

Chapter2 对偶理论

(Duality Theory)



本章主要内容:

- 线性规划的对偶模型
- 对偶性质
- 对偶问题的经济解释 – 影子价格
- 对偶单纯形法
- 灵敏度分析



线性规划的对偶模型

1. 对偶问题的提出

设某工厂生产两种产品甲和乙，生产中需4种设备按A，B，C，D顺序加工，每件产品加工所需的机时数、每件产品的利润值及每种设备的可利用机时数列于下表：

产品数据表

设备 产品	A	B	C	D	产品利润 (元/件)
甲	2	1	4	0	2
乙	2	2	0	4	3
设备可利用机时数 (时)	12	8	16	12	

问：充分利用设备机时，工厂应生产甲和乙型产品各多少件才能获得最大利润？

线性规划的对偶模型

解：设甲、乙型产品各生产 x_1 及 x_2 件，则数学模型为：

$$\begin{aligned} \max z &= 2x_1 + 3x_2 \\ s.t. \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 4x_1 \leq 16 \\ 4x_2 \leq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

反过来问：若有人要租用这些机器支付加工费，那么 4 种机器的机时如何定价才是最佳决策？

线性规划的对偶模型

在市场竞争的时代，厂长的最佳决策显然应符合两条：

(1) 不吃亏原则。即机时定价所赚利润不能低于加工甲、乙型产品所获利润。由此原则，便构成了新规划的不等式约束条件。

(2) 竞争性原则。即在上述不吃亏原则下，尽量降低机时总收费，以便争取更多用户。

设A、B、C、D设备的机时价分别为 y_1 、 y_2 、 y_3 、 y_4 ，则新的线性规划数学模型为：

$$\begin{aligned} \min \omega &= 12y_1 + 8y_2 + 16y_3 + 12y_4 \\ s.t. &\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 4y_3 + 0y_4 \geq 2 \\ 2y_1 + 2y_2 + 0y_3 + 4y_4 \geq 3 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

线性规划的对偶模型

把同种问题的两种提法所获得的数学模型用表2表示，将会发现一个有趣的现象。

原问题与对偶问题对比表

	$A (y_1)$	$B (y_2)$	$C (y_3)$	$D (y_4)$	$\max z$
甲 (x_1)	2	1	4	0	2
乙 (x_2)	2	2	0	4	3
$\min \omega$	12	8	16	12	

对偶性是线性规划问题的最重要的内容之一。每一个线性规划（LP）必然有与之相伴而生的另一个线性规划问题，即任何一个求 $\max Z$ 的LP都有一个求 $\min Z$ 的LP。其中的一个问题叫“原问题”，记为“**P**”，另一个称为“对偶问题”，记为“**D**”。

线性规划的对偶模型

2. 原问题与对偶问题的对应关系

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$s.t \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 4x_1 \leq 16 \\ 4x_2 \leq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

原问题-**P**

$$\min \omega = 12y_1 + 8y_2 + 16y_3 + 12y_4$$

$$s.t \begin{cases} 2y_1 + y_2 + 4y_3 + 0y_4 \geq 2 \\ 2y_1 + 2y_2 + 0y_3 + 4y_4 \geq 3 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0 \end{cases}$$

对偶问题-**D**

线性规划的对偶模型

		2	3	←	
		x_1	x_2	原问题	
12	y_1	2	2	\leq	12
8	y_2	1	2	\leq	8
16	y_3	4	0	\leq	16
12	y_4	0	4	\leq	12
		$\vee\vee$	$\vee\vee$	→	
对偶问题		2	3	↓	

线性规划的对偶模型

(1) 对称形式

特点：目标函数求极大值时，所有约束条件为 \leq 号，变量非负；目标函数求极小值时，所有约束条件为 \geq 号，变量非负。

$$P: \quad \max Z = CX$$

$$\begin{cases} AX \leq b \\ X \geq 0 \end{cases}$$

$$D : \quad \min W = Y^T b$$

$$\begin{cases} A^T Y \geq C^T \\ Y \geq 0 \end{cases}$$

	原问题	对偶问题
目标函数	max	min
约束条件	\leq	\geq
	变量数量	约束条件个数
	约束条件个数	变量数量

线性规划的对偶模型

例2.1 写出线性规划问题的对偶问题

$$\max Z = 2x_1 - 3x_2 + 4x_3$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \geq 2 \\ 3x_1 + x_2 + 7x_3 \leq 3 \\ -x_1 + 4x_2 + 6x_3 \geq 5 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

解：首先将原问题变形为对称形式

$$\max Z = 2x_1 - 3x_2 + 4x_3$$

$$\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 + 5x_3 \leq -2 \\ 3x_1 + x_2 + 7x_3 \leq 3 \\ x_1 - 4x_2 - 6x_3 \leq -5 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

注意：以后不强调等式右段项 $b \geq 0$ ，原因在对偶单纯型表中只保证 $\sigma_j \geq 0$ 而不保证 $B^{-1}b \geq 0$ ，故 b 可以是负数。

线性规划的对偶模型

对偶问题: $\min W = -2y_1 + 3y_2 - 5y_3$

$$\begin{cases} -2y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 2 \\ -3y_1 + y_2 - 4y_3 \geq -3 \\ 5y_1 + 7y_2 - 6y_3 \geq 4 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

线性规划的对偶模型

(2) 非对称型对偶问题

若给出的线性规划不是对称形式，可以先化成对称形式再写对偶问题。也可直接按教材表2-2中的对应关系写出非对称形式的对偶问题。

矩阵形式: $P \quad \max Z = CX$

$$\begin{cases} AX = b \\ X \geq 0 \end{cases}$$

$D \quad \min W = Yb$

$$\begin{cases} YA \geq C \\ Y \text{ 无符号限制 (无约束)} \end{cases}$$

线性规划的对偶模型

原问题（或对偶问题）		对偶问题（或原问题）	
目标函数 \max		目标函数 \min	
约 束 条 件	m 个	m 个	变 量
	\leq	≥ 0	
	\geq	≤ 0	
	$=$	无约束	
变 量	n 个	n 个	约 束 条 件
	≥ 0	\geq	
	≤ 0	\leq	
	无约束	$=$	
b	约束条件右端项	目标函数变量的系数	
C	目标函数变量的系数	约束条件右端项	

