Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)
Anno accademico: `2012-2013`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Appello del 1° Febbraio 2013

Esercizio 1. Consideriamo prove indipendenti con probabilità di successo $p \in (0,1)$ e sia X la variabili aleatoria che conta il numero delle prove per avere il primo successo.
`D1`) Calcolare $P(X \in \{3,6,9,\ldots\})$, cioè la probabilità che X assuma un valore multiplo di 3.
`D2`) Calcolare la probabilità di aver la sequenza (S,S,F,S) nelle prime 4 prove, dove $S =$ successo e $F =$ fallimento.

Esercizio 2. Abbiamo 2 urne: l'*urna 1* con 4 palline bianche e 3 nere, e l'*urna 2* con 3 palline bianche e 4 nere. Si sceglie un'urna a caso e, dall'urna scelta, si estraggono 2 palline, una alla volta e con reinserimento. Infine sia X la variabile aleatoria che indica il numero di palline bianche estratte.
`D3`) Trovare la densità discreta di X.
`D4`) Calcolare la probabilità di aver scelto l'*urna 1* sapendo di aver estratto due palline con colori diversi (cioè una pallina bianca e una nera in un ordine non stabilito).

Esercizio 3. Consideriamo la seguente densità congiunta: $p_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \binom{2}{x_1}\binom{2}{x_2}\frac{1}{16}$ per $(x_1,x_2) \in \{0,1,2\} \times \{0,1,2\}$.
`D5`) Calcolare $P(X_1 > X_2)$.
`D6`) Calcolare $P(X_1 = X_2)$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con densità continua $f(t) = \frac{e^{-|t|}}{2(1-e^{-1})} \cdot 1_{(-1,1)}(t)$.
`D7`) Calcolare $P(|X| < \frac{1}{2}|X > 0)$.
`D8`) Trovare la densità continua di $Y = |X|$.

Esercizio 5. Sia $N_t = \sum_{n\geq 1} 1_{T_n \leq t}$ (per $t \geq 0$) un processo di Poisson con intensità di $\lambda = \frac{2}{3}$.
`D9`) Calcolare $P(N_9 = 1)$.
`D10`) Calcolare $P(T_1 > \frac{3}{2})$.

Esercizio 6. Sia X una variabile aleatoria normale standard.
`D11`) Calcolare $P(X < -1.52)$.
`D12`) Verificare che $P(-a < X < 2a) = \Phi(2a) + \Phi(a) - 1$ per ogni $a > 0$.

Esercizio 7 (*solo per ST-Materiali*). Consideriamo una catena di Markov omogenea $\{X_n : n \geq 0\}$ con spazio degli stati $E = \{1,2,3\}$ e matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1-\alpha-\beta & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

per $\alpha, \beta \in (0,1)$ tali che $\alpha + \beta < 1$.
`D13`) Trovare la/e distribuzioni stazionaria/e.
`D14`) Supponendo che la catena parta da 2, calcolare le probabilità di passaggio per $\{1\}$ e per $\{3\}$ (si osservi che si tratta di probabilità di assorbimento in 1 e in 3 perché 1 e 3 sono stati assorbenti).

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
`D1`) Si ha $P(X \in \{3,6,9,\dots\}) = \sum_{k=1}^{\infty} p_X(3k) = \sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{3k-1}p = \frac{p}{(1-p)}\frac{(1-p)^3}{1-(1-p)^3} = \frac{p(1-p)^2}{1-(1-p)^3}$.
`D2`) La probabilità richiesta è $pp(1-p)p = p^3(1-p)$.

Esercizio 2. Sia E_h l'evento "si sceglie l'urna h" per $h \in \{1,2\}$.
`D3`) Per la formula delle probabilità totali si ha $P(X = k) = \sum_{h=1}^{2} P(X = k|E_h)P(E_h) = \binom{2}{k}(\frac{4}{7})^k(1-\frac{4}{7})^{2-k}\frac{1}{2} + \binom{2}{k}(\frac{3}{7})^k(1-\frac{3}{7})^{2-k}\frac{1}{2}$ per $k \in \{0,1,2\}$, da cui segue $p_X(0) = (\frac{3}{7})^2\frac{1}{2} + (\frac{4}{7})^2\frac{1}{2} = \frac{9+16}{49\cdot 2} = \frac{25}{98}$, $p_X(1) = 2\frac{3}{7}\frac{4}{7}\frac{1}{2} + 2\frac{4}{7}\frac{3}{7}\frac{1}{2} = \frac{24+24}{49\cdot 2} = \frac{48}{98}$ e $p_X(2) = (\frac{4}{7})^2\frac{1}{2} + (\frac{3}{7})^2\frac{1}{2} = \frac{16+9}{49\cdot 2} = \frac{25}{98}$.
`D4`) Per la formula di Bayes, e tenendo conto di $P(X = 1)$ calcolato prima, si ha $P(E_1|X = 1) = \frac{P(X=1|E_1)P(E_1)}{P(X=1)} = \frac{2\frac{3}{7}\frac{4}{7}\frac{1}{2}}{\frac{48}{98}} = \frac{24}{48} = \frac{1}{2}$.

