Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità (ed insegnamenti mutuati)
Anno accademico: `2013-2014`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Appello del 19 Febbraio 2014

Esercizio 1. Si estraggono a caso 2 carte contemporaneamente (in blocco) da un mazzo di 8 carte numerate da 1 a 8.
`D1`) Calcolare la probabilità di estrarre un numero pari e un numero dispari.
`D2`) Calcolare la probabilità di estrarre due numeri consecutivi.

Esercizio 2. Si lancia 3 volte una moneta equa. Se esce 3 volte testa, si sceglie la *moneta truccata 1*, la cui probabilità di ottenere testa è $p_1 = \frac{7}{8}$; se esce almeno una volta croce, si sceglie la *moneta truccata 2*, la cui probabilità di ottenere testa è $p_2 = \frac{1}{8}$. Poi si lancia la moneta truccata scelta.
`D3`) Calcolare la probabilità di ottenere testa nel lancio della moneta truccata scelta.
`D4`) Calcolare la probabilità di aver scelto la *moneta truccata 1* sapendo di aver ottenuto testa nel lancio della moneta truccata scelta.

Esercizio 3. Consideriamo la seguente densità congiunta: $p_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = (\frac{1}{2})^{x_1+x_2}$ per $x_1, x_2 \geq 1$ interi.
`D5`) Calcolare $P(X_1 = X_2)$.
`D6`) Calcolare $P(X_1 = X_2 | X_1 + X_2 \leq 3)$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con densità continua $f_X(t) = \frac{2}{t^3} 1_{(1,\infty)}(t)$.
`D7`) Trovare la densità continua di $Y = \log X$.
`D8`) Calcolare $P([X] = 1)$ dove $[x] = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$ è la *parte intera* di x.

Esercizio 5.
`D9`) Sia $N_t = \sum_{n\geq 1} 1_{T_n \leq t}$ (per $t \geq 0$) un processo di Poisson con intensità di $\lambda = \frac{3}{2}$. Calcolare $P(N_{2/3} = 1)$.
`D10`) Sia X una variabile aleatoria normale standard. Calcolare $P(\{0 < X < a\} | \{|X| < a\})$ per $a > 0$, e verificare che non dipende dal valore della costante a.

Esercizio 6. Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. (indipendenti e identicamente distribuite).
`D11`) Dire per quale valore di m si ha

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - m\right| > \varepsilon\right) = 0 \text{ per ogni } \varepsilon > 0,$$

nel caso in cui le variabili aleatorie $\{X_n : n \geq 1\}$ abbiano densità continua $f(t) = \frac{3}{t^4} 1_{(1,\infty)}(t)$.
`D12`) Calcolare, usando l'approssimazione Normale, $P(X_1 + \cdots + X_{100} - 50 \leq 5/\sqrt{12})$ nel caso in cui le variabili aleatorie $\{X_n : n \geq 1\}$ abbiano distribuzione uniforme su $(0, 1)$.

Esercizio 7 (*solo per Lauree Magistrali*). Consideriamo una catena di Markov omogenea $\{X_n : n \geq 0\}$ con spazio degli stati $E = \{1, 2\}$ e matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

per $a \in (0, 1)$.
`D13`) Trovare il valore di a per cui $\lim_{n\to\infty} P(X_n = 1 | X_0 = i) = \frac{3}{4}$ per ogni $i \in E$.
`D14`) Calcolare $P(X_1 = 1, X_2 = 2, X_3 = 1 | X_0 = 1)$.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
D1) Per la teoria della distribuzione ipergeometrica, la probabilità richiesta è $\frac{\binom{4}{1}\binom{4}{1}}{\binom{8}{2}} = \frac{4\cdot4}{(8\cdot7)/2} = \frac{4}{7}$.
D2) Le palline possono essere estratte in $\binom{8}{2} = 28$ modi che rappresentano i casi possibili, tutti equiprobabili. I casi favorevoli per l'evento sono 7, cioè $\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{4,5\},\{5,6\},\{6,7\},\{7,8\}$. Quindi la probabilità richiesta è $\frac{7}{28} = \frac{1}{4}$.

