Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità (ed insegnamenti mutuati)
Anno accademico: `2014-2015`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Simulazione 2

Esercizio 1. Un'urna ha 5 palline numerate da 1 a 5. Si estrae ripetutamente una pallina a caso con reinserimento. Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di estrazioni necessarie per avere per la prima volta il numero 3.
`D1`) Calcolare $P(\cup_{h=1}^{\infty}\{X = 2h\})$.
`D2`) Calcolare $P(E|X = 2)$ dove E è l'evento "estratto un numero pari alla prima estrazione".

Esercizio 2. Un'urna ha 3 palline bianche e 3 nere. Si estrae una pallina a caso e viene sostituita con una pallina bianca. Poi si estraggono a caso 2 palline in blocco e sia X la variabile aleatoria che conta il numero di palline bianche estratte (tra le due in blocco).
`D3`) Trovare la densità discreta di X.
`D4`) Calcolare $P(B|X = 1)$ dove B è l'evento "estratta una pallina bianca alla estrazione iniziale (quella di una sola pallina)".

Esercizio 3. Sia $\alpha \in (0, 1)$ arbitrariamente fissato. Consideriamo la seguente densità congiunta: $p_{X_1,X_2}(0, 1) = p_{X_1,X_2}(1, 0) = \frac{\alpha}{2}$ e $p_{X_1,X_2}(k, k) = \frac{1-\alpha}{2^k}$ per $k \geq 1$ intero.
`D5`) Calcolare $P(X_1 = X_2|X_1 + X_2 \leq 2)$.
`D6`) Calcolare $\mathbb{E}[b^{X_1}]$ per $|b| < 2$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con densità continua $f_X(t) = \frac{8}{9}t^2 1_{(0,3/2)}(t)$.
`D7`) Trovare la densità discreta di $Y = [X]$, dove $[x] = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
`D8`) Trovare la densità continua di $Z = \sqrt{X}$.

Esercizio 5.
`D9`) Sia $N_t = \sum_{n\geq 1} 1_{T_n \leq t}$ (per $t \geq 0$) un processo di Poisson con intensità di $\lambda = \frac{5}{2}$. Calcolare $P(1 \leq N_{2/5} \leq 3)$.
`D10`) Siano X e Y due variabili aleatorie Normali indipendenti: X ha media 2 e varianza 5; Y ha media 4 e varianza 16. Qual è la distribuzione di $3X - Y$?

Esercizio 6. Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. (indipendenti e identicamente distribuite).
`D11`) Dire per quale valore di m si ha

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - m\right| > \varepsilon\right) = 0 \text{ per ogni } \varepsilon > 0,$$

nel caso in cui le variabili aleatorie $\{X_n : n \geq 1\}$ abbiano densità discreta $p_X(k) = \frac{\binom{3}{k}\binom{4}{2-k}}{\binom{7}{2}}$ per $k \in \{0, 1, 2\}$.
`D12`) Calcolare, usando l'approssimazione Normale, $P(X_1 + \cdots + X_{10000} > 10050)$ nel caso in cui le variabili aleatorie $\{X_n : n \geq 1\}$ abbiano densità continua $f_X(t) = e^{-t}1_{(0,\infty)}(t)$.

Esercizio 7 (*solo per ST-Materiali*). Consideriamo una catena di Markov omogenea $\{X_n : n \geq 0\}$ con spazio degli stati $E = \{1, 2, 3, 4\}$ e matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

