Lezione 3/28/2023

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 3x_4 = -9 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & -4 & -3 & -9 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{e_{12}(-2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 6 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -4 & -3 & -9 \end{array}\right) \xrightarrow{e_{13}(-3)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -6 & -18 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{e_{23}(-\frac{1}{3})} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -18 \end{array}\right) = \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 3 \Rightarrow \\ -3x_2 + 6x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = 2x_3 \\ -6x_4 = -18 \Rightarrow x_4 = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1 + \cancel{2x_3} - \cancel{2x_3} + 3 = 3 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$\text{Sol generale} = \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2t \\ x_3 = t \\ x_4 = 3 \end{cases}$$

infinite soluzioni in $\mathbb{R}$ dipendenti da $t \in \mathbb{R}$

Vettori numerici

K campo, $K = \mathbb{R}$ o $K = \mathbb{Q}$ o $K = \mathbb{Z}_2$

Un vettore numerico ha la forma

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \in K^n$$

Somma tra due vettori numerici, somma elemento per elemento

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{bmatrix}$$

Prodotto vettore per scalare c.

$$c \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca_1 \\ \vdots \\ ca_n \end{bmatrix}$$

Sistema lineare di matrice $$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Le colonne sono vettori di K^m

$$a^1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} \in K^m \quad j\text{-esima colonna} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \in K^m \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \in K^m$$

Riscrivo il sistema lineare con i vettori.

$$x_1 a^1 + x_2 a^2 + \dots + x_n a^n = b$$

equazione vettoriale

$$\begin{bmatrix} x_1 a_{11} \\ \vdots \\ x_1 a_{m1} \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} x_n a_{1n} \\ \vdots \\ x_n a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Soluzione in forma vettoriale

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2t \\ x_3 = t \\ x_4 = 3 \end{cases} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$ Forma vettoriale delle soluzioni

PROPRIETÀ DELLA SOMMA DI VETTORI NUMERICI

1) Commutativa, $\forall\, v \in K^m,\ w \in K^m$

$$v + w = w + v$$

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix}, \quad v + w = \begin{bmatrix} v_1 + w_1 \\ \vdots \\ v_m + w_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 + v_1 \\ \vdots \\ w_m + v_m \end{bmatrix} = w + v$$

2) Associativa, $\forall u, v, w \in K^n$

$$(u+v)+w = u+(v+w)$$

3) Vettore zero, $0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in K^n$

- Elemento neutro per la somma, $\forall u \in K^n$, $u+0=u$

4) Elemento opposto $\forall v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \in K^n$, $\exists -v = \begin{bmatrix} -v_1 \\ \vdots \\ -v_n \end{bmatrix} \in K^n$

$\forall v \in K^n$, $v+(-v) = 0$

Proprietà del prodotto tra scalare e vettore

1) Associativa, $\forall a, b \in K$, $\forall v \in K^n$

$$(ab) \cdot v = (bv) \cdot a$$

2) Distributività per somma di numeri

$\forall a, b \in K$, $\forall v \in K^n$

$$(a+b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v$$

3) Distributività per somma di vettori

$\forall a \in K$, $\forall v, w \in K^n$

$$(v+w) \cdot a = v \cdot a + w \cdot a$$

8) Elemento neutro del prodotto

$\forall v \in K^n, \; 1 \cdot v = v$

Esempio

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - z = -1 \end{cases} = x\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

equazione cartesiana di una retta nello spazio.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{e_{12}(-\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{e_2(2)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1 \\ -x_2 - 2x_3 = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} 2x_1 = 1 - x_2 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} + x_3 = -1 + x_3 \\ x_2 = 3 - 2x_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x_1 = 1 + x_3 \\ x_2 = 3 - 2x_3 \end{array} \quad x_3 = t \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x_1 = -1 + t \\ x_2 = 3 - 2t \\ x_3 = t \end{array}$$

$$X = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

equazione parametrica nello spazio

Esempio

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

2 eq in 4 incognite

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{e_{12}(-1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_2 + x_4 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = -x_3 \\ x_2 = -1 - x_4 \end{array} \qquad x_3 = t,\ x_4 = s$$

var. libere

$$X = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Piano in 4 equazioni

COMBINAZIONE LINEARE DI VETTORI NUMERICI CON COEFFICIENTI DATI

$v, w \in k^n, \quad a, b \in k$

$a \cdot v + b \cdot w$

Comb. lineare di vettori

$v_1, \ldots, v_n \in k^m$ con coef. costanti $a_1, \ldots a_n \in k$

è $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n \in k^m$

Sist. LINEARE

$x_1 a^1 + \ldots + x_n a^n = b$ eq. vettoriale

Soluzioni <-> coefficienti della combinazione lineare delle colonne che è uguale al termine noto.

$$\begin{array}{cc} x & y \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{array}\right) \qquad x \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\xrightarrow{e_{12}(-2)}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $0 = -2$, incompatibile.

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ non può essere combinazione lineare di $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$