

1.前导

1.1 符号对照

笔记内设计到的符号，其对照含义如下：

| | |
|--|---|
| \mathbf{r} | 向量 (小写粗体字母) |
| \mathbf{B} | 矩阵 (大写粗体字母) |
| $\mathbf{e}_x^A, \mathbf{e}_y^A, \mathbf{e}_z^A$ | 坐标系 A 的单位基向量 |
| \mathcal{A} | 坐标系 A (花体字母) |
| A | 坐标系 A 的原点 |
| $\mathbf{e}_x^I, \mathbf{e}_y^I, \mathbf{e}_z^I$ | 全局/惯性/世界坐标系 (固定不动) |
| ${}^A\mathbf{r}_{AP}$ | 在坐标系 A 中表示的点 P 相对于坐标系 A 的原点 A 的向量 |
| ϕ_{AB} | 描述坐标系 B 相对于坐标系 A 的旋转, 属于 $SO(3)$ |
| χ_P | 表示位置的堆积参数 |
| χ_R | 表示方向的堆积参数 |
| $\chi_{P,0}$ | 表示位置的最小维度的堆积参数 |
| $\chi_{R,0}$ | 表示方向的最小维度的堆积参数 |
| \mathbf{v}_P | 点 P 相对于惯性系的绝对速度 |
| \mathbf{a}_P | 点 P 相对于惯性系的绝对加速度 |
| ω_{AB} | 坐标系 B 相对于坐标系 A 的角速度 |
| $\Omega_B = {}^I\omega_{IB}$ | 坐标系 B 的绝对角速度 |
| $\Psi_B = \dot{\Omega}_B$ | 坐标系 B 的绝对角加速度 |
| n_q | 广义坐标的总数量 |
| n_j | 关节数量 |
| n_l | 连杆数量 |
| n_τ | 驱动关节数量 |
| n_b | 基坐标数量 |
| n_c | 接触点数量 |
| m | 末端位形参数数量 |
| m_0 | 操作空间坐标数量 = 末端位形最小参数数量 |
| ϵ | 加工精度 |
| \mathbf{x}^* | 星号代表期望值 |
| \mathbf{q} | 广义坐标 |
| \mathbf{J} | 雅可比矩阵 |
| \mathbf{J}_A | 分析雅可比矩阵 |
| \mathbf{J}_0 | 基础雅可比矩阵 |
| $\mathbf{N} = \mathcal{N}(\mathbf{J})$ | 零空间投影矩阵 |

1.2 操作符

笔记内会涉及到以下操作符：

叉乘: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = [\mathbf{a}]_{\times} \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$

欧式范数: $||\mathbf{a}|| = \sqrt{\mathbf{a}^T \mathbf{a}} = \sqrt{\mathbf{a}_1^2 + \cdots + \mathbf{a}_n^2}$

向量绝对值: $|\mathbf{a}| = (|\mathbf{a}_1| \quad \cdots \quad |\mathbf{a}_n|)$

零空间投影: $\mathcal{N}(\mathbf{J})$

2.运动学

2.1 位置

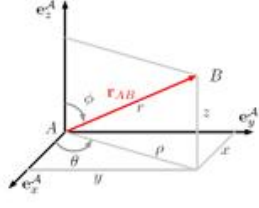


图 2.1: 使用笛卡尔、柱坐标和球坐标来表示位置

点 B 相对于点 A 的位置可以写成:

$$\mathbf{r}_{AB} \quad (2.1)$$

对于三维空间中的点，位置由向量 $\mathbf{r} \in \mathbf{R}^3$ 表示。为了数值化表示向量的分量，有必要定义一个参考系 A，并在此坐标系中表示向量:

$${}^A\mathbf{r}_{AB} \quad (2.2)$$

其中单位向量 $(\mathbf{e}_x^A, \mathbf{e}_y^A, \mathbf{e}_z^A)$ 是坐标系 A 在 \mathbf{R}^3 空间的正交基。

2.2 位置的表示

三维空间中的位置需要三个参数来表示，参数化的方式有以下几种。

笛卡尔坐标:

最常见的方法是使用笛卡尔坐标来表示位置，即:

$$X_{P_c} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

这意味着位置向量可以简单地由以下公式表示:

$${}^A\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x^A + y\mathbf{e}_y^A + z\mathbf{e}_z^A = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

柱坐标:

第二种方法是使用柱坐标作为参数表示方法:

$$X_{P_z} = \begin{pmatrix} \rho \\ \theta \\ z \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

这意味着位置向量为:

$${}^A\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \rho \cos \theta \\ \rho \sin \theta \\ z \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

球坐标:

第三种方法是使用球坐标 $\mathbf{1}$ 作为参数表示方法:

$$X_{P_s} = \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

这意味着位置向量为:

$${}^A\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \sin \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

2.3 线速度

点 B 相对于点 A 的速度为:

$$\dot{\mathbf{r}}_{AB} \quad (2.9)$$

在三维空间中，速度由向量 $\dot{\mathbf{r}} \in \mathbf{R}^3$ 表示。在对速度做向量代数运算时，其运算规则与位置是相同的。

2.3.1 线性速度的表示

速度 $\dot{\mathbf{r}}$ 和当前表示形式下位置的导数 $\dot{\chi}_P$ 之间存在线性映射关系 $E_P(\chi)$:

$$\dot{\mathbf{r}} = E_P(\chi) \dot{\chi}_P \quad (2.10)$$

$$\dot{\chi}_P = E_P^{-1}(\chi_P)\dot{\mathbf{r}} \quad (2.11)$$

笛卡尔坐标

如果采用笛卡尔坐标，映射关系 $E_P(\chi)$ 只是简单的单位矩阵：

$$E_{P_c}(\chi_{P_c}) = E_{P_c}^{-1}(\chi_{P_c}) = \mathbf{I} \quad (2.12)$$

柱坐标

如果采用柱坐标表示，我们可以得到速度：

$$\dot{\mathbf{r}}(\chi_{P_c}) = \begin{pmatrix} \dot{\rho}\cos\theta - \rho\dot{\theta}\sin\theta \\ \dot{\rho}\sin\theta + \rho\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{z} \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

以使用笛卡尔坐标系中的导数来表示柱坐标系的导数，即可得：

$$\dot{\chi}_{P_z} = \begin{pmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\theta} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}\cos\theta + \dot{y}\sin\theta \\ -\dot{x}\sin\theta/\rho + \dot{y}\cos\theta/\rho \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta/\rho & \cos\theta/\rho & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_{P_z}^{-1}} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

由公式 2.13 可以得到线性映射关系：

$$E_{P_c}(\chi_{P_z}) = \frac{\partial \mathbf{r}(\chi_{P_z})}{\partial \chi_{P_z}} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

球坐标

对球坐标使用同柱坐标的方法会得到：

$$E_{P_S} = \begin{bmatrix} \cos\theta\sin\phi & -r\sin\phi\sin\theta & r\cos\phi\cos\theta \\ \sin\phi\sin\theta & r\cos\theta\sin\phi & r\cos\phi\sin\theta \\ \cos\phi & 0 & -r\sin\phi \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

$$E_{P_S}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta\sin\phi & \sin\phi\sin\theta & \cos\phi \\ -\sin\theta/(r\sin\phi) & \cos\theta/(r\sin\phi) & 0 \\ (\cos\phi\cos\theta)/r & (\cos\phi\sin\theta)/r & -\sin\phi/r \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

2.4 旋转

一个点的位形可以由位置完全描述，但是对于一个刚体来说，还需要引入旋转来确定其位姿。旋转在理论上用数学公式可抽象为：

$$\phi_{AB} \in \text{SO}(3) \quad (2.18)$$

其通常用于表示固定在刚体上的坐标系 B 相对于参考坐标系 A 的旋转关系。

2.4.1 旋转矩阵

图 2.2 描述了两个坐标系之间的关系，在坐标系 A 中固定点 P 的位置向量可以写成：

$${}^A\mathbf{r}_{AP} = \begin{pmatrix} {}^A\mathbf{r}_{AP_x} \\ {}^A\mathbf{r}_{AP_y} \\ {}^A\mathbf{r}_{AP_z} \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

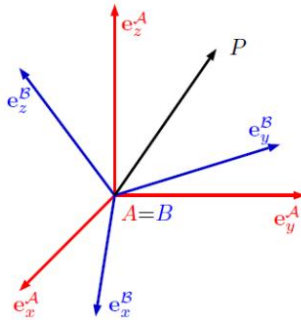


图 2.2: 两坐标系 A 和 B 之间的通用三维旋转

现在考虑一个相对于坐标系 **A** 发生旋转的参考坐标系 **B**，坐标系 **B** 的原点与坐标系 **A** 的重合，此时坐标系 **B** 中点的位置向量 **P** 是：

$${}^B\mathbf{r}_{AP} = \begin{pmatrix} {}^B r_{AP_x} \\ {}^B r_{AP_y} \\ {}^B r_{AP_z} \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

坐标系 **B** 的单位向量在坐标系 **A** 表示为 $[{}^A\mathbf{e}_x^B, {}^A\mathbf{e}_y^B, {}^A\mathbf{e}_z^B]$ ，我们可以得到两个位置向量 ${}^A\mathbf{r}_{AP}$ 和 ${}^B\mathbf{r}_{AP}$ 之间的映射为：

$${}^A\mathbf{r}_{AP} = {}^A\mathbf{e}_x^B \cdot {}^B r_{AP_x} + {}^A\mathbf{e}_y^B \cdot {}^B r_{AP_y} + {}^A\mathbf{e}_z^B \cdot {}^B r_{AP_z} \quad (2.21)$$

公式 2.21 中所示的映射可以以紧凑的形式重写为：

$$\begin{aligned} {}^A\mathbf{r}_{AP} &= \begin{bmatrix} {}^A\mathbf{e}_x^B & {}^A\mathbf{e}_y^B & {}^A\mathbf{e}_z^B \end{bmatrix} \cdot {}^B\mathbf{r}_{AP} \\ &= \mathbf{C}_{AB} \cdot {}^B\mathbf{r}_{AP} \end{aligned} \quad (2.22)$$

\mathbf{C}_{AB} 项被称为旋转矩阵，是一个 3×3 矩阵。因为 \mathbf{C}_{AB} 的列向量是正交单位向量，也就是说 \mathbf{C}_{AB} 是正交的，意味着：

$$\mathbf{C}_{AB}^T \cdot \mathbf{C}_{AB} = \mathbb{I}_3 \quad (2.23)$$

公式 2.23 的结果表明 $\mathbf{C}_{BA} = \mathbf{C}_{AB}^{-1} = \mathbf{C}_{AB}^T$ 。旋转矩阵 \mathbf{C}_{AB} 属于特殊正交群 $SO(3)$ ，旋转矩阵的运算不能使用 \mathbb{R}^3 空间中的经典向量代数，而是需要利用一种特殊类型的代数。

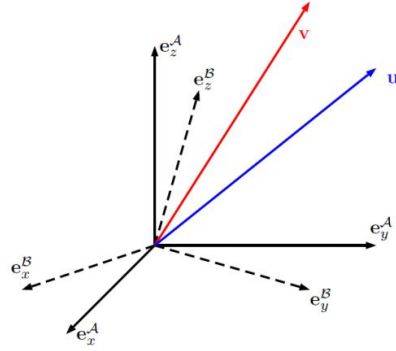


图 2.3: 被动旋转可以解释为坐标系的旋转，而主动旋转可以解释为从向量 \mathbf{u} 到向量 \mathbf{v} 所对应的旋转

2.4.2 主动旋转与被动旋转

旋转可以有两种不同的解释，这引出了所谓的主动和被动旋转的定义。

被动旋转

被动旋转，也称为旋转变换，对应于公式 2.21 中的坐标系之间的变换。被动旋转 \mathbf{C}_{AB} 将同一对象 \mathbf{u} 从坐标系 **B** 映射到坐标系 **A**：

$${}^A\mathbf{u} = \mathbf{C}_{AB} \cdot {}^B\mathbf{u} \quad (2.24)$$

主动旋转

主动旋转通常用 3×3 的矩阵 \mathbf{R} 表示，矩阵 \mathbf{R} 是在同一参考坐标系 **A** 中将向量 \mathbf{A}^u 旋转到向量 \mathbf{A}^v 的运算符：

$${}^A\mathbf{v} = \mathbf{R}_A \mathbf{u} \quad (2.25)$$

2.4.3 基础旋转

最简单且同时最常出现的旋转是基础旋转，即围绕坐标系的三个正交基向量 \mathbf{e}_x^A 、 \mathbf{e}_y^A 或 \mathbf{e}_z^A 中的任意一个的旋转。给定旋转角度 ϕ ，三个基础旋转是：

$$\mathbf{C}_{AB} = \mathbf{C}_x(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

$$\mathbf{C}_{AB} = \mathbf{C}_y(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

$$\mathbf{C}_{AB} = \mathbf{C}_z(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

2.4.4 复合旋转

考虑三个参考坐标系 **A**, **B** 和 **C**。向量 **u** 的坐标可由坐标系 **B** 映射到坐标系 **A**:

$${}_A\mathbf{u} = \mathbf{C}_{AB} \cdot {}_B\mathbf{u} \quad (2.29)$$

我们也可以考虑向量 **u** 的坐标在坐标系 **B** 和坐标系 **C** 表示之间的关系:

$${}_B\mathbf{u} = \mathbf{C}_{BC} \cdot {}_C\mathbf{u} \quad (2.30)$$

通过结合上面的两个方程, 我们可以得到:

$$\begin{aligned} {}_A\mathbf{u} &= \mathbf{C}_{AB} \cdot (\mathbf{C}_{BC} \cdot {}_C\mathbf{u}) \\ &= \mathbf{C}_{AC} \cdot {}_C\mathbf{u}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

生成的旋转矩阵 $\mathbf{C}_{AC} = \mathbf{C}_{AB} \cdot \mathbf{C}_{BC}$ 可以解释为先旋转坐标系 **A** 直到它与坐标系 **B** 一致, 然后旋转坐标系 **B** 直到它与坐标系 **C** 一致。

2.4.5 旋转表示

欧拉角

空间旋转可以理解公式 2.26 至公式 2.28 中所定义三个基础旋转的序列组合。为了充分描述所有可能的方向, 不应该围绕平行轴连续旋转两次。当围绕同一轴进行第一和第三次旋转时, 此时的参数化方法称为经典的欧拉角。当这三个角度都不同时, 我们通常指的是泰特-布赖恩表示法, 万向表示法或横滚-俯仰-偏航角度表示法, 这种方法经常被用于机器人学中。

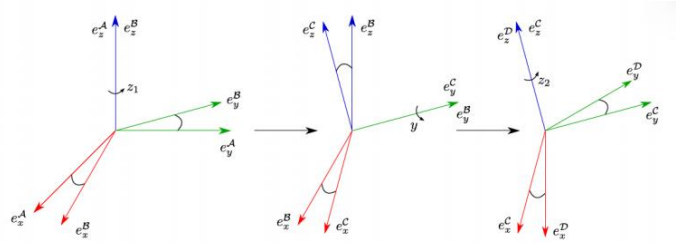


图 2.4: ZYZ 欧拉角表示绕 z 、 y 以及 z 轴的三个连续旋转的组合, 对应于图中从坐标 **A** 系到坐标系 **D** 的旋转: $(z-y'-z'')$ -(偏航-俯仰-偏航)

ZYZ 欧拉角

ZYZ 欧拉角是一种经典的欧拉角表示法。旋转角度可以由参数向量表示:

$$\chi_{R \text{ euler ZYZ}} = \begin{pmatrix} z_1 \\ y \\ z_2 \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

由此产生的旋转矩阵是可以通过基础旋转的串联获得

$$\mathbf{C}_{AD} = \mathbf{C}_{AB}(z_1)\mathbf{C}_{BC}(y)\mathbf{C}_{CD}(z_2) \Rightarrow {}_A\mathbf{r} = \mathbf{C}_{AD}{}^D\mathbf{r}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} \cos z_1 & -\sin z_1 & 0 \\ \sin z_1 & \cos z_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos y & 0 & \sin y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin y & 0 & \cos y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos z_2 & -\sin z_2 & 0 \\ \sin z_2 & \cos z_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} c_y c_{z_1} c_{z_2} - s_{z_1} s_{z_2} & -c_{z_2} s_{z_1} - c_y c_{z_1} s_{z_2} & c_{z_1} s_y \\ c_{z_1} s_{z_2} + c_y c_{z_2} s_{z_1} & c_{z_1} c_{z_2} - c_y s_{z_1} s_{z_2} & s_y s_{z_1} \\ -c_{z_2} s_y & s_y s_{z_2} & c_y \end{bmatrix} \quad (2.33)
\end{aligned}$$

分析公式 2.33 可以找到逆问题的解，即给定旋转矩阵：

$$\mathbf{C}_{AD} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

对应的 ZYZ 欧拉角为

$$\chi_{R \text{ euler } ZYZ} = \begin{pmatrix} z_1 \\ y \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{atan2}(c_{23} \ c_{13}) \\ \text{atan2}\left(\sqrt{c_{13}^2 + c_{23}^2} \ c_{33}\right) \\ \text{atan2}(c_{32} \ -c_{31}) \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

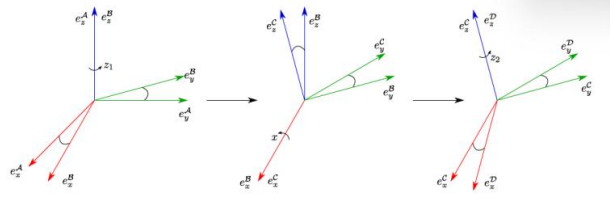


图 2.5: ZYZ 欧拉角表示沿着 z 、 x 以及 z 轴的三个连续旋转。即从上图中的 A 坐标系变换到 D 坐标系: $((z-x'-z''))$ -(偏航-横滚-偏航)

ZXZ 欧拉角

ZXZ 欧拉角也是经典的欧拉角的一种。旋转角度可以由参数向量表示：

$$\chi_{R \text{ euler } ZXZ} = \begin{pmatrix} z_1 \\ x \\ z_2 \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

由此产生的旋转矩阵是可以通过基础旋转的串联获得的：

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_{AD} &= \mathbf{C}_{AB}(z_1) \mathbf{C}_{BC}(x) \mathbf{C}_{CD}(z_2) \Rightarrow \mathbf{A} \mathbf{r} = \mathbf{C}_{AD} \mathbf{D} \mathbf{r} \\
&= \begin{bmatrix} \cos z_1 & -\sin z_1 & 0 \\ \sin z_1 & \cos z_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos x & -\sin x \\ 0 & \sin x & \cos x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos z_2 & -\sin z_2 & 0 \\ \sin z_2 & \cos z_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} c_{z_1} c_{z_2} - c_x s_{z_1} s_{z_2} & -c_{z_1} s_{z_2} - c_x c_{z_1} s_{z_2} & s_x s_{z_1} \\ c_{z_2} s_{z_1} + c_x c_{z_1} s_{z_2} & c_x c_{z_1} c_{z_2} - s_{z_1} s_{z_2} & -c_{z_1} s_x \\ s_x s_{z_2} & c_{z_2} s_x & c_x \end{bmatrix} \quad (2.37)
\end{aligned}$$

