Corso di Laurea in Informatica, Università di Roma "Tor Vergata"
Statistica per la ricerca sperimentale e tecnologica (A.A. 2004-2005)
Dott. Claudio Macci
Esonero del 15 Aprile 2005

Esercizio 1. Supponiamo di avere un'urna che contiene 2 palline bianche, 3 nere e 2 rosse. Si consideri il seguente gioco. Si estrae una pallina a caso: se è bianca si lancia una moneta equa e si vince il gioco se esce testa; se è nera si lancia un dado equo e si vince se il gioco se esce un numero diverso da 6; se è rossa si lancia un dado equo e si vince se il gioco se esce il 6.
`D1`) Calcolare la probabilità di vincere il gioco.
`D2`) Supponiamo di sapere di aver vinto il gioco: calcolare la probabilità di aver estratto una pallina bianca; calcolare la probabilità di aver estratto una pallina nera; calcolare la probabilità di aver estratto una pallina rossa.
`D3`) Consideriamo l'evento "vincere il gioco" oppure "la pallina estratta è bianca"; calcolare la probabilità di tale evento.

Esercizio 2. Supponiamo di avere un'urna che contiene 2 palline bianche e 3 nere. Si estraggono 3 palline a caso con reinserimento.
`D4`) Calcolare la probabilità di estrarre la sequenza di colori "bianco, bianco, nero".
`D5`) Calcolare la probabilità di estrarre complessivamente 2 palline bianche e 1 nera.
`D6`) Calcolare la probabilità di estrarre complessivamente almeno 1 pallina bianca.
`D7`) Rispondere a `D4`) nel caso di estrazioni senza reinserimento.
`D8`) Rispondere a `D5`) nel caso di estrazioni senza reinserimento.
`D9`) Rispondere a `D6`) nel caso di estrazioni senza reinserimento.

Esercizio 3. Supponiamo di avere un'apparecchiatura e siano X_1 la v.a. che indica il numero di guasti che ha in un certo intervallo di tempo. Supponiamo che la v.a. X_1 abbia distribuzione di Poisson di parametro $\lambda = 3$.
`D10`) Calcolare la probabilità che il numero di guasti per la prima apparecchiatura sia esattamente 3.
`D11`) Calcolare la probabilità che il numero di guasti per la prima apparecchiatura sia esattamente k (per $k = 0, 1, 2, 3$) sapendo che il numero dei guasti per la prima apparecchiatura é al massimo 3.
`D12`) Supponiamo di avere un'altra apparecchiatura e indichiamo con X_2 la v.a. che conta il numero dei suoi guasti nello stesso intervallo di tempo (dunque $X_1 + X_2$ conta il numero complessivo dei guasti delle due apparecchiature nell'intervallo di tempo in esame). Supponiamo che X_1 e X_2 siano indipendenti. Inoltre supponiamo che $p_{X_2}(0) = \frac{1}{4}$ e che $p_{X_2}(1) = p_{X_2}(2) = \frac{1}{8}$. Calcolare $P(X_1 + X_2 = 2)$.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1. Usiamo i simboli V, B, N e R per gli eventi "vincere il gioco", "estratta bianca", "estratta nera" e "estratta rossa".
`D1`) Per la formula delle probabilità totali si ha
$P(V) = P(V|B)P(B) + P(V|N)P(N) + P(V|R)P(R) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{7} + \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{7} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{7} = \frac{6+15+2}{42} = \frac{23}{42}$.
`D2`) Per la formula di Bayes e tenendo conto del valore di $P(V)$ calcolato prima si ha:
$P(B|V) = \frac{P(V|B)P(B)}{P(V)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{7}}{\frac{23}{42}} = \frac{1}{7} \cdot \frac{42}{23} = \frac{6}{23}$; $P(N|V) = \frac{P(V|N)P(N)}{P(V)} = \frac{\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{7}}{\frac{23}{42}} = \frac{5}{14} \cdot \frac{42}{23} = \frac{15}{23}$;
$P(R|V) = \frac{P(V|R)P(R)}{P(V)} = \frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{7}}{\frac{23}{42}} = \frac{1}{21} \cdot \frac{42}{23} = \frac{2}{23}$.
`D3`) Poiché $P(V \cap B) = P(V|B)P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{7} = \frac{1}{7}$, tenendo conto ancora del valore di $P(V)$ calcolato prima si ha
$P(V \cup B) = P(V) + P(B) - P(V \cap B) = \frac{23}{42} + \frac{2}{7} - \frac{1}{7} = \frac{23}{42} + \frac{1}{7} = \frac{23+6}{42} = \frac{29}{42}$.

