1.介绍

在复杂的腿部系统中实现动态稳定的运动是现代机器人技术研究的核心问题。特别是对于类人系统，非线性、欠驱动和高维动力学共同使控制问题具有挑战性。基于优化的技术必须同时推理行走系统的动力学、驱动极限和接触约束。模型预测控制（MPC）是一种在固定范围上迭代执行这类约束优化的流行方法，但其计算复杂性阻碍了其在高维系统中的应用。此外，行走机器人的混合动力学使得多步优化的变得困难。因此，用于类人控制的 MPC 依赖于使用低维线性模型、 或约束的放松，以允许通过不连续动力学进行平滑优化。

一些研究人员最近探索了使用二次程序（QPs）来控制两足系统，利用瞬时动力学和接触约束可以线性表示。在平衡和运动任务的背景下，关于这些方法的一个关键观察结果是，在典型的操作过程中，主动的不等式约束集在连续的控制步骤之间很少发生变化。

通过描述了一个 QP，利用最优控制解的一个简单的无约束模型的行走系统。利用时变 LQR 设计，计算了最优简单模型的成本，并将其作为约束优化的目标函数的一部分来计算整个机器人的输入。用模拟的双足系统和零矩点（ZMP）动力学可以具体地描述该方法。除了提供一种原则性和可靠的方法来稳定行走轨迹外，论文还展示了所得到的 QP 代价函数所包含的低维结构，可以用来减少求解时间。为了实现实时控制率，论文设计了一个自定义的主动集求解器，它利用后续解决方案之间的一致性，并比最好的现成求解器如 CVXGEN 和 Gurobi 高出 5 倍或更多。

2.针对 ZMP 动力学的 LQR 设计

完全驱动刚体系统的平面质心（COM）和 ZMP 动力学可以用状态空间的形式表示为

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{B}\mathbf{u}\\ &= \begin{bmatrix}0 & \mathbf{I}\\ 0 & 0\end{bmatrix}\mathbf{x}+\begin{bmatrix}0\\ \mathbf{I}\end{bmatrix}\mathbf{u} \qquad (1)\\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x}-b(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}})\mathbf{u}\\ &= \begin{bmatrix}\mathbf{I} & 0\end{bmatrix}\mathbf{x}-\frac{z_{\text{com}}}{\ddot{z}_{\text{com}}+g}\mathbf{I}\mathbf{u}, \qquad (2)\end{aligned}$$

其中 $x = [x_{com}, y_{com}, \dot{x}_{com}, \dot{y}_{com}]^T$，$u = [\ddot{x}_{com}, \ddot{y}_{com}]^T$，$y = [x_{zmp}, y_{zmp}]^T$，g 是一个恒常的重力加速度，而 z_{com} 是 COM 高度。ZMP 是两足行走文献中一个被充分研究的量，它定义了地平面上的点，其中由惯性力和重力产生的力矩平行于表面法线。由于当接触力直接与重力和惯性力相对时，实现了动态平衡，因此保持接触支撑多边形内的 ZMP 是保持腿部运动动态稳定的有效策略。给定期望的 ZMP 轨迹，$y^d(t)$，论文计算一个最优跟踪控制器，它考虑了整个行走系统的动态、输入极限和接触对 u 施加的时间和状态变化约束。由于禁止的计算要为了求解该尺度的非线性约束最优控制问题，我们求解一个无约束时变 LQR 问题来计算最优代价 J，它为 ZMP 动力学提供了一个控制-李亚普诺夫函数（CLF）。 在每次迭代中，我们选择控制输入来下降这个 ZMP CLF，同时推理整个系统的瞬时约束。

我们首先指定表单的成本函数

$$J=\bar{\mathbf{y}}(t_f)^T\mathbf{Q}_f\bar{\mathbf{y}}(t_f)+\int_0^{t_f}\bar{\mathbf{y}}(t)^T\mathbf{Q}\bar{\mathbf{y}}(t)dt, \qquad (3)$$

