Laurea Triennale in Scienza e Tecnologia dei Media, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità (ed insegnamenti mutuati)
Anno accademico: 2018-2019. *Titolare del corso:* Claudio Macci
Simulazione 2
Esercizi 1,2,3,4,5 per gli studenti che sostengono l'esame da 6 crediti.
Esercizi 1,2,3,4,5,6 per gli studenti che sostengono l'esame da 8 crediti.

Esercizio 1.
Si lancia ripetutamente un dado equo e sia X_n la variabile aleatoria che indica il numero che si ottiene al lancio n-simo (per $n \geq 1$). Poi sia Y la variabile aleatoria che indica a quale lancio esce per la prima volta un numero pari.
D1) Calcolare $P(X_1 = x_1 | Y = 2)$ per $x_1 \in \{1, 3, 5\}$.
D2) Calcolare $P(X_1 = X_2 | Y = 3)$.
D3) Calcolare $P(X_1 < X_2 | Y = 3)$.

Esercizio 2.
Abbiamo un'urna con 2 palline bianche e un mazzo di 4 carte con i numeri $1, 2, 3, 4$. Si estrae una carta a caso dal mazzo e sia X la variabile aleatoria che indica il numero estratto. Poi si mettono X palline nere nell'urna, e si estrae una pallina a caso.
D4) Calcolare la probabilità di aver estratto la carta con il numero k (per $k \in \{1, 2, 3, 4\}$) sapendo di aver estratto una pallina bianca.

Esercizio 3.
Consideriamo la densità congiunta $p_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \frac{\lambda^{x_1}}{x_1!}(1-p)^{x_2} p e^{-\lambda(1-p)}$ per $x_2 \geq x_1 \geq 0$ interi, dove $\lambda > 0$ e $p \in (0, 1)$ sono costanti arbitrarie.
D5) Trovare la densità marginale di X_1.
D6) Calcolare $P(X_1 = X_2)$.

Esercizio 4.
Sia X una variabile aleatoria con densità continua $f(x) = ab^a x^{-(a+1)} 1_{(b,\infty)}(x)$, dove $a, b > 0$.
D7) Trovare la densità continua di $Y = \log(X/b)$.
D8) Calcolare $\mathbb{E}[X]$ (anche quando è infinito).

Esercizio 5.
Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.
D9) Sia X una variabile aleatoria Normale con media 1 e varianza 4. Dire per quale valore di $x > 1$ si ha $P(X > 1 | 0 < X < x) = 1/2$.
D10) Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. (indipendenti e identicamente distribuite), con distribuzione di Poisson di parametro $\lambda = 4$. Calcolare

$$P(X_1 + \cdots + X_{100} > 410)$$

facendo riferimento alla funzione Φ con argomento positivo, usando l'approssimazione Normale e la correzione di continuità.

Esercizio 6.
Consideriamo una catena di Markov omogenea $\{X_n : n \geq 0\}$ con spazio degli stati $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 7/100 & 5/100 & 13/100 & 23/100 & 52/100 \end{pmatrix}.$$

