Laurea Triennale in Informatica, Università di Roma Tor Vergata
Calcolo delle Probabilità e Statistica (ed insegnamenti mutuati)
Anno accademico: `2010-2011`. *Titolare del corso:* `Claudio Macci`
Simulazione 1

Esercizio 1. Un'urna ha 5 palline numerate da 1 a 5. Si estraggono a caso 4 palline in blocco.
`D1`) Trovare la densità della variabile aleatoria X che conta il numero di palline con numero dispari estratte.
`D2`) Trovare la densità della variabile aleatoria Y che indica la differenza tra il massimo e il minimo tra i numeri estratti.

Esercizio 2. Sia X la variabile aleatoria che indica il numero che esce lanciando un dado equo. Dopo aver lanciato il dado si mettono X palline numerate da 1 a X in un'urna inizialmente vuota. Poi si estrae una pallina a caso tra quelle inserite nell'urna.
`D3`) Calcolare la probabilità di estrarre un numero maggiore o uguale a 5.
`D4`) Calcolare la probabilità di aver ottenuto il numero 6 nel lancio del dado sapendo di aver estratto un numero maggiore o uguale a 5.

Esercizio 3. Consideriamo la seguente densità congiunta: $p_{X_1,X_2}(0,0) = p_{X_1,X_2}(1,0) = p_{X_1,X_2}(2,0) = p_{X_1,X_2}(0,2) = p_{X_1,X_2}(1,2) = p_{X_1,X_2}(2,2) = \frac{1}{10}$ e $p_{X_1,X_2}(0,1) = p_{X_1,X_2}(2,1) = \frac{1}{5}$.
`D5`) Calcolare $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$.
`D6`) Trovare la densità di $Z = X_1 - X_2$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con distribuzione uniforme su $(-1, 1)$.
`D7`) Trovare la densità di $Y = e^{-|X|}$.
`D8`) Calcolare $\mathbb{E}[Y]$.

Esercizio 5. Sia $N_t = \sum_{n\geq 1} 1_{T_n \leq t}$ (per $t \geq 0$) un processo di Poisson con intensità di $\lambda = \frac{7}{3}$.
`D9`) Calcolare $P(N_3 = 4)$.
`D10`) Calcolare $\mathbb{E}[T_2]$.

Esercizio 6. Sia X una variabile aleatoria con distribuzione normale di media 2 e varianza 4.
`D11`) Calcolare $P(1 < X < 2.5)$.
`D12`) Calcolare $P(X > 2.8)$.

Esercizio 7 (*solo per ST-Materiali*). Consideriamo una catena di Markov omogenea $\{X_n : n \geq 0\}$ con spazio degli stati $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{q}{2} & \frac{q}{2} & \frac{1-q}{2} & \frac{1-q}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-q}{2} & \frac{1-q}{2} & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

per $q \in (0, 1]$.
`D13`) Trovare la distribuzioni stazionarie.
`D14`) Calcolare le probabilità di passaggio in $C_1 = \{1, 2\}$ partendo da 3 e partendo da 4.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1.
D1) La variabile aleatoria X ha distribuzione ipergeometrica e si ha $p_X(k) = \frac{\binom{3}{k}\binom{2}{4-k}}{\binom{5}{4}}$ per $k \in \{0,1,2,3,4\}$. Dunque si ha $p_X(2) = \frac{3}{5}$ e $p_X(3) = \frac{2}{5}$.
D2) Abbiamo 5 casi tutti con probabilità $\frac{1}{5}$: $\{1,2,3,4\}$, $\{1,2,3,5\}$, $\{1,2,4,5\}$, $\{1,3,4,5\}$, $\{2,3,4,5\}$. Nel primo e nell'ultimo caso la variabile aleatoria Y assume il valore 3, negli altri casi assume il valore 4. Dunque si ha $p_X(3) = \frac{2}{5}$ e $p_X(4) = \frac{3}{5}$.

Esercizio 2. Sia E l'evento "si estrae un numero maggiore o uguale a 5".
D3) Per la formula delle probabilità totali si ha $P(E) = \sum_{i=1}^{6} P(E|X=i)P(X=i) = \frac{1}{6}(0+0+0+0+\frac{1}{5}+\frac{2}{6}) = \frac{1}{6}(\frac{1}{5}+\frac{1}{3}) = \frac{1}{6}\frac{3+5}{15} = \frac{4}{45}$.
D4) Per la formula di Bayes (e per il valore di $P(E)$ calcolato prima) si ha $P(X=6|E) = \frac{P(E|X=6)P(X=6)}{P(E)} = \frac{\frac{2}{6}\frac{1}{6}}{\frac{4}{45}} = \frac{1}{18}\frac{45}{4} = \frac{5}{8}$.

