Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità (ed insegnamenti mutuati)
Anno accademico: `2016-2017`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Simulazione 1

Esercizio 1. Si lancia ripetutamente una coppia di dadi equi.
`D1`) Calcolare la probabilità di ottenere per la prima volta due numeri uguali dopo il secondo lancio (della coppia di dadi).
`D2`) Trovare la densità discreta della variabile aleatoria X che conta quante volte esce almeno un numero pari su 3 lanci (della coppia di dadi).

Esercizio 2. Sia $k \in \{1, \dots, 5\}$ fissato. Supponiamo di avere due monete: la probabilità di ottenere testa lanciando la prima è $p_1 = \frac{1}{5}$, la probabilità di ottenere testa lanciando la seconda è $p_2 = \frac{3}{5}$. Si lancia un dado equo: se esce un numero minore o uguale a k si lancia la moneta 1; se esce un numero maggiore di k si lancia la moneta 2.
`D3`) Calcolare la probabilità di ottenere testa nel lancio di moneta effettuato.
`D4`) Calcolare la probabilità di aver lanciato la moneta 1 sapendo di aver ottenuto croce nel lancio di moneta.

Esercizio 3. Sia $\lambda > 0$ arbitrariamente fissato. Consideriamo la seguente densità congiunta: $p_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{x_2+1} \frac{\lambda^{x_2}}{x_2!} e^{-\lambda}$ per $x_2 \geq x_1 \geq 0$ interi.
`D5`) Trovare la densità marginale di X_2.
`D6`) Calcolare $\mathbb{E}[e^{aX_2}]$ per $a \in \mathbb{R}$ arbitrariamente fissato.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con densità continua $f_X(x) = x^{-2} 1_{(1,\infty)}(x)$.
`D7`) Dire per quali valori di $b \in \mathbb{R}$ la variabile aleatoria X^b ha speranza matematica finita.
`D8`) Trovare la funzione di distribuzione di $Y = e^X - e$.

Esercizio 5.
`D9`) Sia $N_t = \sum_{n \geq 1} 1_{T_n \leq t}$ (per $t \geq 0$) un processo di Poisson con intensità di $\lambda = \frac{2}{3}$. Calcolare $P(2 \leq N_{3/2} \leq 3)$.
`D10`) Sia X una variabile aleatoria normale con media 0 e varianza σ^2. Dire per quale valore di σ^2 si ha $P(X \geq 5) = 1 - \Phi(1)$.

Esercizio 6. Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. (indipendenti e identicamente distribuite).
`D11`) Dire per quale valore di m si ha

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - m\right| > \varepsilon\right) = 0 \text{ per ogni } \varepsilon > 0,$$

nel caso in cui le variabili aleatorie $\{X_n : n \geq 1\}$ abbiano densità discreta $p_X(k) = \frac{e^{-1}}{k!}$ per $k \geq 0$ intero.
`D12`) Poniamo $\bar{X}_n = \frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$. Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{|\bar{X}_n|}{1/\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

nel caso in cui le variabili aleatorie $\{X_n : n \geq 1\}$ abbiano distribuzione uniforme su $(-1, 1)$.

Esercizio 7 (*solo per Lauree Magistrali*). Consideriamo una catena di Markov omogenea $\{X_n : n \geq 0\}$ con spazio degli stati $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 \\ 0 & 0 & 1/10 & 0 & 9/10 \end{pmatrix}$$

dove $p_1, \dots, p_5 \in (0, 1)$ e $\sum_{i=1}^5 p_i = 1$.
`D13`) Calcolare la probabilità di assorbimento in $\{3, 5\}$ partendo dallo stato 4.
`D14`) Calcolare la densità discreta di X_1 nel caso in cui $P(X_0 = 1) = P(X_0 = 2) = 1/2$.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
D1) Sia Y la variabile aleatoria che conta a quale lancio escono per la prima volta due numeri uguali. La probabilità di ottenere due numeri uguali lanciando una coppia di dadi equi è $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$. Allora $P(Y>2)=1-p_Y(1)-p_Y(2)=1-\frac{1}{6}-(1-\frac{1}{6})\frac{1}{6}=1-\frac{1}{6}-\frac{5}{36}=\frac{36-6-5}{36}=\frac{25}{36}$.
D2) La probabilità di ottenere almeno un numero pari lanciando una coppia di dadi equi è $1-\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{6}=\frac{3}{4}$ (per il singolo lancio di due dadi si fa riferimento all'evento complementare "escono due numeri dispari"). Allora $p_X(k)=\binom{3}{k}(\frac{3}{4})^k(1-\frac{3}{4})^{3-k}$ per $k\in\{0,1,2,3\}$, da cui segue $p_X(0)=\frac{1}{64}$, $p_X(1)=\frac{9}{64}$, $p_X(2)=\frac{27}{64}$, $p_X(3)=\frac{27}{64}$.