其中，坐标(t)=$\bar{y}(t)-y^d(t)$、Q>0，和 Qf>0.实际上是 COM 的高度，z_{com}，通常被假定为常数，使 ZMP 动力学(2)为线性。更一般地说，如果 COM 高度轨迹被限制为一个已知的时间函数，则($z_{com}(t)$，$\dot{z}_{com}(t)$，$\ddot{z}_{com}(t)$)，ZMP 动力学是时变线性的，

$$\mathbf{y}(t)=\mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t)+\mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t), \qquad (4)$$

因此适合 TVLQR 设计，没有明确的线性化。

求解黎卡蒂方程得到时变线性系统的最优代价，

$$J^*(\bar{\mathbf{x}},t)=\bar{\mathbf{x}}^T\mathbf{S}(t)\bar{\mathbf{x}}+\mathbf{s}_1(t)^T\bar{\mathbf{x}}+s_0(t),$$

和线性最优控制器，

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{u}}^* &= -\mathbf{K}(t)\bar{\mathbf{x}}\\ &= \arg\min_{\bar{\mathbf{u}}}\bar{\mathbf{y}}(t)^T\mathbf{Q}\bar{\mathbf{y}}(t)+\left.\frac{\partial J^*}{\partial\bar{\mathbf{x}}}\right|_{\bar{\mathbf{x}}}\dot{\bar{\mathbf{x}}}, \qquad (5)\end{aligned}$$

式中$\bar{x}(t)=x(t)-x^d(t)$和$\bar{u}(t)=u(t)-u^d(t)$. 一般来说，由于机器人动力学的约束，实现是不可能的。因此，为了计算控制输入，我们使用使用

$$V(\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{u}},t)=\bar{\mathbf{y}}(t)^T\mathbf{Q}\bar{\mathbf{y}}(t)+\left.\frac{\partial J^*}{\partial\bar{\mathbf{x}}}\right|_{\bar{\mathbf{x}}}\dot{\bar{\mathbf{x}}} \qquad (6)$$

作为一个代理值函数。

3.QP 配方

给定了 ZMP 动力学的稳定解决方案，论文设计了一个 QP 来求解全机器人动力学的控制输入，以最小化(6)和在瞬时约束下行走的二次运动代价。

考虑一下我们熟悉的刚体动力学，

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{B}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{q})^T\boldsymbol{\lambda}, \qquad (7)$$

其中 H (q)是系统惯性矩阵，C（q, $\dot{q}$）捕获引力项和科里奥里项，B（q, $\dot{q}$）是控制输入图，Φ(q)^{T}将外力λ转化为广义力。在我们的例子中，$\lambda = [\lambda_1^T \ ... \ \lambda_{Nc}^T]^T$是作用于 N 的地面接触力的向量吗 c 联络点主动接触的集合由运动学或力测量分类确定。

对于浮动基系统，如类人系统，动力学可以分为驱动和非驱动自由度，

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_f\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_f &= \boldsymbol{\Phi}_f^T\boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{H}_a\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_a &= \mathbf{B}_a\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\Phi}_a^T\boldsymbol{\lambda}, \end{aligned} \qquad (8)$$

我们从简洁的符号中去掉了对 q，$\dot{q}$的显式依赖。这种分离允许去除τ作为决策变量，包括(8)作为表示τ的约束：

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{B}_a^{-1}\left[\mathbf{H}_a\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_a - \boldsymbol{\Phi}_a^T\boldsymbol{\lambda}\right].$$

我们使用摩擦锥的一个标准的、保守的多面体近似，$\hat{K}$j，对于每个接触点，c_j，

$$\hat{K}_j = \left\{\sum_{i=1}^{N_d}\beta_{ij}\mathbf{v}_{ij} : \beta_{ij} \geq 0\right\}. \qquad (9)$$

生成向量，v_{ij}，的计算方法为 $v_{ij} = n_j + u_j d_{ij}$，其中 n_j 和 d_{ij}接触面是法线 i^{th} 和 j^{th} 的切向量接触点，u_j 库仑摩擦系数是 N_d 是在近似中使用的切向量的数量。

