Statistica per la ricerca sperimentale e tecnologica
Corso di Laurea in Informatica, Università di Roma "Tor Vergata"
Anno accademico: `2005-2006`
Titolare del corso: `Claudio Macci`
Esame del 21 Settembre 2006

Esercizio 1. Supponiamo di avere un dado equo, una moneta equa e una moneta truccata per la quale la probabilità che esca testa è $\frac{3}{4}$. Si lancia il dado: se esce il numero 1 si sceglie la moneta equa, se sceglie un numero diverso da 1 si esce la moneta truccata. Poi si lancia la moneta scelta e sia T l'evento "esce testa".
`D1`) Calcolare $P(T)$.
`D2`) Calcolare la probabilità di aver scelto la moneta equa sapendo di aver ottenuto testa (cioè sapendo che l'evento T si è verificato).

Esercizio 2. Un'urna ha 100 palline numerate da 1 a 100. Si estraggono 200 palline a caso, una alla volta e con reinserimento. Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di volte che si estrae il numero 100. È noto che X ha distribuzione binomiale con parametri n e p opportuni.
`D3`) Scrivere senza fare calcoli la formula della densità $p_X(k)$ (per $k \in \{0, 1, \ldots, 200\}$); in altri termini scrivere la densità della distribuzione binomiale sostituendo i valori di n e p relativi alla variabile aleatoria X che appare in questo esercizio.
`D3bis`) Calcolare $p_X(4)$ sfruttando l'approssimazione di Poisson della distribuzione binomiale.
`D4`) Calcolare $\mathbb{E}[X]$.
`D5`) Calcolare $\mathrm{Var}[X]$.

Esercizio 3. Sia (X_1, X_2) una variabile aleatoria discreta bidimensionale con la seguente densità congiunta discreta:
$p_{(X_1,X_2)}(0,2) = p_{(X_1,X_2)}(1,1) = p_{(X_1,X_2)}(2,0) = p_{(X_1,X_2)}(1,0) = \frac{1}{4}$.
`D6`) Calcolare la densità discreta di $Y = X_1 + X_2$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria uniforme su $[-1, 2]$.
`D7`) Calcolare $P(X > 1)$.
`D8`) Calcolare $\mathbb{E}[X]$.

Esercizio 5. Siano X_1, X_2 due variabili aleatorie esponenziali di parametro $\lambda_1 = 7$ e $\lambda_2 = 14$.
`D9`) Calcolare $\mathbb{E}[X_1 + X_2]$.
Si può dire che, per un valore di c opportuno, la densità continua di X_1 è $f(t) = c \cdot e^{-7t}$ per $t \geq 0$ e $f(t) = 0$ per $t < 0$.
`D10`) Trovare il valore di c.

Esercizio 6. Sia X una v.a. normale standard (cioè con media 0 e varianza 1).
`D11`) Calcolare $P(-1.7 < X < -1)$.
Consideriamo un campione di $X_1, \ldots, X_{900}$ osservazioni indipendenti e normali con media incognita μ e varianza nota $\sigma^2 = 625$. La media dei valori osservati è $\overline{x}_{900} = 500$.
`D12`) Trovare l'intervallo di confidenza per μ al livello $1 - \alpha = 0.95$.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1. Sia E l'evento "scelta moneta equa".
`D1`) Per la formula delle probabilità totali si ha
$P(T) = P(T|E)P(E) + P(T|E^c)P(E^c) = \frac{1}{2}\frac{1}{6} + \frac{3}{4}\frac{5}{6} = \frac{1}{12} + \frac{15}{24} = \frac{2+15}{24} = \frac{17}{24}$.
`D2`) Per la formula di Bayes (e il valore di $P(T)$ calcolato prima) si ha
$P(E|T) = \frac{P(T|E)P(E)}{P(T)} = \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{6}}{\frac{17}{24}} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{17}{24}} = \frac{1}{12}\frac{24}{17} = \frac{2}{17}$.

