Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità (ed insegnamenti mutuati)
Anno accademico: `2013-2014`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Appello del 16 Settembre 2014

Esercizio 1. Un'urna contiene 10 palline numerate da 1 a 10. Si estraggono a caso 3 palline in blocco.
`D1`) Trovare la densità discreta della variabile aleatoria X che conta il numero di palline con numero dispari estratte.
`D2`) Supponiamo di ripetere il procedimento più volte e sia Y la variabile aleatoria che conta il numero di estrazioni (di 3 palline in blocco) necessarie per avere per la prima volta 3 palline con un numero pari. Calcolare $P(Y \in \{2, 4, 6, \cdots\})$, cioè la probabilità che il valore assunto da Y sia un numero pari.

Esercizio 2. Si lancia un dado equo. Se esce un numero minore di 3, si lancia una moneta equa; se esce un numero maggiore o uguale a 3, si lancia una moneta truccata la cui probabilità di ottenere testa è $\frac{3}{8}$.
`D3`) Calcolare la probabilità di ottenere testa.
`D4`) Calcolare la probabilità di aver lanciato la moneta equa sapendo di aver ottenuto testa nel lancio di moneta.

Esercizio 3. Consideriamo la seguente densità congiunta: $p_{X_1,X_2}(0,0) = p_{X_1,X_2}(0,1) = p_{X_1,X_2}(0,2) = p_{X_1,X_2}(1,0) = p_{X_1,X_2}(1,1) = p_{X_1,X_2}(1,2) = p_{X_1,X_2}(2,0) = p_{X_1,X_2}(2,2) = \frac{1}{11}$ e $p_{X_1,X_2}(2,1) = \frac{3}{11}$.
`D5`) Calcolare $P(\{X_1 \geq 1\} \cap \{X_1 = X_2\})$.
`D6`) Calcolare $P(X_1 \geq 1 | X_1 = X_2)$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con densità continua $f_X(t) = 2(1-t)1_{(0,1)}(t)$.
`D7`) Trovare la funzione di distribuzione di $Y = -\log X$.
`D8`) Calcolare $\mathbb{E}[X^2]$.

Esercizio 5.
`D9`) Sia $N_t = \sum_{n \geq 1} 1_{T_n \leq t}$ (per $t \geq 0$) un processo di Poisson con intensità di $\lambda = \frac{1}{4}$. Calcolare $P(N_8 \leq 1)$.
`D10`) Sia X una variabile aleatoria Normale di media $\mu = -1$ e varianza $\sigma^2 = 16$. Calcolare $P(X \geq 0)$.

Esercizio 6. Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. (indipendenti e identicamente distribuite).
`D11`) Dire per quale valore di m si ha

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - m\right| > \varepsilon\right) = 0 \text{ per ogni } \varepsilon > 0,$$

nel caso in cui le variabili aleatorie $\{X_n : n \geq 1\}$ abbiano la seguente densità discreta: $p_X(0) = p_X(1) = p_X(2) = \frac{1}{10}$ e $p_X(3) = \frac{7}{10}$.
`D12`) Dire per quale valore di x si ha

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\frac{\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - 4}{1/\sqrt{n}} \leq x\right) = \Phi(3/8)$$

nel caso in cui le variabili aleatorie $\{X_n : n \geq 1\}$ abbiano distribuzione di Poisson di parametro $\lambda = 4$.

Esercizio 7 (*solo per Lauree Magistrali*). Consideriamo una catena di Markov omogenea $\{X_n : n \geq 0\}$ con spazio degli stati $E = \{1, 2, 3\}$ e matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 3/8 & 5/8 & 0 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