Esercizio 3.
D5) Si ha $\mathrm{Cov}(X_1,X_2) = \mathbb{E}[X_1X_2] - \mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[X_2] = 0$ perché si ha: $\mathbb{E}[X_1X_2] = \sum x_1x_2p_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = 0\cdot0\cdot\frac{1}{10} + 1\cdot0\cdot\frac{1}{10} + 2\cdot0\cdot\frac{1}{10} + 0\cdot1\cdot\frac{1}{5} + 2\cdot1\cdot\frac{1}{5} + 0\cdot2\cdot\frac{1}{10} + 1\cdot2\cdot\frac{1}{10} + 2\cdot2\cdot\frac{1}{10} = \frac{0+0+0+0+4+0+2+4}{10} = 1$; $p_{X_1}(0) = p_{X_1,X_2}(0,0) + p_{X_1,X_2}(0,1) + p_{X_1,X_2}(0,2) = \frac{1}{10} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \frac{1+2+1}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$, $p_{X_1}(1) = p_{X_1,X_2}(1,0) + p_{X_1,X_2}(1,2) = \frac{1+1}{10} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$, $p_{X_1}(2) = p_{X_1,X_2}(2,0) + p_{X_1,X_2}(2,1) + p_{X_1,X_2}(2,2) = \frac{1}{10} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \frac{1+2+1}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$, da cui $\mathbb{E}[X_1] = 0\cdot\frac{2}{5} + 1\cdot\frac{1}{5} + 2\cdot\frac{2}{5} = \frac{0+1+4}{5} = 1$; $p_{X_2}(0) = p_{X_1,X_2}(0,0) + p_{X_1,X_2}(1,0) + p_{X_1,X_2}(2,0) = \frac{1+1+1}{10} = \frac{3}{10}$, $p_{X_2}(1) = p_{X_1,X_2}(0,1) + p_{X_1,X_2}(2,1) = \frac{1+1}{5} = \frac{2}{5} = \frac{4}{10}$, $p_{X_2}(2) = p_{X_1,X_2}(0,2) + p_{X_1,X_2}(1,2) + p_{X_1,X_2}(2,2) = \frac{1+1+1}{10} = \frac{3}{10}$, da cui $\mathbb{E}[X_2] = 0\cdot\frac{3}{10} + 1\cdot\frac{4}{10} + 2\cdot\frac{3}{10} = \frac{0+4+6}{10} = 1$.
D6) Si ha $p_Z(2) = p_{X_1,X_2}(2,0) = \frac{1}{10}$, $p_Z(1) = p_{X_1,X_2}(2,1) + p_{X_1,X_2}(1,0) = \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \frac{3}{10}$, $p_Z(0) = p_{X_1,X_2}(0,0) + p_{X_1,X_2}(2,2) = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{2}{10}$, $p_Z(-1) = p_{X_1,X_2}(0,1) + p_{X_1,X_2}(1,2) = \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \frac{3}{10}$, $p_Z(-2) = p_{X_1,X_2}(0,2) = \frac{1}{10}$.

Esercizio 4.
D7) Si vede che $P(e^{-1} \leq e^{-|X|} \leq 1) = 1$, da cui $F_Y(y) = 0$ per $y \leq e^{-1}$ e $F_Y(y) = 1$ per $y \geq 1$. Per $y \in (e^{-1}, 1)$ si ha $F_Y(y) = P(e^{-|X|} \leq y) = P(-|X| \leq \log y) = P(|X| \geq -\log y) = 2P(X \geq -\log y) = 2\int_{-\log y}^{1} \frac{1}{1-(-1)}dt = 1 + \log y$. Quindi la densità è $f_Y(y) = \frac{1}{y}1_{(e^{-1},1)}(y)$.
D8) Sfruttando la densità della Y ottenuta sopra, si ha $\mathbb{E}[Y] = \int_{e^{-1}}^{1} y\frac{1}{y}dy = 1 - e^{-1}$.

Esercizio 5.
D9) Si ha $P(N_3 = 4) = \frac{(\frac{7}{3}3)^4}{4!}e^{-\frac{7}{3}3} = \frac{2401}{24}e^{-7}$.
D10) Si ha $\mathbb{E}[T_2] = \frac{2}{7/3} = \frac{6}{7}$.

Esercizio 6.
D11) Si ha $P(1 < X < 2.5) = P(\frac{1-2}{\sqrt{4}} < Z_X < \frac{2.5-2}{\sqrt{4}}) = \Phi(0.25) - \Phi(-0.5) = \Phi(0.25) - (1-\Phi(0.5)) = \Phi(0.25) + \Phi(0.5) - 1 = 0.29017$.
D12) Si ha $P(X > 2.8) = P(Z_X > \frac{2.8-2}{\sqrt{4}}) = 1 - \Phi(0.4) = 0.34458$.

Esercizio 7.
Essendo $q \neq 0$ possiamo dire che gli stati transitori sono $T = \{3,4\}$. Inoltre abbiamo due classi irriducibili: $C_1 = \{1,2\}$ e $C_2 = \{5\}$.