Esercizio 2.
Si risponde facendo riferimento a formule note per una variabile aleatoria X con distribuzione binomiale di parametri n e p: la densità discreta è $p_X(k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ per $k \in \{0,1,\ldots,n\}$; la speranza matematica è $\mathbb{E}[X] = np$; la varianza è $\mathrm{Var}[X] = np(1-p)$. Qui abbiamo $n = 200$ (numero delle estrazioni) e $p = \frac{1}{100}$ (probabilità di estrarre il numero 100 in ogni estrazione).
`D3`) Si ha $p_X(k) = \binom{200}{k}(\frac{1}{100})^k(1-\frac{1}{100})^{200-k}$ per $k \in \{0,1,\ldots,200\}$.
`D3bis`) Secondo l'approssimazione di Poisson della distribuzione binomiale, si deve considerare X come una variabile aleatoria con distribuzione di Poisson di parametro $\lambda = np$, per cui $p_X(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$. Nel nostro caso si ha $\lambda = np = 200 \cdot \frac{1}{100} = 2$ e $p_X(4) \approx \frac{2^4}{4!}e^{-2} = \frac{2}{3}e^{-2}$.
`D4`) Si ha $\mathbb{E}[X] = np = 200 \cdot \frac{1}{100} = 2$.
`D5`) Si ha $\mathrm{Var}[X] = np(1-p) = 200 \cdot \frac{1}{100}(1-\frac{1}{100}) = 2 \cdot \frac{99}{100} = \frac{99}{50}$.

Esercizio 3.
`D6`) Si ha: $p_Y(1) = p_{(X_1,X_2)}(1,0) = \frac{1}{4}$; $p_Y(2) = p_{(X_1,X_2)}(2,0) + p_{(X_1,X_2)}(1,1) + p_{(X_1,X_2)}(0,2) = \frac{1+1+1}{4} = \frac{3}{4}$.

Esercizio 4.
Si risponde facendo riferimento a formule note per una variabile aleatoria X con distribuzione uniforme su $[a,b]$: la densità è $f_X(t) = \frac{1}{b-a}$ per $t \in [a,b]$ e $f(t) = 0$ altrimenti; la speranza matematica è $\mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2}$. Qui abbiamo $a = -1$ e $b = 2$.
`D7`) Si ha $P(X > 1) = \int_1^\infty f_X(t) = \int_1^2 \frac{1}{3}dt = [\frac{t}{3}]_1^2 = \frac{2-1}{3} = \frac{1}{3}$.
`D8`) Si ha $\mathbb{E}[X] = \frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2}$.

Esercizio 5.
`D9`) Si ha $\mathbb{E}[X_1 + X_2] = \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2] = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{7} + \frac{1}{14} = \frac{2+1}{14} = \frac{3}{14}$.
`D10`) Il valore di c si ottiene dalla condizione $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$, che diventa $1 = c\int_0^\infty e^{-7t}dt = \frac{c}{7}[-e^{-7t}]_0^\infty = \frac{c}{7}$; quindi $c = 7$.

Esercizio 6.
`D11`) Si ha $P(-1.7 < X < -1) = \Phi(-1) - \Phi(-1.7) = 1 - \Phi(1) - (1 - \Phi(1.7)) = \Phi(1.7) - \Phi(1) = 0.95543 - 0.84134 = 0.11409$.
`D12`) L'intervallo di confidenza richiesto è $\left[\overline{x}_n - \phi_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x}_n + \phi_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$. Si ha $n = 900$, $\overline{x}_n = \overline{x}_{900} = 500$, $\sigma = \sqrt{625} = 25$; inoltre $1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975$ segue da $1 - \alpha = 0.95$ e quindi $\phi_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.96$. In conclusione l'intervallo di confidenza richiesto è $[498.36, 501.63]$.

Commenti.
`D6`) Si ha $p_Y(1) + p_Y(2) = \frac{1+3}{4} = 1$ in accordo con la teoria.
`D9`) L'uguaglianza $\mathbb{E}[X_1 + X_2] = \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2]$ vale anche senza l'ipotesi di indipendenza tra X_1 e X_2, che in effetti non è richiesta.
`D10`) Si poteva anche dire che $c = 7$ perché, come è noto, la densità di una variabile aleatoria esponenziale di parametro λ è $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ per $t \geq 0$ e $f(t) = 0$ per $t < 0$.