Esercizio 2. Usiamo i simboli B_i e N_i per gli eventi "estratta bianca alla i-sima estrazione" ed "estratta nera alla i-sima estrazione". Poi sia X la v.a. che conta il numero di palline bianche estratte complessivamente.
`D4`) Si ha $P(B_1 \cap B_2 \cap N_3) = P(B_1)P(B_2)P(N_3) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{125}$.
`D5`) Si ha $P(X = 2) = \binom{3}{2}(\frac{2}{5})^2(1 - \frac{2}{5})^{3-2} = \frac{36}{125}$.
`D6`) Si ha $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{3}{0}(\frac{2}{5})^0(1 - \frac{2}{5})^{3-0} = 1 - \frac{27}{125} = \frac{98}{125}$.
`D7`) Si ha $P(B_1 \cap B_2 \cap N_3) = P(B_1)P(B_2|B_1)P(N_3|B_1 \cap B_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{3} = \frac{1}{10}$.
`D8`) Si ha $P(X = 2) = \frac{\binom{2}{2}\binom{3}{1}}{\binom{5}{3}} = \frac{3}{10}$.
`D9`) Si ha $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{\binom{2}{0}\binom{3}{3}}{\binom{5}{3}} = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$.

Esercizio 3.
`D10`) Si ha $P(X_1 = 3) = \frac{3^3}{3!}e^{-3} = \frac{27}{6}e^{-3}$.
`D11`) Per $k = 0, 1, 2, 3$ si ha
$P(X_1 = k|X_1 \leq 3) = \frac{P(\{X_1=k\}\cap\{X_1\leq 3\})}{P(X_1\leq 3)} = \frac{P(X_1=k)}{\sum_{h=0}^{3} P(X_1=h)} = \frac{\frac{3^k}{k!}e^{-3}}{\sum_{h=0}^{3} \frac{3^h}{h!}e^{-3}} = \frac{3^k}{k!}\frac{6}{78}$
(dove per l'ultima uguaglianza segue dal fatto che $\sum_{h=0}^{3} \frac{3^h}{h!} = \frac{78}{6}$). Quindi:
$P(X_1 = 0|X_1 \leq 3) = \frac{6}{78}$; $P(X_1 = 1|X_1 \leq 3) = \frac{18}{78}$; $P(X_1 = 2|X_1 \leq 3) = P(X_1 = 3|X_1 \leq 3) = \frac{27}{78}$.
`D12`) Si ha
$P(X_1 + X_2 = 2) = p_{X_1}(2)p_{X_2}(0) + p_{X_1}(1)p_{X_2}(1) + p_{X_1}(0)p_{X_2}(2) =$
$= \frac{3^2}{2!}e^{-3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3^1}{1!}e^{-3} \cdot \frac{1}{8} + \frac{3^0}{0!}e^{-3} \cdot \frac{1}{8} = \left(\frac{9}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8}\right)e^{-3} = \frac{13}{8} \cdot e^{-3}$.

Commenti.
`D2`) Come ci si poteva aspettare si ha $P(B|V) + P(N|V) + P(R|V) = \frac{6+15+2}{23} = 1$.
`D6`) Metodo alternativo: $P(X \geq 1) = \sum_{k=1}^{3}\binom{3}{k}(\frac{2}{5})^k(1 - \frac{2}{5})^{3-k} = \frac{54+36+8}{125} = \frac{98}{125}$.
`D9`) Metodo alternativo: $P(X \geq 1) = \sum_{k=1}^{3} \frac{\binom{2}{k}\binom{3}{3-k}}{\binom{5}{3}} = \frac{6+3+0}{10} = \frac{9}{10}$.
`D11`) Come ci si poteva aspettare si ha $\sum_{k=0}^{3} P(X_1 = k|X_1 \leq 3) = \frac{6+18+27+27}{78} = 1$.