Secondo Esonero del corso di Fisica del 17.06.2022

Corso di Laurea in Informatica

A.A. 2021-2022

(Prof. Paolo Camarri)

Cognome:

Nome:

Matricola:

Anno di immatricolazione:

Problema n.1

Una pallina di massa $m = 0{,}01 \text{ kg}$ si muove su un piano orizzontale con velocità di modulo $v_{1i} = 3 \text{ m s}^{-1}$ (FIGURA 1 a). A un certo istante urta una seconda pallina di uguale massa che è inizialmente ferma.

a) Nel caso in cui l'urto sia totalmente anelastico, si calcoli il modulo V della velocità del sistema costituito dalle due palline dopo l'urto

$V =$ $\qquad\qquad\qquad =$

b) Nel caso in cui l'urto sia elastico, si osserva che la prima pallina, dopo l'urto, procede sullo stesso piano liscio con velocità finale $\overrightarrow{v_{1f}}$ che forma un angolo $\theta_1 = 30°$ con la velocità iniziale $\overrightarrow{v_{1i}}$ (FIGURA 1 b). Si calcolino i moduli v_{1f} e v_{2f} delle velocità delle due palline dopo l'urto.

$v_{1f} =$ $\qquad\qquad\qquad =$
$v_{2f} =$ $\qquad\qquad\qquad =$

c) Nell'ipotesi del punto b), si calcolino l'angolo θ_2 tra la direzione di $\overrightarrow{v_{2f}}$ e la direzione di $\overrightarrow{v_{1i}}$, e l'angolo α tra i vettori $\overrightarrow{v_{1f}}$ e $\overrightarrow{v_{2f}}$

$\theta_2 =$ $\qquad\qquad\qquad =$
$\alpha =$ $\qquad\qquad\qquad =$

Problema n.2

Un punto materiale avente massa $m = 0{,}05$ kg si muove su un piano orizzontale liscio con velocità di modulo $v_1 = 10 \text{ m s}^{-1}$. Il punto materiale si dirige verso l'estremità inferiore di un'asta rigida omogenea di lunghezza $L = 1$ m e massa $M = 0{,}1$ kg , imperniata nel suo estremo superiore (FIGURA 2). Il punto materiale urta l'asta nella sua estremità inferiore e, nell'urto, vi resta conficcato.

a) Si calcoli la velocità angolare istantanea ω del sistema subito dopo l'urto, sapendo che l'asta è vincolata a ruotare in un piano verticale attorno a un asse orizzontale passante per il perno.

$\omega =$	$=$

b) Si calcoli l'angolo massimo θ_M tra l'asta e la direzione verticale successivamente all'urto

$\theta_M =$	$=$

c) Si calcoli la componente orizzontale I_x dell'impulso esercitato, nell'urto, dalla forza di reazione del perno sul sistema costituito dall'asta e dal punto materiale.

$I_x =$	$=$

Problema n.3

Un blocchetto avente massa $m = 1$ kg è posizionato su un piano orizzontale liscio. Il blocchetto è collegato a due molle disposte orizzontalmente, aventi costanti elastiche $k_1 = 50\ \mathrm{N\,m^{-1}}$ e $k_2 = 75\ \mathrm{N\,m^{-1}}$ e fissate a pareti verticali all'altra estremità. Nella posizione in cui il blocchetto si trova in equilibrio, le due molle sono a riposo (posizione 0 nella FIGURA 3).

a) Fissato un opportuno asse cartesiano orizzontale, si scriva la relazione che esprime la componente orizzontale a_x dell'accelerazione del blocchetto in funzione dello spostamento x del blocchetto dalla posizione di equilibrio (FIGURA 3).

$a_x =$

b) Si calcoli il periodo T delle oscillazioni armoniche del blocchetto attorno alla posizione di equilibrio.

T	$=$	$=$

c) Il blocchetto viene spostato di un tratto $x_M = 0{,}2$ m dalla posizione di equilibrio, e quindi viene rilasciato con velocità iniziale nulla. Si calcoli il modulo v della velocità del blocchetto nell'istante in cui passa per la posizione di equilibrio.