分析公式 2.37 可以找到逆问题的解，即给定一个旋转矩阵：

$$\mathbf{C}_{AD} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

ZXZ 欧拉角由下公式可以得到：

$$\chi_{R \text{ euler } ZXZ} = \begin{pmatrix} z_1 \\ x \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{atan } 2(c_{13} - c_{23}) \\ \text{atan } 2(\sqrt{c_{13}^2 + c_{23}^2} c_{33}) \\ \text{atan } 2(c_{31} c_{32}) \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

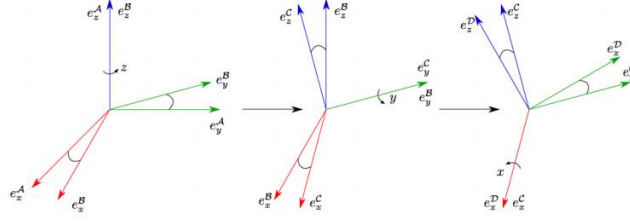


图 2.6: ZYX 欧拉角为围绕 z 、 y 和 x 轴的三个连续旋转。即从上图中的 \mathcal{A} 坐标系变换到 \mathcal{D} 坐标系: $(z-y'-x'')$ -(偏航-俯仰-横滚)

ZYX 欧拉角

ZYX 欧拉角, 也被称为泰特布赖恩角, 通常用于描述飞行器的姿态, 又被称为偏航-俯仰-滚动。旋转角度可以由参数向量表示:

$$\chi_{R \text{ euler } ZYX} = \begin{pmatrix} z \\ y \\ x \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

最终的旋转矩阵由基础旋转串联得到的:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{AD} &= \mathbf{C}_{AB}(z)\mathbf{C}_{BC}(y)\mathbf{C}_{CD}(x) \Rightarrow \mathbf{Ar} = \mathbf{C}_{AD}\mathbf{Dr} \\ &= \begin{bmatrix} \cos z & -\sin z & 0 \\ \sin z & \cos z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos y & 0 & \sin y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin y & 0 & \cos y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos x & -\sin x \\ 0 & \sin x & \cos x \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c_y c_z & c_z s_x s_y - c_x s_z & s_x s_z + c_x c_z s_y \\ c_y s_z & c_x c_z + s_x s_y s_z & c_x s_y s_z - c_z s_x \\ -s_y & c_y s_x & c_x c_y \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

给定公式 2.38 中的旋转矩阵, 逆解为:

$$\chi_{R \text{ euler } ZYX} = \begin{pmatrix} z \\ y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{atan } 2(c_{21} c_{11}) \\ \text{atan } 2(-c_{31} \sqrt{c_{32}^2 + c_{33}^2}) \\ \text{atan } 2(c_{32} c_{33}) \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

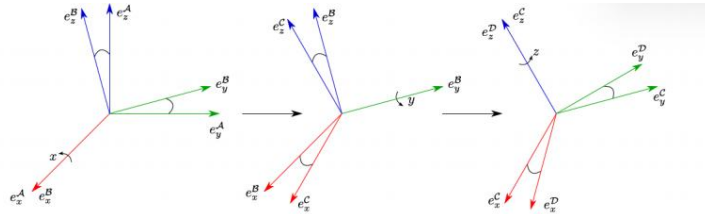


图 2.7: XYZ 欧拉角表示的是沿 x 、 y 以及 z 轴的三个连续旋转, 即从上图中的 \mathcal{A} 坐标系变换到 \mathcal{D} 坐标系: $(x-y'-z'')$ -(横滚-俯仰-偏航)

XYZ 欧拉角

XYZ 欧拉角也被称为万向角。旋转角度可以在参数向量中得到:

$$\chi_{R \text{ euler } XYZ} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

由此产生的旋转矩阵是通过基础旋转的串联获得的：

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{AD} &= \mathbf{C}_{AB}(x) \mathbf{C}_{BC}(y) \mathbf{C}_{CD}(z) \Rightarrow \mathbf{A}\mathbf{r} = \mathbf{C}_{AD}\mathbf{r} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos x & -\sin x \\ 0 & \sin x & \cos x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos y & 0 & \sin y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin y & 0 & \cos y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos z & -\sin z & 0 \\ \sin z & \cos z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c_y c_z & -c_y s_z & s_y \\ c_x s_z + c_z s_x s_y & c_x c_z - s_x s_y s_z & -c_y s_x \\ s_x s_z - c_x c_z s_y & c_z s_x + c_x s_y s_z & c_x c_y \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.44)$$

给定公式 2.38 中的旋转矩阵，逆解为：

$$\chi_{R \text{ euler } XYZ} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{atan2}(-c_{23} \ c_{33}) \\ \text{atan2}\left(c_{13} \ \sqrt{c_{11}^2 + c_{12}^2}\right) \\ \text{atan2}(-c_{12} \ c_{11}) \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

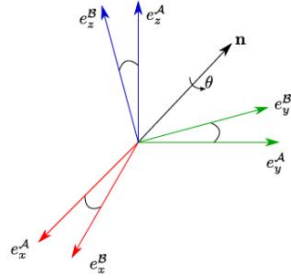


图 2.8: 轴角表示将两个坐标系的旋转定义为绕轴 \mathbf{n} 旋转角度 θ 的旋转

轴角

轴角是由角度 θ 和旋转轴 \mathbf{n} 定义的非最小参数化表示旋转的方法。向量 $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$ 定义旋转的方向，而标量 $\theta \in \mathbb{R}$ 定义旋转角度：

$$\chi_{R \text{ Angle Axis}} = \begin{pmatrix} \theta \\ \mathbf{n} \end{pmatrix} \quad (2.46)$$

这个参数化形式有四个参数和一个长度约束 $\|\mathbf{n}\| = 1$ 。可以将这两个量结合起来以获得旋转向量或欧拉向量：

$$\varphi = \theta \cdot \mathbf{n} \in \mathbb{R}^3 \quad (2.47)$$

值得注意的是，尽管 φ 属于 \mathbb{R}^3 ，其求和运算通常是不满足交换律的，即 $\varphi_1 + \varphi_2 \neq \varphi_2 + \varphi_1$ 。轴角参数 φ_{AB} 对应的旋转矩阵为：

$$\mathbf{C}_{AB} = \begin{bmatrix} n_x^2(1 - c_\theta) + c_\theta & n_x n_y(1 - c_\theta) - n_z s_\theta & n_x n_z(1 - c_\theta) + n_y s_\theta \\ n_x n_y(1 - c_\theta) + n_z s_\theta & n_y^2(1 - c_\theta) + c_\theta & n_y n_z(1 - c_\theta) - n_x s_\theta \\ n_x n_z(1 - c_\theta) - n_y s_\theta & n_y n_z(1 - c_\theta) + n_x s_\theta & n_z^2(1 - c_\theta) + c_\theta \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

给定公式 2.38 中的旋转矩阵，对应的轴角参数为：

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{c_{11} + c_{22} + c_{33} - 1}{2} \right) \quad (2.49)$$

$$\mathbf{n} = \frac{1}{2 \sin(\theta)} \begin{pmatrix} c_{32} - c_{23} \\ c_{13} - c_{31} \\ c_{21} - c_{12} \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

单位四元数

单位四元数（也称为欧拉参数）提供了旋转的非最小表示方法，没有轴角表示的缺点。考虑旋转向量 $\phi \in \mathbb{R}^3$ ，单位四元数 ξ 定义为：

$$\chi_{R \text{ quat}} = \xi = \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \check{\xi} \end{pmatrix} \in \mathbb{H} \quad (2.51)$$

其中 ξ_0 和 $\check{\xi}$ 分别为：

$$\begin{aligned} \xi_0 &= \cos\left(\frac{\|\phi\|}{2}\right) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \check{\xi} &= \sin\left(\frac{\|\phi\|}{2}\right) \frac{\phi}{\|\phi\|} = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \mathbf{n} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

第一个参数 ξ_0 被称为四元数的实部， $\check{\xi}$ 为虚部。单位四元数需要满足约束：

$$\xi_0^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 1 \quad (2.53)$$

与轴角类似，由四元数计算得到旋转矩阵是：

$$\begin{aligned} C_{AD} &= \mathbb{I}_{3 \times 3} + 2\xi_0[\check{\xi}]_{\times} + 2[\check{\xi}]_{\times}^2 = (2\xi_0^2 - 1)\mathbb{I}_{3 \times 3} + 2\xi_0[\check{\xi}]_{\times} + 2\check{\xi}\check{\xi}^T \\ &= \begin{bmatrix} \xi_0^2 + \xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2 & 2\xi_1\xi_2 - 2\xi_0\xi_3 & 2\xi_0\xi_2 + 2\xi_1\xi_3 \\ 2\xi_0\xi_3 + 2\xi_1\xi_2 & \xi_0^2 - \xi_1^2 + \xi_2^2 - \xi_3^2 & 2\xi_2\xi_3 - 2\xi_0\xi_1 \\ 2\xi_1\xi_3 - 2\xi_0\xi_2 & 2\xi_0\xi_1 + 2\xi_2\xi_3 & \xi_0^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2 + \xi_3^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.54)$$

给定公式 2.38 中的旋转矩阵，相应的四元数是：

$$\chi_{R \text{ quat}} = \xi_{AD} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{c_{11} + c_{22} + c_{33} + 1} \\ \text{sgn}(c_{32} - c_{23}) \sqrt{c_{11} - c_{22} - c_{33} + 1} \\ \text{sgn}(c_{13} - c_{31}) \sqrt{c_{22} - c_{33} - c_{11} + 1} \\ \text{sgn}(c_{21} - c_{12}) \sqrt{c_{33} - c_{11} - c_{22} + 1} \end{pmatrix} \quad (2.55)$$

根据 $C^{-1} = C^T$ ，得到逆参数形式 ξ^{-1} 为：

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi \\ \check{\xi} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{inverse}} \xi^{-1} = \xi^T = \begin{pmatrix} \xi \\ -\check{\xi} \end{pmatrix} \quad (2.56)$$

如果 ξ_{AB} 和 ξ_{BC} 分别表示对应于 C_{AB} 和 C_{BC} 的四元数，根据 $C_{AC} = C_{AB}C_{BC}$ ，四元数的乘法运算法则为：

$$\xi_{AB} \otimes \xi_{BC} = \begin{pmatrix} \xi_{0AB} \cdot \xi_{0BC} - \check{\xi}_{AB}^T \cdot \check{\xi}_{BC} \\ \xi_{0AB} \cdot \check{\xi}_{BC} + \xi_{0BC} \cdot \check{\xi}_{AB} + [\check{\xi}_{AB}]_{\times} \cdot \check{\xi}_{BC} \end{pmatrix} \quad (2.57)$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} \xi_0 & -\check{\xi}^T \\ \check{\xi} & \xi_0\mathbb{I} + [\check{\xi}]_{\times} \end{bmatrix}}_{M_l(\xi_{AB})} \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}_{BC} \quad (2.58)$$

$$= \begin{bmatrix} \xi_0 & -\xi_1 & -\xi_2 & -\xi_3 \\ \xi_1 & \xi_0 & -\xi_3 & \xi_2 \\ \xi_2 & \xi_3 & \xi_0 & -\xi_1 \\ \xi_3 & -\xi_2 & \xi_1 & \xi_0 \end{bmatrix}_{AB} \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}_{BC} \quad (2.59)$$

其中 $M_l(\xi)$ 表示四元数的左矩阵。同样的四元数乘法也可以用右四元数来构造：

$$\xi_{AB} \otimes \xi_{BC} = \underbrace{\begin{bmatrix} \xi_0 & -\check{\xi}^T \\ \check{\xi} & \xi_0\mathbb{I} - [\check{\xi}]_{\times} \end{bmatrix}}_{M_r(\xi_{BC})} \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}_{AB} \quad (2.60)$$

$$= \begin{bmatrix} \xi_0 & -\xi_1 & -\xi_2 & -\xi_3 \\ \xi_1 & \xi_0 & \xi_3 & -\xi_2 \\ \xi_2 & -\xi_3 & \xi_0 & \xi_1 \\ \xi_3 & \xi_2 & -\xi_1 & \xi_0 \end{bmatrix}_{BC} \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}_{AB} \quad (2.61)$$

使用对应于四元数的特殊代数可以用于直接旋转向量。在坐标系 \mathbf{B} 中的向量 ${}_B\mathbf{r}$ 的坐标对应的纯（虚）四元数为：

$$\mathbf{p}({}_B\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} 0 \\ {}_B\mathbf{r} \end{pmatrix} \quad (2.62)$$

单位四元数 ξ_{AB} 代表坐标系 \mathbf{A} 相对于坐标系 \mathbf{B} 的旋转，可以证明：

$$\mathbf{p}({}_A\mathbf{r}) = \xi_{AB} \otimes \mathbf{p}({}_B\mathbf{r}) \otimes \xi_{AB}^T \quad (2.63)$$

$$= \mathbf{M}_l(\xi_{AB}) \mathbf{M}_r(\xi_{AB}^T) \mathbf{p}({}_B\mathbf{r}) \quad (2.64)$$

2.5 角速度

考虑一个相对于固定坐标系 \mathbf{A} 运动的坐标系 \mathbf{B} ，使用角速度 ${}_A\omega_{AB}$ 描述坐标系 \mathbf{B} 相对于坐标系 \mathbf{A} 的旋转运动，其由极限定义：

$${}_A\omega_{AB} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{{}_A\varphi_{B(t)B(t+\epsilon)}}{\epsilon} \quad (2.70)$$

坐标系 \mathbf{A} 相对于坐标系 \mathbf{B} 的相对旋转是：

$$\omega_{AB} = -\omega_{BA} \quad (2.71)$$

可以证明角速度向量 ${}_A\omega_{AB}$ 和随时间变化的旋转矩阵 $\mathbf{C}_{AB}(\mathbf{t})$ 之间的关系为：

$$[{}_A\omega_{AB}]_{\times} = \dot{\mathbf{C}}_{AB} \cdot \mathbf{C}_{AB}^T \quad (2.72)$$

其中 $[{}_A\omega_{AB}]_{\times}$ 是 ${}_A\omega_{AB}$ 对应的反对称矩阵：

$$[{}_A\omega_{AB}]_{\times} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad {}_A\omega_{AB} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \quad (2.73)$$

角速度可以像位置向量一样通过旋转矩阵进行转换：

$${}_B\omega_{AB} = \mathbf{C}_{BA} \cdot {}_A\omega_{AB} \quad (2.74)$$

相应的叉乘矩阵 $[\omega]_{\times}$ 的变换关系为：

$$[{}_B\omega_{AB}]_{\times} = \mathbf{C}_{BA} \cdot [{}_A\omega_{AB}]_{\times} \cdot \mathbf{C}_{AB} \quad (2.75)$$

连续坐标系的角速度可以由以下公式计算得到：

$${}_D\omega_{AC} = {}_D\omega_{AB} + {}_D\omega_{BC} \quad (2.76)$$

2.5.1 参数化旋转的时间导数

存在不同的旋转参数化方法，与线速度类似，它们的导数可以映射到角速度：

$${}_A\omega_{AB} = \mathbf{E}_R(\chi_R) \cdot \dot{\chi}_R \quad (2.82)$$

欧拉角 ZYX 的时间导数 \Leftrightarrow 角速度

给定一组 ZYX 欧拉角 $\chi_R^{\text{euler ZYX}} = [z \ y \ x]^T$ 以及它们的导数 $\dot{\chi}_R^{\text{euler ZYX}} = [\dot{z} \ \dot{y} \ \dot{x}]^T$ ，我们希望找到一个映射 $\mathbf{E}_R^{\text{euler ZYX}} = \mathbf{E}_R(\chi_R^{\text{euler ZYX}}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ，其能够将 $\dot{\chi}$ 映射到 ${}_A\omega_{AB}$ 。 $\mathbf{E}(\chi_R^{\text{euler ZYX}})$ 的列向量是在固定坐标系 \mathbf{A} 中表示的施加了角速度的单位向量的分量。这些是通过选择由欧拉角参数化指定的连续基础旋转建立的旋转矩阵的列来获得的。

从参考坐标系 \mathbf{A} 开始，第一次旋转将是绕 ${}_A\mathbf{e}_z^A$ 的基础旋转，由以下给定：

$${}_A\mathbf{e}_z^A = \mathbb{I}_{3 \times 3} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.83)$$

在绕 ${}_A\mathbf{e}_z^A$ 的基础旋转之后， y 轴 ${}_A\mathbf{e}_y^{A'}$ 将由以下公式表示：

$${}_A\mathbf{e}_y^{A'} = \mathbf{C}_{AA'}(z) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(z) & -\sin(z) & 0 \\ \sin(z) & \cos(z) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(z) \\ \cos(z) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.84)$$

在完成绕 ${}^A\mathbf{e}_y^{A'}$ 的基础旋转之后， \mathbf{x} 轴 ${}^A\mathbf{e}_x^{A''}$ 将由以下公式表示：

$$\begin{aligned} {}^A\mathbf{e}_x^{A''} &= \mathbf{C}_{AA'}(z) \cdot \mathbf{C}_{A'A''}(y) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(z) & -\sin(z) & 0 \\ \sin(z) & \cos(z) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(y) & 0 & \sin(y) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(y) & 0 & \cos(y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(y)\cos(z) \\ \cos(y)\sin(z) \\ -\sin(y) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.85)$$

最后映射 $\mathbf{E}(\chi_R)$ 将按照如下公式计算：

$$\mathbf{E}_{R \text{ euler ZYX}} = \begin{bmatrix} {}^A\mathbf{e}_z^A & {}^A\mathbf{e}_y^{A'} & {}^A\mathbf{e}_x^{A''} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\sin(z) & \cos(y)\cos(z) \\ 0 & \cos(z) & \cos(y)\sin(z) \\ 1 & 0 & -\sin(y) \end{bmatrix} \quad (2.86)$$

很容易发现 $\det(\mathbf{E}_{R \text{ euler ZYX}}) = -\cos(y)$ 。在 $y = \pi/2 + k\pi \quad \forall k \in \mathbb{Z}$ 时，映射矩阵是奇异矩阵。这意味着，尽管我们总是可以使用欧拉角相对于时间的导数来描述角速度，但其逆并不总是可以求解的。逆映射由以下给出：

$$\mathbf{E}_{R \text{ euler ZYX}}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\cos(z)\sin(y)}{\cos(y)} & \frac{\sin(y)\sin(z)}{\cos(y)} & 1 \\ -\sin(z) & \cos(z) & 0 \\ \frac{\cos(z)}{\cos(y)} & \frac{\sin(z)}{\cos(y)} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.87)$$

