Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)
Anno accademico: `2009-2010`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Appello dell'8 Giugno 2010

Esercizio 1. Un'urna contiene 2 palline bianche, 3 rosse e 4 nere. Si estraggono a caso 3 palline, una alla volta e senza reinserimento.
`D1`) Calcolare la probabilità di estrarre la sequenza di colori (bianco,nero,nero).
`D2`) Calcolare la probabilità di estrarre complessivamente 1 pallina bianca e 2 nere.

Esercizio 2. Abbiamo due urne: la prima ha 2 palline con i numeri 1 e 3, la seconda ha 2 palline bianche. Si estrae a caso una pallina dalla prima urna e sia X la variabile aleatoria che indica il numero estratto. A questo punto vengono messe X palline nere nella seconda urna e poi si estrae una pallina a caso dalla seconda urna.
`D3`) Calcolare la probabilità di estrarre una pallina bianca dalla seconda urna.
`D4`) Calcolare la probabilità di aver estratto il numero 3 dalla prima urna sapendo che è stata estratta una pallina bianca dalla seconda urna.

Esercizio 3. Si consideri la seguente densità congiunta: $p_{(X_1,X_2)}(x_1,x_2) = (\frac{1}{4})^{x_2}$ per $(x_1,x_2) \in \{1,2,3\} \times \{1,2,3,4,\ldots\}$.
`D5`) Verificare che le variabili aleatorie X_1 e X_2 sono indipendenti.
`D6`) Calcolare $P(X_1 + X_2 = 4)$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con distribuzione uniforme su $(1,27)$.
`D7`) Trovare la densità continua di $Y = \sqrt[3]{X}$.
`D8`) Calcolare $\mathbb{E}[Y]$.

Esercizio 5. Sia $N_t = \sum_{n\geq 1} 1_{T_n \leq t}$ (per $t \geq 0$) un processo di Poisson con intensità di $\lambda = 2$.
`D9`) Calcolare $P(N_3 \geq 2)$.
`D10`) Calcolare $P([T_1] = 0)$ dove $[x]$ è la *parte intera* di x.

Esercizio 6. Sia X una variabile aleatoria normale con media $\mu = 2$ e varianza $\sigma^2 = 4$.
`D11`) Calcolare $P(X \geq 3.5)$.
`D12`) Calcolare $P(|X - 2| < 0.1)$.

Esercizio 7 (*solo per ST-Materiali*). Consideriamo una catena di Markov omogenea $\{X_n : n \geq 0\}$ con spazio degli stati $\{1,2\}$ e matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

`D13`) Calcolare $P(X_1 = j)$ per $j \in \{1,2\}$ nel caso in cui $P(X_0 = 1) = \frac{1}{6}$ e $P(X_0 = 2) = \frac{5}{6}$.
`D14`) Calcolare $P(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 2 | X_0 = 2)$.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
D1) Sia B_k l'evento "k-sima estratta bianca" e N_k l'evento "k-sima estratta nera". Allora $P(B_1 \cap N_2 \cap N_3) = P(B_1)P(N_2|B_1)P(N_3|B_1 \cap N_2) = \frac{2}{9}\frac{4}{8}\frac{3}{7} = \frac{1}{21}$.
D2) Se consideriamo l'estensione della ipergeometrica con 3 tipi si ha $P(1B, 2N) = \frac{\binom{2}{1}\binom{3}{0}\binom{4}{2}}{\binom{9}{3}} = \frac{2 \cdot 1 \cdot 6}{84} = \frac{1}{7}$.

Esercizio 2. Sia B l'evento "estratta bianca dalla seconda urna".
D3) Per la formula delle probabilità totali si ha $P(B) = P(B|X=1)P(X=1)+P(B|X=3)P(X=3) = \frac{2}{3}\frac{1}{2} + \frac{2}{5}\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{5+3}{15} = \frac{8}{15}$.
D4) Per la formula di Bayes (e la formula delle probabilità totali per $P(B)$ a denominatore) si ha $P(X=3|B) = \frac{P(B|X=3)P(X=3)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{5}\frac{1}{2}}{\frac{8}{15}} = \frac{1}{5}\frac{15}{8} = \frac{3}{8}$.

Esercizio 3.
D5) Per $x_1 \in \{1,2,3\}$ si ha $p_{X_1}(x_1) = \sum_{x_2=1}^{\infty}(\frac{1}{4})^{x_2} = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$; per $x_2 \geq 1$ intero si ha $p_{X_2}(x_2) = \sum_{x_1=1}^{3}(\frac{1}{4})^{x_2} = 3(\frac{1}{4})^{x_2}$. Quindi X_1 e X_2 sono indipendenti perché si ha $p_{X_1}(x_1)p_{X_2}(x_2) = \frac{1}{3}3(\frac{1}{4})^{x_2} = (\frac{1}{4})^{x_2} = p_{(X_1,X_2)}(x_1,x_2)$ per $(x_1,x_2) \in \{1,2,3\} \times \{1,2,3,4,\ldots\}$.
D6) Si ha $P(X_1+X_2=4) = p_{(X_1,X_2)}(1,3) + p_{(X_1,X_2)}(2,2) + p_{(X_1,X_2)}(3,1) = (\frac{1}{4})^3 + (\frac{1}{4})^2 + (\frac{1}{4})^1 = \frac{1}{64} + \frac{1}{16} + \frac{1}{4} = \frac{1+4+16}{64} = \frac{21}{64}$.

