Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità (ed insegnamenti mutuati)
Anno accademico: `2014-2015`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Appello del 30 Giugno 2015

Esercizio 1. Un'urna contiene 4 palline con i numeri $0, 1, 2, 3$.
`D1`) Si estraggono a caso 2 palline in blocco. Trovare la densità discreta della variabile aleatoria S che indica la somma dei due numeri estratti.
`D2`) Si considerano estrazioni casuali di 2 palline in blocco con reinserimento fino a quando esce per la prima volta $\{0, 3\}$. Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di estrazioni effettuate. Calcolare $P(\cup_{k=1}^{\infty}\{X = 2k\})$.

Esercizio 2. Si lancia una moneta equa. Se esce testa si lancia un dado con le facce $1, 2, 3, 4, 5, 5$; se esce croce si lancia un dado con le facce $1, 1, 2, 3, 4, 5$.
`D3`) Calcolare la probabilità che esca un numero minore di 3 (quindi uno dei numeri 1 o 2).
`D4`) Calcolare la probabilità di aver ottenuto testa nel lancio di moneta sapendo che è uscito un numero minore di 3.

Esercizio 3. Consideriamo la seguente densità congiunta: $p_{X_1,X_2}(1, 0) = p_{X_1,X_2}(2, 0) = p_{X_1,X_2}(3, 0) = \frac{1}{12}$ e $p_{X_1,X_2}(1, 1) = p_{X_1,X_2}(2, 2) = p_{X_1,X_2}(3, 3) = \frac{1}{4}$.
`D5`) Trovare la densità marginale di X_1.
`D6`) Trovare la densità marginale di X_2.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con distribuzione uniforme su $(0, 1)$.
`D7`) Trovare la funzione di distribuzione di $Y = X^2 + 3$.
`D8`) Calcolare $\mathbb{E}[Y]$. *Suggerimento:* È conveniente pensare a $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X^2 + 3]$, sfruttare la linearità della speranza matematica, e tenere conto della formula $\mathbb{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)dx$, per $g(x) = x^2$, quando X ha densità continua f_X.

Esercizio 5.
`D9`) Sia $N_t = \sum_{n\geq 1} 1_{T_n \leq t}$ (per $t \geq 0$) un processo di Poisson con intensità di $\lambda = \frac{1}{3}$. Calcolare $\mathbb{E}[N_6]$.
`D10`) Siano X_1 e X_2 due variabili aleatorie Normali standard indipendenti. Calcolare $P(X_1 + X_2 > 1.35\sqrt{2})$.

Esercizio 6. Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. (indipendenti e identicamente distribuite).
`D11`) Dire per quale valore di m si ha

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - m\right| > \varepsilon\right) = 0 \text{ per ogni } \varepsilon > 0,$$

nel caso in cui le variabili aleatorie $\{X_n : n \geq 1\}$ abbiano densità discreta $p_X(2) = p_X(4) = p_X(6) = \frac{1}{3}$.
`D12`) Dire per quale valore di x si ha

$$\lim_{n\to\infty} P\left(X_1 + \cdots + X_n - 2n \leq x\sqrt{n}\right) = \Phi(1)$$

nel caso in cui le variabili aleatorie $\{X_n : n \geq 1\}$ abbiano distribuzione esponenziale con media 2.

Esercizio 7 (*solo per Lauree Magistrali*). Consideriamo una catena di Markov omogenea $\{X_n : n \geq 0\}$ con spazio degli stati $E = \{1, 2, 3, 4\}$ e matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

