Laurea Triennale in Scienza e Tecnologia dei Media, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità
Anno accademico: 2017-2018. *Titolare del corso:* Claudio Macci
Appello del 25 Giugno 2018
Esercizi 1,2,3,4,5 per gli studenti che sostengono l'esame da 6 crediti.
Esercizi 1,2,3,4,5,6 per gli studenti che sostengono l'esame da 8 crediti.

Esercizio 1.
Un'urna ha 5 palline numerate da 1 a 5. Si estraggono a caso 2 palline in blocco.
D1) Calcolare la probabilità di estrarre un numero pari e un numero dispari in un qualsiasi ordine.
D2) Trovare la densità discreta della variabile aleatoria X che indica la differenza tra il massimo e il minimo tra i due numeri estratti.
D3) Calcolare la probabilità di aver estratto la pallina con il numero 1 sapendo di aver estratto due numeri dispari.

Esercizio 2.
Si lancia ripetutamente una moneta, la cui probabilità di ottenere testa ad ogni lancio è $p \in (0,1)$, e sia X la variabile aleatoria che conta il numero di lanci necessari per avere per la prima volta testa. Poi si lancia X volte un dado equo.
D4) Calcolare la probabilità di ottenere tutti numeri dispari nei lanci di dado effettuati.

Esercizio 3.
Siano $h_1, h_2 \geq 1$ interi e $p_1, p_2 \in (0,1)$ fissati. Consideriamo la seguente densità congiunta, dove $a > 0$ è una costante da determinare: $p_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = ap_1^{x_1}p_2^{x_2}$, per $x_1 \geq h_1$ e $x_2 \geq h_2$ interi.
D5) Calcolare il valore della costante a.
D6) Calcolare $P(X_1 + X_2 = h_1 + h_2 + 1)$.

Esercizio 4.
Sia X una variabile aleatoria con densità continua $f(x) = x^a 1_{(0,b)}$, dove $a \geq 0$, $b > 0$ e $\frac{b^{a+1}}{a+1} = 1$.
D7) Trovare la funzione di distribuzione di $Y = X^2$.
D8) Supponendo che $b > 1$, dire per quali valori di a e b si ha $P(X < 1) = 1/2$.

Esercizio 5.
Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.
D9) Sia X una variabile aleatoria Normale con media 0 e varianza σ^2. Trovare il valore di σ^2 affinché si abbia $P(X \geq 3) = 1 - \Phi(1/2)$.
D10) Si lancia 300 volte un dado equo. Facendo riferimento alla funzione Φ con argomento positivo, calcolare la probabilità di ottenere al più 80 volte un numero minore o uguale a 2 usando l'approssimazione Normale e la correzione di continuità.

Esercizio 6.
Consideriamo una catena di Markov omogenea $\{X_n : n \geq 0\}$ con spazio degli stati $E = \{1,2,3\}$ e matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} a & 1-2a & a \\ b & 1-2b & b \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

dove $a, b \in [0, 1/2]$.
D11) Dire per quali valori di a e b si ha $P(X_2 = k | X_0 = 3) = \frac{1}{3}$ per ogni $k \in E$.
D12) Supponiamo che $a, b \in (0, 1/2)$. Illustrare le conseguenze del Teorema di Markov dopo aver giustificato la sua applicabilità.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
`D1`) Per la teoria della distribuzione Ipergeometrica la probabilità richiesta è $\frac{\binom{2}{1}\binom{3}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{6}{10}$.
`D2`) Possiamo dire che ciascuno dei seguenti sottoinsiemi ha probabilità 1/10 di essere estratto:

$$\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{4,5\}.$$

Quindi $\{X = 1\} = \{\{1,2\}, \{2,3\}, \{3,4\}, \{4,5\}\}$, $\{X = 2\} = \{\{1,3\}, \{2,4\}, \{3,5\}\}$, $\{X = 3\} = \{\{1,4\}, \{2,5\}\}$ e $\{X = 4\} = \{\{1,5\}\}$, da cui segue $p_X(1) = \frac{4}{10}$, $p_X(2) = \frac{3}{10}$, $p_X(3) = \frac{2}{10}$, $p_X(4) = \frac{1}{10}$.
`D3`) Anche in questo caso possiamo dire che ciascuno dei seguenti sottoinsiemi ha probabilità 1/10 di essere estratto:

$$\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{4,5\}.$$

Viene chiesta $P(A|B)$ dove $A = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\}\}$ e $B = \{\{1,3\}, \{1,5\}, \{3,5\}\}$. Allora, essendo uno spazio di probabilità uniforme, si ha

$$P(A|B) = \frac{\#(A \cap B)}{\#B} = \frac{\#\{\{1,3\}, \{1,5\}\}}{\#\{\{1,3\}, \{1,5\}, \{3,5\}\}} = \frac{2}{3}.$$

Esercizio 2.
`D4`) Indichiamo con E l'evento di cui viene chiesta la probabilità. Allora, per la formula delle probabilità totali, si ha

$$P(E) = \sum_{k=1}^{\infty} P(E|X = k)P(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} (1/2)^k (1-p)^{k-1} p$$

da cui segue

$$P(E) = \frac{p}{1-p} \sum_{k=1}^{\infty} ((1/2)(1-p))^{k-1} = \frac{p}{1-p} \frac{1}{1-(1/2)(1-p)} = \frac{p}{1-p} \frac{2}{2-1+p} = \frac{2p}{1-p^2}.$$

Esercizio 3.
`D5`) Si ha

$$1 = \sum_{x_1 \geq h_1, x_2 \geq h_2} p_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = a \sum_{x_1 \geq h_1, x_2 \geq h_2} p_1^{x_1} p_2^{x_2}$$

da cui segue

$$1 = a \sum_{x_1 \geq h_1} p_1^{x_1} \sum_{x_2 \geq h_2} p_2^{x_2} = a \frac{p_1^{h_1}}{1-p_1} \frac{p_2^{h_2}}{1-p_2}$$

e quindi $a = \frac{(1-p_1)(1-p_2)}{p_1^{h_1} p_2^{h_2}}$.
`D6`) Si ha

$$P(X_1 + X_2 = h_1 + h_2 + 1) = p_{X_1,X_2}(h_1, h_2 + 1) + p_{X_1,X_2}(h_1 + 1, h_2) = a p_1^{h_1} p_2^{h_2+1} + a p_1^{h_1+1} p_2^{h_2}$$

da cui segue (sostituendo il valore di a ottenuto prima)

$$P(X_1 + X_2 = h_1 + h_2 + 1) = (1-p_1)(1-p_2)p_2 + (1-p_1)(1-p_2)p_1 = (1-p_1)(1-p_2)(p_1 + p_2).$$

Osservazione: il valore ottenuto è in $[0, 1]$ come deve; infatti

$$0 \leq (1-p_1)(1-p_2)p_2 + (1-p_1)(1-p_2)p_1 \leq (1-p_2)p_2 + (1-p_1)p_1 \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Esercizio 4.
`D7`) Si ha $P(0 \leq Y \leq b^2) = 1$, da cui segue $F_Y(y) = 0$ per $y \leq 0$ e $F_Y(y) = 1$ per $y \geq b^2$. Per $y \in (0, b^2)$ si ha

$$F_Y(y) = P(X^2 \leq y) = P(X \leq \sqrt{y}) = \int_0^{\sqrt{y}} x^a dx = \left[\frac{x^{a+1}}{a+1}\right]_{x=0}^{x=\sqrt{y}} = \frac{y^{(a+1)/2}}{a+1}.$$

`D8`) Si ha

$$\frac{1}{2}=\int_0^1 x^a dx=\left[\frac{x^{a+1}}{a+1}\right]_{x=0}^{x=1}=\frac{1}{a+1}$$

da cui segue $a=1$, e quindi (tenendo conto della relazione $\frac{b^{a+1}}{a+1}=1$) $\frac{b^2}{2}=1$, che implica $b=\sqrt{2}$.