线性规划的对偶模型

例2.2 写出下列线性规划问题的对偶问题.

$$\max Z = 2x_1 - 3x_2 + 4x_3$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 + 7x_3 = 3 \\ -x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 5 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

解：原问题的对偶问题为

$$\min W = 2y_1 + 3y_2 + 5y_3$$

$$\begin{cases} 2y_1 + 3y_2 - y_3 \geq 2 \\ 3y_1 + y_2 + 4y_3 \geq -3 \\ -5y_1 + 7y_2 + 6y_3 \geq 4 \\ y_1, y_2, y_3 \text{ 无约束} \end{cases}$$

线性规划的对偶模型

例2.3 写出下列线性规划问题的对偶问题.

$$\begin{aligned} \max Z &= 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 \\ \begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 \geq 5 \\ 3x_1 - 2x_2 + 7x_4 \leq 4 \\ -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 \leq 0, x_2, x_3 \geq 0, x_4 \text{无约束} \end{cases} \end{aligned}$$

解：原问题的对偶问题为

$$\begin{aligned} \min W &= 5y_1 + 4y_2 + 6y_3 \\ \begin{cases} 4y_1 + 3y_2 - 2y_3 \leq 2 \\ y_1 - 2y_2 + 3y_3 \geq 3 \\ -3y_1 + 4y_3 \geq -5 \\ 2y_1 + 7y_2 + y_3 = 1 \\ y_1 \leq 0, y_2 \geq 0, y_3 \text{无约束} \end{cases} \end{aligned}$$

线性规划的对偶模型

例2.4

$$1. \min Z = 2x_1 + 2x_2 + 4x_3$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \geq 2 \\ 3x_1 + x_2 + 7x_3 \leq 3 \\ x_1 + 4x_2 + 6x_3 \leq 5 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$2. \min Z = 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 0 \\ x_2 + 3x_3 + 4x_4 \geq -5 \\ 2x_1 - 3x_2 - 7x_3 - 4x_4 = 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3, x_4 \text{无约束} \end{cases}$$

线性规划的对偶模型

答案:1. $\max W = 2y_1 + 3y_2 + 5y_3$

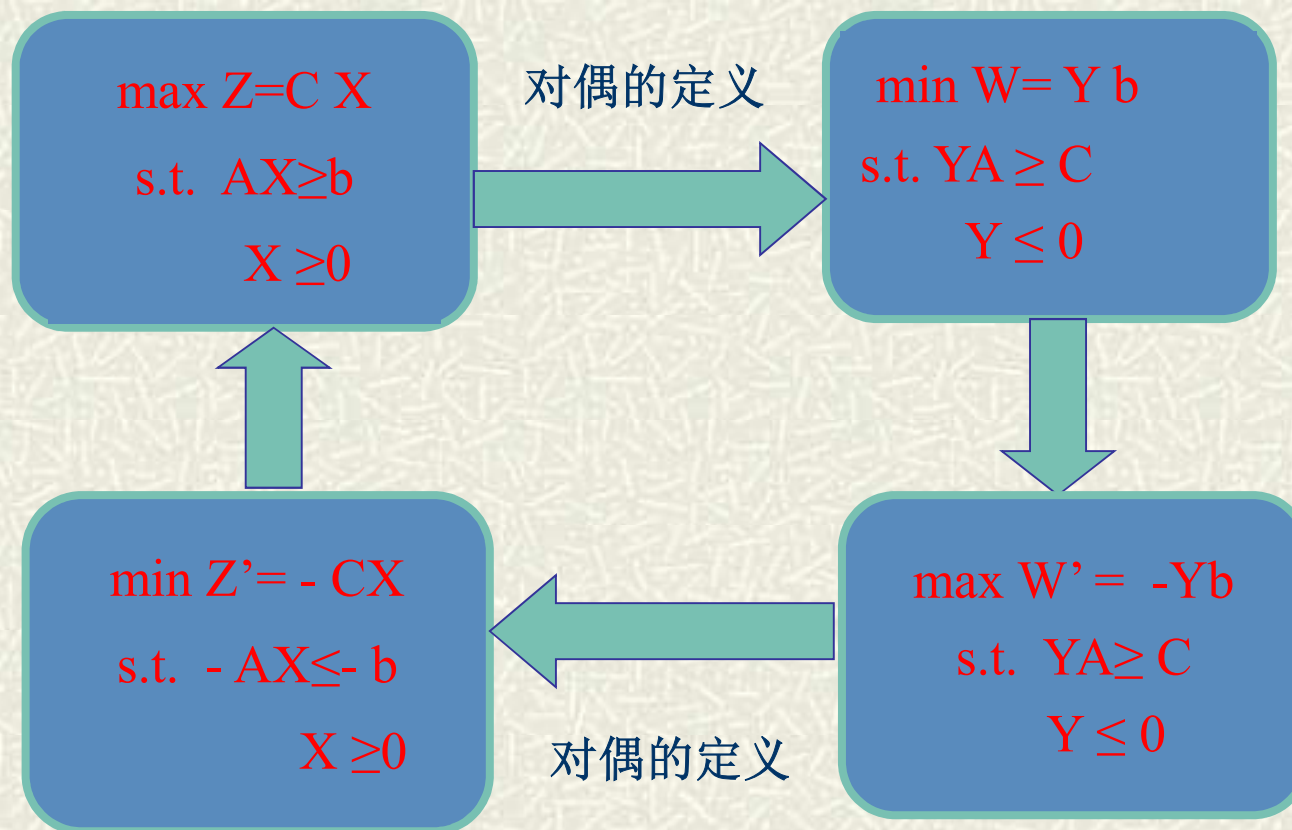
$$\begin{cases} 2y_1 + 3y_2 + y_3 \leq 2 \\ 3y_1 + y_2 + 4y_3 \leq 2 \\ 5y_1 + 7y_2 + 6y_3 \leq 4 \\ y_1 \geq 0, y_2, y_3 \leq 0 \end{cases}$$

