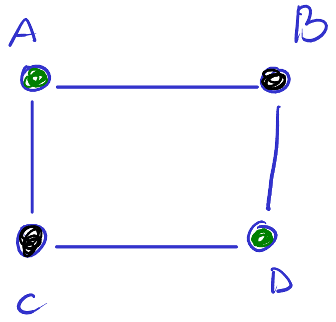
**Problema 9.20**: Si consideri il seguente problema decisionale: dato un grafo non orientato $G = (V, E)$ (in cui $V$ è l'insieme dei nodi ed $E$ l'insieme degli archi) ed un intero positivo $k$, decidere se l'insieme $V$ può essere partizionato in al più $k$ insiemi indipendenti.

Dopo aver formalizzato la definizione del suddetto problema mediante la tripla $\langle I, S, \pi \rangle$, dimostrarne la NP-completezza.

$K = 2$




$\{A, D\}$ è IS $\cup$ V

$\{B, C\}$ è IS

$$\mathcal{I}_\Gamma = \{ \langle G = (V, E), K \rangle : G \text{ è un grafo non orientato } \wedge K \in \mathbb{N} \}$$

$$S_\Gamma(G, K) = \{ \langle V_1, \dots, V_h \rangle : \forall\, 1 \leq i \wedge j \leq h \, [V_i \cap V_j = \emptyset \wedge \bigcup_{i=1}^{h} V_i = V \}$$

$$\pi_\Gamma(G, K, S_\Gamma(G, K)) = \exists \langle V_1, \dots, V_h \rangle : h \leq K \wedge \forall\, u, v \in V_i \; [(u, v) \notin E]$$
$$i = 1, \dots, h$$

$COL \leq \Gamma$

$\langle G, K \rangle \in \mathcal{I}_{COL} \iff \langle G', K' \rangle \in \mathcal{I}_\Gamma$

$G' = G$

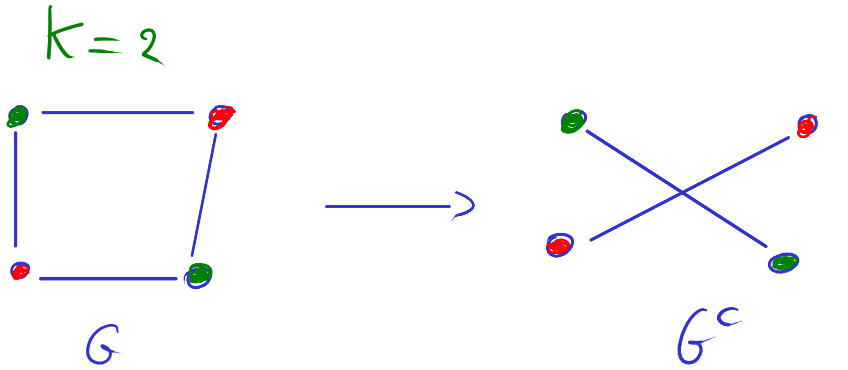
$K' = K$

$\Leftarrow$ Se $G$ contiene una partizione di al più $K$ IS allora $G$ è colorabile con al più $K$ colori

$\Rightarrow$ Se $G$ è colorabile con al più $K$ colori allora $G'$ contiene una partizione di al più $K$ IS.

**Problema 9.21**: Si consideri il seguente problema decisionale: dato un grafo non orientato $G = (V, E)$ (in cui $V$ è l'insieme dei nodi ed $E$ l'insieme degli archi) ed un intero positivo $k$, decidere se l'insieme $V$ può essere partizionato in al più $k$ clique.

Dopo aver formalizzato la definizione del suddetto problema mediante la tripla $\langle I, S, \pi \rangle$, dimostrarne la NP-completezza.




$$\mathcal{I}_\Gamma = \{\langle G, k \rangle : G \text{ è un grafo non orientato} \wedge k \in \mathbb{N}\}$$

$$S_\Gamma(G,k) = \{\langle C_1, \dots, C_h \rangle : 1 \le i \wedge j \le h \; C_i \cap C_j = \emptyset \wedge \bigcup_{i=1}^{h} C_i = V\}$$

$$\pi_\Gamma(G, k, S(G,k)) = \exists \langle C_1, \dots, C_h \rangle : h \le k \wedge \forall_{\substack{u,v \in C_i \\ i=1,\dots,h}} [(u,v) \in E]$$

$COL \le \Gamma$

$\langle G, k \rangle \in \mathcal{I}_{COL} \iff \langle G', k' \rangle \in \Gamma$

$G' = G^c$

$k' = k$

$\Rightarrow$ Se $G$ è colorabile con al più $k$ colori allora i nodi colorati con stesso colore in $G$ formano una clicque in $G^c \Rightarrow k$ colori $\Rightarrow k$ clique

$\Leftarrow$ Se $G^c$ contiene una partizione di $k$ clique i modi di ciascuna clique sono colorati con stesso colore in $G$.