$v =$	$=$

FIGURA 1

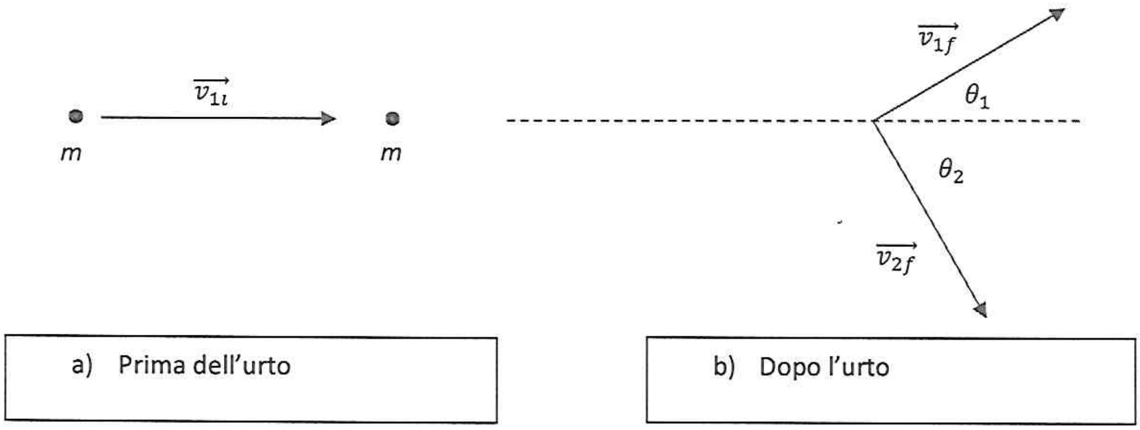


FIGURA 2

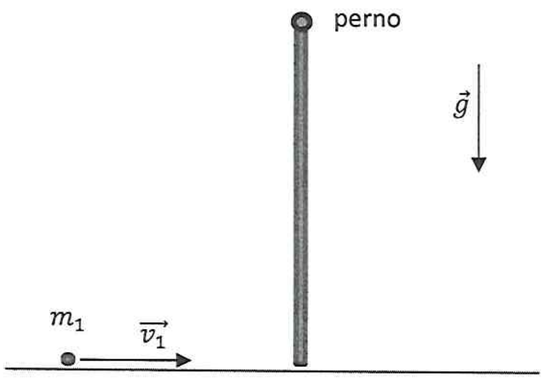
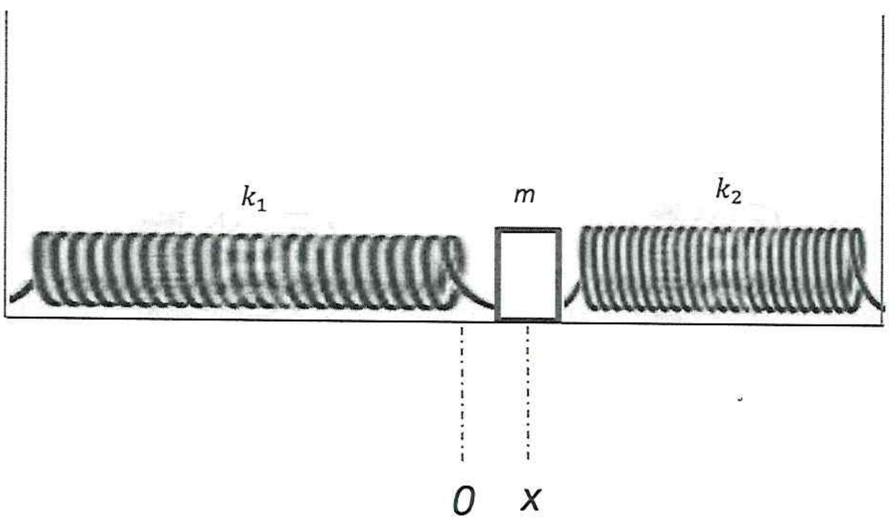