给定机器人状态 q，$\dot{q}$，t，我们求解以下二次程序：

二次程序 1：

$$\min_{\ddot{\mathbf{q}},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\eta}} V(\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{u}},t) + w_{\ddot{\mathbf{q}}}||\ddot{\mathbf{q}}_{\mathrm{des}} - \ddot{\mathbf{q}}||^2 + \varepsilon\sum_{ii}\beta_{ij}^2 + ||\boldsymbol{\eta}||^2 \quad (10)$$

使服从

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_f\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_f &= \boldsymbol{\Phi}_f^T\boldsymbol{\lambda} && (11) \\ \mathbf{J}\ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{J}}\dot{\mathbf{q}} &= -\alpha\mathbf{J}\dot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\eta} && (12) \\ \mathbf{B}_a^{-1}(\mathbf{H}_a\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_a - \boldsymbol{\Phi}_a^T\boldsymbol{\lambda}) &\in [\boldsymbol{\tau}_{\min}, \boldsymbol{\tau}_{\max}] && (13) \\ \forall_{j=\{1\ldots N_c\}} \ \boldsymbol{\lambda}_j &= \sum_{i=1}^{N_d}\beta_{ij}\mathbf{v}_{ij} && (14) \\ \forall_{i,j}\beta_{ij} &\geq 0 && (15) \\ \boldsymbol{\eta} &\in [\boldsymbol{\eta}_{\min}, \boldsymbol{\eta}_{\max}]. && (16) \end{aligned}$$

约束（11）和（13）确保动力学和输入限制得到尊重，（12）是脚接触上的无滑移约束，要求其加速度与速度成负正比，并且约束（14、15）一起确保接触力保持在$\hat{K}$范围内。参数向量η允许有界违反偏差约束减少不可行的可能性，ε是一个正则化常数通常设置为一个小值，例如，$\varepsilon = 10^{-8}$，J=∂c/∂q 是所有接触点的雅可比矩阵，$c = [c_1^T \ ... \ c_{Nc}^T]^T$。

权重参数$w_{\ddot{q}}$用于平衡期望运动成本与 ZMP 跟踪成本的相对贡献。为了尊重联合极限，对所有添加界$\ddot{q}_i \geq 0$ 和$\ddot{q}_i \leq 0$，分别使 $q_i = q_i^{MIN}$ 和 $q_i = q_i^{MAX}$

4.增值最优化

论文使用一个简单的激活集方法在每个控制步骤中求解 QP 1。该方法假设对连续解的主动不等式约束集保持不变。然后，它通过求解由假设的活动集推导出的部分最优性条件集，得到一个候选解。如果候选解满足全套最优性条件，则假设是正确的，算法终止。否则，该方法将更新活动集并重复，直到找到解决方案或达到最大迭代次数。

在极少数情况下，当没有找到解决方案时，算法会故障转移到一个更可靠（但平均较慢）的内点求解器。在实验中，这导致了 3 ms 左右的单步输入延迟，这对行走性能没有显著影响。这种偶然性是必需的，因为所提出的方法不能保证有限终止。然而，在实践中，QP 1 的实例几总是在一次迭代中得到解决。每次迭代的计算成本也很小。通过求解一个结构化的线性方程组得到一个候选解，约束只计算一次。

A.活动集法

在每个控制步骤中解决的 QP 都可以用标准形式编写，

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{z}} \quad & \tfrac{1}{2}\mathbf{z}^T\mathbf{W}\mathbf{z} + \mathbf{g}^T\mathbf{z} \\ \text{subject to} \quad & \mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{P}\mathbf{z} \leq \mathbf{f}, \end{aligned} \qquad (17)$$

其中，不等式是由 $P = (p_1, p_2, ..., p_n)^T$ 和 $f = (f_1, f_2, ..., f_n)^T$. 为了解决这个问题，我们假设$\mathbf{p}_i^T\mathbf{z} = fi$ 在子集 A⊆{1 ... N} 调用了活动集。For t > 0，这个子集等于从时间 t1 开始的主动不等式的指数。根据这个假设，QP 的 KKT 条件可以用 z, γ 和 α 来表示：

$$
\begin{array}{rcll}
\mathbf{W}\mathbf{z}+\mathbf{A}^T\boldsymbol{\alpha}+\sum_{i\in\mathcal{A}}\gamma_i\mathbf{p}_i & = & -\mathbf{g} & \\
\mathbf{A}\mathbf{z} & = & \mathbf{b} & \\
\mathbf{p}_i^T\mathbf{z} & = & f_i & \forall i\in\mathcal{A} \\
\gamma_i & = & 0 & \forall i\neq\mathcal{A}
\end{array}
\qquad (18)
$$

$$
\begin{array}{rcll}
\mathbf{P}\mathbf{z} & \leq & \mathbf{f} & \\
\gamma_i & \geq & 0 & \forall i\in\mathcal{A}.
\end{array}
\qquad (19)
$$

