Dimostrazioni di **NP**-Completezza

Zbirciog Ionut Georgian

May 25, 2024

Indice

1 3SAT è NP-Completo

Dimostrazione: Partiamo con formalizzare la tripla $(I_{SAT}, S_{SAT}, \pi_{SAT})$ del problema SAT:

$I_{SAT} = \{f : \{vero, falso\}^n \rightarrow \{vero, falso\}$ tale che f è in forma congiuntiva normale (CNF)$\}$

$S_{SAT}(f) = \{(b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \{vero, falso\}^n\}$

$$\begin{aligned}\pi_{SAT}(f, S_{SAT}(f)) = \exists (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in S_{SAT}(f) : f(b_1, b_2, \ldots, b_n) = \text{vero}, \\ &\text{ossia, sostituendo in } f \text{ ogni occorrenza della variabile } x_i \text{ con il valore } b_i \\ &\text{(ed ogni occorrenza di } \neg x_i \text{ con } \neg b_i\text{) per ogni } i = 1, \ldots, n, \\ &\text{la funzione } f \text{ assume il valore vero.}\end{aligned}$$

Adesso, formalizziamo la tripla $(I_{3SAT}, S_{3SAT}, \pi_{3SAT})$ del problema $3SAT$:

$I_{3SAT} = \{f : \{vero, falso\}^n \rightarrow \{vero, falso\}$ tale che f è in forma 3-congiuntiva normale (3CNF)$\}$

$S_{3SAT}(f) = \{(b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \{vero, falso\}^n\}$

$$\begin{aligned}\pi_{3SAT}(f, S_{3SAT}(f)) = \exists (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in S_{3SAT}(f) : f(b_1, b_2, \ldots, b_n) = \text{vero}, \\ &\text{ossia, sostituendo in } f \text{ ogni occorrenza della variabile } x_i \text{ con il valore } b_i \\ &\text{(ed ogni occorrenza di } \neg x_i \text{ con } \neg b_i\text{) per ogni } i = 1, \ldots, n, \\ &\text{la funzione } f \text{ assume il valore vero.}\end{aligned}$$

Sia $f(x) \in I_{3SAT} = C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_m,\ \forall i = 1, \ldots, m,\ |C_i| = 3$.
Sia $g(y) \in I_{SAT} = D_1 \wedge D_2 \wedge \cdots \wedge D_v$.

Per dimostrare che $3SAT$ è **NPC**, dobbiamo fare la riduzione $SAT \leq 3SAT$. Ovvero $g \in SAT \Leftrightarrow f \in 3SAT$.
$\forall i = 1, \ldots, m$, vediamo costruire C_i a partire da D_i:
Chiamiamo *letterale*, una varibaile $l \in \{x_i, \neg x_i\}$

1. D_i contiene un solo letterale l.

$$C_i = (l \vee z_{i1} \vee z_{i2}) \wedge (l \vee \neg z_{i1} \vee z_{i2}) \wedge (l \vee z_{i1} \vee \neg z_{i2}) \wedge (l \vee \neg z_{i1} \vee \neg z_{i2})$$

2. D_i contiene 2 letterali $l_{i1} \vee l_{i2}$.

$$C_i = (l_{i1} \vee l_{i2} \vee z_{i1}) \wedge (\neg z_{i1} \vee l_{i1} \vee l_{i2})$$

3. D_i contiene 3 letterali $l_{i1} \vee l_{i2} \vee l_{i3}$, allora $C_i = D_i$.
4. D_i contiene 4 letterali $\underbrace{l_{i1} \vee l_{i2}} \vee \underbrace{l_{i3} \vee l_{i4}}$. In questo caso si raggruppano i primi 2 e gli ultimi 2.

$$C_i = (l_{i1} \vee l_{i2} \vee z_{i1}) \wedge (\neg z_{i1} \vee l_{i3} \vee l_{i4})$$

5. D_i contiene $k \geq 4$ letterali $\underbrace{l_{i1} \vee l_{i2}} \vee \cdots \vee \underbrace{l_{i(k-1)} \vee l_{ik}}$. In questo caso si raggruppano i primi 2 e gli ultimi 2.

$$C_i = (l_{i1} \vee l_{i2} \vee z_{i1}) \wedge (\neg z_{i1} \vee l_{i3} \vee z_{i2}) \wedge (\neg z_{i2} \vee l_{i4} \vee z_{i3}) \wedge \cdots \wedge (\neg z_{i(k-3)} \vee l_{i(k-1)} \vee l_{ik})$$

Possiamo costruire f a partire da g in tempo $O(|f|^2)$ che è polinomiale. Sapendo già che 3SAT è **NP** e avendo trovato una riduzione da SAT a 3SAT, possiamo concludere che 3SAT è **NPC**.