Esercizio 3.
`D5`) Si ha $P(X_1 > X_2) = p_{X_1,X_2}(2,0) + p_{X_1,X_2}(2,1) + p_{X_1,X_2}(1,0) = \frac{1+2+2}{16} = \frac{5}{16}$.
`D6`) Si ha $P(X_1 = X_2) = p_{X_1,X_2}(0,0) + p_{X_1,X_2}(1,1) + p_{X_1,X_2}(2,2) = \frac{1+4+1}{16} = \frac{6}{16}$.

Esercizio 4.
`D7`) Si ha $P(|X| < \frac{1}{2}|X > 0) = \frac{P(\{-\frac{1}{2}<X<\frac{1}{2}\}\cap\{X>0\})}{P(X>0)} = \frac{P(0<X<\frac{1}{2})}{P(X>0)} = \frac{\int_0^{1/2}\frac{e^{-t}}{2(1-e^{-1})}dt}{\int_0^1\frac{e^{-t}}{2(1-e^{-1})}dt} = \frac{\frac{[-e^{-t}]_{t=0}^{t=1/2}}{2(1-e^{-1})}}{\frac{[-e^{-t}]_{t=0}^{t=1}}{2(1-e^{-1})}} = \frac{1-e^{-1/2}}{1-e^{-1}}$.
`D8`) Si vede che $P(0 \le |X| \le 1) = 1$, da cui $F_Y(y) = 0$ per $y \le 0$ e $F_Y(y) = 1$ per $y \ge 1$. Per $y \in (0,1)$ si ha $F_Y(y) = P(|X| \le y) = P(-y \le X \le y) = \int_{-y}^{y}\frac{e^{-|t|}}{2(1-e^{-1})}dt = \frac{2}{2(1-e^{-1})}\int_0^y e^{-t}dt = \frac{[-e^{-t}]_{t=0}^{t=y}}{1-e^{-1}} = \frac{1-e^{-y}}{1-e^{-1}}$. In conclusione la densità continua è $f_Y(y) = \frac{e^{-y}}{1-e^{-1}}1_{[0,1]}(y)$.

Esercizio 5.
`D9`) Si ha $P(N_9 = 1) = \frac{(\frac{2}{3}\cdot 9)^1}{1!}e^{-\frac{2}{3}\cdot 9} = 6e^{-6}$.
`D10`) Si ha $P(T_1 > \frac{3}{2}) = e^{-\frac{2}{3}\frac{3}{2}} = e^{-1}$.

Esercizio 6.
`D11`) Si ha $P(X < -1.52) = \Phi(-1.52) = 1 - \Phi(1.52) = 1 - 0.93574 = 0.06426$.
`D12`) Si ha $P(-a < X < 2a) = \Phi(2a) - \Phi(-a) = \Phi(2a) - (1 - \Phi(a)) = \Phi(2a) + \Phi(a) - 1$.

Esercizio 7.
`D13`) Sia (p,q,r) una generica distribuzione stazionaria. Allora si deve avere la relazione matriciale

$$(p,q,r)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1-\alpha-\beta & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (p,q,r)$$

che fornisce il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} p + \alpha q = p \\ q(1-\alpha-\beta) = q \\ \beta q + r = r. \end{cases}$$

Allora, poiché $1-\alpha-\beta > 0$, otteniamo $q = 0$ dalla seconda equazione; inoltre, sostituendo $q = 0$ nelle altre due equazioni, otteniamo due equazioni indeterminate ($p = p$ e $r = r$). Quindi le distribuzioni stazionarie sono del tipo $(\gamma, 0, 1-\gamma)$ al variare di $\gamma \in [0,1]$.

