Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)
Anno accademico: 2012-2013. *Titolare del corso:* Claudio Macci
Simulazione 1

Esercizio 1. Un'urna ha 5 palline numerate da 1 a 5. Si estraggono a caso 2 palline in blocco dall'urna.
D1) Calcolare la probabilità di estrarre almeno una pallina con numero dispari.
D2) Calcolare la probabilità di aver estratto un numero dispari sapendo che il minimo tra i due numeri estratti è 2.

Esercizio 2. Un'urna ha 1 pallina bianca e 1 nera. Si estrae una pallina a caso e viene reinserita nell'urna insieme ad un'altra dello stesso colore. Poi si estraggono 2 palline in blocco dall'urna. Indichiamo con E l'evento "le due palline estratte in blocco hanno lo stesso colore".
D3) Calcolare $P(E)$.
D4) Calcolare la probabilità di aver estratto una pallina bianca nella prima estrazione sapendo che l'evento E si è verificato.

Esercizio 3. Siano dati $c_1, c_2 > 0$ e $p_1, p_2 \in (0,1)$. Definiamo la seguente densità congiunta: per $k \geq 0$ intero si ha $p_{X_1,X_2}(k,1) = c_1(1-p_1)^k p_1$ e $p_{X_1,X_2}(k,2) = c_2(1-p_2)^k p_2$.
D5) Verificare che si deve avere $c_1 + c_2 = 1$.
D6) Trovare la densità marginale di X_2.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con densità continua $f_X(t) = \sin t \cdot 1_{(0,\pi/2)}(t)$.
D7) Trovare la funzione di distribuzione di $Y = X^2 + 1$.
D8) Trovare la densità discreta di $Z = [X]$ dove $[x] = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$ è la *parte intera* di x.

Esercizio 5. Sia $N_t = \sum_{n\geq 1} 1_{T_n \leq t}$ (per $t \geq 0$) un processo di Poisson con intensità di $\lambda = \frac{3}{2}$.
D9) Calcolare $P(N_2 = 3)$.
D10) Calcolare $\mathbb{E}[T_3]$.

Esercizio 6. Sia X una variabile aleatoria normale con media μ e varianza σ^2.
D11) Calcolare $P(X < -1.21)$ nel caso in cui X sia standardizzata (cioè $\mu = 0$ e $\sigma = 1$).
D12) Supponiamo che $\sigma^2 = 36$. Determinare il valore di μ affinché si abbia $P(X \leq 2) = \Phi(1)$.

Esercizio 7 (*solo per ST-Materiali*). Consideriamo una catena di Markov omogenea $\{X_n : n \geq 0\}$ con spazio degli stati $E = \{1,2,3,4\}$ e matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 & 0 \\ 2/5 & 3/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/6 & 5/6 \end{pmatrix}.$$

D13) Trovare la/e distribuzioni stazionaria/e.
D14) Calcolare $P(X_1 = 1, X_2 = 2, X_3 = 2, X_4 = 1 | X_0 = 1)$.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
D1) Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di palline estratte con numero dispari; si ha $p_X(k) = \frac{\binom{3}{k}\binom{2}{2-k}}{\binom{5}{2}}$ per $k \in \{0,1,2\}$, e quindi $p_X(0) = \frac{1}{10}$, $p_X(1) = \frac{6}{10}$ e $p_X(2) = \frac{3}{10}$. Allora la probabilità richiesta è $P(X \geq 1) = p_X(1) + p_X(2) = \frac{6+3}{10} = \frac{9}{10}$.
D2) Consideriamo l'insieme $\Omega = \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{1,5\},\{2,3\},\{2,4\},\{2,5\},\{3,4\},\{3,5\},\{4,5\}\}$ costituito da $\binom{5}{2} = 10$ punti tutti con probabilità $\frac{1}{10}$. Allora la probabilità richiesta è $P(A|B)$ dove $A = \{\{2,4\}\}^c$ (cioè tutti i punti di Ω escluso $\{2,4\}$) e $B = \{\{2,3\},\{2,4\},\{2,5\}\}$; quindi $A \cap B = \{\{2,3\},\{2,5\}\}$ e $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{2/10}{3/10} = \frac{2}{3}$.

