Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità (ed insegnamenti mutuati)
Anno accademico: `2015-2016`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Simulazione 2

Esercizio 1. Si considerano lanci ripetuti di un dado equo.
`D1`) Calcolare la probabilità di ottenere almeno due numeri pari nei primi 6 lanci.
`D2`) Calcolare la probabilità di ottenere per la prima volta un numero minore o uguale a 5 ad un *lancio pari* (al secondo lancio, al quarto lancio, al sesto lancio, ecc.).

Esercizio 2. Si lancia una moneta equa. Se esce testa, si sceglie la *moneta truccata 1*, la cui probabilità di ottenere testa è $p_1 = \frac{3}{4}$; se esce per croce, si sceglie la *moneta truccata 2*, la cui probabilità di ottenere testa è $p_2 = \frac{1}{4}$. Poi si lancia ripetutamente la moneta truccata scelta e sia X la variabile aleatoria che conta il numero di lanci di moneta necessari per avere per la prima volta testa.
`D3`) Trovare la densità discreta di X.
`D4`) Calcolare la probabilità di aver scelto la *moneta truccata 1* sapendo di aver ottenuto per la prima volta testa con la moneta truccata al k-simo lancio (per $k \geq 1$ arbitrario).

Esercizio 3. Consideriamo la seguente densità congiunta: $p_{X_1,X_2}(k, k^2) = (\frac{1}{2})^{k+1}$ per $k \geq 0$ intero.
`D5`) Calcolare $P(X_2 \leq 4)$.
`D6`) Calcolare $P(X_1 = X_2)$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con densità continua $f_X(t) = |t|1_{(-1,1)}(t)$.
`D7`) Calcolare $P(\{X < -1/2\} \cup \{X > 3/4\})$.
`D8`) Trovare la densità continua di $Y = e^{|X|}$.

Esercizio 5.
`D9`) Sia $N_t = \sum_{n\geq 1} 1_{T_n \leq t}$ (per $t \geq 0$) un processo di Poisson con intensità di $\lambda = 5/7$. Calcolare $P(N_{7/5} > 2)$.
`D10`) Sia X una variabile aleatoria normale standard. Dire per quale valore di $x \leq 0$ si ha $P(0 \leq X \leq 1 | x \leq X \leq 1) = \frac{1}{2}$.

Esercizio 6. Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. (indipendenti e identicamente distribuite) con densità $f(t) = 3t^{-4}1_{(1,\infty)}(t)$.
`D11`) Dire per quale valore di m si ha

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - m\right| > \varepsilon\right) = 0 \text{ per ogni } \varepsilon > 0.$$

`D12`) Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - (3/2)\cdot n}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{n}} > -1\right).$$

Esercizio 7 (*solo per Lauree Magistrali*). Consideriamo una catena di Markov omogenea $\{X_n : n \geq 0\}$ con spazio degli stati $E = \{1, 2, 3\}$ e matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 9/10 & 1/10 & 0 \\ 0 & 9/10 & 1/10 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

`D13`) Motivare la possibilità di applicare il Teorema di Markov e, con l'approssimazione fornita da tale teorema, calcolare $P(X_{1000} = 3)$.
`D14`) Calcolare $P(X_2 = 3)$ nel caso in cui $(P(X_0 = 1), P(X_0 = 2), P(X_0 = 3) = (0, 1/10, 9/10)$.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
`D1`) Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di volte che esce un numero un numero pari nei primi 6 lanci. Allora la probabilità richiesta è $P(X \geq 2) = \sum_{k=2}^{6} \binom{6}{k} (\frac{1}{2})^6 = \frac{15+20+15+6+1}{64} = \frac{57}{64}$.
`D2`) Sia Y la variabile aleatoria che indica a quale lancio si ottiene per la prima volta un numero minore o uguale a 5. Allora la probabilità richiesta è $P(\cup_{k\geq 1}\{X = 2k\}) = \sum_{k\geq 1} P(X = 2k) = \sum_{k\geq 1}(1 - \frac{5}{6})^{2k-1} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{6} \cdot 6 \cdot \sum_{k\geq 1}(\frac{1}{36})^k = 5 \cdot \frac{1/36}{1-1/36} = 5 \cdot \frac{1}{35} = \frac{1}{7}$.

Esercizio 2. Per $k \in \{1, 2\}$ indichiamo l'evento "scelta la moneta truccata k" con E_k.
`D3`) Per la formula delle probabilità totali si ha $p_X(k) = P(X = k|E_1)P(E_1) + P(X = k|E_2)P(E_2) = (1 - \frac{3}{4})^{k-1} \cdot \frac{3}{4}\frac{1}{2} + (1 - \frac{1}{4})^{k-1} \cdot \frac{1}{4}\frac{1}{2} = (\frac{1}{4})^{k-1} \cdot \frac{3}{8} + (\frac{3}{4})^{k-1} \cdot \frac{1}{8}$ per $k \geq 1$ intero.
`D4`) Per la formula di Bayes, e tenendo conto delle espressioni di $P(X = k)$ calcolate prima, si ha $P(E_1|X = k) = \frac{P(X=k|E_1)P(E_1)}{P(X=k)} = \frac{(\frac{1}{4})^{k-1}\cdot\frac{3}{8}}{(\frac{1}{4})^{k-1}\cdot\frac{3}{8}+(\frac{3}{4})^{k-1}\cdot\frac{1}{8}}$ per $k \geq 1$ intero.

