Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità (ed insegnamenti mutuati)
Anno accademico: `2016-2017`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Appello del 14 Giugno 2017

Esercizio 1. Si lancia ripetutamente un dado equo.
`D1`) Calcolare la probabilità di ottenere per la prima volta il numero 4 al terzo lancio.
`D2`) Calcolare la probabilità di ottenere due numeri dispari nei primi due lanci, sapendo di aver ottenuto il numero 4 per la prima volta al terzo lancio.

Esercizio 2. Si lancia un dado con le facce numerate con i numeri $1,2,3,4,5,5$. Se esce un numero pari si lancia una moneta equa, se esce un numero dispari si lancia una moneta con due teste.
`D3`) Calcolare la probabilità che esca testa nel lancio di moneta effettuato.
`D4`) Calcolare la probabilità che sia uscito un numero pari nel lancio di dado sapendo che è uscita testa nel lancio di moneta.

Esercizio 3. Sia $\lambda > 0$ e $p \in (0,1)$ arbitrariamente fissati e consideriamo la seguente densità congiunta: $p_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = (1-p)^{x_1} p \frac{\lambda^{x_2-x_1}}{(x_2-x_1)!} e^{-\lambda}$ per $x_2 \geq x_1 \geq 0$ interi.
`D5`) Calcolare $P(X_1 = X_2)$.
`D6`) Calcolare $P(X_1 = 0)$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con distribuzione uniforme su $(1,2)$.
`D7`) Trovare la funzione di distribuzione di $Y = \log X$.
`D8`) Trovare la funzione di distribuzione di $Z = e^{-X}$.

Esercizio 5.
`D9`) Sia $N_t = \sum_{n\geq 1} 1_{T_n \leq t}$ (per $t \geq 0$) un processo di Poisson con intensità di $\lambda = \frac{3}{2}$. Calcolare $\mathbb{E}[N_4]$.
`D10`) Sia X una variabile aleatoria Normale con media 0 e varianza 4. Calcolare $P(|X| \leq 2)$.

Esercizio 6. Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. (indipendenti e identicamente distribuite).
`D11`) Dire per quale valore di m si ha

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - m\right| > \varepsilon\right) = 0 \text{ per ogni } \varepsilon > 0,$$

nel caso in cui le variabili aleatorie $\{X_n : n \geq 1\}$ abbiano densità discreta $p_X(k) = \binom{10}{k}(\frac{3}{10})^k(1-\frac{3}{10})^{10-k}$ per $k \in \{0,1,\ldots,10\}$.
`D12`) Trovare il valore di $y \in \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}} \leq y\right) = \Phi(\sqrt{3}/17)$$

nel caso in cui le variabili aleatorie $\{X_n : n \geq 1\}$ abbiano distribuzione uniforme su $(-1,1)$.

Esercizio 7 (*solo per Lauree Magistrali*). Siano $a,b > 0$ fissati. Consideriamo una catena di Markov omogenea $\{X_n : n \geq 0\}$ con spazio degli stati $E = \{1,2,3\}$ e matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a & 1-a-b & b \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

per $a,b > 0$ tali che $1-a-b \geq 0$.
`D13`) Calcolare $P(X_1 = 1, X_2 = 2 | X_0 = 2)$.
`D14`) Dire per quali valori di a e b la distribuzione $(1/5, 3/5, 1/5)$ è stazionaria.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1. Sia E l'evento alla prima domanda.
D1) La probabilità richiesta è $P(E) = (1-\frac{1}{6})(1-\frac{1}{6})\frac{1}{6} = \frac{25}{216}$.
D2) Con notazioni ovvie (e tenendo conto del valore di $P(E)$ calcolato prima) la probabilità richiesta è $P(D_1 \cap D_2|E) = \frac{P(D_1\cap D_2\cap E)}{P(E)} = \frac{(3/6)(3/6)(1/6)}{25/216} = \frac{9}{25}$.

Esercizio 2. Indichiamo con T l'evento "esce testa nel lancio di moneta", e con D l'evento "esce dispari nel lancio di dado".
D3) Per la formula delle probabilità totali si ha $P(T) = P(T|D)P(D)+P(T|D^c)P(D^c) = 1\frac{4}{6}+\frac{1}{2}\frac{2}{6} = \frac{4+1}{6} = \frac{5}{6}$.
D4) Per la formula di Bayes, e tenendo conto del valore di $P(T)$ calcolato prima, si ha $P(D^c|T) = \frac{P(T|D^c)P(D^c)}{P(T)} = \frac{\frac{1}{2}\frac{2}{6}}{5/6} = \frac{1}{5}$.

Esercizio 3.
D5) Si ha $P(X_1 = X_2) = \sum_{k\geq 0} p_{X_1,X_2}(k,k) = pe^{-\lambda}\sum_{k\geq 0}(1-p)^k = \frac{pe^{-\lambda}}{1-(1-p)} = e^{-\lambda}$.
D6) Si ha $P(X_1 = 0) = \sum_{x_2\geq 0} p_{X_1,X_2}(0,x_2) = pe^{-\lambda}\sum_{x_2\geq 0}\frac{\lambda^{x_2}}{x_2!} = pe^{-\lambda}e^{\lambda} = p$.

