Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità (ed insegnamenti mutuati)
Anno accademico: `2014-2015`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Appello del 4 Settembre 2015

Esercizio 1. Un'urna contiene 6 palline con i numeri $0, 0, 0, 2, 2, 4$. Si estraggono a caso 3 palline, una alla volta e con reinserimento.
`D1`) Trovare la densità discreta della variabile aleatoria X che conta il numero di volte che viene estratto il numero 2.
`D2`) Calcolare la probabilità di estrarre la sequenza $(0, 2, 0)$.

Esercizio 2. Un'urna ha 1 pallina bianca, 1 rossa e 1 nera. Si estrae una pallina a caso e viene tolta dall'urna. Poi vengono messe nell'urna due palline, una per ognuno dei due colori delle palline rimaste nell'urna (per fare un esempio: se viene tolta la pallina rossa, vengono messe nell'urna una pallina bianca e una nera). Infine si estrae una pallina a caso.
`D3`) Calcolare la probabilità di estrarre una pallina bianca alla seconda estrazione.
`D4`) Calcolare la probabilità di aver estratto la pallina rossa alla prima estrazione sapendo di aver estratto una pallina bianca alla seconda estrazione.

Esercizio 3. Consideriamo la seguente densità congiunta: $p_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = (\frac{1}{2})^{x_1} \cdot \frac{6^{x_2}}{x_2!} e^{-6}$ per $x_1 \geq 1$ e $x_2 \geq 0$ interi.
`D5`) Calcolare $P(X_1 = X_2)$.
`D6`) Calcolare $P(X_1 + X_2 = 2)$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con densità continua $f_X(t) = \frac{t}{50} 1_{(0,10)}(t)$.
`D7`) Trovare la densità continua di $Y = X^2$.
`D8`) Calcolare $P([X] = 2)$ dove $[x] = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$ è la parte intera di x.

Esercizio 5.
`D9`) Sia $N_t = \sum_{n\geq 1} 1_{T_n \leq t}$ (per $t \geq 0$) un processo di Poisson con intensità di $\lambda = \frac{3}{7}$. Calcolare $\mathbb{E}[T_3]$.
`D10`) Sia X una variabile aleatoria con distribuzione Normale di media 1 e varianza 16. Trovare x per cui si ha $P(X \leq x) = \Phi(-1)$.

Esercizio 6. Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. (indipendenti e identicamente distribuite).
`D11`) Dire per quale valore di m si ha

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - m\right| > \varepsilon\right) = 0 \text{ per ogni } \varepsilon > 0,$$

nel caso in cui le variabili aleatorie $\{X_n : n \geq 1\}$ abbiano distribuzione uniforme su $(-1, 0)$.
`D12`) Calcolare, usando l'approssimazione Normale, $P(420 < X_1 + \cdots + X_{100} < 430)$ nel caso in cui le variabili aleatorie $\{X_n : n \geq 1\}$ abbiano distribuzione di Poisson di parametro $\lambda = 4$.

Esercizio 7 (*solo per Lauree Magistrali*). Consideriamo una catena di Markov omogenea $\{X_n : n \geq 0\}$ con spazio degli stati $E = \{1, 2, 3, 4\}$ e matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

`D13`) Calcolare la probabilità di passaggio in $C = \{2, 3\}$ partendo da 1.
`D14`) Calcolare $P(X_1 = 1, X_2 = 2 | X_0 = 1)$.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
`D1`) Si ha $p_X(k) = \binom{3}{k}(2/6)^k(1-2/6)^{3-k}$ per $k \in \{0,1,2,3\}$, e quindi $p_X(0) = \frac{8}{27}$, $p_X(1) = \frac{12}{27}$, $p_X(2) = \frac{6}{27}$ e $p_X(3) = \frac{1}{27}$.
`D2`) La probabilità richiesta è uguale a $\frac{3}{6}\frac{2}{6}\frac{3}{6} = \frac{1}{12}$.

Esercizio 2. Indichiamo con B_k, R_k e N_k gli eventi "estratta bianca (rossa e nera, rispettivamente) alla k estrazione".
`D3`) Per la formula delle probabilità totali si ha $P(B_2) = P(B_2|B_1)P(B_1)+P(B_2|R_1)P(R_1)+P(B_2|N_1)P(N_1) = 0 \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = 0 + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.
`D4`) Per la formula di Bayes, e tenendo conto del valore $P(B_2)$ calcolato prima, si ha $P(R_1|B_2) = \frac{P(B_2|R_1)P(R_1)}{P(B_2)} = \frac{\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}}{1/3} = \frac{1}{2}$.

Esercizio 3.
`D5`) Si ha $P(X_1 = X_2) = \sum_{k=1}^{\infty} p_{X_1,X_2}(k,k) = \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^k \cdot \frac{6^k}{k!}e^{-6} = e^{-6}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k!} = e^{-6}(e^3-1) = e^{-3} - e^{-6}$.
`D6`) Si ha $P(X_1 + X_2 = 2) = p_{X_1,X_2}(1,1) + p_{X_1,X_2}(2,0) = (\frac{1}{2})^1 \cdot \frac{6^1}{1!}e^{-6} + (\frac{1}{2})^2 \cdot \frac{6^0}{0!}e^{-6} = (3 + \frac{1}{4})e^{-6} = \frac{13}{4}e^{-6}$.