`D13`) Trovare la/e distribuzione/i invariante/i.
`D14`) Calcolare $P(X_1 \neq 3, X_2 \neq 3 | X_0 = 1)$.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
D1) La variabile aleatoria X ha distribuzione ipergeometrica; in dettaglio $p_X(k) = \frac{\binom{5}{k}\binom{5}{3-k}}{\binom{10}{3}}$ per $k \in \{0, 1, 2, 3\}$, da cui segue $p_X(0) = p_X(3) = \frac{1}{12}$ e $p_X(1) = p_X(2) = \frac{5}{12}$.
D2) La probabilità di estrarre 3 numeri pari (in una singola estrazione di 3 palline in blocco) è $p = p_X(0) = \frac{1}{12}$. Quindi la probabilità richiesta è $P(Y \in \{2, 4, 6, \cdots\}) = \sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{2k-1}p = \frac{p}{1-p}\frac{(1-p)^2}{1-(1-p)^2} = \frac{p(1-p)}{2p-p^2} = \frac{1-p}{2-p}$ e, sostituendo il valore di p, si ottiene $P(Y \in \{2, 4, 6, \cdots\}) = \frac{1-\frac{1}{12}}{2-\frac{1}{12}} = \frac{11/12}{(24-1)/12} = \frac{11}{23}$.

Esercizio 2. Sia T l'evento "esce testa" e E l'evento "si lancia la moneta equa".
D3) Per la formula delle probabilità totali si ha $P(T) = P(T|E)P(E)+P(T|E^c)P(E^c) = \frac{1}{2}\frac{2}{6} + \frac{3}{8}\frac{4}{6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{2+3}{12} = \frac{5}{12}$.
D4) Per la formula di Bayes, e tenendo conto del valore di $P(T)$ calcolato prima, si ha $P(E|T) = \frac{P(T|E)P(E)}{P(T)} = \frac{\frac{1}{2}\frac{2}{6}}{5/12} = \frac{2}{5}$.

Esercizio 3.
D5) Si ha $P(\{X_1 \geq 1\} \cap \{X_1 = X_2\}) = p_{X_1,X_2}(1, 1) + p_{X_1,X_2}(2, 2) = \frac{1+1}{11} = \frac{2}{11}$.
D6) Si ha $P(X_1 \geq 1|X_1 = X_2) = \frac{P(\{X_1\geq1\}\cap\{X_1=X_2\})}{P(X_1=X_2)} = \frac{\sum_{k=1}^{2} p_{X_1,X_2}(k,k)}{\sum_{k=0}^{2} p_{X_1,X_2}(k,k)} = \frac{(1+1)/11}{(1+1+1)/11} = \frac{2}{3}$.

Esercizio 4.
D7) Si vede che $P(-\log X \geq 0) = 1$, da cui $F_Y(y) = 0$ per $y \leq 0$. Per $y > 0$ si ha $F_Y(y) = P(-\log X \leq y) = P(\log X \geq -y) = P(X \geq e^{-y}) = \int_{e^{-y}}^{1} 2(1-t)dt = 2[-\frac{(1-t)^2}{2}]_{t=e^{-y}}^{t=1} = (1-e^{-y})^2$.
D8) Si ha $\mathbb{E}[X^2] = \int_0^1 t^2 2(1-t)dy = 2\int_0^1 t^2 - t^3 dt = 2[\frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4}]_{t=0}^{t=1} = 2(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) = 2 \cdot \frac{4-3}{12} = \frac{1}{6}$.

Esercizio 5.
D9) Si ha $P(N_8 \leq 1) = \sum_{k=0}^{1} \frac{(\frac{1}{4}\cdot 8)^k}{k!} e^{-\frac{1}{4}\cdot 8} = (1+2)e^{-2} = 3e^{-2}$.
D10) Detta Z_X la standardizzata di X si ha $P(X \geq 0) = P(Z_X \geq \frac{0-(-1)}{\sqrt{16}}) = P(Z_X \geq \frac{1}{4}) = 1 - \Phi(0.25) = 1 - 0.59871 = 0.40129$.

