Laurea Triennale in Scienza e Tecnologia dei Media, Università di Roma Tor Vergata
**Calcolo delle Probabilità**
*Anno accademico:* `2018-2019`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
**Appello del 29 Gennaio 2019**
Esercizi 1,2,3,4,5 per gli studenti che sostengono l'esame da 6 crediti.
Esercizi 1,2,3,4,5,6 per gli studenti che sostengono l'esame da 8 crediti.

**Esercizio 1**.
Si considerano lanci di una moneta, e indichiamo con $p$ la probabilità che esca testa lanciandola.
D1) Calcolare la probabilità che esca una volta testa su 3 lanci nel caso in cui $p = 3/4$.
D2) Calcolare la probabilità che esca almeno due volte testa su 4 lanci nel caso in cui $p = 1/2$ (moneta equa).
D3) Dire per quali valori di $p$ la probabilità di ottenere una volta testa su 2 lanci è uguale a $\frac{5}{18}$.

**Esercizio 2**.
Un'urna ha 2 palline bianche e 1 nera. Si lancia una moneta equa: se esce testa l'urna resta inalterata, se esce croce si mettono 2 palline nere nell'urna. Poi si estrae una pallina a caso dall'urna.
D4) Calcolare la probabilità di estrarre una pallina bianca.

**Esercizio 3**.
Abbiamo due monete. In generale, per $i \in \{1, 2\}$, sia $p_i$ la probabilità che esca testa lanciando la moneta $i$. Si lanciano ripetutamente le due monete, e siano $X_1$ e $X_2$ le variabili aleatorie che contano il numero dei lanci necessari per avere per la prima volta testa lanciando le monete 1 e 2, rispettivamente.
D5) Calcolare $P(X_1 = X_2)$, cioè la probabilità che si abbia testa per la prima volta con le due monete dopo lo stesso numero di lanci.
D6) Calcolare $P(X_1 = 1, X_2 = 1|X_1 + X_2 \leq 3)$.

**Esercizio 4**. Sia $X$ una variabile aleatoria continua con distribuzione uniforme su $(a, b)$, per $b > a > 0$.
D7) Trovare la funzione di distribuzione di $Y = e^{\sqrt{X}}$.
D8) Calcolare $\mathbb{E}\left[e^X\right]$.

**Esercizio 5**.
Poniamo $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.
D9) Siano $Y_1$ e $Y_2$ due variabili aleatorie Normali standard indipendenti. Si esprima $P(3Y_1 - Y_2 < x)$ tramite la funzione $\Phi$, dove $x \in \mathbb{R}$ è arbitrariamente fissato.
D10) Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. (indipendenti e identicamente distribuite), con distribuzione di Poisson di parametro $\lambda = 16$. Trovare il valore di $y \in \mathbb{R}$ per cui si ha

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - 16n}{\sqrt{n}} \leq y\right) = \Phi(5/2).$$

**Esercizio 6**.
Consideriamo una catena di Markov omogenea $\{X_n : n \geq 0\}$ con spazio degli stati $E = \{1, 2, 3, 4\}$ e matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & 1-p_1 & 0 & 0 \\ p_2 & 1-p_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & 1-p_3 \\ 0 & 0 & p_4 & 1-p_4 \end{pmatrix},$$

dove $p_1, p_2, p_3, p_4 \in (0, 1)$.
D11) Calcolare $\lim_{n\to\infty} P(X_n = j)$ per $j \in E$, nel caso in cui $P(X_0 \in \{1, 2\}) = 1$.
D12) Calcolare $P(X_1 = j)$ per $j \in E$, nel caso in cui $P(X_0 = i) = 1/4$ per ogni $i \in E$.

**Cenno alle soluzioni** (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

**Esercizio 1**.
D1) Per la teoria della distribuzione Binomiale la probabilità richiesta è $\binom{3}{1}(\frac{3}{4})^1(1-\frac{3}{4})^{3-1} = \frac{9}{64}$.
D2) Per la teoria della distribuzione Binomiale la probabilità richiesta è $\sum_{k=2}^4 \binom{4}{k}(\frac{1}{2})^4 = \frac{6+4+1}{16} = \frac{11}{16}$, oppure in maniera equivalente $1 - \sum_{k=0}^1 \binom{4}{k}(\frac{1}{2})^4 = 1 - \frac{1+4}{16} = \frac{11}{16}$.
D3) Per la teoria della distribuzione Binomiale si deve considerare l'equazione $\binom{2}{1}p^1(1-p)^{2-1} = \frac{5}{18}$, da cui segue $2p(1-p) = \frac{5}{18}$, $p - p^2 = \frac{5}{36}$, $p^2 - p + \frac{5}{36} = 0$, $p = \frac{1 \pm \sqrt{1-4\frac{5}{36}}}{2} = \frac{1 \pm \frac{2}{3}}{2}$. In conclusione abbiamo due valori di $p$: $p_1 = \frac{5}{6}$ e $p_2 = \frac{1}{6}$.
*Osservazione*: in generale, a partire dalla equazione di secondo grado $2p(1-p) = \frac{5}{18}$, potevamo subito dire che, se $p$ è soluzione, lo è anche $1-p$; in questo senso le soluzioni trovate sono in accordo con questa osservazione.

