Statistica per la ricerca sperimentale e tecnologica
CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA, UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"
Anno accademico: `2004-2005`
Titolare del corso: `Claudio Macci`
Esame del 13 Settembre 2005

Esercizio 1. Consideriamo ripetuti lanci di un dado e per ogni lancio definiamo *successo* l'uscita del numero 4.
`D1`) Calcolare la probabilità di avere 2 insuccessi seguiti dal primo successo.
Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di successi in 3 lanci del dado.
`D2`) Calcolare $P(X = 1)$, cioè la probabilità di avere esattamente un successo.
`D3`) Calcolare $P(X \geq 1)$, cioè la probabilità di aver avuto almeno un successo.

Esercizio 2. Supponiamo di avere un'urna con 2 palline bianche e 3 nere. Vengono estratte 2 palline a caso, una alla volta e senza reinserimento.
`D4`) Calcolare la probabilità di avere la sequenza ordinata di colori (nero,bianco).
Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di palline bianche estratte.
`D5`) Calcolare $P(X = 1)$, cioè la probabilità di avere esattamente una pallina bianca.
`D6`) Calcolare $P(X \geq 1)$, cioè la probabilità di avere almeno una pallina bianca.

Esercizio 3. Sia X una variabile aleatoria uniforme sull'intervallo $[1, 11]$.
`D7`) Calcolare $P(2 < X < 9)$.
`D8`) Calcolare media e varianza di X.
Consideriamo la variabile aleatoria $Y = [X]$ dove $[x] = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$ è la *parte intera* del numero reale x.
`D9`) Calcolare $P(Y = 7)$.
Infine consideriamo una variabile aleatoria Z con distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = \frac{1}{2}$.
`D10`) Calcolare $\mathbb{E}[X + Z]$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria normale standard.
`D11`) Calcolare $P\left(-\frac{1}{10} < X < \frac{1}{10}\right)$.
`D12`) Calcolare $P(X \geq 0 | -1 < X < 1)$.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
D1) Si ha $\left(1-\frac{1}{6}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{6}\right)\cdot\frac{1}{6}=\left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6}=\frac{25}{216}$ per la teoria della distribuzione geometrica.
La variabile aleatoria X ha distribuzione binomiale di parametri $n=3$ (numero di lanci del dado) e $p=\frac{1}{6}$ (probabilità di successo in ogni lancio).
D2) Si ha $P(X=1)=\binom{3}{1}(\frac{1}{6})^1(1-\frac{1}{6})^{3-1}=\frac{75}{216}$.
D3) Si ha $P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-\binom{3}{0}(\frac{1}{6})^0(1-\frac{1}{6})^{3-0}=1-\frac{125}{216}=\frac{91}{216}$.

Esercizio 2.
D4) Con notazioni ovvie la probabilità richiesta è $P(N_1\cap B_2)=P(B_2|N_1)P(N_1)=\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{5}=\frac{3}{10}$.
La variabile aleatoria X ha distribuzione ipergeometrica.
D5) Si ha $P(X=1)=\frac{\binom{2}{1}\binom{3}{1}}{\binom{5}{2}}=\frac{2\cdot 3}{10}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$.
D6) Si ha $P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-\frac{\binom{2}{0}\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}}=1-\frac{3}{10}=\frac{7}{10}$.

Esercizio 3. La variabile aleatoria X ha densità f_X definita come segue: $f_X(t)=\frac{1}{11-1}=\frac{1}{10}$ per $1<t<11$; $f_X(t)=0$ altrimenti.
D7) Si ha $P(2<X<9)=\int_2^9\frac{1}{10}dt=\frac{[t]_2^9}{10}=\frac{9-2}{10}=\frac{7}{10}$.
D8) Sfruttando le note formule di media e varianza per variabili aleatorie con distribuzione uniforme si ha $\mathbb{E}[X]=\frac{11+1}{2}=\frac{12}{2}=6$ e $\mathrm{Var}[X]=\frac{(11-1)^2}{12}=\frac{10^2}{12}=\frac{100}{12}=\frac{25}{3}$.
D9) Si ha $P(Y=7)=P(7\leq X<8)=\int_7^8\frac{1}{10}dt=\frac{[t]_7^8}{10}=\frac{8-7}{10}=\frac{1}{10}$.
D10) Abbiamo visto nella domanda D8) che $\mathbb{E}[X]=6$ ed inoltre si sa che la speranza matematica di una variabile aleatoria con distribuzione esponenziale di parametro λ è $\frac{1}{\lambda}$; allora, per linearità della speranza matematica, si ha $\mathbb{E}[X+Z]=\mathbb{E}[X]+\mathbb{E}[Z]=6+\frac{1}{1/2}=6+2=8$.

