Laurea Triennale in Scienza e Tecnologia dei Media, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità
Anno accademico: `2018-2019`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Appello del 26 Settembre 2019
Esercizi 1,2,3,4,5 per gli studenti che sostengono l'esame da 6 crediti.
Esercizi 1,2,3,4,5,6 per gli studenti che sostengono l'esame da 8 crediti.

Esercizio 1.
Un'urna ha 5 palline numerate da 1 a 5. Si estraggono a caso 2 palline, una alla volta e senza reinserimento.
D1) Calcolare la probabilità di estrarre il numero 1 alla prima estrazione e un numero pari alla seconda estrazione.
D2) Calcolare la probabilità di estrarre 2 numeri dispari.
D3) Sia X la variabile aleatoria che indica la differenza tra il primo e il secondo numero estratto. Calcolare $P(X \geq 3)$.

Esercizio 2.
Si lancia una moneta equa. Se esce testa si lancia un dado con i numeri 1,2,3,4,5,5; se esce croce si lancia un dado con i numeri 1,2,3,4,6,6.
D4) Calcolare la probabilità che sia uscita testa nel lancio di moneta sapendo che è uscito un numero dispari nel lancio del dado effettuato.

Esercizio 3.
Siano $p, q \in (0,1)$. Consideriamo la seguente densità congiunta: $p_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \binom{x_2}{x_1} p^{x_1}(1-p)^{x_2-x_1}(1-q)^{x_2} q$ per $0 \leq x_1 \leq x_2$ interi.
D5) Calcolare $P(X_1 = 0)$.
D6) Calcolare $P(X_1 = 1 | X_2 = 1)$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria continua con distribuzione uniforme su (a^r, b^r), per $a, b, r > 0$ con $a < b$.
D7) Trovare la densità continua di $Y = X^{1/r}$.
D8) Verificare che $\mathbb{E}[Y] = \frac{r}{r+1} \frac{b^{r+1} - a^{r+1}}{b^r - a^r}$.

Esercizio 5.
Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.
D9) Sia X una variabile aleatoria Normale con media μ e varianza 121. Trovare il valore μ per cui si ha $P(X > 4) = 1 - \Phi(1)$.
D10) Siano $X_1, \ldots, X_{900}$ variabili aleatorie i.i.d. (indipendenti e identicamente distribuite), con media 1 e varianza 4. Facendo riferimento alla funzione Φ con argomento positivo, calcolare $P(X_1 + \cdots + X_{900} > 905)$ usando l'approssimazione Normale.

Esercizio 6.
Consideriamo una catena di Markov omogenea $\{X_n : n \geq 0\}$ con spazio degli stati $E = \{1,2,3,4\}$ e matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 1/8 & 3/8 & p/2 & (1-p)/2 \\ 0 & 1/4 & 3/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dove $p \in (0,1)$.
D11) Supponiamo che $P(X_0 \in \{2,3\}) = 1$. Calcolare $\lim_{n\to\infty} P(X_n = j)$ per ogni $j \in E$, dopo aver giustificato l'esistenza del limite.
D12) Calcolare la probabilità di assorbimento in 4 partendo da 1.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
`D1`) L'evento di interesse è del tipo $E_1 \cap E_2$ dove E_1 e E_2 sono gli eventi legati alla prima e alla seconda estrazione. Allora la probabilità richiesta è

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_2|E_1)P(E_1) = \frac{2}{4}\frac{1}{5} = \frac{1}{10}.$$

`D2`) La probabilità richiesta è $\frac{\binom{3}{2}\binom{2}{0}}{\binom{5}{2}} = \frac{3}{10}$.
`D3`) Abbiamo il seguente insieme costituito da 20 punti, tutti equiprobabili:

$$\Omega = \{(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(1,4),(4,1),(1,5),(5,1),(2,3),(3,2),$$
$$(2,4),(4,2),(2,5),(5,2),(3,4),(4,3),(3,5),(5,3),(4,5),(5,4)\}.$$

Allora

$$\{X \geq 3\} = \{\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \Omega : \omega_1 - \omega_2 \geq 3\} = \{(4,1),(5,1),(5,2)\},$$

da cui segue $P(X \geq 3) = \frac{3}{20}$.

Esercizio 2.
`D4`) Sia T l'evento "esce testa" e sia D l'evento "esce dispari nel lancio del dado". Allora, per la formula di Bayes (e per la formula delle probabilità totali per il denominatore), la probabilità richiesta è

$$P(T|D) = \frac{P(D|T)P(T)}{P(D)} = \frac{P(D|T)P(T)}{P(D|T)P(T) + P(D|T^c)P(T^c)} = \frac{\frac{4}{6}\frac{1}{2}}{\frac{4}{6}\frac{1}{2} + \frac{2}{6}\frac{1}{2}} = \frac{4}{4+2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Esercizio 3.
`D5`) Si ha

$$P(X_1 = 0) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{X_1,X_2}(0,k) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k}{0} p^0 (1-p)^{k-0}(1-q)^k q = q \sum_{k=0}^{\infty} ((1-p)(1-q))^k = \frac{q}{1-(1-p)(1-q)}.$$