欧拉角 XYZ 的时间导数 \Leftrightarrow 角速度

与之前的推导类似，XYZ 欧拉角的投影矩阵及其逆

$$\mathbf{E}_{R \text{ euler XYZ}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \sin(y) \\ 0 & \cos(x) & -\cos(y)\sin(x) \\ 0 & \sin(x) & \cos(x)\cos(y) \end{bmatrix} \quad (2.88)$$

$$\mathbf{E}_{R \text{ euler XYZ}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sin(x)\sin(y)}{\cos(y)} & \frac{-\cos(x)\sin(y)}{\cos(y)} \\ 0 & \cos(x) & \sin(x) \\ 0 & \frac{-\sin(x)}{\cos(y)} & \frac{\cos(x)}{\cos(y)} \end{bmatrix} \quad (2.89)$$

欧拉角 ZYZ 的时间导数 \Leftrightarrow 角速度

ZYZ 欧拉角的投影矩阵及其逆

$$\mathbf{E}_{R \text{ euler ZYZ}} = \begin{bmatrix} 0 & -\sin(z_1) & \cos(z_1)\sin(y) \\ 0 & \cos(z_1) & \sin(z_1)\sin(y) \\ 1 & 0 & \cos(y) \end{bmatrix} \quad (2.90)$$

$$\mathbf{E}_{R \text{ euler ZYZ}}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-\cos(y)\cos(z_1)}{\sin(y)} & \frac{-\cos(y)\sin(z_1)}{\sin(y)} & 1 \\ -\sin(z_1) & \cos(z_1) & 0 \\ \frac{\cos(z_1)}{\sin(y)} & \frac{\sin(z_1)}{\sin(y)} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.91)$$

欧拉角 ZXZ 的时间导数 \Leftrightarrow 角速度

ZXZ 欧拉角的投影矩阵及其逆：

$$\mathbf{E}_{R \text{ euler } ZXZ} = \begin{bmatrix} 0 & \cos(z_1) & \sin(z_1)\sin(x) \\ 0 & \sin(z_1) & -\cos(z_1)\sin(x) \\ 1 & 0 & \cos(x) \end{bmatrix} \quad (2.92)$$

$$\mathbf{E}_{R \text{ euler } ZXZ}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-\cos(x)\sin(z_1)}{\sin(x)} & \frac{\cos(x)\cos(z_1)}{\sin(x)} & 1 \\ \cos(z_1) & \sin(z_1) & 0 \\ \frac{\sin(z_1)}{\sin(x)} & \frac{-\cos(z_1)}{\sin(x)} & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.93)$$

旋转四元数的时间导数 \Leftrightarrow 角速度

对于四元数，可以证明以下关系成立：

$${}_I\boldsymbol{\omega}_{IB} = 2\mathbf{H}(\boldsymbol{\xi}_{IB})\dot{\boldsymbol{\xi}}_{IB} = \mathbf{E}_{R \text{ quat}}\dot{\boldsymbol{\chi}}_{R \text{ quat}} \quad (2.94)$$

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}_{IB} = \frac{1}{2}\mathbf{H}(\boldsymbol{\xi}_{IB})^T{}_I\boldsymbol{\omega}_{IB} = \mathbf{E}_{R \text{ quat}}^{-1}\dot{\boldsymbol{\chi}}_{R \text{ quat}} \quad (2.95)$$

其中：

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\xi}) = \begin{bmatrix} -\check{\boldsymbol{\xi}} & [\check{\boldsymbol{\xi}}]_{\times} + \xi_0\mathbb{I}_{3\times 3} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4} \quad (2.96)$$

$$= \begin{bmatrix} -\xi_1 & \xi_0 & -\xi_3 & \xi_2 \\ -\xi_2 & \xi_3 & \xi_0 & -\xi_1 \\ -\xi_3 & -\xi_2 & \xi_1 & \xi_0 \end{bmatrix}. \quad (2.97)$$

因此对于四元数表示 2.51 来说，映射矩阵 \mathbf{E}_R 的逆是：

$$\mathbf{E}_{R \text{ quat}} = 2\mathbf{H}(\boldsymbol{\xi}) \quad (2.98)$$

$$\mathbf{E}_{R \text{ quat}}^{-1} = \frac{1}{2}\mathbf{H}(\boldsymbol{\xi})^T \quad (2.99)$$

轴角的时间导数 \Leftrightarrow 角速度

对于轴角，以下关系成立：

$${}_I\boldsymbol{\omega}_{IB} = \mathbf{n}\dot{\theta} + \dot{\mathbf{n}}\sin\theta + [\mathbf{n}]_{\times}\dot{\mathbf{n}}(1 - \cos\theta) \quad (2.100)$$

$$\dot{\theta} = \mathbf{n}^T{}_I\boldsymbol{\omega}_{IB} \quad \dot{\mathbf{n}} = \left(-\frac{1}{2}\frac{\sin\theta}{1 - \cos\theta}[\mathbf{n}]_{\times}^2 - \frac{1}{2}[\mathbf{n}]_{\times} \right){}_I\boldsymbol{\omega}_{IB} \quad \forall \theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad (2.101)$$

因此对于轴角 2.46 来说，映射矩阵 \mathbf{E}_R 和它的逆是：

$$\mathbf{E}_{R \text{ angleaxis}} = \begin{bmatrix} \mathbf{n} & \sin\theta\mathbb{I}_{3\times 3} + [1 - \cos\theta](\mathbf{n})_{\times} \end{bmatrix} \quad (2.102)$$

$$\mathbf{E}_{R \text{ angleaxis}}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{n}^T \\ -\frac{1}{2}\frac{\sin\theta}{1 - \cos\theta}[\mathbf{n}]_{\times}^2 - \frac{1}{2}[\mathbf{n}]_{\times} \end{bmatrix} \quad (2.103)$$

旋转向量的时间导数 \Leftrightarrow 角速度

对于旋转向量，可以证明以下关系成立：

$${}_I\boldsymbol{\omega}_{IB} = \left[\mathbb{I}_{3\times 3} + [\boldsymbol{\varphi}]_{\times} \left(\frac{1 - \cos\|\boldsymbol{\varphi}\|}{\|\boldsymbol{\varphi}\|^2} \right) + [\boldsymbol{\varphi}]_{\times}^2 \left(\frac{\|\boldsymbol{\varphi}\| - \sin\|\boldsymbol{\varphi}\|}{\|\boldsymbol{\varphi}\|^3} \right) \right] \dot{\boldsymbol{\varphi}} \quad \forall \|\boldsymbol{\varphi}\| \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad (2.104)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}} = \left[\mathbb{I}_{3\times 3} - \frac{1}{2}[\boldsymbol{\varphi}]_{\times} + [\boldsymbol{\varphi}]_{\times}^2 \frac{1}{\|\boldsymbol{\varphi}\|^2} \left(1 - \frac{\|\boldsymbol{\varphi}\|}{2} \frac{\sin\|\boldsymbol{\varphi}\|}{1 - \cos\|\boldsymbol{\varphi}\|} \right) \right]{}_I\boldsymbol{\omega}_{IB} \quad \forall \|\boldsymbol{\varphi}\| \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad (2.105)$$

因此，旋转向量 2.47 的映射矩阵 \mathbf{E}_R 和其逆是：

$$\mathbf{E}_{R \text{ rotationvector}} = \left[\mathbb{I}_{3\times 3} + [\boldsymbol{\varphi}]_{\times} \left(\frac{1 - \cos\|\boldsymbol{\varphi}\|}{\|\boldsymbol{\varphi}\|^2} \right) + [\boldsymbol{\varphi}]_{\times}^2 \left(\frac{\|\boldsymbol{\varphi}\| - \sin\|\boldsymbol{\varphi}\|}{\|\boldsymbol{\varphi}\|^3} \right) \right] \quad (2.106)$$

$$\mathbf{E}_{R \text{ rotationvector}}^{-1} = \left[\mathbb{I}_{3\times 3} - \frac{1}{2}[\boldsymbol{\varphi}]_{\times} + [\boldsymbol{\varphi}]_{\times}^2 \frac{1}{\|\boldsymbol{\varphi}\|^2} \left(1 - \frac{\|\boldsymbol{\varphi}\|}{2} \frac{\sin\|\boldsymbol{\varphi}\|}{1 - \cos\|\boldsymbol{\varphi}\|} \right) \right] \quad (2.107)$$

2.6 变换

在最一般的情况下，两个参考坐标系具有位置偏移和相对旋转（见图 2.9）。可以使用包含平移和旋转的齐次变换矩阵 \mathbf{T} 将点 P 从一个坐标系转换到另一个坐标系：

$$\mathbf{r}_{AP} = \mathbf{r}_{AB} + \mathbf{r}_{BP} \quad (2.108)$$

$$\mathcal{A}\mathbf{r}_{AP} = \mathcal{A}\mathbf{r}_{AB} + \mathcal{A}\mathbf{r}_{BP} = \mathcal{A}\mathbf{r}_{AB} + \mathbf{C}_{AB} \cdot \mathcal{B}\mathbf{r}_{BP} \quad (2.109)$$

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}^T \mathbf{r}_{AP} \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{AB} & \mathcal{A}^T \mathbf{r}_{AB} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}_{AB}} \begin{pmatrix} \mathcal{B}^T \mathbf{r}_{BP} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.110)$$

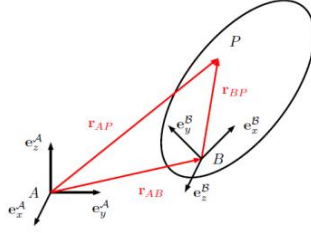


图 2.9: 固定在刚体上的坐标系 \mathcal{B}

齐次变换的逆可以根据以下公式计算：

$$\mathbf{T}_{AB}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{AB}^T & \overbrace{-\mathbf{C}_{AB}^T \mathbf{r}_{AB}}^{\mathcal{B}^T \mathbf{r}_{BA}} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix} \quad (2.111)$$

连续的齐次变换由以下公式计算得到：

$$\mathbf{T}_{AC} = \mathbf{T}_{AB} \mathbf{T}_{BC} \quad (2.112)$$

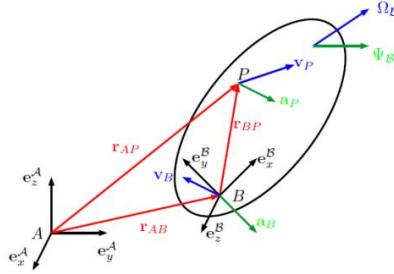


图 2.10: 具有速度和加速度的刚性体

2.7 移动刚体的速度

假设在惯性固定坐标系 \mathcal{A} 中，我们有以下定义：

- \mathbf{v}_P : 点 P 的绝对速度
- $\mathbf{a}_P = \dot{\mathbf{v}}_P$: 点 P 的绝对加速度
- $\Omega_B = \omega_{AB}$: 刚体 \mathcal{B} 的（绝对）角速度
- $\Psi_B = \dot{\Omega}_B$: 刚体 \mathcal{B} 的（绝对）角加速度

此时，重要的是要了解速度之间的区别，比如说在在坐标系 \mathcal{C} 中，位置相对于绝对时间的变化为：

$$c(\dot{\mathbf{r}}_{AP}) = c\left(\frac{d}{dt}\mathbf{r}_{AP}\right) = c\mathbf{v}_{AP} \quad (2.115)$$

以及位置向量坐标相对于时间的微分：

$$(c\dot{\mathbf{r}}_{AP}) = (c\mathbf{r}_{AP})' = \frac{d}{dt}(c\mathbf{r}_{AP}) \quad (2.116)$$

如果 C 是惯性坐标系，那么上面两式的相等关系将成立。按照之前介绍的转换，我们可以将点 P 的位置写为：

$${}^A\mathbf{r}_{AP} = {}^A\mathbf{r}_{AB} + {}^A\mathbf{r}_{BP} = {}^A\mathbf{r}_{AB} + \mathbf{C}_{AB} \cdot {}^B\mathbf{r}_{BP} \quad (2.117)$$

对上面的等式两边对时间求导：

$${}^A\dot{\mathbf{r}}_{AP} = {}^A\dot{\mathbf{r}}_{AB} + \mathbf{C}_{AB} \cdot {}^B\dot{\mathbf{r}}_{BP} + \dot{\mathbf{C}}_{AB} \cdot {}^B\mathbf{r}_{BP} \quad (2.118)$$

因为 P 是刚体上 B 的一个点，所以相对速度 ${}^B\dot{\mathbf{r}}_{BP} = \mathbf{0}$ 。此外，从公式 2.72 可以得到 $\dot{\mathbf{C}}_{AB} = [\mathbf{A}\boldsymbol{\omega}_{AB}]_{\times} \cdot \mathbf{C}_{AB}$ ，于是：

$${}^A\dot{\mathbf{r}}_{AP} = {}^A\dot{\mathbf{r}}_{AB} + [\mathbf{A}\boldsymbol{\omega}_{AB}]_{\times} \cdot \mathbf{C}_{AB} \cdot {}^B\mathbf{r}_{BP} \quad (2.119)$$

$$= {}^A\dot{\mathbf{r}}_{AB} + \mathbf{A}\boldsymbol{\omega}_{AB} \times \mathbf{A}\mathbf{r}_{BP} \quad (2.120)$$

这是非常著名的刚体速度公式，也被称为速度合成规则，它可以被重新写成

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{BP} \quad (2.121)$$

对加速度应用相同的计算规则会得到：

$$\begin{aligned} {}^A\ddot{\mathbf{r}}_{AP} &= {}^A\ddot{\mathbf{r}}_{AB} + \mathbf{A}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{AB} \times \mathbf{A}\mathbf{r}_{BP} + \mathbf{A}\boldsymbol{\omega}_{AB} \times {}^A\dot{\mathbf{r}}_{BP} \\ &= {}^A\ddot{\mathbf{r}}_{AB} + \mathbf{A}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{AB} \times \mathbf{A}\mathbf{r}_{BP} + \mathbf{A}\boldsymbol{\omega}_{AB} \times (\mathbf{A}\boldsymbol{\omega}_{AB} \times \mathbf{A}\mathbf{r}_{BP}) \\ &\Downarrow \\ \mathbf{a}_P &= \mathbf{a}_B + \boldsymbol{\Psi} \times \mathbf{r}_{BP} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{BP}) \end{aligned} \quad (2.122)$$

2.8 刚体系统的运动学

机器人（如机械臂）的位形可以用广义坐标向量来描述：

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} \quad (2.131)$$

这组标量值必须能够完全描述系统的位形，即对于常数值 \mathbf{q} ，机器人不能发生移动。在大多数情况下，我们将选择互相独立的坐标来作为广义坐标，这也就意味着广义坐标的数量对应于系统自由度。对于没有额外运动约束的固定基座系统，这种最小广义坐标集被称为最小坐标。理解广义坐标的选择不是唯一的是很重要的，不过在大多数应用中，广义坐标对应于机器人的自由度，即对于旋转关节来说，单一自由度 q_i 对应于关节的旋转角度；如果是移动关节， q_i 表示线性位移

2.8.2 任务空间坐标

末端执行器位形参数

末端执行器的组合位置和方向由以下表示：

$$\mathbf{x}_e = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_e \\ \phi_e \end{pmatrix} \in SE(3) \quad (2.133)$$

参数化形式为：

$$\chi_e = \begin{pmatrix} \chi_{e_P} \\ \chi_{e_R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \vdots \\ \chi_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m \quad (2.134)$$

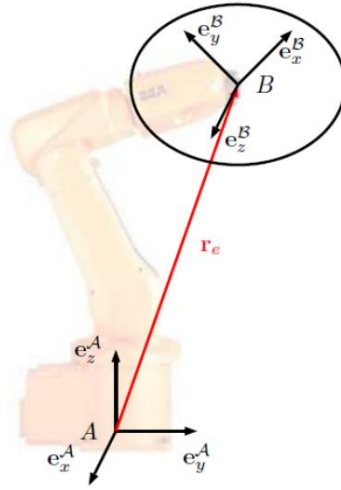


图 2.12: 任务空间坐标为机械臂末端执行器的实例

数字 m 因选择的参数化方法而有所不同。请记住此时旋转 φ_e 只是方向的理论抽象，不存在诸如“角位置”之类的数值上的等价物。

操作空间坐标

机械臂的末端执行器在所谓的操作空间中操作，操作空间取决于臂的几何形状和结构。操作空间可以使用参数描述为：

$$\chi_o = \begin{pmatrix} \chi_{oP} \\ \chi_{oR} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \vdots \\ \chi_{m_0} \end{pmatrix} \quad (2.135)$$

其中 $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{m_0}$ 是独立的操作空间坐标，因此，它们可以被理解为末端执行器位形参数的最小选择方式。请注意 $m_0 \leq n_j$ ，这是由于末端执行器处的自由度肯定不大于系统中关节的数量。

2.8.3 正向运动学

正向运动学描述关节广义坐标 q 和末端执行器位形 χ_e 之间的映射：

$$\chi_e = \chi_e(q) \quad (2.137)$$

对于有 n_j 个关节的串联系统来说：

$$\mathbf{T}_{IE}(q) = \mathbf{T}_{I0} \cdot \left(\prod_{k=1}^{n_j} \mathbf{T}_{k-1k}(q_k) \right) \cdot \mathbf{T}_{n_jE} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{IE}(q) & \mathbf{T}_{IE}(q) \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix} \quad (2.138)$$

当谈到固定基座机器人时，机器人的第一坐标系 θ 是不相对于惯性坐标系移动的，这就使得 $\mathbf{T}_{I\theta}$ 是一个恒定的变换。在大多数情况下，末端执行器坐标系 E 与最后一个关节刚性连接，但不必与最后一个坐标系重合。因此 \mathbf{T}_{n_jE} 也是恒定的。

2.8.4 微分运动学和解析雅可比

通常我们对局部变化或相对于时间的局部变化感兴趣（即速度），这个被称为微分或瞬时运动学。一种常见的方法是线性化正向运动学：

$$\chi_e + \delta\chi_e = \chi_e(q + \delta q) = \chi_e(q) + \frac{\partial \chi_e(q)}{\partial q} \delta q + O(\delta q^2) \quad (2.143)$$

可以得到一阶近似：

$$\delta\chi_e \approx \frac{\partial \chi_e(q)}{\partial q} \delta q = \mathbf{J}_{eA}(q) \delta q \quad (2.144)$$

其中

$$\mathbf{J}_{eA}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \chi_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial \chi_1}{\partial q_{n_j}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \chi_m}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial \chi_m}{\partial q_{n_j}} \end{bmatrix} \quad (2.145)$$

是 $m \times n_j$ 维的解析雅可比矩阵。雅可比矩阵经常用于机器人系统的运动学和动力学。它将关节的变化与位形空间之间的变化联系在一起，代表了有限差异背景下的一个近似值：

$$\Delta \chi_e \approx \mathbf{J}_{eA}(\mathbf{q}) \Delta \mathbf{q} \quad (2.146)$$