2. $\max W = 3y_1 - 5y_2 + 2y_3$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_3 \leq 3 \\ -2y_1 + y_2 - 3y_3 \geq 2 \\ 3y_1 + 3y_2 - 7y_3 = -3 \\ 4y_1 + 4y_2 - 4y_3 = 4 \\ y_1 \leq 0, y_2 \geq 0, y_3 \text{无约束} \end{cases}$$

对偶性质

性质1 对称性定理：对偶问题的对偶是原问题



对偶性质

性质2 弱对偶原理(弱对偶性): 设 X^0 和 Y^0 分别是问题(P)和(D)的可行解, 则必有

$$CX^0 \leq Y^0 b \quad \text{即:} \quad \sum_{j=1}^n c_j x_j \leq \sum_{i=1}^m y_i b_i$$

$$P: \max Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

$$D: \min W = Y^T b = \sum_{i=1}^m b_i y_i$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, & i = 1, 2, \dots, m \\ x_j \geq 0, & j = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j, & j = 1, 2, \dots, n \\ y_i \geq 0, & i = 1, 2, \dots, m \end{cases}$$



对偶性质

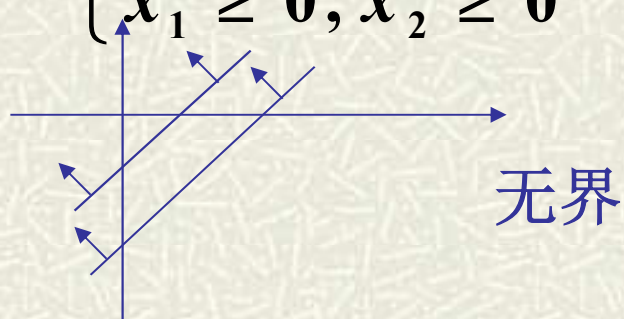
推论1: 原问题任一可行解的目标函数值是其对偶问题目标函数值的下界；反之，对偶问题任意可行解的目标函数值是其原问题目标函数值的上界。

推论2: 在一对对偶问题 (P) 和 (D) 中，若其中一个问题可行但目标函数无界，则另一个问题无可行解；反之不成立。这也是对偶问题的无界性。

对偶性质

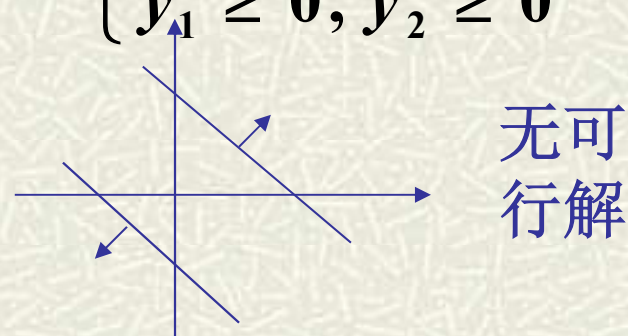
例2.5 $\max Z = 2x_1 + x_2$

(原)
$$\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 4 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$



$\min W = 4y_1 + 2y_2$

(对)
$$\begin{cases} y_1 + y_2 \geq 2 \\ -y_1 - y_2 \geq 1 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0 \end{cases}$$



关于无界性有如下结论:

原问题	对偶问题
问题无界	无可行解
无可行解	问题无界

对偶性质

推论3: 在一对对偶问题 (P) 和 (D) 中, 若一个可行 (如 P), 而另一个不可行 (如 D), 则该可行的问题目标函数值无界。

例2.6

$$\max Z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4$$

$$(P) \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 20 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 20 \\ x_{1-4} \geq 0 \end{cases}$$

试估计它们目标函数的界, 并验证弱对偶性原理。

对偶性质

解：

$$(\mathbf{D}) \min W = 20 y_1 + 20 y_2$$

$$(\mathbf{P}) \max Z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 20 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 20 \\ x_{1-4} \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 + 2y_2 \geq 1 \\ 2y_1 + y_2 \geq 2 \\ 2y_1 + 3y_2 \geq 3 \\ 3y_1 + 2y_2 \geq 4 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

由观察可知： $\bar{X} = (1.1.1.1)$ ， $\bar{Y} = (1.1)$ ， 分别是 (\mathbf{P}) 和 (\mathbf{D}) 的可行解。 $Z=10$ ， $W=40$ ， 故有

