Tehnici de programare

backtracking

Metoda **backtracking** (a revenirilor succesive) de rezolvare a problemelor este una dintre cele mai puternice şi generale din informatică. Multe probleme complexe, care nu pot fi rezolvate prin alte metode, se pot totuşi rezolva prin *backtracking*, uneori chiar într-un mod simplu.

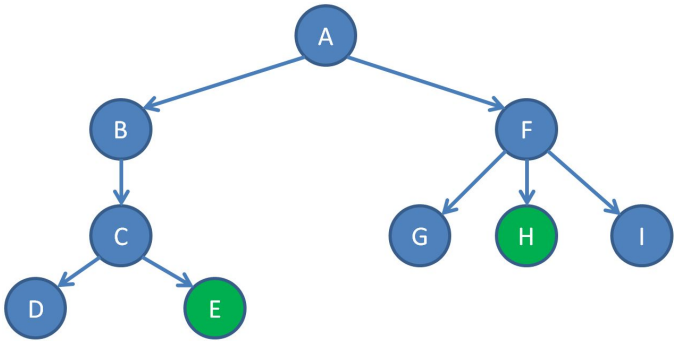
Algoritmii de tip backtracking funcţionează în felul următor:

- soluţia problemei se construieşte succesiv, pas cu pas
- dacă la un pas există mai multe posibilităţi de continuare, se va încerca pe rând fiecare dintre ele
- dacă s-a ajuns într-un punct în care nu se mai poate continua, se revine la pasul anterior pentru a se încerca următoarea variantă posibilă
- după ce s-au epuizat toate posibilităţile de la pasul anterior, se revine cu încă un pas mai înainte şi tot aşa, în mod recursiv, până când au fost încercate toate posibilităţile din toţi paşii

Prin această abordare se testează toate posibilităţile de a se ajunge la o soluţie, cu alte cuvinte are loc o căutare completă, exhaustivă, în spaţiul soluţiilor. Deoarece algoritmii backtracking testează toate variantele posibile, ei se pot modifica uşor pentru diverse cerinţe:

- testarea dacă există o soluţie
- găsirea unei soluţii
- găsirea tuturor soluţiilor
- găsirea unei soluţii optime

Pentru a ilustra modul de funcţionare a algoritmilor backtracking, să considerăm că avem o problemă în care paşii posibili arată ca în figura următoare:



Se începe din A şi se doreşte să se ajungă în E sau H, care reprezintă soluţii. De exemplu, A poate fi punctul de intrare într-un labirint, iar E şi H ieşirile. Nodurile intermediare reprezintă intersecţii în care se pot alege mai multe variante de drum. Paşii pe care îi parcurge un algoritm backtracking pentru rezolvarea acestei probleme sunt următorii:

- se începe din punctul iniţial A şi se testează pe rând fiecare variantă posibilă
- în A avem variantele {B,F}, deci le vom încerca pe rând pe fiecare:
    - în B avem doar varianta C:
        - în C avem variantele {D,E}:
            - în D nu mai avem nicio posibilitate de continuare, deci ne întoarcem un pas înapoi

            - în E am ajuns la o soluție. Dacă ne interesează doar o soluție, atunci algoritmul se poate opri aici. Altfel, dacă dorim să aflăm toate soluțiile sau soluția optimă, continuăm testarea celorlalte posibilități, deci revenim din nou în C
        - nu mai avem alte variante pentru C, revenim în B
    - nu mai avem alte variante pentru B, revenim în A
- în A, testăm varianta F
    - în F avem variantele {G,H,I}
        - în G nu mai avem nicio posibilitate de continuare, deci ne întoarcem un pas înapoi
        - în H am găsit încă o soluție. Dacă ne interesează toate soluțiile, o vom utiliza direct, de exemplu o afișăm. Dacă ne interesează soluția optimă, o vom compara cu cea mai bună soluție deja găsită și o vom reține doar pe cea mai bună dintre ele. Revenim în F.
        - în I nu mai avem nicio posibilitate de continuare, deci ne întoarcem un pas înapoi
    - nu mai avem alte variante pentru F, revenim în A
- în A nu mai sunt alte variante, deci algoritmul se încheie

