Statistica per la ricerca sperimentale e tecnologica
Corso di Laurea in Informatica, Università di Roma "Tor Vergata"
Anno accademico: `2007-2008`
Titolare del corso: `Claudio Macci`
Preappello del 21 Dicembre 2007

Esercizio 1. Un'urna ha 3 palline numerate da 1 a 3. Si estraggono a caso palline dall'urna, una alla volta con reinserimento. Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di volte che si estrae un numero dispari su 4 estrazioni.
`D1`) Trovare la densità discreta di X.
Sia Y la variabile aleatoria che indica a quale estrazione esce per la prima volta il numero 1, e sia E l'evento "esce la sequenza $(3, 2, 1)$".
`D2`) Calcolare $P(E|Y = 3)$.

Esercizio 2. Abbiamo due urne: la prima ha 3 palline numerate da 1 a 3, la seconda ha una pallina nera. Si estrae una pallina a caso dalla prima urna e sia X la variabile aleatoria che indica il numero estratto. Poi si mettono X palline bianche nella seconda urna. Infine si estrae una pallina a caso dalla seconda urna, e indichiamo con B l'evento "la pallina estratta è bianca".
`D3`) Calcolare $P(B)$.
`D4`) Calcolare $P(X = k|B)$ per $k \in \{1, 2, 3\}$.

Esercizio 3. La variabile aleatoria (X_1, X_2) ha la seguente densità congiunta: $p_{(X_1,X_2)}(2, 0) = p_{(X_1,X_2)}(1, 0) = p_{(X_1,X_2)}(1, 1) = p_{(X_1,X_2)}(0, 1) = p_{(X_1,X_2)}(0, 2) = \frac{1}{5}$.
`D5`) Calcolare $\text{Cov}(X_1, X_2)$.
`D6`) Trovare la densità discreta di $Z = X_1 + X_2$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con densità $f_X(t) = \frac{2}{81}t$ per $0 < t < 9$ e $f_X(t) = 0$ altrimenti.
`D7`) Calcolare la funzione di distribuzione di X.
`D8`) Calcolare $P([X] = 2)$, dove $[x] = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$ è la *parte intera* di x.
Inoltre sia (X_n) una successione di variabili aleatorie indipendenti e tutte con la stessa distribuzione di X. Infine poniamo $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$.
`D9`) Trovare il valore di m per cui si ha $\lim_{n\to\infty} P(|\overline{X}_n - m| \geq \varepsilon) = 0$ per ogni $\varepsilon > 0$.

Esercizio 5. Sia X una variabile aleatoria esponenziale di parametro $\lambda = 10$.
`D10`) Calcolare $P(\{X < 1\} \cup \{2 < X < 3\})$.
Sia Y un'altra variabile aleatoria esponenziale di parametro $\lambda = 10$, e supponiamo che X e Y siano indipendenti.
`D11`) Calcolare $\text{Var}[X + Y]$.

Esercizio 6. Sia X una variabile aleatoria normale con media $\mu = 1$ e varianza $\sigma^2 = 225$.
`D12`) Calcolare $P(X > 21)$.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.

D1) La variabile aleatoria X ha distribuzione binomiale con parametri $n = 4$ (numero delle estrazioni) e $p = \frac{2}{3}$ (probabilità di estrarre un numero dispari in ogni estrazione). Quindi $p_X(k) = \binom{4}{k}(\frac{2}{3})^k(1-\frac{2}{3})^{4-k}$ per $k \in \{0,1,2,3,4\}$, da cui $p_X(0) = \frac{1}{81}$, $p_X(1) = \frac{8}{81}$, $p_X(2) = \frac{24}{81}$, $p_X(3) = \frac{32}{81}$ e $p_X(4) = \frac{16}{81}$.

D2) Si ha $P(E|Y=3) = \frac{P(E\cap\{Y=3\})}{P(Y=3)} = \frac{P(E)}{P(Y=3)} = \frac{\frac{1}{3}\frac{1}{3}\frac{1}{3}}{(1-\frac{1}{3})^{3-1}\frac{1}{3}} = \frac{1}{4}$, tenendo conto che $E \subset \{Y=3\}$ per la seconda uguaglianza.

Esercizio 2.

D3) Per la formula delle probabilità totali si ha $P(B) = \sum_{k=1}^{3} P(B|X=k)P(X=k) = \frac{1}{2}\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\frac{1}{3} + \frac{3}{4}\frac{1}{3} = \left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\right)\frac{1}{3} = \frac{6+8+9}{12}\frac{1}{3} = \frac{23}{36}$.

D4) Per la formula di Bayes, e sfruttando il valore di $P(B)$ calcolato prima, si ha $P(X=k|B) = \frac{P(B|X=k)P(X=k)}{P(B)} = \frac{P(B|X=k)\frac{1}{3}}{\frac{23}{36}} = P(B|X=k)\frac{12}{23}$, da cui $P(X=1|B) = \frac{6}{23}$, $P(X=2|B) = \frac{8}{23}$, $P(X=3|B) = \frac{9}{23}$.

Esercizio 3.