$C\bar{X} < \bar{Y}b$ ， 弱对偶定理成立。由推论(1)可知， W 的最小值不能小于10， Z 的最大值不能超过40。

对偶性质

性质3 最优性定理：如果 X^0 是原问题的可行解, Y^0 是其对偶问题的可行解，并且：

$$CX^0 = BY^0 \quad \text{即：} z = w$$

则 X^0 是原问题的最优解， Y^0 是其对偶问题的最优解。

例如:在一对对偶问题（P）和（D）中，可找到

$X^* = (0.0.4.4)$ ， $Y^* = (1.2, 0.2)$ ，且 $Z=W=28$ ，

则 X^* ， Y^* 分别是 P和D 的最优解。

对偶性质

性质4 强对偶性：若原问题及其对偶问题均具有可行解，则两者均具有最优解，且它们最优解的目标函数值相等。

还可推出另一结论：若 (LP) 与 (DP) 都有可行解，则两者都有最优解，若一个问题无最优解，则另一问题也无最优解。



单纯形算法的矩阵描述

$$P: \max Z = CX$$

$$\begin{cases} AX \leq b \\ X \geq 0 \end{cases}$$

$$\max Z = CX + 0X_s$$

$$\begin{cases} AX + IX_s = b \\ X \geq 0, X_s \geq 0 \end{cases}$$

			非基变量		基变量
C_B	基	b	X_B	X_N	X_S
0	X_S	b	B	N	I
$c_j - z_j$		0	C_B	C_N	0

			基变量	非基变量	
C_B	基	b	X_B	X_N	X_S
C_B	X_B	$B^{-1}b$	I	$B^{-1}N$	B^{-1}
$c_j - z_j$		$-C_B B^{-1}b$	0	$C_N - C_B B^{-1}N$	$-C_B B^{-1}$

对偶性质

性质5 互补松弛性：在线性规划的最优解中，如果对应某一约束条件的对偶变量为非零，则该约束条件为严格等式；反之，当约束条件取严格不等式时，则其对应的对偶变量一定为0，也即：

若 $\hat{y}_i > 0$, 则有 $\sum_{j=1}^n a_{ij} \hat{x}_j = b_i$, 即 $\hat{x}_{si} = 0$

若 $\sum_{j=1}^n a_{ij} \hat{x}_j > b_i$, 即 $\hat{x}_{si} > 0$, 则 $\hat{y}_i = 0$

对偶性质

性质5的应用:

该性质给出了已知一个问题最优解求另一个问题最优解的方法，即已知 Y^* 求 X^* 或已知 X^* 求 Y^*

$$\begin{cases} Y^* X_s = 0 \\ Y_s X^* = 0 \end{cases} \quad \leftarrow \text{互补松弛条件}$$

由于松弛变量都非负，要使求和式等于零，则必定每一分量为零，因而有下列关系：

若 $Y^* \neq 0$ ，则 X_s 必为0；若 $X^* \neq 0$ ，则 Y_s 必为0

利用上述关系，建立对偶问题（或原问题）的约束线性方程组，方程组的解即为最优解。

对偶性质

例2.7 已知线性规划

$$\max z = 3x_1 + 4x_2 + x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 16 \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3 \end{cases}$$



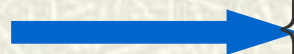
的最优解是 $X^* = (6, 2, 0)^T$, 求其对偶问题的最优解 Y^* 。

解：写出原问题的对偶问题，即

$$\min w = 10y_1 + 16y_2$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 \geq 3 \\ 2y_1 + 2y_2 \geq 4 \\ y_1 + y_2 \geq 1 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

标准化



$$\min w = 10y_1 + 16y_2$$


$$\begin{cases} -y_1 - 2y_2 + y_3 & = -3 \\ -2y_1 - 2y_2 & + y_4 & = -4 \\ -y_1 - y_2 & & + y_5 & = -1 \\ y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 & \geq 0 \end{cases}$$



对偶性质

设对偶问题最优解为 $\mathbf{Y}^* = (y_1, y_2)$, 由互补松弛性定理可知, \mathbf{X}^* 和 \mathbf{Y}^* 满足:

$$\begin{array}{ll} Y_s X^* = 0 & \text{即: } (y_3, y_4, y_5)(x_1, x_2, x_3)^T = 0 \\ Y^* X_s = 0 & (y_1, y_2)(x_4, x_5)^T = 0 \end{array}$$

因为 $X_1=6 \neq 0$, $X_2=2 \neq 0$, 所以对偶问题的第一、二个约束的松弛变量等于零, 即 $y_3=0$, $y_4=0$, 代入方程中: 

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 = 3 \\ 2y_1 + 2y_2 = 4 \end{cases}$$

解此线性方程组得 $y_1=1, y_2=1$, 从而对偶问题的最优解为:

$\mathbf{Y}^* = (1, 1)$, 最优值 $w=26$ 。

对偶性质

例2.8 已知线性规划

$$\begin{aligned} \min z &= 2x_1 - x_2 + 2x_3 \\ \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ -x_1 + x_2 - x_3 \leq 6 \\ x_1 \leq 0, x_2 \geq 0, x_3 \text{无约束} \end{cases} \end{aligned}$$



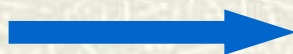
的对偶问题的最优解为 $Y^* = (0, -2)$ ，求原问题的最优解。

解：对偶问题是

$$\max w = 4y_1 + 6y_2$$

$$\begin{cases} -y_1 - y_2 \geq 2 \\ y_1 + y_2 \leq -1 \\ y_1 - y_2 = 2 \\ y_1 \text{无约}, y_2 \leq 0 \end{cases}$$

标准化



$$\max w = 4y_1 + 6y_2$$

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 = -2 \\ y_1 + y_2 + y_4 = -1 \\ y_1 - y_2 + y_5 = 2 \\ y_2 \leq 0, y_3, y_4, y_5 \geq 0, y_1 \text{无约束} \end{cases}$$

对偶性质

设对偶问题最优解为 $\mathbf{X}^* = (x_1, x_2, x_3)^T$,由互补松弛性定理可知, \mathbf{X}^* 和 \mathbf{Y}^* 满足:

$$(y_3, y_4, y_5)(x_1, x_2, x_3)^T = 0$$

$$(y_1, y_2)(x_4, x_5)^T = 0$$

将 $\mathbf{Y}^* = (0, -2)$ 代入由方程可知, $y_3 = y_5 = 0$, $y_4 = 1$ 。

$$\because y_2 = -2 \neq 0 \quad \therefore x_5 = 0$$

$$\text{又} \because y_4 = 1 \neq 0 \quad \therefore x_2 = 0$$

将 x_2, x_5 分别带入原问题约束方程中, 得:
$$\begin{cases} -x_1 + x_3 = 4 \\ -x_1 - x_3 = 6 \end{cases}$$

