SOLUZIONI

1) (i) Fissato $K>0$ troviamo $n_K \in \mathbb{N}$ t.c.

$$\forall n \geq n_K \quad a_n > K$$

$$\Rightarrow 3n - 1 > K$$

$$\Rightarrow n > \frac{K+1}{3}$$

Dunque scelgo come $n_K := \lfloor \frac{K+1}{3} \rfloor + 1$
cioé la parte intera di $\frac{K+1}{3}$ aumentato di 1

(ii) Fissato $\varepsilon>0$ troviamo $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n \geq n_\varepsilon$

$$|a_n - \ell| < \varepsilon$$

Allora in questo caso

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{n} + 3 - 3 \right| < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{1}{n} \right| < \varepsilon$$

Posso togliere il modulo perché $\frac{1}{n} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Scelgo allora $n_\varepsilon := \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$

(iii) Fisso $M<0$

$$1 - 2n^2 < M$$

$$\Rightarrow n^2 > \frac{1-M}{2} \Longrightarrow n > \sqrt{\frac{1-M}{2}}$$

Osserviamo che $\frac{1-M}{2} > 0$

(Considero solo la radice positiva perché $n \in \mathbb{N}$ dunque non mi interessa quando $n < -\sqrt{\frac{1-M}{2}}$)

Allora scelgo

Scansionato con CamScanner

$$n_M := \left\lfloor \sqrt{\frac{1-M}{2}} \right\rfloor + 1$$

(iv) Fisso $\varepsilon > 0$. Troviamo $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \left| \frac{n-1}{n} - 1 \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{n-1-n}{n} \right| < \varepsilon \Rightarrow \left| -\frac{1}{n} \right| < \varepsilon$$

$\Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon$ e quindi come prima

$$n_\varepsilon := \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$$

(v) $\varepsilon > 0$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{3n^2+10} \right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{3n^2+10} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow 3n^2+10 > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n^2 > \frac{1}{3\varepsilon} - \frac{10}{3}$$

(Osserviamo che se $\varepsilon > \frac{1}{10}$ allora la definizione é verificata $\forall n \in \mathbb{N}$ dunque potremmo prendere ogni $n \in \mathbb{N}$ come n_ε per verificare la definizione)

Supponiamo allora che $0 < \varepsilon < \frac{1}{10}$

$$\Rightarrow n > \sqrt{\frac{1}{3\varepsilon} - \frac{10}{3}}$$

Scegliamo allora (nel caso in cui $0 < \varepsilon < \frac{1}{10}$):

$$n_\varepsilon := \left\lfloor \sqrt{\frac{1}{3\varepsilon} - \frac{10}{3}} \right\rfloor + 1$$

(vi) Fisso $K > 0$

$$2n^2 - 3 > K$$

$$n^2 > \frac{K+3}{2} \implies n > \sqrt{\frac{K+3}{2}}$$

$$\implies n_K := \left\lfloor \sqrt{\frac{K+3}{2}} \right\rfloor + 1$$

(vii) $\varepsilon > 0$

$$\left| \frac{n}{2n^2+1} \right| < \varepsilon \implies \frac{n}{2n^2+1} < \varepsilon$$

$$2\varepsilon n^2 - n + \varepsilon > 0$$

Ci calcoliamo le soluzioni dell'equazione di 2° grado associata, che sono $\dfrac{1 \pm \sqrt{1-8\varepsilon^2}}{4\varepsilon}$

Come prima, se $1-8\varepsilon^2 < 0$ (e quindi $\varepsilon > \frac{\sqrt{2}}{4}$) allora la definizione é verificata $\forall n \in \mathbb{N}$)

Supponendo allora che $0 < \varepsilon < \frac{\sqrt{2}}{4}$, prendendo la radice di grande tra le due abbiamo che l'n_ε cercato é

$$n_\varepsilon := \left\lfloor \frac{1+\sqrt{1-8\varepsilon^2}}{4\varepsilon} \right\rfloor + 1$$

