Primo Appello estivo del corso di Fisica del 27.06.2022

Corso di Laurea in Informatica

A.A. 2021-2022

(Prof. Paolo Camarri)

Cognome:

Nome:

Matricola:

Anno di immatricolazione:

Problema n.1

Due corpi A e B, aventi masse $m_A = 1\ \text{kg}$ e $m_B = 1\ \text{kg}$, sono collegati tra loro tramite un filo inestensibile di massa trascurabile. Il corpo A si muove su un piano orizzontale liscio, il corpo B si muove lungo la direzione verticale, come mostrato nella FIGURA 1. La massa della carrucola C è trascurabile rispetto alle masse dei corpi A e B.

a) Si calcoli il modulo a delle accelerazioni dei due corpi.

$a =$	$=$

b) Si calcoli il modulo T della tensione del filo.

$T =$	$=$

c) Si calcolino il modulo R della reazione vincolare dell'asse della carrucola C, e l'angolo θ tra il vettore $\vec{R}$ e la direzione orizzontale.

$R =$	$=$
$\theta =$	

Problema n.2

Un'asta rigida sottile e omogenea, avente massa $M = 2\ \mathrm{kg}$ e lunghezza $L = 0{,}6\ \mathrm{m}$, è vincolata a ruotare in un piano verticale attorno a un asse orizzontale perpendicolare all'asta e passante per un suo estremo. L'asta, inizialmente in quiete in posizione orizzontale, viene lasciata libera di ruotare sotto l'azione della forza peso.

a) Si calcoli il valore ω_1 della velocità angolare istantanea di rotazione dell'asta nell'istante in cui questa raggiunge la posizione verticale.

$\omega_1 =$	$=$

L'asta, passando per la posizione verticale, urta (con il suo estremo inferiore) un punto materiale (inizialmente in quiete) avente massa $m = 0{,}1\ \mathrm{kg}$ che, nell'urto, rimane attaccato all'estremo inferiore dell'asta.

b) Si calcoli il valore ω_2 della velocità angolare istantanea del sistema asta + punto materiale immediatamente dopo l'urto.

$\omega_2 =$	$=$

c) Si calcoli l'angolo massimo θ_M tra l'asta e la direzione verticale successivamente all'urto

$\theta_M =$	$=$

Problema n.3

Due condensatori aventi capacità $C_1 = 1\ \mu\mathrm{F}$ e $C_2 = 2\ \mu\mathrm{F}$ sono inizialmente carichi con la stessa carica elettrica $Q = 4\ \mu\mathrm{C}$.

a) Si calcolino le differenze di potenziale iniziali $(\Delta V)_1$ e $(\Delta V)_2$ tra le armature rispettivamente del condensatore 1 e del condensatore 2.

$(\Delta V)_1 =$ $\qquad\qquad\qquad$ $=$
$(\Delta V)_2 =$ $\qquad\qquad\qquad$ $=$

I due condensatori vengono quindi connessi collegando tra loro con due fili conduttori le armature aventi la stessa polarità.

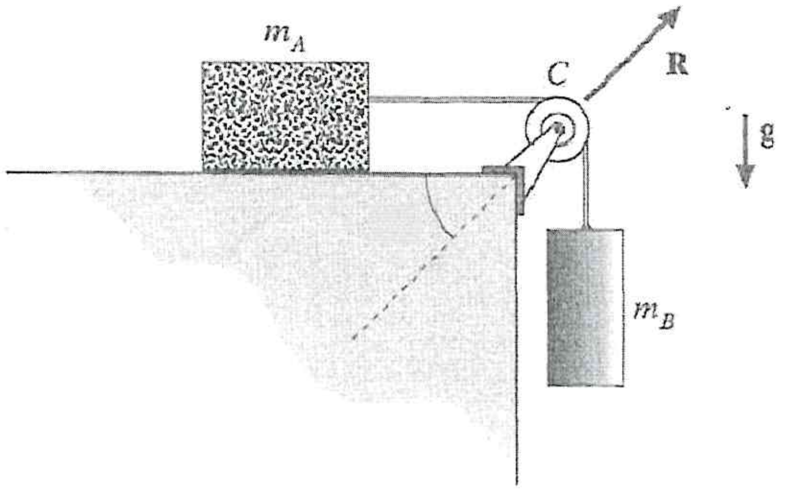
b) Si calcolino le cariche Q_1 e Q_2 sulle armature positive rispettivamente del condensatore 1 e del condensatore 2 dopo la connessione.