解方程组得: $x_1 = -5, x_3 = -1$, 所以原问题的最优解为

$$\mathbf{X}^* = (-5, 0, -1), \text{ 最优值 } z = -12$$

对偶性质

原问题与对偶问题解的对应关系小结

对应关系		原问题		
		最优解	无界解	无可行解
对偶问题	最优解	(Y,Y) (N,N)	——	——
	无界解	——	——	(Y,Y)
	无可行解	——	(Y,Y)	无法判断

对偶问题的经济解释—影子价格

定义：在一对 **P** 和 **D** 中，若 **P** 的某个约束条件的右端项常数 b_i （第 i 种资源的拥有量）增加一个单位时，所引起目标函数最优值 z^* 的改变量称为第 i 种资源的影子价格，其值等于 **D** 问题中对偶变量 y_i^* 。

1. 影子价格的数学分析：

$$\begin{array}{ll} \max Z = CX & \min W = Yb \\ \mathbf{P} \begin{cases} AX \leq b \\ X \geq 0 \end{cases} & \mathbf{D} \begin{cases} YA \geq C \\ Y \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

由对偶问题得基本性质可得：

$$z^* = \sum_{j=1}^n c_j x_j = \sum_{i=1}^m b_i y_i$$



对偶问题的经济解释—影子价格

2. 影子价格的经济意义

1) 影子价格是一种边际价格

在其它条件不变的情况下，单位资源数量的变化所引起的目标函数最优值的变化。即对偶变量 y_i 就是第 i 种资源的影子价格。即：

$$\frac{\partial Z^*}{\partial b_i} = y_i^* \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

对偶问题的经济解释—影子价格

2) 影子价格是一种机会成本

影子价格是在资源最优利用条件下对单位资源的估价，这种估价不是资源实际的市场价格。因此，从另一个角度说，它是一种机会成本。

若第 i 种资源的单位市场价格为 m_i ，则有当 $y_i^* > m_i$ 时，企业愿意购进这种资源，单位纯利为 $y_i^* - m_i$ ，则有利可图；如果 $y_i^* < m_i$ ，则企业有偿转让这种资源，可获单位纯利 $m_i - y_i^*$ ，否则，企业无利可图，甚至亏损。



结论：若 $y_i^* > m_i$ 则购进资源 i ，可获单位纯利 $y_i^* - m_i$

若 $y_i^* < m_i$ 则转让资源 i ，可获单位纯利 $m_i - y_i^*$

对偶问题的经济解释—影子价格

3) 影子价格在资源利用中的应用

根据对偶理论的互补松弛性定理:

$$Y^*X_s=0, Y_sX^*=0$$

表明生产过程中如果某种资源 b_i 未得到充分利用时, 该种资源的影子价格为0; 若当资源资源的影子价格不为0时, 表明该种资源在生产中已耗费完。

对偶问题的经济解释—影子价格

4) 影子价格对单纯形表计算的解释

单纯形表中的检验数

$$\sigma_j = c_j - C_B B^{-1} P_j = c_j - \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i$$

其中 c_j 表示第 j 种产品的价格; $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i$ 表示生产该种产品所消耗的各项资源的影子价格的总和,即产品的隐含成本。

当产值大于隐含成本时, 即 $\sigma_j > 0$, 表明生产该项产品有利, 可在计划中安排; 否则 $\sigma_j < 0$, 用这些资源生产别的产品更有利, 不在生产中安排该产品。

