Università di Roma Tor Vergata

Statistica per la ricerca sperimentale e tecnologica (Informatica) (Esercizi 1-2-3-4-5-6)

Probabilità e Statistica (Scienza dei Media e delle Comunicazioni) (Esercizi 1-2-3-4-5-6)

Probabilità e Statistica (Scienza e Tecnologia dei Materiali) (Esercizi 1-2-3-4-5-7)

Anno accademico: 2008-2009. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`

Esame del 16 Settembre 2009

Esercizio 1. Si lanciano 5 monete eque. Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di teste ottenute.

D1) Trovare la densità discreta di X.

D2) Calcolare la probabilità di $P(X = k|X \leq 2)$ per $k \in \{0, 1, 2\}$.

Esercizio 2. Supponiamo di avere due urne: la prima con 5 palline numerate da 1 a 5; la seconda con due palline nere. Si estrae una pallina a caso dalla prima urna: se esce un numero dispari si mette una pallina bianca nella seconda urna; se esce un numero pari si mettono due palline bianche nella seconda urna. Poi si estrae una pallina a caso dalla seconda urna.

D3) Calcolare la probabilità di estrarre una pallina bianca dalla seconda urna.

D4) Calcolare la probabilità di aver estratto un numero dispari dalla prima urna sapendo di aver estratto una pallina bianca dalla seconda urna.

Esercizio 3. La variabile aleatoria (X_1, X_2) ha la seguente densità congiunta: $p_{(X_1,X_2)}(0, 1) = p_{(X_1,X_2)}(1, 0) = p_{(X_1,X_2)}(1, 2) = \frac{1}{5}$; $p_{(X_1,X_2)}(2, 1) = \frac{2}{5}$.

D5) Trovare le densità marginali di X_1 e X_2.

D6) Calcolare $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria continua con densità f_X definita come segue: $f_X(t) = \frac{2}{3}(2 - t)$ per $t \in [0, 1]$ e $f_X(t) = 0$ altrimenti.

D7) Calcolare $P(X < 1/5)$.

D8) Calcolare $\mathbb{E}[2 - X]$.

Suggerimento. Può essere utile osservare che $\mathbb{E}[2 - X] = 2 - \mathbb{E}[X]$.

Esercizio 5. Sia X una variabile aleatoria normale standard.

D9) Calcolare $P(1 < X < 2)$.

D10) Calcolare $P(|X| > 0.76)$.

Esercizio 6. Sia $N_t = \sum_{n\geq 1} 1_{T_n \leq t}$ (per $t \geq 0$) un processo di Poisson con intensità di $\lambda = 2/5$.

D11) Calcolare $\mathbb{E}[T_{10}]$.

D12) Calcolare $P(N_5 \leq 3)$.

Esercizio 7. Sia (X_n) una catena di Markov omogenea con spazio degli stati $\{1, 2, 3\}$ e matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D13) Discutere il carattere degli stati.

D14) Calcolare $P(X_2 = j|X_0 = i)$ per ogni $i, j \in \{1, 2, 3\}$.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
`D1`) La densità discreta di X è $p_X(k)=\binom{5}{k}(\frac{1}{2})^5$ per $k\in\{0,1,2,3,4,5\}$ (binomiale di parametri $n=5$ e $p=\frac{1}{2}$), da cui segue $p_X(0)=p_X(5)=\frac{1}{32}$, $p_X(1)=p_X(4)=\frac{5}{32}$ e $p_X(2)=p_X(3)=\frac{10}{32}$.
`D2`) Per $k\in\{0,1,2\}$ si ha $P(X=k|X\leq 2)=\frac{P(\{X=k\}\cap\{X\leq 2\})}{P(X\leq 2)}=\frac{P(X=k)}{P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)}$ e quindi, sfruttando i valori della densità di X calcolati prima, $P(X=0|X\leq 2)=\frac{1}{16}$, $P(X=1|X\leq 2)=\frac{5}{16}$ e $P(X=2|X\leq 2)=\frac{10}{16}$.

Esercizio 2. Sia D l'evento "estrarre dispari", ed B l'evento "estrarre bianca".
`D3`) Per la formula delle probabilità totali si ha $P(B)=P(B|D)P(D)+P(B|D^c)P(D^c)=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}+\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{5}=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$.
`D4`) Per la formula di Bayes e, sfruttando il valore di $P(B)$ calcolato prima, si ha $P(D|B)=\frac{P(B|D)P(D)}{P(B)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}/\frac{2}{5}=\frac{1}{2}$.