Se poate constata că, dacă este nevoie, se testează toate variantele posibile. De fiecare dată când nu se mai poate continua, se revine un pas înapoi și se încearcă variantele rămase. Pe urmă se revine încă un pas înapoi și se încearcă toate variantele rămase de acolo, etc. Deoarece este nevoie de aceste reveniri, algoritmul trebuie să țină minte pentru fiecare pas ce variante au fost deja testate, pentru ca atunci când se revine la acel pas, variantele deja testate să nu mai fie încercate și a doua oară.

Dezavantajul major al algoritmilor de tip backtracking este faptul că în general ei au o complexitate exponențială, $O(k^n)$, ceea ce îi face să necesite timpi foarte mari de execuție, chiar și pentru date de intrare de dimensiuni reduse. Pentru a explica acest comportament, să presupunem că la fiecare pas avem în medie k=2 variante posibile. În acest caz, la primul pas vom avea un total de 2 variante, la al doilea va fi un total de 4 variante ($2^{2)}$, la al treilea totalul este de 8 variante (2^3), etc. În această situație, pentru date de intrare din 32 de componente, numărul situațiilor posibile depășește 4 miliarde.

Algoritmii backtracking se pot implementa atât în variantă recursivă cât și nerecursivă. În acest laborator vom discuta varianta de implementare recursivă, deoarece ea ne scutește de implementarea unor structuri de date în care să memorăm progresul din pașii intermediari. În varianta recursivă, algoritmul backtracking se implementează printr-o funcție, conform următorului pseudocod:

```
funcție caută(poziție_curentă)
   dacă poziție_curentă nu este validă sau face deja parte din calea curentă, revenire
   adaugă poziție_curentă la calea curentă
   dacă poziție_curentă determină o soluție
      atunci folosește soluția găsită
      altfel
         pentru fiecare poziție_următoare la care se poate ajunge din poziție_curentă
            caută(poziție_următoare)
   șterge poziție_curentă din calea curentă
```

Pentru exemplificare, vom considera problema ieșirii dintr-un labirint, pe care o vom rezolva pentru cerințe diferite: căutarea tuturor soluțiilor posibile, căutarea soluției optime și căutarea unei singure soluții.

