Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità (ed insegnamenti mutuati)
Anno accademico: `2013-2014`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Simulazione 2

Esercizio 1. Si ha un mazzo di 40 carte numerate da 1 a 40. Si estrae ripetutamente una carta alla volta dal mazzo con reinserimento.
`D1`) Calcolare la probabilità di estrarre il numero 37 esattamente una volta in 3 estrazioni.
`D2`) Calcolare la probabilità di estrarre per la prima volta un numero pari nelle prime 5 estrazioni.

Esercizio 2. Un'urna ha 1 pallina bianca e 1 pallina nera. Si lancia una moneta e sia p la probabilità di ottenere testa nel lancio di moneta. Se esce testa si mette una pallina bianca nell'urna; se esce croce si mette una pallina nera nell'urna. Poi si estrae a caso una pallina dall'urna.
`D3`) Calcolare la probabilità di estrarre una pallina bianca.
`D4`) Calcolare la probabilità di aver ottenuto croce nel lancio di moneta sapendo di aver estratto una pallina bianca.

Esercizio 3. Siano dati $\lambda > 0$ e $p \in (0,1)$. Sia X_1 una variabile aleatoria con densità discreta $p_{X_1}(x_1) = (1-p)^k p$ per ogni $k \geq 0$ intero, e X_2 una variabile aleatoria con densità discreta $p_{X_2}(x_2) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ per ogni $k \geq 0$ intero. Supponiamo che X_1 e X_2 siano indipendenti.
`D5`) Calcolare $P(X_1 = X_2)$.
`D6`) Calcolare $P(X_1 + X_2 \leq 1)$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con densità continua $f_X(t) = \frac{e^t}{e^{5/2}-1}1_{(0,5/2)}(t)$.
`D7`) Trovare la densità continua di $Y = e^{2X}$.
`D8`) Trovare la densità discreta di $Z = [X]$ dove $[x] = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$ è la *parte intera* di x.

Esercizio 5.
`D9`) Sia $N_t = \sum_{n\geq 1} 1_{T_n \leq t}$ (per $t \geq 0$) un processo di Poisson con intensità di $\lambda = 6$. Calcolare $P(N_1 = k|N_1 \leq 2)$, per $k \in \{0,1,2\}$.
`D10`) Trovare la distribuzione di $5X_1 - 2X_2$ nel caso in cui X_1 e X_2 sono variabili aleatorie Normali standard indipendenti.

Esercizio 6. Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. (indipendenti e identicamente distribuite).
`D11`) Dire per quale valore di m si ha

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - m\right| > \varepsilon\right) = 0 \text{ per ogni } \varepsilon > 0,$$

nel caso in cui le variabili aleatorie $\{X_n : n \geq 1\}$ abbiano densità discreta $p_X(k) = \frac{1}{6}$ per $k \in \{1,2,3,4,5,6\}$.
`D12`) Calcolare, usando l'approssimazione Normale, $P(X_1 + \cdots + X_{100} > 404)$ nel caso in cui le variabili aleatorie $\{X_n : n \geq 1\}$ abbiano densità continua $f_X(t) = \frac{1}{\Gamma(4)}t^{4-1}e^{-t}1_{(0,\infty)}(t)$.

Esercizio 7 (*solo per Lauree Magistrali*). Consideriamo una catena di Markov omogenea $\{X_n : n \geq 0\}$ con spazio degli stati $E = \{1,2,3\}$ e matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & b & 1-b \end{pmatrix}$$

dove $b \in (0,1)$ è una costante.
`D13`) Dire per quale valore di b si ha $\lim_{n\to\infty} P(X_n = 2|X_0 = i) = \frac{1}{3}$ per ogni $i \in E$.
`D14`) Dire per quale valori di n si ha $P(\cap_{k=1}^n \{X_k = 1\}|X_0 = 1) \leq \frac{1}{81}$.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
D1) Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di volte che si estrae il 37 in 3 estrazioni. Allora la probabilità richiesta è $p_X(1) = \binom{3}{1}(\frac{1}{40})^1(1-\frac{1}{40})^{3-1} = \frac{4563}{64000}$.
D2) Sia Y la variabile aleatoria che conta il numero di estrazioni necessarie per avere per la prima volta un numero pari. Allora si la probabilità richiesta è $P(Y \leq 5) = \sum_{k=1}^{5}(1-\frac{20}{40})^{k-1}\frac{20}{40} = \sum_{k=1}^{5}(1-\frac{1}{2})^{k-1}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}) = \frac{16+8+4+2+1}{32} = \frac{31}{32}$.