Esercizio 4.
D7) Si ha $P(\sqrt[3]{1} < Y < \sqrt[3]{27}) = 1$, da cui segue $F_Y(y) = 0$ per $y \leq \sqrt[3]{1} = 1$ e $F_Y(y) = 1$ per $y \geq \sqrt[3]{27} = 3$. Per $1 < y < 3$ si ha $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\sqrt[3]{X} \leq y) = P(X \leq y^3) = \int_1^{y^3} \frac{1}{27-1}dt = [\frac{t}{27-1}]_{t=1}^{t=y^3} = \frac{y^3-1}{26}$. Quindi la densità è $f_Y(y) = \frac{3}{26}y^2 1_{(1,3)}(y)$.
D8) Per la densità ottenuta nella domanda precedente, si ha $\mathbb{E}[Y] = \int_1^3 y\frac{3}{26}y^2dy = \frac{3}{26}[\frac{y^4}{4}]_{y=1}^{y=3} = \frac{3}{26}\frac{3^4-1^4}{4} = \frac{3}{26}\frac{81-1}{4} = \frac{60}{26} = \frac{30}{13}$.

Esercizio 5.
D9) Si ha $P(N_3 \geq 2) = 1 - P(N_3 < 2) = 1 - \sum_{k=0}^{1}\frac{(2\cdot 3)^k}{k!}e^{-2\cdot 3} = 1-(1+6)e^{-6} = 1-7e^{-6}$.
D10) Si ha $P([T_1]=0) = P(0 \leq T_1 < 1) = 1 - e^{-2\cdot 1} = 1-e^{-2}$.

Esercizio 6.
D11) $P(X \geq 3.5) = P(\frac{X-2}{\sqrt{4}} \geq \frac{3.5-2}{\sqrt{4}}) = 1 - \Phi(\frac{3.5-2}{\sqrt{4}}) = 1 - \Phi(0.75) = 1 - 0.77337 = 0.22663$.
D12) $P(|X-2| < 0.1) = P(-0.1 < X-2 < 0.1) = P(\frac{-0.1}{\sqrt{4}} < \frac{X-2}{\sqrt{4}} < \frac{0.1}{\sqrt{4}}) = \Phi(\frac{0.1}{\sqrt{4}}) - \Phi(-\frac{0.1}{\sqrt{4}}) = \Phi(0.05) - \Phi(-0.05) = \Phi(0.05) - (1-\Phi(0.05)) = 2\Phi(0.05) - 1 = 2 \cdot 0.51994 - 1 = 0.03988$.

Esercizio 7.
D13) I valori richiesti sono dati dalla seguente relazione matriciale:

$$\begin{aligned}(P(X_1=1), P(X_1=2)) &= \left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right)\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix} = \left(\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{4} + \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4} + \frac{5}{6}\cdot\frac{2}{3}\right) \\ &= \left(\frac{1}{8} + \frac{5}{18}, \frac{1}{24} + \frac{5}{9}\right) = \left(\frac{9+20}{72}, \frac{3+40}{72}\right) = \left(\frac{29}{72}, \frac{43}{72}\right).\end{aligned}$$

D14) Si ha $P(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 2|X_0 = 2) = P(X_1 = 1|X_0 = 2)P(X_2 = 1|X_1 = 1)P(X_3 = 2|X_2 = 1) = \frac{1}{3}\frac{3}{4}\frac{1}{4} = \frac{1}{16}$.

Commenti.
La somma dei valori di ciascuna densità discreta che appare è 1 in accordo con la teoria.
`D1-D2`) Sia E l'evento di cui è richiesta la probabilità nella seconda domanda. Allora si ha

$$E = (B_1 \cap N_2 \cap N_3) \cup (N_1 \cap B_2 \cap N_3) \cup (N_1 \cap N_2 \cap B_3)$$

che è un'unione di tre eventi disgiunti a due a due; inoltre, in maniera analoga a quanto fatto nella prima domanda, si ha $P(N_1 \cap B_2 \cap N_3) = \frac{4}{9}\frac{2}{8}\frac{3}{7} = \frac{1}{21}$ e $P(N_1 \cap N_2 \cap B_3) = \frac{4}{9}\frac{3}{8}\frac{2}{7} = \frac{1}{21}$. Quindi, in altro modo, si ha $P(E) = \frac{1+1+1}{21} = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$.
`D6`) In generale possiamo calcolare la densità di $Z = X_1 + X_2$ come segue: $p_Z(2) = p_{(X_1,X_2)}(1,1) = \left(\frac{1}{4}\right)^1 = \frac{1}{4}$; $p_Z(3) = p_{(X_1,X_2)}(1,2) + p_{(X_1,X_2)}(2,1) = \left(\frac{1}{4}\right)^1 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{4+1}{16} = \frac{5}{16}$; per $k \geq 4$ intero, $p_Z(k) = p_{(X_1,X_2)}(1,k-1) + p_{(X_1,X_2)}(2,k-2) + p_{(X_1,X_2)}(3,k-3) = \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} + \left(\frac{1}{4}\right)^{k-2} + \left(\frac{1}{4}\right)^{k-3}$, da cui segue $p_Z(k) = \left(\frac{1}{4}\right)^{k-3}\left(\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} + 1\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^{k-3}\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{4} + 1\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^{k-3}\frac{1+4+16}{16} = \left(\frac{1}{4}\right)^{k-3}\frac{21}{16}$. In particolare, come già visto, si ha $p_Z(4) = \frac{1}{4}\frac{21}{16} = \frac{21}{64}$.
`D8`) In altro modo $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[\sqrt[3]{X}] = \int_1^{27} \sqrt[3]{x}\frac{1}{27-1}dx = \frac{1}{26}[\frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}]_{x=1}^{x=27} = \frac{1}{26}\frac{(27)^{\frac{4}{3}}-1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{26}\frac{81-1}{4} = \frac{60}{26} = \frac{30}{13}$.