Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)
Anno accademico: `2010-2011`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Appello del 19 Luglio 2011

Esercizio 1. Un'urna ha 3 palline con i numeri 1,2,3. Si estraggono a caso 4 palline, una alla volta e con reinserimento.
`D1`) Calcolare la probabilità di estrarre la sequenza $(1, 2, 2, 3)$.
`D2`) Trovare la densità della variabile aleatoria X che conta il numero di volte che viene estratto il numero 2.

Esercizio 2. Abbiamo due urne: la prima con 3 palline bianche e 2 nere; la seconda con 2 palline bianche e 3 nere. Si sceglie un'urna a caso e si estraggono a caso 2 palline in blocco dall'urna scelta.
`D3`) Trovare la densità della variabile aleatoria X che conta il numero di palline bianche estratte.
`D4`) Calcolare la probabilità di aver scelto la prima urna sapendo di aver estratto due palline con colori diversi (quindi una pallina bianca e una nera).

Esercizio 3. Consideriamo la seguente densità congiunta: $p_{X_1,X_2}(k, 1) = p_{X_1,X_2}(k, 2) = (\frac{1}{2})^k$ per $k \geq 2$ intero.
`D5`) Trovare la densità marginale di X_2 e calcolare $\mathbb{E}[X_2]$.
`D6`) Calcolare $P(X_1 + X_2 \leq 4)$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con densità continua $f_X(t) = \frac{1}{\log 2}\frac{2t}{1+t^2}1_{(0,1)}(t)$.
`D7`) Trovare la funzione di distribuzione di X.
`D8`) Trovare la densità di $Y = 1 + X^2$.

Esercizio 5. Sia $N_t = \sum_{n\geq 1} 1_{T_n \leq t}$ (per $t \geq 0$) un processo di Poisson con intensità di $\lambda = 2$.
`D9`) Calcolare $P(N_4 = 3)$.
`D10`) Calcolare $\mathbb{E}[T_{20}]$.

Esercizio 6. Sia X una variabile aleatoria con distribuzione normale con media 0 e varianza 121.
`D11`) Calcolare $P(X > 22)$.
`D12`) Calcolare $P(X + Y \leq \frac{3}{4}\sqrt{242})$ dove Y è una variabile aleatoria con la stessa distribuzione di X (normale con media 0 e varianza 121) e indipendente da X.

Esercizio 7 (*solo per ST-Materiali*). Consideriamo una catena di Markov omogenea $\{X_n : n \geq 0\}$ con spazio degli stati $E = \{1, 2\}$ e matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ q & 1-q \end{pmatrix}.$$

`D13`) Calcolare $P(X_1 = 1)$ nel caso in cui la distribuzione iniziale è $P(X_0 = 1) = P(X_0 = 2) = \frac{1}{2}$ e $q = \frac{1}{4}$.
`D14`) Determinare per quali valori di q si ha $P(X_1 = 2, X_2 = 1|X_0 = 2) = \frac{6}{49}$.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
D1) La probabilità richiesta è $\frac{1}{3}\frac{1}{3}\frac{1}{3}\frac{1}{3}=\frac{1}{81}$.
D2) La variabile aleatoria ha distribuzione binomiale con parametri $n=4$ (numero di estrazioni) e $p=\frac{1}{3}$ (probabilità di estrarre il numero 2 in ogni estrazione). Quindi $p_X(k)=\binom{4}{k}(\frac{1}{3})^k(1-\frac{1}{3})^{4-k}$ per $k\in\{0,1,2,3,4\}$: $p_X(0)=\frac{16}{81}$, $p_X(1)=\frac{32}{81}$, $p_X(2)=\frac{24}{81}$, $p_X(3)=\frac{8}{81}$, $p_X(4)=\frac{1}{81}$.

Esercizio 2. Sia U_i l'evento "si sceglie l'urna i-sima".
D3) Per la formula delle probabilità totali si ha $p_X(k)=P(X=k)=\sum_{i=1}^2 P(X=k|U_i)P(U_i)=\frac{1}{2}\left(\frac{\binom{3}{k}\binom{2}{2-k}}{\binom{5}{2}}+\frac{\binom{2}{k}\binom{3}{2-k}}{\binom{5}{2}}\right)$ per $k\in\{0,1,2\}$; quindi si ha $p_X(0)=\frac{1}{2}(\frac{1}{10}+\frac{3}{10})=\frac{1}{5}$, $p_X(1)=\frac{1}{2}(\frac{6}{10}+\frac{6}{10})=\frac{3}{5}$, $p_X(2)=\frac{1}{2}(\frac{3}{10}+\frac{1}{10})=\frac{1}{5}$.
D4) Per la formula di Bayes (e per il valore di $P(X=1)$ calcolato prima) si ha $P(U_1|X=1)=\frac{P(X=1|U_1)P(U_1)}{P(X=1)}=\frac{\frac{1}{2}\frac{6}{10}}{\frac{3}{5}}=\frac{3}{10}\frac{5}{3}=\frac{1}{2}$.

Esercizio 3.
D5) Per $h\in\{1,2\}$ si ha $p_{X_2}(h)=\sum_{k=2}^\infty p_{X_1,X_2}(k,h)=\sum_{k=2}^\infty(\frac{1}{2})^k=\frac{(\frac{1}{2})^2}{1-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$. Quindi $\mathbb{E}[X_2]=1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{2}=\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2}$.
D6) Si ha $P(X_1+X_2\le 4)=p_{X_1,X_2}(2,1)+p_{X_1,X_2}(2,2)+p_{X_1,X_2}(3,1)=(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^3=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{2+2+1}{8}=\frac{5}{8}$.