D11) Dare un valore approssimato di $P(X_n = i)$ (per $i \in E$) per n grande nel caso in cui $P(X_0 \in \{3, 4\}) = 1$.
D12) Calcolare la probabilità che la catena passi per $C = \{1, 2\}$ partendo da 5.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
La variabile aleatoria Y ha densità $p_Y(k) = (1-\frac{1}{2})^{k-1}\frac{1}{2} = (\frac{1}{2})^k$ per $k \geq 1$ intero.
`D1`) Si ha $P(X_1 = x_1|Y = 2) = \frac{P(\{X_1=x_1\}\cap\{Y=2\})}{P(Y=2)} = \frac{P(\{X_1=x_1\}\cap\{X_2\in\{2,4,6\}\})}{(\frac{1}{2})^2} = \frac{\frac{1}{6}\frac{1}{2}}{(\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{3}$.
`D2`) Si ha $P(X_1 = X_2|Y = 3) = \frac{P(\{X_1=X_2\}\cap\{Y=3\})}{P(Y=3)} = \frac{P(\{(1,1,\text{pari}),(3,3,\text{pari}),(5,5,\text{pari})\})}{(\frac{1}{2})^3} = \frac{\frac{1}{6}\frac{1}{6}\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\frac{1}{6}\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\frac{1}{6}\frac{1}{2}}{(\frac{1}{2})^3} = \frac{1}{3}$.
`D3`) $P(X_1 < X_2|Y = 3) = \frac{P(\{X_1<X_2\}\cap\{Y=3\})}{P(Y=3)} = \frac{P(\{(1,3,\text{pari}),(1,5,\text{pari}),(3,5,\text{pari})\})}{(\frac{1}{2})^3} = \frac{\frac{1}{6}\frac{1}{6}\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\frac{1}{6}\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\frac{1}{6}\frac{1}{2}}{(\frac{1}{2})^3} = \frac{1}{3}$.
Osservazione: si ha anche $P(X_1 > X_2|Y = 3) = \frac{P(\{X_1>X_2\}\cap\{Y=3\})}{P(Y=3)} = \frac{P(\{(3,1,\text{pari}),(5,1,\text{pari}),(5,3,\text{pari})\})}{(\frac{1}{2})^3} = \frac{\frac{1}{6}\frac{1}{6}\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\frac{1}{6}\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\frac{1}{6}\frac{1}{2}}{(\frac{1}{2})^3} = \frac{1}{3}$; quindi $P(X_1 = X_2|Y = 3) + P(X_1 < X_2|Y = 3) + P(X_1 > X_2|Y = 3) = 1$ in accordo con la teoria.

Esercizio 2.
`D4`) Sia B l'evento "estratta pallina bianca". Allora, combinando l'uso della formula di Bayes con quello della formula delle probabilità totali, la probabilità richiesta è

$$P(X = k|B) = \frac{P(B|X = k)P(X = k)}{P(B)} = \frac{P(B|X = k)P(X = k)}{\sum_{j=1}^4 P(B|X = j)P(X = j)}$$

dove $P(X = k) = \frac{1}{4}$ per ogni $k \in \{1, 2, 3, 4\}$, $P(B|X = 1) = \frac{2}{3}$, $P(B|X = 2) = \frac{2}{4}$, $P(B|X = 3) = \frac{2}{5}$ e $P(B|X = 4) = \frac{2}{6}$. Sostituendo si ottiene $P(X = 1|B) = \frac{20}{57}$, $P(X = 2|B) = \frac{15}{57}$, $P(X = 3|B) = \frac{12}{57}$ e $P(X = 4|B) = \frac{10}{57}$.
Osservazione: si ha $\sum_{k=1}^4 P(X = k|B) = 1$ in accordo con la teoria.

Esercizio 3.
`D5`) Si ha $p_{X_1}(x_1) = \sum_{x_2=x_1}^\infty p_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \frac{\lambda^{x_1}}{x_1!}pe^{-\lambda(1-p)}\sum_{x_2=x_1}^\infty(1-p)^{x_2} = \frac{\lambda^{x_1}}{x_1!}pe^{-\lambda(1-p)}\frac{(1-p)^{x_1}}{1-(1-p)} = \frac{(\lambda(1-p))^{x_1}}{x_1!}e^{-\lambda(1-p)}$ per $x_1 \geq 0$ intero.
Osservazione: X_1 ha distribuzione di Poisson di parametro $\lambda(1-p)$.
`D6`) Si ha $P(X_1 = X_2) = \sum_{k=1}^\infty p_{X_1,X_2}(k, k) = \sum_{k=1}^\infty \frac{\lambda^k}{k!}(1-p)^k pe^{-\lambda(1-p)} = pe^{-\lambda(1-p)}\sum_{k=1}^\infty \frac{(\lambda(1-p))^k}{k!} = p$.