per $a, b, c \in [0, 1)$ tali che $a, c > 0$ e $a + b + c = 1$.
`D13`) Calcolare $P(X_1 = 2)$ nel caso in cui $P(X_0 = k) = \frac{1}{4}$ per ogni $k \in \{1, 2, 3, 4\}$.
`D14`) Calcolare le probabilità di passaggio in $C = \{1\}$ partendo da 2 e partendo da 3.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
D1) Si ha $p_X(h) = (1-p)^{h-1}p$ per $h \geq 1$ intero, dove $p = \frac{1}{5}$. Quindi $P(\cup_{h=1}^{\infty}\{X = 2h\}) = \sum_{h=1}^{\infty} P(X = 2h) = \sum_{h=1}^{\infty}(1-\frac{1}{5})^{2h-1} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1/5}{4/5}\sum_{h=1}^{\infty}(\frac{16}{25})^h = \frac{1}{4}\frac{16/25}{1-16/25} = \frac{1}{4} \cdot \frac{16}{9} = \frac{4}{9}$.
D2) Si ha $P(E|X=2) = \frac{P(E\cap\{X=2\})}{P(X=2)} = \frac{\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{5}}{\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Esercizio 2.
D3) Per la formula delle probabilità totali si ha $p_X(k) = P(X = k|B)P(B) + P(X = k|B^c)P(B^c) = \frac{\binom{3}{k}\binom{3}{2-k}}{\binom{6}{2}}\frac{3}{6} + \frac{\binom{4}{k}\binom{2}{2-k}}{\binom{6}{2}}\frac{3}{6} = \frac{\binom{3}{k}\binom{3}{2-k}+\binom{4}{k}\binom{2}{2-k}}{30}$ per $k \in \{0,1,2\}$, e quindi $p_X(0) = \frac{1\cdot3+1\cdot1}{30} = \frac{4}{30}$, $p_X(1) = \frac{3\cdot3+4\cdot2}{30} = \frac{17}{30}$, $p_X(2) = \frac{3\cdot1+6\cdot1}{30} = \frac{9}{30}$.
D4) Per la formula di Bayes (e per alcuni calcoli fatti prima) si ha $P(B|X=1) = \frac{P(X=k|B)P(B)}{P(X=1)} = \frac{3\cdot3/30}{17/30} = \frac{9}{17}$.

Esercizio 3.
D5) Si ha $P(X_1 = X_2|X_1 + X_2 \leq 2) = \frac{P(\{X_1=X_2\}\cap\{X_1+X_2\leq2\})}{P(X_1+X_2\leq2)} = \frac{p_{X_1,X_2}(1,1)}{p_{X_1,X_2}(1,1)+p_{X_1,X_2}(0,1)+p_{X_1,X_2}(1,0)} = \frac{(1-\alpha)/2}{(1-\alpha+\alpha+\alpha)/2} = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$.
D6) Si ha $\mathbb{E}[b^{X_1}] = b^0p_{X_1,X_2}(0,1) + b^1(p_{X_1,X_2}(1,0)+p_{X_1,X_2}(1,1)) + \sum_{k=2}^{\infty} b^k p_{X_1,X_2}(k,k) = \frac{\alpha}{2} + b(\frac{\alpha}{2} + \frac{1-\alpha}{2}) + (1-\alpha)\sum_{k=2}^{\infty}(b/2)^k = \frac{\alpha+b}{2} + (1-\alpha)\frac{(b/2)^2}{1-b/2} = \frac{\alpha+b}{2} + (1-\alpha)\frac{b^2/4}{(2-b)/2} = \frac{\alpha+b}{2} + \frac{1-\alpha}{2}\frac{b^2}{2-b}$.

Esercizio 4.
D7) Si ha $p_Y(0) = \int_0^1 \frac{8}{9}t^2dt = \frac{8}{9}[\frac{t^3}{3}]_{t=0}^{t=1} = \frac{8}{27}$ e $p_Y(1) = \int_1^{3/2}\frac{8}{9}t^2dt = \frac{8}{9}[\frac{t^3}{3}]_{t=1}^{t=3/2} = \frac{8}{27}(\frac{27}{8}-1) = \frac{19}{27}$.
D8) Si vede che $P(0 \leq \sqrt{X} \leq \sqrt{3/2}) = 1$ e quindi $F_Z(z) = 0$ per $z \leq 0$ e $F_Z(z) = 1$ per $z \geq \sqrt{3/2}$. Per $z \in (0, \sqrt{3/2})$ si ha $F_Z(z) = P(\sqrt{X} \leq z) = P(X \leq z^2) = \int_0^{z^2}\frac{8}{9}t^2dt = \frac{8}{9}[\frac{t^3}{3}]_{t=0}^{t=z^2} = \frac{8}{27}z^6$. In conclusione la densità continua è $f_Z(z) = \frac{16}{9}z^5 1_{(0,\sqrt{3/2})}(z)$.