FIGURA 3



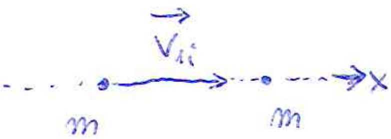
CORSO DI FISICA PER INFORMATICA A.A. 2021-2022

PROF. PAOLO CAMARRI

SECONDO ESONERO SCRITTO 17/06/2022

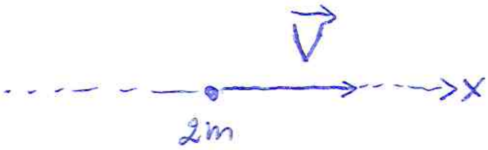
Problema n. 1

a) Nel caso di urto totalmente anelastico tra due punti materiali, l'urto e' unidimensionale.
La quantita' di moto totale si conserva nell'urto.



Prima dell'urto, la quantita' di moto totale del sistema e' uguale alla quantita' di moto della pallina in moto con velocita' $\vec{V}_{1i}$, dato che la seconda pallina e' ferma. Pertanto risulta

$$P_{TOT,i,x} = m\,V_{1i,x} = m|\vec{V}_{1i}| = m V_{1i},$$ avendo fissato un asse cartesiano x lungo la direzione di moto della prima pallina, con verso positivo coincidente con il verso di $\vec{V}_{1i}$



Dopo l'urto, la quantita' di moto totale del sistema e' quella di un unico punto materiale di massa 2m, in moto lungo l'asse x nel verso positivo:

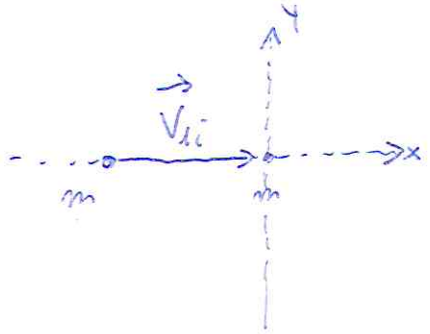
$$P_{TOT,f,x} = 2m\,V_x = 2m\,V, \quad \text{con} \quad V = |\vec{V}|$$

Nell'urto risulta $P_{TOT,f,x} = P_{TOT,i,x}$, per cui otteniamo

$2\cancel{m} V = \cancel{m} V_{1i}$, da cui risulta

$$\boxed{V = \frac{1}{2} V_{1i} = \frac{1}{2} \cdot 3 \, m s^{-1} = 1{,}5 \, m s^{-1}}$$

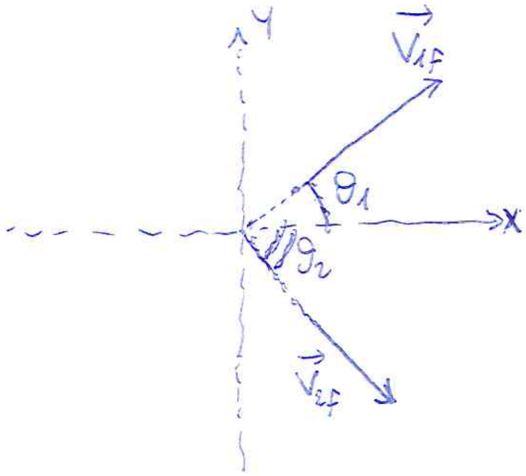
b), c) In un urto elastico si conservano, nell'urto, la quantità di moto totale e l'energia cinetica totale del sistema.