`D13`) Trovare la/e distribuzione/i stazionaria/e.
`D14`) Calcolare $P(X_1 = 1, X_2 = 2, X_3 = 2|X_0 = 1)$.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
D1) Consideriamo l'insieme $\Omega = \{\{0,1\},\{0,2\},\{0,3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}$ che rappresenta tutti possibili modi di estrarre 2 palline in blocco tra le 4 nell'urna. Ogni punto di Ω ha probabilità $\frac{1}{6}$. Allora $p_S(1) = P(\{\{0,1\}\}) = \frac{1}{6}$, $p_S(2) = P(\{\{0,2\}\}) = \frac{1}{6}$, $p_S(3) = P(\{\{0,3\},\{1,2\}\}) = \frac{2}{6}$, $p_S(4) = P(\{\{1,3\}\}) = \frac{1}{6}$, $p_S(5) = P(\{\{2,3\}\}) = \frac{1}{6}$.
D2) Per quanto abbiamo visto prima la probabilità di estrarre $\{0,3\}$ è $\frac{1}{6}$. Quindi si ha $P(\cup_{k=1}^{\infty}\{X = 2k\}) = \sum_{k=1}^{\infty} p_X(2k) = \sum_{k=1}^{\infty}(1-\frac{1}{6})^{2k-1}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{6}(\frac{5}{6})^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{5}{6})^{2k} = \frac{1}{5}\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{25}{36})^k = \frac{1}{5}\frac{25/36}{1-25/36} = \frac{1}{5}\frac{25}{36}\frac{36}{11} = \frac{5}{11}$.

Esercizio 2. Indichiamo con E l'evento "esce un numero minore di 3", e con T l'evento "esce testa nel lancio di moneta".
D3) Per la formula delle probabilità totali si ha $P(E) = P(E|T)P(T)+P(E|T^c)P(T^c) = \frac{2}{6}\frac{1}{2}+\frac{3}{6}\frac{1}{2} = \frac{2+3}{12} = \frac{5}{12}$.
D4) Per la formula di Bayes, e tenendo conto di alcuni valori calcolati prima, si ha $P(T|E) = \frac{P(E|T)P(T)}{P(E)} = \frac{\frac{2}{6}\frac{1}{2}}{5/12} = \frac{2}{12}\frac{12}{5} = \frac{2}{5}$.

Esercizio 3.
D5) Si ha $p_{X_1}(k) = p_{X_1,X_2}(k,0) + p_{X_1,X_2}(k,k) = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1+3}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ per $k \in \{1,2,3\}$.
D6) Si ha $p_{X_2}(0) = p_{X_1,X_2}(1,0)+p_{X_1,X_2}(2,0)+p_{X_1,X_2}(3,0) = \frac{1+1+1}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ e $p_{X_2}(k) = p_{X_1,X_2}(k,k) = \frac{1}{4}$ per $k \in \{1,2,3\}$. Quindi si ha $p_{X_2}(k) = \frac{1}{4}$ per $k \in \{0,1,2,3\}$.

Esercizio 4.
D7) Si vede che $P(3 \leq Y \leq 4) = 1$ e quindi $F_Y(y) = 0$ per $y \leq 3$ e $F_Y(y) = 1$ per $y \geq 4$. Per $y \in (3,4)$ si ha $F_Y(y) = P(X^2+3 \leq y) = P(X^2 \leq y-3) = P(X \leq \sqrt{y-3}) = \int_0^{\sqrt{y-3}}\frac{1}{1-0}dx = \sqrt{y-3}$. Quindi la densità continua è $f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y-3}}1_{(3,4)}(y)$.
D8) Sfruttando il suggerimento si ha $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X^2+3] = \mathbb{E}[X^2]+3 = \int_0^1 x^2\cdot\frac{1}{1-0}dx+3 = [\frac{x^3}{3}]_{x=0}^{x=1}+3 = \frac{1}{3}+3 = \frac{10}{3}$.

Esercizio 5.
D9) Si ha $\mathbb{E}[N_6] = \frac{1}{3}\cdot 6 = 2$.
D10) La variabile aleatoria X_1+X_2 ha distribuzione Normale di media $0+0=0$ e varianza $1+1=2$. Quindi si ha $P(X_1+X_2 > 1.35\sqrt{2}) = P(\frac{X_1+X_2-0}{\sqrt{2}} > \frac{1.35\sqrt{2}-0}{\sqrt{2}}) = P(Z_{X_1+X_2} > 1.35) = 1-\Phi(1.35) = 1-0.91149 = 0.08851$.