Exemplul 1: Un labirint este reprezentat printr-o matrice pătratică cu elemente de tip *char*, care pentru pereți au valoarea '#' iar pentru străzi valoarea '.'. Labirintul este înconjurat de un zid în care poate exista una sau mai multe ieșiri. Se începe dintr-o poziție dată din interiorul labirintului și se cere să se ajungă la o ieșire, mergând doar pe orizontală sau pe verticală. Se citește dintr-un fișier dimensiunea labirintului, poziția inițială și apoi labirintul propriu-zis, dat sub forma unor linii de text, câte o linie pentru fiecare linie din matrice. Se cere să se afișeze toate soluțiile posibile de a ieși din labirint, atât sub forma unei succesiuni de coordonate care constituie acel traseu, cât și sub formă matriceală:

```
// cautarea tuturor solutiilor posibile
```

```c
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

// definirea labirintului
#define LMAX        100                 // dimensiunea maxima pe o coordonata
// o celula are urmatoarele semnificatii:
//  '.' - locatie libera
//  '#' - zid
//  alte caractere - locatii de pe traseu
char lab[LMAX][LMAX];                   // labirintul propriu-zis; matrice patratica
int nLab;                               // latimea si lungimea labirintului
int startI,startJ;                      // punctul de pornire

// citeste un labirint
void citire(const char *numeFisier)
{
    FILE *fis=fopen(numeFisier,"rt");
    if(!fis){
        printf("fisierul %s nu poate fi deschis\n",numeFisier);
        exit(EXIT_FAILURE);
        }
    fscanf(fis,"%d",&nLab);
    fscanf(fis,"%d %d",&startI,&startJ);
    int i,j;
    char linie[LMAX+1];
    fgets(linie,LMAX,fis);              // consuma \n de dupa startY
    for(i=0;i<nLab;i++){
        fgets(linie,LMAX,fis);
        for(j=0;j<nLab;j++)lab[i][j]=linie[j];
        }
    fclose(fis);
}

// afiseaza un labirint, inclusiv cu un posibil traseu
void afisare()
{
    int i,j;
    for(i=0;i<nLab;i++){
        for(j=0;j<nLab;j++){
            putchar(lab[i][j]);
            }
        putchar('\n');
        }
}

#define TMAX   1000                     // lungimea maxima a unui traseu

int traseuI[TMAX],traseuJ[TMAX];        // coordonatele (i,j) ale punctelor de pe traseu
int nTraseu;                            // lungimea traseului
int nSolutii;                           // numarul de solutii
// delta i si j - cantitatea de adaugat la pozitia curenta (i,j) pentru a se obtine noua pozitie
int di[4]={1,-1,0,0};
int dj[4]={0,0,1,-1};
```

```
void solutie()
{
   int k;
   nSolutii++;
   printf("Solutia %d, lungime %d:",nSolutii,nTraseu);
   for(k=0;k<nTraseu;k++)printf(" (%d,%d)",traseuI[k],traseuJ[k]);
   putchar('\n');
   afisare();
   putchar('\n');
}

// cauta toate solutiile
void cauta(int i,int j)                    // (i,j) - pozitia curenta
{
   // revenire daca pozitia curenta nu este valida:
   if(i<0||i>=nLab||j<0||j>=nLab)return;    // daca este in afara labirintului
   if(lab[i][j]!='.')return;                // sau daca nu este libera

   // adauga pozitia curenta la traseu
   traseuI[nTraseu]=i;
   traseuJ[nTraseu]=j;
   lab[i][j]='0'+nTraseu%10;                // setare pozitie ocupata cu sugerarea vizuala a traseului
   nTraseu++;

   if(i==0||i==nLab-1||j==0||j==nLab-1){    // testare daca este solutie
      solutie();
      }else{                                // daca nu este solutie, incearca toate variantele posibile
      int k;
      for(k=0;k<4;k++){
         cauta(i+di[k],j+dj[k]);
         }
      }

   // sterge pozitia curenta din traseu
   nTraseu--;
   lab[i][j]='.';
}

int main()
{
   citire("lab.txt");
   cauta(startI,startJ);
   printf("numar solutii: %d\n",nSolutii);
   return 0;
}
```

Pentru fişierul de intrare de mai jos vor fi afişate 52 de soluţii, dintre care cele mai scurte au lungimea 14:

```
10
2 3
##########
#.#.##...#
#......#.#
#.###..#.#
```

```
#...#.####
#........#
#...####.#
###...#..#
#...#....#
#.########
```

Labirintul este conţinut în matricea *lab* şi are dimensiuna *nLab*. Punctul de start este dat de *(startI,startJ)*. După ce s-a citit de pe disc fişierul, se apelează funcţia *cauta*, care implementează o căutare de tip backtracking. Funcţia *cauta* primeşte ca parametri poziţia curentă *(i,j)*, care este iniţial *(startI,startJ)*. La începutul funcţiei se testează dacă poziţia curentă este validă, în acest caz dacă este în interiorul labirintului. Ulterior se testează dacă poziţia curentă este liberă, adică nu este un zid sau nu face parte din traseul de până la acest punct.

Testarea dacă poziţia curentă nu a fost deja folosită este foarte importantă şi ea trebuie făcută în toate situaţiile în care există posibilitatea ca într-un pas viitor să se ajungă din nou la configuraţia dintr-un pas anterior. În acest caz, dacă s-a ajuns din nou într-o celulă care deja a fost parcursă, înseamnă că ne-am învârtit în cerc, astfel că vom interzice asemenea deplasări. La modul general, trebuie interzise deplasările care ne duc într-o configuraţie identică cu una anterioară.