Prima dell'urto:

$$P_{TOT,i,x} = m V_{1i} \qquad P_{TOT,i,y} = 0$$

$$K_{TOT,i} = \frac{1}{2} m V_{1i}^2$$



Dopo l'urto:

$$P_{TOT,f,x} = m V_{1f} \cos\theta_1 + m V_{2f} \cos\theta_2$$

$$P_{TOT,f,y} = m V_{1f} \operatorname{sen}\theta_1 - m V_{2f} \operatorname{sen}\theta_2$$

$$K_{TOT,f} = \frac{1}{2} m V_{1f}^2 + \frac{1}{2} m V_{2f}^2$$

$$\left(V_{1f} = |\vec{V}_{1f}|, \quad V_{2f} = |\vec{V}_{2f}| \right)$$

Deve quindi risultare:

$$\begin{cases} P_{TOT,f,x} = P_{TOT,i,x} \\ P_{TOT,f,y} = P_{TOT,i,y} \\ K_{TOT,f} = K_{TOT,i} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cancel{m} V_{1f}\cos\theta_1 + \cancel{m} V_{2f}\cos\theta_2 = \cancel{m} V_{1i} \\ \cancel{m} V_{1f}\,\mathrm{sen}\theta_1 - \cancel{m} V_{2f}\,\mathrm{sen}\theta_2 = 0 \\ \cancel{\tfrac{1}{2}}\cancel{m} V_{1f}^2 + \cancel{\tfrac{1}{2}}\cancel{m} V_{2f}^2 = \cancel{\tfrac{1}{2}}\cancel{m} V_{1i}^2 \end{cases}$$

Il fattore m si semplifica in tutte le tre equazioni del sistema.

Riscriviamo il sistema ottenuto:

$$\begin{cases} V_{1f}\,\mathrm{sen}\theta_1 - V_{2f}\,\mathrm{sen}\theta_2 = 0 \\ V_{1f}\cos\theta_1 + V_{2f}\cos\theta_2 = V_{1i} \\ V_{1f}^2 + V_{2f}^2 = V_{1i}^2 \end{cases}$$

Quantità incognite: θ_2, V_{1f}, V_{2f}.

Ricaviamo, dalle prime due equazioni, le espressioni di V_{1f} e V_{2f} in termini della terza grandezza incognita θ_2; usiamo, ad esempio, il metodo di Cramer:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mathrm{sen}\theta_1 & -\mathrm{sen}\theta_2 \\ \cos\theta_1 & \cos\theta_2 \end{vmatrix} = \mathrm{sen}\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\,\mathrm{sen}\theta_2 = \mathrm{sen}(\theta_1+\theta_2)$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -\mathrm{sen}\theta_2 \\ V_{1i} & \cos\theta_2 \end{vmatrix} = V_{1i}\,\mathrm{sen}\theta_2$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \mathrm{sen}\theta_1 & 0 \\ \cos\theta_1 & V_{1i} \end{vmatrix} = V_{1i}\,\mathrm{sen}\theta_1$$

$$V_{1f} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{V_{1i}\,\mathrm{sen}\theta_2}{\mathrm{sen}(\theta_1+\theta_2)} \qquad V_{2f} = \frac{V_{1i}\,\mathrm{sen}\theta_1}{\mathrm{sen}(\theta_1+\theta_2)} = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

Sostituiamo queste due espressioni nella terza equazione del sistema:

$$\left[\frac{V_{1i}\,\text{sen}\,\theta_2}{\text{sen}(\theta_1+\theta_2)}\right]^2+\left[\frac{V_{1i}\,\text{sen}\,\theta_1}{\text{sen}(\theta_1+\theta_2)}\right]^2=V_{1i}^2$$

Sviluppiamo i calcoli:

$$\cancel{V_{1i}^2}\,\text{sen}^2\theta_2+\cancel{V_{1i}^2}\,\text{sen}^2\theta_1=\cancel{V_{1i}^2}\,\text{sen}^2(\theta_1+\theta_2)$$

$$\text{sen}^2\theta_2+\text{sen}^2\theta_1=(\text{sen}\,\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\,\text{sen}\,\theta_2)^2$$

$$\text{sen}^2\theta_2+\text{sen}^2\theta_1=\text{sen}^2\theta_1\cos^2\theta_2+2\,\text{sen}\,\theta_1\cos\theta_1\,\text{sen}\,\theta_2\cos\theta_2+\cos^2\theta_1\,\text{sen}^2\theta_2$$

