Primo Appello Autunnale del corso di Fisica del 05.09.2022

Corso di Laurea in Informatica

A.A. 2021-2022

(Prof. Paolo Camarri)

Cognome:

Nome:

Matricola:

Anno di immatricolazione:

Problema n.1

Un punto materiale si muove di moto rettilineo lungo l'asse x partendo da fermo all'istante $t = 0$, e la sua accelerazione istantanea varia nel tempo secondo la legge $a_x(t) = \alpha t$, con $\alpha = 2 \text{ m s}^{-3}$.

a) Si calcoli l'espressione della velocità istantanea del punto materiale in funzione del tempo, $v_x(t)$, e il valore della velocità istantanea all'istante $t_1 = 5$ s.

$v_x(t) =$ $v_x(t_1) =$

b) Si calcoli l'espressione della posizione del punto materiale in funzione del tempo, $x(t)$, e il valore della posizione all'istante $t_1 = 5$ s sapendo che $x(0) = 0$.

$x(t) =$ $x(t_1) =$

c) Si esprima la forza risultante F_x agente sul punto materiale lungo l'asse x in funzione della posizione x. Si determini quindi il lavoro W svolto dalla forza risultante tra l'istante $t = 0$ e l'istante $t_1 = 5$ s.

$F_x(x) =$ $W =$

Problema n.2

Un blocco avente massa $m_1 = 100$ kg si muove su un piano orizzontale liscio con velocità costante $\vec{v_0}$ avente modulo $v_0 = 10$ m s^{-1}, ed è diretto verso un secondo blocco, inizialmente fermo avente massa uguale a quella del primo blocco. Poniamo quindi $m_1 = m_2 = m = 100$ kg . Attaccata al secondo blocco c'è una molla inizialmente a riposo, avente costante elastica $k = 100$ N m^{-1}, disposta orizzontalmente lungo la direzione di moto del primo blocco (Figura A). A un certo istante il primo blocco entra in contatto con l'estremità libera della molla collegata al secondo blocco.

a) Si calcoli la componente lungo il piano orizzontale della velocità del centro di massa del sistema dei due blocchi.

$V_{CM,x} =$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $=$

b) Si calcolino le componenti orizzontali delle velocità dei due blocchi dopo che la molla, dopo l'interazione tra i due blocchi, è tornata alla posizione di riposo

$v_{1,x} =$ $v_{2,x} =$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $=$

c) Si calcoli la massima compressione della molla durante l'interazione tra i due blocchi, nell'ipotesi che la molla sia abbastanza lunga da non far arrivare i due blocchi a toccarsi.

$\delta_M =$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $=$

Problema n.3

Due cariche elettriche puntiformi aventi valori $q_1 = q_2 = q = 1\ \mu\mathrm{C}$ sono fissate su un piano e distano $d = 10^{-4}$ m l'una dall'altra (Figura B).

a) Si calcoli il modulo E_0 del campo elettrico nel punto medio del segmento che congiunge le posizioni delle due cariche elettriche.

$E_0 =$

b) Si calcoli l'espressione della componente E_z del campo elettrico generato dalle due cariche (nel piano su cui sono fissate) lungo l'asse del segmento che le congiunge, in funzione della coordinata z lungo tale asse (ponendo $z = 0$ nel centro del segmento che congiunge le due cariche).

$E_z(z) =$

c) Si determini il valore z_M della coordinata del punto lungo l'asse z in cui il modulo del campo elettrico ha valore massimo E_M, e si determini tale valore.