După ce ne-am asigurat că poziţia curentă este validă, o introducem în vectorii *traseuI* şi *trauseuJ*, care memorează succesiunea paşilor, iar apoi marcăm în matrice faptul că am parcurs deja acea celulă. Marcarea am făcut-o pentru fiecare pas cu un caracter din secvenţa ‘0’ la ‘9’, repetată în funcţie de lungimea drumului, astfel încât să fie mai uşor de urmărit vizual deplasarea. Această marcare se poate face şi simplu, folosind un caracter oarecare, gen ‘*’.

În continuare testăm dacă poziţia curentă determină o soluţie. În cazul nostru, o soluţie este atunci când am ajuns la o deschizătură în zidul exterior. În acest caz, se apelează funcţia *solutie*, care afişează traseul curent şi totodată labirintul. În labirint deja este marcat drumul pe care l-am parcurs.

Dacă nu am ajuns la o soluţie, căutăm în continuare. Pentru aceasta, încercăm toate variantele posibile în care ne putem deplasa din poziţia curentă. Sunt 4 variante, deoarece ne putem deplasa pe orizontală sau pe verticală. Cu fiecare dintre noile poziţii posibile, apelăm recursiv funcţia *cauta*. De remarcat faptul că aceste noi poziţii sunt posibile din punctul de vedere al regulilor de a ajunge la o poziţie viitoare, dar ele nu sunt neapărat şi valide. Validitatea lor va fi testată la începutul noului apel al funcţiei *caută*, aşa cum s-a discutat mai sus.

În final, după ce am tratat soluţia sau am epuizat toate variantele de a merge mai departe, vom şterge atât din traseu cât şi din matrice pasul curent, pentru a reveni la starea anterioară pasului curent. Pe această revenire la pasul anterior se bazează şi numele algoritmului, backtracking.

Exemplul 2: Să se modifice exemplul 1, astfel încât să se afişeze soluţia de lungime minimă. În continuare este redat doar ceea ce este modificat faţă de exemplul anterior:

```
// cautarea solutiei de lungime minima
#include <limits.h>
...
int traseuIMin[TMAX],traseuJMin[TMAX];          // coordonatele (i,j) ale punctelor de pe traseul minim
int nTraseuMin=INT_MAX;                         // lungimea traseului minim

void solutie()
{
   int k;
   for(k=0;k<nTraseu;k++){
      traseuIMin[k]=traseuI[k];
      traseuJMin[k]=traseuJ[k];
      }
```

```
    nTraseuMin=nTraseu;
}

// cauta toate solutiile
void cauta(int i,int j)                    // (i,j) - pozitia curenta
{
    if(nTraseu==nTraseuMin)return;         // daca nu mai sunt sanse pentru o solutie mai buna, revenire
    ...
}

int main()
{
    citire("lab.txt");
    cauta(startI,startJ);
    if(nTraseuMin==INT_MAX){
        printf("nu exista solutie");
        }else{
        int k;
        printf("Solutia minima are lungimea %d si este compusa din:",nTraseuMin);
        for(k=0;k<nTraseuMin;k++){
            printf(" (%d,%d)",traseuIMin[k],traseuJMin[k]);
            lab[traseuIMin[k]][traseuJMin[k]]='0'+k%10;
            }
        putchar('\n');
        afisare();
        putchar('\n');
        }
    return 0;
}
```

Pentru a memora soluţia de lungime minimă, am mai introdus un set de variabile: *traseuIMin*, *traseuJMin*, *nTraseuMin*. Variabila *nTraseuMin* a fost iniţializată cu *INT_MAX*, o constantă definită în antetul *<limits.h>*. *INT_MAX* defineşte cea mai mare valoare posibilă pentru tipul *int*. Astfel, orice primă soluţie care va fi găsită va avea o lungime mai mică decât *nTraseuMin* şi va fi memorată. Singurul rol al funcţiei *solutie* este să copieze soluţia curentă în acest set de variabile.

