Università di Roma Tor Vergata
Statistica per la ricerca sperimentale e tecnologica (Informatica)
Probabilità e Statistica (Scienza dei Media e delle Comunicazioni)
Probabilità e Statistica (Scienza e Tecnologia dei Materiali)
Anno accademico: `2008-2009`
Titolare del corso: `Claudio Macci`
Simulazione 1
Esercizio 4A: Informatica + Scienze dei Media e delle Comunicazioni.
Esercizio 4B: Scienza e Tecnologia dei Materiali.

Esercizio 1. Si lancia un dado equo 3 volte. Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di volte che esce il *numero 1*.
`D1`) Trovare la densità discreta di X.
`D2`) Calcolare la probabilità di avere complessivamente 2 volte il *numero 1* e 1 volta il *numero 4*.

Esercizio 2. Abbiamo due urne: la prima ha tre palline con i numeri 0, 1 e 2; la seconda è vuota. Si estraggono a caso due palline in blocco dalla prima urna. Le palline estratte dalla prima urna vengono messe nella seconda urna e poi si estrae una pallina a caso dalla seconda urna.
`D3`) Calcolare la probabilità di estrarre il *numero 0* dalla seconda urna.
`D4`) Calcolare la probabilità di aver estratto la coppia di numeri $\{0, 1\}$ dalla prima urna sapendo di aver estratto il *numero 0* dalla seconda urna.

Esercizio 3. Siano X_1 e X_2 due variabili aleatorie indipendenti, entrambe con distribuzione uniforme sull'insieme $\{0, 1, 2\}$.
`D5`) Trovare la densità di $Z = X_1 + X_2$.
`D6`) Trovare la densità di $W = X_1 - X_2$.

Esercizio 4A. Sia $N_t = \sum_{n\geq 1} 1_{T_n \leq t}$ (per $t \geq 0$) un processo di Poisson con intensità di $\lambda = 2$.
`D7`) Calcolare $P(N_2 \geq 1)$.
`D8`) Calcolare $P(T_3 \leq 4)$.

Esercizio 4B. Sia (X_n) una catena di Markov omogenea con spazio degli stati $\{0, 1\}$ e matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

`D7`) Illustrare le conseguenze del Teorema di Markov dopo aver verificato le ipotesi.
`D8`) Trovare la distribuzione di X_2 sapendo che la catena parte dallo *stato 0*.

Esercizio 5. Sia X una variabile aleatoria con densità $f_X(t) = \frac{8}{21}t$ per $t \in [1, 5/2]$ e $f_X(t) = 0$ altrimenti. Sia $Y = [X]$ dove $[x] = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$ è la *parte intera* di x.
`D9`) Calcolare $P(X > 3/2)$.
`D10`) Trovare la densità discreta di Y.

Esercizio 6. Sia X una variabile aleatoria normale standard.
`D11`) Calcolare $P(|X| < 1.2)$.
Poi sia Y un'altra variabile aleatoria normale standard e indipendente da X.
`D12`) Calcolare $P(X + Y > \sqrt{2}/2)$.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
`D1`) La variabile aleatoria X ha distribuzione binomiale con parametri $n = 3$ (numero dei lanci del dado) e $p = \frac{1}{6}$ (probabilità che esca il *numero 1* in ogni lancio). Quindi $p_X(k) = \binom{3}{k}(\frac{1}{6})^k(1-\frac{1}{6})^{3-k}$ per $k \in \{0,1,2,3\}$, da cui $p_X(0) = \frac{125}{216}$, $p_X(1) = \frac{75}{216}$, $p_X(2) = \frac{15}{216}$, $p_X(3) = \frac{1}{216}$.
`D2`) La probabilità richiesta è $\frac{3!}{2!1!0!}(\frac{1}{6})^2(\frac{1}{6})^1(\frac{4}{6})^0 = \frac{3}{216}$ facendo riferimento alla distribuzione multinomiale.

Esercizio 2. Sia E l'evento "estratto il *numero 0* dalla seconda urna".
`D3`) Per la formula delle probabilità totali si ha $P(E) = P(E|\{0,1\})P(\{0,1\}) + P(E|\{0,2\})P(\{0,2\}) + P(E|\{1,2\})P(\{1,2\}) = \frac{1}{2}\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\frac{1}{3} + 0\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.
`D4`) Per la formula di Bayes, e sfruttando il valore di $P(E)$ calcolato prima, si ha $P(\{0,1\}|E) = \frac{P(E|\{0,1\})P(\{0,1\})}{P(E)} = \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$.

Esercizio 3. Per le ipotesi si ha $p_{(X_1,X_2)}(x_1,x_2) = p_{X_1}(x_1)p_{X_2}(x_2) = \frac{1}{9}$ per $x_1, x_2 \in \{0,1,2\}$.
`D5`) Si ha $p_Z(0) = p_{(X_1,X_2)}(0,0) = \frac{1}{9}$, $p_Z(1) = p_{(X_1,X_2)}(0,1) + p_{(X_1,X_2)}(1,0) = \frac{2}{9}$, $p_Z(2) = p_{(X_1,X_2)}(2,0) + p_{(X_1,X_2)}(1,1) + p_{(X_1,X_2)}(0,2) = \frac{3}{9}$, $p_Z(3) = p_{(X_1,X_2)}(1,2) + p_{(X_1,X_2)}(2,1) = \frac{2}{9}$, $p_Z(4) = p_{(X_1,X_2)}(2,2) = \frac{1}{9}$.
`D6`) Si ha $p_W(2) = p_{(X_1,X_2)}(2,0) = \frac{1}{9}$, $p_W(1) = p_{(X_1,X_2)}(2,1) + p_{(X_1,X_2)}(1,0) = \frac{2}{9}$, $p_W(0) = p_{(X_1,X_2)}(0,0) + p_{(X_1,X_2)}(1,1) + p_{(X_1,X_2)}(2,2) = \frac{3}{9}$, $p_W(-1) = p_{(X_1,X_2)}(0,1) + p_{(X_1,X_2)}(1,2) = \frac{2}{9}$, $p_W(-2) = p_{(X_1,X_2)}(0,2) = \frac{1}{9}$.

