Statistica per la ricerca sperimentale e tecnologica
Corso di Laurea in Informatica, Università di Roma "Tor Vergata"
Anno accademico: `2005-2006`
Titolare del corso: `Claudio Macci`
Esame del 15 Giugno 2006

Esercizio 1. Un'urna contiene 5 palline numerate da 1 a 5. Si estrae a caso una pallina e, successivamente, si estraggono a caso due palline in blocco tra le palline rimanenti.
`D1`) Calcolare la probabilità che le due palline estratte successivamente siano la numero 1 e la numero 2.
`D2`) Calcolare la probabilità di estrarre la pallina numero 5 all'estrazione iniziale sapendo che le palline estratte successivamente sono la numero 1 e la numero 2.

Esercizio 2. Si lancia 5 volte una moneta <u>non</u> equa tale che la probabilità che esca testa in ogni lancio è $p = \frac{2}{3}$.
`D3`) Calcolare la probabilità di ottenere la sequenza (testa,testa,testa,croce,testa).
`D4`) Calcolare la probabilità di ottenere testa esattamente 4 volte.
`D5`) Calcolare la probabilità di ottenere testa almeno una volta.

Esercizio 3. Sia (X_1, X_2) una variabile aleatoria discreta bidimensionale con densità congiunta discreta $p_{(X_1,X_2)}(x_1, x_2) = \frac{1}{9}$ per ogni $x_1, x_2 \in \{0, 1, 2\}$.
`D6`) Calcolare $P(X_1 + X_2 = 1)$.

Esercizio 4. Siano Y una variabile aleatoria esponenziale di parametro $\lambda = 1$.
`D7`) Calcolare $P(Y > 7)$.
`D8`) Calcolare $\mathbb{E}[Y]$.
Sia Z una variabile aleatoria con distribuzione uniforme su $[0, 1]$.
`D9`) Calcolare $\mathbb{E}[Y + Z]$.

Esercizio 5. Sia X una variabile aleatoria con densità $f_X(t) = ct$ per $t \in [0, 10]$ e $f_X(t) = 0$ altrimenti.
`D10`) Calcolare il valore di c.

Esercizio 6. Sia W una v.a. normale con media $\mu = 2$ e varianza $\sigma^2 = 121$.
`D11`) Calcolare $P(W > 0)$.
Sia (X_n) una successione di variabili aleatorie indipendenti e tutte con la stessa distribuzione di W. Inoltre poniamo $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$.
`D12`) Trovare il valore m tale che, per ogni $\varepsilon > 0$, si ha $\lim_{n\to\infty} P(|\overline{X}_n - m| > \varepsilon) = 0$.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1. Sia E_k l'evento "estratta la pallina k alla prima estrazione" per $k \in \{1, \dots, 5\}$, e sia E l'evento "estratte successivamente le palline 1 e 2".
`D1`) Per la formula delle probabilità totali si ha
$P(E) = \sum_{k=1}^{5} P(E|E_k)P(E_k) = \frac{1}{5}\sum_{k=1}^{5} P(E|E_k) = \frac{1}{5}\left[0 + 0 + \frac{1}{\binom{4}{2}} + \frac{1}{\binom{4}{2}} + \frac{1}{\binom{4}{2}}\right]$,
da cui $P(E) = \frac{1}{5}\frac{3}{6} = \frac{1}{10}$.
`D2`) Per la formula di Bayes (e il valore di $P(E)$ calcolato prima) si ha
$P(E_5|E) = \frac{P(E|E_5)P(E_5)}{P(E)} = \frac{\frac{1}{\binom{4}{2}}\frac{1}{5}}{\frac{1}{10}} = \frac{\frac{1}{30}}{\frac{1}{10}} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$.

Esercizio 2.
`D3`) Gli esiti dei lanci di moneta sono eventi indipendenti; quindi la probabilità richiesta è
$\frac{2}{3}\frac{2}{3}\frac{2}{3}\left(1 - \frac{2}{3}\right)\frac{2}{3} = \frac{2^4}{3^5} = \frac{16}{243}$.
`D4`) Per la teoria della distribuzione binomiale la probabilità richiesta è
$\binom{5}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(1 - \frac{2}{3}\right)^{5-4} = 5\frac{2^4}{3^5} = \frac{80}{243}$.
`D5`) Per la teoria della distribuzione binomiale, facendo opportunamente riferimento all'evento complementare, la probabilità richiesta è
$1 - \binom{5}{0}\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(1 - \frac{2}{3}\right)^{5-0} = 1 - \frac{1}{3^5} = \frac{243-1}{243} = \frac{242}{243}$.

Esercizio 3.
`D6`) Si ha:
$P(X_1 + X_2 = 1) = p_{(X_1,X_2)}(1, 0) + p_{(X_1,X_2)}(0, 1) = \frac{1+1}{9} = \frac{2}{9}$.

Esercizio 4.
`D7`) Si ha $P(Y > 7) = \int_7^\infty e^{-t}dt = [-e^{-t}]_7^\infty = 0 - (-e^{-7}) = e^{-7}$.
`D8`) Per formule note sulla distribuzione esponenziale si ha $\mathbb{E}[Y] = \frac{1}{1} = 1$.
`D9`) Per linearità della speranza matematica e per formule note sulla distribuzione uniforme si ha $\mathbb{E}[Y + Z] = \mathbb{E}[Y] + \mathbb{E}[Z] = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

Esercizio 5.
`D10`) Si ha $1 = c\int_0^{10} tdt = c[t^2/2]_0^{10} = c\frac{100-0}{2} = 50c$, da cui $c = 1/50$.

Esercizio 6.
`D11`) La v.a. $Z_W = \frac{W-2}{\sqrt{121}}$ è la standardizzata di W e si ha
$P(W > 0) = P(\frac{W-2}{\sqrt{121}} > \frac{0-2}{\sqrt{121}}) = P(Z_W > -2/11) = 1-\Phi(-2/11) = 1-(1-\Phi(2/11)) = \Phi(0.18) = 0.57142$.
`D12`) Per la legge dei grandi numeri il valore di m richiesto è la media μ della variabile aleatoria W; quindi $m = 2$.

Commenti.
`D5`) Per calcolare la probabilità richiesta si poteva procedere anche in questo modo:
$\sum_{k=1}^{5}\binom{5}{k}(\frac{2}{3})^k(1 - \frac{2}{3})^{5-k} = \frac{10+40+80+80+32}{243} = \frac{242}{243}$.
`D7`) Si può fare riferimento alla funzione di distribuzione e si ha
$P(Y > 7) = 1 - P(Y \le 7) = 1 - F_Y(7) = 1 - (1 - e^{-1\cdot 7}) = e^{-7}$.