$$(1-\cos^2\theta_1)\,\text{sen}^2\theta_2+(1-\cos^2\theta_2)\,\text{sen}^2\theta_1=2\,\text{sen}\,\theta_1\cos\theta_1\,\text{sen}\,\theta_2\cos\theta_2$$

$$\text{sen}^2\theta_1\,\text{sen}^2\theta_2+\text{sen}^2\theta_1\,\text{sen}^2\theta_2=2\,\text{sen}\,\theta_1\cos\theta_1\,\text{sen}\,\theta_2\cos\theta_2$$

$$\cancel{2}\,\text{sen}^{\cancel{2}}\theta_1\,\text{sen}^{\cancel{2}}\theta_2=\cancel{2}\,\cancel{\text{sen}\,\theta_1}\cos\theta_1\,\cancel{\text{sen}\,\theta_2}\cos\theta_2$$

$\text{sen}\,\theta_1\,\text{sen}\,\theta_2=\cos\theta_1\cos\theta_2$, cioè (dividendo i due membri per la quantità $\text{sen}\,\theta_1\cos\theta_2$):

$\text{tg}\,\theta_2=\text{cotg}\,\theta_1$; essendo $\text{cotg}\,\theta_1=\text{tg}(90°-\theta_1)$, risulta

$\text{tg}\,\theta_2=\text{tg}(90°-\theta_1)$, da cui $\boxed{\theta_2=90°-\theta_1=90°-30°=60°}$,

e quindi $\boxed{\alpha=\theta_1+\theta_2=30°+60°=90°}$ (risposta alla domanda c))

Di conseguenza otteniamo

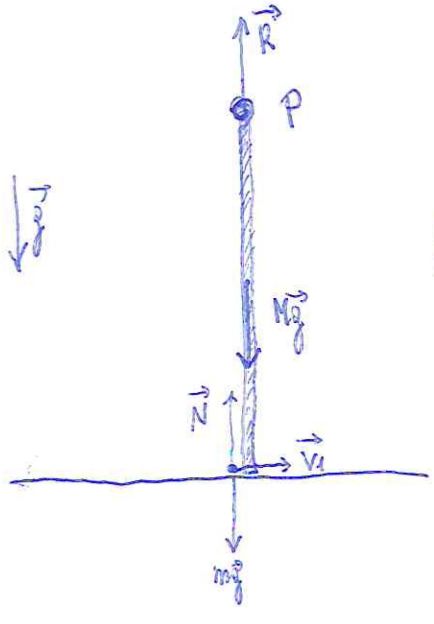
$$\boxed{\begin{aligned} v_{1f} &= \frac{v_{1i}\,\mathrm{sen}\,\theta_2}{\mathrm{sen}(\theta_1+\theta_2)} = \frac{v_{1i}\,\mathrm{sen}\,60^\circ}{\mathrm{sen}\,90^\circ} = \frac{(3\ m\,s^{-1})\cdot \sqrt{3}/2}{1} = 2,60\ m\,s^{-1} \\ v_{2f} &= \frac{v_{1i}\,\mathrm{sen}\,\theta_1}{\mathrm{sen}(\theta_1+\theta_2)} = \frac{(3\ m\,s^{-1})\cdot 1/2}{1} = 1,5\ m\,s^{-1} \end{aligned}}$$

(risposta alla domanda b))

Problema n. 2

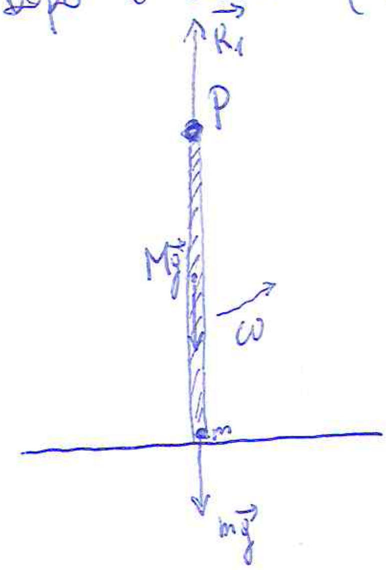
a) Prima dell'urto (diagramma delle forze agenti sul sistema)

P: perno



(2.1) Subito prima dell'urto, la risultante delle forze esterne è nulla, ed è nullo anche il momento risultante delle forze esterne calcolato rispetto al perno P in quanto il momento della reazione $\vec{R}$ del perno è nullo, e i bracci delle altre forze esterne sono nulli (vedi figura a fianco).