$z_M =$	$=$
$E_M =$	$=$

FIGURA A

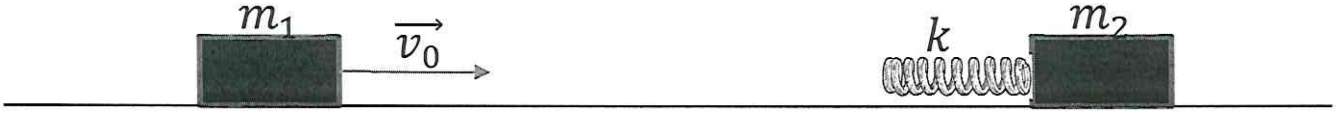
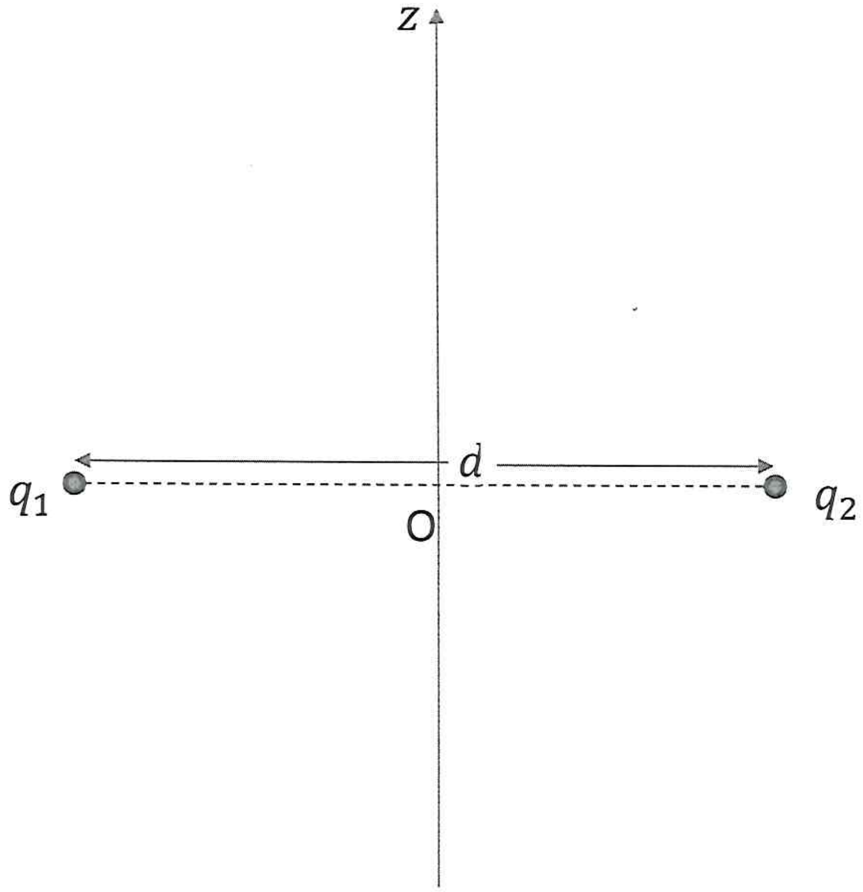


FIGURA B



L'esame scritto prevede la risoluzione in TRE ore dei tre esercizi sopra riportati.

I fogli su cui svolgere i calcoli per la risoluzione dei problemi sono forniti dal docente.

Chi deve recuperare il primo esonero deve svolgere il solo Problema n.1 in UN'ora.

Chi deve recuperare il secondo deve svolgere il solo Problema n.2 in UN'ora.

Chi deve recuperare il terzo esonero deve svolgere il solo Problema n.3 in UN'ora.

La risposta a ciascuna domanda deve essere scritta nel riquadro corrispondente. Scrivere SOLO LA RISPOSTA FINALE, prima la formula letterale (se possibile) e poi il valore numerico. <u>Nessun calcolo deve essere svolto su questi fogli.</u>

<u>Si richiede in ogni caso la consegna sia del presente foglio sia di tutti i fogli manoscritti in cui sono stati svolti i calcoli.</u>

<u>Si può consultare un formulario proprio (un foglio protocollo con 4 facciate).</u>

Un libro di testo è a disposizione sulla cattedra, portato dal docente, per consultazione.