$Q_1 =$ $\qquad\qquad\qquad$ $=$
$Q_2 =$ $\qquad\qquad\qquad$ $=$

c) Si calcoli il rapporto r tra l'energia potenziale elettrostatica finale (dopo la connessione) e l'energia potenziale elettrostatica iniziale del sistema dei due condensatori considerato.

$r =$ $\qquad\qquad\qquad$ $=$

FIGURA 1



L'esame scritto prevede la risoluzione in TRE ore dei tre esercizi sopra riportati.

I fogli su cui svolgere i calcoli per la risoluzione dei problemi sono forniti dal docente.

Chi deve recuperare il primo esonero deve svolgere il solo Problema n.1 in UN'ora.

Chi deve recuperare il secondo deve svolgere il solo Problema n.2 in UN'ora.

Chi deve recuperare il terzo esonero deve svolgere il solo Problema n.3 in UN'ora.

La risposta a ciascuna domanda deve essere scritta nel riquadro corrispondente. Scrivere SOLO LA RISPOSTA FINALE, prima la formula letterale (se possibile) e poi il valore numerico. Nessun calcolo deve essere svolto su questi fogli.

Si richiede in ogni caso la consegna sia del presente foglio sia di tutti i fogli manoscritti in cui sono stati svolti i calcoli.

Si può consultare un formulario proprio (un foglio protocollo con 4 facciate).

Un libro di testo è a disposizione sulla cattedra, portato dal docente, per consultazione.

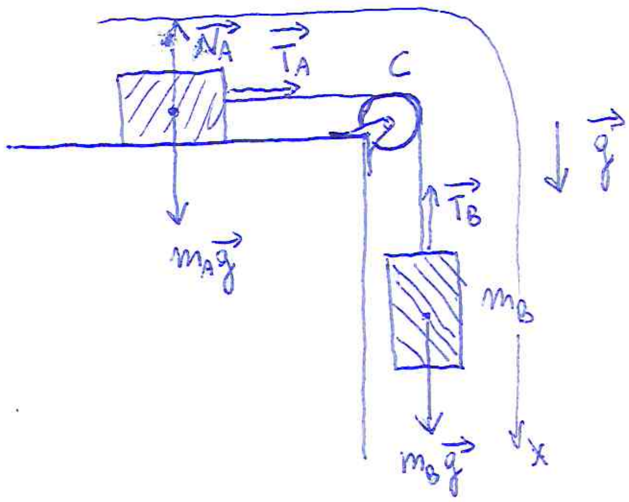
Lo studente, oltre al foglio di carta e alla penna, può tenere sul tavolo solo la calcolatrice.

CORSO DI FISICA PER INFORMATICA A. A. 2021-2022

PROF. PAOLO CAMARRI

PRIMO APPELLO ESTIVO 27/06/2022

Problema n. 1



Questo esercizio e' una variante del problema della "macchina di Atwood". Fissiamo dunque un asse x orientato come nello schema a fianco.

Scriviamo le equazioni del moto per ciascuno dei due corpi, tenendo conto dei vincoli imposti dal problema.

Poiché il corpo A si muove di moto rettilineo sul piano orizzontale liscio, risulta $|\vec{N_A}| = m_A g$

Poiché la fune che unisce i due corpi e' inestensibile e di massa trascurabile, risulta $|\vec{T_B}| = |\vec{T_A}| = T$

Dunque, per quanto riguarda le componenti lungo l'asse x dei vettori, tenuto conto che $|\vec{a_1}| = |\vec{a_2}|$ (fune inestensibile), e che $a_{1x} = a_{2x} = a_x$ per come e' stato scelto l'asse x, otteniamo le equazioni seguenti:

$$\begin{cases} m_A a_{1x} = T \\ m_B a_{2x} = m_B g - T \end{cases}$$

, cioe'

$$\begin{cases} m_A a_x = T \\ m_B a_x = m_B g - T \end{cases}$$

Sommiamo le due equazioni membro a membro:

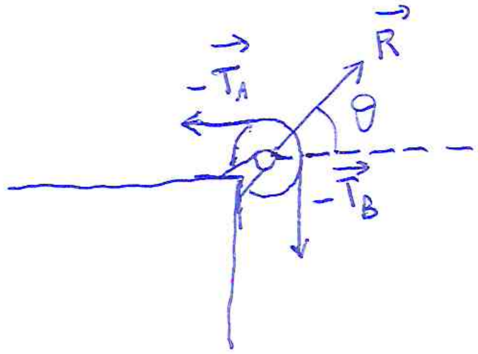
$(m_A + m_B) a_x = m_B g$, e infine:

$$\boxed{a = a_x = \frac{m_B g}{m_A + m_B} = \frac{1}{2} g \simeq 4,905 \ m \ s^{-2}}$$

b) Dalla prima equazione del sistema ottenuto al punto a) ricaviamo

$$\boxed{T = m_A a_x = m_A a = \frac{m_A m_B g}{m_A + m_B} \simeq 4,905 \ N}$$

c) Sulla carrucola agiscono tre forze, come schematizzato qua sotto:



$\vec{T}_A$ e $\vec{T}_B$ sono le forze rappresentate nello schema tracciato al punto a).

Poiché il centro di massa della carrucola e' fermo, deve risultare $-\vec{T}_A - \vec{T}_B + \vec{R} = 0$, da cui ricaviamo

$\vec{R} = \vec{T}_A + \vec{T}_B$, e quindi

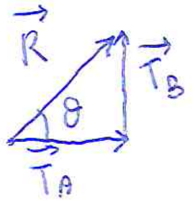
$$|\vec{R}| = R = |\vec{T}_A + \vec{T}_B| = \sqrt{|\vec{T}_A|^2 + |\vec{T}_B|^2 + 2(\vec{T}_A \cdot \vec{T}_B)}$$

Dato che $\vec{T}_A$ e $\vec{T}_B$ sono vettori diretti lungo direzioni tra loro perpendicolari, risulta $(\vec{T}_A \cdot \vec{T}_B) = 0$.

Inoltre, poiché $|\vec{T}_A| = |\vec{T}_B| = T$, ricaviamo

$$\boxed{R = \sqrt{2T^2} = \sqrt{2}\, T \simeq 6,937 \ N}$$

Poiché $\vec{T}_A$ e' diretto orizzontalmente, $\vec{T}_B$ e' diretto verticalmente, e $|\vec{T}_A| = |\vec{T}_B|$, il vettore $\vec{R} = \vec{T}_A + \vec{T}_B$ e' diretto lungo la direzione formante un angolo

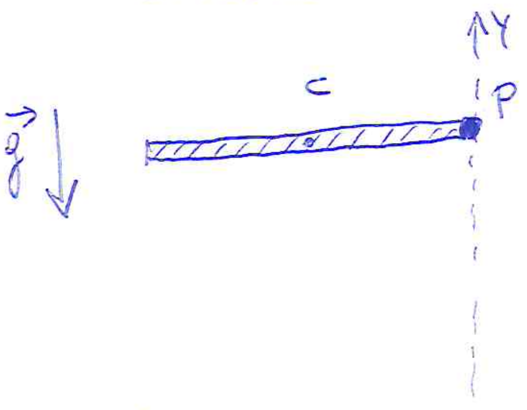


$\boxed{\theta = 45^\circ}$ con la direzione orizzontale: infatti i vettori $\vec{T}_A$, $\vec{T}_B$ e $\vec{R}$ sono i lati di un triangolo rettangolo isoscele.

Problema n. 2

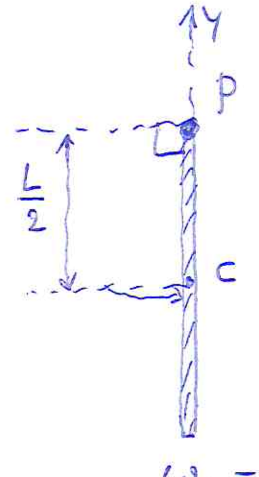
a)

Situazione iniziale



$\omega_i = 0$

Situazione finale



$\omega_f = ?$

Nella rotazione attorno a un asse orizzontale passante per il perno P l'energia meccanica dell'asta si conserva, in quanto la forza peso e' l'unica forza che compie lavoro durante la rotazione dell'asta. La forza di reazione del perno, essendo applicata all'unico punto dell'asta che resta fermo durante la rotazione, non compie lavoro.

Tra l'istante iniziale e l'istante finale, la velocita' angolare istantanea di rotazione dell'asta passa dal valore $\omega_i = 0$ al valore $\omega_f = \omega_1$ (da determinare), mentre la quota verticale del centro di massa dell'asta subisce la variazione

$$\Delta y_c = -\frac{L}{2}$$

Pertanto la variazione di energia cinetica dell'asta tra l'istante iniziale e l'istante finale e'

$$\Delta K = \frac{1}{2} I_z \omega_1^2 - \frac{1}{2} I_z \omega_i^2 = \frac{1}{2} I_z \omega_1^2 ,$$

dove $I_z = \frac{1}{3} M L^2$ e' il momento d'inerzia dell'asta rispetto all'asse di rotazione considerato.

