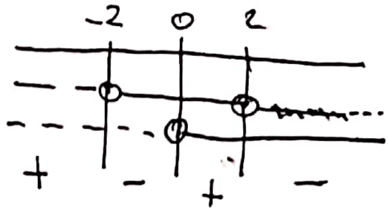
SOLUZIONI

1) • $f(x) = \log\left(\frac{4-x^2}{6x}\right)$

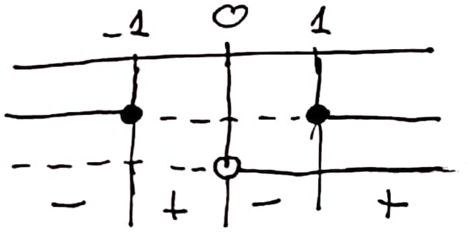
$$\Rightarrow \frac{4-x^2}{6x} > 0 \qquad \begin{array}{l} 4-x^2 > 0 \rightarrow -2 < x < 2 \\ 6x > 0 \rightarrow x > 0 \end{array}$$



$$\Rightarrow x < -2 \quad e \quad 0 < x < 2$$

• $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-1}{x}}$

$$\Rightarrow \frac{x^2-1}{x} \geq 0 \qquad \begin{array}{l} x^2-1 \geq 0 \rightarrow x \leq -1 \ , \ x \geq 1 \\ x \geq 0 \rightarrow x \geq 0 \ (x \neq 0) \end{array}$$



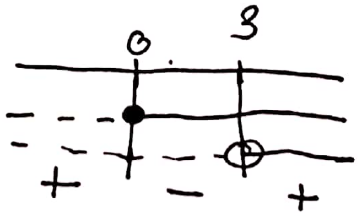
$$\Rightarrow x \geq 1 \quad e \quad -1 \leq x < 0$$

• $f(x) = \log(\log x)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \log x > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 1$$

• $f(x) = 2^{\sqrt{\frac{x}{x-3}}}$

$$\Rightarrow \frac{x}{x-3} \geq 0 \rightarrow \begin{array}{l} x \geq 0 \\ x > 3 \end{array}$$



$$\Rightarrow \quad x \leq 0 \quad e \quad x > 3$$

- $f(x) = 3^{\sqrt{x^2-4}} + \dfrac{1}{6+x}$

$$\begin{cases} x^2-4 \geq 0 \\ x \neq -6 \end{cases} \Rightarrow \quad x \leq -2 \;, x \geq 2 \quad e \quad x \neq -6$$

- $f(x) = \dfrac{1}{\sin x} + \sqrt{tg x}$

$$\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ tg x \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \neq K\pi \\ 2K\pi \leq x \leq \pi + 2K\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2K\pi < x < \pi + 2K\pi \quad , K \in \mathbb{Z}$$

- $f(x) = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}} \neq 0 \\ 1 + \dfrac{1}{x} \neq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{x} + 1 \neq 0 \\ x \neq -1 \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq -\dfrac{1}{2} \\ x \neq -1 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

- $f(x) = \dfrac{e^{\sqrt{1-x^2}}}{|x|}$

$$\begin{cases} 1-x^2 \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow -1 \leq x \leq 1 \quad \text{con} \quad x \neq 0$$

- $f(x) = (\sin x)^{1/x} = e^{\log(\sin x)^{1/x}} = e^{\log(\sin x) \cdot \frac{1}{x}}$

$$\begin{cases} \sin x > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \quad 2k\pi < x < \pi + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

- $f(x) = \dfrac{1}{e^{-x} \log x}$

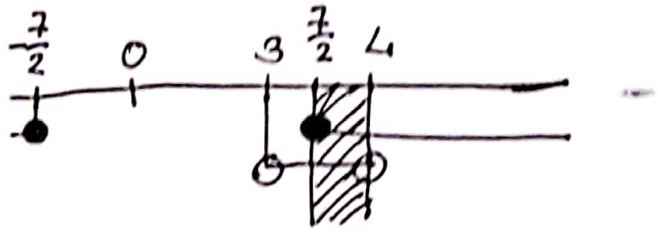
$$\begin{cases} e^{-x} \log x \neq 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log x \neq 0 \rightarrow x \neq 1 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 0 \quad \text{con} \quad x \neq 1$$

- $f(x) = \left[\log_{1/2}(x-3)\right]^{\sqrt{2|x|-7}}$

$$= e^{\sqrt{2|x|-7} \cdot \log\left(\log_{1/2}(x-3)\right)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2|x|-7 \geq 0 \\ \log_{1/2}(x-3) > 0 \\ x-3 > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{7}{2} \text{ e } x \geq \frac{7}{2} \\ 0 < x-3 < 1 \\ x > 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq -\frac{7}{2} \text{ e } x \geq \frac{7}{2} \\ 3 < x < 4 \end{cases}$$



$$\Rightarrow \frac{7}{2} \leq x < 4$$

2)

(i) $\sup E = 4 \neq \max E$

$\inf E = -5 \neq \min E$

(ii) $\sup E = 0 = \max E$

$\inf E = -\infty \neq \min E$

(iii) $E = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\}$

Tutti gli elementi di E sono maggiori di 0

$\frac{1}{n} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \inf E = 0 \neq \min E$ (non è un minimo perché non esiste nessun $n \in \mathbb{N}$ t.c. $\frac{1}{n} = 0$)

$\sup E = 1 = \max E$

(iv) $E = \left\{ -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \dots, \right\} \cup \left\{ 1, 2, 3 \dots \right\}$

$\Rightarrow \inf E = -1 = \min E$

$\sup E = +\infty \neq \max E$

(v) $E = \{ |x| \mid x \in \mathbb{R},\ x^2 + x < 2 \}$

Chi sono gli $x \in \mathbb{R}$ t.c. $x^2 + x - 2 < 0$?