Esercizio 2. Sia B l'evento "si estrae pallina bianca alla prima estrazione" e, per quanto riguarda la seconda estrazione, siano BB l'evento "si estraggono due palline bianche", BN l'evento "si estraggono palline di colori diversi" e NN l'evento "si estraggono due palline nere".
D3) Per la formula delle probabilità totali si ha $P(BB) = P(BB|B)P(B) + P(BB|B^c)P(B^c) = \frac{\binom{2}{2}\binom{1}{0}}{\binom{3}{2}}\frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ e $P(NN) = P(NN|B)P(B) + P(NN|B^c)P(B^c) = 0 \cdot \frac{1}{2} + \frac{\binom{2}{2}\binom{1}{0}}{\binom{3}{2}}\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$, da cui segue $P(E) = P(BB) + P(NN) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.
D4) Per la formula di Bayes, e tenendo conto di alcuni valori calcolati prima, si ha $P(B|E) = \frac{P(E|B)P(B)}{P(E)} = \frac{(P(BB|B)+P(NN|B))P(B)}{P(E)} = \frac{1}{2}$; in particolare, a proposito della prima uguaglianza, si ha $P(E|B) = P(BB|B) + P(NN|B)$ perché $BB \cap NN = \emptyset$.

Esercizio 3.
D5) Si deve avere $1 = \sum_{k\geq 0}(p_{X_1,X_2}(k,1) + p_{X_1,X_2}(k,2)) = \sum_{k\geq 0}(c_1(1-p_1)^k p_1 + c_2(1-p_2)^k p_2) = c_1\sum_{k\geq 0}(1-p_1)^k p_1 + c_2\sum_{k\geq 0}(1-p_2)^k p_2 = c_1 + c_2$.
D6) Si ha $p_{X_2}(1) = \sum_{k\geq 0} p_{X_1,X_2}(k,1) = c_1\sum_{k\geq 0}(1-p_1)^k p_1 = c_1$ e $p_{X_2}(2) = \sum_{k\geq 0} p_{X_1,X_2}(k,2) = c_2\sum_{k\geq 0}(1-p_2)^k p_2 = c_2$.

Esercizio 4.
D7) Si vede che $P(1 \leq 1 + X^2 \leq 1 + \frac{\pi^2}{4}) = 1$, da cui $F_Y(y) = 0$ per $y \leq 1$ e $F_Y(y) = 1$ per $y \geq 1 + \frac{\pi^2}{4}$. Per $y \in (1, 1+\frac{\pi^2}{4})$ si ha $F_Y(y) = P(1+X^2 \leq y) = P(X^2 \leq y-1) = P(X \leq \sqrt{y-1}) = \int_0^{\sqrt{y-1}} \sin t dt = [-\cos t]_{t=0}^{t=\sqrt{y-1}} = 1 - \cos\sqrt{y-1}$.
D8) Osserviamo che $1 < \frac{\pi}{2} < 2$. Allora si ha $p_Z(0) = \int_0^1 \sin t dt = [-\cos t]_{t=0}^{t=1} = 1 - \cos 1$ e $p_Z(1) = \int_1^{\pi/2} \sin t dt = [-\cos t]_{t=1}^{t=\pi/2} = \cos 1$.

Esercizio 5.
D9) Si ha $P(N_2 = 3) = \frac{(\frac{3}{2}\cdot 2)^3}{3!}e^{-\frac{3}{2}\cdot 2} = \frac{27}{6}e^{-3} = \frac{9}{2}e^{-3}$.
D10) Si ha $\mathbb{E}[T_3] = \frac{3}{3/2} = 2$.

Esercizio 6.
D11) Si ha $P(X < -1.21) = \Phi(-1.21) = 1 - \Phi(1.21) = 1 - 0.88686 = 0.11314$.
D12) Osserviamo che $P(X \leq 2) = P(\frac{X-\mu}{\sqrt{36}} \leq \frac{2-\mu}{\sqrt{36}}) = \Phi(\frac{2-\mu}{\sqrt{36}})$; allora, poiché si ha $P(X \leq 2) = \Phi(1)$ e $\Phi(\cdot)$ è una funzione strettamente crescente (e quindi iniettiva), dobbiamo avere $\frac{2-\mu}{\sqrt{36}} = 1$, da cui segue $2 - \mu = 6$ e quindi $\mu = -4$.

