Laurea Triennale in Scienza e Tecnologia dei Media, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità (ed insegnamenti mutuati)
Anno accademico: `2018-2019`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Simulazione 1
Esercizi 1,2,3,4,5 per gli studenti che sostengono l'esame da 6 crediti.
Esercizi 1,2,3,4,5,6 per gli studenti che sostengono l'esame da 8 crediti.

Esercizio 1.
Un'urna ha 4 palline bianche, 2 rosse e 2 nere. Si estraggono a caso 3 palline, una alla volta e con reinserimento.
`D1`) Calcolare la probabilità di estrarre tre palline di colori tutti diversi.
`D2`) Calcolare la probabilità di estrarre 1 palline bianca e 2 nere.
`D3`) Calcolare la probabilità di estrarre 1 pallina bianca.

Esercizio 2.
Abbiamo un'urna inizialmente vuota. Si lanciano 4 dadi equi e vengono messe nell'urna tante palline bianche quanti sono i numeri pari ottenuti, e tante palline nere quanti sono in numeri dispari ottenuti. Poi si estraggono a caso 2 palline in blocco dall'urna e sia X la variabile aleatoria che conta il numero di palline bianche estratte.
`D4`) Trovare la densità discreta di X.

Esercizio 3.
Si lancia ripetutamente un dado equo e sia X_1 la variabile aleatoria che conta il numero di lanci necessari per avere per la prima volta il numero 1. Poi si lancia ripetutamente un altro dado equo e sia X_2 la variabile aleatoria che conta il numero di lanci necessari per avere per la prima volta un numero pari.
`D5`) Calcolare $P(X_1 = X_2)$.
`D6`) Calcolare $P(X_1 = 1|X_1 + X_2 = 3)$.

Esercizio 4.
Sia X una variabile aleatoria con densità continua $f(x) = \frac{cx^{c-1}}{b^c-a^c}1_{(a,b)}(x)$, dove $a, b, c > 0$ e $a < b$.
`D7`) Trovare la funzione di distribuzione di $Y = X^{1/c}$.
`D8`) Calcolare $\mathbb{E}[X]$ e, nel caso in cui $a = 0$, trovare il valore di c per cui si ha $\mathbb{E}[X] = \frac{b}{2}$.

Esercizio 5.
Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}}dx$.
`D9`) Sia X una variabile aleatoria Normale con media 1 e varianza σ^2. Dire per quale valore della varianza si ha $P(X > 0) = \Phi(3/2)$.
`D10`) Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. (indipendenti e identicamente distribuite), con distribuzione uniforme su $(0, a\sqrt{12})$ per qualche $a > 0$. Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - \frac{na\sqrt{12}}{2}}{\sqrt{n}} > 1\right)$$

esprimendo il risultato con la funzione $\Phi(y)$ per qualche $y \geq 0$, e determinare il valore di a per cui il limite è uguale a $1 - \Phi(2)$.

Esercizio 6.
Consideriamo una catena di Markov omogenea $\{X_n : n \geq 0\}$ con spazio degli stati $E = \{1, 2, 3\}$ e, per $p \in (0, 1)$, matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ p & 0 & 1-p \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

`D11`) Illustrare le conseguenze del teorema di Markov dopo aver motivato la sua applicabilità.
`D12`) Calcolare il tempi medi di raggiungimento dell'insieme $\{1\}$ e partendo da 2 e da 3.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
D1) Per la teoria della distribuzione multinomiale la probabilità richiesta è $\frac{3!}{1!1!1!}(\frac{4}{8})^1(\frac{2}{8})^1(\frac{2}{8})^1 = \frac{6}{32} = \frac{3}{16}$.
D2) Per la teoria della distribuzione multinomiale la probabilità richiesta è $\frac{3!}{1!2!0!}(\frac{4}{8})^1(\frac{2}{8})^2(\frac{2}{8})^0 = \frac{3}{32}$.
D3) La variabile aleatoria X che conta il numero di palline bianche estratte ha distribuzione binomiale con parametri $n = 3$ e $p = 1/2$. Quindi la probabilità richiesta è $P(X = 1) = \binom{3}{1}(\frac{1}{2})^3 = \frac{3}{8}$.
Osservazione: la probabilità $P(X = 1)$ deve coincidere con la somma delle probabilità di ottenere tre colori diversi (prima domanda), 1 pallina bianca e 2 nere (seconda domanda), e 1 pallina bianca e 2 rosse (coincide con la probabilità alla seconda domanda, ragionando allo stesso modo e ottenendo gli stessi valori numerici); infatti si ha $\frac{3}{16} + \frac{3}{32} + \frac{3}{32} = \frac{12}{32} = \frac{3}{8}$.

