

Algoritmi e Strutture Dati

Luciano Gualà

guala@mat.uniroma2.it

www.mat.uniroma2.it/~guala

Esercizio

Analizzare la complessità nel caso medio del primo algoritmo di pesatura (**Alg1**) presentato nella prima lezione. Rispetto alla distribuzione di probabilità sulle istanze, si assuma che la moneta falsa possa trovarsi in modo equiprobabile in una qualsiasi delle n posizioni.

Alg1 ($X=\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$)

1. **for** $i=2$ **to** n **do**
2. **if** $\text{peso}(x_1) > \text{peso}(x_i)$ **then return** x_1
3. **if** $\text{peso}(x_1) < \text{peso}(x_i)$ **then return** x_i

$$\sum_{\substack{\mathbf{I} \text{ di dim } n}} \Pr(\mathbf{I}) \# \text{pesate}(\mathbf{I}) =$$

$$\sum_{j=1}^n \underbrace{\Pr(\text{"moneta falsa è in posizione } j \text{ in } \mathbf{I})}_{1/n} \underbrace{\# \text{pesate}(\mathbf{I})}_{\substack{1 \text{ se } j=1, \\ j-1 \text{ altrimenti}}} = (1/n)(1 + \sum_{j=2}^n (j-1))$$

$$= (1/n)(1 + \sum_{j=1}^{n-1} j) = (1/n)(1 + (n-1)n/2) = 1/n + (n-1)/2$$

Un problema simile: ricerca di un elemento in un array/lista non ordinata

l'algoritmo torna la posizione di x in L se x è presente, -1 altrimenti

algoritmo RicercaSequenziale(array L , elem x) \rightarrow intero

1. $n =$ lunghezza di L
2. $i=1$
3. **for** $i=1$ to n **do**
4. **if** ($L[i]=x$) **then return** i *//trovato*
5. **return** -1 *//non trovato*

$T(n)$: #elementi acceduti (linea 4) su un array di dimensione n

$$T_{\text{worst}}(n) = n$$

$x \notin L$ oppure è in ultima posizione

$$T_{\text{avg}}(n) = (n+1)/2$$

assumendo che $x \in L$ e che si trovi con la stessa probabilità in una qualsiasi posizione

Un problema simile: ricerca di un elemento in un array/lista non ordinata

l'algoritmo torna la posizione di x in L se x è presente, -1 altrimenti

algoritmo RicercaSequenziale(array L , elem x) \rightarrow intero

1. $n =$ lunghezza di L
2. $i=1$
3. **for** $i=1$ to n **do**
4. **if** ($L[i]=x$) **then return** i *//trovato*
5. **return** -1 *//non trovato*

$T(n)$: #operazioni RAM su un array di dimensione n

$$T_{\text{worst}}(n) = \Theta(n)$$

$x \notin L$ oppure è in ultima posizione

$$T_{\text{avg}}(n) = \Theta(n)$$

assumendo che $x \in L$ e che si trovi
con la stessa probabilità in una
qualsiasi posizione

Una variante: ricerca di un elemento in un array ordinato

Algoritmo di **ricerca binaria**: uno strumento molto potente

gli indici **i** e **j** indicano la porzione di **L** in cui cercare l'elemento **x**

l'algoritmo torna la posizione di **x** in **L**, se **x** c'è, -1 altrimenti

algoritmo RicercaBinariaRic(array *L*, elem *x*, int *i*, int *j*) --> intero

1. **if** (*i*>*j*) **then return** -1
2. $m = \lfloor (i+j)/2 \rfloor$
3. **if** (*L*[*m*]=*x*) **then return** *m*
4. **if** (*L*[*m*]>*x*) **then return** RicercaBinariaRic(*L*, *x*, *i*, *m*-1)
5. **else return** RicercaBinariaRic(*L*, *x*, *m*+1, *j*)

$$T(n) = T(n/2) + O(1) \quad \longrightarrow \quad T(n) = O(\log n)$$

Esempi su un array di 9 elementi

0	1	2	4	5	6	7	8	9
0	1	2	4					
		2	4					

Cerca 2

0	1	2	4	5	6	7	8	9
0	1	2	4					

Cerca 1

0	1	2	4	5	6	7	8	9
					6	7	8	9
							8	9
								9

Cerca 9

0	1	2	4	5	6	7	8	9
0	1	2	4					
		2	4					
			4					

Cerca 3

$3 < 4$ quindi i e j si
invertono

ricorsione,tecniche di
progettazione e equazioni di
ricorrenza

Sommario

- Algoritmi ricorsivi: come analizzarli?
- Complessità di algoritmi ricorsivi e equazioni di ricorrenza
- Una tecnica di progettazione algoritmica: divide et impera
- Metodi per risolvere equazioni di ricorrenza:
 - iterazione
 - albero della ricorsione
 - sostituzione
 - teorema Master
 - cambiamento di variabile

Algoritmi ricorsivi: come analizzarli?

```
algoritmo fibonacci2(intero n)  $\rightarrow$  intero  
  if ( $n \leq 2$ ) then return 1  
  else return fibonacci2( $n-1$ ) + fibonacci2( $n-2$ )
```

$$T(n) = T(n-1) + T(n-2) + O(1)$$

Algoritmi ricorsivi: come analizzarli?

Algoritmo di **ricerca binaria**: uno strumento molto potente

gli indici **i** e **j** indicano la porzione di **L** in cui cercare l'elemento **x**

l'algoritmo torna la posizione di **x** in **L**, se **x** c'è, -1 altrimenti

algoritmo RicercaBinariaRic(array *L*, elem *x*, int *i*, int *j*) -> intero

1. **if** (*i*>*j*) **then return** -1

2. *m* = $\lfloor (i+j)/2 \rfloor$

3. **if** (*L*[*m*]=*x*) **then return** *m*

4. **if** (*L*[*m*]>*x*) **then return** RicercaBinariaRic(*L*, *x*, *i*, *m*-1)

5. **else return** RicercaBinariaRic(*L*, *x*, *m*+1,*j*)

$$T(n) = T(n/2) + O(1)$$

Algoritmi ricorsivi: come analizzarli?

Alg4 (X)

1. **if** ($|X|=1$) **then** return unica moneta in X
2. dividi X in tre gruppi X_1, X_2, X_3 di dimensione bilanciata
siano X_1 e X_2 i gruppi che hanno la stessa dimensione (ci sono sempre)
3. **if** $\text{peso}(X_1) = \text{peso}(X_2)$ **then return** Alg4(X_3)
4. **if** $\text{peso}(X_1) > \text{peso}(X_2)$ **then return** Alg4(X_1)
else return Alg4(X_2)

$$T(n) = T(n/3) + O(1)$$

Equazioni di ricorrenza

la **complessità computazionale** di un algoritmo
ricorsivo può essere espressa in modo naturale
attraverso una **equazione di ricorrenza**

esempi:

$$T(n) = T(n/3) + 2T(n/4) + O(n \log n)$$

$$T(n) = T(n-1) + O(1)$$

$$T(n) = T(n/3) + T(2n/3) + n$$

casi base:

$$T(\text{costante}) = \text{cost}$$

(a volte $T(1) = 1$)

Metodo dell'iterazione

Idea: "srotolare" la ricorsione, ottenendo una sommatoria dipendente solo dalla dimensione n del problema iniziale

Esempio: $T(n) = c + T(n/2)$

$$T(n/2) = c + T(n/4) \quad \dots$$

➡

$$\begin{aligned} T(n) &= c + T(n/2) \\ &= 2c + T(n/4) \\ &= 2c + c + T(n/8) \\ &= 3c + T(n/8) \\ &\dots \\ &= ic + T(n/2^i) \end{aligned}$$

Per $i = \log_2 n$: $T(n) = c \log_2 n + T(1) = \Theta(\log n)$

Metodo dell'iterazione

Esempio: $T(n) = T(n-1) + 1$

$$\begin{aligned}T(n) &= T(n-1) + 1 \\&= T(n-2) + 1 + 1 \\&= T(n-2) + 2 \\&= T(n-3) + 1 + 2 \\&= T(n-3) + 3 \\&= T(n-4) + 4 \\&\dots \\&= T(n-i) + i\end{aligned}$$

Per $i=n-1$: $T(n) = T(1) + n-1 = \Theta(n)$

Metodo dell'iterazione

Esempio: $T(n) = 2T(n-1)+1$

$$T(n) = 2T(n-1) + 1$$

$$= 2(2T(n-2)+1) + 1$$

$$= 4T(n-2)+2+1$$

$$= 4(2T(n-3)+1)+2+1$$

$$= 8T(n-3)+4+2+1$$

$$= 16T(n-4)+8+4+2+1$$

...

$$= 2^i T(n-i) + \sum_{j=0}^{i-1} 2^j$$

per $i=n-1$

$$T(n) = 2^{n-1}T(1) + \sum_{j=0}^{n-2} 2^j = \Theta(2^n)$$

Metodo dell'iterazione

Esempio: $T(n) = T(n-1) + T(n-2) + 1$

$$T(n) = T(n-1) + T(n-2) + 1$$

$$= T(n-2) + T(n-3) + 1 + T(n-3) + T(n-4) + 1 + 1$$

$$= T(n-2) + 2T(n-3) + T(n-4) + 3$$

$$= T(n-3) + T(n-4) + 1 + 2(T(n-4) + T(n-5) + 1) + T(n-5) + T(n-6) + 1 + 3$$

$$= T(n-3) + 3T(n-4) + 3T(n-5) + T(n-6) + 7$$

...