Esercizio 5.
D9) Si ha $P(1 \leq N_{2/5} \leq 3) = \sum_{k=1}^{3}\frac{(\frac{5}{2}\cdot\frac{2}{5})^k}{k!}e^{-\frac{5}{2}\cdot\frac{2}{5}} = (1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6})e^{-1} = \frac{10}{6}e^{-1} = \frac{5}{3}e^{-1}$.
D10) La variabile aleatoria $3X - Y$ ha distribuzione Normale essendo una combinazione lineare di Normali indipendenti; la sua media è $3\cdot2 - 1\cdot4 = 2$ e la sua varianza è $3^2\cdot5 + (-1)^2\cdot16 = 61$.

Esercizio 6.
D11) Per la legge dei grandi numeri il valore di m richiesto è $m = \sum_{k=0}^{2}kp_X(k) = 0\cdot\frac{6}{21} + 1\cdot\frac{12}{21} + 2\cdot\frac{3}{21} = \frac{18}{21} = \frac{6}{7}$.
D12) Le variabili aleatorie $\{X_n : n \geq 1\}$ hanno distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 1$; dunque hanno media 1 e varianza 1. Quindi, se indichiamo con Z la standardizzata di $X_1 + \cdots + X_{10000}$, si ha $\{X_1 + \cdots + X_{10000} > 10050\} = \{Z > \frac{10050-10000\cdot1}{\sqrt{1}\sqrt{10000}}\}$ e, per l'approssimazione normale, $P(X_1 + \cdots + X_{10000} > 10050) = 1 - \Phi(50/100) = 1 - \Phi(0.5) = 1 - 0.69146 = 0.30854$.

Esercizio 7.
D13) Si ha $P(X_1 = 2) = \sum_{k=1}^{4}P(X_1 = 2|X_0 = k)P(X_0 = k) = 0\cdot\frac{1}{4} + b\cdot\frac{1}{4} + a\cdot\frac{1}{4} + 0\cdot\frac{1}{4} = \frac{a+b}{4}$.
D14) Abbiamo due classi irriducibili, ciascuna costituita dagli stati assorbenti 1 e 4. Poi, essendo $a, c > 0$, possiamo dire che l'insieme degli stati transitori è $T = \{2,3\}$. Ora osserviamo che lo stato 4 non comunica con $C = \{1\}$, mentre ciascuno stato in $T = \{2,3\}$ comunica con $C = \{1\}$. Allora, se indichiamo le probabilità di passaggio richieste con (λ_2, λ_3), dove λ_i la probabilità di passaggio in C partendo da $i \in \{2,3\}$, tale coppia costituisce la soluzione del seguente sistema:

$$\begin{cases} \lambda_2 = a + b\lambda_2 + c\lambda_3 \\ \lambda_3 = a\lambda_2 + b\lambda_3. \end{cases}$$

Il sistema si risolve come segue:

$$\begin{cases} \lambda_2\left(1 - b - c\cdot\frac{a}{1-b}\right) = a \\ \lambda_3 = \frac{a}{1-b}\lambda_2, \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_2 = \frac{a(1-b)}{(1-b)^2-ac} \\ \lambda_3 = \frac{a^2}{(1-b)^2-ac}. \end{cases}$$

Commenti.