Esercizio 4.
`D7`) Si ha $P(Y > 0) = 1$, e quindi $F_Y(y) = 0$ per $y \leq 0$. Per $y > 0$ si ha $F_Y(y) = P(\log(X/b) \leq y) = P(X \leq be^y) = ab^a\int_b^{be^y} x^{-(a+1)}dx = ab^a\frac{[x^{-a}]_{x=b}^{x=be^y}}{-a} = b^a(b^{-a} - (be^y)^{-a}) = 1 - e^{-ay}$. In conclusione la densità continua è $f_Y(y) = ae^{-ay}1_{(0,\infty)}(y)$.
Osservazione: X ha distribuzione esponenziale di parametro a.
`D8`) Si ha $\mathbb{E}[X] = \int_b^\infty xab^a x^{-(1+a)}dx = ab^a\int_b^\infty x^{-a}dx$ e quindi l'integrale diverge se $a \in (0, 1]$; al contrario, se $a > 1$, si ha $\mathbb{E}[X] = ab^a\frac{[x^{-a+1}]_{x=b}^{x=\infty}}{-a+1} = ab^a\frac{b^{-a+1}}{a-1} = \frac{ab}{a-1}$.

Esercizio 5.
`D9`) Si ha

$$P(X > 1|0 < X < x) = \frac{P(\{X > 1\} \cap \{0 < X < x\})}{P(0 < X < x)} = \frac{P(1 < X < x)}{P(0 < X < x)}$$
$$= \frac{P(0 < \frac{X-1}{\sqrt{4}} < \frac{x-1}{\sqrt{4}})}{P(\frac{-1}{\sqrt{4}} < \frac{X-1}{\sqrt{4}} < \frac{x-1}{\sqrt{4}})} = \frac{\Phi((x-1)/2) - 0.5}{\Phi((x-1)/2) - \Phi(-1/2)} = \frac{\Phi((x-1)/2) - 0.5}{\Phi((x-1)/2) + \Phi(1/2) - 1}.$$

Allora imponendo che tale probabilità condizionata sia uguale ad 1/2 si ottiene

$$2\Phi((x-1)/2) - 1 = \Phi((x-1)/2) + \Phi(1/2) - 1,\ \Phi((x-1)/2) = \Phi(1/2),\ x-1 = 1,\ x = 2.$$

`D10`) La probabilità richiesta è $P(S \geq 410.5)$ con S somma di Poissoniane indipendenti e tutte con lo stesso parametro. Allora per l'approssimazione Normale si ha

$$P(S \geq 410.5) = P\left(\frac{S - 100\cdot 4}{\sqrt{100}\sqrt{4}} > \frac{410.5 - 100\cdot 4}{\sqrt{100}\sqrt{4}}\right) \approx 1 - \Phi\left(\frac{410.5 - 100\cdot 4}{\sqrt{100}\sqrt{4}}\right) = 1 - \Phi(0.525).$$

Esercizio 6.

`D11`) Osserviamo che $\{3,4\}$ è una classe chiusa irriducibile; quindi, per ogni n, $P(X_n = i) = 0$ per $i \notin \{3,4\}$. Al contrario, per $i \in \{3,4\}$, dobbiamo fare riferimento al teorema di Markov applicato alla sottocatena ristretta agli stati $\{3,4\}$ (infatti si ha regolarità per stretta positività della corrispondente matrice di transizione). Quindi, per $i \in \{3,4\}$, per n grande si ha $P(X_n = i) \approx \pi_i$ dove (π_3, π_4) soddisfa la seguente condizione

$$(\pi_3, \pi_4) \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = (\pi_3, \pi_4).$$

Le due equazioni corrispondenti si riducono a $\frac{2}{3}\pi_3 = \frac{1}{2}\pi_4$ e, tenendo conto la ulteriore condizione $\pi_3 + \pi_4 = 1$, otteniamo $\pi_3 = \frac{3}{7}$ e $\pi_4 = \frac{4}{7}$.

`D12`) L'insieme degli stati che comunicano con C e non appartenenti a C si riduce a $\{5\}$. Quindi il sistema delle equazioni delle probabilità di passaggio per C si riduce alla seguente unica equazione con incognita q (che è la probabilità richiesta)

$$q = p_{51} + p_{52} + p_{55}q,$$

da cui segue

$$q = \frac{7+5}{100} + \frac{52}{100}q, \ \frac{48}{100}q = \frac{12}{100}, \ q = \frac{12}{48} = \frac{1}{4}.$$

Osservazione: quando la catena lascia lo stato 5 non ci ritorna più, e quindi possiamo dire che $q = \frac{p_{51}+p_{52}}{p_{51}+p_{52}+p_{53}+p_{54}}$.