(viii) $M < 0$

$$\frac{2-n^2}{1+n} < M \implies 2-n^2 < M + nM$$

$$n^2 + nM + (M-2) > 0$$

Calcoliamo le soluzioni

$$\Rightarrow \quad \frac{-M \pm \sqrt{M^2 - 4M + 8}}{2}$$

Allora (come prima) $n_M := \left\lfloor \frac{-M + \sqrt{M^2 - 4M + 8}}{2} \right\rfloor + 1$

(ix) $\varepsilon > 0$

$$|\sqrt{n+1} - \sqrt{n}| < \varepsilon$$

è positivo

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \varepsilon$$

$$\sqrt{n+1} < \varepsilon + \sqrt{n}$$

$$n + 1 < \varepsilon^2 + n + 2\varepsilon\sqrt{n}$$

$$2\varepsilon\sqrt{n} > 1 - \varepsilon^2$$

$$\sqrt{n} > \frac{1 - \varepsilon^2}{2\varepsilon} \quad (\text{Supponiamo } \varepsilon < 1)$$

$$n > \frac{\varepsilon^4 - 2\varepsilon^2 + 1}{4\varepsilon^2}$$

Allora $n_\varepsilon := \left\lfloor \frac{\varepsilon^4 - 2\varepsilon^2 + 1}{4\varepsilon^2} \right\rfloor + 1$

(x) $\varepsilon > 0$

$$\left| \frac{n^2 + 3}{2n^2 + 1} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$$

Scansionato con CamScanner

$$\left|\frac{\cancel{2n^2}+6-\cancel{2n^2}-1}{2(2n^2+1)}\right|<\varepsilon$$

$$\frac{5}{2(2n^2+1)}<\varepsilon \Rightarrow 2n^2+1>\frac{5}{2\varepsilon}$$

$$n^2>\frac{5}{4\varepsilon}-\frac{1}{2} \qquad \left(\begin{matrix}\text{Supponiamo}\\ \varepsilon<5/2\end{matrix}\right)$$

$$\Rightarrow n_\varepsilon := \left\lfloor \sqrt{\frac{5}{4\varepsilon}-\frac{1}{2}} \right\rfloor +1$$

2) (i) $a_n = 10-2(-1)^n \quad n\in\mathbb{N}$

Non ammette limite perché é possibile trovare 2 sottosuccessioni che tendono a limiti diversi (se $\exists$ il limite allora tutte le sottosuccessioni dovrebbero tendere a quel limite)

Chi sono le 2 sottosuccessioni?

In corrispondenza degli n pari abbiamo una sottosuccessione che vale costantemente 8 e quindi tende a 8, mentre in corrispondenza dei dispari abbiamo la sottosuccessione che tende a 12 (perché é costante)

(ii) $a_n = 3^n(-1)^{3n} \quad n\in\mathbb{N}$

Anche qui in corrispondenza dei pari abbiamo $a_{n_k}=3^{2k}\xrightarrow{k\to+\infty}+\infty$

e dei dispari invece $a_{n_h}=-3^{2h+1}\xrightarrow{h\to+\infty}-\infty$

E quindi il limite non esiste.

3) (i) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+4} - 4 = +\infty$

(ii) $$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{1-n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{\cancel{2}}}{\cancel{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\overset{\to+\infty}{n}}{\underset{\to -1}{\frac{1}{n}-1}} = +\infty$$

(iii) $$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} - \sqrt{n+1}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}{(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}$$

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{n}-\cancel{n}-1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-1}{\underset{\to+\infty}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}} = 0$$

(iv) $$\lim_{n\to+\infty} n-\sqrt{n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} n\left(1-\frac{\sqrt{n}}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \underset{\downarrow\atop +\infty}{n}\left(\underset{\downarrow\atop 1}{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}\right) = +\infty$$

(v) $$\lim_{n\to+\infty} e^{1/n}-n = e^0 - \infty = 1-\infty = -\infty$$

(vi) $$\lim_{n\to+\infty} \frac{\cos(n)}{n} = 0$$

Perché? $\cos(n)$ oscilla tra -1 e 1 dunque ~~è una quantità~~ al limite non so dove va ma so per ~~ch~~ certo che è una quantità limitata, diviso una quantità che va all'infinito.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{-1}{n} \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{\cos(n)}{n} \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}$$

$$\downarrow n\to+\infty \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow n\to+\infty$$

$$0 \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{\cos(n)}{n} \leq 0$$

Questo è il cosiddetto "teorema dei carabinieri".

