Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)
Anno accademico: `2010-2011`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Appello del 15 Settembre 2011

Esercizio 1. Un'urna ha 5 palline con i numeri 1,2,3,4,5. Si estraggono a caso 3 palline, una alla volta e *senza* reinserimento.
`D1`) Trovare la densità della variabile aleatoria X che conta il numero di volte che viene estratta una pallina con numero dispari.
`D2`) Calcolare la probabilità di estrarre la sequenza $(\text{pari}, \text{dispari}, \text{pari})$.

Esercizio 2. Si consideri il seguente gioco. Si lanciano una moneta non equa, e un dado equo. La probabilità che esca testa nel lancio di moneta è $\frac{3}{4}$. Se esce testa nel lancio di moneta, si vince il gioco ottenendo il *numero 1* nel lancio del dado; se esce croce nel lancio di moneta, si vince il gioco ottenendo ottenendo un *numero diverso da 1* nel lancio del dado.
`D3`) Calcolare la probabilità di vincere il gioco.
`D4`) Calcolare la probabilità di aver ottenuto testa nel lancio di moneta sapendo di aver vinto il gioco.

Esercizio 3. Consideriamo la seguente densità congiunta discreta: $p_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x_1+x_2+2}$ per $x_1, x_2 \geq 0$ interi.
`D5`) Calcolare $P(X_1 = X_2)$.
`D6`) Calcolare $P(X_1 + X_2 \leq 1)$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con densità continua $f_X(t) = 2t1_{(0,1)}(t)$.
`D7`) Calcolare $\mathrm{Var}[X]$.
`D8`) Trovare la densità continua di $Y = e^{X^2}$.

Esercizio 5. Sia $N_t = \sum_{n\geq 1} 1_{T_n \leq t}$ (per $t \geq 0$) un processo di Poisson con intensità di $\lambda = \frac{2}{3}$.
`D9`) Calcolare $P(N_3 \geq 2)$.
`D10`) Calcolare $P\left(T_1 > \frac{3}{2}\right)$.

Esercizio 6. Sia X una variabile aleatoria con distribuzione normale standard.
`D11`) Calcolare $P(X < -2)$.
`D12`) Calcolare $P(|X| \leq 1)$.

Esercizio 7 (*solo per ST-Materiali*). Consideriamo una catena di Markov omogenea $\{X_n : n \geq 0\}$ con spazio degli stati $E = \{1, 2, 3\}$ e matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

`D13`) Calcolare $P(X_1 = 1, X_2 = 2, X_3 = 3|X_0 = 1)$.
`D14`) Trovare le distribuzioni stazionarie.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
D1) La variabile aleatoria ha distribuzione ipergeometrica e si ha $p_X(k) = \frac{\binom{3}{k}\binom{2}{3-k}}{\binom{5}{3}}$ per $k \in \{0,1,2,3\}$: $p_X(0) = 0$, $p_X(1) = \frac{3}{10}$, $p_X(2) = \frac{6}{10}$, $p_X(3) = \frac{1}{10}$.
D2) La probabilità richiesta è $\frac{2}{5}\frac{3}{4}\frac{1}{3} = \frac{1}{10}$.

Esercizio 2. Sia V l'evento "vincere il gioco" e sia T l'evento "esce testa nel lancio di moneta".
D3) Per la formula delle probabilità totali si ha $P(V) = P(V|T)P(T) + P(V|T^c)P(T^c) = \frac{1}{6}\frac{3}{4} + \frac{5}{6}\frac{1}{4} = \frac{3+5}{24} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$.
D4) Per la formula di Bayes (e per il valore di $P(V)$ calcolato prima) si ha $P(T|V) = \frac{P(V|T)P(T)}{P(V)} = \frac{\frac{1}{6}\frac{3}{4}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{24} \cdot 3 = \frac{3}{8}$.

