Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità (ed insegnamenti mutuati)
Anno accademico: `2016-2017`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Appello del 22 Settembre 2017

Esercizio 1. Si lancia un dado equo 4 volte.
`D1`) Calcolare la probabilità di ottenere almeno una volta un numero pari.
`D2`) Calcolare la probabilità di ottenere 4 numeri uguali.

Esercizio 2. Abbiamo un dado con i numeri $1, 1, 4, 4, 4, 4$ e un'urna con 2 palline bianche. Si lancia il dado e si mettono nell'urna tante palline nere quante il numero ottenuto nel lancio del dado. Poi si estrae una pallina a caso dall'urna.
`D3`) Calcolare la probabilità di estrarre una pallina bianca.
`D4`) Calcolare la probabilità di aver ottenuto il numero 1 nel lancio del dado sapendo di aver estratto una pallina bianca.

Esercizio 3. Siano $p \in (0, 1)$ arbitrariamente fissato e consideriamo la seguente densità congiunta: $p_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{1+x_1+x_2} \cdot (1-p)^{x_1+x_2} p$ per $x_1, x_2 \geq 0$ interi.
`D5`) Trovare la distribuzione di $Y = X_1 + X_2$.
`D6`) Calcolare $P(X_2 = 1|X_1 + X_2 = 2)$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con densità continua $f_X(x) = 2x \cdot 1_{(0,1)}(x)$.
`D7`) Trovare la funzione di distribuzione di $Y = e^{2X}$.
`D8`) Calcolare $\mathbb{E}[X^3]$.

Esercizio 5.
`D9`) Sia $N_t = \sum_{n\geq 1} 1_{T_n \leq t}$ (per $t \geq 0$) un processo di Poisson con intensità di $\lambda = \frac{3}{5}$. Calcolare $P(N_5 = 2)$.
`D10`) Sia X una variabile aleatoria Normale con media 1 e varianza 4. Trovare il valore di x per cui si ha $P(X > x) = 1 - \Phi(3/2)$.

Esercizio 6. Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. (indipendenti e identicamente distribuite).
`D11`) Dire per quale valore di m si ha

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - m\right| > \varepsilon\right) = 0 \text{ per ogni } \varepsilon > 0,$$

nel caso in cui le variabili aleatorie $\{X_n : n \geq 1\}$ abbiano densità continua $f_X(x) = 2x \cdot 1_{(0,1)}(x)$.
`D12`) Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - n}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{12}}\right)$$

nel caso in cui le variabili aleatorie $\{X_n : n \geq 1\}$ abbiano distribuzione uniforme su $(1/2, 3/2)$.

Esercizio 7 (*solo per Lauree Magistrali*). Consideriamo una catena di Markov omogenea $\{X_n : n \geq 0\}$ con spazio degli stati $E = \{1, 2, 3\}$ e matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 1/6 \end{pmatrix}.$$

`D13`) Calcolare $P(X_1 = X_2|X_0 = 1)$.
`D14`) Determinare, se esiste, il valore di $k \in E$ per cui si ha $P(X_2 = k) = 1$ nel caso in cui $P(X_0 = 2) = 1$.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
D1) La probabilità richiesta è $\sum_{k=1}^{4}\binom{4}{k}(\frac{1}{2})^4 = \frac{4+6+4+1}{16} = \frac{15}{16}$.
D2) La probabilità richiesta è $\sum_{k=1}^{6} P(\text{numeri tutti uguali a } k) = \sum_{k=1}^{6}\binom{4}{4}(\frac{1}{6})^4(1-\frac{1}{6})^{4-4} = \sum_{k=1}^{6}\frac{1}{6^4}$, dove gli addendi non dipendono da k; quindi la probabilità richiesta è $6\cdot\frac{1}{6^4} = \frac{1}{6^3} = \frac{1}{216}$.

Esercizio 2. Indichiamo con B l'evento "estratta bianca", e con U l'evento "esce 1 nel lancio del dado".
D3) Per la formula delle probabilità totali si ha $P(B) = P(B|U)P(U) + P(B|U^c)P(U^c) = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{6} + \frac{2}{6}\cdot\frac{4}{6} = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$.
D4) Per la formula di Bayes, e tenendo conto del valore di $P(B)$ calcolato prima, si ha $P(U|B) = \frac{P(B|U)P(U)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{6}}{4/9} = \frac{4}{18}\frac{9}{4} = \frac{1}{2}$.

Esercizio 3.
D5) Per $k \geq 0$ intero si ha $p_{X_1+X_2}(k) = \sum_{x_1,x_2\geq 0, x_1+x_2=k} p_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \sum_{x_1,x_2\geq 0, x_1+x_2=k} \frac{1}{1+k}\cdot(1-p)^k p = (k+1)\cdot\frac{1}{1+k}\cdot(1-p)^k p = (1-p)^k p$ (in particolare abbiamo tenuto conto che si hanno $k+1$ coppie di interi non negativi la cui somma è k: $(0,k),(1,k-1),\ldots,(k-1,1),(k,0)$).
D6) Si ha $P(X_2 = 1|X_1+X_2 = 2) = \frac{P(X_2=1,X_1+X_2=2)}{P(X_1+X_2=2)} = \frac{P(X_1=1,X_2=1)}{P(X_1+X_2=2)} = \frac{p_{X_1,X_2}(1,1)}{p_{X_1+X_2}(2)} = \frac{\frac{1}{1+1+1}(1-p)^{1+1}p}{(1-p)^2 p} = \frac{1}{3}$.

