Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)
Anno accademico: `2012-2013`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Simulazione 2

Esercizio 1. Un'urna ha 5 palline numerate da 1 a 5. Si estraggono a caso 3 palline, una alla volta e con reinserimento.
`D1`) Calcolare la probabilità di estrarre al massimo un numero dispari.
`D2`) Calcolare la probabilità dell'evento "i numeri estratti sono tutti pari oppure tutti dispari".

Esercizio 2. Si lancia ripetutamente una moneta equa e sia X la variabile aleatoria che conta il numeri di lanci necessari per avere per la prima volta testa. Poi si mettono 2^X palline numerate da 1 a 2^X in un'urna inizialmente vuota. Infine si estrae una pallina a caso dall'urna. Indichiamo con E l'evento "estrarre la pallina *numero 1*".
`D3`) Calcolare $P(E)$.
`D4`) Calcolare $P(X = 1|E)$.

Esercizio 3. Siano dati $p_1, p_2 \in (0, 1)$. Definiamo la seguente densità congiunta: si ha $p_{X_1,X_2}(k, 0) = \frac{1}{2}(1 - p_1)^k p_1$ per $k \geq 0$ intero; $p_{X_1,X_2}(k, k) = \frac{1}{2}(1 - p_2)^{k-1} p_2$ per $k \geq 1$ intero.
`D5`) Calcolare $P(X_1 = X_2)$.
`D6`) Trovare la densità marginale di X_2.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria esponenziale di parametro $\lambda > 0$.
`D7`) Trovare la funzione di distribuzione di $Y = \arctan X$.
`D8`) Trovare la funzione di distribuzione di $Z = \frac{1}{X+1}$.

Esercizio 5. Sia $N_t = \sum_{n\geq 1} 1_{T_n \leq t}$ (per $t \geq 0$) un processo di Poisson con intensità di $\lambda = \frac{7}{5}$.
`D9`) Calcolare $P(N_{10} \leq 1)$.
`D10`) Calcolare $P(T_3 \geq \frac{5}{7})$.

Esercizio 6. Sia X una variabile aleatoria normale con media $\mu = 2$ e varianza $\sigma^2 = 81$.
`D11`) Calcolare $P(|X - 2| \leq 9)$.
`D12`) Trovare la distribuzione di $X_1 - X_2$ nel caso in cui X_1 e X_2 siano due variabili aleatorie indipendenti e con la stessa distribuzione di X.

Esercizio 7 (*solo per ST-Materiali*). Consideriamo una catena di Markov omogenea $\{X_n : n \geq 0\}$ con spazio degli stati $E = \{1, 2, 3\}$ e matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 2/5 & 0 & 3/5 \\ 2/7 & 3/7 & 2/7 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

`D13`) Consideriamo una distribuzione iniziale $(P(X_0 = 1), P(X_0 = 2), P(X_0 = 3)) = (p, 0, 1-p)$ per qualche $p \in [0, 1]$. Dire per quale valore di p si ha $(P(X_1 = 1), P(X_1 = 2), P(X_1 = 3)) = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$.
`D14`) Dato $k \geq 1$ intero, dire per quali valori di n si ha $P(X_n = 2|X_0 = 2) \leq \left(\frac{3}{7}\right)^k$.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
Sia X la variabile aleatoria che indica il numero di palline con numero dispari estratte. Allora si ha $p_X(k) = \binom{3}{k}(\frac{3}{5})^k(1-\frac{3}{5})^{3-k}$, da cui segue $p_X(0) = \frac{8}{125}$, $p_X(1) = \frac{36}{125}$, $p_X(2) = \frac{54}{125}$ e $p_X(3) = \frac{27}{125}$.
`D1`) La probabilità richiesta è $P(X \leq 1) = p_X(0) + p_X(1) = \frac{8+36}{125} = \frac{44}{125}$.
`D2`) La probabilità richiesta è $P(\{X = 0\} \cup \{X = 3\}) = p_X(0) + p_X(3) = \frac{8+27}{125} = \frac{35}{125}$.

Esercizio 2.
`D3`) Per la formula delle probabilità totali si ha $P(E) = \sum_{k\geq 1} P(E|X = k)P(X = k) = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{2^k}(1-\frac{1}{2})^{k-1}\frac{1}{2} = \sum_{k\geq 1}(\frac{1}{4})^k = \frac{1/4}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}$.
`D4`) Per la formula di Bayes (e per il valore di $P(E)$ calcolato prima) si ha $P(X = 1|E) = \frac{P(E|X=1)P(X=1)}{P(E)} = \frac{\frac{1}{2^1}(1-\frac{1}{2})^{1-1}\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{1/4}{1/3} = \frac{3}{4}$.

Esercizio 3.
`D5`) Si ha $P(X_1 = X_2) = \sum_{k\geq 0} p_{X_1,X_2}(k,k) = \frac{p_1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k\geq 1}(1-p_2)^{k-1}p_2 = \frac{p_1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{p_1+1}{2}$.
`D6`) Si ha $p_{X_2}(0) = \sum_{k\geq 0} p_{X_1,X_2}(k,0) = \frac{1}{2}\sum_{k\geq 0}(1-p_2)^{k-1}p_2 = \frac{1}{2}$ e $p_{X_2}(k) = \frac{1}{2}(1-p_2)^{k-1}p_2$ per ogni $k \geq 1$ intero.

