Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)
Anno Accademico: 2021-2022. *Titolare del corso:* Claudio Macci
Simulazione 2

Esercizio 1. Un'urna ha 2 palline bianche e 3 nere. Si estraggono a caso 2 palline, una alla volta e senza reinserimento.
D1) Calcolare la probabilità di estrarre almeno una pallina nera.
D2) Calcolare la probabilità di estrarre la sequenza di colori (bianco, nero) sapendo di aver estratto palline di colore diverso.
D3) Supponiamo che due delle tre palline nere siano scolorite. Calcolare la probabilità di estrarre le due palline nere scolorite.

Esercizio 2. Si lancia un dado equo. Se esce il numero 1 si lancia una moneta equa, se esce un numero diverso da 1 si lancia una moneta la cui probabilità che esca testa lanciandola è uguale a p, per qualche $p \in [0,1]$.
D4) Calcolare la probabilità che sia uscito il numero 1 nel lancio del dado sapendo che è uscita testa nel lancio di moneta effettuato.

Esercizio 3. Sia $q \in (0,1)$ arbitrariamente fissato. Consideriamo la seguente densità congiunta discreta:

$$p_{X_1,X_2}(k,k) = q\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \quad \text{per } k \geq 0 \text{ intero;}$$

$$p_{X_1,X_2}(h,2h) = (1-q)\left(\frac{1}{2}\right)^{h} \quad \text{per } h \geq 1 \text{ intero.}$$

D5) Calcolare $P(X_2 = 2X_1)$.
D6) Calcolare $P(X_1 = 1|X_2 = 2)$.

Esercizio 4. Sia $b > 0$ e sia X una variabile aleatoria con densità continua $f_X(x) = x^2 1_{(-b,b)}(x)$ per qualche $b > 0$ da determinare.
D7) Verificare che $b = (3/2)^{1/3}$.
D8) Sia $n \geq 1$ intero. Trovare la funzione di distribuzione di $Y = X^{2n}$.

Esercizio 5. Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.
Sia X una variabile aleatoria Normale con media 2 e varianza 9.
D9) Calcolare $P(X > 3)$ esprimendo il risultato con la funzione Φ.
Siano $X_1, \ldots, X_{900}$ variabili aleatorie i.i.d. con media 3 e varianza 81.
D10) Calcolare $P(X_1 + \cdots + X_{900} > 2800)$ con l'approssimazione Normale esprimendo il risultato con la funzione Φ.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
Conviene fare riferimento alla variabile aleatoria X che conta il numero di palline nere estratte, che ha distribuzione ipergeometrica.
`D1)` La probabilità richiesta è $P(X \geq 1) = p_X(1) + p_X(2) = \frac{\binom{2}{1}\binom{3}{1}+\binom{2}{0}\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{6+3}{10} = \frac{9}{10}$, o in alternativa $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - p_X(0) = 1 - \frac{\binom{2}{2}\binom{3}{0}}{\binom{5}{2}} = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$.
`D2)` Sia E l'evento "estrarre la sequenza di colori $(\text{bianco}, \text{nero})$". Allora si ha $P(E|X = 1) = \frac{P(E\cap\{X=1\})}{P(X=1)} = \frac{P(E)}{p_X(1)} = \frac{(2/5)(3/4)}{6/10} = \frac{6}{20}\frac{10}{6} = \frac{1}{2}$.
`D3)` Possiamo pensare di avere 2 palline nere scolorite e 3 di tipo diverso (la nera non scolorita e le due bianche). Allora la probabilità richiesta è uguale a $\frac{\binom{2}{2}\binom{3}{0}}{\binom{5}{2}} = \frac{1}{10}$.

Esercizio 2.
`D4)` Con notazioni ovvie viene chiesto di calcolare una probabilità condizionata $P(U|T)$. Per la formula di Bayes (e la formula delle probabilità totali per $P(T)$) si ha

$$P(U|T) = \frac{P(T|U)P(U)}{P(T)} = \frac{(1/2)(1/6)}{(1/2)(1/6) + p(5/6)} = \frac{1}{1 + 10p}.$$

Esercizio 3.
`D5)` Si ha $P(X_2 = 2X_1) = p_{X_1,X_2}(0, 0) + \sum_{h\geq1} p_{X_1,X_2}(h, 2h) = q\left(\frac{1}{2}\right)^{0+1} + \sum_{h\geq1}(1 - q)\left(\frac{1}{2}\right)^h = \frac{q}{2} + (1 - q)\frac{(1/2)^1}{1-1/2} = \frac{q}{2} + 1 - q$.
`D6)` Si ha $P(X_1 = 1|X_2 = 2) = \frac{P(\{X_1=1\}\cap\{X_2=2\})}{P(X_2=2)} = \frac{p_{X_1,X_2}(1,2)}{p_{X_1,X_2}(1,2)+p_{X_1,X_2}(2,2)} = \frac{(1-q)(1/2)^1}{(1-q)(1/2)^1+q(1/2)^{2+1}} = \frac{4(1-q)}{4(1-q)+q}$.