从而得到速度之间的精确关系：

$$\dot{\chi}_e = \mathbf{J}_{eA}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (2.147)$$

位置和旋转雅可比

由公式 2.134 指定的末端执行器位形可由末端执行器位置 χ_{eP} 和方向 χ_{eR} 的参数化向量堆叠而成，我们可以将其分为位置和旋转雅可比：

$$\mathbf{J}_{eA} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{eAP} \\ \mathbf{J}_{eAR} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \chi_{eP}}{\partial \mathbf{q}} \\ \frac{\partial \chi_{eR}}{\partial \mathbf{q}} \end{bmatrix} \quad (2.148)$$

对参数化的依赖

这种雅可比矩阵的维度强烈依赖于所选的参数化方法。例如，当使用欧拉角时， \mathbf{J}_{eAR} 的大小是 $3 \times n_j$ ；如果采用的是四元数，它的大小是 $4 \times n_j$ ；如果采用完整的旋转矩阵作为参数，对应的雅可比矩阵的大小是 $9 \times n_j$ 。

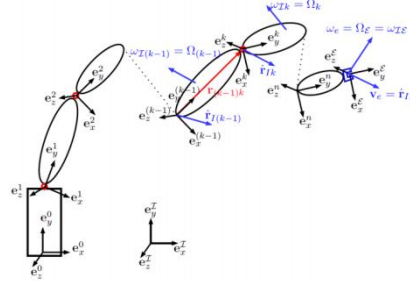


图 2.13: n 个移动连杆的串联连杆臂

2.8.5 几何与基本雅可比

刚体具有唯一的线速度 \mathbf{v}_e 和角速度 $\boldsymbol{\omega}_e$ 。因此，必须存在一个唯一的雅可比关系，它将广义速度 \mathbf{q} 与末端执行器的速度(由线速度 \mathbf{v}_e 和角速度 $\boldsymbol{\omega}_e$ 组成)联系在一起：

$$\mathbf{w}_e = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_e \\ \boldsymbol{\omega}_e \end{pmatrix} = \mathbf{J}_{e0}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (2.151)$$

\mathbf{J}_{e0} 被称为几何(或基本)雅可比，在最一般的情况下，它的维度是 $6 \times n_j$ 。基坐标系 A 的几何雅可比将广义速度映射到在特定坐标系中表示的末端执行器的速度：

$${}^A \mathbf{w}_e = {}^A \mathbf{J}_{e0}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (2.152)$$

几何雅可比的加法和减法

根据基本运动学知识我们知道一个点的速度 \mathbf{C} 可以通过另一个点 \mathbf{B} 的速度和 \mathbf{B} 和 \mathbf{C} 之间的相对速度来计算：

$$\mathbf{w}_C = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_C \\ \boldsymbol{\omega}_C \end{pmatrix} = \mathbf{w}_B + \mathbf{w}_{BC} \\ \mathbf{J}_C \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_B \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{J}_{BC} \dot{\mathbf{q}} \quad (2.153)$$

由此我们可以确定几何雅可以简单地相加：

$${}^A \mathbf{J}_C = {}^A \mathbf{J}_B + {}^A \mathbf{J}_{BC} \quad (2.154)$$

当然前提是在相同的参考系中表示。

使用刚体公式计算几何雅可比

对图 2.13 中描述的串联连杆进行刚体上点的速度进行分析，可以得到连杆 k 的速度为：

$$\dot{\mathbf{r}}_{Ik} = \dot{\mathbf{r}}_{I(k-1)} + \boldsymbol{\omega}_{I(k-1)} \times \mathbf{r}_{(k-1)k} \quad (2.155)$$

当基础坐标系表示为 $\mathbf{0}$ ，末端执行器坐标系为 $\mathbf{n} + 1$ 时，末端执行器速度可以写成：

$$\dot{\mathbf{r}}_{IE} = \sum_{k=1}^n \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{I}k} \times \mathbf{r}_{k(k+1)} \quad (2.156)$$

使用 \mathbf{n}_k 表示关节的旋转轴 k 可以得到：

$$\boldsymbol{\omega}_{(k-1)k} = \mathbf{n}_k \dot{q}_k \quad (2.157)$$

按照之前的结论：

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{I}(k)} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{I}(k-1)} + \boldsymbol{\omega}_{(k-1)k} \quad (2.158)$$

刚体 k 的角速度可以写成：

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{I}k} = \sum_{i=1}^k \mathbf{n}_i \dot{q}_i \quad (2.159)$$

将其代入公式 2.156 并重新排列得到：

$$\dot{\mathbf{r}}_{IE} = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^k (\mathbf{n}_i \dot{q}_i) \times \mathbf{r}_{k(k+1)} \right) \quad (2.160)$$

$$= \sum_{k=1}^n \mathbf{n}_k \dot{q}_k \times \sum_{i=k}^n \mathbf{r}_{i(i+1)} \quad (2.161)$$

$$= \sum_{k=1}^n \mathbf{n}_k \dot{q}_k \times \mathbf{r}_{k(n+1)} \quad (2.162)$$

将其变成矩阵公式得到几何雅可比：

$$\dot{\mathbf{r}}_{IE} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{n}_1 \times \mathbf{r}_{1(n+1)} & \mathbf{n}_2 \times \mathbf{r}_{2(n+1)} & \cdots & \mathbf{n}_n \times \mathbf{r}_{n(n+1)} \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}_{e0P}} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{pmatrix} \quad (2.163)$$

给定公式 2.159，旋转雅可比是可以表示成：

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{I}E} = \sum_{i=1}^n \mathbf{n}_i \dot{q}_i = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{n}_1 & \mathbf{n}_2 & \cdots & \mathbf{n}_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}_{e0R}} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{pmatrix} \quad (2.164)$$

结合这两个表达式可以得到组合的几何雅可比：

$$\mathbf{J}_{e0} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{e0P} \\ \mathbf{J}_{e0R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_1 \times \mathbf{r}_{1(n+1)} & \mathbf{n}_2 \times \mathbf{r}_{2(n+1)} & \cdots & \mathbf{n}_n \times \mathbf{r}_{n(n+1)} \\ \mathbf{n}_1 & \mathbf{n}_2 & \cdots & \mathbf{n}_n \end{bmatrix} \quad (2.165)$$

如本节开头所述，重要的是我们需要根据一个基坐标系来定义这个雅可比，例如坐标系 \mathcal{I} （或任何其他坐标系）：

$$\mathcal{I}\mathbf{J}_{e0} = \begin{bmatrix} \mathcal{I}\mathbf{J}_{e0P} \\ \mathcal{I}\mathbf{J}_{e0R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{I}\mathbf{n}_1 \times \mathcal{I}\mathbf{r}_{1(n+1)} & \mathcal{I}\mathbf{n}_2 \times \mathcal{I}\mathbf{r}_{2(n+1)} & \cdots & \mathcal{I}\mathbf{n}_n \times \mathcal{I}\mathbf{r}_{n(n+1)} \\ \mathcal{I}\mathbf{n}_1 & \mathcal{I}\mathbf{n}_2 & \cdots & \mathcal{I}\mathbf{n}_n \end{bmatrix} \quad (2.166)$$

在此公式中，旋转轴由以下公式给定：

$$\mathcal{I}\mathbf{n}_k = \mathbf{C}_{\mathcal{I}(k-1)} \cdot (k-1)\mathbf{n}_k \quad (2.167)$$

2.8.6 几何矩阵与解析雅可比矩阵的关系

末端执行器表示参数的微分 $\dot{\boldsymbol{\chi}}_e$ 和由 线性 和角速度组成的旋量 \mathbf{w}_e 之间存在映射。这种关系也体现在位置和旋转

相对于广义坐标的偏微分 $\mathbf{J}_{eA} \in \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_e}{\partial \mathbf{q}} \mathbb{R}^{m \times n_j}$ 和几何雅可比 $\mathbf{J}_{e0} \in \mathbb{R}^{6 \times n_j}$ 之间。给定

$$\dot{\boldsymbol{\chi}}_e = \mathbf{J}_{eA}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad \text{其中 } \mathbf{J}_{eA}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{m_e \times n_j} \quad (2.189)$$

$$\mathbf{w}_e = \mathbf{J}_{e0}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad \text{其中 } \mathbf{J}_{e0}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{6 \times n_j} \quad (2.190)$$

$$\mathbf{w}_e = \mathbf{E}_e(\boldsymbol{\chi}_e) \dot{\boldsymbol{\chi}}_e \quad \text{其中 } \mathbf{E}_e(\boldsymbol{\chi}_e) = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_P & 0 \\ 0 & \mathbf{E}_R \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m_e \times 6} \quad (2.191)$$

以下映射同样成立：

$$\mathbf{J}_{e0}(\mathbf{q}) = \mathbf{E}_e(\chi)\mathbf{J}_{eA}(\mathbf{q}) \quad (2.192)$$

2.9 运动学控制方法

2.9.1 逆微分运动学

正如我们所看到的，雅可比 $\mathbf{J}_{e0}(\mathbf{q})$ 是关节空间速度 $\dot{\mathbf{q}}$ 和末端执行器速度 \mathbf{w}_e 之间的简单映射：

$$\mathbf{w}_e = \mathbf{J}_{e0}\dot{\mathbf{q}} \quad (2.193)$$

然而，在许多情况下，特别是在控制领域，我们对解决逆问题更加感兴趣：即给定期望的末端执行器速度 \mathbf{w}_e^* ，求解对应的关节速度 $\dot{\mathbf{q}}$ 一个显而易见的方法是简单地反转雅可比矩阵，或者更一般地，取雅可比的伪逆：

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_{e0}^+ \mathbf{w}_e^* \quad (2.194)$$

然而，正如我们所知，伪逆的求解存在不同种类的方法，并且 \mathbf{J}_{e0} 的特性会影响解的唯一性。

奇异性

如果机器人所处的位形 \mathbf{q}_s 对应的雅可比矩阵 $\mathbf{J}_{e0}(\mathbf{q}_s)$ 满足 $\text{rank} < m_0$ ，其中 m_0 为操作空间坐标的数量（即末端执行器的可控自由度），该位形称为奇位形异。

阻尼解

为了处理接近奇异的条件数不好的 \mathbf{J}_{e0} ，一个常见的方法是使用带阻尼的摩尔-彭罗斯伪逆：

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_{e0}^T (\mathbf{J}_{e0}\mathbf{J}_{e0}^T + \lambda^2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{w}_e^* \quad (2.195)$$

其中 λ 为阻尼参数。阻尼参数越大，所得到的解越稳定，但收敛速度越慢。这种求逆方法使误差 $\|\mathbf{w}_e^* - \mathbf{J}_{e0}\dot{\mathbf{q}}\|^2 + \lambda^2 \|\dot{\mathbf{q}}\|^2$ 最小化。

冗余

如果机器人所处的位形 \mathbf{q}^* 对应的雅可比矩阵 $\mathbf{J}_{e0}(\mathbf{q}^*)$ 满足 $\text{rank} < n$ ，该位形称为冗余。当采用摩尔-彭罗斯伪逆时，如在前面的情况下，我们可以得到解：

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_{e0}^T (\mathbf{J}_{e0}\mathbf{J}_{e0}^T)^{-1} \mathbf{w}_e^* \quad (2.196)$$

此时会在满足 $\mathbf{w}_e^* = \mathbf{J}_{e0}\dot{\mathbf{q}}$ 的前提下最小化误差 $\|\dot{\mathbf{q}}\|^2$ 。系统中的冗余意味着存在无限多的解：

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_{e0}^+ \mathbf{w}_e^* + \mathbf{N}\dot{\mathbf{q}}_0 \quad (2.197)$$

其中 $\mathbf{N} = \mathbf{N}(\mathbf{J}_{e0})$ 是满足 $\mathbf{J}_{e0}\mathbf{N} = \mathbf{0}$ 的 \mathbf{J}_{e0} 的零空间投影矩阵。这允许我们在不改变末端执行器运动的前提下，通过任意选择 $\dot{\mathbf{q}}_0$ 来修改广义速度 $\dot{\mathbf{q}}$ ：

$$\mathbf{J}_{e0}(\mathbf{J}_{e0}^+ \mathbf{w}_e^* + \mathbf{N}\dot{\mathbf{q}}_0) = \mathbf{w}_e^* \quad \forall \dot{\mathbf{q}}_0 \quad (2.198)$$

存在不同的方法来确定空空间投影矩阵，最简单的投影矩阵如下：

$$\mathbf{N} = \mathbf{I} - \mathbf{J}_{e0}^+ \mathbf{J}_{e0} \quad (2.199)$$

2.9.2 多任务逆微分运动学控制

对于例如跟随特定轨迹、达到末端执行器方向、确保运动学约束等任务或操作空间目标来说，任务雅可比和期望的任务速度可以定义为：

$$\text{task}_i := \{\mathbf{J}_i \mathbf{w}_i^*\} \quad (2.200)$$

相同优先级的多任务

如果所有的 n_t 个任务具有相同的优先级，广义速度可以由以下公式得到：

$$\dot{\mathbf{q}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{J}_{n_t} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{J}}} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{w}_1^* \\ \vdots \\ \mathbf{w}_{n_t}^* \end{pmatrix}}_{\bar{\mathbf{w}}} \quad (2.201)$$

如果堆叠雅可比矩阵 $\bar{\mathbf{J}}$ 的行秩大于列秩，此时我们仅需要在最小二乘最优意义上 $\|\bar{\mathbf{w}} - \bar{\mathbf{J}}\dot{\mathbf{q}}\|_2$ 完成任务。使用加权伪逆矩阵能够将特定的任务的优先级设定为高优先级。

$$\bar{\mathbf{J}}^{+W} = (\bar{\mathbf{J}}^T \mathbf{W} \bar{\mathbf{J}})^{-1} \bar{\mathbf{J}}^T \mathbf{W} \quad (2.202)$$

其中加权矩阵为 $\mathbf{W} = \text{diag}(\mathbf{w}_1 \dots \mathbf{w}_{n_t})$ ，对应于误差 $\|\mathbf{W}^{\frac{1}{2}}(\bar{\mathbf{w}} - \bar{\mathbf{J}}\dot{\mathbf{q}})\|_2$ 的最小化。因为 \mathbf{W} 是对角矩阵，Cholesky 因子 $1/2$ 对应于元素的平方根。

具有优先级的多任务

为了明确地保证多任务的优先级，一种方法是使用连续的零空间投影来确定解。假设 n_t 个任务的优先级依次降低， task1 对应的广义速度是：

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_1^+ \mathbf{w}_1^* + \mathbf{N}_1 \dot{\mathbf{q}}_0 \quad (2.203)$$

因此，为了不违背第一个目标，它必须满足：

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{J}_2 \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_2 (\mathbf{J}_1^+ \mathbf{w}_1^* + \mathbf{N}_1 \dot{\mathbf{q}}_0) \quad (2.204)$$

这可以求解 $\dot{\mathbf{q}}_0$ ：

$$\dot{\mathbf{q}}_0 = (\mathbf{J}_2 \mathbf{N}_1)^+ (\mathbf{w}_2^* - \mathbf{J}_2 \mathbf{J}_1^+ \mathbf{w}_1^*) \quad (2.205)$$

将其代入公式 2.203 中，得到：

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_1^+ \mathbf{w}_1^* + \mathbf{N}_1 (\mathbf{J}_2 \mathbf{N}_1)^+ (\mathbf{w}_2^* - \mathbf{J}_2 \mathbf{J}_1^+ \mathbf{w}_1^*) \quad (2.206)$$

对于 n_t 个任务来说，解可以以递归方式写做：

$$\dot{\mathbf{q}} = \sum_{i=1}^{n_t} \bar{\mathbf{N}}_i \dot{\mathbf{q}}_i \quad \text{with} \quad \dot{\mathbf{q}}_i = (\mathbf{J}_i \bar{\mathbf{N}}_i)^+ \left(\mathbf{w}_i^* - \mathbf{J}_i \sum_{k=1}^{i-1} \bar{\mathbf{N}}_k \dot{\mathbf{q}}_k \right) \quad (2.207)$$

其中 $\bar{\mathbf{N}}_i$ 是堆叠雅可比矩阵 $\mathbf{J}_i = [\mathbf{J}_1^T \dots \mathbf{J}_{i-1}^T]^T$ 的零空间投影。

2.9.3 逆运动学

逆运动学的目标是找到一个关节位形 \mathbf{q} ，其是给定末端执行器位形 χ_e^* 的函数

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}(\chi_e^*) \quad (2.228)$$

解析解

对于一大类机械结构来说，是存在解析解的，事实上，许多机械臂被特别设计成可以解析地求解逆运动学问题。对于经典的 6 自由度机械臂来说，解析解存在的必要条件是三个相邻轴相交。解析求解逆运动学问题有两种被广泛使用的方法：几何方法是将机械手的空间几何分解成几个平面问题，并应用几何定律进行求解；代数方法是操纵变换矩阵来得到角度。

数值解

随着计算能力的提高，数值方法成为解决逆运动学问题的常用工具。可以使用解析雅可比直接将关节空间坐标的差 $\Delta \mathbf{q}$ 映射成末端执行器坐标的差 $\Delta \chi_e$

$$\Delta \chi_e = \mathbf{J}_{eA} \Delta \mathbf{q} \quad (2.229)$$

这种关系可以在给定初始位形 \mathbf{q}^0 和期望的末端执行器位形 χ_e^* 的条件下，迭代地求解逆运动学问题（参见算法 2.9.3）。

| 算法 1 数值逆运动学 | | |
|---|--|--------------------------|
| 1: $\mathbf{q} \leftarrow \mathbf{q}^0$ | | ▷ 初始位形 |
| 2: while $\ \chi_e^* - \chi_e(\mathbf{q})\ > \text{tol}$ do | | ▷ 未求到解 |
| 3: $\mathbf{J}_{eA} \leftarrow \mathbf{J}_{eA}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \chi_e}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q})$ | | ▷ 评估位形 \mathbf{q} 的雅可比 |
| 4: $\mathbf{J}_{eA}^+ \leftarrow (\mathbf{J}_{eA})^+$ | | ▷ 计算伪逆 |
| 5: $\Delta \chi_e \leftarrow \chi_e^* - \chi_e(\mathbf{q})$ | | ▷ 计算末端执行器位形误差向量 |
| 6: $\mathbf{q} \leftarrow \mathbf{q} + \mathbf{J}_{eA}^+ \Delta \chi_e$ | | ▷ 更新广义坐标 |
| 7: end while | | |