Esercizi

risolvere usando il metodo dell'iterazione:

Esercizio 1: $T(n) = T(n-1) + n,$
 $T(1) = 1$

Esercizio 2: $T(n) = 9 T(n/3) + n,$
 $T(1) = 1$

(soluzione sul libro di testo: Esempio 2.4)

Analisi dell'albero della ricorsione

(un modo grafico di pensare il metodo dell'iterazione)

Idea:

- disegnare l'albero delle chiamate ricorsive indicando la dimensione di ogni nodo
- stimare il tempo speso da ogni nodo dell'albero
- stimare il tempo complessivo "sommando" il tempo speso da ogni nodo

Suggerimento 1: se il tempo speso da ogni nodo è costante, $T(n)$ è proporzionale al numero di nodi

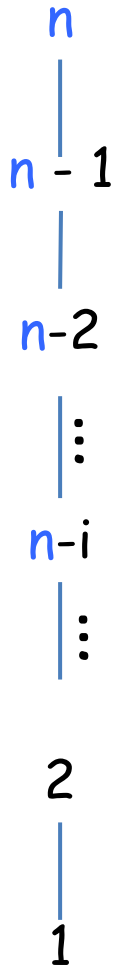
Suggerimento 2: a volte conviene analizzare l'albero per livelli:

- analizzare il tempo speso su ogni livello (fornendo upper bound)
- stimare il numero di livelli

tecnica albero della ricorsione

$$T(n) = T(n-1) + 1$$

$$T(1) = 1$$



quanto costa ogni nodo? ...uno!
quanti nodi ha l'albero? n

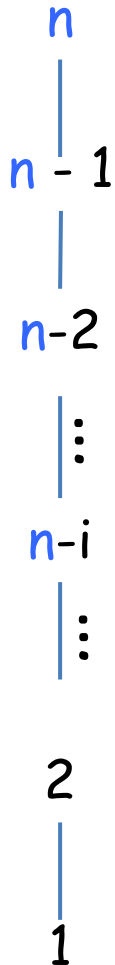


$$T(n) = \Theta(n)$$

tecnica albero della ricorsione

$$T(n) = T(n-1) + n$$

$$T(1) = 1$$



quanto costa ogni nodo? al più n
quanti nodi ha l'albero? n



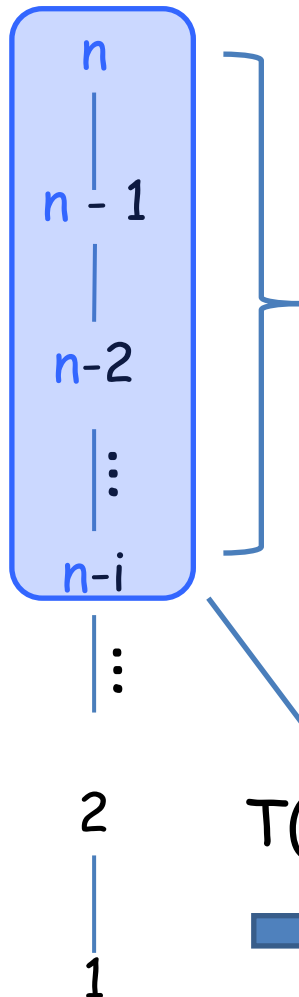
$$T(n) = O(n^2)$$

vale $T(n) = \Theta(n^2)$?

tecnica albero della ricorsione

$$T(n) = T(n-1) + n$$

$$T(1) = 1$$



$n/2$ nodi
ognuno dei
quali costa
 $\geq n/2$

quanto costa ogni nodo?
quanti nodi ha l'albero?

al più n
 n



$$T(n) = O(n^2)$$

vale $T(n) = \Theta(n^2)$?

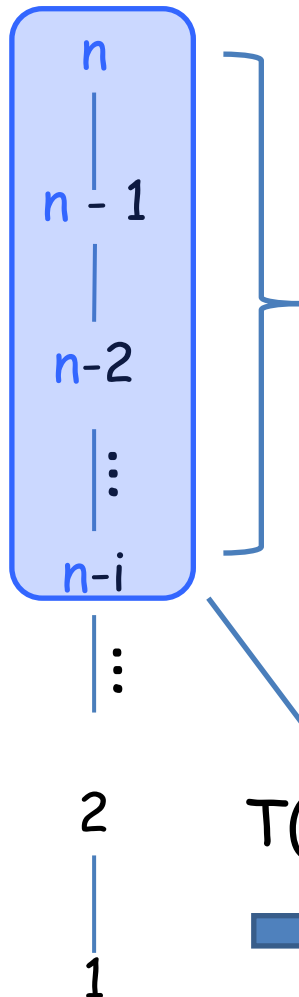
$$T(n) \geq n/2 \cdot n/2 = n^2/4$$

$$T(n) = \Omega(n^2)$$

tecnica albero della ricorsione

$$T(n) = T(n-1) + n$$

$$T(1) = 1$$



$n/2$ nodi
ognuno dei
quali costa
 $\geq n/2$

quanto costa ogni nodo?
quanti nodi ha l'albero?

al più n
 n



$$T(n) = O(n^2)$$

$$T(n) = \Theta(n^2)$$

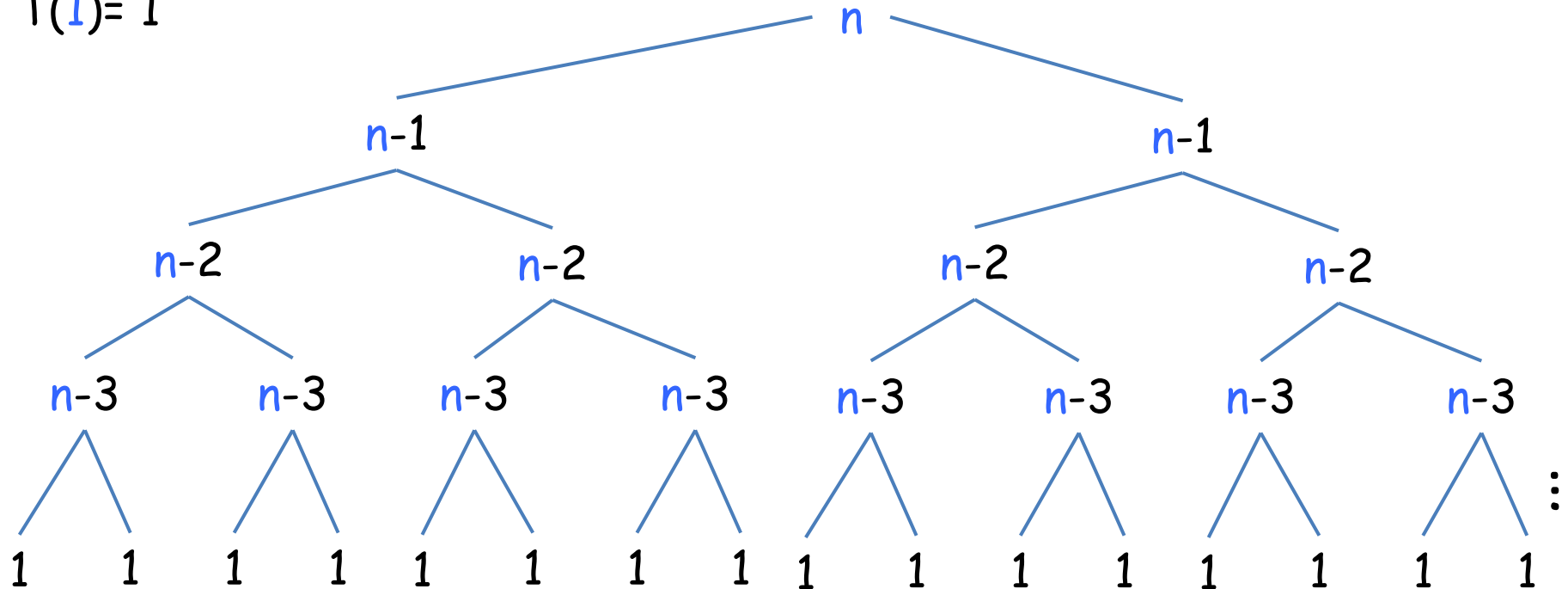
$$T(n) \geq n/2 \cdot n/2 = n^2/4$$

$$\Rightarrow T(n) = \Omega(n^2)$$

tecnica albero della ricorsione

$$T(n) = 2T(n-1) + 1$$

$$T(1) = 1$$



albero binario completo!

quanto costa ogni nodo?

...uno!

quanto è alto l'albero?

quanti nodi ha un albero
binario completo di altezza h ?

... $n-1$!

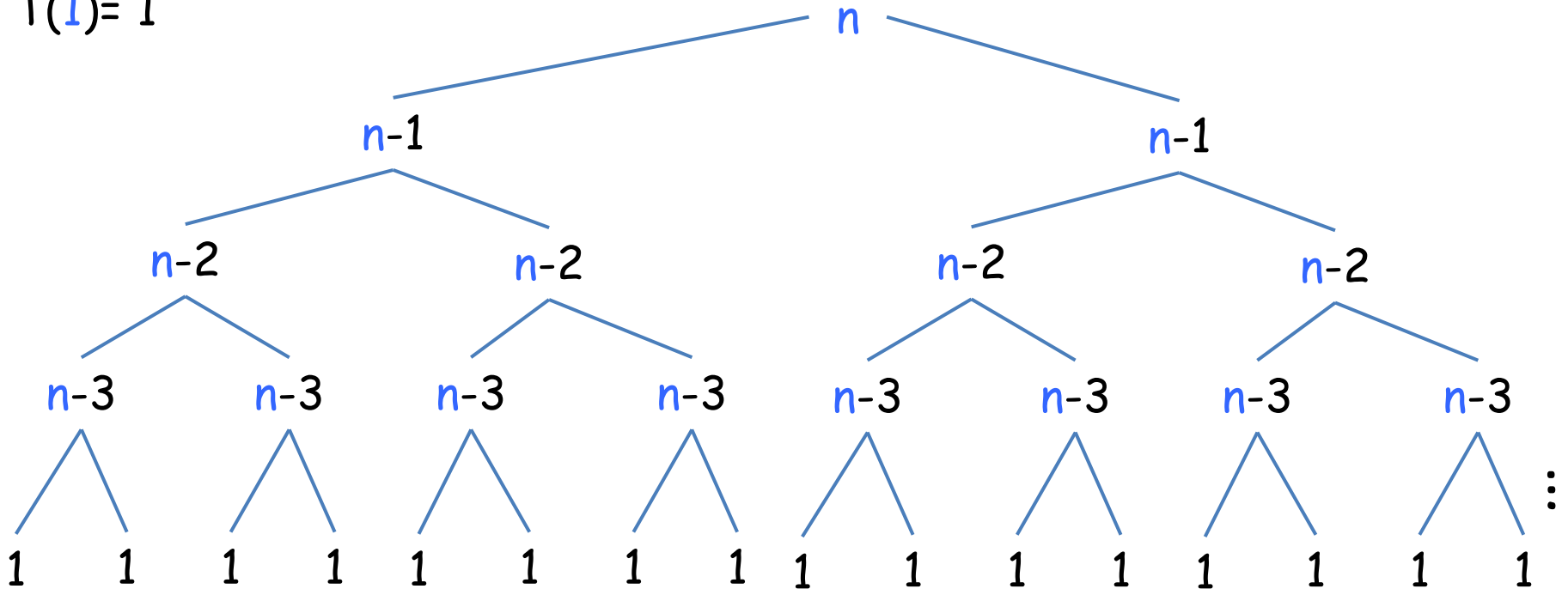
➡ $T(n) = 2^n - 1 = \Theta(2^n)$

$$\sum_{i=0}^h 2^i = 2^{h+1} - 1$$

tecnica albero della ricorsione

$$T(n) = 2T(n-1) + n$$

$$T(1) = 1$$



albero binario completo!

quanto costa ogni nodo?

...al più n

quanto è alto l'albero?