Esercizio 4A.
`D7`) $P(N_2 \geq 1) = 1 - P(N_2 = 0) = 1 - \frac{(2\cdot 2)^0}{0!}e^{-2\cdot 2} = 1 - e^{-4}$.
`D8`) $P(T_3 \leq 4) = 1 - \sum_{k=0}^{3-1} \frac{(2\cdot 4)^k}{k!}e^{-2\cdot 4} = 1 - 41e^{-8}$.

Esercizio 5.
`D9`) $P(X > 3/2) = \int_{3/2}^{5/2} \frac{8}{21}tdt = \frac{8}{21}[\frac{t^2}{2}]_{t=3/2}^{t=5/2} = \frac{4}{21}\cdot\frac{25-9}{4} = \frac{16}{21}$.
`D10`) Si ha $p_Y(1) = \int_1^2 \frac{8}{21}tdt = \frac{8}{21}[\frac{t^2}{2}]_{t=1}^{t=2} = \frac{4}{21}(4-1) = \frac{12}{21}$ e $p_Y(2) = \int_2^{5/2} \frac{8}{21}tdt = \frac{8}{21}[\frac{t^2}{2}]_{t=2}^{t=5/2} = \frac{4}{21}\left(\frac{25}{4} - 4\right) = \frac{4}{21}\frac{25-16}{4} = \frac{9}{21}$.

Esercizio 6.
`D11`) $P(|X| < 1.2) = P(-1.2 < X < 1.2) = \Phi(1.2) - \Phi(-1.2) = \Phi(1.2) - (1 - \Phi(1.2)) = 2\Phi(1.2) - 1 = 2\cdot 0.88493 - 1 = 0.76986$.
`D12`) $X+Y$ ha distribuzione normale di media $0+0 = 0$ e varianza $1+1 = 2$; allora $Z_{X+Y} = \frac{X+Y-0}{\sqrt{2}}$ è la standardizzata di $X+Y$ e si ha $P(X+Y > \sqrt{2}/2) = P(Z_{X+Y} > 1/2) = 1 - \Phi(1/2) = 1 - \Phi(0.5) = 1 - 0.69146 = 0.30854$.

Commenti.
`D1`) Si ha $p_X(0) + p_X(1) + p_X(2) + p_X(3) = \frac{125+75+15+1}{216} = 1$ in accordo con la teoria.
`D2`) In altro modo la probabilità richiesta è $\frac{1+1+1}{216} = \frac{3}{216}$ che si ottiene sommando le probabilità delle 3 sequenze $(1,1,4)$, $(1,4,1)$ e $(4,1,1)$, che rappresentano eventi disgiunti a due a due.
`D5`) Si ha $p_Z(0) + p_Z(1) + p_Z(2) + p_Z(3) + p_Z(4) = \frac{1+2+3+2+1}{9} = 1$ in accordo con la teoria.
`D6`) Si ha $p_W(2) + p_W(1) + p_W(0) + p_W(-1) + p_W(-2) = \frac{1+2+3+2+1}{9} = 1$ in accordo con la teoria.
`D10`) Si ha $p_Y(1) + p_Y(2) = \frac{12+9}{21} = 1$ in accordo con la teoria.

Esercizio 4B.

D7) Si può applicare il teorema di Markov; infatti la matrice P è costituita da tutti numeri positivi e quindi la catena di Markov è regolare. Allora esiste un'unica distribuzione stazionaria $\pi = (\pi_0, \pi_1)$ e si ha $\lim_{n\to\infty} P(X_n = i) = \pi_i$ per ogni $i \in \{0, 1\}$. Se poniamo $\pi = (\alpha, 1-\alpha)$, abbiamo le equazioni

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{4} + \frac{3}{4}(1-\alpha) = \alpha \\ \frac{3}{4}\alpha + \frac{1-\alpha}{4} = 1-\alpha, \end{cases}$$

da cui segue

$$\begin{cases} \alpha + 3 - 3\alpha = 4\alpha \\ 3\alpha + 1 - \alpha = 4 - 4\alpha \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} 6\alpha = 3 \\ 6\alpha = 3. \end{cases}$$

Quindi l'unica soluzione è $\alpha = 1/2$ e l'unica distribuzione stazionaria è $\pi = (1/2, 1/2)$.

D8) La distribuzione richiesta è data dal vettore riga $v^{(2)} = (v_0^{(2)}, v_1^{(2)})$ che si ottiene dal prodotto $v^{(2)} = v^{(0)} \cdot P \cdot P$ dove $v^{(0)} = (1, 0)$ è la distribuzione iniziale da scegliere tenendo conto che la catena parte dallo *stato 0*. Quindi si ha

$$\begin{aligned}(v_0^{(2)}, v_1^{(2)}) &= (1,0)\begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix} \\ &= (1,0)\begin{pmatrix} 10/16 & 6/16 \\ 6/16 & 10/16 \end{pmatrix} \\ &= (10/16, 6/16).\end{aligned}$$

In conclusione si ha $p_{X_2}(0) = 10/16$ e $p_{X_2}(1) = 6/16$.

Commento.

D8) Si ha $p_{X_2}(0) + p_{X_2}(1) = \frac{10+6}{16} = 1$ in accordo con la teoria.