**Problema 9.22**: Il problema 4-SODDISFACIBILITÀ consiste nel chiedersi se una funzione booleana in forma congiuntiva normale con clausole di esattamente 4 letterali ciascuna è soddisfacibile.

Formalizzare la definizione del suddetto problema mediante la tripla $\langle I, S, \pi \rangle$, e dimostrarne la NP-completezza.

$$\mathcal{Y}_{4SAT} = \{ \langle X, f \rangle : f : X \to \{vero, falso\} \wedge f \text{ è in } 4CNF \}$$

$$S_{4SAT}(X, f) = \{ a : X \to \{vero, falso\} \}$$

$$\pi_{4SAT}(X, f, S_{4SAT}(X, f)) = \exists\, a \in S_{4SAT} : f(x(a)) = vero$$

① È NP?

Sia $a$ un assegnazione di verità ovvero un certificato per 4SAT, richiede tempo $O(|f||X|)$ per verificarlo che è polinomiale nell'input.

② NPC?

$3SAT \leq 4SAT$

$$\langle X, f \rangle \in \mathcal{Y}_{3SAT} \iff \langle X', f' \rangle \in \mathcal{Y}_{4SAT}$$

$$X' = X \cup \{ y_i : \forall i = 1, \dots |f| \}$$

$f'$ diventa:

$$\underset{\in f}{C_i} \longrightarrow \underset{\in f'}{D_j} \qquad l_i = \{ x_i, \neg x_i \}$$

$$C_i = ( l_{i1} \vee l_{i2} \vee l_{i3} )$$

$$\Downarrow$$

$$D_i = \begin{array}{c} (l_{i1} \vee l_{i2} \vee l_{i3} \vee y_i) \\ \wedge \\ (l_{i1} \vee l_{i2} \vee l_{i3} \vee \bar{y}_i) \end{array}$$

Se $C_i$ è soddisfacibile anche $D_i$ è soddisfacibile per qualsiasi assegnazione di $y_i$

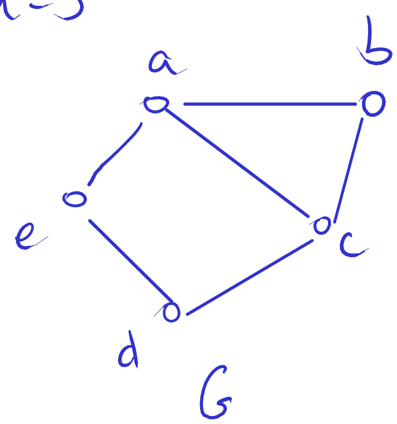
**Problema 9.24**: Si ricordi la definizione di colorabilità di un grafo.

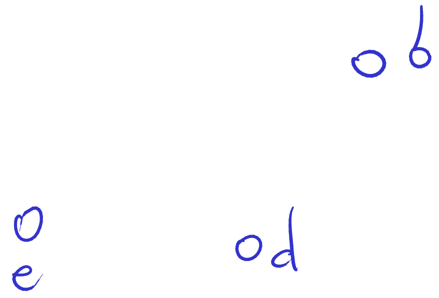
Dati un grafo $G = (V, E)$ e $V' \subseteq V$, il *grafo indotto* in $G$ da $V'$ è il grafo $G' = (V', E')$ in cui, per ogni coppia di nodi $x, y \in V'$, $(x, y) \in E'$ se e soltanto se $(x, y) \in E$.

Si consideri il seguente problema decisionale: dato un grafo non orientato $G = (V, E)$ ed un intero positivo $k$, decidere se l'insieme $V$ contiene un sottoinsieme $V'$ di almeno $k$ nodi tale che il sottografo di $G$ indotto da $V'$ sia 1-colorabile.

Dopo aver formalizzato la definizione del suddetto problema mediante la tripla $\langle I, S, \pi \rangle$, dimostrarne l'appartenenza alla classe **P** o, in alternativa, la **NP**-completezza.

$k=3$




$G' = (V', E')$ indotto

Grafo indotto è un qualsiasi sottografo di $G$

$$\mathcal{I}_\Pi = \{ \langle G, k \rangle : G \text{ è un grafo non orientato} \wedge k \in \mathbb{N} \}$$

$$S_\Pi(G, k) = \{ V' : V' \subseteq V \}$$

$$\pi_\Pi(G, k, S_\Pi(G, k)) = \exists\, V' \in S_\Pi(G, k) : |V'| \geq k \wedge \forall (u, v) \in V' \; [(u, v) \notin E]$$

$= \text{Indipendent Set} \in NPC$