**Esercizio 2**.
D4) Sia $B$ l'evento "estratta bianca" e $T$ l'evento "esce testa". Allora, per la formula delle probabilità totali, la probabilità richiesta è

$$P(B) = P(B|T)P(T) + P(B|T^c)P(T^c) = \frac{2}{3}\frac{1}{2} + \frac{2}{5}\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}.$$

**Esercizio 3**.
D5) Si ha

$$\begin{aligned} P(X_1 = X_2) &= \sum_{k=1}^{\infty}(1-p_1)^{k-1}p_1(1-p_2)^{k-1}p_2 \\ &= p_1p_2\sum_{k=1}^{\infty}((1-p_1)(1-p_2))^{k-1} = p_1p_2\frac{1}{1-(1-p_1)(1-p_2)} = \frac{p_1p_2}{p_1+p_2-p_1p_2}. \end{aligned}$$

D6) Si ha

$$\begin{aligned} P(X_1 = 1, X_2 = 1|X_1 + X_2 \leq 3) &= \frac{P(X_1 = 1, X_2 = 1, X_1 + X_2 \leq 3)}{P(X_1 + X_2 \leq 3)} \\ &= \frac{P(X_1 = 1, X_2 = 1)}{P((X_1, X_2) \in \{(1,1),(1,2),(2,1)\})} = \frac{p_1p_2}{p_1p_2 + p_1(1-p_2)p_2 + (1-p_1)p_1p_2} = \frac{1}{3-p_1-p_2}. \end{aligned}$$

**Esercizio 4**.
D7) Si ha $P(e^{\sqrt{a}} \leq Y \leq e^{\sqrt{b}}) = 1$, da cui segue $F_Y(y) = 0$ per $y \leq e^{\sqrt{a}}$ e $F_Y(y) = 1$ per $y \geq e^{\sqrt{b}}$. Per $y \in (e^{\sqrt{a}}, e^{\sqrt{b}})$ si ha

$$F_Y(y) = P(e^{\sqrt{X}} \leq y) = P(\sqrt{X} \leq \log y) = P(X \leq (\log y)^2) = \int_a^{(\log y)^2} \frac{1}{b-a}dx = \frac{(\log y)^2 - a}{b-a}.$$

D8) Si ha

$$\mathbb{E}[e^X] = \int_a^b e^x \frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}[e^x]_{x=a}^{x=b} = \frac{e^b - e^a}{b-a}.$$

*Osservazione*: in questa domanda basta avere $b > a$ anziché $b > a > 0$.

**Esercizio 5**.
D9) La variabile aleatoria $3Y_1 - Y_2$ ha distribuzione Normale centrata con varianza $3^2 + (-1)^2 = 10$ (essendo una combinazione lineare di Normali indipendenti). Allora si ha

$$P(3Y_1 - Y_2 < x) = P\left(\frac{3Y_1 - Y_2}{\sqrt{10}} < \frac{x}{\sqrt{10}}\right) = \Phi(x/\sqrt{10}).$$

D10) Le variabili aleatorie $\{X_n : n \geq 1\}$ hanno media 16 e varianza 16. Allora, ponendo $\sigma = \sqrt{16} = 4$, per il teorema limite centrale si ha

$$P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - 16n}{\sqrt{n}} \leq y\right) = P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - 16n}{\sigma\sqrt{n}} \leq \frac{y}{4}\right) \to \Phi\left(\frac{y}{4}\right).$$

In corrispondenza si ha $\frac{y}{4} = \frac{5}{2}$, da cui segue $y = 10$.

**Esercizio 6.**
D11) Abbiamo due classi chiuse e irriducibili: $\{1, 2\}$ e $\{3, 4\}$. Dato che $P(X_0 \in \{1, 2\}) = 1$, si tratta di applicare il teorema di Markov alla sottocatena ristretta alla classe chiusa irriducibile $\{1, 2\}$ (questo è consentito dal fatto che tale sottocatena ha matrice di transizione tutta positiva). In corrispondenza si ha

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = j) = \begin{cases} q & \text{se } j = 1 \\ 1-q & \text{se } j = 2 \\ 0 & \text{se } j \in \{3, 4\}, \end{cases}$$

dove $(q, 1 - q)$ è l'unica distribuzione invariante per la sottocatena ristretta a $\{1, 2\}$. Il caso $j \in \{3, 4\}$ è ovvio perché si ha $P(X_n = j) = 0$ per ogni $n$; inoltre, per quanto riguarda $(q, 1 - q)$, si ha

$$(q, 1-q)\begin{pmatrix} p_1 & 1-p_1 \\ p_2 & 1-p_2 \end{pmatrix} = (q, 1-q),$$

che equivale al sistema

$$\begin{cases} qp_1 + (1-q)p_2 = q \\ q(1-p_1) + (1-q)(1-p_2) = 1-q, \end{cases}$$

da cui segue $q = \frac{p_2}{1-p_1+p_2}$ (con semplici calcoli a partire da ciascuna delle due equazioni) e $1 - q = \frac{1-p_1}{1-p_1+p_2}$.
D12) I valori $\pi_j^{(1)} = P(X_1 = j)$ per $j \in E$ si ottengono a partire dalla seguente relazione matriciale:

$$\begin{aligned}(\pi_1^{(1)}, \pi_2^{(1)}, \pi_3^{(1)}, \pi_4^{(1)}) &= (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)\begin{pmatrix} p_1 & 1-p_1 & 0 & 0 \\ p_2 & 1-p_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & 1-p_3 \\ 0 & 0 & p_4 & 1-p_4 \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{p_1+p_2}{4}, \frac{1}{2} - \frac{p_1+p_2}{4}, \frac{p_3+p_4}{4}, \frac{1}{2} - \frac{p_3+p_4}{4}\right).\end{aligned}$$