Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)
Anno accademico: 2009-2010. *Titolare del corso:* Claudio Macci
Appello del 19 Febbraio 2010

Esercizio 1. Un'urna ha 3 palline con i numeri 1,2,3. Si estraggono a caso 2 palline, una alla volta e senza reinserimento. Sia X la variabile aleatoria che indica la differenza tra il primo numero estratto e il secondo numero estratto.
D1) Trovare la densità di X.
D2) Calcolare $\mathbb{E}[X]$ e $\mathrm{Var}[X]$.

Esercizio 2. Si lancia una moneta equa e poi si lancia ripetutamente un dado equo fino ad un certo punto, in accordo con la seguente regola di arresto: se esce testa ci si ferma la prima volta che esce il numero 1, se esce croce ci si ferma la prima volta che esce un numero pari.
D3) Calcolare la probabilità di lanciare il dado esattamente due volte.
D4) Calcolare la probabilità di aver ottenuto testa nel lancio di moneta sapendo di aver lanciato il dado esattamente due volte.

Esercizio 3. Si lancia una moneta equa 3 volte. Siano X_1 e X_2 le variabili aleatorie che contano il numero di teste e di croci ottenute, rispettivamente.
D5) Trovare la densità congiunta di (X_1, X_2).
D6) Calcolare $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con distribuzione uniforme su $(0, 1)$.
D7) Trovare la densità continua di $Y = 1 - \sqrt{X}$.
D8) Verificare che la mediana di Y è $m = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ (si ricorda che, per definizione, m è l'unico valore per cui $F_Y(m) = \frac{1}{2}$).
D9) Calcolare $\mathbb{E}[Y]$.

Esercizio 5. Sia $N_t = \sum_{n\geq 1} 1_{T_n \leq t}$ un processo di Poisson di intensità $\lambda = 2$.
D10) Calcolare $P(N_5 = 1)$.

Esercizio 6. Sia X una variabile aleatoria normale di media $\mu = 10$ e varianza $\sigma^2 = 16$.
D11) Calcolare $P(9 < X < 12)$.
D12) Calcolare $P(X > 11)$.

Esercizio 7 (*solo per ST-Materiali*). Consideriamo una catena di Markov omogenea $\{X_n : n \geq 0\}$ con matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} q & 1-q \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

per $q \in [0, 1)$.
D13) Calcolare $P(X_1 = j)$ per $j \in \{1, 2\}$ nel caso in cui $q = \frac{2}{3}$ e $P(X_0 = 1) = P(X_0 = 2) = \frac{1}{2}$.
D14) Motivare l'esistenza del limite $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ per ogni $i, j \in \{1, 2\}$ e dire per quale valore di q si ha $\lim_{n\to\infty} p_{11}^{(n)} = \frac{3}{4}$.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1. Si ha un modello discreto uniforme sull'insieme delle sequenze ordinate di 2 elementi di $\{1, 2, 3\}$ senza ripetizioni. Tale insieme è $\{(1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), (2, 3), (3, 2)\}$ e in effetti è costituito da $\#D_{3,2} = 3 \cdots (3 - 2 + 1) = 6$ elementi.
D1) Si ha $p_X(2) = P(\{(3, 1)\}) = \frac{1}{6}$, $p_X(1) = P(\{(2, 1), (3, 2)\}) = \frac{2}{6}$, $p_X(-1) = P(\{(1, 2), (2, 3)\}) = \frac{2}{6}$, $p_X(-2) = P(\{(1, 3)\}) = \frac{1}{6}$.
D2) Si ha $\mathbb{E}[X] = 2 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{2}{6} - 1 \cdot \frac{2}{6} - 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{2+2-2-2}{6} = 0$ e $\text{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}^2[X] = 2^2 \cdot \frac{1}{6} + 1^2 \cdot \frac{2}{6} + (-1)^2 \cdot \frac{2}{6} + (-2)^2 \cdot \frac{1}{6} - 0^2 = \frac{4+2+2+4}{6} = \frac{12}{6} = 2$.