Cerchiamo le soluzioni di $x^2 + x - 2 = 0$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases}$$

Dunque gli $x \in \mathbb{R}$ t.c. $x^2 + x - 2 < 0$ sono gli $x \in (-2, 1)$ oppure possiamo scrivere

$$-2 < x < 1$$

Allora riscriviamo E:

$$E = \{ |x| \mid x \in (-2,1) \} = [0, 2)$$

poiché dobbiamo prendere il modulo degli $x \in (-2,1)$

A questo punto

$\inf E = 0 = \min E$

$\sup E = 2 \neq \max E$

(vi) $E = \left\{ \frac{3n-2}{2n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ \frac{3}{2} - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$

Scrivendolo in questa forma capiamo che ogni elemento in questo insieme é minore di $\frac{3}{2}$.

Possiamo anche osservare che la successione $\{a_n\}_n = \left\{ \frac{3}{2} - \frac{1}{n} \right\}_n = \left\{ \frac{3n-2}{2n} \right\}_n$ é una successione crescente. Allora $\inf E = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} = \min E$ mentre $\sup E = \frac{3}{2} \neq \max E$

(vii) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 1\} \setminus \{0\}$

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 \leq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$$
$$= [-1, 1]$$

$$\Rightarrow E = [-1,1] \setminus \{0\}$$

$$\Rightarrow \inf E = -1 = \min E$$
$$\sup E = 1 = \max E$$

(viii) $E = \left\{ \sin\left(\frac{n\pi}{8}\right) \mid n \in \mathbb{N} \right\}$

$$= \left\{ \sin\left(\frac{\pi}{8}\right), \sin\left(\frac{\pi}{4}\right), \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1}, \dots, \underbrace{\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)}_{=-1}, \dots \right\}$$

$\sup E = 1 = \max E$

$\inf E = -1 = \min E$

Questo perché il seno restituisce valori compresi tra $[-1, 1]$ dunque nel momento in cui trovo valori che mi realizzano il -1 e 1 non avrò speranze di trovare valori più grandi o più piccoli di -1 e 1.

(ix) $E = \{n^2 - 5n + 3 \mid n \in \mathbb{N}\}$

La successione $n^2 - 5n + 3$ è chiaramente illimitata superiormente, infatti $\lim_{n \to +\infty} n^2 - 5n + 3 = +\infty$

perché $\lim_{n\to+\infty} n^2-5n+3 = \lim_{n\to+\infty} n^2\underbrace{\left(1-\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}\right)}_{\xrightarrow{n\to+\infty} 1} = +\infty$, $\quad n^2 \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty$

Dunque $\sup E = +\infty \nexists \max E$

Per quanto riguarda il minimo basterá trovare il vertice della parabola. Il vertice ha ascissa $x=\frac{5}{2}$ e siccome $\frac{5}{2}\notin\mathbb{N}$, il minimo si troverá nei naturali più vicini a $\frac{5}{2}$ cioé 2 o 3 (e poi basterá confrontare i due valori)

$$\Rightarrow (2)^2-5(2)+3 = -3$$
$$(3)^2-5(3)+3 = -3$$

In questo caso il minimo lo abbiamo sia per $n=2$ che $n=3$

$$\Rightarrow \inf E = -3 = \min E$$

(x) $E=\left\{\frac{2n+m}{3nm+5} \mid n\in\mathbb{N}\right\}$, $m\in\mathbb{N}$

Qui serve fare una distinzione:

- $m=1$ $\Rightarrow$ allora in questo caso la successione

$\frac{2n+1}{3n+5}$ é crescente, infatti

$$\frac{2n+1}{3n+5} \leq \frac{2(n+1)+1}{3(n+1)+5}$$

$$(2n+1)(3n+8) \leq (2n+3)(3n+5)$$

$$\cancel{6n^2} + \cancel{16n} + \cancel{3n} + 8 \leq \cancel{6n^2} + \cancel{10n} + \cancel{9n} + 15$$

$8 \leq 15$ che è vero $\Rightarrow$ la successione è crescente

Inoltre ogni elemento $x \in \mathbb{R}$ è più piccolo di $\frac{2}{3}$ ~~in~~, cioè $\frac{2n+1}{3n+5} < \frac{2}{3} \quad \forall n$

infatti $6n + 3 < 6n + 10$

$3 < 10$ (vero)

$$\Rightarrow \sup E = \frac{2}{3} \neq \max E$$

$$\inf E = \frac{3}{8} = \min E$$

- $m > 1$, in questo caso la successione $\frac{2n+m}{3nm+5}$ è decrescente (provare a farlo vedere per esercizio)

Inoltre $\frac{2n+m}{3nm+5} > \frac{2}{3}$

$$\Rightarrow \sup E = \frac{2+m}{3m+5} = \max E$$

$$\inf E = \frac{2}{3} \neq \min E.$$