Lo studente, oltre al foglio di carta e alla penna, può tenere sul tavolo solo la calcolatrice.

CORSO DI FISICA PER INFORMATICA A.A. 2021-2022

PRIMO APPELLO AUTUNNALE 05/09/2022

Problema n. 1

a) Nel moto rettilineo generico risulta

$$V_x(t) = \int_0^t a_x(\tau)\,d\tau + V_x(0)$$

Nel nostro caso, dato che il punto materiale parte da fermo, risulta $V_x(0) = 0$; essendo $a_x(t) = \alpha t$, otteniamo

$$\boxed{V_x(t) = \int_0^t \alpha\tau\,d\tau = \alpha\int_0^t \tau\,d\tau = \alpha\frac{\tau^2}{2}\Big|_0^t = \frac{1}{2}\alpha t^2}$$

All'istante $t = t_1 = 5\,s$ risulta quindi

$$\boxed{V_x(t_1) = \frac{1}{2}\alpha t_1^2 = \frac{1}{2}\cdot(2\,m\,s^{-3})\cdot(5\,s)^2 = 25\,m\,s^{-1}}$$

b) Nell'ipotesi $x(0) = 0$, risulta

$$\boxed{x(t) = x(0) + \int_0^t V_x(\tau)\,d\tau = \int_0^t \frac{1}{2}\alpha\tau^2\,d\tau = \frac{1}{2}\alpha\int_0^t \tau^2\,d\tau = \frac{1}{2}\alpha\cdot\frac{\tau^3}{3}\Big|_0^t = \frac{1}{6}\alpha t^3}$$

All'istante $t = t_1 = 5\,s$ risulta quindi

$$\boxed{x(t_1) = \frac{1}{6}\alpha t_1^3 = \frac{1}{6}\cdot(2\,m\,s^{-3})\cdot(5\,s)^3 = 41.67\,m}$$

c) Per la seconda legge della dinamica, risulta

$\vec{F}_r = m\vec{a}$, dove $\vec{F}_r$ e' la forza risultante agente sul punto materiale. Nel caso del moto rettilineo lungo l'asse x, risulta (per questo problema):

$$F_x = m a_x \Rightarrow F_x(t) = m a_x(t) = m \alpha t$$

Dall' espressione di $x(t)$ ricavata al punto b) ricaviamo

$t^3 = \frac{6x}{\alpha} \Rightarrow t = \left(\frac{6x}{\alpha}\right)^{1/3}$; sostituendo questa espressione a t nella formula di $F_x(t)$ otteniamo:

$$\boxed{F_x(x) = m\alpha \left(\frac{6x}{\alpha}\right)^{1/3} = 6^{1/3} m \alpha^{2/3} x^{1/3}}$$

Il lavoro svolto dalla forza F_x tra l'istante $t=0$ e l'istante t_1 e' quindi

$$W = \int_{x(0)}^{x(t_1)} F_x(x)\,dx = \int_0^{x_1} 6^{1/3} m \alpha^{2/3} x^{1/3}\,dx =$$

$$= 6^{1/3} m \alpha^{2/3} \int_0^{x_1} x^{1/3}\,dx = 6^{1/3} m \alpha^{2/3} \left.\frac{x^{4/3}}{4/3}\right|_0^{x_1} =$$

$$= \frac{3}{4} 6^{1/3} m \alpha^{2/3} x_1^{4/3}, \quad \text{dove } x_1 = x(t_1)$$

Q..