Esercizio 4.
D7) Si ha banalmente $F_X(t)=0$ per $t\le 0$ e $F_X(t)=1$ per $t\ge 1$. Inoltre, per $t\in(0,1)$, si ha $F_X(t)=\int_0^t\frac{1}{\log 2}\frac{2x}{1+x^2}dx=\frac{1}{\log 2}[\log(1+x^2)]_{x=0}^{x=t}=\frac{\log(1+t^2)}{\log 2}$.
D8) Si vede che $P(1\le 1+X^2\le 2)=1$, da cui $F_Y(y)=0$ per $y\le 1$ e $F_Y(y)=1$ per $y\ge 2$. Per $y\in(1,2)$ si ha $F_Y(y)=P(1+X^2\le y)=P(X^2\le y-1)=P(X\le\sqrt{y-1})=\int_0^{\sqrt{y-1}}\frac{1}{\log 2}\frac{2x}{1+x^2}dx=\frac{1}{\log 2}[\log(1+x^2)]_{x=0}^{x=\sqrt{y-1}}=\frac{\log y}{\log 2}$. Quindi la densità è $f_Y(y)=\frac{1}{y\log 2}1_{(1,2)}(y)$.

Esercizio 5.
D9) Si ha $P(N_4=3)=\frac{(2\cdot 4)^3}{3!}e^{-2\cdot 4}=\frac{512}{6}e^{-8}=\frac{256}{3}e^{-8}$.
D10) Si ha $\mathbb{E}[T_{20}]=\frac{20}{2}=10$.

Esercizio 6.
D11) Si ha $P(X>22)=P(\frac{X}{\sqrt{121}}>\frac{22}{\sqrt{121}})=1-\Phi(\frac{22}{11})=1-\Phi(2)=1-0.97725=0.02275$.
D12) La variabile aleatoria $X+Y$ ha distribuzione normale di media $0+0=0$ e varianza $121+121=242$. Dunque si ha $P(X+Y\le\frac{3}{4}\sqrt{242})=P(\frac{X+Y}{\sqrt{242}}\le\frac{\frac{3}{4}\sqrt{242}}{\sqrt{242}})=\Phi(\frac{3}{4})=0.77337$.

Esercizio 7.
D13) Si ha $P(X_1=1)=\sum_{j=1}^2 P(X_1=1|X_0=j)P(X_0=j)=\frac{1}{2}\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\frac{1}{4}=(\frac{3}{4}+\frac{1}{4})\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.
D14) Si deve considerare l'equazione $p_{22}p_{21}=\frac{6}{49}$, da cui segue $(1-q)q=\frac{6}{49}$, $q-q^2=\frac{6}{49}$, $q^2-q+\frac{6}{49}=0$, $q_\pm=\frac{1\pm\sqrt{1-4\cdot\frac{6}{49}}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{1-\frac{24}{49}}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{\frac{25}{49}}}{2}=\frac{1\pm\frac{5}{7}}{2}$. Quindi abbiamo due valori di q che realizzano la condizione richiesta: $q=q_+=\frac{\frac{12}{7}}{2}=\frac{6}{7}$ e $q=q_-=\frac{\frac{2}{7}}{2}=\frac{1}{7}$.

Commenti.
La somma dei valori di ciascuna densità discreta che appare è 1 in accordo con la teoria.
D1) Ciascuna delle $3^4=81$ sequenze ordinate di 4 elementi di $\{1,2,3\}$ (con ripetizioni) ha la stessa

probabilità.
D4) Gli eventi U_1 e $\{X = 1\}$ sono indipendenti; infatti abbiamo che $P(U_1|X = 1) = P(U_1)$. Questo non accade se consideriamo U_1 e $\{X = k\}$ per $k \in \{0, 2\}$. Infatti si ha $P(U_1|X = 0) = \frac{P(X=0|U_1)P(U_1)}{P(X=0)} = \frac{\frac{1}{10}\frac{1}{2}}{\frac{1}{5}} = \frac{1}{4}$ e $P(U_1|X = 2) = \frac{P(X=2|U_1)P(U_1)}{P(X=2)} = \frac{\frac{3}{10}\frac{1}{2}}{\frac{1}{5}} = \frac{3}{4}$. Si osservi che non è sorprendente riscontrare le disuguaglianze $P(U_1|X = 0) < P(U_1)$ e $P(U_1|X = 2) > P(U_1)$. Infatti se si sa di aver ottenuto "0 teste" ("2 teste", rispettivamente) diminuisce (aumenta, rispettivamente) la probabilità di aver scelto l'urna 1, che è l'urna con una maggiore probabilità di ottenere palline bianche.
D5) Le variabili aleatorie X_1 e X_2 sono indipendenti. Infatti la densità marginale di X_1 è $p_{X_1}(k) = p_{X_1,X_2}(k, 1)+p_{X_1,X_2}(k, 2) = (\frac{1}{2})^k+(\frac{1}{2})^k = 2(\frac{1}{2})^k$ per $k \geq 2$ intero, da cui segue che $p_{X_1}(k)p_{X_2}(h) = 2(\frac{1}{2})^k\frac{1}{2} = (\frac{1}{2})^k = p_{X_1,X_2}(k, h)$ per ogni $(k, h) \in \{2, 3, 4, \dots\} \times \{1, 2\}$.
D13) Ovviamente si ha anche $P(X_1 = 2) = \frac{1}{2}$ e quindi la distribuzione iniziale scelta è stazionaria. Questo è in accordo con quanto osservato nei commenti alle soluzioni dell'appello precedente perché per $q = \frac{1}{4}$ si ha una matrice la cui somma degli elementi di ciascuna colonna è uguale a 1.