La începutul funcţiei *cauta* s-a introdus o condiţie de revenire în caz că nu mai este posibilă o soluţie mai bună decât cea găsită deja. În cazul nostru, dacă traseul curent are deja lungimea traseului minim, evident că el nu va mai putea constitui o soluţie mai bună decât cea găsită până atunci. Această condiţie introduce totodată o optimizare foarte importantă: pe orice traseu ne-am afla, în momentul în care el nu mai poate constitui prefixul unei soluţii valide (mai bună decât minimul deja găsit), se renunţă la a se mai testa paşii următori de pe acel traseu. În cazul problemelor complexe, cu milioane, miliarde sau chiar mai multe posibilităţi, această optimizare poate deveni fundamentală. Din cauza acestei condiţii, în funcţia *solutie* nu mai este necesar să testăm dacă soluţia curentă este mai bună decât cea minimă, fiindcă dacă nu ar fi fost, nu s-ar fi ajuns la apelul lui *solutie*.

În funcţia *main*, după ce s-a apelat *cauta*, se testează prima oară dacă s-a găsit o soluţie. Dacă s-a găsit, atunci se afişează lungimea, traseul şi matricea corespunzătoare ei. Înainte de a se putea afişa matricea, a trebuit să se refacă în ea traseul, deoarece la revenirea din apelul *cauta(startI,startJ)* în matrice nu a mai rămas marcat niciun traseu.

Exemplul 3: Să se modifice exemplul 1, astfel încât să se găsească doar o soluţie. În continuare este redat doar ceea ce este modificat faţă de exemplul 1:

```
// cautarea primei solutii
```

```
void solutie()                    // nu mai afiseaza numarul solutiei, fiindca acum va fi gasita doar prima solutie
{
    int k;
    printf("Lungime %d:",nTraseu);
    for(k=0;k<nTraseu;k++)printf(" (%d,%d)",traseuI[k],traseuJ[k]);
    putchar('\n');
    afisare();
    putchar('\n');
}

// daca s-a gasit o solutie returneaza 1, altfel 0
int cauta(int i,int j)
{
    // in caz ca nu se trece de testele de validitate, inseamna ca inca nu s-a gasit o solutie => return 0
    if(i<0||i>=nLab||j<0||j>=nLab)return 0;
    if(lab[i][j]!='.')return 0;

    traseuI[nTraseu]=i;
    traseuJ[nTraseu]=j;
    lab[i][j]='0'+nTraseu%10;
    nTraseu++;

    if(i==0||i==nLab-1||j==0||j==nLab-1){          // testare daca este solutie
        solutie();
        return 1;                                  // s-a gasit o solutie => return 1
        }else{
        int k;
        for(k=0;k<4;k++){
            // daca pentru oricare dintre variante s-a gasit o solutie => return 1
            if(cauta(i+di[k],j+dj[k]))return 1;
            }
        }

    nTraseu--;
    lab[i][j]='.';
    // inca nu s-a gasit nicio solutie, fiindca altfel s-ar fi executat return 1
    // ori pe ramura if-ului de testare solutie, ori pe ramura else
    return 0;
}

int main()
{
    citire("lab.txt");
    if(!cauta(startI,startJ)){
        printf("nu s-a gasit nicio solutie\n");
        }
    return 0;
}
```

În această versiune, funcţia cauta returnează 1 în caz că s-a găsit o soluţie şi 0 în caz contrar. Din momentul în care s-a găsit prima soluţie, deci se returnează 1, se poate constata că acest 1 este imediat propagat mai departe, până când se iese din toate apelurile recursive ale funcţiei *cauta*, fără a se mai face revenirea la paşii

anteriori. Astfel, atât traseul memorat cât şi matricea rămân în starea în care erau când s-a descoperit prima soluţie.