... $n-1$

quanti nodi ha un albero
binario completo di altezza h ?

$$\sum_{i=0}^h 2^i = 2^{h+1} - 1$$

$$\Rightarrow T(n) \leq n2^n = \Theta(n2^n)$$

$$T(n) = O(n2^n)$$

tecnica albero della ricorsione

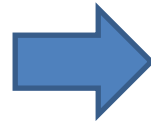
$$T(n) = T(n-1) + T(n-2) + 1$$

$$T(1) = 1$$

Un'idea: usare maggiorazioni per fornire upper bound

$$T(n) \leq R(n)$$

$$R(n) = 2R(n-1) + 1$$



$$T(n) = O(2^n)$$



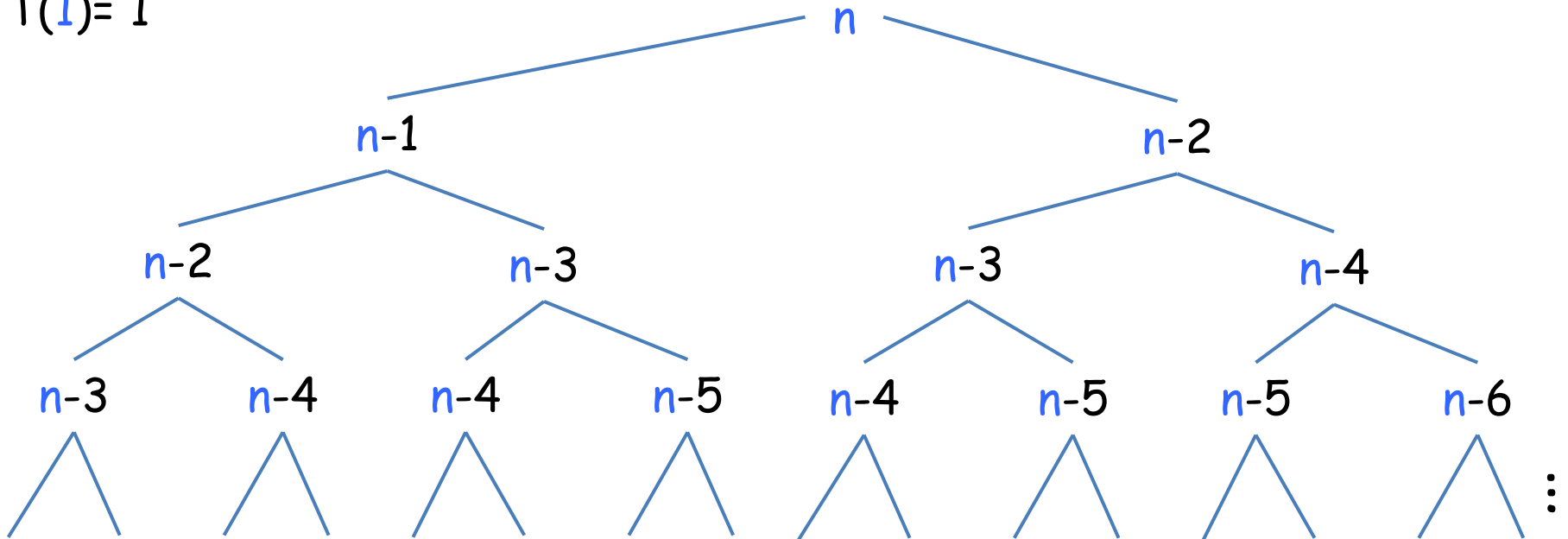
$$R(n) = \Theta(2^n)$$

vale $T(n) = \Theta(2^n)$?

tecnica albero della ricorsione

$$T(n) = T(n-1) + T(n-2) + 1$$

$$T(1) = 1$$



albero chiamate ricorsive dell'algoritmo Fibonacci2!

quanto costa ogni nodo?

...uno

quanti nodi ha l'albero?

$\Theta(\phi^n)$



$$T(n) = \Theta(\phi^n)$$
$$[T(n) = o(2^n)]$$

Analisi dell'albero della ricorsione

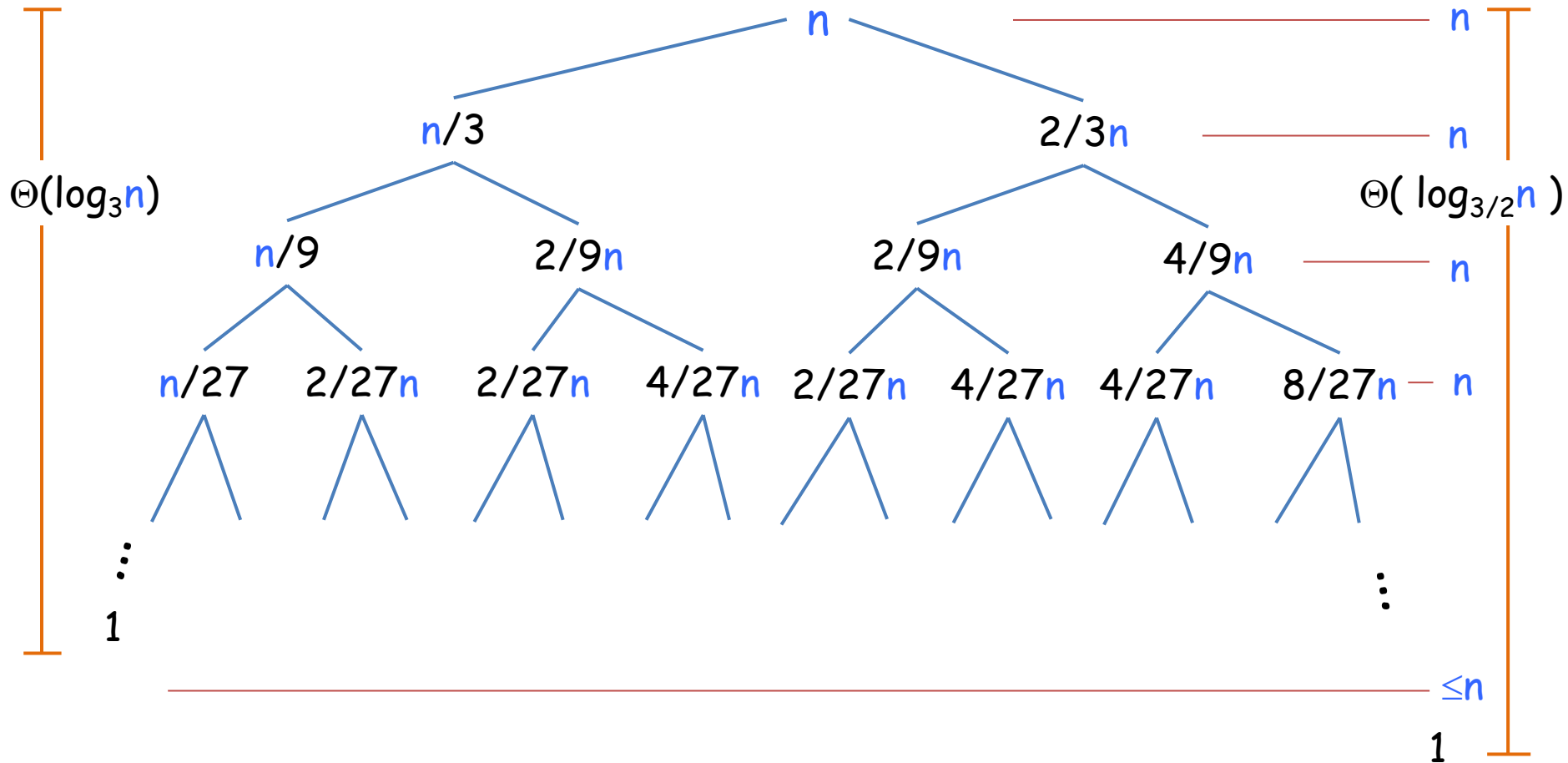
due esempi:

Esempio 1: $T(n) = T(n/3) + T(2n/3) + n,$
 $T(1) = 1$

Esempio 2: $T(n) = 2 T(n-2) + 1,$
 $T(1) = 1$

$$T(n) = T(n/3) + T(2/3 n) + n$$

$$T(1) = 1$$



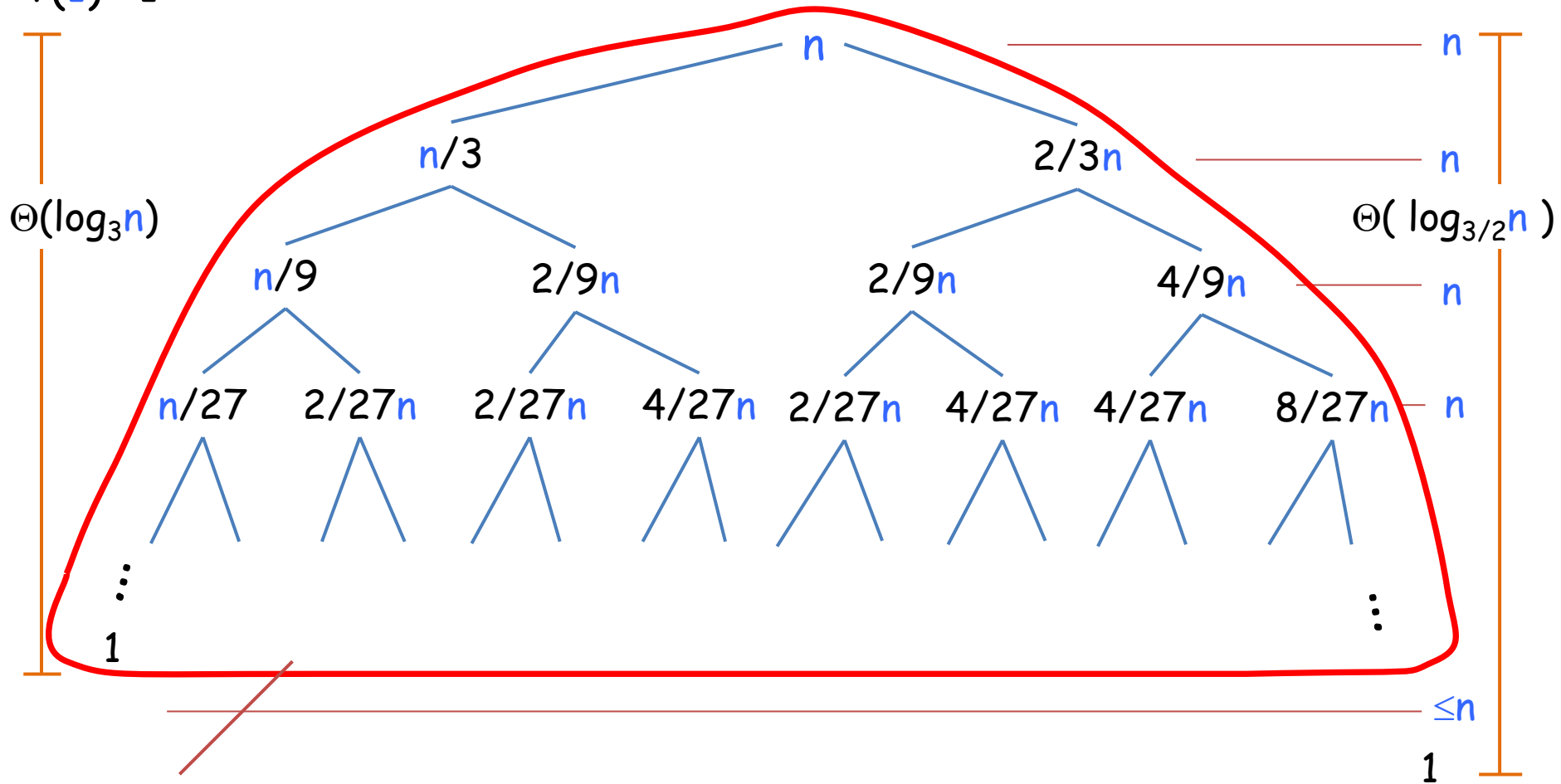
quanto costa ogni livello? $\leq n$

quanti livelli ha l'albero? $O(\log_{3/2} n)$

$\Rightarrow T(n) = O(n \log n)$
 vale $T(n) = \Theta(n \log n)$?