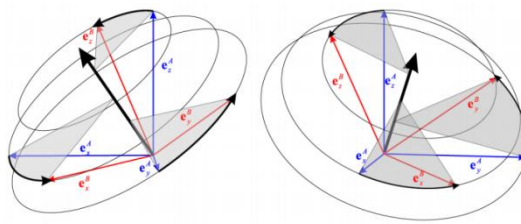


图 2.14: 从起点到目标坐标系的 3D 旋转可以由旋转角度和旋转向量表示

适当的旋转误差

我们选择旋转误差为：

$$\Delta\phi = \Delta\varphi \quad (2.235)$$

其参数化从开始 $C_{SI}(\phi^*)$ 到达目标方向 $C_{GI}(\phi^*)$ 的相对旋转 C_{GS} ：

$$C_{GS}(\Delta\varphi) = C_{GI}(\varphi^*) C_{SI}^T(\varphi^t) \quad (2.236)$$

线性位置误差可以定义为

$$\mathcal{I}r_{BB*} = \mathcal{I}r_{IB*} - \mathcal{I}r_{IB} \quad (2.238)$$

类似地，我们可以将两个姿态之间的相对旋转定义为：

$$C_{BS*} = C_{IB}^T \cdot C_{IS*} \quad (2.239)$$

2.9.4 轨迹控制

轨迹控制可以通过利用加权跟踪误差

差来反馈稳定逆微分运动学，最终会得到平滑并无漂移的运动轨迹。

位置轨迹控制

具有给定预先计划位置的位置跟踪 $r_e^*(t)$ 和速度 $\dot{r}_e^*(t)$ 问题是非常简单的。反馈控制部分保证误差：

$$\Delta r_e^t = r_e^*(t) - r_e(q^t) \quad (2.240)$$

为零，这将得到以下轨迹控制器：

$$\dot{q}^* = J_{e0P}^+(q^t) \cdot (\dot{r}_e^*(t) + k_{pP} \Delta r_e^t) \quad (2.241)$$

因此 k_{pP} 表示位置反馈，定义了实际位置收敛到目标位置的速度。

方向轨迹控制

跟踪方向 $\chi_R^*(t)$ 和角速度 $\omega^*(t)$ 时，问题将会变得越来越复杂。参数化的选择导致了不同的轨迹。最好的方法是遵循最短旋转方法，这相当于位置跟踪。有了这个，我们可以写出：

$$\dot{q}^* = J_{e0R}^+(q^t) \cdot (\omega_e^*(t) + k_{pR} \Delta\varphi) \quad (2.242)$$

2.10 浮动基座运动学

图 2.15 中描述的四足和人形的浮动基座机器人可以由 n_b 个未驱动的基本坐标 q_b 和 n_j 个驱动关节坐标 q_j 描述：

$$q = \begin{pmatrix} q_b \\ q_j \end{pmatrix} \quad (2.243)$$

未驱动的基座在平移和旋转上都是自由的：

$$q_b = \begin{pmatrix} q_{bP} \\ q_{bR} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \times SO(3) \quad (2.244)$$

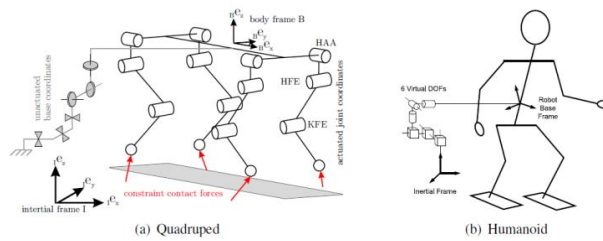


图 2.15: 自由浮动机器人的基座未驱动

其中位置 q_{bP} 和旋转 q_{bR} 可以使用不同的表示来参数化。

2.10.1 广义速度和加速度

因为 $SO(3)$ 的微分不同于 \mathbb{R}^3 ，所以人们经常引入广义速度和加速度向量：

$$u = \begin{pmatrix} \mathcal{I}v_B \\ \mathcal{B}\omega_{IB} \\ \dot{\varphi}_1 \\ \vdots \\ \dot{\varphi}_{n_j} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{6+n_j} = \mathbb{R}^{n_u} \quad \dot{u} = \begin{pmatrix} \mathcal{I}a_B \\ \mathcal{B}\dot{\phi}_{IB} \\ \ddot{\varphi}_1 \\ \vdots \\ \ddot{\varphi}_{n_j} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{6+n_j} \quad (2.245)$$

存在从旋转速度 ω 到末端执行器旋转坐标 q_{br} 相对于时间的导数的直接映射，使得：

$$\mathbf{u} = \mathbf{E}_{fb} \cdot \dot{\mathbf{q}} \quad \text{其中} \quad \mathbf{E}_{fb} = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{3 \times 3} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{E}_{x_R} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{I}_{n_j \times n_j} \end{bmatrix} \quad (2.246)$$

2.10.2 正向运动学

我们希望导出广义速度 \mathbf{u} 和操作空间中点 Q 的速度 ${}^I\mathbf{v}_Q$ 之间的关系，点 Q 固定在以浮动基座 B 为起点的运动链的末端。点 Q 对应的位置向量 ${}^I\mathbf{r}_{IQ} = {}^I\mathbf{r}_{IQ}(\mathbf{q})$ 在惯性坐标系 I 中的表示由以下公式给出：

$${}^I\mathbf{r}_{IQ}(\mathbf{q}) = {}^I\mathbf{r}_{IB}(\mathbf{q}) + \mathbf{C}_{IB}(\mathbf{q}) \cdot {}^B\mathbf{r}_{BQ}(\mathbf{q}) \quad (2.247)$$

其中旋转矩阵 $\mathbf{C}_{IB}(\mathbf{q})$ 描述浮动底座 B 相对于惯性坐标系 I 的方向。 ${}^I\mathbf{r}_{IB}(\mathbf{q})$ 表示在惯性坐标系中浮基坐标系 B 相对于惯性坐标系 I 的位置， ${}^B\mathbf{r}_{BQ}(\mathbf{q})$ 代表在惯性坐标系 B 中点 Q 相对于浮基 B 的位置，以及 $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{t})$ 是时间 \mathbf{t} 的函数。

2.10.3 浮动基座系统的微分运动学

位置向量的时间微分可以由以下公式得到：

$$\begin{aligned} {}^I\mathbf{v}_Q &= {}^I\mathbf{v}_B + \dot{\mathbf{C}}_{IB} \cdot {}^B\mathbf{r}_{BQ} + \mathbf{C}_{IB} \cdot {}^B\dot{\mathbf{r}}_{BQ} \\ &= {}^I\mathbf{v}_B + \mathbf{C}_{IB} \cdot [\mathbf{B}\omega_{IB}]_{\times} \cdot {}^B\mathbf{r}_{BQ} + \mathbf{C}_{IB} \cdot {}^B\dot{\mathbf{r}}_{BQ} \\ &= {}^I\mathbf{v}_B - \mathbf{C}_{IB} \cdot [\mathbf{B}\mathbf{r}_{BQ}]_{\times} \cdot \mathbf{B}\omega_{IB} + \mathbf{C}_{IB} \cdot {}^B\dot{\mathbf{r}}_{BQ} \\ &= {}^I\mathbf{v}_B - \mathbf{C}_{IB} \cdot [\mathbf{B}\mathbf{r}_{BQ}]_{\times} \cdot \mathbf{B}\omega_{IB} + \mathbf{C}_{IB} \cdot \mathbf{B}\mathbf{J}_{P_{q_j}}(\mathbf{q}_j) \cdot \dot{\mathbf{q}}_j \\ &= \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{3 \times 3} & -\mathbf{C}_{IB} \cdot [\mathbf{B}\mathbf{r}_{BQ}]_{\times} & \mathbf{C}_{IB} \cdot \mathbf{B}\mathbf{J}_{P_{q_j}}(\mathbf{q}_j) \end{bmatrix} \cdot \mathbf{u} \end{aligned} \quad (2.248)$$

如果我们在 ${}^I\mathbf{r}_{IQ}$ 表示的点处附加一个坐标系，我们可以导出角速度的类似映射。坐标系 Q 相对于惯性坐标系 I 的方向描述如下：

$$\mathbf{C}_{IQ} = \mathbf{C}_{IB} \cdot \mathbf{C}_{BQ} \quad (2.249)$$

对公式 2.249 等式两边关于时间求导得到：

$$\begin{aligned} [\mathbf{I}\omega_{IQ}]_{\times} \cdot \mathbf{C}_{IQ} &= [\mathbf{I}\omega_{IB}]_{\times} \cdot \mathbf{C}_{IB} \cdot \mathbf{C}_{BQ} + \mathbf{C}_{IB} \cdot [\mathbf{B}\omega_{BQ}]_{\times} \cdot \mathbf{C}_{BQ} \\ &= [\mathbf{I}\omega_{IB}]_{\times} \cdot \mathbf{C}_{IQ} + \mathbf{C}_{IB} \cdot \mathbf{C}_{BI} \cdot [\mathbf{I}\omega_{BQ}]_{\times} \cdot \mathbf{C}_{BI}^T \cdot \mathbf{C}_{BQ} \\ &= [\mathbf{I}\omega_{IB}]_{\times} \cdot \mathbf{C}_{IQ} + [\mathbf{I}\omega_{BQ}]_{\times} \cdot \mathbf{C}_{IQ} \end{aligned} \quad (2.250)$$

最后给出：

$$\mathbf{I}\omega_{IQ} = \mathbf{I}\omega_{IB} + \mathbf{I}\omega_{BQ} \quad (2.251)$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{C}_{IB} & \mathbf{C}_{IB} \cdot \mathbf{B}\mathbf{J}_{R_{q_j}}(\mathbf{q}_j) \end{bmatrix} \cdot \mathbf{u} \quad (2.252)$$

因此，从广义速度 \mathbf{u} 到相对于坐标系 Q 的操作空间旋量 $[{}^I\mathbf{v}_Q^T \quad {}^I\omega_{IQ}^T]^T$ 的映射可以由空间雅可比实现：

$${}^I\mathbf{J}_Q(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} {}^I\mathbf{J}_P \\ {}^I\mathbf{J}_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{3 \times 3} & -\mathbf{C}_{IB} \cdot [\mathbf{B}\mathbf{r}_{BQ}]_{\times} & \mathbf{C}_{IB} \cdot \mathbf{B}\mathbf{J}_{P_{q_j}}(\mathbf{q}_j) \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{C}_{IB} & \mathbf{C}_{IB} \cdot \mathbf{B}\mathbf{J}_{R_{q_j}}(\mathbf{q}_j) \end{bmatrix} \quad (2.253)$$

2.10.4 接触和约束

在运动学中，机器人与其环境之间的接触可以被建模为运动学约束。在坐标系 I 中，与环境接触的每一点 C_i 施加的三个约束表示为：

$${}^I\mathbf{r}_{IC_i} = \text{const}, \quad {}^I\dot{\mathbf{r}}_{IC_i} = {}^I\ddot{\mathbf{r}}_{IC_i} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.254)$$

这些接触约束可以用接触点雅可比表示为广义速度和加速度的函数：

$${}^I\mathbf{J}_{C_i}\mathbf{u} = 0 \quad {}^I\mathbf{J}_{C_i}\dot{\mathbf{u}} + {}^I\ddot{\mathbf{J}}_{C_i}\mathbf{u} = 0 \quad (2.255)$$

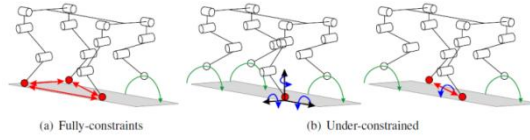


图 2.16: 根据点接触的数量和布置不同, 四足机器人可能处于完全约束 (a) 或受欠约束 (b) 状态

如果有 n_c 个活动的接触点, 约束简单地堆叠得到:

$$\mathbf{J}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{C_1} \\ \vdots \\ \mathbf{J}_{C_{n_c}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3n_c \times n_n} \quad (2.256)$$

约束雅可比矩阵的秩 $\text{rank}(\mathbf{J}_c)$ 表示独立接触约束的数量。这个堆叠的雅可比可以被分成:

$$\mathbf{J}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{c,b} & \mathbf{J}_{c,j} \end{bmatrix} \quad (2.257)$$

其中 $\mathbf{J}_{c,b}$ 表示基座运动和接触约束之间的关系。如果 $\mathbf{J}_{c,b}$ 满秩即 $\text{rank}(\mathbf{J}_{c,b}) = 6$, 也就意味着该系统具有足够的约束, 使得基座的运动可以由关节运动控制。独立接触约束数量 $\text{rank}(\mathbf{J}_c)$ 与基本约束的数量 $\text{rank}(\mathbf{J}_{c,b})$ 之间的差是必须满足的内部运动学约束的数量。

2.10.5 点触点-四足

四足机器人的每一个点状脚都能施加三个独立约束。在两点接触的情况下, 堆叠接触雅可比的秩 $\text{rank}(\mathbf{J}_c) = 6$, 但是相对于基坐标系的雅可比的秩只有 $\text{rank}(\mathbf{J}_{c,b}) = 5$ 。这意味着系统欠驱动, 底座不能被接关节任意移动。当观察图 2.16(b) 时, 这变得直观清晰, 因为机器人不能改变支撑线周围的方向。

与此相反的是, 如图 2.16(a) 所示的三点接触意味着 $\text{rank}(\mathbf{J}_c) = 9$ 和 $\text{rank}(\mathbf{J}_{c,b}) = 6$ 。这意味着刚体的位置和方向通过关节驱动是完全可控的。同时, 有三个内部约束可以通过三个腿不能相对于另一个移动这一事实来解释。

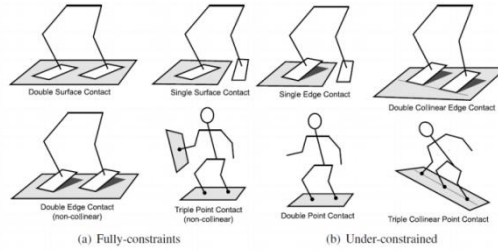


图 2.17: 根据点接触的数量和分布不同, 人形机器人是完全受约束 (a) 或欠约束 (b) 状态

2.10.6 扩展接触-人形

对于有平面脚的系统的来说, 需要额外的约束以限制脚的旋转。一个可能的选择是引入旋转雅可比。更常见的是在同一连杆上分配多个接触点。单个接触点 (图 2.18, 左) 施加了三个约束, 正如我们上一小节中已经看到的。在两个接触点的情况下, 约束的秩为 $\text{rank}(\mathbf{J}_c) = \text{rank}(\mathbf{J}_{c,b}) = 5$ 。如果将三个点分配给同一元素, 虽然 $\mathbf{J}_c \in \mathbb{R}^{9 \times n_j}$, 我们将得到 $\text{rank}(\mathbf{J}_c) = \text{rank}(\mathbf{J}_{c,b}) = 6$ 。

2.10.7 支持一致逆运动学

将逆运动学应用于浮动基座系统让我们能够在不违反接触约束的情况下移动单个关节以实现某些任务空间运动。具有优先次序的多任务方法也可以应用这个方法, 此时接触约束被认为比任务空间运动具有更高的优先级。如之前所述, n_c 条腿与地面接触时的接触约束为:

$$\mathbf{J}_c \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (2.258)$$

这意味着系统在与地面接触时的运动为:

$$\mathbf{u} = \mathbf{J}_c^+ \mathbf{0} + \mathcal{N}(\mathbf{J}_c) \mathbf{u}_0 = \mathbf{N}_c \mathbf{u}_0 \quad (2.259)$$

因此, 给定一个需要的任务空间运动:

$$\mathbf{w}_t = \mathbf{J}_t \mathbf{u}_i \quad (2.260)$$

达到此目的所需的关节速度是：

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}_c(\mathbf{J}_t \mathbf{N}_c)^+ + \mathbf{w}_t \quad (2.261)$$

3. 动力学

3.1 介绍

对于大多数固定基座机器人来说，我们能够找到一个通用的多体动力学方程来描述系统的动力学，该方程为：

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{b}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} + \mathbf{J}_c(\mathbf{q})^T \mathbf{F}_c \quad (3.1)$$

多体动力学方程由以下项组成：

| | | |
|---|-----------------------------------|---------------|
| $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ | $\in \mathbb{R}^{n_q \times n_q}$ | 正交广义质量矩阵 |
| $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}$ | $\in \mathbb{R}^{n_q}$ | 广义位置、速度和加速度向量 |
| $\mathbf{b}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ | $\in \mathbb{R}^{n_q}$ | 科式力与离心力 |
| $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ | $\in \mathbb{R}^{n_q}$ | 重力项 |
| $\boldsymbol{\tau}$ | $\in \mathbb{R}^{n_q}$ | 外部广义力 |
| \mathbf{F}_c | $\in \mathbb{R}^{3 \times n_c}$ | 外部笛卡尔力 |
| $\mathbf{J}_c(\mathbf{q})$ | $\in \mathbb{R}^{n_c \times n_q}$ | 对应于外部力的几何雅可比 |

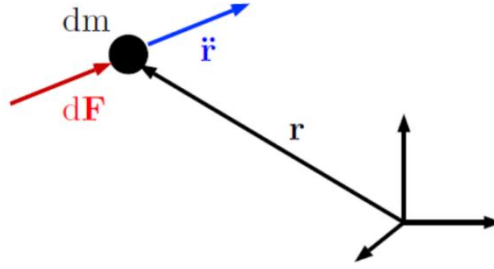


图 3.1: 作用于单个粒子的力

3.2 经典力学基础

3.2.1 牛顿粒子定律

牛顿力学用最简单的形式描述了质点的运动，质点是拥有质量 m 的并且不存在体积或形状的点，是物理学中的一个理想化模型。我们可以假设质点的质量全部集中在由位置向量 \mathbf{r} 定义的点处，如图 3.1 所示。请记住，质点没有方向，因为质点不具有任何几何形状，这意味着我们只需要利用牛顿第二定律就可以完整地描述系统的运动：

$$\ddot{\mathbf{r}}m = \mathbf{F} \quad (3.2)$$

再次考虑到我们已经将粒子的质量定义在无限小的维度这一事实，我们可以将其视为无穷小的质量 dm 在粒子的位置上集中受到无穷小的力 $d\mathbf{F}$ ：

$$\ddot{\mathbf{r}}dm = d\mathbf{F} \quad (3.3)$$

3.2.2 虚位移

关于变分，我们要记住的最重要的事实是：如果它是关于时间的函数，在处理变分时，我们可以将时间完全忽略。为了证明这一性质，我们定义位置向量的容许变化为虚位移 $\delta\mathbf{r}$ ，并假设位置是广义坐标 \mathbf{q} 和时间 t 的函数，因此可以得到： $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{q}, t)$ 。通过对 \mathbf{q} 的 n_q 个元素应用链式法则，我们可以计算变分 $\delta\mathbf{r}$ ：

$$\delta\mathbf{r}(\mathbf{q}, t) = \sum_{k=1}^{n_q} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k} \delta q_k \quad (3.4)$$