Esercizio 2. Sia E l'evento "lanciare il dado esattamente 2 volte" e sia T l'evento di "esce testa nel lancio di moneta".
D3) Per la formula delle probabilità totali si ha $P(E) = P(E|T)P(T) + P(E|T^c)P(T^c) = (1 - \frac{1}{6})\frac{1}{6}\frac{1}{2} + (1 - \frac{3}{6})\frac{3}{6}\frac{1}{2} = (\frac{5+9}{36})\frac{1}{2} = \frac{14}{36}\frac{1}{2} = \frac{7}{36}$.
D4) Per la formula di Bayes (e per il valore di $P(E)$ calcolato prima) si ha $P(T|E) = \frac{P(E|T)P(T)}{P(E)} = \frac{(1-\frac{1}{6})\frac{1}{6}\frac{1}{2}}{\frac{7}{36}} = \frac{5}{72}\frac{36}{7} = \frac{5}{14}$.

Esercizio 3. Le variabili aleatorie X_1 e X_2 hanno la stessa distribuzione binomiale di parametri $n = 3$ e $p = \frac{1}{2}$; quindi, per $i \in \{1, 2\}$, si ha $p_{X_i}(k) = \binom{3}{k}(\frac{1}{2})^3$, da cui segue $p_{X_i}(0) = p_{X_i}(3) = \frac{1}{8}$ e $p_{X_i}(1) = p_{X_i}(2) = \frac{3}{8}$. Inoltre si ha $\mathbb{E}[X_1] = \mathbb{E}[X_2] = 3\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.
D5) Osservando che $X_2 = 3 - X_1$, abbiamo $p_{X_1,X_2}(0, 3) = p_{X_1,X_2}(3, 0) = \frac{1}{8}$ e $p_{X_1,X_2}(1, 2) = p_{X_1,X_2}(2, 1) = \frac{3}{8}$.
D6) Si ha $\mathbb{E}[X_1X_2] = 0 \cdot 3 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot 2 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot 1 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot 0 \cdot \frac{1}{8} = \frac{0+6+6+0}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$, da cui segue $\text{Cov}(X_1, X_2) = \mathbb{E}[X_1X_2] - \mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[X_2] = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\frac{3}{2} = \frac{3}{2} - \frac{9}{4} = \frac{6-9}{4} = -\frac{3}{4}$.

Esercizio 4.
D7) Si ha $P(0 < Y < 1) = 1$, da cui segue $F_Y(y) = 0$ per $y \leq 0$ e $F_Y(y) = 1$ per $y \geq 1$. Per $0 < y < 1$ si ha $F_Y(y) = P(1 - \sqrt{X} \leq y) = P(X \geq (1 - y)^2) = \int_{(1-y)^2}^{1} \frac{1}{1-0}dt = 1 - (1 - y)^2$. Quindi la densità è $f_Y(y) = 2(1 - y)1_{(0,1)}(y)$.
D8) Si ha l'equazione $1 - (1 - m)^2 = \frac{1}{2}$, da cui segue $(1 - m)^2 = \frac{1}{2}$, $1 - m = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $m = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$.
D9) Si ha $\mathbb{E}[Y] = \int_0^1 y2(1 - y)dy = \int_0^1 2y - 2y^2dy = [y^2 - 2\frac{y^3}{3}]_{y=0}^{y=1} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

Esercizio 5.
D10) Si ha $P(N_5 = 1) = \frac{(2 \cdot 5)^1}{1!}e^{-2 \cdot 5} = 10e^{-10}$.

Esercizio 6.
D11) Si ha $P(9 < X < 12) = P(\frac{9-10}{\sqrt{16}} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{12-10}{\sqrt{16}}) = \Phi(\frac{1}{2}) - \Phi(-\frac{1}{4}) = \Phi(0.5) - (1 - \Phi(0.25)) = \Phi(0.5) + \Phi(0.25) - 1 = 0.69146 + 0.59871 - 1 = 0.29017$.
D12) Si ha $P(X > 11) = P(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{11-10}{\sqrt{16}}) = 1 - \Phi(\frac{1}{4}) = 1 - \Phi(0.25) = 1 - 0.59871 = 0.40129$.

Esercizio 7.
D13) I valori richiesti sono dati dalla seguente relazione matriciale:

$$(P(X_1 = 1), P(X_1 = 2)) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}, \frac{1}{6} + \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{4+3}{12}, \frac{2+3}{12}\right) = \left(\frac{7}{12}, \frac{5}{12}\right).$$

D14) Per i valori di $q \in [0, 1)$ la catena è regolare perché è irriducibile e $p_{22} > 0$. Quindi possiamo applicare il teorema di Markov e si ha $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j$ per ogni $i, j \in \{1, 2\}$, dove $\pi = (\pi_1, \pi_2)$ è la distribuzione stazionaria. La distribuzione stazionaria soddisfa la seguente relazione

$$(\pi_1, \pi_2) \begin{pmatrix} q & 1-q \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = (\pi_1, \pi_2).$$