$$T(n) = T(n/3) + T(2/3 n) + n$$

$$T(1) = 1$$



$$T(n) \geq n \log_3 n$$

$$\Rightarrow T(n) = \Omega(n \log n)$$



$$T(n) = \Theta(n \log n)$$

Sommario

- Algoritmi ricorsivi: come analizzarli?
- Complessità di algoritmi ricorsivi e equazioni di ricorrenza
- Una tecnica di progettazione algoritmica: divide et impera
- Metodi per risolvere equazioni di ricorrenza:
 - iterazione
 - albero della ricorsione
 - sostituzione
 - teorema Master
 - cambiamento di variabile

Metodo della sostituzione

Idea:

1. indovinare la (forma della) soluzione
2. usare induzione matematica per provare che la soluzione è quella intuita
3. risolvi rispetto alle costanti

Metodo della sostituzione

Esempio: $T(n) = n + T(n/2)$, $T(1)=1$

Proviamo a dimostrare che la soluzione sia $T(n) \leq cn$ per una costante c opportuna

Passo base: $T(1)=1 \leq c \cdot 1$ per ogni $c \geq 1$

Passo induttivo:

assumiamo $T(k) \leq ck$ per ogni $k < n$

$$T(n) = n + T(n/2) \leq n + c(n/2) = (c/2 + 1)n$$

Quindi: quando $T(n) \leq cn$?

devo avere: $c/2 + 1 \leq c$

da cui segue: $c \geq 2$

$$T(n) \leq 2n \quad \longrightarrow \quad T(n) = O(n)$$

Esercizi

risolvere usando il metodo della sostituzione:

Esercizio: $T(n) = 4T(n/2) + n,$
 $T(1) = 1$

(...e fare esperienza della tecnicità del metodo.)

$$T(n) = 4T(n/2) + n,$$

$$T(1) = 1$$

ipotizzo: $T(n) = O(n^3)$

proviamo a dimostrare che: $T(n) \leq c n^3$

assumiamo: $T(k) \leq c k^3$ per ogni $k < n$

$$\begin{aligned}
 T(n) &= 4T(n/2) + n \\
 &\leq 4c (n/2)^3 + n \\
 &= \frac{1}{2}c n^3 + n \\
 &= \underbrace{c n^3}_{\text{goal}} - \underbrace{\left(\frac{1}{2}c n^3 - n \right)}_{\text{residuo}} \\
 &\leq c n^3
 \end{aligned}$$

caso base:

$$T(1) = 1 \leq c$$

per esempio: $c \geq 1$

$$\text{se } \frac{1}{2}c n^3 - n \geq 0$$

per esempio: $c \geq 2$



$$T(n) \leq 2n^3$$

$$T(n) = O(n^3)$$

$$T(n) = 4T(n/2) + n,$$
$$T(1) = 1$$

ipotizzo: $T(n) = O(n^2)$

proviamo a dimostrare che: $T(n) \leq c n^2$

assumiamo: $T(k) \leq c k^2$ per ogni $k < n$

$$\begin{aligned} T(n) &= 4T(n/2) + n \\ &\leq 4c (n/2)^2 + n \\ &= c n^2 + n \\ &\not\leq c n^2 \end{aligned}$$



$$T(n) = 4T(n/2) + n,$$

$$T(1) = 1$$

ipotizzo: $T(n) = O(n^2)$

proviamo a dimostrare che: $T(n) \leq c_1 n^2 - c_2 n$

assumiamo: $T(k) \leq c_1 k^2 - c_2 k$ per ogni $k < n$

$$\begin{aligned}
 T(n) &= 4T(n/2) + n \\
 &\leq 4(c_1(n/2)^2 - c_2(n/2)) + n \\
 &= c_1 n^2 - 2c_2 n + n \\
 &= \underbrace{c_1 n^2 - c_2 n}_{\text{goal}} - \underbrace{(c_2 n - n)}_{\text{residuo}} \\
 &\leq c_1 n^2 - c_2 n
 \end{aligned}$$

caso base:

$$T(1) = 1 \leq c_1 - c_2$$

per esempio: $c_1 = 2$ $c_2 = 1$

se $c_2 n - n \geq 0$

per esempio: $c_2 \geq 1$



$$T(n) \leq 2n^2 - n$$

$$T(n) = O(n^2)$$

Tecnica del divide et impera

Algoritmi basati sulla tecnica del *divide et impera*:

- dividi il problema (di dimensione n) in a sottoproblemi di dimensione n/b
- risolvi i sottoproblemi ricorsivamente
- ricombina le soluzioni

Sia $f(n)$ il tempo per dividere e ricombinare istanze di dimensione n . La relazione di ricorrenza è data da:

$$T(n) = \begin{cases} a T(n/b) + f(n) & \text{se } n > 1 \\ \Theta(1) & \text{se } n = 1 \end{cases}$$

Algoritmo Fibonacci6

algoritmo fibonacci6(*intero* n) \rightarrow *intero*

1. $A \leftarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
2. $M \leftarrow \text{potenzaDiMatrice}(A, n - 1)$
3. **return** $M[0][0]$

funzione potenzaDiMatrice(*matrice* A , *intero* k) \rightarrow *matrice*

4. **if** ($k \leq 1$) **then** $M \leftarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
5. **else** $M \leftarrow \text{potenzaDiMatrice}(A, \lfloor k/2 \rfloor)$
6. $M \leftarrow M \cdot M$
7. **if** (k è dispari) **then** $M \leftarrow M \cdot A$
8. **return** M

$$a=1, b=2, f(n)=O(1)$$

Algoritmo ottimo di pesatura

Alg4 (X)

1. **if** ($|X|=1$) **then** return unica moneta in X
2. dividi X in tre gruppi X_1, X_2, X_3 di dimensione bilanciata
siano X_1 e X_2 i gruppi che hanno la stessa dimensione (ci sono sempre)
3. **if** $\text{peso}(X_1) = \text{peso}(X_2)$ **then return** Alg4(X_3)
4. **if** $\text{peso}(X_1) > \text{peso}(X_2)$ **then return** Alg4(X_1)
else return Alg4(X_2)

$$a=1, b=3, f(n)=O(1)$$

Teorema Master: enunciato informale

$$n^{\log_b a} \text{ vs } f(n)$$

quale va più velocemente a infinito?

Stesso ordine asintotico $\rightarrow T(n) = \Theta(f(n) \log n)$

Se una delle due è "polinomialmente" più veloce

$\rightarrow T(n)$ ha l'ordine asintotico della più veloce

Teorema Master

La relazione di ricorrenza:

$$T(n) = \begin{cases} a T(n/b) + f(n) & \text{se } n > 1 \\ \Theta(1) & \text{se } n = 1 \end{cases}$$

ha soluzione:

1. $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$ se $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$ per $\varepsilon > 0$
2. $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)$ se $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$
3. $T(n) = \Theta(f(n))$ se $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$ per $\varepsilon > 0$ e $a f(n/b) \leq c f(n)$ per $c < 1$ e n sufficientemente grande

Esempi

1) $T(n) = n + 2T(n/2)$

$a=2, b=2, f(n)=n=\Theta(n^{\log_2 2})$
(caso 2 del teorema master)

$\Rightarrow T(n) = \Theta(n \log n)$

2) $T(n) = c + 3T(n/9)$

$a=3, b=9, f(n)=c=O(n^{\log_9 3 - \varepsilon})$
(caso 1 del teorema master, es: $\varepsilon=0.1$)

$\Rightarrow T(n) = \Theta(\sqrt{n})$

3) $T(n) = n + 3T(n/9)$

$a=3, b=9, f(n)=n=\Omega(n^{\log_9 3 + \varepsilon})$

$3(n/9) \leq c n$ per $c=1/3$

(caso 3 del teorema master, es: $\varepsilon=0.1$)

$\Rightarrow T(n) = \Theta(n)$

Esempi

$$4) \quad T(n) = n \log n + 2T(n/2)$$

$$a=2, b=2, f(n) = \omega(n^{\log_2 2})$$

$$\text{ma } f(n) \neq \Omega(n^{\log_2 2 + \varepsilon}), \forall \varepsilon > 0$$

non si può applicare
il teorema Master!

Cambiamento di variabile

Esempio: $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(1),$
 $T(1) = 1$

$$T(n) = T(n^{1/2}) + O(1)$$

$$n = 2^x \quad \rightarrow \quad x = \log_2 n$$

$$T(2^x) = T(2^{x/2}) + O(1) \quad R(x) := T(2^x)$$

$$R(x) = R(x/2) + O(1) \quad \rightarrow \quad R(x) = O(\log x)$$

$$T(n) = O(\log \log n)$$

due problemi (per cui la ricorsione può aiutare)

Esercizio: progettare due algoritmi ricorsivi per i seguenti due problemi. Se ne studi la complessità temporale (nel caso peggiore).

problema della celebrità



ad una festa ci sono n persone
una di queste è una **celebrità**
la **celebrità** non conosce nessuno ma è
conosciuta da tutti

obiettivo:
individuare la celebrità facendo
(poche) domande a persone del tipo:
conosci questa persona?

problema della celebrità: un algoritmo ricorsivo

Celebrità (X)

1. **if** $|X|=1$ **then return** l'unica persona in X
% che è la celebrità
2. siano A e B due persone qualsiasi in X:
chiedi ad A se conosce B
3. **if** (A conosce B)
then
%A non può essere la celebrità
return Celebrità($X-\{A\}$)
else
%B non può essere la celebrità
return Celebrità($X-\{B\}$)

X: insieme di persone fra le
quali sto cercando la celebrità

quante domande
fa l'algoritmo?