Esercizio 3.
`D5`) Si ha $P(X_2 \leq 4) = p_{X_1,X_2}(0, 0) + p_{X_1,X_2}(1, 1) + p_{X_1,X_2}(2, 4) = \sum_{k=0}^{2}(\frac{1}{2})^{k+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{4+2+1}{8} = \frac{7}{8}$.
`D6`) Si ha $P(X_1 = X_2) = p_{X_1,X_2}(0, 0) + p_{X_1,X_2}(1, 1) = (\frac{1}{2})^{0+1} + (\frac{1}{2})^{1+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2+1}{4} = \frac{3}{4}$.

Esercizio 4.
`D7`) Si ha $P(\{X < -1/2\} \cup \{X > 3/4\}) = P(X < -1/2) + P(X > 3/4) = \int_{-1}^{-1/2} |t|dt + \int_{3/4}^{1} |t|dt = -\int_{-1}^{-1/2} tdt+\int_{3/4}^{1} tdt = -[t^2/2]_{t=-1}^{t=-1/2}+[t^2/2]_{t=3/4}^{t=1} = -(\frac{1}{8}-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{9}{32}) = -\frac{1}{8}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{9}{32} = \frac{-4+16+16-9}{32} = \frac{19}{32}$.
`D8`) Si vede che $P(1 \leq e^{|X|} \leq e) = 1$, da cui $F_Y(y) = 0$ per $y \leq 1$ e $F_Y(y) = 1$ per $y \geq e$. Per $y \in (1, e)$ si ha $F_Y(y) = P(e^{|X|} \leq y) = P(|X| \leq \log y) = \int_{-\log y}^{\log y} |t|dt$ e, per simmetria dell'integrando e dell'intervallo di integrazione, si ha $F_Y(y) = 2\int_0^{\log y} |t|dt = 2\int_0^{\log y} tdt = 2[t^2/2]_{t=0}^{\log y} = (\log y)^2$. In conclusione la densità continua di Y è $f_Y(y) = 2\frac{\log y}{y}1_{(1,e)}(y)$.

Esercizio 5.
`D9`) Si ha $P(N_{7/5} > 2) = 1-P(N_{7/5} \leq 2) = 1-\sum_{k=0}^{2} \frac{((5/7)\cdot(7/5))^k}{k!} e^{-(5/7)\cdot(7/5)} = 1-(1+1+\frac{1}{2})e^{-1} = 1-\frac{5}{2}e^{-1}$.
`D10`) Essendo $x \leq 0$, si ha $P(0 \leq X \leq 1|x \leq X \leq 1) = \frac{P(\{0\leq X\leq 1\}\cap\{x\leq X\leq 1\})}{P(x\leq X\leq 1)} = \frac{P(0\leq X\leq 1)}{P(x\leq X\leq 1)} = \frac{\Phi(1)-\Phi(0)}{\Phi(1)-\Phi(x)} = \frac{\Phi(1)-0.5}{\Phi(1)-\Phi(x)}$. Quindi si ha $\frac{\Phi(1)-0.5}{\Phi(1)-\Phi(x)} = \frac{1}{2}$, $2(\Phi(1)-0.5) = \Phi(1)-\Phi(x)$, $2\Phi(1)-1 = \Phi(1)-\Phi(x)$, $\Phi(x) = 1-\Phi(1)$, $\Phi(x) = \Phi(-1)$, da cui segue $x = -1$ perché Φ è invertibile (essendo strettamente crescente).

Esercizio 6.
`D11`) Per la legge dei grandi numeri si ha $m = \int_1^\infty t3t^{-4}dt = 3\int_1^\infty t^{-3}dt = 3\left[\frac{t^{-2}}{-2}\right]_{t=1}^{t=\infty} = \frac{3}{2}$.
`D12`) Iniziamo osservando che, con riferimento al valore m calcolato prima, la varianza delle variabili aleatorie $\{X_n : n \geq 1\}$ è $\sigma^2 = \int_1^\infty t^2 3t^{-4}dt - m^2 = 3\int_1^\infty t^{-2}dt - (\frac{3}{2})^2 = 3\left[\frac{t^{-1}}{-1}\right]_{t=1}^{t=\infty} - \frac{9}{4} = 3 - \frac{9}{4} = \frac{12-9}{4} = \frac{3}{4}$. Quindi, per il teorema limite centrale, si ha $\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1+\cdots+X_n-(3/2)\cdot n}{(\sqrt{3}/2)\cdot\sqrt{n}} \leq x\right) = \Phi(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Allora $P\left(\frac{X_1+\cdots+X_n-(3/2)\cdot n}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{n}} > -1\right) = P\left(\frac{X_1+\cdots+X_n-(3/2)\cdot n}{(\sqrt{3}/2)\cdot\sqrt{n}} > -2\right)$, e quindi