Esercizio 2.
D4) Indichiamo con Y la variabile aleatoria che indica il numero di palline bianche nell'urna (prima di compiere l'estrazione). Ovviamente Y ha distribuzione binomiale di parametri $n = 4$ (numero di dadi lanciati) e $p = 1/2$ (probabilità di avere un numero pari lanciando un dado equo); quindi si ha $p_Y(k) = \binom{4}{k}(1/2)^4$ per $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Allora, per $h \in \{0, 1, 2\}$, si ha

$$p_X(h) = \sum_{k=0}^{4} P(X = h|Y = k)P(Y = k) = \sum_{k=0}^{4} \frac{\binom{k}{h}\binom{4-k}{2-h}}{\binom{4}{2}}\binom{4}{k}(1/2)^4,$$

da cui segue $p_X(0) = \sum_{k=0}^{4} \frac{\binom{k}{0}\binom{4-k}{2}}{\binom{4}{2}}\binom{4}{k}(1/2)^4 = \frac{1}{16}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+0+0 = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$, $p_X(1) = \sum_{k=0}^{4} \frac{\binom{k}{1}\binom{4-k}{1}}{\binom{4}{2}}\binom{4}{k}(1/2)^4 = 0 + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + 0 = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ e $p_X(2) = \sum_{k=0}^{4} \frac{\binom{k}{2}\binom{4-k}{0}}{\binom{4}{2}}\binom{4}{k}(1/2)^4 = 0 + 0 + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$.
Osservazione: si ha $\sum_{h=0}^{2} p_X(h) = 1$ in accordo con la teoria.

Esercizio 3.
Le variabili aleatorie X_1 e X_2 sono indipendenti e geometriche traslate (quelle che partono da 1); quindi $p_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = (1 - \frac{1}{6})^{x_1-1}\frac{1}{6}(1 - \frac{1}{2})^{x_2-1}\frac{1}{2}$ per $x_1, x_2 \geq 1$ interi.
D5) Si ha $P(X_1 = X_2) = \sum_{k=1}^{\infty} p_{X_1,X_2}(k, k) = \sum_{k=1}^{\infty}(\frac{5}{6})^{k-1}\frac{1}{6}(\frac{1}{2})^k = \frac{1}{5}\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{5}{12})^k = \frac{1}{5}\frac{5/12}{1-5/12} = \frac{1}{7}$.
D6) Si ha $P(X_1 = 1|X_1 + X_2 = 3) = \frac{P(\{X_1=1\}\cap\{X_1+X_2=3\})}{P(X_1+X_2=3)} = \frac{P(\{X_1=1\}\cap\{X_2=2\})}{P(X_1+X_2=3)} = \frac{p_{X_1,X_2}(1,2)}{p_{X_1,X_2}(1,2)+p_{X_1,X_2}(2,1)} = \frac{\frac{1}{6}(\frac{1}{2})^2}{\frac{1}{6}(\frac{1}{2})^2+(\frac{5}{6})^{2-1}\frac{1}{6}\frac{1}{2}} = \frac{1/4}{1/4+5/12} = \frac{3}{8}$.

