Matematica Discreta - Ammissione all'orale: Appello 2

Domanda 1 Sia A l'insieme delle funzioni $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{>0}$. Poniamo una relazione R su A ponendo

$$f\,R\,g \iff f = o(g)$$

per ogni $f, g \in A$. Allora:

(a) R è riflessiva, R è simmetrica, e R è transitiva

(b) R è riflessiva, R non è simmetrica, e R è transitiva

(c) R non è riflessiva, R non è simmetrica, e R è transitiva

(d) R non è riflessiva, R non è simmetrica, e R non è transitiva

(e) Nessuna di queste

Domanda 2 Siano $f, g : [5] \to [5]$ le funzioni definite ponendo

$$f(1) = 3, f(2) = 1, f(3) = 3, f(4) = 4, f(5) = 3$$

e

$$g(1) = 5, g(2) = 4, g(3) = 2, g(4) = 1, g(5) = 3.$$

Allora:

(a) $f \circ g$ è iniettiva, $g \circ f$ è suriettiva, e $g \circ f$ è iniettiva

(b) $f \circ g$ è iniettiva, $g \circ f$ non è suriettiva, e $g \circ f$ non è iniettiva

(c) $f \circ g$ non è iniettiva, $g \circ f$ è suriettiva, e $g \circ f$ è iniettiva

(d) $f \circ g$ non è iniettiva, $g \circ f$ non è suriettiva, e $g \circ f$ non è iniettiva

(e) Nessuna di queste

Domanda 3 Lo scrittore Oscar Wilde scrisse una volta che:

"Le sole cose necessarie sono le cose superflue"

Consideriamo i predicati

$$N(x) := x \text{ è necessaria}$$

e

$$S(x) := x \text{ è superflua}$$

(dove x è nell'universo delle cose). Allora un predicato logicamente equivalente all'affermazione di Oscar Wilde è:

(a) $\forall x.((\neg N(x)) \to S(x))$

(b) $\forall x.(S(x) \vee N(x))$

(c) $\forall x.(S(x) \to (\neg N(x)))$

(d) $\neg(\exists x.((\neg S(x)) \wedge N(x)))$

(e) Nessuna di queste

Domanda 4 Siano p, q proposizioni. Consideriamo la proposizione composta:

$$((\neg p) \to p) \to q$$

Allora questa proposizione composta è:

(a) sempre vera

(b) sempre falsa

(c) sempre vera se p è vera

(d) sempre falsa se q è falsa

(e) Nessuna di queste

Domanda 5 Consideriamo l'equazione Diofantea lineare a due incognite:

$$124\,x + 342\,y = 12. \tag{1}$$

Allora:

(a) L'equazione non ha soluzioni

(b) L'equazione ha soluzioni e se $x, y \in \mathbb{Z}$ sono soluzioni di (1) allora $x \equiv 0 \pmod 3$ e $y \equiv 0 \pmod 2$

(c) L'equazione ha soluzioni e se $x, y \in \mathbb{Z}$ sono soluzioni di (1) allora $x \equiv 1 \pmod 3$ e $y \equiv 0 \pmod 2$

(d) L'equazione ha soluzioni e se $x, y \in \mathbb{Z}$ sono soluzioni di (1) allora $x \equiv 2 \pmod 3$ e $y \equiv 1 \pmod 2$

(e) Nessuna di queste

Domanda 6 L'inversa moltiplicativa di

$$[136]_{431}$$

(a) non esiste

(b) esiste ma non è unica

(c) è della forma $[a]_{555}$ dove $a \equiv 0 \pmod 3$

(d) è della forma $[a]_{555}$ dove $a \equiv 1 \pmod 3$

(e) Nessuna di queste

Domanda 7 Il numero di permutazioni $\sigma \in S_{13}$ tali che $\sigma(2) = 2$ oppure $\sigma(8) = 8$ oppure $\sigma(11) = 11$ è:

(a) 72456890

(b) 454826700

(c) 1320883200

(d) 56628820

(e) Nessuna di queste

Domanda 8 Quante "posizioni iniziali" ci sono nel gioco della Briscola con 3 giocatori e 39 carte? (Per "posizione iniziale" si intende l'assegnazione di 3 carte ad ogni giocatore.)

(a) 126542100

(b) 24868400

(c) 98652400

(d) 356017421760

(e) Nessuna di queste

Domanda 9 Siano $f, g, h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ le funzioni definite ponendo:

$$f(n) := e^{\sqrt{n}} \qquad g(n) := \sqrt{e^n} \qquad h(n) := (\sqrt{e})^n$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora:

(a) $g \approx f$, e $h = \Omega(f)$

(b) $g = o(f)$, e $h = O(f)$

(c) $g = o(f)$, e $h = \Omega(f)$

(d) $g \not\approx f$, e $h = O(f)$

(e) Nessuna di queste

Domanda 10 La somma

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{k^2 - 1}{k^3}$$

è asintoticamente equivalente a:

(a) $\ln(n)$
(b) $\ln(n^3)$
(c) $\ln^3(n)$
(d) $\ln^3(n)/3$
(e) Nessuna di queste

Domanda 11 Sia $G = (A \cup B, E)$ il grafo avente come insieme dei vertici $A \cup B$ dove

$$A := \{S \subseteq [100] : |S| = 2\}$$

$$B := \{T \subseteq [100] : |T| = 3\}$$

e dove, per ogni $S, T \in A \cup B$, $\{S, T\} \in E$ se e solo se $S \subseteq T$ (quindi, per esempio, $\{\{2, 98\}, \{2, 50, 98\}\} \in E$, mentre $\{\{2, 98\}, \{2, 50, 90\}\} \notin E$).

Allora:

(a) G non è bipartito
(b) G è bipartito, esiste un accoppiamento da A in B, e non esiste un accoppiamento da B in A
(c) G è bipartito, esiste un accoppiamento da B in A, e non esiste un accoppiamento da A in B
(d) G è bipartito, non esiste un accoppiamento da A in B, e non esiste un accoppiamento da B in A
(e) Nessuno di questi

Domanda 12 Sia $G = (V, E)$ un grafo bipartito (quindi $V = V_1 \uplus V_2$ con V_1 e V_2 indipendenti). Allora

$$\sum_{x \in V_1} d(x)$$

(dove $d(x)$ é il grado di x) é uguale a:

(a) $|E|$

(b) $2|E|$
(c) $|V|$
(d) $2|V|$
(e) Nessuna di queste