Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)
Anno accademico: `2009-2010`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Appello dell'8 Settembre 2010

Esercizio 1. Si estraggono a caso 2 carte da un mazzo di carte numerate da 1 a 40, una alla volta e senza reinserimento. Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di carte estratte con i numeri da 1 a 10.
`D1`) Trovare la densità di X.
`D2`) Calcolare la probabilità di estrarre almeno una volta un numero pari.

Esercizio 2. Consideriamo il seguente gioco. Si comincia lanciando una moneta non equa per la quale la probabilità di ottenere testa è $\frac{2}{3}$; poi si lancia un dado equo. Se esce testa si vince il gioco se esce un numero dispari nel lancio del dado; se esce croce si vince il gioco se esce il *numero 6* nel lancio del dado.
`D3`) Calcolare la probabilità di vincere il gioco.
`D4`) Calcolare la probabilità di aver ottenuto testa nel lancio di moneta sapendo di aver vinto il gioco.

Esercizio 3. Consideriamo la seguente densità congiunta: $p_{(X_1,X_2)}(k,0) = \frac{2}{3}(\frac{1}{2})^{k+1}$ per $k \geq 0$ intero; $p_{(X_1,X_2)}(k,1) = \frac{2}{3}(\frac{1}{2})^{k+1}$ per $k \geq 1$ intero.
`D5`) Trovare le densità marginali di X_1 e X_2.
`D6`) Dire se X_1 e X_2 sono indipendenti.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con densità continua $f_X(t) = \frac{2}{25}t \cdot 1_{(0,5)}(t)$.
`D7`) Calcolare $\mathbb{E}[X]$.
`D8`) Calcolare la mediana m di X (si ricorda che, per definizione, m è l'unico valore per cui $P(X \leq m) = \frac{1}{2}$).
`D9`) Trovare la densità continua di $Y = X^2$.

Esercizio 5. Sia $N_t = \sum_{n\geq 1} 1_{T_n \leq t}$ (per $t \geq 0$) un processo di Poisson con intensità di $\lambda = 1$.
`D10`) Calcolare $P(N_5 = 2)$.

Esercizio 6. Sia X una variabile aleatoria normale di media $\mu = 20$ e varianza $\sigma^2 = 16$.
`D11`) Calcolare $P(19 < X < 22)$.
`D12`) Calcolare $P(X > 21)$.

Esercizio 7 (*solo per ST-Materiali*). Consideriamo una catena di Markov omogenea $\{X_n : n \geq 0\}$ con spazio degli stati $E = \{1, 2\}$ e matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

`D13`) Calcolare $P(X_1 = 1, X_2 = 2, X_3 = 1|X_0 = 1)$.
`D14`) Calcolare $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ per ogni $i, j \in \{1, 2\}$ dopo aver motivato l'esistenza di questi limiti.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
D1) La variabile aleatoria X ha distribuzione ipergeometrica: $p_X(k) = \frac{\binom{10}{k}\binom{30}{2-k}}{\binom{40}{2}}$ $(k \in \{0,1,2\})$. Quindi $p_X(0) = \frac{29}{52}$, $p_X(1) = \frac{20}{52}$ e $p_X(2) = \frac{3}{52}$.
D2) La variabile aleatoria Y che indica il numero di carte con numero pari estratte ha distribuzione ipergeometrica e la probabilità richiesta è $P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \frac{\binom{20}{0}\binom{20}{2}}{\binom{40}{2}} = 1 - \frac{19}{78} = \frac{59}{78}$.

Esercizio 2. Sia T l'evento "esce testa nel lancio di moneta" e sia V l'evento "vincere il gioco".
D3) Per la formula delle probabilità totali si ha $P(V) = P(V|T)P(T)+P(V|T^c)P(T^c) = \frac{3}{6}\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\frac{1}{3} = \frac{6+1}{18} = \frac{7}{18}$.
D4) Per la formula di Bayes (e per il valore di $P(V)$ calcolato prima) si ha $P(T|V) = \frac{P(V|T)P(T)}{P(V)} = \frac{\frac{3}{6}\frac{2}{3}}{\frac{7}{18}} = \frac{6}{18}\frac{18}{7} = \frac{6}{7}$.

Esercizio 3.
D5) Si ha $p_{X_1}(0) = p_{(X_1,X_2)}(0,0) = \frac{2}{3}(\frac{1}{2})^{0+1} = \frac{1}{3}$ e, per $k \geq 1$ intero, $p_{X_1}(k) = p_{(X_1,X_2)}(k,1) + p_{(X_1,X_2)}(k,0) = 2 \cdot \frac{2}{3}(\frac{1}{2})^{k+1} = \frac{2}{3}(\frac{1}{2})^k$; inoltre $p_{X_2}(0) = \sum_{k\geq 0} p_{(X_1,X_2)}(k,0) = \sum_{k\geq 0} \frac{2}{3}(\frac{1}{2})^{k+1} = \frac{2}{3}\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$ e $p_{X_2}(1) = \sum_{k\geq 1} p_{(X_1,X_2)}(k,1) = \sum_{k\geq 1} \frac{2}{3}(\frac{1}{2})^{k+1} = \frac{2}{3}\frac{(\frac{1}{2})^2}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}\frac{1}{2} = \frac{1}{3}$.
D6) Le variabili aleatorie X_1 e X_2 non sono indipendenti. Infatti l'uguaglianza $p_{(X_1,X_2)}(k,h) = p_{X_1}(k)p_{X_2}(h)$ non è soddisfatta per $(k,h) = (0,1)$ perché si ha $p_{(X_1,X_2)}(0,1) = 0$ e $p_{X_1}(0)p_{X_2}(1) = \frac{1}{3}\frac{1}{3} = \frac{1}{9}$.