Optimizări ale algoritmilor de tip backtracking

Din cauză că algoritmii de tip backtracking au o complexitate exponenţială $O(k^n)$, timpul computaţional necesar poate depăşi destul de repede posibilităţile existente. De exemplu, după unele estimări, numărul de mutări posibile într-un joc de şah este mai mare decât numărul de electroni din univers. Astfel, un algoritm de backtracking neoptimizat, care să joace şah, nu va putea testa decât foarte puţine mutări în avans. Din acest motiv, sunt foarte importante modalităţile prin care putem reduce numărul de cazuri luat în considerare. Câteva optimizări sunt mai importante:

- limitarea la prima soluţie găsită, chiar dacă ea nu este optimă
- renunţarea la a căuta mai departe pe o anumită cale, din momentul în care ea duce la un rezultat mai slab decât cel mai bun rezultat găsit anterior (a se vedea exemplul 2)
- selectarea variantelor posibile la fiecare pas într-o manieră *Greedy*, astfel încât primele variante încercate să fie cele care ne apropie cât mai mult de destinaţie
- dacă există mai multe variante posibile, testarea a doar câtorva dintre ele, cele mai promiţătoare
- implementarea unui contor de timp sau de număr de paşi, iar atunci când contorul depăşeşte o limită maximă, returnarea celui mai bun rezultat găsit până la acel moment
- identificarea unor *puncte nodale* prin care trebuie să treacă toate soluţiile şi apoi împărţirea căutării în două: prima căutare înainte de punctul nodal şi a doua după punctul nodal. De exemplu, dacă între două oraşe există un singur drum şi vrem să ajungem dintr-un oraş în altul, se poate face o căutare de la adresa de pornire până la drumul de legătură şi o altă căutare de la drum până la adresa de destinaţie. Astfel, complexitatea algoritmului va fi $O(k^m)+O(k^n)$, în loc de să fie $O(k^{m+n})$

Aplicaţii propuse

Aplicaţia 13.1: Modificaţi exemplul 1, astfel încât să fie permise şi deplasările pe diagonală, iar traseul să fie marcat cu litere în succesiunea ‘a’..’z’.

Aplicaţia 13.2: Modificaţi exemplul 2, astfel încât să afişeze toate drumurile de lungime minimă.

Aplicaţia 13.3: Se cere un 0<n<=100 şi apoi *n* valori reale, fiecare reprezentând volumul unui obiect. În final se cere *v*, volumul unei cutii. Se cere să se umple cutia cu unele dintre obiecte date, astfel încât volumul ei să fie utilizat în mod optim.

Aplicaţia 13.4: De-a lungul unei şosele trebuie amplasate una lângă alta următoarele entităţi: *case*, *blocuri*, *grădini*, *ateliere*. O entitate se poate învecina doar cu una de acelaşi tip (ex: *casă* cu *casă*) sau conform următoarelor reguli: un *bloc* poate avea ca vecini *case*; o *casă* sau un *atelier* poate avea ca vecini *grădini*. Se cer de la tastatură numerele *c,b,g,a* care reprezintă respectiv numărul de *case*, *blocuri*, *grădini* şi *ateliere*. Să se determine toate variantele în care acestea pot fi aranjate.

Aplicaţia 13.5: Se cere 0<n<=100 şi apoi *n* valori pozitive întregi, reprezentând laturile unor pătrate. În final se cere 0<p<=100, valoare întreagă, reprezentând latura unui pătrat. Se cere să se determine dacă există un aranjament al celor *n* pătrate în interiorul pătratului de latură *p*, astfel încât toate pătratele să fie conţinute în acesta şi să nu existe suprapuneri între pătrate.

Aplicaţia 13.6: Se cere *d* de tip întreg reprezentând lungimea unei drepte şi 0<n<=100 un număr de segmente. În câte feluri se poate împărţi dreapta dată în *n* segmente consecutive, având fiecare lungimi întregi pozitive, astfel încât fiecare segment să fie strict mai mare decât cel de dinaintea sa?