Esercizio 3.
`D5`) Si ha $p_{X_1}(0)=p_{(X_1,X_2)}(0,1)=\frac{1}{5}$, $p_{X_1}(1)=p_{(X_1,X_2)}(1,0)+p_{(X_1,X_2)}(1,2)=\frac{1+1}{5}=\frac{2}{5}$ e $p_{X_1}(2)=p_{(X_1,X_2)}(2,1)=\frac{2}{5}$. Si ha $p_{X_2}(0)=p_{(X_1,X_2)}(1,0)=\frac{1}{5}$, $p_{X_2}(1)=p_{(X_1,X_2)}(0,1)+p_{(X_1,X_2)}(2,1)=\frac{1+2}{5}=\frac{3}{5}$ e $p_{X_2}(2)=p_{(X_1,X_2)}(1,2)=\frac{1}{5}$.
`D6`) Si ha $\mathrm{Cov}(X_1,X_2)=\mathbb{E}[X_1X_2]-\mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[X_2]=0\cdot 1\cdot\frac{1}{5}+1\cdot 0\cdot\frac{1}{5}+1\cdot 2\cdot\frac{1}{5}+2\cdot 1\cdot\frac{2}{5}-(0\cdot\frac{1}{5}+1\cdot\frac{2}{5}+2\cdot\frac{2}{5})(0\cdot\frac{1}{5}+1\cdot\frac{3}{5}+2\cdot\frac{1}{5})=\frac{6}{5}-\frac{6}{5}\cdot 1=0$.

Esercizio 4.
`D7`) Si ha $P(X<1/5)=\int_0^{1/5}\frac{2}{3}(2-t)dt=\frac{2}{3}[2t-t^2/2]_{t=0}^{t=1/5}=\frac{2}{3}(2\cdot\frac{1}{5}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{25})=\frac{2}{3}(\frac{2}{5}-\frac{1}{50})=\frac{2}{3}\cdot\frac{20-1}{50}=\frac{38}{150}=\frac{19}{75}$.
`D8`) Si ha $\mathbb{E}[2-X]=2-\mathbb{E}[X]=2-\int_0^1 t\frac{2}{3}(2-t)dt=2-\frac{2}{3}\int_0^1 2t-t^2dt=2-\frac{2}{3}[2\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{3}]_{t=0}^{t=1}=2-\frac{2}{3}(1-\frac{1}{3})=2-\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=2-\frac{4}{9}=\frac{18-4}{9}=\frac{14}{9}$.

Esercizio 5.
`D9`) Si ha $P(1<X<2)=\Phi(2)-\Phi(1)=0.97725-0.84134=0.13591$.
`D10`) Si ha $P(|X|>0.76)=1-P(|X|\leq 0.76)=1-(\Phi(0.76)-\Phi(-0.76))=1-(\Phi(0.76)-(1-\Phi(0.76)))=1-\Phi(0.76)+1-\Phi(0.76)=2(1-\Phi(0.76))=2(1-0.77637)=0.44726$.

Esercizio 6.
`D11`) La variabile aleatoria T_{10} ha distribuzione Gamma di parametri $\alpha=10$ e $\lambda=2/5$; quindi $\mathbb{E}[T_{10}]=\frac{10}{2/5}=50/2=25$.
`D12`) Si ha $P(N_5\leq 3)=\sum_{k=0}^3 P(N_5=k)=\sum_{k=0}^3\frac{(\frac{2}{5}\cdot 5)^k}{k!}e^{-\frac{2}{5}\cdot 5}=\left(1+2+2+\frac{4}{3}\right)e^{-2}=\frac{19}{3}e^{-2}$.

Commenti.
`D1`) Si ha $\sum_{k=0}^5 p_X(k)=\frac{1+5+10+10+5+1}{32}=1$ in accordo con la teoria.
`D2`) Si ha $\sum_{k=0}^2 P(X=k|X\leq 2)=\frac{1+5+10}{16}=1$ in accordo con la teoria.
`D5`) Si ha $\sum_{k=0}^2 p_{X_1}(k)=\frac{1+2+2}{5}=1$ e $\sum_{k=0}^2 p_{X_2}(k)=\frac{1+3+1}{5}=1$ in accordo con la teoria.
`D6`) In questo caso si ha covarianza nulla ma le variabili aleatorie non sono indipendenti perché i punti dove la densità congiunta è positiva non costituiscono un prodotto cartesiano. Infatti, ad esempio, si ha $p_{(X_1,X_2)}(1,1)=0$ e $p_{X_1}(1)\cdot p_{X_2}(1)=\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{6}{25}\neq 0$.
`D8`) In maniera alternativa si ha $\mathbb{E}[2-X]=\int_0^1(2-t)\frac{2}{3}(2-t)dt=\frac{2}{3}\int_0^1(2-t)^2dt=\frac{2}{3}[-\frac{(2-t)^3}{3}]_{t=0}^{t=1}=\frac{2}{9}(-1+8)=\frac{14}{9}$.

Esercizio 7.

D13) Lo stato 1 è transitorio perché comunica con 2 ma non vale il viceversa. Lo stato 2 è transitorio perché comunica con 3 ma non vale il viceversa. Lo stato 3 è assorbente e quindi è ricorrente.

D14) I valori richiesti sono dati dalla matrice P^2, cioè

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/9 & 5/18 & 11/18 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Commenti.

D13) In questo caso si ha un'unica distribuzione stazionaria concentrata sullo stato assorbente, cioè $(0, 0, 1)$.

D14) In accordo con la teoria la somma delle righe di P^2 è uguale a 1. Non sorprende che la matrice di transizione a due passi P^2 sia ancora triangolare superiore. Infatti, anche nel caso a due passi, è nulla la *probabilità di tornare indietro*.