Esercizio 2. Sia T l'evento "esce testa nel lancio della moneta truccata scelta" e, per $k \in \{1,2\}$, indichiamo con E_k l'evento "scelta la moneta truccata k". Per la teoria della distribuzione binomiale si ha $P(E_1) = \binom{3}{3}(\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$ e $P(E_2) = \sum_{k=0}^{2}\binom{3}{k}(\frac{1}{2})^3 = \frac{1+3+3}{8} = \frac{7}{8}$ (del resto si ha $E_2 = E_1^c$).
D3) Per la formula delle probabilità totali si ha $P(T) = P(T|E_1)P(E_1) + P(T|E_2)P(E_2) = \frac{7}{8}\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\frac{7}{8} = \frac{7+7}{64} = \frac{14}{64} = \frac{7}{32}$.
D4) Per la formula di Bayes, e tenendo conto del valore di $P(T)$ calcolato prima, si ha $P(E_1|T) = \frac{P(T|E_1)P(E_1)}{P(T)} = \frac{\frac{7}{8}\frac{1}{8}}{7/32} = \frac{32}{64} = \frac{1}{2}$.

Esercizio 3.
D5) Si ha $P(X_1 = X_2) = \sum_{k\geq1} p_{X_1,X_2}(k,k) = \sum_{k\geq1}(\frac{1}{2})^{2k} = \sum_{k\geq1}(\frac{1}{4})^k = \frac{1}{4}\frac{1}{1-(1/4)} = \frac{1}{4}\frac{4}{3} = \frac{1}{3}$.
D6) Si ha $P(X_1 = X_2|X_1 + X_2 \leq 3) = \frac{P(\{X_1=X_2\}\cap\{X_1+X_2\leq3\})}{P(X_1+X_2\leq3)} = \frac{p_{X_1,X_2}(1,1)}{p_{X_1,X_2}(1,1)+p_{X_1,X_2}(1,2)+p_{X_1,X_2}(2,1)} = \frac{(1/2)^{1+1}}{(1/2)^{1+1}+(1/2)^{1+2}+(1/2)^{2+1}} = \frac{1/4}{1/4+1/8+1/8} = \frac{1/4}{(2+1+1)/8} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Esercizio 4.
D7) Si vede che $P(\log X \geq 0) = 1$, da cui $F_Y(y) = 0$ per $y \leq 0$. Per $y > 0$ si ha $F_Y(y) = P(\log X \leq y) = P(X \leq e^y) = \int_1^{e^y} \frac{2}{t^3}dt = 2[\frac{t^{-3+1}}{-3+1}]_{t=1}^{t=e^y} = 1 - e^{-2y}$. Quindi la densità è $f_Y(y) = 2e^{-2y}1_{(0,\infty)}(y)$; in altri termini Y ha distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 2$.
D8) Si ha $P([X] = 1) = P(1 \leq X < 2) = \int_1^2 \frac{2}{t^3}dt = 2[\frac{t^{-3+1}}{-3+1}]_{t=1}^{t=2} = 1 - 2^{-2} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Esercizio 5.
D9) Si ha $P(N_{2/3} = 1) = \frac{(\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3})^1}{1!}e^{-\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}} = e^{-1}$.
D10) Si ha $P(\{0 < X < a\}|\{|X| < a\}) = \frac{P(\{0<X<a\}\cap\{|X|<a\})}{P(|X|<a)} = \frac{P(0<X<a)}{P(-a<X<a)} = \frac{\Phi(a)-\Phi(0)}{\Phi(a)-\Phi(-a)} = \frac{\Phi(a)-1/2}{\Phi(a)-(1-\Phi(a))} = \frac{\Phi(a)-1/2}{2\Phi(a)-1} = \frac{\Phi(a)-1/2}{2(\Phi(a)-1/2)} = \frac{1}{2}$.

Esercizio 6.
D11) Per la legge dei grandi numeri si ha $m = \int_1^\infty t\frac{3}{t^4}dt = 3\int_1^\infty t^{-3}dt = 3[\frac{t^{-3+1}}{-3+1}]_{t=1}^{t=\infty} = \frac{3}{2}$.
D12) Le variabili aleatorie $\{X_n : n \geq 1\}$ hanno media $\frac{1}{2}$ e varianza $\frac{1}{12}$. Quindi, se indichiamo con Z la standardizzata di $X_1 + \cdots + X_{100}$, si ha $\{X_1 + \cdots + X_{100} - 50 \leq 5/\sqrt{12}\} = \{Z \leq \frac{5/\sqrt{12}}{(1/\sqrt{12})\sqrt{100}}\}$ e, per l'approssimazione normale, $P(X_1 + \cdots + X_{100} - 50 \leq 5/\sqrt{12}) = \Phi(5/10) = \Phi(0.5) = 0.69146$.