Esercizio 6.
D11) Per la legge dei grandi numeri il valore di m richiesto è $m = 2\cdot\frac{1}{3}+4\cdot\frac{1}{3}+6\cdot\frac{1}{3} = \frac{2+4+6}{3} = \frac{12}{3} = 4$.
D12) Prima di tutto una distribuzione esponenziale di media 2 ha parametro $\lambda = \frac{1}{2}$ (perché la media è $\frac{1}{\lambda}$); quindi la varianza è $\frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{(1/2)^2} = 4$, e la standardizzata di $X_1+\cdots+X_n$ è $\frac{X_1+\cdots+X_n-2n}{\sqrt{4}\sqrt{n}}$. Allora $\{X_1+\cdots+X_n-2n \leq x\sqrt{n}\} = \left\{\frac{X_1+\cdots+X_n-2n}{\sqrt{4}\sqrt{n}} \leq \frac{x}{\sqrt{4}}\right\}$ e, per il teorema limite centrale, si deve avere $\frac{x}{\sqrt{4}} = 1$ e quindi $x = \sqrt{4} = 2$.

Esercizio 7.
D13) Indichiamo la distribuzione stazionaria con (p,q,r,s). Allora si deve avere la relazione matriciale

$$(p,q,r,s)\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (p,q,r,s),$$

che fornisce il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \frac{1}{3}p+\frac{2}{3}q = p \\ \frac{2}{3}p+\frac{1}{3}q = q \\ s = r \\ r = s. \end{cases}$$

Le prime due equazioni si riducono a $\frac{2}{3}p = \frac{2}{3}q$, e quindi $p = q$; le altre due equazioni invece forniscono $r = s$. In conclusione, poiché si deve avere $p + q + r + s = 1$, le distribuzioni stazionarie sono del tipo $(\alpha, \alpha, \beta, \beta)$ con $2\alpha + 2\beta = 1$, che equivale ad avere $\alpha + \beta = \frac{1}{2}$.
`D14`) Si ha $P(X_1 = 1, X_2 = 2, X_3 = 2|X_0 = 1) = p_{11}p_{12}p_{22} = \frac{1}{3}\frac{2}{3}\frac{1}{3} = \frac{2}{27}$.

Commenti.
La somma dei valori di ciascuna densità discreta che appare è 1 in accordo con la teoria.
`D8`) Senza il suggerimento si ha $\mathbb{E}[Y] = \int_3^4 y \cdot \frac{1}{2\sqrt{y-3}}dy = \frac{1}{2}\int_3^4 \frac{y-3+3}{\sqrt{y-3}}dy = \frac{1}{2}(\int_3^4 \sqrt{y-3}dy + 3\int_3^4 \frac{1}{\sqrt{y-3}}dy) = \frac{1}{2}([\frac{(y-3)^{3/2}}{3/2}]_{y=3}^{y=4} + 3[\frac{(y-3)^{1/2}}{1/2}]_{y=3}^{x=4}) = \frac{1}{2}(\frac{2}{3} + 3 \cdot 2) = \frac{1}{3} + 3 = \frac{10}{3}$.
`D13`) Si poteva giungere alla stessa conclusione senza fare calcoli. Infatti: abbiamo due classi chiuse e irriducibili, cioè $\{1, 2\}$ e $\{3, 4\}$; le matrici di transizione ristrette a queste due classi sono tali che la somma degli elementi di ciascuna colonna è 1, e quindi la distribuzione stazionaria per ciascuna classe chiusa irriducibile è $(1/2, 1/2)$ (perché ciascuna delle classe ha 2 elementi); allora, in accordo con la teoria, le distribuzioni stazionarie sono una combinazione lineare convessa delle distribuzioni stazionarie legate alle singole classi irriducibili, e cioè $\gamma(1/2, 1/2, 0, 0) + (1 - \gamma)(0, 0, 1/2, 1/2)$ con $\gamma \in [0, 1]$. In riferimento a quanto visto nella soluzione possiamo dire che γ e $1 - \gamma$ giocano il ruolo di 2α e 2β rispettivamente.
`D13`) La somma degli elementi di ciascuna riga della matrice di transizione è uguale a 1. Quindi (anche se ne abbiamo altre ...) la distribuzione uniforme $(1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$ è stazionaria e in effetti si ottiene ponendo $\alpha = \beta = \frac{1}{4}$ (che soddisfa la condizione $\alpha + \beta = \frac{1}{2}$).