UNIVERSITÀ DI ROMA TOR VERGATA
Statistica per la ricerca sperimentale e tecnologica (Informatica)
Probabilità e Statistica (Scienza dei Media e delle Comunicazioni)
Probabilità e Statistica (Scienza e Tecnologia dei Materiali)
Anno accademico: `2008-2009`
Titolare del corso: `Claudio Macci`
Simulazione 2
ESERCIZIO 4A: Informatica + Scienze dei Media e delle Comunicazioni.
ESERCIZIO 4B: Scienza e Tecnologia dei Materiali.

Esercizio 1. Si lancia ripetutamente un dado equo e sia X la variabile aleatoria che indica a quale lancio esce per la prima volta il *numero 3*.
`D1`) Trovare la densità discreta di X.
`D2`) Calcolare la probabilità che esca la sequenza (pari,6,dispari,3,pari).

Esercizio 2. Un'urna contiene tre palline con i numeri 1, 2 e 3. Si estrae una pallina a caso e, se viene estratto il numero k, si lancia una moneta con probabilità che esca testa in ogni lancio uguale a $p_k = \frac{k}{4}$.
`D3`) Calcolare la probabilità che esca testa nel lancio di moneta.
`D4`) Calcolare la probabilità di aver lanciato la moneta equa sapendo che è uscita testa.

Esercizio 3. La densità congiunta di (X_1, X_2) è la seguente: $p_{(X_1,X_2)}(0,0) = \frac{1}{2}$; $p_{(X_1,X_2)}(1,0) = p_{(X_1,X_2)}(0,1) = \frac{1}{4}$.
`D5`) Trovare la densità discreta di $Z = X_1 + X_2$.
`D6`) Trovare la retta di regressione $X_2 = aX_1 + b$.

Esercizio 4A. Sia X una variabile aleatoria con densità $f_X(t) = \frac{8}{21}t$ per $t \in [1, 5/2]$ e $f_X(t) = 0$ altrimenti.
`D7`) Calcolare $P(X < 3/2)$.
`D8`) Calcolare $\mathbb{E}[X^2]$.

Esercizio 4B. Sia (X_n) una catena di Markov omogenea con spazio degli stati $\{1, 2, 3, 4\}$ e matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

`D7`) Calcolare la probabilità che la catena passi per lo *stato 2* partendo dallo *stato 1*.
`D8`) Trovare le distribuzioni stazionarie.

Esercizio 5. Sia (X_n) una successione di variabili aleatorie indipendenti e tutte con distribuzione uniforme su $[0, 1]$. Inoltre sia $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$.
`D9`) Trovare il valore di c_1 per cui si ha $\lim_{n\to\infty} P(|\overline{X}_n - c_1| \geq \varepsilon) = 0$ per ogni $\varepsilon > 0$.
`D10`) Trovare il valore di c_2 per cui si ha $\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\overline{X}_n - 1/2}{c_2/\sqrt{n}} \leq x\right) = \Phi(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, dove Φ è la funzione di distribuzione di una normale standard.

Esercizio 6. Sia X una variabile aleatoria normale con media $\mu = 2$ e varianza $\sigma^2 = 4$.
`D11`) Calcolare $P(X > 3)$.
`D12`) Calcolare $P(|X - 2| < 0.5)$.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
`D1`) La variabile aleatoria X ha distribuzione geometrica *che parte da 1* di parametro $p = 1/6$ (la probabilità che esca il *numero 3* in ogni lancio): $p_X(k) = (1-p)^{k-1}p = (\frac{5}{6})^{k-1} \cdot \frac{1}{6}$ per $k \geq 1$.
`D2`) Sfruttando l'indipendenza di eventi legati a diversi lanci del dado, la probabilità richiesta è uguale a $\frac{3}{6}\frac{1}{6}\frac{3}{6}\frac{1}{6}\frac{3}{6} = \frac{1}{288}$.

Esercizio 2. Sia T l'evento "esce testa" e E_k l'evento "estratta la moneta con probabilità che esca testa p_k".
`D3`) Per la formula delle probabilità totali si ha $P(T) = \sum_{k=1}^{3} P(T|E_k)P(E_k) = \sum_{k=1}^{3} \frac{k}{4}\frac{1}{3} = \frac{1+2+3}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.
`D4`) L'evento E_2 corrisponde all'estrazione della moneta equa. Per la formula di Bayes, e sfruttando il valore di $P(T)$ calcolato prima, si ha $P(E_2|T) = \frac{P(T|E_2)P(E_2)}{P(T)} = \frac{\frac{2}{4}\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$.