(vii) $$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+2n}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{\cancel{2}}\left(1+\frac{2}{n}\right)}{\cancel{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \underbrace{n}_{\downarrow\, +\infty} \underbrace{\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}}}_{\downarrow\, 1} = +\infty$$

(viii) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n+1} - \frac{n^2+1}{n}$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3-(n^2+1)(n+1)}{n(n+1)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{n^3}-\cancel{n^3}-n^2-n-1}{n(n+1)}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{-n^2-n-1}{n^2+n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{n^2}\left(-1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}{\cancel{n^2}\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{-1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}} = -1$$

(ix) $\lim_{n\to+\infty} \frac{1-n^2}{\sqrt{n}+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2\left(\frac{1}{n^2}-1\right)}{\sqrt{n}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}$

$$= \lim_{n\to+\infty} n\sqrt{n}\,\frac{\left(\frac{1}{n^2}-1\right)}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} = -\infty$$

(x) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n+2}-\sqrt{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})}{(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})}$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{n}+2-\cancel{n}-1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} = 0$$

(xi) $\lim_{n\to+\infty} n-\sin(n) = +\infty$

$$\lim_{n\to+\infty} n-1 \leq \lim_{n\to+\infty} n-\sin(n) \leq \lim_{n\to+\infty} n+1$$

$$\downarrow n\to+\infty \qquad\qquad \downarrow n\to+\infty$$

$$+\infty \leq \lim_{n\to+\infty} n-\sin(n) \leq +\infty$$

(xii) $\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n\sin(n)}{\sqrt{n}} = 0$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{-1}{\sqrt{n}} \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n\sin(n)}{\sqrt{n}} \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\downarrow n\to+\infty \qquad\qquad \downarrow n\to+\infty$$

$$0 \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n\sin(n)}{\sqrt{n}} \leq 0$$

(xiii) $\lim_{n\to+\infty} \left(2+\frac{1}{n}\right)^n = +\infty$ perché $0 \leq \frac{1}{n} \leq 1$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} (2)^n \leq \lim_{n\to+\infty} \left(2+\frac{1}{n}\right)^n \leq \lim_{n\to+\infty} (3)^n$$

$$\downarrow n\to+\infty \qquad\qquad \downarrow n\to+\infty$$

$$+\infty \leq \lim_{n\to+\infty} \left(2+\frac{1}{n}\right)^n \leq +\infty$$

(xiv)
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+2}\right)^{1/n}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{\cancel{n}\left(1+\frac{2}{n}\right)}\right)^{1/n}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{2}{n}}\right)^{1/n}=1^0=1$$

(xv) $$\lim_{n\to+\infty}\left(\sin(\sin(n!))\right)^n=0$$

Osserviamo che $\boxed{-1\leq\sin(n!)\leq 1}$

$\Rightarrow$

$$\lim_{n\to+\infty}(\sin(-1))^n\leq\lim_{n\to+\infty}(\sin(\sin(n!)))^n\leq\lim_{n\to+\infty}(\sin(1))^n$$

$$\downarrow n\to+\infty \qquad\qquad \downarrow n\to+\infty$$

$$0\leq\lim_{n\to+\infty}(\sin(\sin(n!)))^n\leq 0$$

$$\boxed{\text{Perché }\lim_{n\to+\infty}(\sin(-1))^n=\lim_{n\to+\infty}(\sin(1))^n=0\ ?}$$

Esercizio