论文的方法求解线性方程（18），并检查解（z， γ ， α ）是否满足不等式（19）。如果满足不等式，z 求解 QP，算法终止。否则，如果$p_i^T z > f_i$，该算法将索引 i 添加到 A 中或者，如果是 γ_i<0，并被解析（18）则删除索引 i。该算法重复这个过程，直到满足不等式（19）或满足 a，直到达到指定的最大迭代次数。该方法在算法 1 中已有概述。

B.有效地计算一个候选解决方案

QP 1 的结构允许线性系统（18）。特别是，人们可以很便宜地计算出 W^{-1} 并为 α 和 γ 构建一个更小的系统。使用

Data:：形式（17），其中成本矩阵 W 具有结构（22）。一组约束 A 在最优时是活跃的。

Result：一个最优解 z 与活动设置 A 或一个标志表示失败。

```
iter ← 0
repeat
    Compute candidate solution z, γ, α from (20,21)
    if p_i^T z > f_i then
        add i to A
    end
    if γ_i < 0 then
        remove i from A
    end
    iter ← iter + 1
    if iter > iter_MAX then
        return Failure
    end
until z and γ satisfy (19)
return A and z
```

Algorithm 1: Active-set method for solving (17). The set $\mathcal{A}$ passed to the algorithm at time t equals the set of constraints active at optimality for time $t-1$.

解决这个较小的系统，就可以很容易地恢复 z。为了看到这一点，首先让 P_{act} 和 f_{act} 表示由 A 索引的 P 和 f 的行，然后让 $R = [A^T\ P_{act}^T]^T$ 和 $e = [\ b^T\ f_{act}^T]^T$。首先对 α 和 γ 求解如下方程组，可以找到（18）的解：：

$$
-\mathbf{R}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{R}^T\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\gamma}\end{bmatrix}=\mathbf{e}+\mathbf{R}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{g} \qquad (20)
$$

使用这个系统的解决方案，z 可以通过

$$
\mathbf{z}=-\mathbf{W}^{-1}\left(\mathbf{g}+\mathbf{R}^T\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\gamma}\end{bmatrix}\right). \qquad (21)
$$

W^{-1}的有效计算来自于它的块对角线结构，

$$
\mathbf{W}=\begin{bmatrix}\mathbf{W}_{11} & 0\\ 0 & \mathbf{W}_{22}\end{bmatrix}, \qquad (22)
$$

其中 W_{22} 为对角线，$W_{11}=w_{\ddot{q}}I+U^TQU$。对于 ZMP 动力学，$U = D(t)J\in R^{2\times n}$，其中 J 是 COM（x，y）雅可比矩阵，D（t)是在(4)中定义的输入映射。应用矩阵反演引理得到了W_{11}^{-1} 的一个表达式，该表达式涉及到计算 2×2 矩阵的逆：

$$
\mathbf{W}_{11}^{-1}=\frac{1}{w_{\ddot{\mathbf{q}}}}\mathbf{I}-\frac{1}{w_{\ddot{\mathbf{q}}}^2}\mathbf{U}^T(\mathbf{Q}^{-1}+\frac{1}{w_{\ddot{\mathbf{q}}}}\mathbf{U}\mathbf{U}^T)^{-1}\mathbf{U}.
$$

还应该注意的是，W-1 独立于 A，因此即使需要多次求解器迭代，每个控制步骤也只需要计算一次。对于表达式（20）和（21）中的各种子矩阵也是如此。

5.应用程序

论文使用为 DARPA 虚拟机器人挑战开发的 34-DOF Atlas 类人模型实现了控制器。论文对控制器的评估包括使用两个独立的模拟环境进行的各种平衡和运动任务：Drake 和 Gazebo。作为麻省理工学院进入 DARPA 虚拟机器人挑战赛（VRC）的一部分，该控制