Esercizio 2. Sia B l'evento "si estrae pallina bianca", e sia T l'evento "esce testa".
D3) Per la formula delle probabilità totali si ha $P(B) = P(B|T)P(T)+P(B|T^c)P(T^c) = \frac{2}{3}p+\frac{1}{3}(1-p) = \frac{p+1}{3}$.
D4) Per la formula di Bayes, e tenendo conto del valore di $P(B)$ calcolato prima, si ha $P(T^c|B) = \frac{P(B|T^c)P(T^c)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{3}(1-p)}{\frac{p+1}{3}} = \frac{1-p}{1+p}$.

Esercizio 3. Per ipotesi di indipendenza la densità congiunta è data dal prodotto delle densità marginali.
D5) Si ha $P(X_1 = X_2) = \sum_{k=0}^{\infty} P(\{X_1 = k\} \cap \{X_2 = k\}) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{X_1}(k)p_{X_2}(k) = \sum_{k=0}^{\infty}(1-p)^k p\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}p\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda(1-p))^k}{k!} = e^{-\lambda}pe^{\lambda(1-p)} = pe^{-\lambda p}$.
D6) Si ha $P(X_1 + X_2 \leq 1) = p_{X_1}(0)p_{X_2}(0) + p_{X_1}(1)p_{X_2}(0) + p_{X_1}(0)p_{X_2}(1) = pe^{-\lambda} + (1-p)pe^{-\lambda} + p\lambda e^{-\lambda}$.

Esercizio 4.
D7) Si vede che $P(1 \leq e^{2X} \leq e^5) = 1$, da cui $F_Y(y) = 0$ per $y \leq 1$ e $F_Y(y) = 1$ per $y \geq e^5$. Per $y \in (1, e^5)$ si ha $F_Y(y) = P(e^{2X} \leq y) = P(X \leq \frac{1}{2}\log y) = \int_0^{\frac{1}{2}\log y} \frac{e^t}{e^{5/2}-1}dt = \frac{[e^t]_{t=0}^{t=\frac{1}{2}\log y}}{e^{5/2}-1} = \frac{\sqrt{y}-1}{e^{5/2}-1}$. Quindi la densità continua è $f_Z(z) = \frac{1}{2(e^{5/2}-1)\sqrt{y}}1_{(1,e^5)}(t)$.
D8) Osserviamo che $2 < \frac{5}{2} < 3$. Allora si ha $p_Z(0) = \int_0^1 \frac{e^t}{e^{5/2}-1}dt = \frac{e-1}{e^{5/2}-1}$, $p_Z(1) = \int_1^2 \frac{e^t}{e^{5/2}-1}dt = \frac{e^2-e}{e^{5/2}-1}$ e $p_Z(2) = \int_2^{5/2} \frac{e^t}{e^{5/2}-1}dt = \frac{e^{5/2}-e^2}{e^{5/2}-1}$.

Esercizio 5.
D9) Per $k \in \{0,1,2\}$ si ha $P(N_1 = k|N_1 \leq 2) = \frac{P(\{N_1=k\}\cap\{N_1\leq 2\})}{P(N_1\leq 2)} = \frac{P(N_1=k)}{P(N_1\leq 2)} = \frac{\frac{6^k}{k!}e^{-6}}{\sum_{j=0}^{2}\frac{6^j}{j!}e^{-6}}$, da cui segue $P(N_1 = 0|N_1 \leq 2) = \frac{1}{25}$, $P(N_1 = 1|N_1 \leq 2) = \frac{6}{25}$ e $P(N_1 = 2|N_1 \leq 2) = \frac{18}{25}$.
D10) Ricordando le proprietà delle combinazioni lineari di variabili aleatorie Normali indipendenti, $5X_1-2X_2$ ha distribuzione Normale con media $5 \cdot 0 - 2 \cdot 0 = 0$ e varianza $5^2 \cdot 1 + (-2)^2 \cdot 1 = 29$.