Esercizio 6.
D11) Per la legge dei grandi numeri si ha $m = 0 \cdot \frac{1}{10} + 1 \cdot \frac{1}{10} + 2 \cdot \frac{1}{10} + 3 \cdot \frac{7}{10} = \frac{0+1+2+21}{10} = \frac{24}{10} = \frac{12}{5}$.
D12) Le variabili aleatorie $\{X_n : n \geq 1\}$ hanno media $\lambda = 4$ e varianza $\lambda = 4$. Indichiamo con $Z_{\bar{X}_n}$ la standardizzata di $\bar{X}_n = \frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$. Allora $\left\{\frac{\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}-4}{1/\sqrt{n}} \leq x\right\} = \left\{Z_{\bar{X}_n} \leq \frac{x}{\sqrt{4}}\right\}$ e, per il teorema limite centrale, si deve avere $\frac{x}{\sqrt{4}} = \frac{3}{8}$, da cui segue $x = \frac{3}{4}$.

Esercizio 7.
D13) Indichiamo la distribuzione invariante con (p, q, r). Allora si deve avere la relazione matriciale

$$(p, q, r)\begin{pmatrix} 3/8 & 5/8 & 0 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (p, q, r),$$

che fornisce il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \frac{3}{8} \cdot p = p \\ \frac{5}{8} \cdot p + \frac{q}{4} = q \\ \frac{3}{4}q + r = r. \end{cases}$$

Quindi, tenendo conto anche che $p + q + r = 1$, $\pi = (0, 0, 1)$ è l'unica distribuzione stazionaria.
D14) Si ha $P(X_1 \neq 3, X_2 \neq 3|X_0 = 1) = p_{11}p_{11} + p_{11}p_{12} + p_{12}p_{21} + p_{12}p_{22} = \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8} + \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{8} + \frac{5}{8} \cdot 0 + \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{4} = \frac{9+15+10}{64} = \frac{34}{64} = \frac{17}{32}$.

Commenti.
La somma dei valori di ciascuna densità discreta che appare è 1 in accordo con la teoria.

`D5-D6`) In accordo con la teoria, il numeratore della probabilità condizionata in `D6`) coincide con la probabilità in `D5`).
`D13`) Lo stato 3 è ovviamente ricorrente perché è uno stato assorbente. Gli stati 1 e 2 sono transitori perché ciascuno di loro comunica con lo stato 3 ma non vale il viceversa. Quindi, se (p, q, r) è una distribuzione stazionaria, si deve avere necessariamente $p = q = 0$. Dunque potevamo dire che $\pi = (0, 0, 1)$ è l'unica distribuzione stazionaria senza fare calcoli ...
`D14`) Possiamo procedere in maniera alternativa. Prima di tutto si ha $P(X_1 \neq 3|X_0 = 1) = 1 - P(X_1 = 3|X_0 = 1) = 1 - p_{13} = 1$ e quindi $P(X_1 \neq 3, X_2 \neq 3|X_0 = 1) = P(X_2 \neq 3|X_0 = 1)$. Allora possiamo concludere che $P(X_2 \neq 3|X_0 = 1) = 1 - P(X_2 = 3|X_0 = 1) = 1 - \sum_{j=1}^{3} P(X_2 = 3, X_1 = j|X_0 = 1) = 1 - (p_{11}p_{13} + p_{12}p_{23} + p_{13}p_{33}) = 1 - (\frac{3}{8} \cdot 0 + \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{4} + 0 \cdot 1) = 1 - \frac{15}{32} = \frac{17}{32}$.
`D13-D14`) Si può dare una versione più generale dell'esercizio dove, per $a, b \in (0, 1)$, la matrice di transizione è

$$P = \begin{pmatrix} a & 1-a & 0 \\ 0 & b & 1-b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si vede che $(0, 0, 1)$ è ancora l'unica distribuzione stazionaria. Inoltre, ripercorrendo la soluzione fornita (che si recupera ponendo $a = \frac{3}{8}$ e $b = \frac{1}{4}$) si ha $P(X_1 \neq 3, X_2 \neq 3|X_0 = 1) = a^2 + a(1-a) + (1-a) \cdot 0 + (1-a)b = a+b-ab$. Se invece si considera la soluzione alternativa presentata nel commento sopra alla domanda `D14`), si ha $P(X_1 \neq 3, X_2 \neq 3|X_0 = 1) = 1-(a\cdot 0+(1-a)(1-b)+0\cdot 1) = 1-(1-a)(1-b) = 1-(1-a-b+ab) = a+b-ab$.