La variazione di energia potenziale dell'asta tra l'istante iniziale e l'istante finale e'

$$\Delta U = M g \, \Delta y_c = -\frac{1}{2} M g L$$

Per la conservazione dell'energia meccanica dell'asta deve risultare

$$\Delta K + \Delta U = 0, \quad \text{cioe'}$$

$$\cancel{\frac{1}{2}} I_z \omega_1^2 - \cancel{\frac{1}{2}} M g L = 0$$

$$\frac{1}{3} \cancel{M} L^{\cancel{2}} \omega_1^2 = \cancel{M} g \cancel{L} , \quad \text{cioe'} \quad \omega_1^2 = \frac{3g}{L} , \quad \text{e infine}$$

$$\boxed{\omega_1 = \sqrt{\frac{3g}{L}} \simeq 7{,}004 \text{ rad s}^{-1}}$$

b) L'urto tra l'asta rigida sottile e il punto materiale e' totalmente anelastico. In questo caso, dato che durante l'urto sull'asta possono agire forze esterne (le forze impulsive esercitate dal perno, in questo caso), in generale non si conserva la quantita' di moto totale del sistema nell'urto.

Poiché il momento risultante delle forze esterne durante l'urto e' nullo, se scegliamo il perno come polo per il calcolo dei momenti (infatti la reazione del perno ha braccio nullo, come pure i vettori peso dell'asta e del punto materiale durante l'urto), allora la quantita' che certamente si conserva nell'urto e' il momento angolare totale del sistema calcolato rispetto allo stesso polo.

Subito prima dell'urto c'e' l'asta in rotazione con velocita' angolare ω_1 (vedi punto a)) e il punto materiale e' fermo. Dunque risulta $L_{TOT,z,1} = I_z \omega_1$

Subito dopo l'urto, il sistema rigido e' costituito dall'asta con il punto materiale attaccato alla sua estremita' inferiore. Il momento d'inerzia del sistema rigido rispetto all'asse di rotazione, dopo l'urto, e'

$I_{z,2} = \left(\frac{1}{3} M L^2 + m L^2\right) = \left(\frac{1}{3} M + m\right) L^2$, e quindi risulta

$L_{TOT,z,2} = I_{z,2}\, \omega_2$

Per la conservazione del momento angolare totale abbiamo quindi:

$$L_{TOT,z,2} = L_{TOT,z,1} \quad , \quad \text{cioè}$$

$$\left(\frac{1}{3}M+m\right)\cancel{L}^2\omega_2 = \frac{1}{3}M\cancel{L}^2\omega_1 \Rightarrow (M+3m)\,\omega_2 = M\,\omega_1$$

e infine

$$\boxed{\omega_2 = \frac{M\omega_1}{M+3m} = \frac{(2\,kg)\cdot(7{,}004\ rad\ s^{-1})}{(2\,kg + 3\cdot 0{,}1\ kg)} = 6{,}090\ rad\ s^{-1}}$$

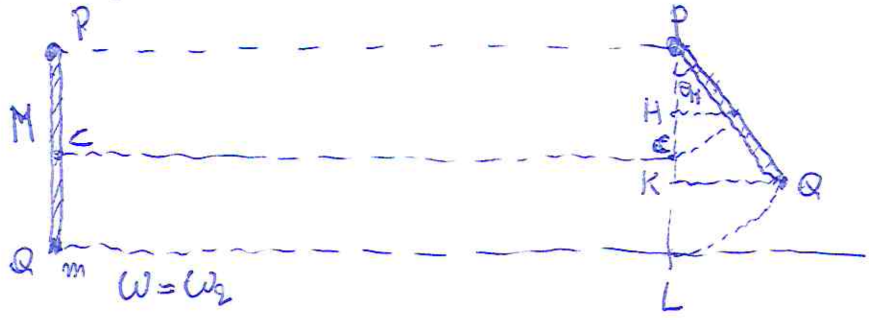
c) Dopo l'urto la situazione è simile a quella del punto a), con la differenza essenziale che adesso la struttura del sistema rigido è cambiata (il punto materiale è rimasto attaccato all'asta nell'urto).