器被用于在不平坦的地形上可靠地行走，通过模拟的膝盖深的泥浆，同时携带未建模的多链路软管，所有这些都使用了不完善的状态和地形估计。

为了设计平衡控制器，论文解决了一个无限视界 LQR 问题来调节在（0,0）处的 ZMP。成本函数采用了这个形式

$$
\begin{aligned}
J &= \int_0^\infty \mathbf{y}^T \mathbf{Q} \mathbf{y} dt, \\
&= \int_0^\infty \left[\mathbf{x}^T \mathbf{C}^T \mathbf{C} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{D}^T \mathbf{D} \mathbf{u} + 2\mathbf{x}^T \mathbf{C}^T \mathbf{D} \mathbf{u} \right] dt,
\end{aligned}
$$

其中 Q = I。我们假设站立时的 COM 高度是恒定的，从而使 ZMP 动态呈线性关系。这样做的优点是，它只需要我们解决一次 LQR 问题。为了看到这一点，请注意 J^*（$\bar{x}$）=$\bar{x}^T S \bar{x}$，其中 S 是代数黎卡蒂方程的解。因此，QP 成本的形式是，

$$
\bar{\mathbf{y}}^T \bar{\mathbf{y}} + 2\bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{S}(\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u}) + w_{\ddot{\mathbf{q}}} ||\ddot{\mathbf{q}}_{\text{des}} - \ddot{\mathbf{q}}||^2 + \varepsilon \sum_{ij} \beta_{ij}^2,
$$

其中，新的 ZMP 位置 k = [k_x k_y]^T 可以通过改变坐标来实现，$\bar{y}$=y-k，$\bar{x}$=x-k，k 是脚支撑多边形中心的点。在实践中，我们发现恒定的 COM 高度假设对平衡性能的实际影响最小，即使恢复运动包括显著的髋关节弯曲和手臂运动。我们通过一个简单的 PD 控制规则计算$\ddot{q}_{des}$=K_p（q_{des}−q）−K_d（$\dot{q}$），使用固定的标称姿态，q_{des}，站立或时变配置轨迹进行操作。我们对所有关节使用相同的标量增益，K_p和 K_d。

论文的规划实现以所需的脚轨迹作为输入，并通过步长位置之间的线性插值计算出一个 ZMP 规划，y^d(t)。足迹规划器将地形图信息与启发式方法相结合，以选择合理的步骤位置和时间。解决了 TVLQR 问题(3)线性 ZMP 动力学使用黎卡蒂解决平衡最终成本，Q_f=S.相应的 COM（x，y）轨迹，x^d(t)，可以通过模拟 COM 动力学(1)在一个闭环从时间 t=0 到 t=t_f 最优控制器，$\bar{u}^*$=−K(t)$\bar{x}$。在实践中，我们能够在大约 1/4 秒的时间内，计算 J^*（$\bar{x}$，t）和 x^*（t）。

所需的构型，q_{des}(t)，是通过逆运动学计算与约束的脚姿态和 COM 位置。计算 q_{des}(t)是离线开环轨迹后或反应在控制循环通过线性化向前运动学在当前配置和解决第二个小 QP 减少加权 l^2 距离名义配置而尊重脚姿势，COM 和联合限制约束。通过改变成本中分配给关节的相对权重，可以实现定性不同的定性运动。例如，如果背部关节的成本较小，往往会产生更多的躯干摇摆来跟踪所需的 COM 轨迹。

论文对每只脚使用了一个简化的 4 点接触表示。主动接触是由所需的足迹计划和脚和地形之间的估计距离的组合来确定的。如果且仅当脚被认为是接触的，我们才在优化中包括相应的脚接触。这两种情况都是正确的要求对于行走时打破与地面的接触是必要的。与平衡一样，足迹和 ZMP 计划可以在三维空间中转换，通过简单地改变 QP 成本中的坐标，而不需要额外的计算。