In termini dei dati iniziali del problema risulta

$$W = \frac{3 \cdot 2^{1/3} \cdot 3^{1/3}}{2^2} \, m \, \alpha^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{1}{6} \alpha t_1^3 \right)^{4/3} =$$

$$= \frac{\cancel{3} \cdot 2^{1/3} \cdot \cancel{3^{1/3}}}{2^2} \, m \, \alpha^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{2^{\frac{4}{3}} \cdot \cancel{3^{4/3}}} \, \alpha^{\frac{4}{3}} \cdot t_1^4 =$$

$$= \frac{m \, \alpha^2 \, t_1^4}{2^3} = \frac{1}{8} \, m \, \alpha^2 \, t_1^4 =$$

$$= \frac{1}{8} \cdot (1 \text{ kg}) \, (2 \text{ m s}^{-3})^2 \, (5 \text{ s})^4 = 156.25 \text{ J}$$

Problema n. 2

a) La velocità del centro di massa del sistema dei due blocchi è, per definizione:

$$\boxed{V_{CM,x} = \frac{m_1 V_0}{m_1 + m_2} = \frac{m V_0}{2m} = \frac{V_0}{2} = 5 \text{ m s}^{-1}}$$

Questa velocità rimane costante durante tutto il moto dei dei blocchi, in quanto la forza risultante esterna agente nel sistema dei due blocchi è nulla.

b) Dopo che i due blocchi hanno interagito per tramite della molla, l'effetto è quello di un urto elastico tra due punti materiali aventi la stessa massa: le velocità finali dei due blocchi sono "scambiate" rispetto alle velocità iniziali. Dunque risulta

$$\boxed{V_{1,x} = 0 \qquad V_{2,x} = V_0 = 10 \ m\ s^{-1}}$$

c) Nell'istante in cui la molla raggiunge la massima compressione, i due blocchi si stanno muovendo con la stessa velocità istantanea che, per quanto visto nel punto a), deve quindi coincidere con la velocità del centro di massa del sistema.

Dunque, poiché l'energia meccanica del sistema si conserva durante il moto, se indichiamo con V^* la velocità comune dei due blocchi nell'istante di massima compressione della molla ($V^* = V_{CM,x}$ per quanto detto sopra), otteniamo:

$$E_{m,f} = E_{m,i} \Rightarrow \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} m (V^*)^2 + \frac{1}{2} k \delta_M^2 = \frac{1}{2} m V_0^2$$

$$m \left(\frac{1}{2} V_0\right)^2 + \frac{1}{2} k \delta_M^2 = \frac{1}{2} m V_0^2$$

$$\frac{1}{4} m V_0^2 + \frac{1}{2} k \delta_M^2 = \frac{1}{2} m V_0^2$$

$$\frac{1}{2} k \delta_M^2 = \frac{1}{4} m V_0^2 \Rightarrow 2 k \delta_M^2 = m V_0^2$$

E infine $\delta_M^2 = \frac{m v_0^2}{2K}$, da cui (con $K = 100\ N\,m^{-1}$)

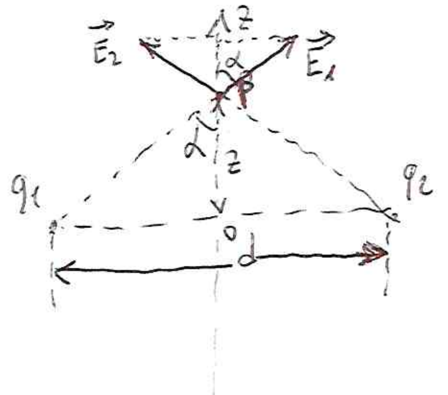
$$\boxed{\delta_M = v_0 \sqrt{\frac{m}{2K}} = (10\ m\,s^{-1}) \sqrt{\frac{100\ kg}{2 \cdot (100\ N\,m^{-1})}} \simeq 7.07\ m}$$

Problema n. 3

a) Nel punto medio del segmento che congiunge le due cariche elettriche si sommano i contributi al campo elettrico dovuti a ciascuna delle due cariche. Poiché si tratta di due vettori aventi uguale modulo, stessa direzione (quella del segmento stesso) e versi opposti, il campo elettrico nel punto M e' nullo.

$$\boxed{E_0 = 0}$$

b)



Per fissare le idee, consideriamo un punto P sull'asse del segmento congiungente le due cariche, dal lato con $z > 0$ (vedi schema qui a fianco).

