alpha$.

`D8)` Si ha $\frac{1}{2} = F_X(m) = \int_0^m \alpha x^{\alpha-1}dx = [x^\alpha]_{x=0}^{x=m} = m^\alpha$, da cui segue $m = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/\alpha}$.

Esercizio 5.

`D9)` Si ha $P(-0.67 < X < y|X > 0) = \frac{P(\{-0.67<X<y\}\cap\{X>0\})}{P(X>0)} = \frac{P(0<X<y)}{P(X>0)}$ (nell'ultima uguaglianza teniamo conto che $y > 0$). Quindi $P(-0.67 < X < y|X > 0) = \frac{\Phi(y)-\Phi(0)}{1-\Phi(0)}$ e, ricordando che $\Phi(0) = \frac{1}{2}$, si ha $\frac{\Phi(y)-\Phi(0)}{1-\Phi(0)} = \frac{\Phi(y)-1/2}{1/2} = 2\Phi(y)-1$ (nell'ultima uguaglianza abbiamo moltiplicato numeratore e denominatore per 2). Quindi si cerca y tale che $2\Phi(y)-1 = 2\Phi(1)-1$ e, con semplici passaggi, si ottiene $y = 1$.

`D10)` Si ha $P\left(\frac{\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}-1}{1/\sqrt{n}} \geq 2\right) = P\left(\frac{\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}-1}{\sqrt{9}/\sqrt{n}} \geq \frac{2}{\sqrt{9}}\right)$ e, per il Teorema Limite Centrale, si ha

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}-1}{\sqrt{9}/\sqrt{n}} \geq \frac{2}{\sqrt{9}}\right) = 1-\Phi\left(\frac{2}{\sqrt{9}}\right) = 1-\Phi\left(\frac{2}{3}\right).$$

Quindi si cerca z tale che $1-\Phi\left(\frac{2}{3}\right) = \Phi(z)$. A questo punto, ricordando una proprietà della funzione Φ per cui si ha $\Phi\left(-\frac{2}{3}\right) = 1-\Phi\left(\frac{2}{3}\right)$, abbiamo $\Phi\left(-\frac{2}{3}\right) = \Phi(z)$ da cui segue $z = -\frac{2}{3}$.