$T(n)$: # domande che l'algoritmo fa nel caso peggiore prima di
individuare la celebrità fra n persone

$$T(n) = T(n-1) + 1 \quad T(1) = 0$$

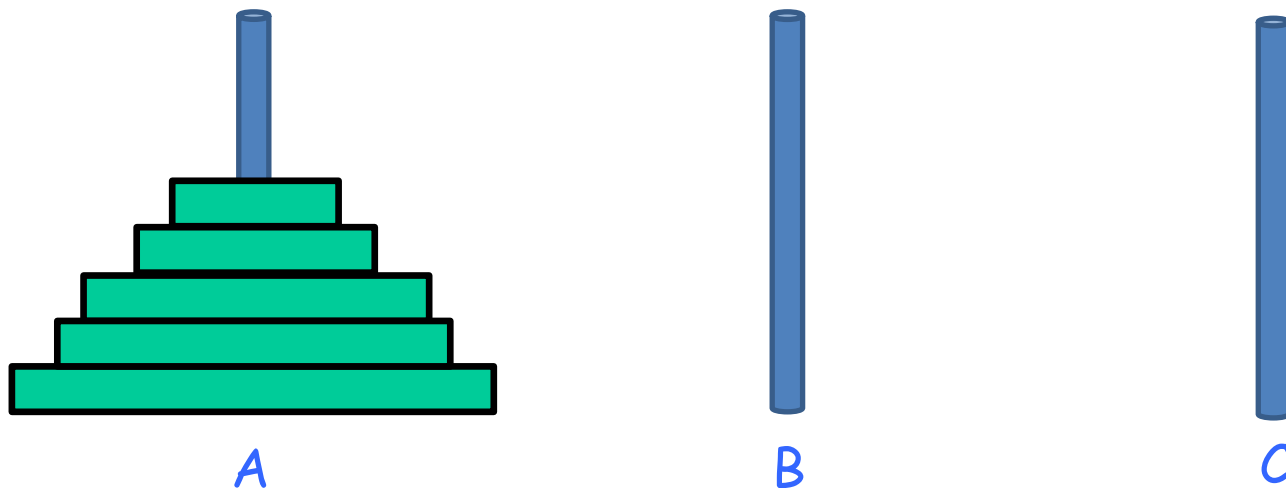
(srotolando)



$$T(n) = T(n-1) + 1 = T(n-2) + 2 = T(n-3) + 3 = \dots T(n-i) + i \dots = T(1) + n - 1 = n - 1$$

$$T(n) = n - 1$$

La torre di Hanoi

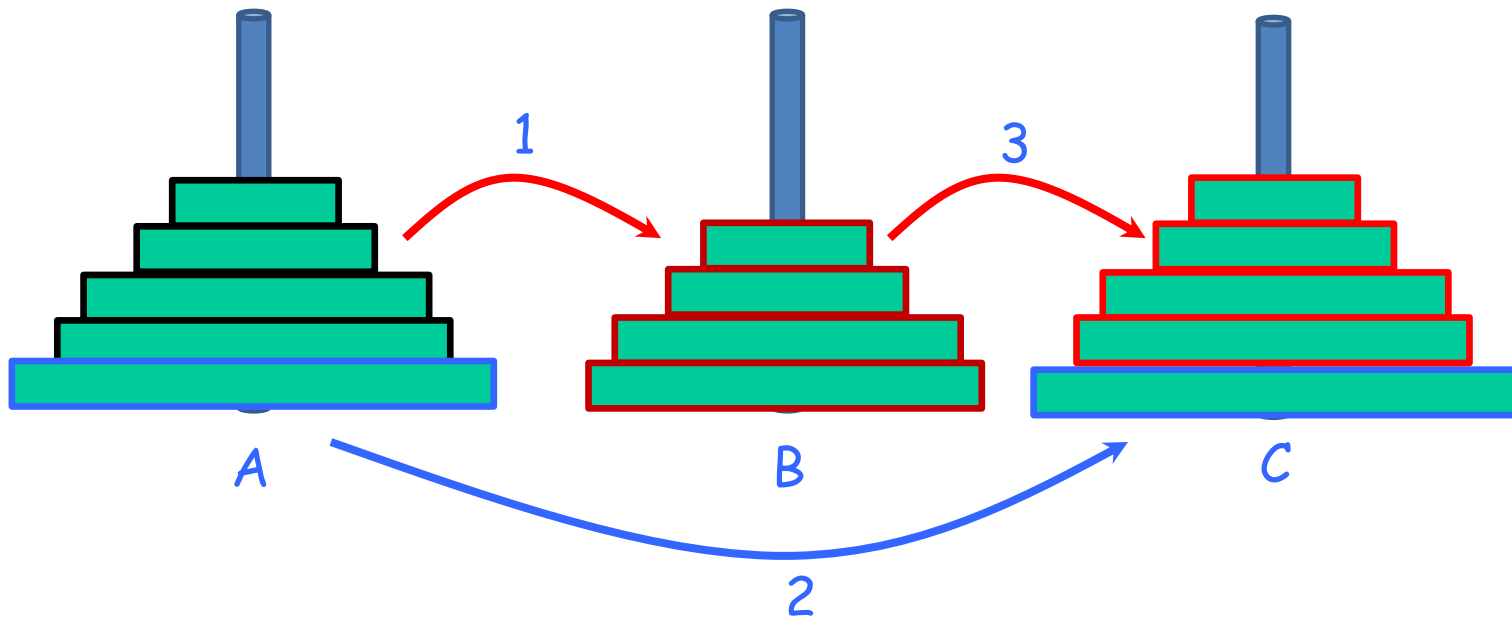


n dischi di diametro diverso, tre pali

regole: si può spostare un disco alla volta e **non si può** mettere un disco di diametro più grande **sopra** uno di diametro più piccolo

obiettivo: spostare i dischi dal palo **A** al palo **C**
(facendo meno spostamenti possibile)

Un'elegante soluzione ricorsiva



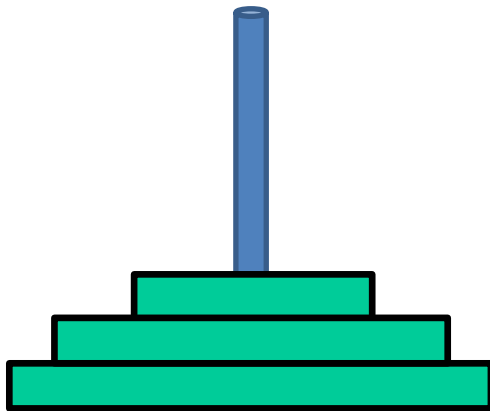
Hanoi(dischi, destinazione, palo ausiliario)

Hanoi ([1,2...,n], C, B)

1. **if** $n=1$ **then** sposta il disco su C
2. Hanoi([1,2,...,n-1], B, C)
3. sposta il disco n su C
4. Hanoi([1,2,...,n-1], C, A)

esecuzione dell'algoritmo

$n = 3$



A



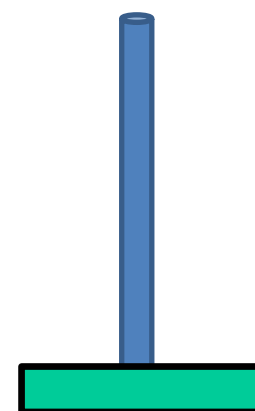
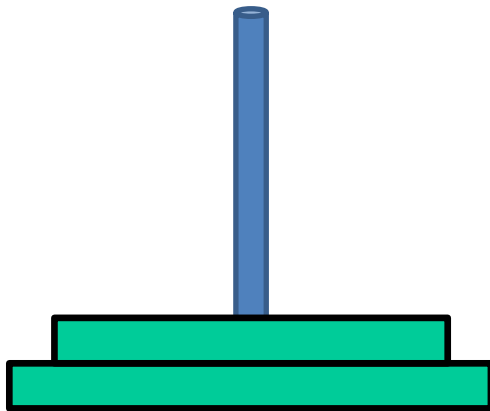
B