Dopo l'urto (diagramma delle forze agenti sul sistema)



Dopo l'urto, il sistema acquista una velocita' angolare di rotazione attorno all'asse orizzontale passante per il perno e perpendicolare al piano del foglio. Dunque, la risultante delle forze esterne subito dopo l'urto non e' nulla.

Resta nullo, invece, il momento risultante delle forze esterne calcolato rispetto al perno P, per le stesse ragioni per cui era nullo subito prima dell'urto.

Durante l'urto, il perno P esercita sul sistema una forza impulsiva, in generale, in quanto l'estremo superiore dell'asta rigida e' vincolato in tale posizione. Pertanto, il sistema non e' isolato durante l'urto. Tuttavia, anche durante l'urto il momento risultante delle forze esterne al sistema calcolato rispetto al perno P si mantiene nullo (la forza impulsiva e' applicata nel perno P!).

Pertanto, l'unica grandezza che si mantiene costante durante l'urto considerato e' il momento angolare totale calcolato rispetto al perno P.

Introdotto un asse cartesiano z perpendicolare al piano del foglio, con verso positivo uscente, e indicate con $L_{TOT,z,i}$ e $L_{TOT,z,f}$ le componenti lungo tale asse del momento angolare totale del sistema calcolato rispetto al perno P, deve risultare

$$L_{TOT,z,f} = L_{TOT,z,i}$$

$L_{TOT,z,i} = L m v_1$ (vedi figura (2.1))

Dopo l'urto, il centro di massa dell'asta inizia a muoversi con velocita' orizzontale $V_{a,x} = \omega \frac{L}{2}$, e il punto materiale conficcato alla sua estremita' superiore si muove (nello stesso istante) con velocita' orizzontale $V_{p,x} = \omega L$, dove ω e' la velocita' angolare del sistema subito dopo l'urto.

Il momento d'inerzia del sistema rigido relativo all'asse di rotazione passante per il perno P e'

$$I_z = \frac{1}{3} M L^2 + m L^2 = \left(\frac{1}{3} M + m\right) L^2$$

Risulta poi $L_{TOT,z,f} = I_z \omega$

Dunque: $I_z \omega = L m v_1$, e quindi

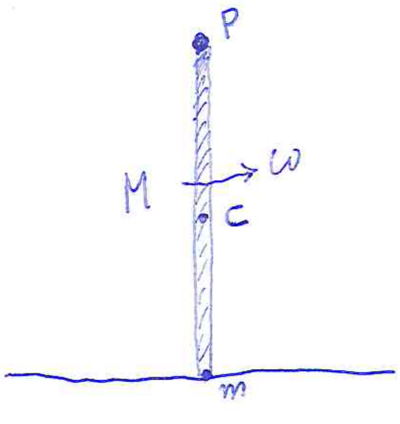
$$\omega = \frac{L m v_1}{I_z} = \frac{\cancel{L} m v_1}{\left(\frac{1}{3} M + m\right) L^{\cancel{2}}}$$

Dunque:

$$\boxed{\omega = \frac{m v_1}{\left(\frac{1}{3}M+m\right)L} = \frac{(0{,}05\ \text{kg})\cdot(10\ \text{m s}^{-1})}{\left[\frac{1}{3}(0{,}1\ \text{kg})+(0{,}05\ \text{kg})\right]\cdot(1\ \text{m})} \cong 6\ \text{rad s}^{-1}}$$