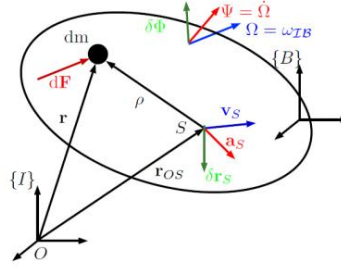


图 3.2: 单刚体运动学

3.2.3 单个刚性体的虚位移

可以使用刚体运动学公式，通过另一个位于刚体上的点 S 来描述任意定义在刚体 B 上的质点 dm 的运动：

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{OS} + \boldsymbol{\rho} \quad (3.5)$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}_S + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\rho} = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{3 \times 3} & -[\boldsymbol{\rho}]_{\times} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_S \\ \boldsymbol{\Omega} \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{a}_S + \dot{\boldsymbol{\Psi}} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\rho}) = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{3 \times 3} & -[\boldsymbol{\rho}]_{\times} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_S \\ \dot{\boldsymbol{\Psi}} \end{pmatrix} + [\boldsymbol{\Omega}]_{\times} [\boldsymbol{\Omega}]_{\times} \boldsymbol{\rho} \quad (3.7)$$

其中 \mathbf{r}_{OS} 是刚体上点 S 的绝对位置， $\boldsymbol{\rho}$ 是 dm 相对于 S 的相对位置，以及 \mathbf{v}_S 和 $\boldsymbol{\Omega}$ 表示点 S 的绝对速度， $\dot{\boldsymbol{\Psi}}$ 和 \mathbf{a}_S 表示点 S 的绝对加速度。将公式 3.4 代入公式 3.5，我们得到了刚体元素 dm 的虚位移的表达式：

$$\delta \mathbf{r} = \delta \mathbf{r}_S + \delta \boldsymbol{\Phi} \times \boldsymbol{\rho} = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{3 \times 3} & -[\boldsymbol{\rho}]_{\times} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \delta \mathbf{r}_S \\ \delta \boldsymbol{\Phi} \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

其中 $\delta \boldsymbol{\Phi}$ 表示固定在刚体上 S 点的局部坐标系的微小旋转的变分，其描述了位于 S 点处的局部坐标系在满足约束的前提下方向的变化。注意 $\delta \boldsymbol{\Phi}$ 都是粗体表示，这是因为变分不是相对于方向的数值求解，就像角速度也不是方向在时间上求微分的结果一样。

3.2.4 多体系统的虚位移

多体系统只能实现满足关约束的运动，从而限制了连杆之间的相对运动。运动通常使用广义坐标 \mathbf{q} 来描述：

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}_S \\ \boldsymbol{\Omega} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_P \\ \mathbf{J}_R \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \quad (3.9)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_S \\ \dot{\boldsymbol{\Psi}} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_P \\ \mathbf{J}_R \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} + \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{J}}_P \\ \dot{\mathbf{J}}_R \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \quad (3.10)$$

再次将公式 3.4 代入到公式 3.9 和公式 3.10 中，虚位移的概念现在引入到多体系统中，并且意味着满足关节约束的虚位移必须具有以下形式：

$$\begin{pmatrix} \delta \mathbf{r}_S \\ \delta \boldsymbol{\Phi} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_P \\ \mathbf{J}_R \end{bmatrix} \delta \mathbf{q} \quad (3.11)$$

3.2.5 虚功原理

力学中的一个基本原理是虚功原理，它描述了这样一个事实：即位形约束实际上定义了沿虚位移方向不做功的力。对于任意关节产生的作用于 \mathbf{r}_c 点的约束力 \mathbf{F}_c ，虚功原理告诉我们：

$$\delta W = \delta \mathbf{r}_c^T \cdot \mathbf{F}_c = 0 \quad (3.12)$$

我们可以通过考虑在刚体 B 里的一个无限小的质点 dm 的基础上来做进一步扩展，考虑多个粒子之间的关系。通过引入描述粒子动力学平衡的达朗贝尔原理，我们可以得到整个物体 B 在沿几何形状上的虚功的积分：

$$\delta W = \int_B \delta \mathbf{r}^T \cdot (\ddot{\mathbf{r}} dm - d\mathbf{F}_{ext}) = 0, \quad \forall \delta \mathbf{r} \quad (3.13)$$

其中各项定义如下：

| | |
|----------------------------|-----------------------|
| dm | 无限小质量单元 |
| $d\mathbf{F}_{\text{ext}}$ | 施加上单元 dm 的外力 |
| \mathbf{r} | 单元 dm 的加速度 |
| $\delta\mathbf{r}$ | 单元 dm 的虚位移 |
| \mathcal{B} | 包含无穷小质量 dm 的粒子的刚体系统 |

因此，对于所有满足系统约束的位形变化 $\delta\mathbf{r}$ 来说，虚功都为零。尽管这个表述可能看起来有些复杂，但在后续的讲义中会变得更加清楚，它以一种非常紧凑和易于理解的方式描述了我们力学中大多数众所周知的概念。

3.3 牛顿-欧拉法

在单刚体上应用虚功原理公式 3.13 可得到：

$$\begin{aligned}
 0 = \delta W &= \int_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} \delta\mathbf{r}_s \\ \delta\Phi \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{3 \times 3} \\ [\rho]_{\times} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \mathbb{I}_{3 \times 3} & -[\rho]_{\times} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_s \\ \Psi \end{pmatrix} dm + [\Omega]_{\times}^2 \rho dm - d\mathbf{F}_{\text{ext}} \right) \\
 &= \begin{pmatrix} \delta\mathbf{r}_s \\ \delta\Phi \end{pmatrix}^T \int_{\mathcal{B}} \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{3 \times 3} dm & [\rho]_{\times}^T dm \\ [\rho]_{\times} dm & -[\rho]_{\times}^2 dm \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_s \\ \Psi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} [\Omega]_{\times}^2 \rho dm \\ [\rho]_{\times} [\Omega]_{\times}^2 \rho dm \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} d\mathbf{F}_{\text{ext}} \\ [\rho]_{\times} d\mathbf{F}_{\text{ext}} \end{pmatrix} \quad (3.14)
 \end{aligned}$$

已知公式 $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{a})) = -\mathbf{b} \times (\mathbf{a} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}))$ ，然后引入：

$$\int_{\mathcal{B}} dm =: m \quad \text{刚体质量} \quad (3.15)$$

$$\int_{\mathcal{B}} \rho dm =: \mathbf{0} \quad \text{因为S为质心} \quad (3.16)$$

$$\int_{\mathcal{B}} -[\rho]_{\times}^2 dm = \int_{\mathcal{B}} [\rho]_{\times} [\rho]_{\times}^T dm =: \Theta_S \quad \text{绕质心的惯量} \quad (3.17)$$

我们得到：

$$0 = \delta W = \begin{pmatrix} \delta\mathbf{r}_s \\ \delta\Phi \end{pmatrix}^T \left(\begin{bmatrix} \mathbb{I}_{3 \times 3} m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Theta_S \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_s \\ \Psi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ [\Omega]_{\times} \Theta_S \Omega \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{\text{ext}} \\ \mathbf{T}_{\text{ext}} \end{pmatrix} \right), \forall \begin{pmatrix} \delta\mathbf{r}_s \\ \delta\Phi \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

为了定义线动量和角动量守恒定律，我们引入了定义：

$$\mathbf{p}_S = m\mathbf{v}_S \quad \text{线动量} \quad (3.19)$$

$$\mathbf{N}_S = \Theta_S \cdot \Omega \quad \text{绕质心的角动量} \quad (3.20)$$

$$\dot{\mathbf{p}}_S = m\mathbf{a}_S \quad \text{线动量导数} \quad (3.21)$$

$$\dot{\mathbf{N}}_S = \Theta_S \cdot \dot{\Psi} + \Omega \times \Theta_S \cdot \Omega \quad \text{角动量导数} \quad (3.22)$$

一个自由移动的物足线动量的变化等于所有外力的总和：

$$0 = \delta W = \begin{pmatrix} \delta\mathbf{r}_s \\ \delta\Phi \end{pmatrix}^T \left(\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{p}}_S \\ \dot{\mathbf{N}}_S \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{\text{ext}} \\ \mathbf{T}_{\text{ext}} \end{pmatrix} \right) \quad \forall \begin{pmatrix} \delta\mathbf{r}_s \\ \delta\Phi \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

这引出了著名牛顿-欧拉的公式：

$$\dot{\mathbf{p}}_S = \mathbf{F}_{\text{ext},S} \quad (3.24)$$

$$\dot{\mathbf{N}}_S = \mathbf{T}_{\text{ext}} \quad (3.25)$$

其中 $\mathbf{F}_{\text{ext},S}$ 是通过质心 (COG) 的合外力， \mathbf{T}_{ext} 是合外扭矩。作用线不通过质心作用的外力需要转换到通过质心的等效力和力矩对。请再次注意，对于带数值的计算，线动量和角动量导数项必须在相同的坐标系中表示。对于惯性张量 Θ 我们必须满足 $\mathbf{B}\Theta = \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}\Theta \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{B}\mathbf{A}}^T$ 。

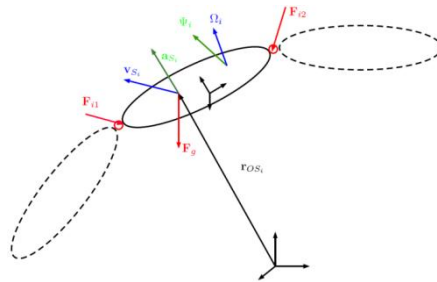


图 3.3: 受到关节约束力的多体系统的自由切割

3.4 拉格朗日法

3.4.1 介绍

该方法围绕三个基本概念：

1 广义坐标 q 和广义速度 \dot{q} 的定义，它可以含有也可以不涉及系统所受约束信息。

2 被称为拉格朗日函数的标量函数 L 。对于机械系统来说，就是系统在每一瞬间总动能 T 和总势能 U 之间的差：

$$\mathcal{L} = T - U \quad (3.26)$$

3 所谓的欧拉-拉格朗日方程，也称为第二类的欧拉-拉格朗日方程，适用于拉格朗日函数 L 以及外部广义力的总和 τ ：

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \right) = \tau \quad (3.27)$$

在最普遍的情况下，拉格朗日是广义坐标 q 和其速度 \dot{q} 的函数，并且它也可能对时间 t 有明确的依赖，因此我们将上述标量能量函数重新定义为 $T = T(t, q, \dot{q})$ 和 $U = U(t, q)$ ，因此 $L = L(t, q, \dot{q})$ 。

3.4.2 动能

由 n_b 个刚体组成的系统的动能被定义为：

$$T = \sum_{i=1}^{n_b} \left(\frac{1}{2} m_i \mathbf{r}_{S_i}^T \mathbf{A} \dot{\mathbf{r}}_{S_i} + \frac{1}{2} \mathbf{B} \boldsymbol{\Omega}_{S_i}^T \cdot \mathbf{B} \boldsymbol{\Theta}_{S_i} \cdot \mathbf{B} \boldsymbol{\Omega}_{S_i} \right) \quad (3.28)$$

对于该系统中每个刚体 B_i 来说，线速度部分可以在坐标系 A 中表示计算，但转动动能的计算在惯量矩阵 $\boldsymbol{\Theta}_{S_i}$ 具有对角线形式的坐标系 B 中计算更加方便，其中坐标系 B 相对于坐标系 A 旋转，并且坐标系 B 的基向量是相对于质量原则分布。只要线速度 $\mathbf{A} \dot{\mathbf{r}}_{S_i}$ 和角速度 $\mathbf{B} \boldsymbol{\Omega}_{S_i}$ 表示的是刚体的绝对速度，绝对速度在这里可以理解成相对于惯性坐标系的速度，公式 3.28 将得到正确的结果。我们现在需要将动能表示为广义量的函数。为了实现这一点，我们使用公式 2.163 和公式 2.164 所描述的雅可比矩阵，但我们对每个刚体 B_i 都进行了计算而不仅仅是末端执行器。所以我们可以得到以下运动学关系：

$$\dot{\mathbf{r}}_{S_i} = \mathbf{J}_{S_i} \dot{\mathbf{q}} \quad (3.29)$$

$$\boldsymbol{\Omega}_{S_i} = \mathbf{J}_{R_i} \dot{\mathbf{q}} \quad (3.30)$$

将这些关系代入公式 3.28 中动能的定义公式，得到以广义坐标表示的动能公式：

$$T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \left(\underbrace{\sum_{i=1}^{n_b} (\mathbf{J}_{S_i}^T m_i \mathbf{J}_{S_i} + \mathbf{J}_{R_i}^T \boldsymbol{\Theta}_{S_i} \mathbf{J}_{R_i})}_{\mathbf{M}(\mathbf{q})} \right) \dot{\mathbf{q}} \quad (3.31)$$

下划线表示的 $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ 被定义为广义质量矩阵或广义惯量矩阵，正如我们将在后文中看到的，其对应于在最终运动方程中的惯量和非线性离心力与科里奥利力项。

3.4.3 势能

在典型的力学问题中，系统中的势能有两个基本来源：质量元器件的重力势能和弹性元器件从静止到变形时存储的能量。在第一种情况下，每个刚体 B_i 由于地球的重力势场的影响，保持势能。虽然重力势能在大尺度上不是线性的，但在大多数情况下，我们可以通过单位向量 \mathbf{e}_g 定义的作用于质心的均匀单向势场来近似其对每个刚体的影响。如果我们知道刚体质心的位置 \mathbf{r}_{S_i} ，我们可以通过计算得到每个刚体的势能如下：

$$\mathbf{F}_{g_i} = m_i g \mathbf{e}_g \quad (3.32)$$

$$\mathcal{U}_g = - \sum_{i=1}^{n_b} \mathbf{r}_{S_i}^T \mathbf{F}_{g_i} \quad (3.33)$$

请注意，零能级可以任意选择。势能除了重力势能之外，许多应用还涉及包括弹簧或其他柔顺部件在内的弹性元件所对应的弹性势能。如果元器件 E_j 可以合理地近似为变形-力或变形-扭矩的线性关系，那么对应的势能可以通过以下关系来描述：

$$\mathcal{U}_{E_j} = \frac{1}{2} k_j (d(\mathbf{q}) - d_0)^2 \quad (3.34)$$

其中 $\mathbf{d}(\mathbf{q})$ 将弹性元件的瞬时位形（例如弹簧的长度）表示为广义坐标的函数。 \mathbf{d}_0 定义为静止时的位形，此时元件不受力，例如线性弹簧的静止长度。我们将当前长度与静止长度之差 $(\mathbf{d}(\mathbf{q}) - \mathbf{d}_0)$ 称之为弹性元件的变形量。注意：弹簧力可以等效地视为外力，其大小和方向可能取决于广义坐标 \mathbf{q} 。这种形式类似于驱动器的扭矩。

3.4.4 外力

在系统上做功的所有外力都由广义力向量 $\boldsymbol{\tau}$ 表示

3.4.5 附加约束

在大多数情况下，当我们定义广义坐标时，我们的目标是使用一组最小坐标来描述系统，以便表达我们可以控制或至少测量的自由度。通常，当我们定义广义向量 \mathbf{q} 时，这种接触约束不能被明确地考虑，因为它可能并不总是时刻出现在系统中。克服这一点的最常见方法是使用拉格朗日乘子，通常用向量 $\boldsymbol{\lambda}$ 表示。使用速度明确定义的约束被称为运动约束，通常表示为广义速度的线性组合：

$$\sum_{k=1}^{n_q} a_{k,j}(\mathbf{q})\dot{q}_k + a_{0,j}(t), \quad j = 1, 2, \dots, n_{c,m} \quad (3.35)$$

对于 $n_{c,m}$ 个运动约束来说，我们可以将所有 $\mathbf{a}_{k,j}(\mathbf{q})$ 的系数堆叠起来，从而得到运动约束下的雅可比矩阵 \mathbf{J}_m ：

$$\mathbf{J}_m = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n_{c,m}} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n_q,1} & \dots & a_{n_q,n_{c,m}} \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

另一方面，在某些情况下，约束将被定义为位形的函数，比如说标量函数 $f_j(\mathbf{q}) : \mathbb{R}^{n_q} \rightarrow \mathbb{R}$ ，也就是位形约束。

总的来说，引入这些约束会得到描述约束的运动方程，因为在 \mathbf{q} 的定义中没有说明附加约束，而参数 $\boldsymbol{\lambda}$ 刚好能够引入附加约束。因此，最终的运动方程是使用受约束的欧拉-拉格朗日（CEL）方程（也称为第一类的欧拉-拉格朗日方程）导出的：

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} \right) + \mathbf{J}_m^T \boldsymbol{\lambda}_m + \left(\frac{\partial \mathbf{f}_c}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \boldsymbol{\lambda}_c = \boldsymbol{\tau} \quad (3.37)$$

其中 $\boldsymbol{\lambda}_m \in \mathbb{R}^{n_{c,m}}$ 是运动约束的拉格朗日乘子向量，而 $\boldsymbol{\lambda}_c \in \mathbb{R}^{n_{c,c}}$ 是用于位形约束的拉格朗日乘子向量。

3.5 投影牛顿-欧拉法

3.5.1 介绍

在本小节我们将介绍推导多体系统运动方程的最后一个方法，即利用投影牛顿-欧拉（PNE）公式的方法。从本质上讲，该方法是将笛卡尔坐标中动力学平衡的经典牛顿-欧拉方程与使用广义坐标表示的满足约束的拉格朗日公式相结合。事实上，正如我们将在后续内容中将看到的，我们可以从经典牛顿-欧拉方程公式和拉格朗日公式中导出投影牛顿-欧拉（PNE）方程。

使用投影牛顿-欧拉（PNE）公式的推导出来的运动方程将会是：

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{b}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} + \mathbf{J}_c^T \mathbf{F}_c \quad (3.38)$$

3.5.2 导出广义运动方程

我们可以将应用于每个物体 \mathbf{B}_i 的线动量和角动量原理重写成：

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{p}}_{S_i} \\ \dot{\mathbf{N}}_{S_i} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} m\mathbf{a}_{S_i} \\ \boldsymbol{\Theta}_{S_i} \boldsymbol{\Psi}_{S_i} + \boldsymbol{\Omega}_{S_i} \times \boldsymbol{\Theta}_{S_i} \boldsymbol{\Omega}_{S_i} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} m\mathbf{J}_{S_i} \\ \boldsymbol{\Theta}_{S_i} \mathbf{J}_{R_i} \end{pmatrix} \ddot{\mathbf{q}} + \begin{pmatrix} m\mathbf{J}_{S_i} \dot{\mathbf{q}} \\ \boldsymbol{\Theta}_{S_i} \mathbf{J}_{R_i} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{J}_{R_i} \dot{\mathbf{q}} \times \boldsymbol{\Theta}_{S_i} \mathbf{J}_{R_i} \dot{\mathbf{q}} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.39)$$