Esercizio 3.
`D5`) Si ha $p_Z(0) = p_{(X_1,X_2)}(0,0) = \frac{1}{2}$ e $p_Z(1) = p_{(X_1,X_2)}(0,1) + p_{(X_1,X_2)}(1,0) = \frac{1+1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.
`D6`) Si ha $a = \frac{\mathrm{Cov}(X_1,X_2)}{\mathrm{Var}[X_1]}$ e $b = \mathbb{E}[X_2] - a\mathbb{E}[X_1]$. Osserviamo che: $p_{X_1}(0) = p_{(X_1,X_2)}(0,0) + p_{(X_1,X_2)}(0,1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ e $p_{X_1}(1) = p_{(X_1,X_2)}(1,0) = \frac{1}{4}$; inoltre $p_{X_2}(0) = p_{(X_1,X_2)}(0,0) + p_{(X_1,X_2)}(1,0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ e $p_{X_2}(1) = p_{(X_1,X_2)}(0,1) = \frac{1}{4}$. Quindi X_1 e X_2 hanno la stessa distribuzione e, posto $p = p_{X_1}(1) = p_{X_2}(1)$, hanno la stessa speranza matematica $p = \frac{1}{4}$ e la stessa varianza $p(1-p) = \frac{3}{16}$. Inoltre $\mathbb{E}[X_1X_2] = 0$ perché $P(X_1X_2 = 0) = 1$, da cui segue $\mathrm{Cov}(X_1,X_2) = \mathbb{E}[X_1X_2] - \mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[X_2] = -\frac{1}{16}$. In conclusione si ha $a = -\frac{1}{3}$ e $b = \frac{1}{3}$.

Esercizio 4A.
`D7`) $P(X < 3/2) = \int_1^{3/2} \frac{8}{21}tdt = \frac{8}{21}[\frac{t^2}{2}]_{t=1}^{t=3/2} = \frac{4}{21} \cdot \frac{9-4}{4} = \frac{5}{21}$.
`D8`) $\mathbb{E}[X^2] = \int_1^{5/2} t^2\frac{8}{21}tdt = \frac{8}{21}[\frac{t^4}{4}]_{t=1}^{t=5/2} = \frac{2}{21}(\frac{625}{16} - 1) = \frac{609}{168} = \frac{29}{8}$.

Esercizio 5. In generale ricordiamo che, se Z è uniforme su $[a,b]$, si ha $\mathbb{E}[Z] = \frac{a+b}{2}$ e $\mathrm{Var}[Z] = \frac{(b-a)^2}{12}$.
`D9`) Per la legge dei grandi numeri si ha $c_1 = \mathbb{E}[X_1] = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$.
`D10`) Per il teorema limite centrale si ha $c_2 = \sqrt{\mathrm{Var}[X_1]} = \sqrt{(1-0)^2/12} = 1/\sqrt{12}$.

Esercizio 6. La v.a. $Z_X = \frac{X-2}{\sqrt{4}}$ è la standardizzata di X.
`D11`) $P(X > 3) = P\left(\frac{X-2}{\sqrt{4}} > \frac{3-2}{\sqrt{4}}\right) = P(Z_X > 1/2) = 1 - \Phi(1/2) = 1 - \Phi(0.5) = 1 - 0.69146 = 0.30854$.
`D12`) $P(|X-2| < 0.5) = P(-0.5 < X-2 < 0.5) = P(-0.25 < Z_X < 0.25) = \Phi(0.25) - \Phi(-0.25) = \Phi(0.25) - (1 - \Phi(0.25) = 2\Phi(0.25) - 1 = 2 \cdot 0.59871 - 1 = 0.19742$.

Commenti.
`D4`) Gli eventi E_2 e T sono indipendenti; infatti $P(E_2|T) = P(E_2)$. Non possiamo dire la stessa cosa se avessimo E_1 o E_3 al posto di E_2; infatti le probabilità condizionate $P(E_1|T) = \frac{1}{6}$ e $P(E_3|T) = \frac{1}{2}$ non coincidono con $P(E_1) = \frac{1}{3}$ e $P(E_3) = \frac{1}{3}$.
`D5`) Si ha $p_Z(0) + p_X(1) = \frac{1+1}{2} = 1$ in accordo con la teoria.

Esercizio 4B.

D7) In generale, per le probabilità di passaggio per un insieme C, si ha un sistema di k equazioni e k incognite dove k è la cardinalità dell'insieme D_C degli stati che comunicano con C e non appartenenti a C. Qui siamo interessati all'insieme di stati $C = \{2\}$ e si ha $D_C = \{1\}$. Quindi abbiamo una sola incognita λ_1 e, indicando con p_{ij} gli elementi della matrice di transizione P, si ha

$$\lambda_1 = p_{12} + p_{11}\lambda_1, \quad \text{che diventa} \quad \lambda_1 = \frac{1}{4} + \frac{\lambda_1}{4}$$

dopo aver sostituito i valori p_{12} e p_{11}. Il valore λ_1 è la probabilità richiesta e, facendo i conti, si ottiene la soluzione $\lambda_1 = \frac{1}{3}$.

D8) Gli stati $\{1, 2\}$ sono transitori. Infatti, per ogni $i \in \{1, 2\}$, esiste uno stato j tale che i comunica con j e j non comunica con i; basta scegliere $j = 3$ oppure $j = 4$. Allora, se $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4)$ è una distribuzione stazionaria, si ha necessariamente $\pi_1 = \pi_2 = 0$. Infine si verifica immediatamente che ogni distribuzione del tipo $\pi = (0, 0, \pi_3, \pi_4)$ è stazionaria.

Commento.

D7) In altro modo, se consideriamo la variabile aleatoria $T_2 = \inf\{n \geq 1 : X_n = 2\}$ con la convenzione $\inf \emptyset = \infty$, possiamo dire che $\lambda_1 = P(T_2 < \infty | X_0 = 1)$ e si ha

$$\lambda_1 = \sum_{1 \leq k < \infty} P(T_2 = k | X_0 = 1) = \sum_{1 \leq k < \infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{1/4}{1 - 1/4} = \frac{1}{3}.$$