Esercizio 2.
Indichiamo con E_h l'evento "si lancia la moneta h" (per $h\in\{1,2\}$) e con T l'evento "esce testa nel lancio di moneta effettuato".
D3) Per la formula delle probabilità totali si ha $P(T)=P(T|E_1)P(E_1)+P(T|E_2)P(E_2)=\frac{1}{5}\frac{k}{6}+\frac{3}{5}(1-\frac{k}{6})=\frac{k+3(6-k)}{30}=\frac{18-2k}{30}$.
D4) Per la formula di Bayes, e tenendo conto di alcuni valori calcolati prima, si ha $P(E_1|T^c)=\frac{P(T^c|E_1)P(E_1)}{P(T^c)}=\frac{(1-P(T|E_1))P(E_1)}{1-P(T)}=\frac{(1-\frac{1}{5})\frac{k}{6}}{1-\frac{18-2k}{30}}=\frac{4k}{12+2k}=\frac{2k}{6+k}$.

Esercizio 3.
D5) Si ha $p_{X_2}(x_2)=\sum_{x_1=0}^{x_2}p_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=\sum_{x_1=0}^{x_2}\frac{1}{x_2+1}\frac{\lambda^{x_2}}{x_2!}e^{-\lambda}=(x_2+1)\cdot\frac{1}{x_2+1}\frac{\lambda^{x_2}}{x_2!}e^{-\lambda}=\frac{\lambda^{x_2}}{x_2!}e^{-\lambda}$ per $x_2\geq 0$ (osservando che, in generale, si ha una somma su x_1 con x_2+1 addendi che non dipendono da x_1).
D6) Si ha $\mathbb{E}[e^{aX_2}]=\sum_{x_2\geq 0}e^{ax_2}\frac{\lambda^{x_2}}{x_2!}e^{-\lambda}=e^{-\lambda}\sum_{x_2\geq 0}\frac{(e^a\lambda)^{x_2}}{x_2!}=e^{-\lambda}e^{e^a\lambda}=e^{\lambda(e^a-1)}$.

Esercizio 4.
D7) La variabile aleatoria X assume valori positivi; quindi è superfluo considerare il valore assoluto e si deve determinare per quali valori di $b\in\mathbb{R}$ si ha $\int_1^\infty x^bx^{-2}dx<\infty$. Allora, osservando che $\int_1^\infty x^bx^{-2}dx=\int_1^\infty x^{-(2-b)}dx$, si deve avere $2-b>1$, e quindi $b<1$. Inoltre, per completezza, possiamo dire che per $b<1$ si ha $\mathbb{E}[X^b]=\int_1^\infty x^{-(2-b)}dx=[\frac{x^{-2+b+1}}{-2+b+1}]_{x=1}^{x=\infty}=[\frac{x^{b-1}}{b-1}]_{x=1}^{x=\infty}=\frac{1}{1-b}$.
D8) Si vede che $P(e^X-e\geq 0)=1$, da cui $F_Y(y)=0$ per $y\leq 0$. Per $y>0$ si ha $F_Y(y)=P(e^X-e\leq y)=P(e^X\leq y+e)=P(X\leq\log(y+e))=\int_1^{\log(y+e)}x^{-2}dx=\left[\frac{x^{-2+1}}{-2+1}\right]_{x=1}^{x=\log(y+e)}=-(\log(y+e))^{-1}+1$.

Esercizio 5.
D9) Si ha $P(2\leq N_{3/2}\leq 3)=\sum_{k=2}^3\frac{(\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2})^k}{k!}e^{-\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}}=(\frac{1}{2}+\frac{1}{6})e^{-1}=\frac{2}{3}e^{-1}$.
D10) Si ha $P(X\geq 5)=P(\frac{X-0}{\sigma}\geq\frac{5-0}{\sigma})=1-\Phi(\frac{5}{\sigma})$, da cui segue $\frac{5}{\sigma}=1$, $\sigma=5$, $\sigma^2=25$.