Esercizio 4.
D7) Si ha $P(a^{1/c} < Y < b^{1/c}) = 1$, e quindi $F_Y(y) = 0$ per $y \leq a^{1/c}$ e $F_Y(y) = 1$ per $y \geq b^{1/c}$. Per $y \in (a^{1/c}, b^{1/c})$ si ha $F_Y(y) = P(X^{1/c} \leq y) = P(X \leq y^c) = \int_a^{y^c} \frac{cx^{c-1}}{b^c-a^c}dx = \frac{[x^c]_{x=a}^{x=y^c}}{b^c-a^c} = \frac{y^{c^2}-a^c}{b^c-a^c}$.
D8) Si ha $\mathbb{E}[X] = \int_a^b x\frac{cx^{c-1}}{b^c-a^c}dx = \frac{c}{b^c-a^c}\int_a^b x^c dx = \frac{c[x^{c+1}]_{x=a}^{x=b}}{(c+1)(b^c-a^c)} = \frac{c}{c+1}\frac{b^{c+1}-a^{c+1}}{b^c-a^c}$. Inoltre, se poniamo $a = 0$, la condizione $\mathbb{E}[X] = \frac{b}{2}$ implica $\frac{c}{c+1} = \frac{1}{2}$ e con semplici calcoli si ottiene $c = 1$.
Osservazione: il risultato ottenuto è in accordo con il fatto che, più in generale (cioè anche per $a \neq 0$), per $c = 1$ si ha $\mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2}$; infatti per $c = 1$ la variabile aleatoria X ha distribuzione uniforme su (a, b).

Esercizio 5.
D9) Si ha

$$\Phi(3/2) = P(X > 0) = P\left(\frac{X-1}{\sigma} > \frac{0-1}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(-\frac{1}{\sigma}\right) = 1 - \left(1 - \Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right)\right) = \Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right)$$

da cui segue $\frac{3}{2} = \frac{1}{\sigma}$ e, con semplici calcoli, si ottiene $\sigma^2 = \frac{4}{9}$.
D10) Osserviamo che $\mathbb{E}[X_1] = \frac{a\sqrt{12}}{2}$ e $\mathrm{Var}[X_1] = \frac{(a\sqrt{12})^2}{12} = a^2$. Allora si ha

$$P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - \frac{na\sqrt{12}}{2}}{\sqrt{n}} > 1\right) = P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - \frac{na\sqrt{12}}{2}}{a\sqrt{n}} > \frac{1}{a}\right)$$

e, per il teorema limite centrale, otteniamo

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1+\cdots+X_n-\frac{na\sqrt{12}}{2}}{\sqrt{n}}>1\right)=1-\Phi\left(\frac{1}{a}\right).$$

Quindi per il valore di a richiesto abbiamo $1/a=2$, da cui segue $a=1/2$.

Esercizio 6.
`D11`) La catena è irriducibile (ovvio). Inoltre è anche regolare perché

$$P^2=\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ p & 0 & 1-p \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ p & 0 & 1-p \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{p}{2}+\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1-p}{2} \\ \frac{1-p}{2} & \frac{1}{2} & \frac{p}{2} \\ \frac{p}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1-p}{2}+\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

ha elementi tutti positivi. Allora il teorema di Markov è applicabile e si ha

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n=j|X_0=i)=\pi_j \text{ (per ogni } i,j\in E),$$

dove (π_1,π_2,π_3) è l'unica distribuzione invariante. In dettaglio si ha

$$(\pi_1,\pi_2,\pi_3)\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ p & 0 & 1-p \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}=(\pi_1,\pi_2,\pi_3),$$

e si ottiene il seguente sistema

$$\begin{cases} p\pi_2+\frac{\pi_3}{2}=\pi_1 \\ \frac{\pi_1}{2}+\frac{\pi_3}{2}=\pi_2 \\ \frac{\pi_1}{2}+(1-p)\pi_2=\pi_3. \end{cases}$$

Osserviamo che, dopo aver sostituito la seconda relazione nelle altre due, si ha $\pi_1=\frac{1+p}{2-p}\pi_3$ dalla prima e terza equazione; poi, risostituendo nella seconda equazione, si ha $\pi_2=\frac{1}{2}\left(\frac{1+p}{2-p}\pi_3+\pi_3\right)=\frac{3\pi_3}{2(2-p)}$. Infine, imponendo la condizione $\pi_1+\pi_2+\pi_3=1$, si ottiene $\frac{1+p}{2-p}\pi_3+\frac{3\pi_3}{2(2-p)}+\pi_3=1$, da cui segue con semplici calcoli $(\pi_1,\pi_2,\pi_3)=\left(\frac{2}{9}(1+p),\frac{1}{3},\frac{2}{9}(2-p)\right)$.
Osservazione: Per $p=1/2$ la somma degli elementi di ciascuna colonna è uguale a 1 e, in effetti, in corrispondenza si ha $(\pi_1,\pi_2,\pi_3)=(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$.
`D12`) Indichiamo con μ_i il tempo medio di raggiungimento dell'insieme $\{1\}$ partendo da $i\in A=\{2,3\}$. In corrispondenza il sistema di equazioni

$$\mu_i=1+\sum_{j\in A}p_{ij}\mu_j \ (i\in A)$$

diventa

$$\begin{cases} \mu_2=1+p_{22}\mu_2+p_{23}\mu_3=1+(1-p)\mu_3 \\ \mu_3=1+p_{32}\mu_2+p_{33}\mu_3=1+\frac{1}{2}\mu_2. \end{cases}$$