对偶单纯形法

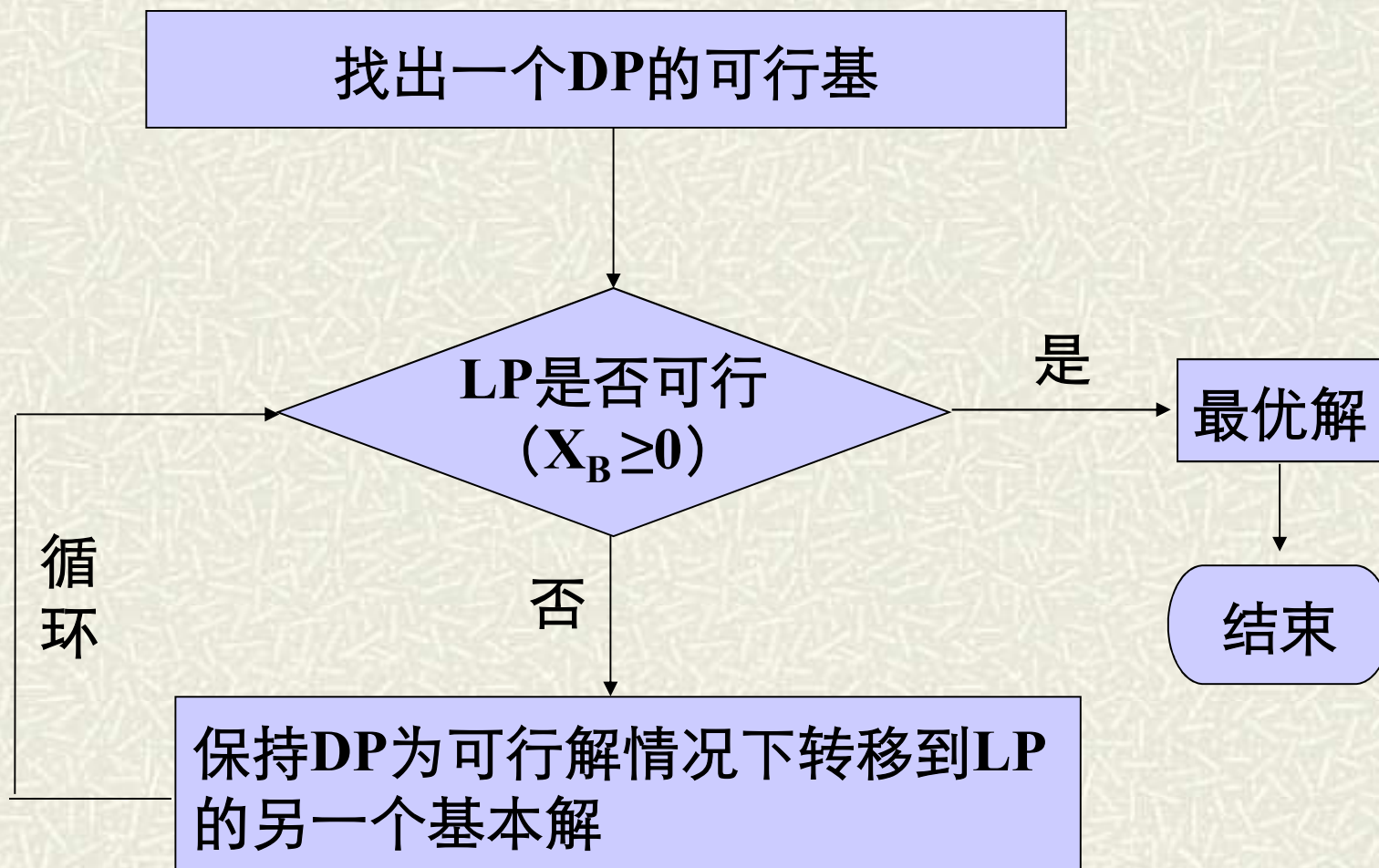
对偶单纯形法原理

对偶单纯形法是求解线性规划的另一个基本方法。它是根据对偶原理和单纯形法原理而设计出来的，因此称为**对偶单纯形法**。不要简单理解为是求解对偶问题的单纯形法。

对偶单纯形法基本思路：

找出一个对偶问题的可行基，保持对偶问题为可行解的条件下，判断 X_B 是否可行（ $X_B=b$ 为非负），有最优解。否则，通过变换基解，直到找到原问题基可行解（即 X_B 为非负），这时原问题与对偶问题同时达到可行解，由定理4可得。

对偶单纯形法



对偶单纯形法

例2.9 用对偶单纯形法求解：

$$\begin{aligned} \min \quad & Z = 9x_1 + 12x_2 + 15x_3 \\ & \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 10 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 12 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 \geq 14 \\ x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, 3) \end{cases} \end{aligned}$$

解：(1) 将模型转化为求最大化问题，约束方程化为等式求出一组基本解，因为对偶问题可行（求max问题）。

对偶单纯形法

$$\max Z' = -9x_1 - 12x_2 - 15x_3$$

$$\begin{cases} -2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = -10 \\ -2x_1 - 3x_2 - x_3 + x_5 = -12 \\ -x_1 - x_2 - 5x_3 + x_6 = -14 \\ x_{1-6} \geq 0 \end{cases}$$

c_j		-9	-12	-15	0	0	0	b	θ_i
c_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
0	x_4	-2	-2	-1	1	0	0	-10	
0	x_5	-2	-3	-1	0	1	0	-12	
0	x_6	-1	-1	-5	0	0	1	-14	(-9/-1, -12/-1, <u>-15/-5</u>)
λ_j		-9	-12	-15	0	0	0	0	

对偶单纯形法

c_j		-9	-12	-15	0	0	0	b	θ_i
c_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
0	x_4	-9/5	-9/5	0	1	0	-1/5	-36/5	
0	x_5	-9/5	-14/5	0	0	1	-1/5	-46/5	
-15	x_3	1/5	1/5	1	0	0	-1/5	14/5	(-30/-9, -45/-14, -15/-1)
σ_j		-6	-9	0	0	0	-3	42	

c_j		-9	-12	-15	0	0	0	b	θ_i
c_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
0	x_4	-9/14	0	0	1	-9/14	-1/14	-9/7	
-12	x_2	9/14	1	0	0	-5/14	1/14	23/7	(-3/-9, -45/-9, -33/-1)
-15	x_3	1/14	0	1	0	1/14	-3/14	15/7	
σ_j		-3/14	0	0	0	-45/14	-33/14		

对偶单纯形法

c_j		-9	-12	-15	0	0	0	
c_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
-9	x_1	1	0	0	-14/9	1	1/9	2
-12	x_2	0	1	0	1	-1	0	2
-15	x_3	0	0	1	1/9	0	-2/9	2
σ_j		0	0	0	-1/3	-3	-7/3	

原问题的最优解为： $X^* = (2, 2, 2, 0, 0, 0)$ ， $Z^* = 72$

由定理4，其对偶问题的最优解为： $Y^* = (1/3, 3, 7/3)$ ，

$W^* = 72$

对偶单纯形法

对偶单纯形法应注意的问题：

- 用对偶单纯形法求解线性规划是一种求解方法，而不是去求对偶问题的最优解

- 初始表中一定要满足对偶问题可行，也就是说检验数满足最优判别准则

- 最小比值中 $\left| \frac{\sigma_j}{a_{ij}} \right|$ 的绝对值是使得比值非负，在极小化问题 $\sigma_j \geq 0$ ，分母 $a_{ij} < 0$ 这时必须取绝对值。在极大化问题中， $\sigma_j \leq 0$ ，分母 $a_{ij} < 0$ ， $\frac{\sigma_j}{a_{ij}}$ 总满足非负，这时绝对值符号不起作用，可以去掉。如在本例中将目标函数写成

$$\max z' = -4x_1 - x_2 - 3x_3$$

这里 $\sigma_j \leq 0$ 在求 θ_k 时就可以不带绝对值符号。

对偶单纯形法

● 对偶单纯形法与普通单纯形法的换基顺序不一样，普通单纯形法是先确定进基变量后确定出基变量，对偶单纯形法是先确定出基变量后确定进基变量；

● 普通单纯形法的最小比值是 $\min_i \left\{ \frac{b_i}{a_{ik}} \mid a_{ik} > 0 \right\}$ 其目的是保证下一个原问题的基本解可行，对偶单纯形法的最小比值是

$$\min_j \left\{ \left| \frac{\lambda_j}{a_{lj}} \right| \mid a_{lj} < 0 \right\}$$