此外，使用广义坐标下的虚位移表达式，我们可以将虚功原理重写如下：

$$0 = \delta W = \sum_{i=1}^{n_b} \begin{pmatrix} \delta \mathbf{r}_{S_i} \\ \delta \boldsymbol{\Phi}_{S_i} \end{pmatrix}^T \left(\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{p}}_{S_i} \\ \dot{\mathbf{N}}_{S_i} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{\text{ext},i} \\ \mathbf{T}_{\text{ext},i} \end{pmatrix} \right) \quad \forall \begin{pmatrix} \delta \mathbf{r}_s \\ \delta \boldsymbol{\Phi}_{S_i} \end{pmatrix} \text{ consistent} \quad (3.40)$$

$$= \delta \mathbf{q}^T \sum_{i=1}^{n_b} \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{S_i} \\ \mathbf{J}_{R_i} \end{pmatrix}^T \left(\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{p}}_{S_i} \\ \dot{\mathbf{N}}_{S_i} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{\text{ext},i} \\ \mathbf{T}_{\text{ext},i} \end{pmatrix} \right) \quad \forall \delta \mathbf{q} \quad (3.41)$$

结合公式 3.39 和公式 3.41 直接得到：

$$0 = \sum_{i=1}^{n_b} \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{S_i} \\ \mathbf{J}_{R_i} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} m\mathbf{J}_{S_i} \\ \Theta_{S_i}\mathbf{J}_{R_i} \end{pmatrix} \ddot{\mathbf{q}} + \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{S_i} \\ \mathbf{J}_{R_i} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} m\dot{\mathbf{J}}_{S_i}\dot{\mathbf{q}} \\ \Theta_{S_i}\mathbf{J}_{R_i}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{J}_{R_i}\dot{\mathbf{q}} \times \Theta_{S_i}\mathbf{J}_{R_i}\dot{\mathbf{q}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{P_i} \\ \mathbf{J}_{R_i} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{ext,i} \\ \mathbf{T}_{ext,i} \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

将得到的各项重新分组得到公式 3.38 的组成部分：

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^{n_b} (\mathbf{J}_{S_i}^T m\mathbf{J}_{S_i} + \mathbf{J}_{R_i}^T \Theta_{S_i}\mathbf{J}_{R_i}) \quad (3.43)$$

$$\mathbf{b} = \sum_{i=1}^{n_b} \left(\mathbf{J}_{S_i}^T m\dot{\mathbf{J}}_{S_i}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{J}_{R_i}^T (\Theta_{S_i}\dot{\mathbf{J}}_{R_i}\dot{\mathbf{q}} + \Omega_{S_i} \times \Theta_{S_i}\Omega_{S_i}) \right)_i \quad (3.44)$$

$$\mathbf{g} = \sum_{i=1}^{n_b} -\mathbf{J}_{S_i}^T \mathbf{F}_{g,i} \quad (3.45)$$

我们必须再次强调选择合适的坐标系来表达所有笛卡尔向量的重要性。角速度和线速度必须是绝对的，即速度是相对于惯性坐标系测量的。线速度和角速度在哪个坐标系表达并不重要，但是仔细选择坐标系可以简化最终得到的表达式：

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^{n_b} (\mathcal{A}\mathbf{J}_{S_i}^T \cdot m \cdot \mathcal{A}\mathbf{J}_{S_i} + \mathcal{B}\mathbf{J}_{R_i}^T \cdot \mathcal{B}\Theta_{S_i} \cdot \mathcal{B}\mathbf{J}_{R_i}) \quad (3.46)$$

$$\mathbf{b} = \sum_{i=1}^{n_b} \left(\mathcal{A}\mathbf{J}_{S_i}^T \cdot m \cdot \mathcal{A}\dot{\mathbf{J}}_{S_i} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \mathcal{B}\mathbf{J}_{R_i}^T \cdot \left(\mathcal{B}\Theta_{S_i} \cdot \mathcal{B}\dot{\mathbf{J}}_{R_i} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \mathcal{B}\Omega_{S_i} \times \mathcal{B}\Theta_{S_i} \cdot \mathcal{B}\Omega_{S_i} \right) \right) \quad (3.47)$$

$$\mathbf{g} = \sum_{i=1}^{n_b} (-\mathcal{A}\mathbf{J}_{S_i}^T \mathcal{A}\mathbf{F}_{g,i}) \quad (3.48)$$

3.5.3 外力和驱动

为了解释广义坐标表示的运动方程中的外力，我们可以使用对应的雅可比矩阵将笛卡尔坐标系中的力和扭矩投影到广义坐标空间上。后者将力的作用投射到做功的广义坐标的子空间上。我们现在将考虑如何有效地考虑多体系统上的作用力和扭矩。假设我们知道有 $n_{f,ext}$ 个外力 \mathbf{F}_j , $j \in \{1, \dots, n_{f,ext}\}$ 和 $n_{m,ext}$ 个外部扭矩 \mathbf{T}_k , $k \in \{1, \dots, n_{m,ext}\}$ 作用于系统（作用于任何刚体）。由于外力产生的广义力 $\tau_{F,ext}$ 可以通过以下方式计算：假设笛卡尔力 \mathbf{F}_j 作用于点 \mathbf{P}_j 且这一点的平移雅可比是 $\mathbf{J}_{P,j}$ ，然后可以得到广义力的计算公式：

$$\tau_{F,ext} = \sum_{j=1}^{n_{f,ext}} \mathbf{J}_{P,j}^T \mathbf{F}_j \quad (3.49)$$

广义力 $\tau_{T,ext}$ 同样可以通过他们所作用的刚体的旋转雅可比 $\mathbf{J}_{B,k,rot}$ 来投影每个笛卡尔扭矩，可以得到：

$$\tau_{T,ext} = \sum_{k=1}^{n_{m,ext}} \mathbf{J}_{R,k}^T \mathbf{T}_{ext,k} \quad (3.50)$$

最后，因为它们都表示在广义坐标空间中，外力和扭矩的作用可以简单地相加：

$$\tau_{ext} = \tau_{F,ext} + \tau_{T,ext} \quad (3.51)$$

对于驱动力或扭矩作用在两个连杆之间的这种特殊情况，我们只需要考虑这两个（连续的）连杆之间运动学关系。因此，在刚体 \mathbf{B}_{k-1} 和 \mathbf{B}_k 之间作用的驱动器对两连杆施加的力 $\mathbf{F}_{a,k}$ 和或扭矩 $\mathbf{T}_{a,k}$ 大小相等方向相反，即是一对相互作用力。因此，需要计算的是将力和扭矩投影到广义坐标 \mathbf{q} 空间的雅可比矩阵。为此，我们知道当多个雅可比矩阵在同一参考系中表达时，它们可以简单地相加或者相减，根据我们之前对运动学的分析计算得到的 $\mathbf{J}_{S_{k-1}}$ 、 \mathbf{J}_{S_k} 、 $\mathbf{J}_{R_{k-1}}$ 和 \mathbf{J}_{R_k} ，然后我们可以计算出驱动器对广义力的贡献如下：

$$\tau_{a,k} = (\mathbf{J}_{S_k} - \mathbf{J}_{S_{k-1}})^T \mathbf{F}_{a,k} + (\mathbf{J}_{R_k} - \mathbf{J}_{R_{k-1}})^T \mathbf{T}_{a,k} \quad (3.52)$$

在最简单实际上也是最常见的情况下，驱动器沿广义坐标 \mathbf{q}_j 的方向作用，作用力点和反作用力点处的雅可比的差与力或扭矩的乘积与提供了广义力向量 τ_j 中的单个项。因此，总外部广义力向量仅仅是上述部分的简单组合， n_A 个关节驱动器和 n_B 个刚体连杆的外部广义力为：

$$\tau = \sum_{k=1}^{n_A} \tau_{a,k} + \tau_{ext} \quad (3.53)$$

3.6 方法之间的总结和关系

1 所有需要广义坐标的定义

- 2 他们都需要质心的雅可比矩阵
- 3 评估一个可以求得另一个方程为了检查推导的正确性，我们可以观测总能量的时间变化，也就是哈密顿量 $H = T + U$ 。

3.7 浮动基座系统的动力学

浮动基座系统的动力学方程为

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{b}(\mathbf{q}, \mathbf{u}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{S}^T \boldsymbol{\tau} + \mathbf{J}_{ext}^T \mathbf{F}_{ext} \quad (3.54)$$

由以下物理量组成：

| | | |
|--------------------------------------|-----------------------------------|-----------------|
| $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ | $\in \mathbb{R}^{n_q \times n_q}$ | 正交惯量矩阵 |
| \mathbf{q} | $\in \mathbb{R}^{n_q}$ | 广义坐标 |
| \mathbf{u} | $\in \mathbb{R}^{n_q}$ | 广义速度 |
| $\dot{\mathbf{u}}$ | $\in \mathbb{R}^{n_q}$ | 广义加速度 |
| $\mathbf{b}(\mathbf{q}, \mathbf{u})$ | $\in \mathbb{R}^{n_q}$ | 科氏力与离心力项 |
| $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ | $\in \mathbb{R}^{n_q}$ | 重力项 |
| \mathbf{S} | $\in \mathbb{R}^{n_r \times n_q}$ | 驱动关节选择矩阵 |
| $\boldsymbol{\tau}$ | $\in \mathbb{R}^{n_r}$ | 施加在广义坐标方向上的广义扭矩 |
| \mathbf{F}_{ext} | $\in \mathbb{R}^{n_c}$ | 施加的广义力 |
| \mathbf{J}_{ext} | $\in \mathbb{R}^{n_c \times n_q}$ | 外力作用点处的几何雅可比 |

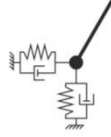


图 3.4: 在软接触模型中，接触力被建模为弹簧阻尼器力

浮动基座系统的广义坐标由驱动关节坐标 \mathbf{q}_j 和欠驱动基坐标 \mathbf{q}_b 及对应的速度 $\mathbf{u}_j = \dot{\mathbf{q}}_j \in \mathbb{R}^{n_j}$ 和 $\mathbf{u}_b = \dot{\mathbf{q}}_b \in \mathbb{R}^{n_b}$ 组成。请再次注意 \mathbf{u}_b 不等于位置和方向参数化相对于时间的导数 $\dot{\mathbf{q}}$ ，因为不存在“角”位置这种概念，而存在不同方法来参数化方向。根据选择矩阵 \mathbf{S} 选择驱动关节：

$$\mathbf{u}_j = \mathbf{S}\mathbf{u} = \mathbf{S} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_b \\ \mathbf{u}_j \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{6 \times 6} & \mathbf{I}_{6 \times n_j} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_b \\ \mathbf{u}_j \end{pmatrix} \quad (3.55)$$

为了控制未驱动的基坐标 \mathbf{q}_b ，外力 \mathbf{F}_{ext} 是必须的。根据机器人的类型，外力可能的来源大不相同。在许多教科书中，在使用接触力时（例如腿足式机器人），人们常使用替代公式来表示系统动力学模型：

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{b}(\mathbf{q}, \mathbf{u}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{J}_c^T \mathbf{F}_c = \mathbf{S}^T \boldsymbol{\tau} \quad (3.56)$$

其中 \mathbf{F}_c 代表机器人对其环境施加的力。

3.7.1 接触力

存在两种完全不同的方法来模拟接触力。软接触方法使用力元件（比如说弹簧减震器）来对接触进行模拟，此时力是只关于接触点位置和速度的函数。硬接触方法将接触视为运动约束。

软接触模型

对于软接触模型，我们通常将首次与环境接触时的点定为 \mathbf{r}_{c0} 。当使用线性弹簧阻尼器对环境进行建模时，由机器人施加在环境的接触力为：

$$\mathbf{F}_c = k_p (\mathbf{r}_c - \mathbf{r}_{c0}) + k_d \dot{\mathbf{r}}_c \quad (3.57)$$

来自约束的接触力

如果我们不把接触力建模成力元件产生的接触力，我们可以把接触作为运动学约束来处理。如果一个位于 \mathbf{r}_c 的点 C 与环境发生接触且不再允许移动：

$$\mathbf{r}_c = \text{const} \quad (3.58)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_c = \mathbf{J}_c \mathbf{u} = 0 \quad (3.59)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_c = \mathbf{J}_c \dot{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{J}}_c \mathbf{u} = 0 \quad (3.60)$$

在点接触和扩展接触的情况下，可以对旋转约束应用相同的公式。从约束公式 3.60 和运动方程 3.56 中，我们可以确定接触力：

$$\mathbf{F}_c = (\mathbf{J}_c \mathbf{M}^{-1} \mathbf{J}_c^T)^{-1} (\mathbf{J}_c \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{S}^T \boldsymbol{\tau} - \mathbf{b} - \mathbf{g}) + \dot{\mathbf{J}}_c \mathbf{u}) \quad (3.61)$$

这个公式能给我们带来很大的好处，因为它在没有任何接触力传感器的基础上，仅基于多系统动力学，提供了地面反作用力的直接估计。

3.7.2 约束一致动力学

我们可以将动力学一致的支撑零空间矩阵定义为：

$$\mathbf{N}_c = \mathbf{I} - \mathbf{M}^{-1} \mathbf{J}_c^T (\mathbf{J}_c \mathbf{M}^{-1} \mathbf{J}_c^T)^{-1} \mathbf{J}_c \quad (3.62)$$

\mathbf{N}_c 定义了一个在支撑连杆上没有加速度或力耦合效应的广义运动空间。将接触力方程 3.61 的解代入运动方程 3.56 会得到：

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{N}_c^T (\mathbf{b} + \mathbf{g}) + \mathbf{J}_c^T (\mathbf{J}_c \mathbf{M}^{-1} \mathbf{J}_c^T)^{-1} \mathbf{J}_c \mathbf{u} = \mathbf{N}_c^T \mathbf{S}^T \boldsymbol{\tau} \quad (3.63)$$

进一步引入支撑约束公式 3.60 可得到 $\mathbf{J}_c \mathbf{u} = -\mathbf{J}_c \dot{\mathbf{u}}$ ，约束一致运动方程可以紧凑地表述为：

$$\mathbf{N}_c^T (\mathbf{M}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{b} + \mathbf{g}) = \mathbf{N}_c^T \mathbf{S}^T \boldsymbol{\tau} \quad (3.64)$$

3.7.3 接触开关和碰撞

硬接触模型需要将系统动力学分析细分为两个阶段，分别对应于碰撞之前和之后。碰撞本身是一种复杂的物理现象，当两个或更多的刚体相互接触时就会发生。碰撞的特征是持续时间非常短、峰值力很大、能量快速消散和加速度大。为了模拟能量转移和耗散的过程，我们引入了各种系数，例如恢复系数和动量比系数。理想化这一过程，对应于将碰撞视为一个非常短暂的过程，也就需要考虑刚体接触时速度的瞬时变化。

动量转移

为了处理接触动量，我们在单个时间点 \mathbf{t}_0 上的运动方程求积分：

$$\int_{\{t_0\}} (\mathbf{M} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{b} + \mathbf{g} + \mathbf{J}_c^T \mathbf{F}_c - \mathbf{S}^T \boldsymbol{\tau}) dt = \mathbf{M} (\mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-) + \mathbf{J}_c^T \mathcal{F}_c = \mathbf{0}, \quad (3.65)$$

其中 \mathbf{F}_c 为动量力， \mathbf{u}^- 和 \mathbf{u}^+ 分别对应碰撞前后的广义速度。假设碰撞是满足牛顿碰撞定律的完美非弹性碰撞，所有被认为是碰撞部分的接触点都会瞬间停止运动 ($\mathbf{r}_c^+ = \mathbf{J}_c \mathbf{u}^+ = \mathbf{0}$)。将这种后碰撞约束与运动方程的积分相结合，我们可以求解动量力：

$$\mathcal{F}_c = (\mathbf{J}_c \mathbf{M}^{-1} \mathbf{J}_c^T)^{-1} \mathbf{J}_c \dot{\mathbf{q}}^- = \boldsymbol{\Lambda}_c \dot{\mathbf{r}}_c^- \quad (3.66)$$

通过定义 **动量 = 质量 · 速度** 的基本力学来更详细地分析这种形式，我们将在支撑点得到的惯量定为所谓的末端执行器的惯量：

$$\boldsymbol{\Lambda}_c = (\mathbf{J}_c \mathbf{M}^{-1} \mathbf{J}_c^T)^{-1} \quad (3.67)$$

将公式 3.67 代入公式 3.66 得到广义速度的瞬时变化：

$$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^- = -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{J}_c^T (\mathbf{J}_c \mathbf{M}^{-1} \mathbf{J}_c^T)^{-1} \mathbf{J}_c \mathbf{u}^- \quad (3.68)$$

再次使用之前为动力学一致支撑零空间投影矩阵 \mathbf{N}_c 引入的命名法，后碰撞广义速度由以下公式得到：

$$\mathbf{u}^+ = \left(\mathbf{I} - \mathbf{M}^{-1} \mathbf{J}_c^T (\mathbf{J}_c \mathbf{M}^{-1} \mathbf{J}_c^T)^{-1} \mathbf{J}_c \right) \mathbf{u}^- = \mathbf{N}_c \mathbf{u}^- \quad (3.69)$$

通过满足后碰撞接触约束获得的结果直观上是明确的：使用支撑零空间投影矩阵 \mathbf{N}_c 可以将碰撞前的速度 \mathbf{u}^- 投影到支撑一致的流形上。

能量损失

碰撞的瞬时变化总是与动能损失息息相关。我们可以在广义坐标中对能量损失进行量化，也可以将能量损失描述为末端执行器惯量和支撑点速度变化的函数：

$$E_{\text{loss}} = \Delta E_{\text{kin}} = -\frac{1}{2} \Delta \mathbf{u}^T \mathbf{M} \Delta \mathbf{u} \quad (3.70)$$

$$= -\frac{1}{2} \Delta \dot{\mathbf{r}}_c^T \boldsymbol{\Lambda}_c \Delta \dot{\mathbf{r}}_c = -\frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}_c^{-T} \boldsymbol{\Lambda}_c \dot{\mathbf{r}}_c^- \quad (3.71)$$

3.8 关节空间动力学控制

目前的工业机器人几乎完全依赖于关节位置控制，位置控制建立在 PID 控制器上，以独立调节机器人每个关节的位置或速度为目的。这样的控制器通过对驱动器和整个机器人中的干扰进行补偿，从而在理想情况下实现对期望运动的完美跟踪。通过额外器件来测量关节扭矩（例如通过用负载元件测量或者通过电机电流和驱动器模型来估计它），便能实现基于模型的负载补偿。

3.8.1 关节阻抗调节

在扭矩可控的驱动器系统中，关节位置反馈增益 k_p 和关节速度反馈增益 k_d 对应于关节刚度和阻尼，期望的驱动器扭矩可以由以下公式计算得到：

$$\tau^* = k_p (\mathbf{q}^* - \mathbf{q}) + k_d (\dot{\mathbf{q}}^* - \dot{\mathbf{q}}), \quad (3.72)$$