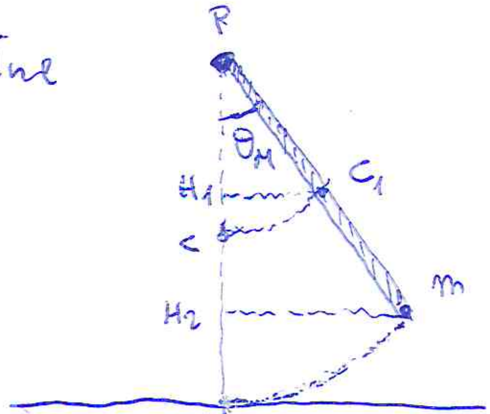
b) Dopo l'urto, l'unica forza che compie lavoro sul sistema è la forza peso; la reazione del perno non compie lavoro in quanto agisce su un punto del sistema che non si sposta durante la rotazione. Poiché la forza peso è conservativa, l'energia meccanica del sistema si conserva durante il moto successivo all'urto.

Inizio



C: posizione del centro di massa dell'asta

Fine



Nell'istante in cui l'asta è ruotata di un angolo θ_M rispetto alla direzione verticale, il centro di massa dell'asta si è sollevato di un tratto $\overline{CH_1} = \frac{L}{2} - \frac{L}{2}\cos\theta_M$, e l'estremo inferiore si è sollevato di un tratto $\overline{AH_2} = L - L\cos\theta_M$

Quando l'asta raggiunge la posizione angolare $\theta = \theta_M$ massima, in tale istante la sua energia cinetica di rotazione è nulla. Nel passaggio dalla posizione angolare $\theta = 0$ alla posizione angolare $\theta = \theta_M$ l'energia cinetica del sistema ha subito la variazione $\Delta K = K_f - K_i = -\frac{1}{2} I_z \omega^2$, dove ω è ovviamente la velocità angolare del sistema subito dopo l'urto, e l'energia potenziale del sistema ha subito la variazione $\Delta U = Mg \frac{L}{2}(1-\cos\theta_M) + mgL(1-\cos\theta_M) =$

$$= \left(\frac{M}{2}+m\right) gL (1-\cos\theta_M)$$

In un processo in cui si conserva l'energia meccanica deve risultare $\Delta K + \Delta U = 0$, e quindi otteniamo

$$-\frac{1}{2} I_z \omega^2 + \left(\frac{M}{2}+m\right) gL(1-\cos\theta_M) = 0, \quad \text{da cui}$$

$$\left(\frac{M}{2}+m\right) gL(1-\cos\theta_M) = \frac{1}{2} I_z \omega^2 \text{; moltiplichiamo per 2 i due membri:}$$

$$(M+2m) gL(1-\cos\theta_M) = I_z \omega^2$$

$$1-\cos\theta_M = \frac{I_z \omega^2}{(M+2m) gL} = \frac{\left(\frac{1}{3}M+m\right) L^{\cancel{2}} \omega^2}{(M+2m) g \cancel{L}}$$

$$\cos\theta_M = 1 - \frac{\left(\frac{M}{3}+m\right) L\omega^2}{(M+2m) g}$$

Allora otteniamo

$$\boxed{\vartheta_M = \arccos\left[1 - \frac{\left(\frac{M}{3}+m\right) L \omega^2}{(M+2m)\, g}\right] \simeq 2{,}13 \text{ rad} \simeq 121{,}94°}$$

c) La componente orizzontale I_x dell'impulso esercitato, nell'urto, dalla forza di reazione del perno è uguale alla variazione, nell'urto, della componente orizzontale della quantità di moto totale del sistema.