La somma dei valori di ciascuna densità discreta che appare è 1 in accordo con la teoria.
`D1`) La probabilità richiesta fa riferimento ai valori di X "pari". Per i valori di X "dispari" si ha $P(\cup_{h=1}^{\infty}\{X = 2h-1\}) = \sum_{h=1}^{\infty} P(X = 2h-1) = \sum_{h=1}^{\infty}(1-\frac{1}{5})^{2h-1-1} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5}\sum_{h=1}^{\infty}(\frac{16}{25})^{h-1} = \frac{1}{5}\frac{1}{1-16/25} = \frac{1}{5} \cdot \frac{25}{9} = \frac{5}{9}$; quindi la somma delle due probabilità è uguale ad 1 in accordo con la teoria.
`D2`) Condizionatamente all'evento $\{X = 2\}$ il risultato del primo lancio può essere uno dei seguenti 4 casi tutti equiprobabili: $1, 2, 4, 5$. Quindi $P(E|X = 2) = \frac{1}{2}$ si spiega osservando che si hanno 2 numeri pari e 2 numeri dispari.
`D6`) Per $b = 1$ si ha la variabile aleatoria costante $b^{X_1} = 1^{X_1} = 1$ e quindi si deve avere $\mathbb{E}[b^{X_1}] = 1$; in effetti, se si sostituisce $b = 1$ nella formula $\frac{\alpha+b}{2} + \frac{1-\alpha}{2}\frac{b^2}{2-b}$ ottenuta, si ha $\frac{\alpha+1}{2} + \frac{1-\alpha}{2} \cdot \frac{1^2}{2-1} = \frac{\alpha+1+1-\alpha}{2} = \frac{2}{2} = 1$.
`D11`) In altro modo il valore richiesto m si ricava facendo riferimento alle proprietà della distribuzione ipergeometrica, e quindi si ha $m = 2 \cdot \frac{3}{7} = \frac{6}{7}$. In effetti la densità discreta p_X è quella di una variabile aleatoria X che, nel caso di 2 oggetti estratti a caso in blocco, conta il numero di oggetti estratti di un certo tipo da un insieme in cui ce ne sono 3 di quel tipo su 7.
`D14`) Possiamo considerare le probabilità di passaggio per $C_* = \{4\}$. Lo stato 1 non comunica con 4, mentre ciascuno stato in $T = \{2, 3\}$ comunica con $C_* = \{4\}$. Allora la coppia (η_2, η_3), dove η_i la probabilità di passaggio in C_* partendo da $i \in \{2, 3\}$, costituisce la soluzione del seguente sistema:

$$\begin{cases} \eta_2 = b\eta_2 + c\eta_3 \\ \eta_3 = c + a\eta_2 + b\eta_3. \end{cases}$$

Si verifica che $(\eta_2, \eta_3) = \left(\frac{c^2}{(1-b)^2-ac}, \frac{c(1-b)}{(1-b)^2-ac}\right)$. Inoltre osserviamo che (nei passaggi seguenti teniamo conto dell'uguaglianza $a = 1 - b - c$)

$$\lambda_2 + \eta_2 = \frac{a(1-b) + c^2}{(1-b)^2 - ac} = \frac{(1-b-c)(1-b) + c^2}{(1-b)^2 - (1-b-c)c} = \frac{(1-b)^2 - c(1-b) + c^2}{(1-b)^2 - c(1-b) + c^2} = 1$$

e

$$\lambda_3 + \eta_3 = \frac{a^2 + c(1-b)}{(1-b)^2 - ac} = \frac{(1-b-c)^2 + c(1-b)}{(1-b)^2 - (1-b-c)c} = \frac{(1-b)^2 + c^2 - 2c(1-b) + c(1-b)}{(1-b)^2 - (1-b)c + c^2} = 1.$$

Quindi si ha $\lambda_i + \eta_i = 1$ per ogni $i \in T = \{2, 3\}$ e questo è in accordo con la teoria perché, partendo da ciascuno stato $i \in T = \{2, 3\}$, si ha uno e uno solo dei 2 seguenti casi: assorbimento in $C = \{1\}$; assorbimento in $C_* = \{4\}$.