Esercizio 4.
`D7`) Si vede che $P(0 \leq \arctan X \leq \pi/2) = 1$, da cui $F_Y(y) = 0$ per $y \leq 0$ e $F_Y(y) = 1$ per $y \geq \pi/2$. Per $y \in (0, \frac{\pi}{2})$ si ha $F_Y(y) = P(\arctan X \leq y) = P(X \leq \tan y)$; in questo caso $\tan y > 0$ e, ricordando l'espressione di F_X, possiamo concludere che $F_Y(y) = 1 - e^{-\lambda \tan y}$.
`D8`) Si vede che $P(0 \leq \frac{1}{X+1} \leq 1) = 1$, da cui $F_Z(z) = 0$ per $z \leq 0$ e $F_Z(z) = 1$ per $z \geq 1$. Per $z \in (0,1)$ si ha $F_Z(z) = P(\frac{1}{X+1} \leq z) = P(X+1 \geq \frac{1}{z}) = P(X \geq \frac{1}{z} - 1)$; in questo caso $\frac{1}{z} - 1 > 0$ e, ricordando l'espressione di F_X, possiamo concludere che $F_Z(z) = e^{-\lambda(\frac{1}{z}-1)}$.

Esercizio 5.
`D9`) Si ha $P(N_{10} \leq 1) = P(N_{10} = 0) + P(N_{10} = 1) = \sum_{k=0}^{1} \frac{(\frac{7}{5}\cdot 10)^k}{k!}e^{-\frac{7}{5}\cdot 10} = (1 + 14)e^{-14} = 15e^{-14}$.
`D10`) Si ha $P(T_3 \geq \frac{5}{7}) = \sum_{k=0}^{3-1} \frac{(\frac{7}{5}\cdot\frac{5}{7})^k}{k!}e^{-\frac{7}{5}\cdot\frac{5}{7}} = (1 + 1 + \frac{1}{2})e^{-1} = \frac{5}{2}e^{-1}$.

Esercizio 6.
`D11`) Si ha $P(|X - 2| \leq 9) = P(-\frac{9}{\sqrt{81}} \leq \frac{X-2}{\sqrt{81}} \leq \frac{9}{\sqrt{81}}) = \Phi(1) - \Phi(-1) = \Phi(1) - (1 - \Phi(1)) = 2\Phi(1) - 1 = 2 \cdot 0.84134 - 1 = 0.68268$.
`D12`) In generale $a_1X_1 + a_2X_2$ è Normale di media $a_1\mathbb{E}[X_1] + a_2\mathbb{E}[X_2]$ e varianza $a_1^2\mathrm{Var}[X_1] + a_2^2\mathrm{Var}[X_2]$. Nel nostro caso si ha $a_1 = 1$, $a_2 = -1$, $\mathbb{E}[X_1] = \mathbb{E}[X_2] = 2$ e $\mathrm{Var}[X_1] = \mathrm{Var}[X_2] = 81$; quindi $X_1 - X_2$ ha distribuzione Normale di media $2 - 2 = 0$ e varianza $81 + 81 = 162$.

Esercizio 7.
`D13`) Dobbiamo considerare la relazione matriciale

$$(p, 0, 1-p)\begin{pmatrix} 2/5 & 0 & 3/5 \\ 2/7 & 3/7 & 2/7 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$$

che fornisce il seguente sistema:

$$\begin{cases} \frac{2}{5}p + \frac{3}{4}(1-p) = \frac{1}{2} \\ 0 = 0 \\ \frac{3}{5}p + \frac{1}{4}(1-p) = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Il valore richiesto è $p = \frac{5}{7}$ perché è soluzione della prima e della terza equazione.
D14) Osserviamo che se la catena lascia lo stato 2 non ci torna più; quindi $P(X_n = 2|X_0 = 2) = P(\cap_{j=1}^{n}\{X_j = 2\}|X_0 = 2) = \left(\frac{3}{7}\right)^n$. Allora vogliamo trovare i valori di n per cui si ha $\left(\frac{3}{7}\right)^n \leq \left(\frac{3}{7}\right)^k$; tale disequazione è soddisfatta per $n \geq k$ (perché $0 < \frac{3}{7} < 1$).

Commenti.
La somma dei valori di ciascuna densità discreta che appare è 1 in accordo con la teoria.
D1) In altro modo la probabilità richiesta è $1 - (p_X(2) + p_X(3)) = 1 - \frac{54+27}{125} = \frac{125-81}{125} = \frac{44}{125}$.
D14) Il fatto che si ottiene $n \geq k$ segue anche dal fatto che $\left(\frac{3}{7}\right)^n$ decresce rispetto ad n e tende a zero; quindi non sorprende che $\left(\frac{3}{7}\right)^n$ diventi minore di $\left(\frac{3}{7}\right)^k$ per n che "va da un certo punto in poi".