Esercizio 4.
D7) Si vede che $P(0 \leq Y \leq \log 2) = 1$ e quindi $F_Y(y) = 0$ per $y \leq 0$ e $F_Y(y) = 1$ per $y \geq \log 2$. Per $y \in (0, \log 2)$ si ha $F_Y(y) = P(\log X \leq y) = P(X \leq e^y) = \int_1^{e^y}\frac{1}{2-1}dx = e^y - 1$.
D8) Si vede che $P(e^{-2} \leq Z \leq e^{-1}) = 1$ e quindi $F_Z(z) = 0$ per $z \leq e^{-2}$ e $F_Z(z) = 1$ per $z \geq e^{-1}$. Per $z \in (e^{-2}, e^{-1})$ si ha $F_Z(z) = P(e^{-X} \leq z) = P(-X \leq \log z) = P(X \geq -\log z) = \int_{-\log z}^{2}\frac{1}{2-1}dx = 2 + \log z$.

Esercizio 5.
D9) Si ha $\mathbb{E}[N_4] = \frac{3}{2}\cdot 4 = 6$.
D10) Si ha $P(|X| \leq 2) = P(-2 \leq X \leq 2) = P(\frac{-2-0}{\sqrt{4}} \leq \frac{X-0}{\sqrt{4}} \leq \frac{2-0}{\sqrt{4}}) = \Phi(1) - \Phi(-1) = \Phi(1) - (1 - \Phi(1)) = 2\Phi(1) - 1 = 2 \cdot 0.84134 - 1 = 0.68268$.

Esercizio 6.
D11) Per la legge dei grandi numeri il valore di m richiesto è $m = \sum_{k=0}^{10} k\binom{10}{k}(\frac{3}{10})^k(1-\frac{3}{10})^{10-k}$ e, per la teoria della distribuzione binomiale, si ha $m = 10 \cdot \frac{3}{10} = 3$.
D12) Le variabili aleatorie $\{X_n : n \geq 1\}$ hanno media $\frac{-1+1}{2} = 0$ e varianza $\frac{(1-(-1))^2}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$; quindi la standardizzata di $X_1 + \cdots + X_n$ è $\frac{X_1+\cdots+X_n}{\sqrt{1/3}\sqrt{n}}$. Allora $\left\{\frac{X_1+\cdots+X_n}{\sqrt{n}} \leq y\right\} = \left\{\frac{X_1+\cdots+X_n}{\sqrt{1/3}\sqrt{n}} \leq \frac{y}{\sqrt{1/3}}\right\}$ e, per il teorema limite centrale, si deve avere $\frac{y}{\sqrt{1/3}} = \frac{\sqrt{3}}{17}$. In conclusione si ha $y = \frac{\sqrt{3}}{17}\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{17}$.

Esercizio 7.
D13) Si ha $P(X_1 = 1, X_2 = 2|X_0 = 2) = p_{21}p_{12} = a \cdot 1 = a$.
D14) Si deve avere la seguente relazione matriciale

$$(1/5, 3/5, 1/5) = (1/5, 3/5, 1/5)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a & 1-a-b & b \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

da cui segue

$$\begin{cases} \frac{3}{5}a = \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} + \frac{3}{5}(1-a-b) + \frac{1}{5} = \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5}b = \frac{1}{5}, \end{cases}$$

e quindi $a = b = \frac{1}{3}$.

Commenti.
La somma dei valori di ciascuna densità discreta che appare è 1 in accordo con la teoria.
D2) Abbiamo calcolato $P(D_1 \cap D_2|E) = \frac{9}{25}$. In maniera analoga possiamo dire che

$$P(D_1^c \cap D_2|E) = \frac{P(D_1^c \cap D_2 \cap E)}{P(E)} = \frac{(2/6)(3/6)(1/6)}{25/216} = \frac{6}{25},$$

$$P(D_1 \cap D_2^c|E) = \frac{P(D_1 \cap D_2^c \cap E)}{P(E)} = \frac{(3/6)(2/6)(1/6)}{25/216} = \frac{6}{25}$$

e

$$P(D_1^c \cap D_2^c|E) = \frac{P(D_1^c \cap D_2^c \cap E)}{P(E)} = \frac{(2/6)(2/6)(1/6)}{25/216} = \frac{4}{25}.$$

In conclusione abbiamo le probabilità condizionate (all'evento E) di 4 eventi, la cui somma è uguale a 1. Questo è in accordo con il fatto che i 4 eventi in questione, cioè $D_1 \cap D_2, D_1^c \cap D_2, D_1 \cap D_2^c, D_1^c \cap D_2^c$, costituiscono una partizione.

`D14`) I valori di a e b calcolati coincidono e questo sembra essere in accordo con il fatto che in questo modo la matrice di transizione è simmetrica rispetto alla seconda colonna e alla simmetria della distribuzione stazionaria $(1/5, 3/5, 1/5)$ rispetto al valore centrale.