`D14`) Indichiamo le due probabilità di assorbimento con λ_1 e λ_3. In entrambi i casi $C = \{1\}$ e $C = \{3\}$ si ha $D_C = \{2\}$ (D_C è l'insieme degli stati non appartenenti a C e che comunicano con C); quindi in entrambi i casi il sistema si riduce ad un'unica equazione perché D_C ha un solo elemento. In dettaglio si ha:

$$\lambda_1 = \alpha + \lambda_1(1-\alpha-\beta), \text{ da cui segue } \lambda_1 = \frac{\alpha}{\alpha+\beta};$$

$$\lambda_3 = \beta + \lambda_3(1-\alpha-\beta), \text{ da cui segue } \lambda_3 = \frac{\beta}{\alpha+\beta}.$$

Commenti.

La somma dei valori di ciascuna densità discreta che appare è 1 in accordo con la teoria.

`D3-D4`) Si vede che $P(E_1|X = 1) = P(E_1)$ e quindi gli eventi E_1 e $\{X = 1\}$ sono indipendenti. Del resto l'indipendenza tra i due eventi si verifica rapidamente sfruttando alcuni calcoli già fatti perché si ha $P(E_1 \cap \{X = 1\}) = P(X = 1|E_1)P(E_1) = 2\frac{3}{7}\frac{4}{7}\frac{1}{2} = \frac{24}{98}$ e $P(E_1)P(X = 1) = \frac{1}{2}\frac{48}{98} = \frac{24}{98}$.

`D5-D6`) Si può verificare che $P(X_1 < X_2) = \frac{5}{6}$ e quindi si ha $P(X_1 > X_2) + P(X_1 = X_2) + P(X_1 < X_2) = 1$ in accordo con la teoria. Non sorprende che $P(X_1 < X_2) = P(X_1 > X_2)$ perché la densità congiunta è tale che $p_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = p_{X_1,X_2}(x_2, x_1)$ per ogni scelta di $(x_1, x_2) \in \{0, 1, 2\} \times \{0, 1, 2\}$.

`D7-D8`) Si verifica che $P(|X| < \frac{1}{2}|X > 0) = F_Y(\frac{1}{2})$ e quindi gli eventi $\{|X| < \frac{1}{2}\}$ e $\{X > 0\}$ sono indipendenti.

`D13`) Si poteva rispondere senza fare calcoli. Le distribuzioni stazionarie sono del tipo $(p, 0, q)$ perché 2 è uno stato transitorio. Inoltre 1 e 3 sono stati assorbenti e quindi $(1, 0, 0)$ e $(0, 0, 1)$ sono particolari distribuzioni stazionarie e tutte le distribuzioni stazionarie sono del tipo $\gamma(1, 0, 0) + (1-\gamma)(0, 0, 1)$ al variare di $\gamma \in [0, 1]$.

`D14`) Osserviamo che la catena non può tornare nello stato 2 una volta che lo ha lasciato. Allora, in altro modo, per $k \in \{1, 3\}$, si ha

$$\begin{aligned}\lambda_k =& P(X_1 = k|X_0 = 2) + P(X_1 = 2, X_2 = k|X_0 = 2) + \cdots \\ &+ \cdots + P(X_1 = 2, \ldots, X_{n-1} = 2, X_n = k|X_0 = 2) + \cdots \\ =& \begin{cases} \sum_{j=1}^{\infty}((1-\alpha-\beta)^{j-1}\alpha) = \alpha \cdot \frac{1}{1-(1-\alpha-\beta)} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} & \text{per } k = 1 \\ \sum_{j=1}^{\infty}((1-\alpha-\beta)^{j-1}\beta) = \beta \cdot \frac{1}{1-(1-\alpha-\beta)} = \frac{\beta}{\alpha+\beta} & \text{per } k = 3. \end{cases}\end{aligned}$$

Poi, sempre per $k \in \{1, 3\}$, abbiamo la seguente interpretazione: λ_k coincide con il rapporto tra la probabilità di andare dallo stato 2 allo stato k (che è α per $k = 1$ e β per $k = 3$) diviso la probabilità che la catena lasci lo stato 2 (che è $1 - (1-\alpha-\beta) = \alpha + \beta$). Infine il fatto che $\lambda_1 + \lambda_3 = 1$ è in accordo con il fatto che sicuramente la catena finisce in uno dei due stati assorbenti (del resto la catena non può rimanere all'infinito nello stato transitorio 2 ...).