Statistica per la ricerca sperimentale e tecnologica
Corso di Laurea in Informatica, Università di Roma "Tor Vergata"
Anno accademico: `2005-2006`
Titolare del corso: `Claudio Macci`
Preappello del 26 Maggio 2006

Esercizio 1. Un'urna contiene 1 pallina bianca e 1 nera. Si estrae una pallina a caso e viene rimessa nell'urna insieme ad un'altra che ha lo stesso colore di quella estratta. Poi viene nuovamente estratta una pallina a caso.
`D1`) Calcolare la probabilità di estrarre due palline nere.
`D2`) Calcolare la probabilità di estrarre due palline dello stesso colore.
`D3`) Calcolare la probabilità che la prima pallina estratta sia bianca sapendo che la seconda pallina estratta è nera.

Esercizio 2. Un'urna ha 2 palline bianche e 3 rosse. Si estraggono a caso 2 palline in blocco.
`D4`) Calcolare la probabilità di ottenere esattamente una pallina rossa.
`D5`) Calcolare la probabilità di ottenere almeno una pallina rossa.

Esercizio 3. Sia (X_1, X_2) una variabile aleatoria discreta bidimensionale con la seguente densità congiunta discreta: $p_{(X_1,X_2)}(0,2) = p_{(X_1,X_2)}(0,1) = p_{(X_1,X_2)}(1,0) = p_{(X_1,X_2)}(2,0) = 1/4$.
`D6`) Trovare la densità discreta marginale di X_2.

Esercizio 4. Siano Y una variabile aleatoria esponenziale di parametro $\lambda = 2$.
`D7`) Calcolare $P(3 < Y < 4)$.
`D8`) Calcolare $\mathbb{E}[Y]$.

Esercizio 5. Sia X una variabile aleatoria con con densità $f_X(t) = ct$ per $t \in [1,3]$ e $f_X(t) = 0$ altrimenti.
`D9`) Verificare che $c = 1/4$.
Sia (X_n) una successione di variabili aleatorie indipendenti e tutte con la stessa distribuzione di X. Inoltre poniamo $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$.
`D10`) Trovare il valore m tale che, per ogni $\varepsilon > 0$, si ha $\lim_{n\to\infty} P(|\overline{X}_n - m| > \varepsilon) = 0$.

Esercizio 6. Sia W_1 una v.a. normale con media $\mu = 2$ e varianza $\sigma^2 = 16$.
`D11`) Calcolare $P(W_1 < 1)$.
Sia W_2 un'altra variabile aleatoria tale che W_1 e W_2 sono indipendenti e con la stessa distribuzione.
`D12`) Calcolare $P(W_1 + W_2 < 4)$.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.

`D1`) Si ha $P(N_1 \cap N_2) = P(N_2|N_1)P(N_1) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$.

`D2`) Si ha $P((B_1 \cap B_2) \cup (N_1 \cap N_2)) = P(B_1 \cap B_2) + P(N_1 \cap N_2) = P(B_2|B_1)P(B_1) + P(N_2|N_1)P(N_1) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$; la prima uguaglianza segue dal fatto che si ha un'unione tra due eventi disgiunti.

`D3`) Per la formula di Bayes (e la formula delle probabilità totali per $P(N_2)$) si ha
$P(B_1|N_2) = \frac{P(N_2|B_1)P(B_1)}{P(N_2)} = \frac{P(N_2|B_1)P(B_1)}{P(N_2|B_1)P(B_1)+P(N_2|N_1)P(N_1)} = \frac{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1+2}{6}} = \frac{1}{3}$.

Esercizio 2. Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di palline rosse ottenute.

`D4`) Si ha $P(X = 1) = \frac{\binom{2}{1}\binom{3}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

`D5`) Si ha $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{\binom{2}{2}\binom{3}{0}}{\binom{5}{2}} = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$.

Esercizio 3.

`D6`) Si ha:
$p_{X_2}(0) = p_{(X_1,X_2)}(1, 0) + p_{(X_1,X_2)}(2, 0) = (1 + 1)/4 = 2/4 = 1/2$;
$p_{X_2}(1) = p_{(X_1,X_2)}(0, 1) = 1/4$;
$p_{X_2}(2) = p_{(X_1,X_2)}(0, 2) = 1/4$.

Esercizio 4.

`D7`) Si ha $P(3 < Y < 4) = \int_3^4 2e^{-2t}dt = [-e^{-2t}]_3^4 = e^{-6} - e^{-8}$.

`D8`) Per formule note sulla distribuzione esponenziale si ha $\mathbb{E}[Y] = \frac{1}{2}$.

Esercizio 5.

`D9`) Si ha $1 = c\int_1^3 tdt = c[t^2/2]_1^3 = c\frac{9-1}{2} = 4c$, da cui $c = 1/4$.

`D10`) Il valore m richiesto coincide con $\mathbb{E}[X]$ per la legge dei grandi numeri. Dunque si ha $m = \int_{-\infty}^{\infty} tf_X(t)dt = \int_1^3 t \cdot \frac{1}{4}tdt = \frac{1}{4}\int_1^3 t^2dt = \frac{1}{4}[t^3/3]_1^3 = \frac{1}{4}\frac{3^3-1^3}{3} = \frac{27-1}{12} = \frac{26}{12} = \frac{13}{6}$.

Esercizio 6.

`D11`) La v.a. $Z_{W_1} = \frac{W_1-2}{\sqrt{16}}$ è la standardizzata di W_1 e si ha $P(W_1 < 1) = P(\frac{W_1-2}{\sqrt{16}} < \frac{1-2}{\sqrt{16}}) = P(Z_{W_1} < -1/4) = \Phi(-1/4) = 1 - \Phi(1/4) = 1 - \Phi(0.25) = 1 - 0.59871 = 0.40129$.

`D12`) La v.a. $W_1 + W_2$ ha distribuzione normale di media $2+2 = 4$ e varianza $16+16 = 32$. Quindi si ha $P(W_1 + W_2 < 4) = P(\frac{W_1+W_2-4}{\sqrt{32}} < \frac{4-4}{\sqrt{32}}) = \Phi(0) = 0.5$ perché $\frac{W_1+W_2-4}{\sqrt{32}}$ ha distribuzione normale standard.

Commenti.

`D5`) Si poteva procedere anche in questo modo: $P(X \geq 1) = p_X(1) + p_X(2) = \frac{6+3}{10} = \frac{9}{10}$.

`D7`) Si può fare riferimento alla funzione di distribuzione e si ha $P(3 < Y < 4) = F_Y(4) - F_Y(3) = 1 - e^{-2\cdot 4} - (1 - e^{-2\cdot 3}) = e^{-6} - e^{-8}$.

`D12`) $P(W_1 + W_2 < 4) = 0.5$ segue banalmente dal fatto che $W_1 + W_2$ ha distribuzione normale di media 4; insomma non serve considerare la standardizzata di $W_1 + W_2$ (cioè $\frac{W_1+W_2-4}{\sqrt{32}}$).