Esercizio 6.
D11) Le variabili aleatorie hanno distribuzione di Poisson con parametro $\lambda=1$ che coincide con la media. Allora per la legge dei grandi numeri si ha $m=1$.
D12) Le variabili aleatorie hanno media $\frac{-1+1}{2}=0$ e varianza $\frac{(1-(-1))^2}{12}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$. Allora, posto $\mu=0$ e $\sigma=\frac{1}{\sqrt{3}}$, applicando il teorema limite centrale si ha

$$P\left(\frac{|\bar{X}_n|}{1/\sqrt{n}}\leq\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=P\left(\frac{|\bar{X}_n-\mu|}{\sigma/\sqrt{n}}\leq\frac{1}{\sqrt{3}\sigma}\right)=P\left(-1\leq\frac{\bar{X}_n-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\leq 1\right)\to P(-1\leq Z\leq 1)\ (\text{per } n\to\infty),$$

dove Z è una variabile aleatoria Normale standard. Quindi il limite richiesto è uguale a $P(-1\leq Z\leq 1)=\Phi(1)-\Phi(-1)=\Phi(1)-(1-\Phi(1))=2\Phi(1)-1=2\cdot 0.84134-1=0.68268$.

Esercizio 7.
D13) Si ha $C=\{3,5\}$ e $D_C=\{4\}$. Allora la probabilità richiesta λ è la soluzione della seguente equazione:

$$\lambda=p_3+p_5+\lambda p_4.$$

In corrispondenza si ha $\lambda(1-p_4)=p_3+p_5$ da cui segue $\lambda=\frac{p_3+p_5}{1-p_4}$, oppure $\lambda=\frac{p_3+p_5}{p_1+p_2+p_3+p_5}$.

`D14`) La densità discreta richiesta si ottiene considerando il seguente prodotto righe per colonne:

$$(p_{X_1}(1), p_{X_1}(2), p_{X_1}(3), p_{X_1}(4), p_{X_1}(5)) = (1/2, 1/2, 0, 0, 0) \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 \\ 0 & 0 & 1/10 & 0 & 9/10 \end{pmatrix}.$$

Quindi si ha $p_{X_1}(1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$, $p_{X_1}(2) = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$ e $p_{X_1}(3) = p_{X_1}(4) = p_{X_1}(5) = 0$.

Commenti.
La somma dei valori di ciascuna densità discreta che appare è 1 in accordo con la teoria.
`D1`) In altro modo $P(Y > 2) = \sum_{k\geq 3}(1 - \frac{1}{6})^{k-1}\frac{1}{6} = \frac{1}{6}\sum_{k\geq 3}(\frac{5}{6})^{k-1} = \frac{1}{6}\frac{(5/6)^2}{1-5/6} = (\frac{5}{6})^2 = \frac{25}{36}$.
`D3-D4`) Si potrebbe considerare anche il caso $k = 6$. In tal caso è certo che si lancia la moneta 1; quindi si può subito dire (senza fare calcoli) che $P(T) = \frac{1}{5}$ e $P(E_1|T^c) = 1$ (la seconda uguaglianza segue dal fatto che $P(E_1) = 1$ e che gli eventi di probabilità 1 sono indipendenti da qualsiasi altro evento); in ogni modo questi valori si recuperano ponendo $k = 6$ nelle formule presentate nelle soluzioni.
`D5`) La variabile aleatoria X_2 ha distribuzione di Poisson di parametro λ.
`D13`) Osserviamo che, quando la catena di Markov lascia lo stato 4, viene assorbita o in $\{1, 2\}$ o in $\{3, 5\}$. Allora abbiamo la seguente interpretazione naturale del valore λ: è dato dalla probabilità di compiere una transizione da 4 in 3 o 5, diviso la probabilità di compiere una transizione da 4 in un qualsiasi stato diverso da 4.
`D14`) L'insieme di stati $\{1, 2\}$ rappresenta una classe chiusa irriducibile. Quindi, essendo $P(X_0 \in \{1, 2\}) = 1$, si ha $P(X_n \in \{1, 2\}) = 1$ per ogni $n \geq 1$; questo è in accordo con l'uguaglianza $p_{X_1}(1) + p_{X_1}(2) = 1$ che segue dai valori numerici ottenuti.