Esercizio 5.
`D9`) Si ha

$$P(X\leq 3)=P\left(\frac{X-0}{\sigma}\leq\frac{3-0}{\sigma}\right)=1-\Phi\left(\frac{3}{\sigma}\right)$$

da cui segue $\frac{3}{\sigma}=\frac{1}{2}$, e $\sigma=6$. Quindi $\sigma^2=36$.
`D10`) La probabilità richiesta è $P(S\leq 80)=P(S\leq 80.5)$ dove S è una variabile aleatoria Binomiale di parametri $n=300$ e $p=2/6=1/3$. Quindi $S=X_1+\cdots+X_{300}$, dove gli addendi sono Bernoulliani indipendenti di parametro $p=1/3$. Allora per l'approssimazione Normale si ha

$$P(S\leq 80.5)=P\left(\frac{S-300\cdot\frac{1}{3}}{\sqrt{300\cdot\frac{1}{3}(1-\frac{1}{3})}}\leq\frac{80.5-300\cdot\frac{1}{3}}{\sqrt{300\cdot\frac{1}{3}(1-\frac{1}{3})}}\right)\approx\Phi\left(\frac{80.5-100}{\sqrt{200/3}}\right)=\Phi(-2.39)=1-\Phi(2.39).$$

Esercizio 6.
`D11`) Se consideriamo il vettore $\pi^{(2)}=(\pi_1^{(2)},\pi_2^{(2)},\pi_3^{(2)})$, dove $\pi_k^{(2)}=P(X_2=k|X_0=3)$ per $k\in E$, si ha

$$\begin{aligned}(\pi_1^{(2)},\pi_2^{(2)},\pi_3^{(2)})&=(0,0,1)\begin{pmatrix} a & 1-2a & a\\ b & 1-2b & b\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1-2a & a\\ b & 1-2b & b\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\\ &=(1,0,0)\begin{pmatrix} a & 1-2a & a\\ b & 1-2b & b\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}=(a,1-2a,a).\end{aligned}$$

Quindi si deve avere $a=\frac{1}{3}$, mentre il valore di b può essere scelto arbitrariamente.
`D12`) La catena è ovviamente irriducibile. Inoltre è regolare perché esiste $h\in E$ per cui si ha $p_{hh}>0$ (ad esempio $h=1$ oppure $h=2$). Quindi il teorema di Markov è applicabile. In corrispondenza si ha $\lim_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}=\pi_j$ per ogni $j\in E$, dove (π_1,π_2,π_3) è l'unica distribuzione invariante della catena. Quindi in quel che segue determiniamo tale distribuzione invariante. Si ha

$$(\pi_1,\pi_2,\pi_3)\begin{pmatrix} a & 1-2a & a\\ b & 1-2b & b\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}=(\pi_1,\pi_2,\pi_3),$$

che equivale a dire

$$\begin{cases}\pi_1 a+\pi_2 b+\pi_3=\pi_1\\ (1-2a)\pi_1+(1-2b)\pi_2=\pi_2\\ \pi_1 a+\pi_2 b=\pi_3.\end{cases}$$

Sostituendo la terza relazione nella prima si ottiene $2\pi_3=\pi_1$; poi dalla seconda relazione si ha $\pi_2=\frac{1-2a}{2b}\pi_1$, e quindi $\pi_2=\frac{1-2a}{b}\pi_3$. Quindi, tenendo conto che $\pi_1+\pi_2+\pi_3=1$, con semplici calcoli si ottiene

$$(\pi_1,\pi_2,\pi_3)=\left(\frac{2b}{3b+1-2a},\frac{1-2a}{3b+1-2a},\frac{b}{3b+1-2a}\right).$$

Osservazione: i valori ottenuti sono in $[0,1]$ come devono; infatti si ha $0<b,2b,1-2a<3b+1-2a$ (perché $b,1-2a>0$ per costruzione).