Esercizio 4.
`D7`) Si vede che $P(0 < Y < 10^2) = 1$ e quindi $F_Y(y) = 0$ per $y \leq 0$ e $F_Y(y) = 1$ per $y \geq 100$. Per $y \in (0,100)$ si ha $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(X \leq \sqrt{y}) = \int_0^{\sqrt{y}} \frac{t}{50}dt = [t^2/100]_{t=0}^{t=\sqrt{y}} = \frac{y}{100}$. Quindi $f_Y(y) = \frac{1}{100} \cdot 1_{(0,100)}(y)$ (in altri termini la variabile aleatoria Y ha distribuzione uniforme su $(0,100)$).
`D8`) Si ha $P([X] = 2) = P(2 \leq X < 3) = \int_2^3 \frac{t}{50}dt = [t^2/100]_{t=2}^{t=3} = \frac{9-4}{100} = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$.

Esercizio 5.
`D9`) Si ha $\mathbb{E}[T_3] = \frac{3}{3/7} = 7$.
`D10`) Si ha $P(X \leq x) = P(\frac{X-1}{\sqrt{16}} \leq \frac{x-1}{\sqrt{16}}) = \Phi(\frac{x-1}{4})$; quindi si deve avere $\frac{x-1}{4} = -1$, da cui segue $x = -3$ con semplici calcoli.

Esercizio 6.
`D11`) Per la legge dei grandi numeri il valore di m richiesto è $m = -\frac{1}{2}$ per formula note sulla distribuzione uniforme.
`D12`) Le variabili aleatorie $\{X_n : n \geq 1\}$ hanno media 4 e varianza 4 per le formule sulla distribuzione di Poisson. Quindi, se indichiamo con Z la standardizzata di $X_1 + \cdots + X_{100}$, si ha $\{420 < X_1 + \cdots + X_{100} < 430\} = \{\frac{420-400}{\sqrt{4}\sqrt{100}} < Z < \frac{430-400}{\sqrt{4}\sqrt{100}}\}$ e, per l'approssimazione normale, $P(420 < X_1 + \cdots + X_{100} < 430) = \Phi(30/20) - \Phi(20/20) = \Phi(1.5) - \Phi(1) = 0.93319 - 0.84134 = 0.09185$.

Esercizio 7.
`D13`) L'insieme D_C degli stati che comunicano con $C = \{2,3\}$ e che non appartengono a C è $D_C = \{1\}$; infatti lo stato 4 è assorbente. Allora, detta λ la probabilità di passaggio richiesta, questa è soluzione della seguente equazione:

$$\lambda = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\lambda.$$

In corrispondenza si ottiene $\frac{3}{4}\lambda = \frac{2}{4}$, e quindi $\lambda = \frac{2}{3}$, con semplici calcoli.
`D14`) La probabilità richiesta è $P(X_1 = 1, X_2 = 2|X_0 = 1) = p_{11}p_{12} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$.

Commenti.
La somma dei valori di ciascuna densità discreta che appare è 1 in accordo con la teoria.
`D3-D4`) Quello che succede per ciascuno dei tre colori in ballo, succede anche per gli altri. Del resto, come si può verificare direttamente facendo i calcoli, si ha: $P(R_2) = P(N_2) = \frac{1}{3}$ (come accade per $P(B_2)$); $P(N_1|B_2) = \frac{1}{2}$ (come accade per $P(R_1|B_2)$, essendo ovviamente $P(B_1|B_2) = 0$); $P(B_1|N_2) = P(R_1|N_2) = \frac{1}{2}$ e $P(N_1|N_2) = 0$; $P(B_1|R_2) = P(N_1|R_2) = \frac{1}{2}$ e $P(R_1|R_2) = 0$.
`D13`) Qui calcoliamo λ in un altro modo. Iniziamo osservando che, prima o poi, la catena finirà nello stato 4 (unico stato assorbente; gli altri sono tutti transitori) dove resterà per sempre. Allora $1 - \lambda$ rappresenta la

probabilità di finire nello stato 4 (partendo dallo stato 1) senza passare per l'insieme di stati C; quindi si ha

$$\begin{aligned}1-\lambda =&P(X_1=4|X_0=1)+P(X_1=1,X_2=4|X_0=1)+P(X_1=1,X_2=1,X_3=4|X_0=1)+\cdots\\ =&\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\cdots=\frac{1/4}{1-1/4}=\frac{1}{3},\end{aligned}$$

da cui segue (con alcuni calcoli) che $\lambda=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.
D13) Osserviamo che $\lambda=\frac{1/4+1/4}{1/4+1/4+1/4}$. Quindi abbiamo la seguente interpretazione del valore λ: si tratta di considerare la probabilità di andare da 1 in C, e di normalizzare con la probabilità che, partendo da 1, si finisca in $\{2,3,4\}$ lasciando lo stato 1 definitivamente.