Esercizio 7.
D13) Indichiamo la distribuzione stazionaria con (p,q,r,s). Allora si deve avere la relazione matri-

ciale

$$(p,q,r,s)\left(\begin{array}{cccc} 1/4 & 3/4 & 0 & 0 \\ 2/5 & 3/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/6 & 5/6 \end{array}\right)=(p,q,r,s),$$

che fornisce il seguente sistema di equazioni:

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{4}p+\frac{2}{5}q=p \\ \frac{3}{4}p+\frac{3}{5}q=q \\ \frac{2}{3}r+\frac{1}{6}s=r \\ \frac{1}{3}r+\frac{5}{6}s=s. \end{array}\right.$$

Allora si ottiene $p=\frac{8}{15}q$ dalle prime due equazioni e $s=2r$ dalle ultime due equazioni; quindi abbiamo $(p,q,r,s)=(\frac{8}{15}q,q,r,2r)$ con il vincolo $\frac{8}{15}q+q+r+2r=1$, cioè $\frac{23}{15}q+3r=1$. Quindi $q=\frac{15}{23}(1-3r)$ e, sostituendo, possiamo concludere che le distribuzioni stazionarie sono del tipo $(\frac{8}{23}(1-3r),\frac{15}{23}(1-3r),r,2r)$ al variare di $r\in[0,1/3]$ (perché in particolare si deve avere $1-3r\geq 0$).
`D14`) Si ha $P(X_1=1,X_2=2,X_3=2,X_4=1|X_0=1)=p_{11}p_{12}p_{22}p_{21}=\frac{1}{4}\frac{3}{4}\frac{3}{5}\frac{2}{5}=\frac{18}{400}=\frac{9}{200}$.

Commenti.
La somma dei valori di ciascuna densità discreta che appare è 1 in accordo con la teoria.
`D1`) In altro modo $P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-p_X(0)=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$.
`D2`) Essendo un modello uniforme (insieme finito di punti, tutti con la stessa probabilità) la probabilità condizionata è uguale al rapporto tra la cardinalità di $A\cap B$ e la cardinalità di B.
`D3`) Ovviamente $\{BB,BN,NN\}$ è una partizione. Allora, poiché $P(BN)=P(BN|B)P(B)+P(BN|B^c)P(B^c)=\frac{\binom{2}{1}\binom{1}{1}}{\binom{3}{2}}\frac{1}{2}+\frac{\binom{2}{1}\binom{1}{1}}{\binom{3}{2}}\frac{1}{2}=\frac{2}{3}\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$, si ha $P(BB)+P(BN)+P(NN)=1$ in accordo con la teoria.
`D4`) Si vede che $P(B|E)=P(B)$ e quindi gli eventi B e E sono indipendenti. Del resto l'indipendenza tra i due eventi si verifica rapidamente sfruttando alcuni calcoli già fatti: $P(B\cap E)=P(B\cap(BB\cup NN))=P(B\cap BB)+P(B\cap NN)=\frac{1}{6}$ perché $P(B\cap BB)=P(BB|B)P(B)=\frac{1}{6}$ e $P(B\cap NN)=P(NN|B)P(B)=0$; $P(B)P(E)=\frac{1}{2}\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$.
`D13`) Si poteva considerare la decomposizione $E=T\cup C_1\cup\cdots\cup C_k$ per qualche k, dove T è l'insieme degli stati transitori e $C_1,\ldots,C_k$ sono classi chiuse irriducibili. Qui non abbiamo stati transitori e abbiamo due classi chiuse irriducibili (cioè $k=2$): $C_1=\{1,2\}$ e $C_2=\{3,4\}$. La catena con matrice di transizione

$$\left(\begin{array}{cc} 1/4 & 3/4 \\ 2/5 & 3/5 \end{array}\right)$$

(quella ristretta a $\{1,2\}$) ammette come distribuzione stazionaria $(\frac{8}{23},\frac{15}{23})$, mentre la catena con matrice di transizione

$$\left(\begin{array}{cc} 2/3 & 1/3 \\ 1/6 & 5/6 \end{array}\right)$$

(quella ristretta a $\{3,4\}$) ammette come distribuzione stazionaria $(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$. Quindi le distribuzioni stazionarie sono del tipo $\gamma(0,0,\frac{1}{3},\frac{2}{3})+(1-\gamma)(\frac{8}{23},\frac{15}{23},0,0)$ al variare di $\gamma\in[0,1]$. Si osservi che in questo modo troviamo le stesse distribuzioni stazionarie trovate prima ponendo $\gamma=3r$, dove $\gamma\in[0,1]$ implica $r\in[0,1/3]$ (cioè lo stesso vincolo su r che avevamo trovato).