Esercizio 4.
D7) Si ha $\mathbb{E}[X] = \int_0^5 t\frac{2}{25}tdt = \frac{2}{25}\int_0^5 t^2dt = \frac{2}{25}[\frac{t^3}{3}]_{t=0}^{t=5} = \frac{2}{25}\frac{125}{3} = \frac{10}{3}$.
D8) Si ha la seguente equazione con incognita m: $\frac{1}{2} = \int_0^m \frac{2}{25}tdt$. Quindi otteniamo $\frac{1}{2} = \frac{2}{25}[\frac{t^2}{2}]_{t=0}^{t=m}$, $\frac{1}{2} = \frac{m^2}{25}$, $m^2 = \frac{25}{2}$, $m = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5}{2}\sqrt{2}$.
D9) Si ha $P(0 < Y < 5^2) = 1$, da cui segue $F_Y(y) = 0$ per $y \leq 0$ e $F_Y(y) = 1$ per $y \geq 25$. Per $0 < y < 25$ si ha $F_Y(y) = P(X^2 \leq y) = P(X \leq \sqrt{y}) = \int_0^{\sqrt{y}} \frac{2}{25}tdt = \frac{2}{25}[\frac{t^2}{2}]_{t=0}^{t=\sqrt{y}} = \frac{y}{25}$. Quindi la densità è $f_Y(y) = \frac{1}{25}1_{(0,25)}(y)$; in altri termini Y ha distribuzione uniforme su $(0,25)$.

Esercizio 5.
D10) Si ha $P(N_5 = 2) = \frac{(1\cdot 5)^2}{2!}e^{-1\cdot 5} = \frac{25}{2}e^{-5}$.

Esercizio 6.
D11) Si ha $P(19 < X < 22) = P(\frac{19-20}{\sqrt{16}} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{22-20}{\sqrt{16}}) = \Phi(\frac{1}{2})-\Phi(-\frac{1}{4}) = \Phi(0.5)-(1-\Phi(0.25)) = \Phi(0.5)+\Phi(0.25)-1 = 0.69146+0.59871-1 = 0.29017$.
D12) Si ha $P(X > 21) = P(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{21-20}{\sqrt{16}}) = 1-\Phi(\frac{1}{4}) = 1-\Phi(0.25) = 1-0.59871 = 0.40129$.

Esercizio 7.
D13) Si ha $P(X_1 = 1, X_2 = 2, X_3 = 1|X_0 = 1) = p_{11}p_{12}p_{21} = \frac{1}{4}\frac{3}{4}\frac{1}{2} = \frac{3}{32}$.
D14) La catena è regolare perché si ha una matrice di transizione con tutti elementi positivi. Quindi possiamo applicare il teorema di Markov e si ha $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j$ per ogni $i,j \in \{1,2\}$, dove $\pi = (\pi_1,\pi_2)$ è l'unica distribuzione stazionaria. La distribuzione stazionaria soddisfa la seguente relazione

$$(\pi_1,\pi_2)\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = (\pi_1,\pi_2).$$

Si ottengono le seguenti due equazioni:

$$\begin{cases} \frac{1}{4}\pi_1 + \frac{\pi_2}{2} = \pi_1 \\ \frac{3}{4}\pi_1 + \frac{\pi_2}{2} = \pi_2 \end{cases}$$

Da ciascuna equazione si ha $\pi_2 = \frac{3}{2}\pi_1$ e, tenendo conto il vincolo $\pi_1 + \pi_2 = 1$, abbiamo $\pi_1 + \frac{3}{2}\pi_1 = 1$ da cui segue $\pi_1 = \frac{1}{1+\frac{3}{2}} = \frac{2}{5}$ e $\pi_2 = \frac{3}{5}$.

Commenti.
La somma dei valori di ciascuna densità discreta che appare è 1 in accordo con la teoria.
`D2`) In altro modo si ha $P(Y \geq 1) = p_Y(1) + p_Y(2) = \frac{\binom{20}{1}\binom{20}{1}}{\binom{40}{2}} + \frac{\binom{20}{2}\binom{20}{0}}{\binom{40}{2}} = \frac{40+19}{78} = \frac{59}{78}$.
`D6`) La non indipendenza tra X_1 e X_2 si riscontra senza far calcoli osservando che l'insieme $D = \{(k,h) : p_{(X_1,X_2)}(k,h) > 0\}$ non è un prodotto cartesiano. Questo si spiega come segue. Possiamo "aggiungere qualche punto" in maniera opportuna per passare da D ad un prodotto cartesiano D^* e, in corrispondenza, per i punti aggiunti (cioè quelli di $D^* \setminus D$) abbiamo quanto segue: la densità congiunta è uguale a zero (ovvio) e il prodotto delle densità marginali è diverso da zero (perché le densità marginali sono diverse da zero). Nel caso specifico si ha

$$D = (\{0,1,2,\ldots\} \times \{0\}) \cup (\{1,2,\ldots\} \times \{1\})$$

e si ottiene il prodotto cartesiano $D^* = \{0,1,2,\ldots\} \times \{0,1\}$ aggiungendo il punto $(0,1)$ (infatti si ha $D^* = D \cup \{(0,1)\}$); inoltre, come abbiamo visto, $p_{(X_1,X_2)}(0,1) = 0$ e $p_{X_1}(0)p_{X_2}(1) = \frac{1}{3}\frac{1}{3} = \frac{1}{9}$.