D5) Si ha: $p_{X_1}(0) = p_{(X_1,X_2)}(0,1) + p_{(X_1,X_2)}(0,2) = \frac{2}{5}$, $p_{X_1}(1) = p_{(X_1,X_2)}(1,0) + p_{(X_1,X_2)}(1,1) = \frac{2}{5}$, $p_{X_1}(2) = p_{(X_1,X_2)}(2,0) = \frac{1}{5}$, da cui $\mathbb{E}[X_1] = 0\frac{2}{5} + 1\frac{2}{5} + 2\frac{1}{5} = \frac{4}{5}$; $p_{X_2}(0) = p_{(X_1,X_2)}(1,0) + p_{(X_1,X_2)}(2,0) = \frac{2}{5}$, $p_{X_2}(1) = p_{(X_1,X_2)}(0,1) + p_{(X_1,X_2)}(1,1) = \frac{2}{5}$, $p_{X_2}(2) = p_{(X_1,X_2)}(0,2) = \frac{1}{5}$, da cui $\mathbb{E}[X_2] = 0\frac{2}{5} + 1\frac{2}{5} + 2\frac{1}{5} = \frac{4}{5}$; $\mathbb{E}[X_1X_2] = (0\cdot 2)\frac{1}{5} + (0\cdot 1)\frac{1}{5} + (1\cdot 1)\frac{1}{5} + (2\cdot 0)\frac{1}{5} + (1\cdot 0)\frac{1}{5} = \frac{1}{5}$. Quindi $\mathrm{Cov}(X_1,X_2) = \mathbb{E}[X_1X_2] - \mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[X_2] = \frac{1}{5} - \frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5} = \frac{1}{5} - \frac{16}{25} = \frac{5-16}{25} = -\frac{11}{25}$.

D6) Si ha $p_Z(1) = p_{(X_1,X_2)}(0,1) + p_{(X_1,X_2)}(1,0) = \frac{2}{5}$ e $p_Z(2) = p_{(X_1,X_2)}(0,2) + p_{(X_1,X_2)}(1,1) + p_{(X_1,X_2)}(2,0) = \frac{3}{5}$.

Esercizio 4.

D7) Si ha $F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(x)dx$, e quindi: $F_X(t) = 0$ per $t < 0$; $F_X(t) = \int_0^t \frac{2}{81}xdx = \left[\frac{2}{81}\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=t} = \frac{t^2}{81}$ per $0 \le t < 9$; $F_X(t) = 1$ per $t \ge 9$.

D8) Si ha $P([X]=2) = P(2 \le X < 3) = \int_2^3 \frac{2}{81}tdt = \left[\frac{2}{81}\frac{t^2}{2}\right]_{t=2}^{t=3} = \frac{2}{81}\frac{3^2-2^2}{2} = \frac{5}{81}$.

D9) Si ha $m = \mathbb{E}[X] = \int_0^9 t\frac{2}{81}tdt = \frac{2}{81}\int_0^9 t^2dt = \frac{2}{81}\left[\frac{t^3}{3}\right]_{t=0}^{t=9} = \frac{2}{81}\frac{9^3-0^3}{3} = 2\frac{9}{3} = 6$.

Esercizio 5.

D10) Si ha $P(\{X<1\}\cup\{2<X<3\}) = P(X<1) + P(2<X<3) = 1 - e^{-10\cdot 1} + \{1 - e^{-10\cdot 3} - (1 - e^{-10\cdot 2})\} = 1 - e^{-10} + e^{-20} - e^{-30}$.

D11) Si ha $\mathrm{Var}[X+Y] = \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[Y]$ per l'ipotesi di indipendenza (basterebbe la non correlazione); inoltre $\mathrm{Var}[X] = \mathrm{Var}[Y] = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}$. Quindi $\mathrm{Var}[X+Y] = \frac{1}{100} + \frac{1}{100} = \frac{2}{100}$.

Esercizio 6.

D12) La v.a. $Z_X = \frac{X-1}{\sqrt{225}}$ è la standardizzata di X e si ha $P(X>21) = P(\frac{X-1}{\sqrt{225}} > \frac{21-1}{\sqrt{225}}) = P(Z_X > \frac{20}{15}) = 1 - \Phi(\frac{20}{15}) = 1 - \Phi(1.33) = 1 - 0.90824 = 0.09176$.

Commenti.

D1) Si ha $p_X(0) + p_X(1) + p_X(2) + p_X(3) + p_X(4) = \frac{1+8+24+32+16}{81} = 1$ in accordo con la teoria.

D4) Si ha $\sum_{k=1}^{3} P(X=k|B) = \frac{6+8+9}{23} = 1$ in accordo con la teoria.

D6) Si ha $p_Z(1) + p_Z(2) = \frac{2+3}{5} = 1$ in accordo con la teoria.

D10) In altro modo $\mathrm{Var}[X+Y] = \frac{\alpha}{\lambda^2} = \frac{2}{10^2} = \frac{2}{100}$ perché $X+Y$ ha distribuzione Gamma con parametri $\alpha = 2$ e $\lambda = 10$ essendo somma di 2 esponenziali indipendenti di parametro $\lambda = 10$.