Esercizio 4.
D11) Si ha $P\left(-\frac{1}{10}<X<\frac{1}{10}\right)=\Phi\left(\frac{1}{10}\right)-\Phi\left(-\frac{1}{10}\right)=\Phi\left(\frac{1}{10}\right)-\left(1-\Phi\left(\frac{1}{10}\right)\right)=\Phi\left(\frac{1}{10}\right)-1+\Phi\left(\frac{1}{10}\right)=2\Phi\left(\frac{1}{10}\right)-1=2\cdot 0.53983-1=0.07966$.
D12) Si ha $P(X\geq 0|-1<X<1)=\frac{P(\{X\geq 0\}\cap\{-1<X<1\})}{P(-1<X<1)}=\frac{P(\{0\leq X<1\})}{P(-1<X<1)}$ dalla definizione di probabilità condizionata e quindi $P(X\geq 0|-1<X<1)=\frac{\Phi(1)-\Phi(0)}{\Phi(1)-\Phi(-1)}=\frac{0.84134-0.5}{\Phi(1)-(1-\Phi(1))}=\frac{0.34134}{\Phi(1)-1+\Phi(1)}=\frac{0.34134}{2\Phi(1)-1}=\frac{0.34134}{2\cdot 0.84134-1}=\frac{0.34134}{0.68268}=0.5$.

Commenti.
D1)-D2) Sia $E_i=\{$successo solo al lancio i-simo nei tre primi 3 lanci$\}$ per $i\in\{1,2,3\}$. Abbiamo visto che $P(E_3)=\frac{25}{216}$ nella domanda D1) e analogamente si ha $P(E_1)=P(E_2)=\frac{25}{216}$. Inoltre gli eventi E_1,E_2,E_3 sono disgiunti a due a due e quindi $P(E_1\cup E_2\cup E_3)=\frac{25+25+25}{216}=\frac{75}{216}$. Del resto $E_1\cup E_2\cup E_3=\{X=1\}$ e ritroviamo $P(X=1)=\frac{75}{216}$ come visto nella domanda D2).
D3) Si poteva procedere anche in questo modo: $P(X\geq 1)=p_X(1)+p_X(2)+p_X(3)=\frac{75+15+1}{216}=\frac{91}{216}$.
D4)-D5) Abbiamo visto che $P(N_1\cap B_2)=\frac{3}{10}$ nella domanda D4) e analogamente $P(B_1\cap N_2)=P(N_2|B_1)P(B_1)=\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{5}=\frac{3}{10}$. Inoltre $(N_1\cap B_2)\cup(B_1\cap N_2)=\emptyset$ e quindi $P((N_1\cap B_2)\cup(B_1\cap N_2))=\frac{3}{10}+\frac{3}{10}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$. Del resto l'evento $(B_1\cap N_2)\cup(N_1\cap B_2)=\{X=1\}$ e ritroviamo $P(X=1)=\frac{3}{5}$ come visto nella domanda D5).
D6) Si poteva procedere anche in questo modo: $P(X\geq 1)=p_X(1)+p_X(2)=\frac{6+1}{10}=\frac{7}{10}$.
D12) Nel procedimento presentato si vede che $P(X\geq 0|-1<X<1)=\frac{P(\{0\leq X<1\})}{P(-1<X<1)}$. Nella frazione il denominatore è il doppio del numeratore perché il grafico della densità di X è simmetrico rispetto all'origine; dunque il valore finale 0.5 poteva essere ottenuto subito, addirittura senza l'uso delle tavole!