Il momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse di rotazione è

$$I_{z,2} = \left(\frac{1}{3}M+m\right)L^2$$

L'energia meccanica del sistema si conserva nella rotazione.

Subito dopo l'urto All'estremo della rotazione



7

Nella rotazione di un angolo θ_M, il centro di massa dell'asta si solleva di un tratto

$$\Delta y_c = \overline{PC} - \overline{PH} = \frac{L}{2} - \frac{L}{2}\cos\theta_M = \frac{L}{2}(1-\cos\theta_M),$$

mentre l'estremo inferiore dell'asta (dove si trova attaccato il punto materiale) si solleva di un tratto

$$\Delta y_Q = \overline{PL} - \overline{PK} = L - L\cos\theta_M = L(1-\cos\theta_M)$$

L'energia cinetica del sistema rigido quando $\theta = \theta_M$ è nulla (estremo della rotazione), per cui la variazione di energia cinetica nella rotazione è:

$$\Delta K = 0 - \frac{1}{2} I_{z,2}\,\omega_2^2 = -\frac{1}{2} I_{z,2}\,\omega_2^2$$

La variazione di energia potenziale del sistema nella rotazione è:

$$\Delta U = Mg\,\Delta y_c + mg\,\Delta y_Q = Mg\frac{L}{2}(1-\cos\theta_M) + mgL(1-\cos\theta_M) =$$

$$= \left(\frac{M}{2} + m\right) gL(1-\cos\theta_M)$$

Per la conservazione dell'energia meccanica nel processo considerato, deve risultare

$$\Delta K + \Delta U = 0$$

Dunque:

$$-\frac{1}{2} I_{z,2}\,\omega_2^2 + \left(\frac{M}{2}+m\right) g L \left(1-\cos\theta_M\right) = 0$$

Moltiplichiamo per 2 i due membri dell'equazione:

$$-I_{z,2}\,\omega_2^2 + \left(M+2m\right) g L \left(1-\cos\theta_M\right) = 0$$

$$-\left(\frac{1}{3}M+m\right) L^{\cancel{2}}\,\omega_2^2 + \left(M+2m\right) g \cancel{L} \left(1-\cos\theta_M\right) = 0$$

$$\left(M+2m\right) g \left(1-\cos\theta_M\right) = \left(\frac{M}{3}+m\right) L\,\omega_2^2$$

$$3\left(M+2m\right) g \left(1-\cos\theta_M\right) = \cancel{\left(M+3m\right)} L \cdot \frac{M^2\omega_1^2}{\left(M+3m\right)^{\cancel{2}}}$$

$$1-\cos\theta_M = \frac{M^2\omega_1^2 L}{3\left(M+2m\right)\left(M+3m\right) g} = \frac{M^2\cancel{L}}{\cancel{3}\left(M+2m\right)\left(M+3m\right)\cancel{g}} \cdot \frac{\cancel{3}\cancel{g}}{\cancel{L}}$$

$$\cos\theta_M = 1 - \frac{M^2}{\left(M+2m\right)\left(M+3m\right)} = \frac{\cancel{M^2}+3Mm+2Mm+6m^2-\cancel{M^2}}{\left(M+2m\right)\left(M+3m\right)} =$$

$$= \frac{m\left(5M+6m\right)}{\left(M+2m\right)\left(M+3m\right)}$$

Dunque :

$$\theta_M = \arccos\left[\frac{m(5M+6m)}{(M+2m)(M+3m)}\right] =$$

$$= \arccos\left[\frac{(0{,}1\ \mathrm{kg})(5\cdot 2\,\mathrm{kg} + 6\cdot 0{,}1\,\mathrm{kg})}{(2\,\mathrm{kg} + 2\cdot 0{,}1\,\mathrm{kg})(2\,\mathrm{kg} + 3\cdot 0{,}1\,\mathrm{kg})}\right] =$$

$$= \arccos\left[\frac{(0{,}1\ \mathrm{kg})(10{,}6\ \mathrm{kg})}{(2{,}2\ \mathrm{kg})(2{,}3\ \mathrm{kg})}\right] = \arccos(0{,}2095) \simeq 1{,}360\ \mathrm{rad} \simeq$$