La distanza di ciascuna carica dal punto P e' $\left(z^2 + \frac{d^2}{4}\right)^{1/2}$ (teorema di Pitagora)

Il modulo del campo elettrico generato nel punto P da ciascuna carica è

$$E_1 = E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{z^2 + d^2/4}$$

Il campo elettrico totale $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ è diretto lungo l'asse z, per simmetria, per cui il modulo di $\vec{E}$ si può calcolare semplicemente sommando le componenti z di $\vec{E}_1$ e di $\vec{E}_2$. L'angolo α tra $\vec{E}_1$ (o tra $\vec{E}_2$) e l'asse z è tale che $\cos\alpha = \frac{z}{\left(z^2 + d^2/4\right)^{1/2}}$, per cui

$$E_z(z) = E_{1z}(z) + E_{2z}(z) = 2 \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{z^2 + d^2/4} \cdot \cos\alpha =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{z^2 + \frac{d^2}{4}} \cdot \frac{z}{\left(z^2 + \frac{d^2}{4}\right)^{1/2}}$$

In definitiva:

$$\boxed{E_z(z) = \frac{2qz}{4\pi\varepsilon_0 \left(z^2 + \frac{d^2}{4}\right)^{3/2}}}$$

c) Per calcolare il valore di z per cui $E_z(z)$ ha un massimo, studiamo il segno della derivata prima di $E_z(z)$ rispetto a z:

$$E_z'(z) = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\left(z^2+\frac{d^2}{4}\right)^{3/2}} - \frac{3}{\cancel{2}}\,\frac{z\cdot\cancel{2}z}{\left(z^2+\frac{d^2}{4}\right)^{5/2}}\right] =$$

$$= \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{z^2+\frac{d^2}{4}-3z^2}{\left(z^2+\frac{d^2}{4}\right)^{5/2}} = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\frac{d^2}{4}-2z^2}{\left(z^2+\frac{d^2}{4}\right)^{5/2}}$$

Risulta quindi $E_z'(z) \geq 0$ per $\frac{d^2}{4} - 2z^2 \geq 0$, cioe' per

$$z^2 \leq \frac{d^2}{8} \Rightarrow |z| \leq \frac{d}{2\sqrt{2}}$$

Dunque, $E_z(z)$ ha un massimo relativo (in valore assoluto) per $|z| = \frac{d}{2\sqrt{2}}$; allora

$$\boxed{z_M = \frac{d}{2\sqrt{2}} = \frac{10^{-4}\,m}{2\sqrt{2}} \simeq 0.35\times10^{-4}\,m = 35\,\mu m}$$

Il valore massimo del modulo del campo elettrico lungo l'asse z e' quindi

$$E_M = |E_z(z_M)| = \frac{2qz_M}{4\pi\varepsilon_0\left(z_M^2+\frac{d^2}{4}\right)^{3/2}} = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{d}{2\sqrt{2}}\,\frac{1}{\left(\frac{d^2}{8}+\frac{d^2}{4}\right)^{3/2}} =$$

$$= \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{d}{2\sqrt{2}}\left(\frac{8}{3d^2}\right)^{3/2} = \frac{\cancel{2}q}{\cancel{4}_{2}\pi\varepsilon_0}\,\frac{d}{2\sqrt{2}}\,\frac{2^{9/2}}{3^{3/2}d^3} = \frac{q}{\cancel{2}\pi\varepsilon_0}\,\frac{2^{\cancel{3}2}}{3^{3/2}d^2}$$

$$\boxed{E_M = \frac{4q}{3\sqrt{3}\,\pi\varepsilon_0 d^2} = \frac{4\,(10^{-6}C)}{3\sqrt{3}\,\pi\,(0.8854\times10^{-11}C^2N^{-1}m^{-2})\,(10^{-4}m)^2} \simeq 2.77\times10^{12}\,\frac{N}{C}}$$