Esercizio 4.
`D7)` Si ha $1 = \int_{-b}^{b} x^2 dx = [\frac{x^3}{3}]_{x=-b}^{x=b} = \frac{2b^3}{3}$, da cui segue e $b^3 = \frac{3}{2}$ e quindi $b = (3/2)^{1/3}$.
`D8)` Tenendo conto del valore di b, si ha $P(0 \leq Y \leq (3/2)^{2n/3}) = 1$ e quindi $F_Y(y) = 0$ per $y \leq 0$ e $F_Y(y) = 1$ per $y \geq (3/2)^{2n/3}$. Per $y \in (1, (3/2)^{2n/3})$ si ha $F_Y(y) = P(X^{2n} \leq y) = P(-y^{1/(2n)} \leq X \leq y^{1/(2n)}) = \int_{-y^{1/(2n)}}^{y^{1/(2n)}} x^2 dx = [\frac{x^3}{3}]_{x=-y^{1/(2n)}}^{x=y^{1/(2n)}} = \frac{2(y)^{3/(2n)}}{3}$.

Esercizio 5.
`D9)` La standardizzata di X è $X^* = \frac{X-2}{\sqrt{9}} = \frac{X-2}{3}$; quindi si ha $P(X > 3) = P(X^* > \frac{3-2}{3}) = P(X^* > 1/3) = 1 - \Phi(1/3)$.
`D10)` Si ha $P(X_1 + \cdots + X_{900} > 2800) = P(\frac{X_1+\cdots+X_{900}-3\cdot900}{\sqrt{81}\sqrt{900}} > \frac{2800-3\cdot900}{\sqrt{81}\sqrt{900}}) \approx 1 - \Phi(\frac{2800-3\cdot900}{\sqrt{81}\sqrt{900}}) = 1 - \Phi(100/270) = 1 - \Phi(10/27)$.

Commenti alle soluzioni.
`D2)` Si ottiene lo stesso valore considerando n_1 palline bianche e n_2 palline nere, qualsiasi siano n_1 e n_2. Infatti si ha

$$P(E|X = 1) = \frac{P(E \cap \{X = 1\})}{P(X = 1)} = \frac{P(E)}{p_X(1)} = \frac{\frac{n_1}{n_1+n_2}\frac{n_2}{n_1+n_2-1}}{\frac{\binom{n_1}{1}\binom{n_2}{1}}{\binom{n_1+n_2}{2}}} = \frac{\frac{n_1}{n_1+n_2}\frac{n_2}{n_1+n_2-1}}{n_1n_2\frac{2}{(n_1+n_2)(n_1+n_2-1)}} = \frac{1}{2}.$$

Questo non sorprende se osserviamo quanto segue. Indichiamo con F l'evento "estrarre la sequenza di colori $(\text{nero}, \text{bianco})$"; allora si ha $\{X = 1\} = E \cup F$ con E e F disgiunti, e quindi $p_X(1) =$

$P(E)+P(F)$; inoltre, per ogni scelta di n_1 e n_2, si ha $P(E)=P(F)$ da cui segue che

$$P(E|X=1)=\frac{P(E\cap\{X=1\})}{P(X=1)}=\frac{P(E)}{p_X(1)}=\frac{P(E)}{P(E)+P(F)}=\frac{P(E)}{2P(E)}=\frac{1}{2}.$$

`D3)` In maniera alternativa possiamo pensare di avere 3 tipi di palline e la probabilità richiesta è uguale a $\frac{\binom{2}{2}\binom{1}{0}\binom{2}{0}}{\binom{5}{2}}=\frac{1}{10}$.

`D3)` Osserviamo che ci sono $\binom{5}{2}=10$ sottoinsiemi di 2 palline possibili, tutti con la stessa probabilità di essere estratti. L'evento "estrarre le due palline nere scolorite" è individuato da uno solo di questi sottoinsiemi, e quindi non sorprende che la probabilità di questo evento sia uguale a $\frac{1}{10}$. Lo stesso ragionamento vale anche per l'evento "estrarre le due palline bianche", che è l'evento $\{X=0\}$, e come visto nella risposta alla domanda `D1)`, si ha $p_X(0)=\frac{1}{10}$.

`D4)` Possiamo dire che U e T sono indipendenti se e solo se $P(U|T)=P(U)$, e quindi se e solo se $\frac{1}{1+10p}=\frac{1}{6}$, che equivale a dire $p=\frac{1}{2}$. In altri temini si ha indipendenza tra U e T se solo se si lancia una moneta equa anche quando non esce 1 nel lancio del dado (e quindi si lancia una moneta dello stesso tipo qualunque sia il risultato del lancio del dado).