C

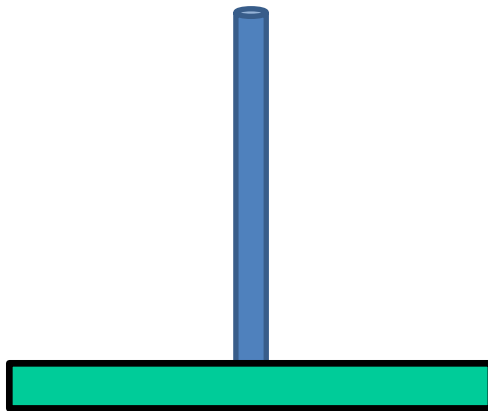
esecuzione dell'algoritmo

$n = 3$

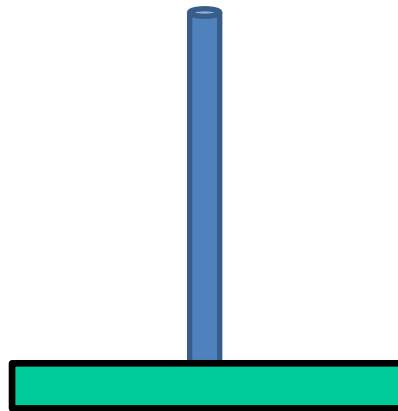


esecuzione dell'algoritmo

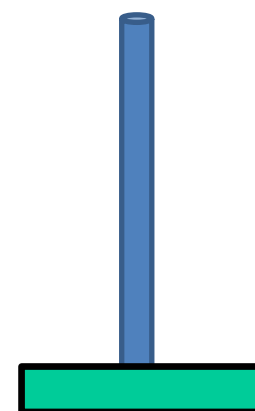
$n = 3$



A



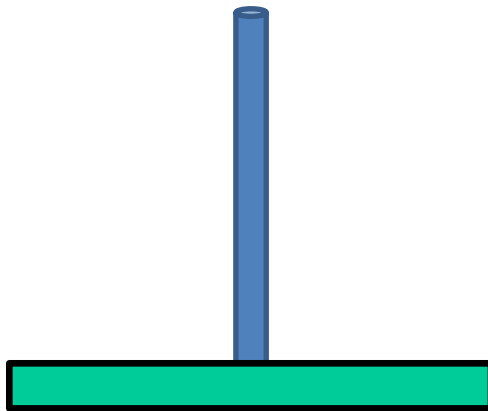
B



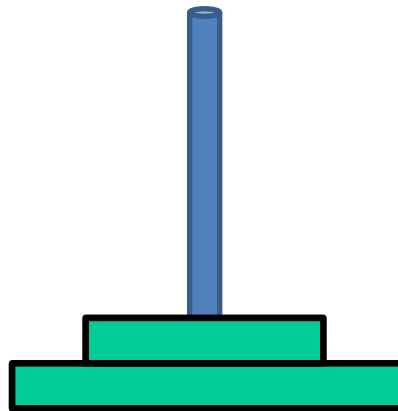
C

esecuzione dell'algoritmo

$n = 3$



A



B



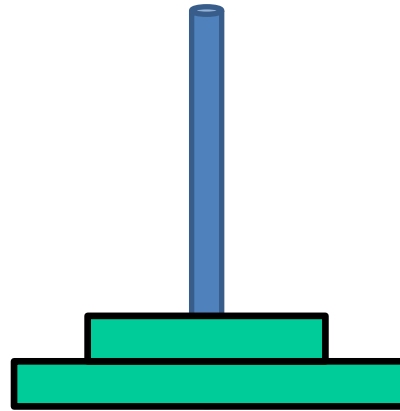
C

esecuzione dell'algoritmo

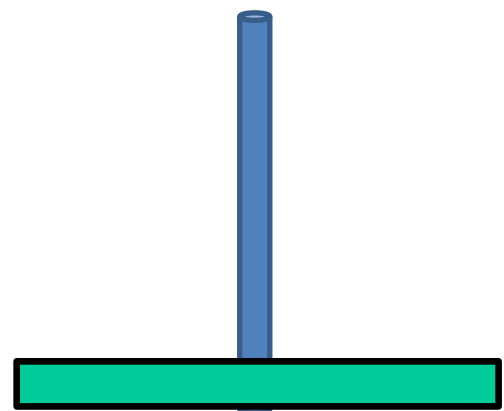
$n = 3$



A



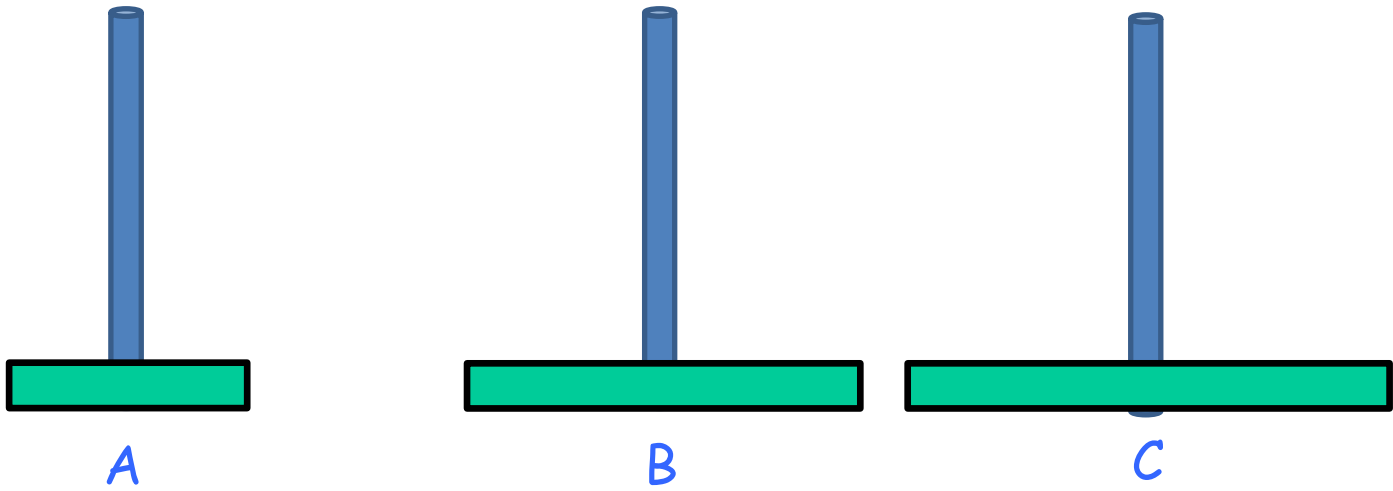
B



C

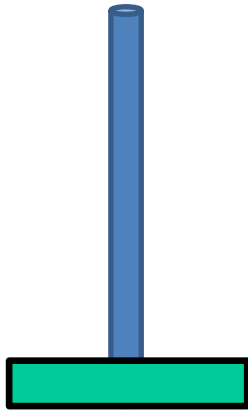
esecuzione dell'algoritmo

$n = 3$



esecuzione dell'algoritmo

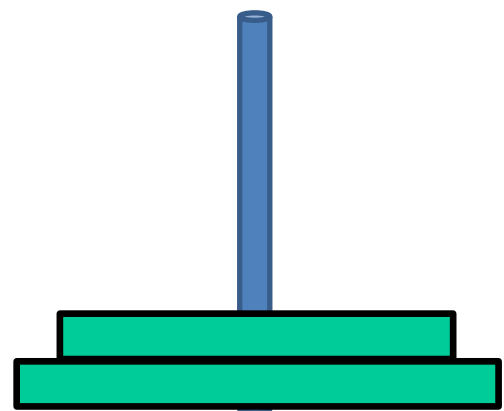
$n = 3$



A



B



C

esecuzione dell'algoritmo

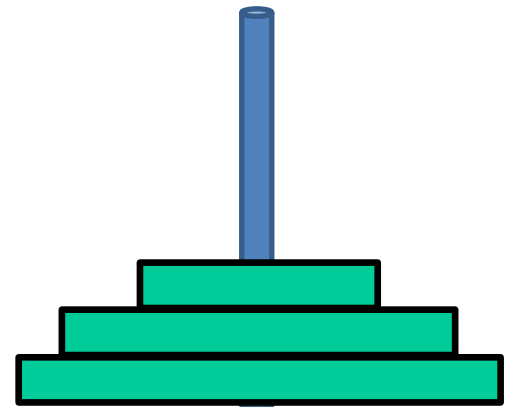
$n = 3$



A



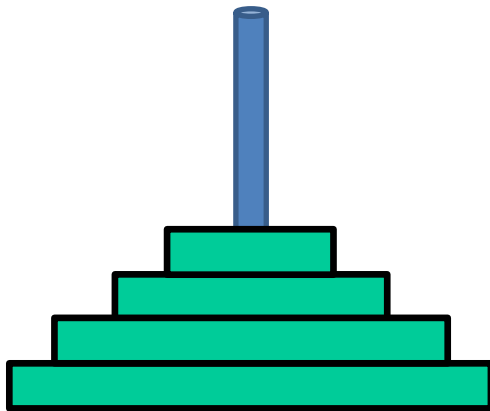
B



C

esecuzione dell'algoritmo

$n = 4$



A



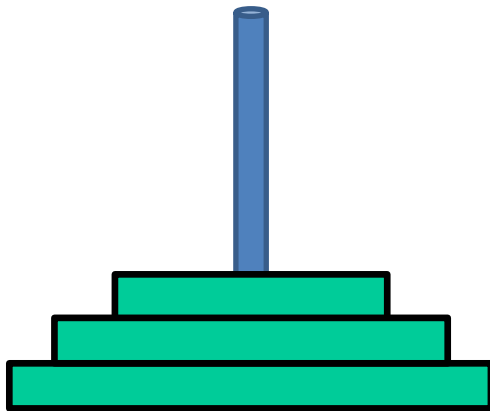
B



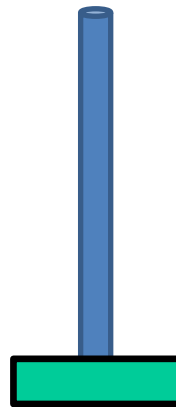
C

esecuzione dell'algoritmo

$n = 4$



A



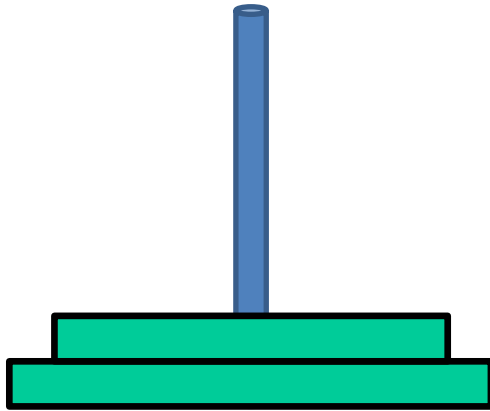
B



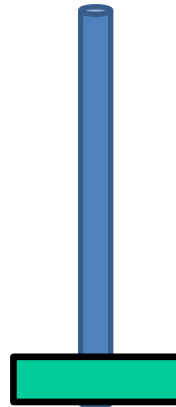
C

esecuzione dell'algoritmo

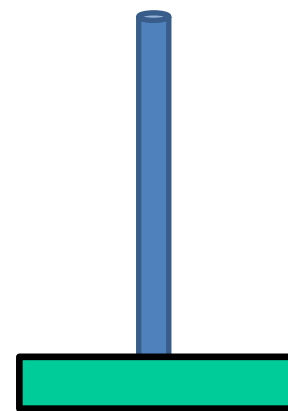
$n = 4$



A



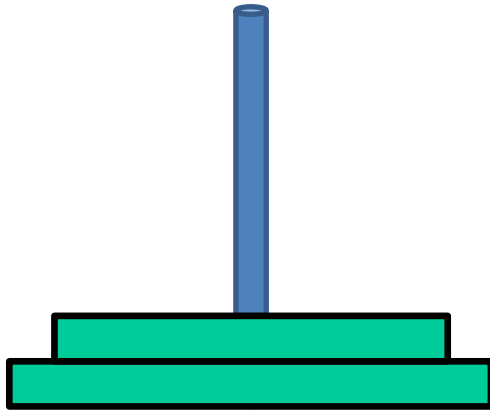
B



C

esecuzione dell'algoritmo

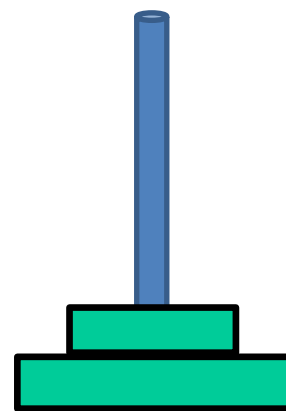