Esercizio 4.
D7) Si vede che $P(1 \leq Y \leq e^2) = 1$ e quindi $F_Y(y) = 0$ per $y \leq 1$ e $F_Y(y) = 1$ per $y \geq e^2$. Per $y \in (1, e^2)$ si ha $F_Y(y) = P(e^{2X} \leq y) = P(X \leq \frac{1}{2}\log y) = \int_0^{\frac{1}{2}\log y} 2x dx = [x^2]_{x=0}^{x=\frac{1}{2}\log y} = \frac{(\log y)^2}{4}$.
D8) Si ha $\mathbb{E}[X^3] = \int_0^1 x^3 2x dx = 2\int_0^1 x^4 dx = 2[\frac{x^5}{5}]_{x=0}^{x=1} = \frac{2}{5}$.

Esercizio 5.
D9) Si ha $P(N_5 = 2) = \frac{(\frac{3}{5}\cdot 5)^2}{2!}e^{-\frac{3}{5}\cdot 5} = \frac{9}{2}e^{-3}$.
D10) Si ha $P(X > x) = P(\frac{X-1}{\sqrt{4}} > \frac{x-1}{\sqrt{4}}) = 1 - \Phi(\frac{x-1}{\sqrt{4}})$; quindi si deve avere $\frac{x-1}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2}$, da cui ottiene $x = 4$.

Esercizio 6.
D11) Per la legge dei grandi numeri il valore di m richiesto è $m = \int_0^1 x 2x dx = 2\int_0^1 x^2 dx = 2[\frac{x^3}{3}]_{x=0}^{x=1} = \frac{2}{3}$.
D12) La standardizzata di $X_1+\cdots+X_n$ è $\frac{X_1+\cdots+X_n-n}{\sqrt{\frac{((3-1)/2)^2}{12}}\sqrt{n}}$. Allora $\left\{\frac{X_1+\cdots+X_n-n}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{12}}\right\} = \left\{\frac{X_1+\cdots+X_n-n}{\sqrt{1/12}\sqrt{n}} \leq \frac{1/\sqrt{12}}{1/\sqrt{12}}\right\}$ e, per il teorema limite centrale, il limite richiesto è uguale a $\Phi(\frac{1/\sqrt{12}}{1/\sqrt{12}}) = \Phi(1) = 0.84134$.

Esercizio 7.
D13) Si ha $P(X_1 = X_2|X_0 = 1) = \sum_{h=1}^{3} p_{1h}p_{hh} = 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 1\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{6}$.
D14) Si ha

$$(p_{X_2}(1), p_{X_2}(2), p_{X_2}(3)) = (0,1,0)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 1/6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 1/6 \end{pmatrix}$$
$$= (1,0,0)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 1/6 \end{pmatrix} = (0,0,1).$$

Quindi il valore di k richiesto esiste, e si ha $k = 3$.

Commenti.
La somma dei valori di ciascuna densità discreta che appare è 1 in accordo con la teoria.
D1) In altro modo, più rapido, la probabilità richiesta è uguale a $1 - \binom{4}{0}(\frac{1}{2})^4 = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$.
D6) In generale, dati $k \geq 0$ e $j \in \{0,\ldots,k\}$, si ha $P(X_2 = j|X_1+X_2 = k) = \frac{P(X_2=j,X_1+X_2=k)}{P(X_1+X_2=k)} = \frac{P(X_1=k-j,X_2=j)}{P(X_1+X_2=k)} = \frac{p_{X_1,X_2}(k-j,j)}{p_{X_1+X_2}(k)} = \frac{\frac{1}{1+(k-j)+j}(1-p)^{(k-j)+j}p}{(1-p)^k p} = \frac{1}{1+k}$. Si recupera il caso dell'esercizio con $j = 1$ e $k = 2$.
D8) In altro modo, meno rapido, si può fare riferimento alla densità di $Z = X^3$. Si ha $P(0 \leq Z \leq 1) = 1$,

da cui segue $F_Z(z) = 0$ per $z \leq 0$ e $F_Z(z) = 1$ per $z \geq 1$. Inoltre, per $z \in (0,1)$, si ha $F_Z(z) = P(X \leq \sqrt[3]{z}) = \int_0^{\sqrt[3]{z}} 2x dx = [x^2]_{z=0}^{z=\sqrt[3]{z}} = z^{2/3}$, e quindi $f_Z(z) = \frac{2}{3} z^{-1/3} 1_{(0,1)}(z)$. Allora $\mathbb{E}[X^3] = \int_0^1 z \frac{2}{3} z^{-1/3} dz = \frac{2}{3} \int_0^1 z^{2/3} dz = \frac{2}{3} [\frac{z^{5/3}}{5/3}]_{z=0}^{z=1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$.

`D14`) Si può verificare senza fare calcoli che il valore $k = 3$ ha la proprietà richiesta; infatti, se la catena parte da 2 (in accordo con l'ipotesi $P(X_0 = 2) = 1$), con un passo va certamente nello stato 1, e poi con un altro passo va certamente in 3.