Esercizio 6.
D11) Per la legge dei grandi numeri si ha $m = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$.
D12) Le variabili aleatorie $\{X_n : n \geq 1\}$ hanno distribuzione Gamma di parametri $\alpha = 4$ e $\beta = 1$, e quindi media $\frac{\alpha}{\beta} = 4$ e varianza $\frac{\alpha}{\beta^2} = 4$. Quindi, se indichiamo con Z la standardizzata di $X_1 + \cdots + X_{100}$, si ha $\{X_1 + \cdots + X_{100} > 404\} = \{Z > \frac{404-400}{\sqrt{4}\sqrt{100}}\}$ e, per l'approssimazione normale, $P(X_1 + \cdots + X_{100} > 404) = 1 - \Phi(4/20) = 1 - \Phi(0.2) = 1 - 0.57926 = 0.42704$.

Esercizio 7.
D13) Possiamo applicare il Teorema di Markov perché la catena è regolare. Il limite delle probabilità di transizione è dato dalla distribuzione invariante $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$, e si deve trovare il valore di b per cui $\pi_2 = \frac{1}{3}$. Consideriamo la relazione matriciale

$$(\pi_1, \pi_2, \pi_3)\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & b & 1-b \end{pmatrix} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3),$$

che fornisce il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \frac{\pi_1}{3} + \frac{\pi_2}{2} = \pi_1 \\ \frac{\pi_1}{3} + \frac{\pi_2}{2} + \pi_3 b = \pi_2 \\ \frac{\pi_1}{3} + \pi_3(1-b) = \pi_3. \end{cases}$$

Allora si ottiene $\pi_2 = \frac{4}{3}\pi_1$ e $\pi_3 = \frac{\pi_1}{3b}$ e, imponendo la condizione $\pi_1+\pi_2+\pi_3 = 1$, si ottiene $\pi_1(1+\frac{4}{3}+\frac{1}{3b}) = 1$;

quindi $(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = (\frac{3b}{7b+1}, \frac{4b}{7b+1}, \frac{1}{7b+1})$. In conclusione il valore di b richiesto deve soddisfare la condizione $\frac{4b}{7b+1} = \frac{1}{3}$, da cui segue $12b = 7b + 1$, e quindi $b = \frac{1}{5}$.
`D14`) I valori di n richiesti sono quelli per cui si ha $(\frac{1}{3})^n \leq \frac{1}{81}$; quindi, poiché $\frac{1}{81} = (\frac{1}{3})^4$, abbiamo $n \geq 4$.

Commenti.
La somma dei valori di ciascuna densità discreta che appare è 1 in accordo con la teoria.
`D2`) In altro modo, $P(Y \leq 5) = 1 - P(Y \geq 6) = 1 - \sum_{k=6}^{\infty}(1 - \frac{1}{2})^{k-1}\frac{1}{2} = 1 - \frac{(1/2)^6}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1/64}{1/2} = 1 - \frac{1}{32} = \frac{31}{32}$.
`D13`) Si potrebbe considerare $b \in (0, 1]$ anziché $b \in (0, 1)$. Al contrario, per $b = 0$, il Teorema di Markov non è applicabile perché lo stato 3 è assorbente, e quindi la catena non è regolare; inoltre gli stati 1 e 2 sono transitori e quindi l'unica distribuzione invariante è $(0, 0, 1)$ (si osservi dunque che la formula $(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = (\frac{3b}{7b+1}, \frac{4b}{7b+1}, \frac{1}{7b+1})$ continua a valere anche nel caso $b = 0$).