$$P_{TOT,i,x} = m v_1$$

$$P_{TOT,f,x} = M v_{a,x} + m v_{p,x} =$$

$$= M \omega \frac{L}{2} + m \omega L =$$

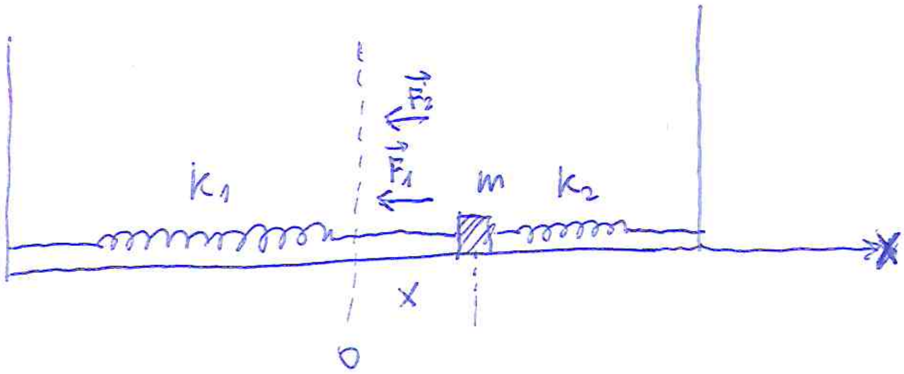
$$= \left(\frac{M}{2} + m\right) \omega L$$

Allora risulta

$$\boxed{\begin{aligned} I_x &= P_{TOT,f,x} - P_{TOT,i,x} = \left(\frac{M}{2}+m\right)\omega L - m v_1 = \\ &= \left(\frac{0{,}1 \text{ kg}}{2} + 0{,}05 \text{ kg}\right)(6 \text{ rad s}^{-1})(1 \text{ m}) - (0{,}05 \text{ kg})(10 \text{ m s}^{-1}) = 0{,}1 \text{ kg m s}^{-1} \end{aligned}}$$

Problema n. 3

a)



Quando il blocchetto e' spostato di un tratto x verso destra, la molla di sinistra "tira" verso sinistra, e la molla di destra "spinge" verso sinistra, per cui le componenti lungo l'asse x delle due forze hanno lo stesso segno. Scelto l'asse x come nella figura sopra, risulta

$$F_{TOT,x} = F_{1,x} + F_{2,x} = -k_1 x - k_2 x = -(k_1+k_2)x$$

Per la seconda legge della dinamica possiamo quindi scrivere:

$$m a_x = -(k_1+k_2)x \quad , \quad \text{e quindi}$$

$$\boxed{a_x = -\left(\frac{k_1+k_2}{m}\right)x}$$

Questa legge vale ovviamente anche per $x<0$.

b) Dato che $a_x(t) = [x(t)]''$, l'equazione ottenuta al punto a) del problema diventa

$$[x(t)]'' = -\left(\frac{k_1+k_2}{m}\right)x(t), \quad \text{cioè}$$

$$[x(t)]'' + \left(\frac{k_1+k_2}{m}\right)x(t) = 0$$

Questa equazione ci dice che il blocchetto si muove lungo l'asse x con una legge oraria di moto armonico, con pulsazione $\omega = \sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}$, e quindi il suo periodo di oscillazione armonica è

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1+k_2}} = 2\pi\sqrt{\frac{1\ kg}{125\ N\ m^{-1}}} \simeq 0{,}56\ s}$$

c) Sul piano orizzontale liscio, l'unica forza che compie lavoro è la forza elastica risultante delle due molle. Poiché la forza elastica è conservativa, l'energia meccanica del blocchetto si conserva durante il moto.
Inizialmente, l'energia meccanica del blocchetto è solo potenziale (blocchetto fermo):

$$E_{m,i} = \frac{1}{2}k_1 x_M^2 + \frac{1}{2}k_2 x_M^2 = \frac{1}{2}(k_1+k_2)x_M^2$$

Nell' istante in cui il blocchetto passa per la posizione di equilibrio, la sua energia meccanica e' solo cinetica (molla a riposo):

$$E_{m,f} = \frac{1}{2} m v^2$$

Allora deve risultare

$$E_{m,f} = E_{m,i} \Rightarrow \cancel{\frac{1}{2}} m v^2 = \cancel{\frac{1}{2}} (k_1+k_2) x_M^2,$$ e quindi

$$v^2 = \left(\frac{k_1+k_2}{m}\right) x_M^2,$$ e infine

$$\boxed{v = x_M \sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}} = (0{,}2\ m) \sqrt{\frac{125\ N \cdot m^{-1}}{1\ kg}} \simeq 2{,}24\ m\ s^{-1}}$$