Esercizio 3.
D5) Si ha $P(X_1 = X_2) = \sum_{k\geq 0} p_{X_1,X_2}(k,k) = \sum_{k\geq 0}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+2} = \frac{1}{4}\sum_{k\geq 0}\left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}\frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$.
D6) Si ha $P(X_1 + X_2 \leq 1) = p_{X_1,X_2}(0,0) + p_{X_1,X_2}(0,1) + p_{X_1,X_2}(1,0) = (\frac{1}{2})^{0+0+2} + (\frac{1}{2})^{1+0+2} + (\frac{1}{2})^{0+1+2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{2+1+1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

Esercizio 4.
D7) Si ha $\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}^2[X] = \int_0^1 t^2 2t dt - (\int_0^1 t2tdt)^2 = 2\int_0^1 t^3 dt - (2\int_0^1 t^2 dt)^2 = 2[\frac{t^4}{4}]_{t=0}^{t=1} - (2[\frac{t^3}{3}]_{t=0}^{t=1})^2 = \frac{2}{4} - (\frac{2}{3})^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{9-8}{18} = \frac{1}{18}$.
D8) Si vede che $P(1 \leq e^{X^2} \leq e) = 1$, da cui $F_Y(y) = 0$ per $y \leq 1$ e $F_Y(y) = 1$ per $y \geq e$. Per $y \in (1,e)$ si ha $F_Y(y) = P(e^{X^2} \leq y) = P(X^2 \leq \log y) = P(X \leq \sqrt{\log y}) = \int_0^{\sqrt{\log y}} 2tdt = [t^2]_{x=0}^{x=\sqrt{\log y}} = \log y$. Quindi la densità è $f_Y(y) = \frac{1}{y}1_{(1,e)}(y)$.

Esercizio 5.
D9) Si ha $P(N_3 \geq 2) = 1 - (P(N_3 = 0) + P(N_3 = 1)) = 1 - \left(\frac{(\frac{2}{3}\cdot 3)^0}{0!}e^{-\frac{2}{3}\cdot 3} + \frac{(\frac{2}{3}\cdot 3)^1}{1!}e^{-\frac{2}{3}\cdot 3}\right) = 1 - 3e^{-2}$.
D10) Si ha $P\left(T_1 > \frac{3}{2}\right) = e^{-\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}} = e^{-1}$.

Esercizio 6.
D11) Si ha $P(X < -2) = \Phi(-2) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0.97725 = 0.02275$.
D12) Si ha $P(|X| \leq 1) = P(-1 \leq X \leq 1) = \Phi(1) - \Phi(-1) = \Phi(1) - (1 - \Phi(1)) = 2\Phi(1) - 1 = 2 \cdot 0.84134 - 1 = 0.68268$.

Esercizio 7.
D13) Si ha $P(X_1 = 1, X_2 = 2, X_3 = 3 | X_0 = 1) = p_{11}p_{12}p_{23} = \frac{1}{3}\frac{1}{3}\frac{1}{2} = \frac{1}{18}$.
D14) Se $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ è una distribuzione stazionaria, si deve avere

$$(\pi_1, \pi_2, \pi_3)\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3),$$

da cui segue il sistema

$$\begin{cases} \frac{\pi_1}{3} = \pi_1 \\ \frac{\pi_1}{3} + \frac{\pi_2}{2} = \pi_2 \\ \frac{\pi_1}{3} + \frac{\pi_2}{2} + \pi_3 = \pi_3. \end{cases}$$

La prima equazione ci dice che $\pi_1 = 0$. Poi sostituendo nella seconda si ottiene $\pi_2 = 0$. Infine, sostituendo nella terza, si ha $\pi_3 = \pi_3$; però, essendo $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$, si ha $\pi_3 = 1$. In conclusione

$\pi = (0, 0, 1)$ è l'unica distribuzione stazionaria.

Commenti.

La somma dei valori di ciascuna densità discreta che appare è 1 in accordo con la teoria.

`D1-D2`) L'evento $\{X = 1\}$ è costituito dalle tre seguenti sequenze: $(\text{dispari}, \text{pari}, \text{pari})$, $(\text{pari}, \text{dispari}, \text{pari})$, $(\text{pari}, \text{pari}, \text{dispari})$. Tutte hanno probabilità $\frac{1}{10}$, e la somma $\frac{1+1+1}{10} = \frac{3}{10}$ coincide con $P(X = 1)$ in accordo con la teoria.

`D14`) Lo stato 3 è ovviamente ricorrente perché è uno stato assorbente. Gli stati 1 e 2 sono transitori perché ciascuno di loro comunica con lo stato 3 ma non vale il viceversa. Quindi, se $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ è una distribuzione stazionaria, si deve avere necessariamente $\pi_1 = \pi_2 = 0$. Dunque potevamo dire che $\pi = (0, 0, 1)$ è l'unica distribuzione stazionaria senza fare calcoli ...