`D6`) Si ha

$$\begin{aligned} P(X_1 = 1|X_2 = 1) &= \frac{P(X_1 = 1, X_2 = 1)}{P(X_2 = 1)} = \frac{p_{X_1,X_2}(1,1)}{\sum_{k=0}^{1} p_{X_1,X_2}(k,1)} \\ &= \frac{\binom{1}{1}p^1(1-p)^{1-1}(1-q)^1 q}{\sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}p^k(1-p)^{1-k}(1-q)^1 q} = \frac{p(1-q)q}{(1-q)q\sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}p^k(1-p)^{1-k}} = \frac{p}{p+1-p} = p. \end{aligned}$$

Esercizio 4.
`D7`) Si ha $P(a \leq Y \leq b) = 1$, da cui segue $F_Y(y) = 0$ per $y \leq a$ e $F_Y(y) = 1$ per $y \geq b$. Per $y \in (a,b)$ si ha

$$F_Y(y) = P(X^{1/r} \leq y) = P(X \leq y^r) = \int_{a^r}^{y^r} \frac{1}{b^r - a^r} dx = \frac{y^r - a^r}{b^r - a^r}.$$

In conclusione la densità continua di Y è $f_Y(y) = \frac{ry^{r-1}}{b^r - a^r} 1_{(a,b)}(y)$.
`D8`) Sfruttando la densità continua calcolata prima, si ha

$$\mathbb{E}[Y] = \int_a^b y \frac{ry^{r-1}}{b^r - a^r} dy = \frac{r}{b^r - a^r} \int_a^b y^r dy = \frac{r}{b^r - a^r} \frac{[y^{r+1}]_{y=a}^{y=b}}{r+1} = \frac{r}{r+1} \frac{b^{r+1} - a^{r+1}}{b^r - a^r}.$$

Osservazione: in maniera alternativa, e senza utilizzare f_Y calcolata prima, si ha

$$\mathbb{E}[Y] = \int_{a^r}^{b^r} x^{1/r} \cdot \frac{1}{b^r - a^r} dx = \frac{[x^{1+1/r}]_{x=a^r}^{x=b^r}}{(1+1/r)(b^r - a^r)} = \frac{(b^r)^{1+1/r} - (a^r)^{1+1/r}}{\frac{r+1}{r}(b^r - a^r)} = \frac{r}{r+1} \frac{b^{r+1} - a^{r+1}}{b^r - a^r}.$$

Esercizio 5.
`D9`) Abbiamo

$$1-\Phi(1)=P(X>4)=P\left(\frac{X-\mu}{\sqrt{121}}>\frac{4-\mu}{\sqrt{121}}\right)=1-\Phi\left(\frac{4-\mu}{\sqrt{121}}\right),$$

da cui segue $\frac{4-\mu}{\sqrt{121}}=1$ e, con semplici calcoli, si ottiene $\mu=-7$.
`D10`) Si ha

$$\begin{aligned}P(X_1+\cdots+X_{900}>905)&=P\left(\frac{X_1+\cdots+X_{900}-900\cdot 1}{\sqrt{4}\sqrt{900}}>\frac{905-900\cdot 1}{\sqrt{4}\sqrt{900}}\right)\\&\approx 1-\Phi\left(\frac{905-900}{60}\right)=1-\Phi(1/12)=1-\Phi(0.08).\end{aligned}$$

Osservazione: per completezza, anche se non richiesto per l'esame, $1-\Phi(0.08)=0.53188$.

Esercizio 6.
`D11`) Dato che $P(X_0\in\{2,3\})=1$, si tratta di applicare il teorema di Markov alla sottocatena ristretta alla classe chiusa irriducibile $\{2,3\}$ (questo è consentito dal fatto che tale sottocatena ha matrice di transizione tutta positiva). In corrispondenza si ha

$$\lim_{n\to\infty}P(X_n=j)=\begin{cases}q & \text{se } j=2\\ 1-q & \text{se } j=3\\ 0 & \text{se } j\in\{1,4\},\end{cases}$$

dove $(q,1-q)$ è l'unica distribuzione invariante per la sottocatena ristretta a $\{2,3\}$. Il caso $j\in\{1,4\}$ è ovvio perché si ha $P(X_n=j)=0$ per ogni n; inoltre, per quanto riguarda $(q,1-q)$, si ha

$$(q,1-q)\begin{pmatrix}1/4 & 3/4\\ 1/2 & 1/2\end{pmatrix}=(q,1-q),$$

che equivale al sistema

$$\begin{cases}\frac{q}{4}+\frac{1-q}{2}=q\\ \frac{3q}{4}+\frac{1-q}{2}=1-q,\end{cases}$$

da cui segue $q=\frac{2}{5}$ (con semplici calcoli a partire da ciascuna delle due equazioni) e $1-q=\frac{3}{5}$.
`D12`) Posto $C=\{4\}$, l'insieme degli stati diversi da 4 che comunicano con 4 è ridotto ad un solo elemento; infatti si ha $D_C=\{1\}$. Allora, se indichiamo con λ la probabilità richiesta, abbiamo la seguente equazione:

$$\lambda=\frac{1-p}{2}+\frac{\lambda}{8}.$$

In corrispondenza, con semplici calcoli, si ottiene $\lambda=\frac{4(1-p)}{7}$.
Osservazione. Il valore λ può essere interpretato come la probabilità di compiere una transizione da 1 a 4, senza che la catena resti in 1; quindi si ha $\lambda=\frac{p_{14}}{1-p_{11}}$ e, sostituendo i valori numerici, si recupera il valore ottenuto:

$$\lambda=\frac{(1-p)/2}{1-1/8}=\frac{(1-p)/2}{7/8}=\frac{8(1-p)}{2\cdot 7}=\frac{4(1-p)}{7}.$$