In corrispondenza con semplici calcoli si vede che $\mu_3=\frac{3}{1+p}$ e $\mu_2=\frac{2(2-p)}{1+p}$.
Osservazione: Esaminando i possibili modi di raggiungere lo stato 1 partendo da 2 e da 3 (si deve distinguere tra numero di transizioni pari e numero di transizioni dispari, una cosa un po' infernale) μ_2 e μ_3 si possono calcolare in maniera diretta senza il sistema accennato. Scrivo i calcoli nel foglio successivo e, per alcune serie che appaiono, sfrutto i valori delle speranze matematiche di variabili aleatorie geometriche (eventualmente traslate).

Si ha

$$
\begin{aligned}
\mu_2 = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)(1-p)^n(1/2)^n p + \sum_{n=1}^{\infty} 2n(1-p)^n(1/2)^n \\
&= p\left(2\sum_{n=0}^{\infty} n((1-p)/2)^n + \sum_{n=0}^{\infty}((1-p)/2)^n\right) + 2\sum_{n=1}^{\infty} n((1-p)/2)^n \\
&= p\left(\frac{2}{1-\frac{1-p}{2}}\sum_{n=0}^{\infty} n((1-p)/2)^n\left(1-\frac{1-p}{2}\right) + \frac{1}{1-\frac{1-p}{2}}\right) \\
&\quad + \frac{2}{((1-p)/2)^{-1}(1-\frac{1-p}{2})}\sum_{n=1}^{\infty} n((1-p)/2)^{n-1}\left(1-\frac{1-p}{2}\right) \\
&= p\left(\frac{2}{1-\frac{1-p}{2}}\left(\frac{1}{1-\frac{1-p}{2}}-1\right) + \frac{1}{1-\frac{1-p}{2}}\right) + \frac{1-p}{(1-\frac{1-p}{2})^2} \\
&= \frac{1-p+2p}{(1-\frac{1-p}{2})^2} - \frac{p}{1-\frac{1-p}{2}} = \frac{4(1+p)}{(1+p)^2} - \frac{2p}{1+p} = \frac{2(2-p)}{1+p}
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\mu_3 = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)(1/2)^{n+1}(1-p)^n + \sum_{n=1}^{\infty} 2n(1/2)^n(1-p)^{n-1}p \\
&= (1/2)\left(2\sum_{n=0}^{\infty} n((1-p)/2)^n + \sum_{n=0}^{\infty}((1-p)/2)^n\right) + \frac{2p}{1-p}\sum_{n=1}^{\infty} n((1-p)/2)^n \\
&= (1/2)\left(\frac{2}{1-\frac{1-p}{2}}\sum_{n=0}^{\infty} n((1-p)/2)^n\left(1-\frac{1-p}{2}\right) + \frac{1}{1-\frac{1-p}{2}}\right) \\
&\quad + \frac{2p}{(1-p)((1-p)/2)^{-1}(1-\frac{1-p}{2})}\sum_{n=1}^{\infty} n((1-p)/2)^{n-1}\left(1-\frac{1-p}{2}\right) \\
&= (1/2)\left(\frac{2}{1-\frac{1-p}{2}}\left(\frac{1}{1-\frac{1-p}{2}}-1\right) + \frac{1}{1-\frac{1-p}{2}}\right) + \frac{p}{(1-\frac{1-p}{2})^2} \\
&= \frac{1+p}{(1-\frac{1-p}{2})^2} - \frac{(1/2)}{1-\frac{1-p}{2}} = \frac{4(1+p)}{(1+p)^2} - \frac{1}{1+p} = \frac{3}{1+p}.
\end{aligned}
$$