$n = 4$



A



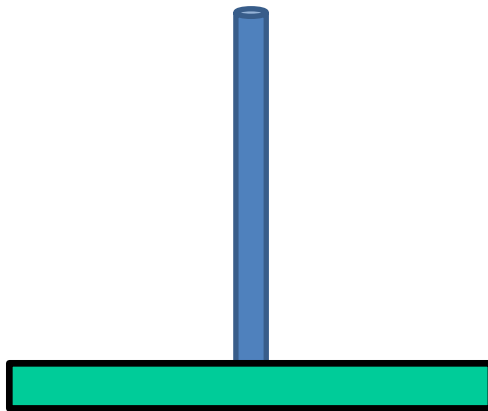
B



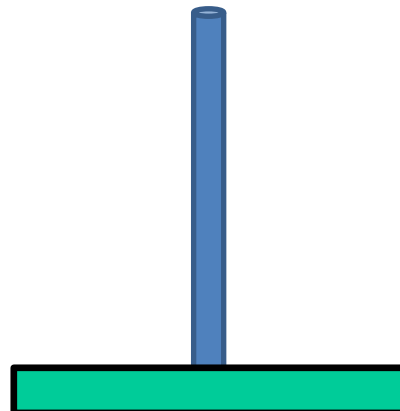
C

esecuzione dell'algoritmo

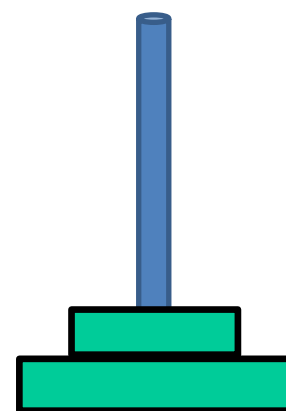
$n = 4$



A



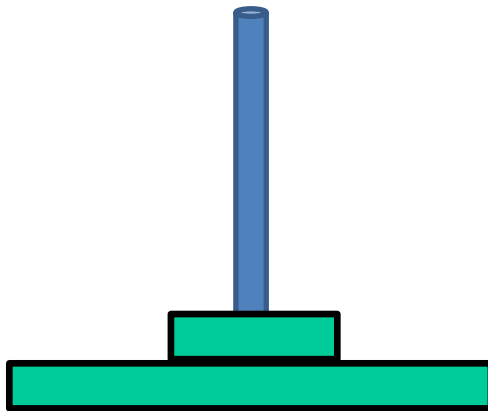
B



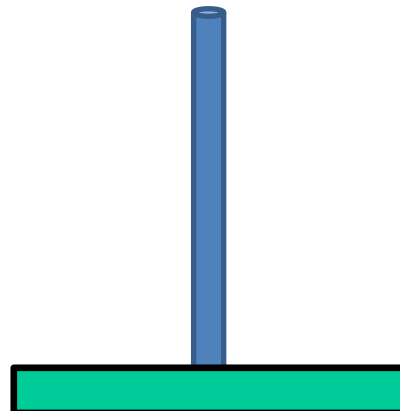
C

esecuzione dell'algoritmo

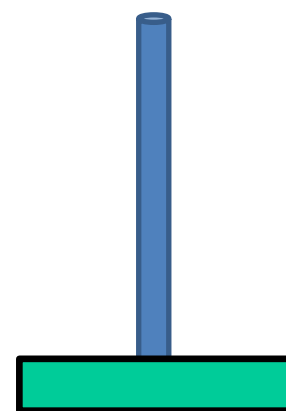
$n = 4$



A



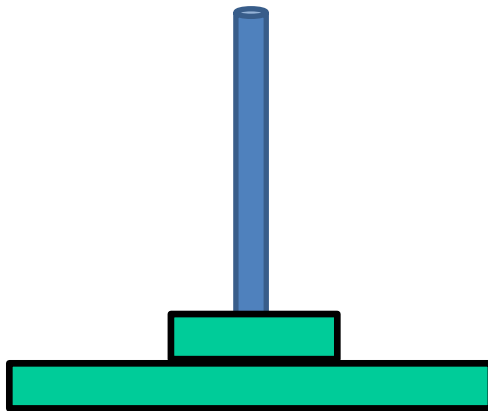
B



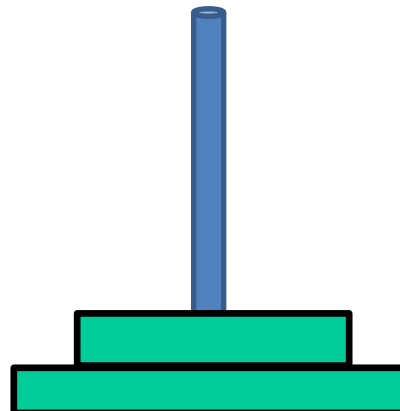
C

esecuzione dell'algoritmo

$n = 4$



A



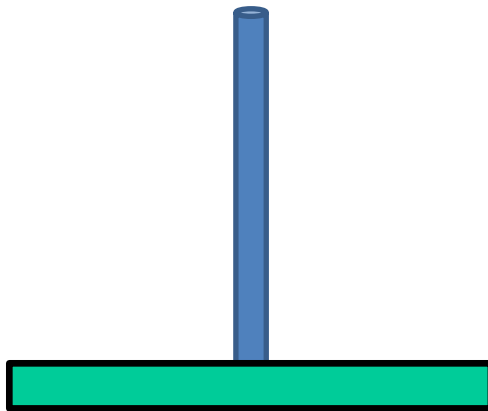
B



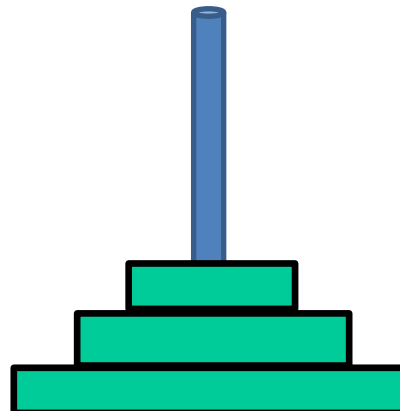
C

esecuzione dell'algoritmo

$n = 4$



A



B



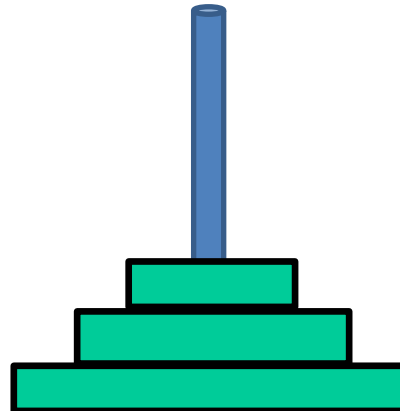
C

esecuzione dell'algoritmo

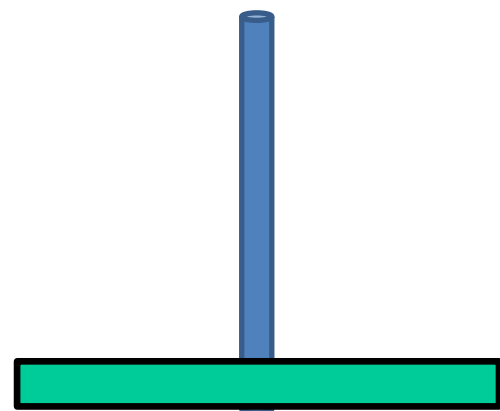
$n = 4$



A



B



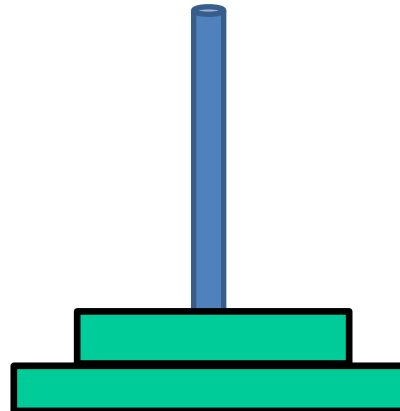
C

esecuzione dell'algoritmo

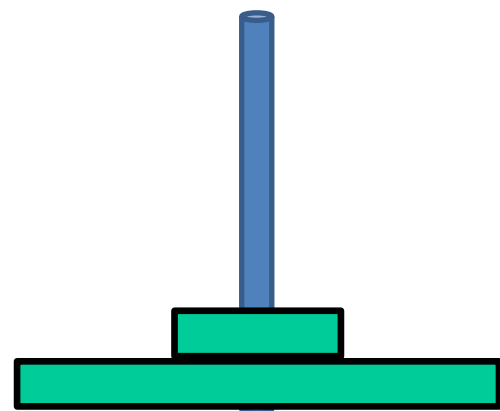
$n = 4$



A



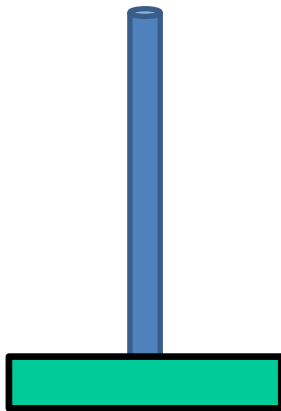
B



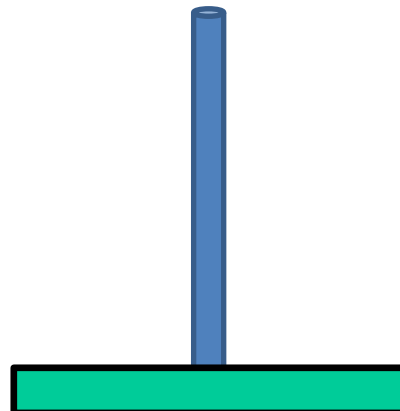
C

esecuzione dell'algoritmo

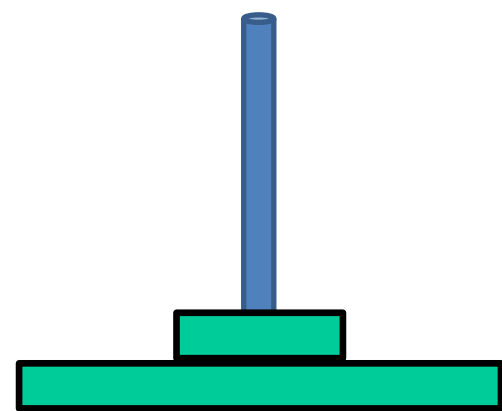
$n = 4$



A



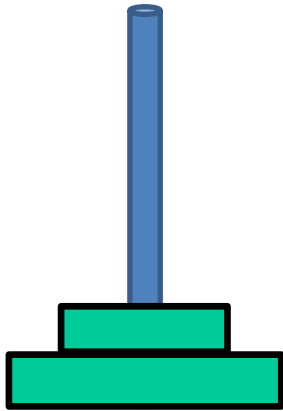
B



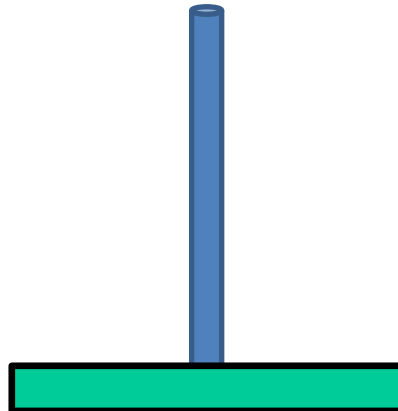
C

esecuzione dell'algoritmo

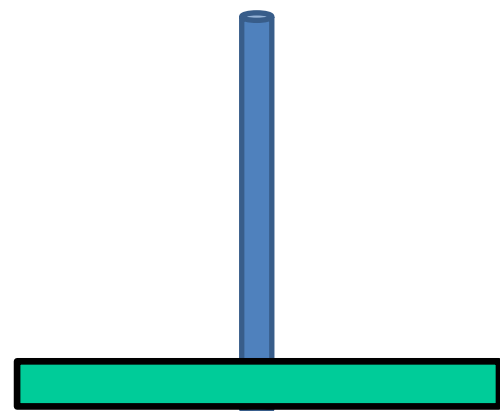
$n = 4$



A