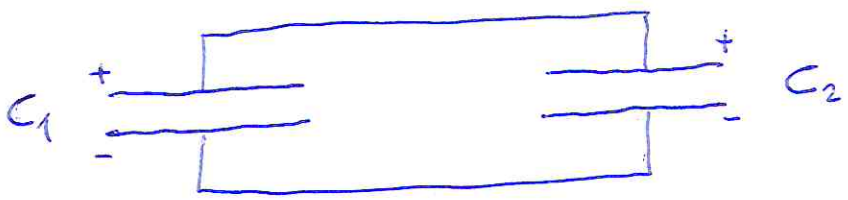
$$\simeq 77{,}9^\circ$$

Problema n. 3

a) Sfruttando la relazione $\Delta V = \dfrac{Q}{C}$, otteniamo le differenze di potenziale iniziali tra le armature di ciascun condensatore:

$$\boxed{\begin{aligned}(\Delta V)_1 &= \frac{Q}{C_1} = \frac{4\times 10^{-6}\,C}{10^{-6}\,F} = 4\,V \\ (\Delta V)_2 &= \frac{Q}{C_2} = \frac{4\times 10^{-6}\,C}{2\times 10^{-6}\,F} = 2\,V\end{aligned}}$$

b) Schema della situazione dopo la connessione:



Sulla coppia di armature positive, la carica totale deve essere uguale alla carica totale delle stesse due armature prima della connessione, in quanto le due armature positive connesse tra loro costituiscono un unico sistema di conduttori isolato. Allora deve risultare

$$Q_1 + Q_2 = 2Q$$

Dopo la connessione, inoltre, la differenza di potenziale tra le due armature di ciascun condensatore è la stessa, poiché i due condensatori sono connessi in parallelo.

Allora deve risultare

$$\frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2}$$

In definitiva, occorre risolvere il sistema di equazioni

$$\begin{cases} \dfrac{Q_1}{C_1} - \dfrac{Q_2}{C_2} = 0 \\ \\ Q_1 + Q_2 = 2Q \end{cases}$$

Metodo di Cramer:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{C_1} & -\frac{1}{C_2} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{C_2} \\ 2Q & 1 \end{vmatrix} = \frac{2Q}{C_2}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 \\ 1 & 2Q \end{vmatrix} = \frac{2Q}{C_1}$$

$$Q_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{2Q}{\cancel{C_2}} \cdot \frac{C_1 \cancel{C_2}}{C_1+C_2} = \frac{2C_1 Q}{C_1+C_2}$$

$$Q_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{2Q}{\cancel{C_1}} \cdot \frac{\cancel{C_1} C_2}{C_1+C_2} = \frac{2C_2 Q}{C_1+C_2}$$

Allora:

$$\boxed{\begin{aligned} Q_1 &= \frac{2C_1 Q}{C_1+C_2} = \frac{2\cdot(10^{-6}\,F)\cdot(4\times10^{-6}\,C)}{3\times10^{-6}\,F} \simeq 2{,}67\ \mu C \\ Q_2 &= \frac{2C_2 Q}{C_1+C_2} = \frac{2\cdot(2\cdot10^{-6}\,F)(4\times10^{-6}\,C)}{3\cdot10^{-6}\,F} \simeq 5{,}33\ \mu C \end{aligned}}$$

c) Energia potenziale elettrostatica iniziale:

$$U_i = \frac{Q^2}{2C_1} + \frac{Q^2}{2C_2} = \frac{Q^2}{2}\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\right) = \frac{Q^2(C_1+C_2)}{2C_1C_2}$$

Energia potenziale elettrostatica finale:

$$U_f = \frac{Q_1^2}{2C_1} + \frac{Q_2^2}{2C_2} = \frac{1}{\cancel{2}}\left[\frac{1}{\cancel{C_1}}\cdot\frac{\cancel{4}^{2} C_1^{\cancel{2}} Q^2}{(C_1+C_2)^2} + \frac{1}{\cancel{C_2}}\frac{\cancel{4}^{2} C_2^{\cancel{2}} Q^2}{(C_1+C_2)^2}\right] =$$

$$= \frac{2Q^2}{(C_1+C_2)^{\cancel{2}}}\cancel{(C_1+C_2)} = \frac{2Q^2}{C_1+C_2}$$

Otteniamo quindi:

$$r = \frac{U_f}{U_i} = \frac{2\cancel{Q^2}}{C_1 + C_2} \cdot \frac{2C_1C_2}{\cancel{Q^2}(C_1+C_2)}$$, e in definitiva:

$$\boxed{r = \frac{4C_1C_2}{(C_1+C_2)^2} = \frac{4\cdot(10^{-6}\,F)(2\cdot 10^{-6}\,F)}{9\cdot 10^{-12}\,F^2} = \frac{8}{9} \simeq 0{,}89}$$