`D13`) La distribuzione stazionaria sarà del tipo $(\alpha,\beta,0,0,1-\alpha-\beta)$. La relazione matriciale

$$(\alpha,\beta,0,0,1-\alpha-\beta)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \frac{q}{2} & \frac{q}{2} & \frac{1-q}{2} & \frac{1-q}{2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-q}{2} & \frac{1-q}{2} & q\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=(\alpha,\beta,0,0,1-\alpha-\beta)$$

fornisce le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \alpha=\beta\\ \beta=\alpha\\ 0=0\\ 0=0\\ 1-\alpha-\beta=1-\alpha-\beta. \end{cases}$$

Quindi le distribuzioni stazionarie saranno del tipo $(\frac{\gamma}{2},\frac{\gamma}{2},0,0,1-\gamma)$ per $\gamma\in[0,1]$.
`D14`) Lo stato 5 non comunica con $C_1=\{1,2\}$, mentre ciascuno stato in $T=\{3,4\}$ comunica con $C_1=\{1,2\}$. Allora la coppia (λ_3,λ_4), dove λ_i la probabilità di passaggio in C_1 partendo da $i\in\{3,4\}$, costituisce la soluzione del seguente sistema:

$$\begin{cases} \lambda_3=\frac{q}{2}+\frac{q}{2}+\frac{1-q}{2}\lambda_3+\frac{1-q}{2}\lambda_4\\ \lambda_4=\frac{1-q}{2}\lambda_3+\frac{1-q}{2}\lambda_4. \end{cases}$$

Il sistema si risolve come segue:

$$\begin{cases} \lambda_3=q+\lambda_4\\ \lambda_4\left(1-\frac{1-q}{2}\right)=\frac{1-q}{2}\lambda_3, \end{cases} \begin{cases} \lambda_3=q+\lambda_4\\ \lambda_4\frac{1+q}{2}=\frac{1-q}{2}\lambda_3, \end{cases} \begin{cases} \lambda_3=q+\lambda_4\\ \lambda_3=\frac{1+q}{1-q}\lambda_4; \end{cases}$$

sostituendo la seconda equazione nella prima si ottiene $\lambda_4=\frac{1-q}{2}$ e, ritornando alla seconda equazione, si ottiene $\lambda_3=\frac{1+q}{2}$.

Commenti.
La somma dei valori di ciascuna densità discreta che appare è 1 in accordo con la teoria.
`D1`) In effetti, se consideriamo i 5 casi (tutti con probabilità $\frac{1}{5}$) elencati nella risposta alla domanda successiva, abbiamo 3 casi con 2 numeri dispari e 2 casi con 3 numeri dispari.
`D5`) Anche se $\mathrm{Cov}(X_1,X_2)=0$, non possiamo dire che X_1 e X_2 sono indipendenti. Infatti non lo sono perché $p_{X_1,X_2}(1,1)=0$ e $p_{X_1}(1)p_{X_2}(1)=\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{2}{25}\neq 0$.
`D8`) In altro modo si ha $\mathbb{E}[Y]=\mathbb{E}[e^{-|X|}]=\int_{-1}^{1}e^{-|t|}\frac{1}{1-(-1)}dt=2\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-t}dt=[-e^{-t}]_{t=0}^{t=1}=1-e^{-1}$. In questo modo non c'è bisogno di conoscere f_Y (richiesta nella domanda precedente).
`D13`) Osserviamo che, per $\gamma\in[0,1]$, si ha $(\frac{\gamma}{2},\frac{\gamma}{2},0,0,1-\gamma)=\gamma(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,0,0)+(1-\gamma)(0,0,0,0,1)$; quindi abbiamo una combinazione lineare convessa tra le distribuzioni stazionarie relative alle catene ottenute restringendo lo spazio degli stati alle classi irriducibili C_1 e C_2 rispettivamente.
`D14`) Possiamo considerare le probabilità di passaggio per $C_2=\{5\}$. Gli stati di $C_1=\{1,2\}$ non comunicano con 5, mentre ciascuno stato in $T=\{3,4\}$ comunica con $C_2=\{5\}$. Allora la coppia (η_3,η_4), dove η_i la probabilità di passaggio in C_2 partendo da $i\in\{3,4\}$, costituisce la soluzione del seguente sistema:

$$\begin{cases} \eta_3=\frac{1-q}{2}\eta_3+\frac{1-q}{2}\eta_4\\ \eta_4=q+\frac{1-q}{2}\eta_3+\frac{1-q}{2}\eta_4. \end{cases}$$

Si verifica che $(\eta_3,\eta_4)=(\frac{1-q}{2},\frac{1+q}{2})$. Quindi si ha $\lambda_i+\eta_i=1$ per ogni $i\in T=\{3,4\}$ e questo è in accordo con la teoria perché, partendo da ciascuno stato $i\in T=\{3,4\}$, si ha uno e uno solo dei 2 seguenti casi: assorbimento in $C_1=\{1,2\}$; assorbimento in $C_2=\{5\}$.