其中 \mathbf{q}^* 和 $\dot{\mathbf{q}}^*$ 分别表示期望的关节位置和速度。当将此控制律应用于机械臂时，我们得到稳态跟踪误差为：

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}^* + \mathbf{b}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}^* + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = k_p (\mathbf{q}^* - \mathbf{q}) + k_d (\dot{\mathbf{q}}^* - \dot{\mathbf{q}}) \quad (3.73)$$

重力补偿

为了补偿稳态误差和调节关节阻抗，一种常见的方法是选择期望的驱动器扭矩为：

$$\tau^* = k_p (\mathbf{q}^* - \mathbf{q}) + k_d (\dot{\mathbf{q}}^* - \dot{\mathbf{q}}) + \hat{\mathbf{g}}(\mathbf{q}) \quad (3.74)$$

其中 $\hat{\mathbf{g}}(\mathbf{q})$ 表示估计的重力项。不幸的是，由于在每个关节处看到的惯量会随机器人位形的变化而变化，因此必须根据工作区中的大多数位形来选择 PD 增益。当系统剧烈变化时，该方法会降低控制器的性能。即使进行了重力补偿，稳态误差最终仍然存在，因为系统从未被完全准确地建模。

逆动力学控制

解决上述缺点的一个简单方法是使用逆动力学控制方法，实现动力学解耦和运动控制需要的关节转矩为：

$$\tau^* = \hat{\mathbf{M}}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}^* + \hat{\mathbf{b}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}^* + \hat{\mathbf{g}}(\mathbf{q}) \quad (3.75)$$

其中 $\hat{\mathbf{M}}(\mathbf{q})$ 、 $\hat{\mathbf{b}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ 以及 $\hat{\mathbf{g}}(\mathbf{q})$ 分别对应于对物理量 $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ 、 $\mathbf{b}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ 以及 $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ 的估计。如果建模完美，带有控制公式 3.75 的系统 3.1 的闭环动力学为：

$$\mathbb{I}\ddot{\mathbf{q}} = \ddot{\mathbf{q}}^* \quad (3.76)$$

换句话说，这种方法允许我们直接改造每个关节的解耦动力学。与公式 3.72 中引入的阻抗定律类似，一种常见的选择期望加速度的方法为：

$$\ddot{\mathbf{q}}^* = k_p (\mathbf{q}^* - \mathbf{q}) + k_d (\dot{\mathbf{q}}^* - \dot{\mathbf{q}}) \quad (3.77)$$

其对应于具有单位质量的线性质量-弹簧-阻尼系统。一个巨大的好处是反馈 k_p 和 k_d 的调整和选择在直观上变得清晰，因为它们代表解耦的质点振荡器的物理参数。因此，系统的本征频率和无量纲阻尼值为：

$$\omega = \sqrt{k_p}, \quad (3.78)$$

$$D = \frac{k_d}{2\sqrt{k_p}} \quad (3.79)$$

$D = 1$ 时为临界阻尼， $D > 1$ 时为过临界阻尼和 $D < 1$ 时为欠临界阻尼。控制器的柔顺性可以通过改变 k_p 来调节。例如，假设标称点周围的振荡频率应为 3 Hz，那么理想的控制增益 k_p 是 350。此外，临界阻尼则要求 $k_d = 37$ 。这为控制器增益的调参提供了一个很好的起始值。

3.9 任务空间动力学控制

到目前为止，我们只考虑了基于模型的关节空间控制，然而在大多数情况下，我们想要在任务空间中，即在世界固定的坐标系中，移动机械臂到一个特定的点。末端执行器（或任何其他点和连杆）的线性 and 旋转加速度通过几何雅可比耦合到广义加速度：

$$\dot{\mathbf{w}}_e = \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{r}} \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} \end{pmatrix}_e = \mathbf{J}_e \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{J}}_e \dot{\mathbf{q}} \quad (3.80)$$

3.9.1 多任务分解

通过期望的任务空间加速度和相应的雅可比给定一组运动目标，我们可以以相同的优先级对待所有目标：

$$\ddot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{J}_{n_t} \end{bmatrix}^+ \left(\begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{w}}_1 \\ \vdots \\ \ddot{\mathbf{w}}_{n_t} \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{J}}_1 \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{J}}_{n_t} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \right) \quad (3.81)$$

如果某些任务具有更高的优先级，我们可以使用公式 2.207 中概述的递归算法来确定解：

$$\ddot{\mathbf{q}} = \sum_{i=1}^{n_t} \mathbf{N}_i \ddot{\mathbf{q}}_i, \quad \text{with} \quad \ddot{\mathbf{q}}_i = (\mathbf{J}_i \mathbf{N}_i)^+ \left(\mathbf{w}_i^* - \dot{\mathbf{J}}_i \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{J} \sum_{k=1}^{i-1} \mathbf{N}_k \ddot{\mathbf{q}}_k \right) \quad (3.82)$$

其中 \mathbf{N}_i 是堆叠雅可比 $\mathbf{J}_i = [\mathbf{J}_1^T \dots \mathbf{J}_i^T]^T$ 的零空间投影。

3.9.2 末端执行器动力学

分析和控制末端执行器描述的一个有趣的方法是考虑末端动力学。为此，我们可以求解方程 3.1 得到 \dot{q} ，然后代入公式 3.80：

$$\dot{\mathbf{w}}_e = \mathbf{J}_e \mathbf{M}^{-1}(\boldsymbol{\tau} - \mathbf{b} - \mathbf{g}) + \dot{\mathbf{J}}_e \dot{\mathbf{q}} \quad (3.83)$$

末端执行器力前乘雅可比转置得到的结果可以替代关节扭矩：

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}_e^T \mathbf{F}_e \quad (3.84)$$

得到末端执行器动力学方程：

$$\Lambda_e \dot{\mathbf{w}}_e + \boldsymbol{\mu} + \mathbf{p} = \mathbf{F}_e \quad (3.85)$$

其中各项含义如下：

$$\Lambda_e = (\mathbf{J}_e \mathbf{M}^{-1} \mathbf{J}_e^T)^{-1} \quad (3.86)$$

$$\boldsymbol{\mu} = \Lambda_e \mathbf{J}_e \mathbf{M}^{-1} \mathbf{b} - \Lambda_e \dot{\mathbf{J}}_e \dot{\mathbf{q}} \quad (3.87)$$

$$\mathbf{p} = \Lambda_e \mathbf{J}_e \mathbf{M}^{-1} \mathbf{g} \quad (3.88)$$

分别表示任务空间中的末端执行器惯量、离心与科式力项和重力项。

3.9.3 末端执行器运动控制

类似于关节空间逆动力学控制，我们可以使用逆形式的任务空间运动方程来定义期望的关节扭矩。结合公式 3.84 和公式 3.85 得到：

$$\boldsymbol{\tau}^* = \hat{\mathbf{J}}^T (\hat{\Lambda}_e \dot{\mathbf{w}}_e^* + \hat{\boldsymbol{\mu}} + \hat{\mathbf{p}}) \quad (3.89)$$

我们将这种形式与控制策略结合起来用于求解得到期望的加速度

$$\dot{\mathbf{w}}_e^* = \mathbf{k}_p \begin{pmatrix} \mathbf{r}_e^* - \mathbf{r}_e \\ \Delta\phi_e \end{pmatrix} + \mathbf{k}_d (\mathbf{w}_e^* - \mathbf{w}_e) \quad (3.90)$$

请注意，我们使用 $\Delta\phi_e$ 表示末端执行器的旋转误差。对于小误差，我们可以利用近似方法来处理：

$$\Delta\phi_e = \begin{bmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{E}_R \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{r}^* - \mathbf{r} \\ \boldsymbol{\chi}_R^* - \boldsymbol{\chi}_R \end{pmatrix} \quad (3.91)$$

其中的矩阵 $\mathbf{E}_R(\chi)$ 会因为旋转参数化的方法不同而不同。

替代符号

在许多论文中，虽然 \mathbf{J}_e 不一定是可逆的，但是你还是经常会发现 $\Lambda = \mathbf{J}_e^{-T} \mathbf{M} \mathbf{J}_e^{-1}$ ，使用这个表示的原因是因为这简化了方程的代数操作。实际上公式 3.90 可以直接简化为：

$$\boldsymbol{\tau}^* = \mathbf{J}^T (\Lambda_e \dot{\mathbf{w}}_e^* + \boldsymbol{\mu} + \mathbf{p}) \quad (3.92)$$

$$= \mathbf{J}^T \Lambda_e \dot{\mathbf{w}}_e^* + \mathbf{J}^T \mathbf{J}_e^{-T} \mathbf{M} \mathbf{J}_e^{-1} \mathbf{J}_e \mathbf{M}^{-1} \mathbf{b} - \mathbf{J}^T \Lambda_e \dot{\mathbf{J}}_e \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{J}^T \mathbf{J}_e^{-T} \mathbf{M} \mathbf{J}_e^{-1} \mathbf{J}_e \mathbf{M}^{-1} \mathbf{g} \quad (3.93)$$

$$= \mathbf{J}^T \Lambda_e \dot{\mathbf{w}}_e^* + \underbrace{\mathbf{b} - \mathbf{J}^T \Lambda_e \dot{\mathbf{J}}_e \dot{\mathbf{q}}}_{\tilde{\mathbf{b}}} + \mathbf{g} \quad (3.94)$$

$$= \mathbf{J}^T \Lambda_e \dot{\mathbf{w}}_e^* + \tilde{\mathbf{b}} + \mathbf{g} \quad (3.95)$$

后面的操作空间公式同样可以写作这种形式。

3.9.4 操作空间控制

在许多情况下，机器人需要在某些方向上施加力，而需要在其他方向上移动。一个典型的例子是清洁窗户，机器人在正常方向上施加特定的压力并在其他方向上控制运动。另一个例子是将销插入孔中：销应沿销的方向移动，并且不应围绕销的主轴旋转，而围绕另外两个轴的力和力矩应保持为零。为了实现这一点，我们引入了所谓的操作空间控制。我们可以根据运动和力的方向分别定义选择矩阵 \mathbf{S}_M 和 \mathbf{S}_F ，产生组合控制问题：

$$\boldsymbol{\tau}^* = \hat{\mathbf{J}}^T (\hat{\Lambda}_M \dot{\mathbf{w}}_e + \mathbf{S}_F \mathbf{F}_c + \hat{\boldsymbol{\mu}} + \hat{\mathbf{p}}) \quad (3.96)$$

我们可以定义位置和方向的配置矩阵：

$$\boldsymbol{\Sigma}_p = \begin{bmatrix} \sigma_{px} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{py} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{pz} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\Sigma}_r = \begin{bmatrix} \sigma_{rx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{ry} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{rz} \end{bmatrix} \quad (3.97)$$

其中 α_i 是一个二进制数, 1 意味着机器人会沿着线性方向或围绕特定轴自由运动, 否则为 0。如果接触力处的坐标系相对于惯性坐标系旋转, 并可以由旋转变换矩阵 \mathbf{C} 描述, 我们需要对选择矩阵进行变换, 两个选择矩阵 \mathbf{S}_F 和 \mathbf{S}_M 于是被定义为:

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_M &= \begin{bmatrix} \mathbf{C}^T \boldsymbol{\Sigma}_p \mathbf{C} & 0 \\ 0 & \mathbf{C}^T \boldsymbol{\Sigma}_r \mathbf{C} \end{bmatrix} \\ \mathbf{S}_F &= \begin{bmatrix} \mathbf{C}^T (\mathbb{I}_3 - \boldsymbol{\Sigma}_p) \mathbf{C} & 0 \\ 0 & \mathbf{C}^T (\mathbb{I}_3 - \boldsymbol{\Sigma}_r) \mathbf{C} \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (3.98)$$

3.10 浮动基座系统逆动力学

当处理浮动基座系统时, 我们需要在执行逆动力学同时确保接触约束公式 3.60 得到满足。给定期望加速度 $\dot{\mathbf{u}}_{\text{consistent}}^*$, 我们可以反转约束一致运动方程 3.64, 从而得到:

$$\boldsymbol{\tau}^* = (\mathbf{N}_c^T \mathbf{S}^T)^+ \mathbf{N}_c^T (\mathbf{M} \mathbf{u} + \mathbf{b} + \mathbf{g}) \quad (3.99)$$

请注意, 此处我们需要采用伪逆 $(\mathbf{N}_c^T \mathbf{S}^T)^+$ 。回想下运动学中多任务的解决方案:

根据求伪逆的矩阵的结构, 存在一个允许修改

$$\boldsymbol{\tau}^* = (\mathbf{N}_c^T \mathbf{S}^T)^+ \mathbf{N}_c^T (\mathbf{M} \dot{\mathbf{u}}^* + \mathbf{b} + \mathbf{g}) + \mathcal{N}(\mathbf{N}_c^T \mathbf{S}^T) \boldsymbol{\tau}_0^* \quad (3.100)$$

与此同时, 支撑一致的运动方程 $\mathbf{N}_c^T \mathbf{S}^T \boldsymbol{\tau}^* = \mathbf{N}_c^T (\mathbf{M} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{b} + \mathbf{g})$ 仍然有效。换句话说, 存在着不同的关节力矩分布能得到相同的运动 $\dot{\mathbf{u}}^*$ 。

3.10.1 二次问题

同时控制多个操作空间目标问题有很多方法。这些任务包括控制所选位置处 (比如末端执行器, 质心等) 的运动和期望的接触力与关节力矩。将操作空间控制理解成线性目标的最小二乘优化序列问题是一个很全面的方法。为了应对带优先级任务空间逆动力学, 在这一节我们将介绍了对优化变量为 \mathbf{x} 的 n_T 个线性方程组的层级最小二乘优化方法:

$$\mathbf{A}_i \mathbf{x} = \mathbf{b}_i \quad (3.101)$$

优先级表示为 $i \geq 1$, 堆叠在矩阵 \mathbf{A}_i 和向量 \mathbf{b}_i 中, 其中 $i = 1$ 是最高优先级。在我们提出的层级框架中, 我们的目标是在不影响任务的优先级的前提下在最小二乘意义上保证每项任务完成地尽可能的好:

$$\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{A}_i \mathbf{x} - \mathbf{b}_i\|_2 \quad (3.102)$$

3.10.2 迭代零空间投影

低优先级任务不得影响任何较高优先级任务这一要求可转换成把 \mathbf{x} 定义为 \mathbf{x}_i 前乘高优先级任务的零空间投影矩阵 \mathbf{N}_i 的和, 即如下操作:

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{n_T} \mathbf{N}_k \mathbf{x}_k \quad (3.103)$$

该零空间投影 \mathbf{N}_i 被定义为 $\mathbf{N}_i = \mathbf{N}([A_1^T \dots A_{i-1}^T]^T)$, 其中 $\mathbf{N} \mathbf{1} = \mathbf{I}$ 并满足:

$$\mathbf{A}_i \mathbf{N}_j = \mathbf{0} \quad \forall i < j \quad (3.104)$$

正如我们在运动学部分所看到的, 存在着计算零空间投影的不同方法。利用属性 3.104, 带优先级地最小化问题 3.102 可以代入 3.103 从而可以分解成单个任务进行求解, 从而求得 \mathbf{x}_i :

$$\mathbf{A}_i \mathbf{x} - \mathbf{b}_i = \mathbf{A}_i \sum_{k=1}^{n_T} \mathbf{N}_k \mathbf{x}_k - \mathbf{b}_i \quad (3.105)$$

$$\mathbf{x}_i = (\mathbf{A}_i \mathbf{N}_i)^+ \left(\mathbf{b}_i - \mathbf{A}_i \sum_{k=1}^{i-1} \mathbf{N}_k \mathbf{x}_k \right) \quad (3.106)$$

计算序列的优化过程为:

| 算法 2 层级最小二乘优化 | | |
|--|--|-------------|
| 1: $n_T =$ 任务数量 | | ▷ 初始最优解 |
| 2: $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ | | ▷ 初始零空间投影矩阵 |
| 3: $\mathbf{N}_1 = \mathbf{I}$ | | |
| 4: for $i = 1 \rightarrow n_T$ do | | |
| 5: $\mathbf{x}_i = (\mathbf{A}_i \mathbf{N}_i)^+ (\mathbf{b}_i - \mathbf{A}_i \mathbf{x})$ | | |
| 6: $\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{N}_i \mathbf{x}_i$ | | |
| 7: $\mathbf{N}_{i+1} = \mathcal{N} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^T & \dots & \mathbf{A}_i^T \end{bmatrix}^T \right)$ | | |
| 8: end for | | |

3.10.3 序列约束优化

层级最小二乘优化的每一步都对应于线性约束的二次优化任务，其中较低优先级不得擅自更改高优先级任务：

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & \|\mathbf{A}_i \mathbf{x} - \mathbf{b}_i\|_2 \\ \text{s.t.} \quad & \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{i-1} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{A}}_{i-1}} \mathbf{x} - \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_{i-1} \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}_{i-1}} = \mathbf{c}. \end{aligned} \quad (3.107)$$

注意：只要 $\bar{\mathbf{A}}_{i-1}$ 列满秩，成本 \mathbf{c} 是 $\mathbf{0}$ 。系列约束二次优化问题可以使用标准 QP 解算器解决。

3.10.4 浮动基座系统任务空间控制 QP

具有复杂行为的机器人系统可以被描述为优化变量由广义加速度 $\dot{\mathbf{u}}$ 、接触力 \mathbf{F}_c 和关节力矩 $\boldsymbol{\tau}$ 堆叠而成的向量的多任务控制问题：

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \mathbf{F}_c \\ \boldsymbol{\tau} \end{pmatrix} \quad (3.108)$$

请注意：虽然我们的公式使用的是浮动基座系统广义速度符号 \mathbf{u} ，但是这种方法也可用于固定基座系统。使用此优化变量，运动方程 $\mathbf{M}\mathbf{u} + \mathbf{b} + \mathbf{g} + \mathbf{J}_c^T \mathbf{F}_c = \mathbf{S}^T \boldsymbol{\tau}$ 可以构建成最小二乘问题：

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{M}} & \hat{\mathbf{J}}_c^T & -\mathbf{S}^T \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = -\hat{\mathbf{b}} - \hat{\mathbf{g}} \quad (3.109)$$

为了在感兴趣的点处实现期望的加速度 $\mathbf{J}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{J}\mathbf{u} = \dot{\mathbf{w}}^*$ ，我们可以简单地定义任务：

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{J}}_i & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \dot{\mathbf{w}}^* - \hat{\mathbf{J}}_i \mathbf{u} \quad (3.110)$$

当然，我们也有许多其他感兴趣的目标。在下文中，我们举一些例子，但还有更多等待读者自己去实现。如果我们要在特定的点处以力或力矩 $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^*$ 运动到特定的位置，我们可以定义以下任务：

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \mathbf{F}_i^* \quad (3.111)$$

此外，如果我们想最大限度地减少整体关节力矩，我们可以定义以下任务：

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (3.112)$$