Si ottengono le seguenti due equazioni:

$$\begin{cases} q\pi_1 + \frac{\pi_2}{2} = \pi_1 \\ (1-q)\pi_1 + \frac{\pi_2}{2} = \pi_2 \end{cases}$$

Da ciascuna equazione si ha $\pi_2 = 2(1-q)\pi_1$ e, tenendo conto il vincolo $\pi_1 + \pi_2 = 1$, abbiamo $\pi_1 + 2(1-q)\pi_1 = 1$ da cui segue $\pi_1 = \frac{1}{1+2(1-q)} = \frac{1}{3-2q}$ e $\pi_2 = 1 - \frac{1}{3-2q} = \frac{2-2q}{3-2q}$. In conclusione la distribuzione stazionaria è $\pi = (\frac{1}{3-2q}, \frac{2-2q}{3-2q})$. In particolare il valore di q richiesto è la soluzione dell'equazione $\frac{1}{3-2q} = \frac{3}{4}$. Quindi si ha $3(3-2q) = 4$, $9 - 4 = 6q$, $q = \frac{5}{6}$.

Commenti.
La somma dei valori di ciascuna densità discreta che appare è 1 in accordo con la teoria.
`D6`) In altro modo $\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = \mathrm{Cov}(X_1, 3 - X_1) = \mathrm{Cov}(X_1, 3) - \mathrm{Cov}(X_1, X_1) = 0 - \frac{3}{4} = -\frac{3}{4}$, perché: $\mathrm{Cov}(X_1, 3) = 0$ (la covarianza è nulla se una delle due variabili aleatorie è costante); $\mathrm{Cov}(X_1, X_1) = \frac{3}{4}$ tenendo presente le uguaglianze $\mathrm{Cov}(X_1, X_1) = \mathrm{Var}[X_1]$ (proprietà generale della covarianza) e $\mathrm{Var}[X_1] = 3\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$ (perché X_1 ha distribuzione binomiale di parametri $n = 3$ e $p = \frac{1}{2}$).
`D6`) Poiché $X_2 = 3 - X_1$, i coefficienti della retta di regressione $x_2 = ax_1 + b$ saranno $a = -1$ e $b = 3$; inoltre il coefficiente di correlazione è uguale a -1. Verifichiamo queste uguaglianze:

$$\begin{cases} a = \frac{\mathrm{Cov}(X_1,X_2)}{\mathrm{Var}[X_1]} = \frac{-3/4}{3/4} = -1 \\ b = \mathbb{E}[X_2] - a\mathbb{E}[X_1] = \frac{3}{2} - (-1)\frac{3}{2} = \frac{3+3}{2} = 3 \\ \rho = \frac{\mathrm{Cov}(X_1,X_2)}{\sqrt{\mathrm{Var}[X_1]\mathrm{Var}[X_2]}} = \frac{-3/4}{\sqrt{(3/4)^2}} = -1. \end{cases}$$

`D9`) In altro modo $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[1 - \sqrt{X}] = \int_0^1 1 - \sqrt{x}dx = [x - \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}]_{x=0}^{x=1} = 1 - \frac{1}{\frac{3}{2}} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$, oppure $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[1 - \sqrt{X}] = 1 - \mathbb{E}[\sqrt{X}] = 1 - \int_0^1 \sqrt{x}dx = 1 - [\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}]_{x=0}^{x=1} = 1 - \frac{1}{\frac{3}{2}} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.
`D14`) Nel caso $q = 1$ si ha un'unica distribuzione stazionaria $\pi = (\pi_1, \pi_2) = (1, 0)$ perché 1 è uno stato assorbente e 0 è uno stato transitorio; allora le ipotesi del teorema di Markov non sono soddisfatte (la catena non è irriducibile e quindi non è regolare) ma abbiamo le stesse conclusioni di tale teorema, cioè $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j$ per ogni $i, j \in \{1, 2\}$. Questo si verifica osservando che, per ogni $n \geq 1$, si ha: $p_{11}^{(n)} = 1$ e $p_{12}^{(n)} = 0$ (ovvio); $p_{22}^{(n)} = (\frac{1}{2})^n$ (la catena è in 2 dopo n passi se e solo se è rimasta in 2 in ogni passo), da cui segue $p_{21}^{(n)} = 1 - (\frac{1}{2})^n$.