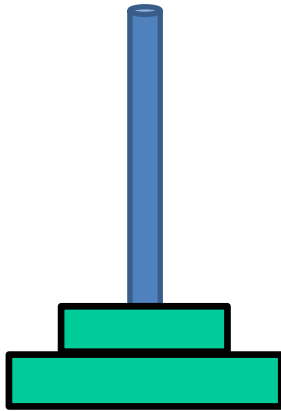
B



C

esecuzione dell'algoritmo

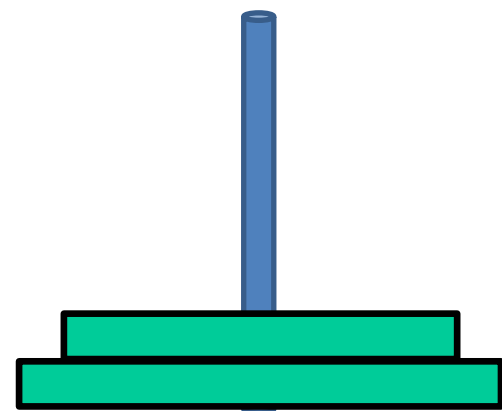
$n = 4$



A



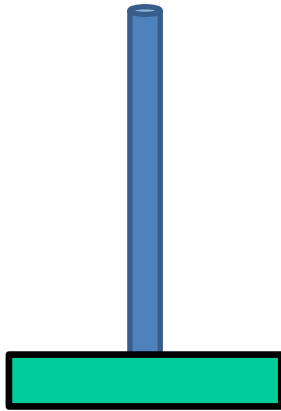
B



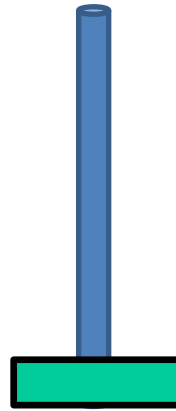
C

esecuzione dell'algoritmo

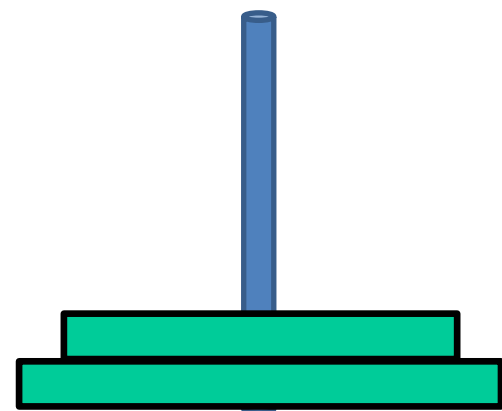
$n = 4$



A



B



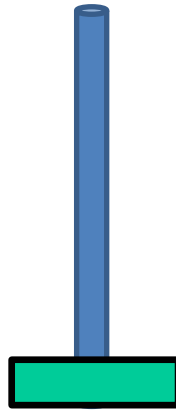
C

esecuzione dell'algoritmo

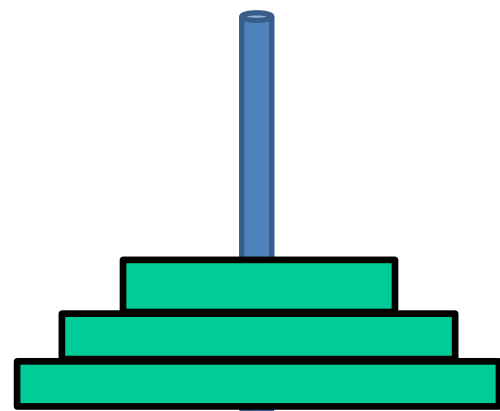
$n = 4$



A



B



C

esecuzione dell'algoritmo

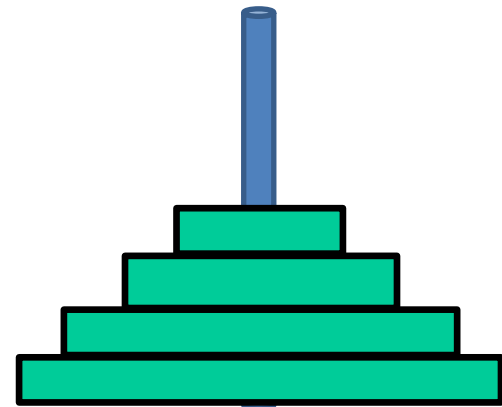
$n = 4$



A

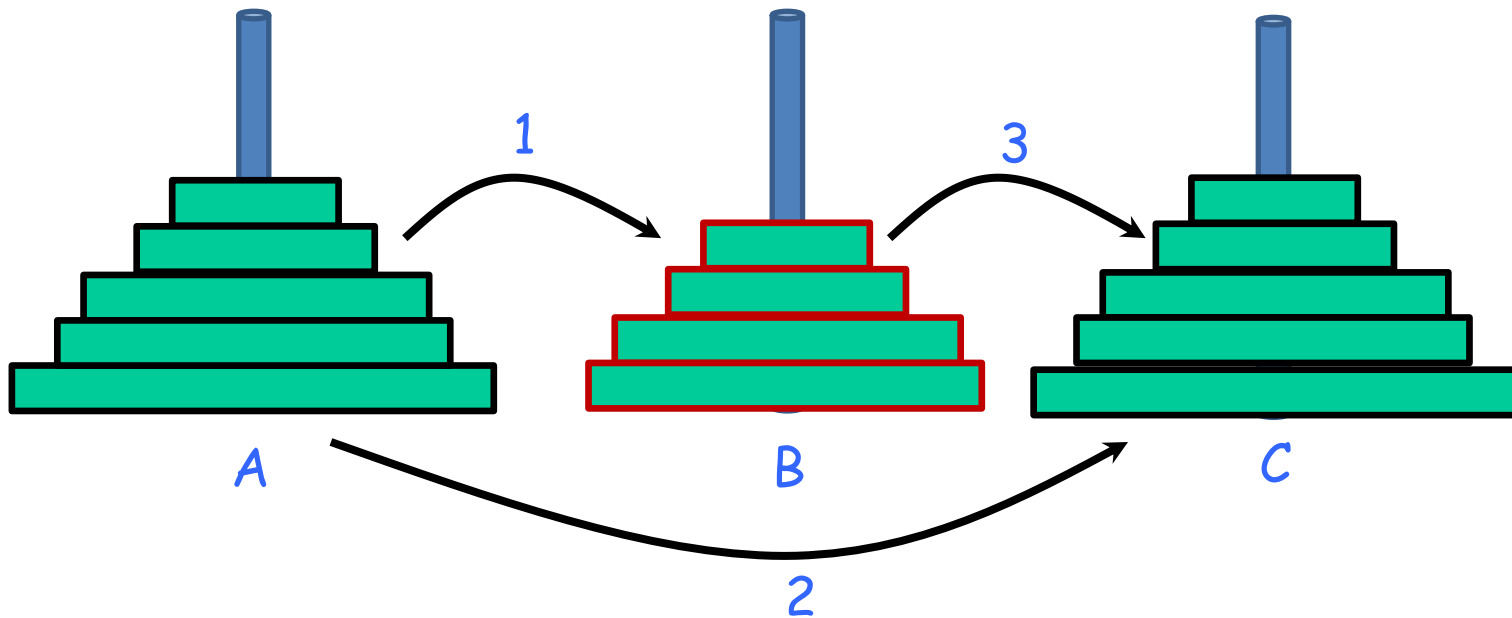


B



C

quanti spostamenti fa l'algoritmo?



$T(n)$: #spostamenti che l'alg fa nel caso peggiore (?) per spostare n dischi

Hanoi(dischi, destinazione, palo ausiliario)

Hanoi ([1,2...,n], C, B)

1. if $n=1$ then sposta il disco su C

2. Hanoi([1,2,...,n-1], B, C)

3. sposta il disco n su C

4. Hanoi([1,2,...,n-1], C, A)

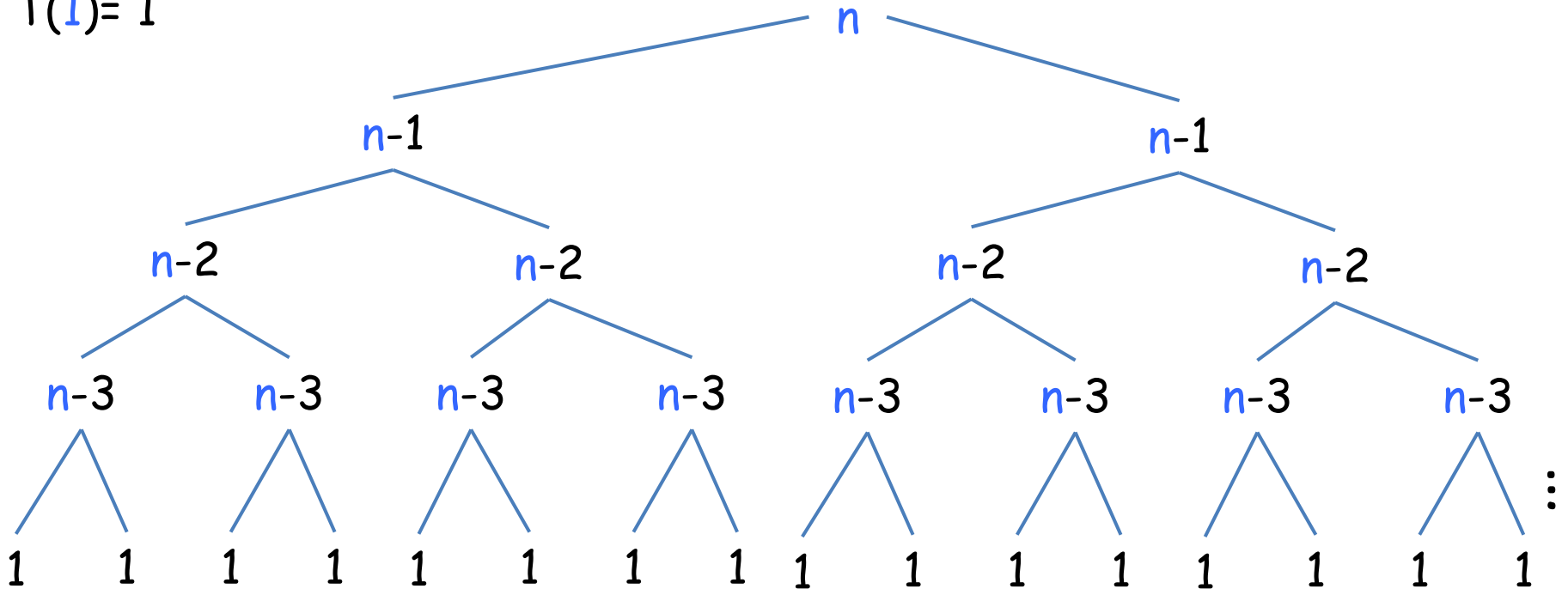
$$T(n) = 2T(n-1) + 1$$

$$T(1) = 1$$

analisi (tecnica albero della ricorsione)

$$T(n) = 2T(n-1) + 1$$

$$T(1) = 1$$



albero binario completo!

quanti spostamenti fa ogni nodo? ...uno!

quanto è alto l'albero?

...n-1!

quanti nodi ha un albero
binario completo di altezza h?

$$\sum_{i=0}^h 2^i = 2^{h+1} - 1$$

➡ $T(n) = 2^n - 1 = \Theta(2^n)$