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - (3/2) \cdot n}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{n}} > -1\right) = 1 - \Phi(-2) = \Phi(2) = 0.97725.$$

Esercizio 7.
`D13`) Possiamo applicare il Teorema di Markov perché la catena è regolare; infatti la catena è irriducibile ed esiste un elemento positivo della diagonale principale della matrice di transizione (questo è sufficiente per la regolarità). Allora esiste un'unica distribuzione stazionaria (π_1, π_2, π_3) e, applicando tale teorema, possiamo dire che

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = j) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{3} P(X_n = j|X_0 = i)P(X_0 = i) = \pi_j \sum_{i=1}^{3} P(X_0 = i) = \pi_j \text{ (per ogni } j \in \{1, 2, 3\})$$

qualsiasi sia la distribuzione iniziale. Nel caso specifico si ha il seguente sistema:

$$\begin{cases} \frac{9}{10}\pi_1 + \pi_3 = \pi_1 \\ \frac{1}{10}\pi_1 + \frac{9}{10}\pi_2 = \pi_2 \\ \frac{1}{10}\pi_2 = \pi_3 \end{cases}$$

La seconda equazione fornisce la condizione $\pi_1 = \pi_2$. Allora, combinando questa condizione con quella che si ottiene dalla terza, e tenendo conto che $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$, si ottiene la distribuzione stazionaria $(10/21, 10/21, 1/21)$. In conclusione, facendo riferimento alla approssimazione fornita dal Teorema di Markov, si ha $P(X_{1000} = 3) = \pi_3 = \frac{1}{21}$.

`D14`) È noto che

$$(P(X_2 = 1), P(X_2 = 2), P(X_2 = 3)) = (0, 1/10, 9/10) \cdot P^2$$

dove, con alcuni calcoli, si ha

$$P^2 = \begin{pmatrix} 81/100 & 18/100 & 1/100 \\ 1/10 & 81/100 & 9/100 \\ 9/10 & 1/10 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi la probabilità richiesta è $P(X_2 = 3) = 0 \cdot \frac{1}{100} + \frac{1}{10} \cdot \frac{9}{100} + \frac{9}{10} \cdot 0 = \frac{9}{1000}$.

Commenti.

La somma dei valori di ciascuna densità discreta che appare è 1 in accordo con la teoria.

`D1`) In altro modo $P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) = 1 - \frac{1+6}{64} = \frac{57}{64}$.

`D4`) Per $k = 2$ si ha $P(E_1|X = 2) = \frac{3/32}{3/32+3/32} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; allora $P(E_1|X = 2) = P(E_1)$, e quindi E_1 e $\{X = 2\}$ sono eventi indipendenti.

`D4`) Si ha

$$\lim_{k\to\infty} P(E_1|X = k) = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{3}{8}}{\frac{3}{8} + 3^{k-1} \cdot \frac{1}{8}} = 0$$

e, di conseguenza, $\lim_{k\to\infty} P(E_2|X = k) = 1$. Quindi, al tendere del numero di lanci k (necessari per avere per la prima volta testa) ad infinito, le probabilità $P(E_1|X = k)$ e $P(E_2|X = k)$ tendono alla situazione in cui è certo di aver scelto la *moneta truccata 2*, cioè quella con probabilità di ottenere testa in ogni lancio più piccola.

`D7`) In altro modo si ha $P(\{X < -1/2\} \cup \{X > 3/4\}) = 1 - P(-1/2 \leq X \leq 3/4) = 1 - \int_{-1/2}^{3/4} |t|dt = 1 - \left(-\int_{-1/2}^{0} tdt + \int_0^{3/4} tdt\right) = 1 + [t^2/2]_{t=-1/2}^{t=0} - [t^2/2]_{t=0}^{t=3/4} = 1 + (0 - \frac{1}{8}) - (\frac{9}{32} - 0) = \frac{32-4-9}{32} = \frac{19}{32}$.

`D10`) L'esercizio poteva essere formulato in maniera più generale con: X normale di media 0 e varianza σ^2; considerando la condizione

$$P(0 \leq X \leq a|x \leq X \leq 1) = \frac{1}{2}$$

per $a > 0$. Nell'esercizio si ha semplicemente $\sigma^2 = 1$ e $a = 1$. In corrispondenza i calcoli si ripetono con opportune modifiche e si ottiene la soluzione $x = -a$.

`D14`) In generale, se avessimo avuto $(P(X_0 = 1), P(X_0 = 2), P(X_0 = 3) = (0, \alpha, 1 - \alpha)$ per $\alpha \in [0, 1]$, la probabilità richiesta sarebbe stata $\frac{9}{100}\alpha$. Quindi la probabilità richiesta sarebbe stata arbitrariamente piccola, e quindi "lontana da 1/21", per α arbitrariamente vicino a zero. Inoltre la probabilità richiesta sarebbe stata uguale a zero per $\alpha = 0$; infatti, se $\alpha = 0$, la catena parte dallo stato 3 e non può tornare in 3 con 2 passi.