其目的是保证下一个对偶问题的基本解可行

● 对偶单纯形法在确定出基变量时，若不遵循 $b_l = \min \{b_i \mid b_i < 0\}$ 规则，任选一个小于零的 b_l 对应的基变量出基，不影响计算结果，只是迭代次数可能不一样。

灵敏度分析

线性规划问题的标准形式

$$\begin{aligned} \max Z &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.t. } &\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max Z &= CX \\ \text{s.t. } &\begin{cases} AX = b \\ X \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\sigma_j = c_j - \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i = c_j - C_B B^{-1} P_j$$

$$\text{令: } \overline{P_j} = B^{-1} P_j \quad \overline{b} = B^{-1} b$$

灵敏度分析

一、价值系数 c_j 的变化分析

例1：某企业利用三种资源生产两种产品的最优计划问题归结为下列线性规划

$$\max Z = 5x_1 + 4x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 90 \\ 2x_1 + x_2 \leq 80 \\ x_1 + x_2 \leq 45 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

问题：

(1) 确定 x_2 的系数 c_2 的变化范围，使原最优解保持最优；

(2) 若 $c_2=6$ ，求新的最优计划。



灵敏度分析

$$\text{max } Z = 5x_1 + 4x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 90 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 80 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 45 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

最优表
如下:

c_j			5	4	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	25	0	0	1	2	-5
5	x_1	35	1	0	0	1	-1
4	x_2	10	0	1	0	-1	2
σ_j			0	0	0	-1	-3

灵敏度分析

(1)

c_j			5	c_2	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	25	0	0	1	2	-5
5	x_1	35	1	0	0	1	-1
c_2	x_2	10	0	1	0	-1	2
σ_j			0	0	0	$c_2 - 5$	$5 - 2c_2$

$$\sigma_4 = c_2 - 5 \leq 0$$

$$\sigma_5 = 5 - 2c_2 \leq 0$$

$$5/2 \leq c_2 \leq 5$$

最优解 $X^* = (35, 10, 25, 0, 0)$ 保持不变。

灵敏度分析

(2)

C_j			5	6	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	25	0	0	1	[2]	-5
5	x_1	35	1	0	0	1	-1
6	x_2	10	0	1	0	-1	2
σ_j			0	0	0	1	-7
0	x_4	25/2	0	0	1/2	1	-5/2
5	x_1	45/2	1	0	-1/2	0	3/2
6	x_2	45/2	0	1	1/2	0	-1/2
σ_j			0	0	-1/2	0	-9/2

用单纯形法
求解得。

$$x_1^*=45/2, x_2^*=45/2, x_4^*=25/2, x_3^*=x_5^*=0, z^*=495/2$$

灵敏度分析

二、右端常数 b_i 的变化分析

$$X_B = B^{-1}b$$

例2：对于上例中的线性规划作下列分析：

- (1) b_3 在什么范围内变化，原最优基不变？
- (2) 若 $b_3=55$ ，求出新的最优解。

$$\max \quad Z = 5x_1 + 4x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 90 \\ 2x_1 + x_2 \leq 80 \\ x_1 + x_2 \leq 45 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

灵敏度分析

c_j			5	4	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	25	0	0	1	2	-5
5	x_1	35	1	0	0	1	-1
4	x_2	10	0	1	0	-1	2
			0	0	0	-1	-3

最优基:

$$B=I= (P_3, P_1, P_2)$$

最优解:

$$X^*= (35, 10, 25, 0, 0)$$

$$B^{-1}= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

灵敏度分析

$$(1) \quad X_B = B^{-1}b =$$

$$B^{-1} \begin{pmatrix} 90 \\ 80 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 90 \\ 80 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 250 - 5b_3 \\ 80 - b_3 \\ -80 + 2b_3 \end{pmatrix} \geq 0$$

解得 $40 \leq b_3 \leq 50$ ，即当 $b_3 \in [40, 50]$ 时，最优基 B 不变

$$\begin{pmatrix} x_3^* \\ x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 250 - 5b_3 \\ 80 - b_3 \\ -80 + 2b_3 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} z^* &= 5 \times (80 - b_3) + 4 \times (-80 + 2b_3) \\ &= 80 + 3b_3 \end{aligned}$$

灵敏度分析

(2) 当 $b_3 = 55$ 时


$$\begin{pmatrix} 250-5b_3 \\ 80-b_3 \\ -80+2b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -25 \\ 25 \\ 30 \end{pmatrix}$$

C_j			5	4	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	-25	0	0	1	2	[-5]
5	x_1	25	1	0	0	1	-1
4	x_2	30	0	1	0	-1	2
σ_j			0	0	0	-1	-3
0	x_5	5	0	0	-1/5	-2/5	1
5	x_1	30	1	0	-1/5	3/5	0
4	x_2	20	0	1	2/5	-1/5	0
σ_j			0	0	-3/5	-11/5	0

最优解: $X^* = (30, 20, 0, 0, 5)$

灵敏度分析

三、增加一个变量 x_j 的分析

例3：（续例1）设企业研制了一种新产品，对三种资源的消耗系数列向量以 P_6 表示 $P_6 = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ 。问它的价值系数 c_6 符合什么条件才必须安排它的生产？设 $c_6=3$ ，新的最优生产计划是什么？ 

$$\overline{P}_6 = B^{-1}P_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_6 = c_6 - C_B B^{-1}P_6 = c_6 - (0, 5, 4) \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} = c_6 - 5/2$$