Esercizio 7.
D13) Possiamo applicare il Teorema di Markov perché la catena è regolare. Il limite delle probabilità di transizione è dato dalla distribuzione invariante $\pi = (\pi_1, \pi_2)$, e si deve trovare il valore di a per cui $\pi_1 = \frac{3}{4}$. Consideriamo la relazione matriciale

$$(\pi_1, \pi_2)\begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (\pi_1, \pi_2),$$

che fornisce il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} a\pi_1 + \pi_2 = \pi_1 \\ (1-a)\pi_1 = \pi_2. \end{cases}$$

Si vede che la prima equazione coincide con la seconda, cioè $\pi_2 = (1-a)\pi_1$; quindi, essendo $\pi_1 + \pi_2 = 1$, si ha $\pi_1 + (1-a)\pi_1 = 1$, $\pi_1 = \frac{1}{2-a}$. Dunque la distribuzione invariante è $(\pi_1, \pi_2) = (\frac{1}{2-a}, \frac{1-a}{2-a})$. Infine consideriamo l'equazione $\pi_1 = \frac{3}{4}$, da cui si ottiene $\frac{1}{2-a} = \frac{3}{4}$, $4 = 3(2-a)$, $3a = 6-4$, $a = \frac{2}{3}$.
D14) Si ha $P(X_1 = 1, X_2 = 2, X_3 = 1|X_0 = 1) = p_{11}p_{12}p_{21} = a(1-a)1 = a(1-a)$.

Commenti.
La somma dei valori di ciascuna densità discreta che appare è 1 in accordo con la teoria.
`D10`) Il valore $\frac{1}{2}$ della probabilità condizionata non è sorprendente. In effetti, in riferimento alle aree sotto la curva della densità di una Normale standard, l'area che compete all'intervallo $(0, a)$ è la metà di quella che compete all'intervallo $(-a, a)$. Si ottiene lo stesso risultato anche nel caso in cui X sia Normale con media 0 e una qualsiasi varianza positiva σ^2 (non necessariamente $\sigma^2 = 1$ come per il caso standard); i passaggi sono simili (i termini $\Phi(a)$ devono essere sostituiti con $\Phi(a/\sigma)$).
`D13`) Per $a = 0$ e per $a = 1$ il Teorema di Markov non è applicabile perché la catena non è regolare. Per $a = 0$ la catena è irriducibile e ammette $(\pi_1, \pi_2) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ come unica distribuzione invariante; inoltre le successioni $\{P(X_n = 1|X_0 = 1) : n \geq 1\}$ e $\{P(X_n = 1|X_0 = 2) : n \geq 1\}$ non ammettono limite perché

$$P(X_n = 1|X_0 = 1) = 0 \text{ per } n \text{ dispari e } P(X_n = 1|X_0 = 1) = 1 \text{ per } n \text{ pari}$$

e

$$P(X_n = 1|X_0 = 2) = 0 \text{ per } n \text{ pari e } P(X_n = 1|X_0 = 2) = 1 \text{ per } n \text{ dispari.}$$

Per $a = 1$ la catena non è irriducibile perché lo stato 1 è assorbente e lo stato 2 è transitorio; in questo caso l'unica distribuzione invariante è $(1, 0)$; inoltre $\lim_{n\to\infty} P(X_n = 1|X_0 = i) = 1$ per ogni $i \in \{1, 2\}$ perché si ha

$$P(X_n = 1|X_0 = 1) = P(X_n = 1|X_0 = 2) = 1 \text{ per ogni } n \geq 1.$$

Infine osserviamo che, in entrambi i casi $a = 0$ e $a = 1$, si ha un'unica distribuzione invariante data dalla formula generale $(\pi_1, \pi_2) = (\frac{1}{2-a}, \frac{1-a}{2-a})$ ottenuta per $a \in (0, 1)$.