

Cognome:..... Nome:..... Matr.:.....

Esercizio 1 [16 punti]

A: *notazione asintotica*. Dire quali delle seguenti relazioni asintotiche sono vere:

$$n^{1/4} \log n + \sqrt{\log n} = \Omega(n^{1/3}); \quad \frac{n}{\log^2 n} = o\left(\frac{n+3}{\log^4 n}\right); \quad \frac{n^3 + \log n}{\sqrt{n}} = \Theta(n^{2.5}); \quad \sqrt[4]{\log n} = O(\log \log n);$$
$$2^{\sqrt{\log n}} = o(n^3); \quad 2^n = \Theta(2^{n-10}); \quad 2^{n+2} = \Theta(2^{n/2}); \quad 2^{2n} = \Theta(4^n + 2^{n/2});$$

B: *equazioni di ricorrenza*. Fornire la soluzione asintotica alle seguenti relazioni di ricorrenza:

$$T(n) = 4T(n/2) + n\sqrt{n}; \quad \text{Soluzione:}$$

$$T(n) = T(n-1) + T(n-2) + 1; \quad \text{Soluzione:}$$

C: *algoritmi e complessità*. Quale algoritmo useresti e quanto costa se devi:

- In un grafo diretto e pesato, calcolare la distanza da s a t e da t a tutti gli altri nodi:
- In un grafo orientato, capire se uno specifico nodo s può raggiungere ed essere raggiunto da tutti gli altri nodi:
- Ordinare n numeri:
- Selezionare i 5 numeri più grandi in un vettore di n numeri:

Esercizio 2 [8 punti]

Sia T un albero binario con n , dove ogni nodo v di T ha un colore $v.col$ che può essere *Blu* (B) o *Giallo* (G), e quindi $v.col \in \{B, G\}$. Si progetti un algoritmo che dato T e un intero h , restituisca il numero di foglie gialle di T che hanno profondità almeno h .¹

Si assuma che T è rappresentato tramite una struttura dati collegata, con record e puntatori, dove il record di ogni nodo, oltre al campo $v.col$, contiene anche il puntatore al figlio sinistro e al figlio destro del nodo. L'algoritmo deve avere complessità $O(n)$. Si fornisca lo pseudocodice dettagliato.

Esercizio 3 [8 punti]

Si progetti un algoritmo che, presi due vettori $A[1:n]$ e $B[1:n]$ di n numeri positivi l'uno, calcoli il più piccolo indice $i \in \{1, \dots, n\}$ tale che

$$\sum_{k=1}^i A[k] > \sum_{k=i}^n B[k].$$

L'algoritmo deve avere complessità temporale $O(n)$. Il punteggio pieno è assegnato solo se l'algoritmo usa anche memoria ausiliaria costante, ma anche soluzioni più inefficienti rispetto all'uso di memoria saranno valutate.

¹Si ricordi che la profondità di un nodo è la sua distanza (misurata in numero di archi) dalla radice.