灵敏度分析

C_j			5	4	0	0	0	3
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	x_3	25	0	0	1	2	-5	[1]
5	x_1	35	1	0	0	1	-1	1/2
6	x_2	10	0	1	0	-1	2	0
σ_j			0	0	0	-1	-3	1/2
3	x_6	25	0	0	1	2	-5	1
5	x_1	45/2	1	0	-1/2	0	3/2	0
4	x_2	10	0	1	0	-1	2	0
σ_j			0	0	-1/2	-2	-1/2	0

灵敏度分析

四、增加新的约束条件的分析

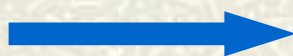
例4: 假设在例1中, 还要考虑一个新的资源约束:

$$4x_1 + 2x_2 \leq 150$$

$$\max \quad z = 5x_1 + 4x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 90 \\ 2x_1 + x_2 \leq 80 \\ x_1 + x_2 \leq 45 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 150 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

标准化



$$\max \quad z = 5x_1 + 4x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 90 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 80 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 45 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_6 = 150 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases}$$

灵敏度分析

c_j			5	4	0	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	x_3	25	0	0	1	2	-5	0
5	x_1	35	1	0	0	1	-1	0
4	x_2	10	0	1	0	-1	2	0
0	x_6	150	4	2	0	0	0	1
			0	0	0	-1	-3	0

C_j			5	4	0	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	x_3	25	0	0	1	2	-5	0
5	x_1	35	1	0	0	1	-1	0
4	x_2	10	0	1	0	-1	2	0
0	x_6	150	4	2	0	0	0	1
σ_j			0	0	0	-1	-3	0
0	x_3	25	0	0	1	2	-5	0
5	x_1	35	1	0	0	1	-1	0
4	x_2	10	0	1	0	-1	2	0
0	x_6	-10	0	0	0	[-2]	0	1
σ_j			0	0	0	-3	-3	0
0	x_3	15	0	0	1	0	-5	1
5	x_1	30	1	0	0	0	-1	1/2
4	x_2	15	0	1	0	0	2	-1/2
0	x_4	5	0	0	0	1	0	-1/2
σ_j			0	0	0	0	-3	-1/2

灵敏度分析

五、其它变化情况的分析

1. c_j 和 b_i 同时变化的情况

例5: 在例1中, 假定 c_2 由4上升为6, b_3 增加到55, 试问最优解将会发生什么变化?

$$\max \quad z = 5x_1 + 4x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 90 \\ 2x_1 + x_2 \leq 80 \\ x_1 + x_2 \leq 45 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} \begin{pmatrix} 90 \\ 80 \\ 55 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 90 \\ 80 \\ 55 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -25 \\ 25 \\ 30 \end{pmatrix}$$

代替最优表的 b 列, 并把 c_2 改为6

灵敏度分析

c_j			5	6	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	-25	0	0	1	2	-5
5	x_1	25	1	0	0	1	-1
6	x_2	30	0	1	0	-1	2
σ_j			0	0	0	1	-7

原问题与对偶问题均非可行解，表中第一方程是： $x_3 + 2x_4 - 5x_5 = -25$ ，两边乘以 (-1) ，得 $-x_3 - 2x_4 + 5x_5 = 25$ ，再引入人工变量 x_6 ： $-x_3 - 2x_4 + 5x_5 + x_6 = 25$ 以 x_6 为基变量，增添第6列，应用大M法继续求解。

$$-x_3 - 2x_4 + 5x_5 + x_6 = 25$$

C_j			5	6	0	0	0	-M
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
-M	x_6	25	0	0	-1	-2	[5]	1
5	x_1	25	1	0	0	1	-1	0
6	x_2	30	0	1	0	-1	2	0
σ_j			0	0	-M	-2M+1	5M-7	0
0	x_5	5	0	0	-1/5	-2/5	1	0
5	x_1	30	1	0	-1/5	3/5	0	1/5
6	x_2	20	0	1	2/5	-1/5	0	-2/5
σ_j			0	0	-7/5	-9/5	0	-M+7/5

新的最优计划产量为 $x_1^*=30$, $x_2^*=20$, $z^*=270$ 。

灵敏度分析

2. 技术系数 a_{ij} 的变化

例6:在例1中, 第一种产品的消耗系数改变为 $\tilde{P}_1 = \begin{pmatrix} 3 / 2 \\ 3 / 2 \\ 1 / 2 \end{pmatrix}$, 价值系数不变, 求新的最优解。

$$\max \quad z = 5x_1 + 4x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 90 \\ 2x_1 + x_2 \leq 80 \\ x_1 + x_2 \leq 45 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1}\tilde{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/2 \\ 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

灵敏度分析

C_j			5	4	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	25	2	0	1	2	-5
5	x_1	35	1	0	0	1	-1
4	x_2	10	-1/2	1	0	-1	2
σ_j			0	0	0	-1	-3

C_j			5	4	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	25	2	0	1	2	-5
5	x_1	35	[1]	0	0	1	-1
4	x_2	10	-1/2	1	0	-1	2
σ_j			0	0	0	-1	-3
0	x_3	-45	0	0	1	0	[-3]
5	x_1	35	1	0	0	1	-1
4	x_2	27.5	0	1	0	-1/2	3/2
σ_j			0	0	0	-3	-1
0	x_5	15	0	0	-1/3	0	1
5	x_1	50	1	0	-1/3	1	0
4	x_2	5	0	1	1/2	-1/2	0
σ_j			0	0	-1/3	-3	0

思考题

判断下列结论是否正确，如果不正确，应该怎样改正？



- 1) 任何线性规划都存在一个对应的对偶线性规划.
- 2) 原问题第 i 个约束是“ \leq ”约束，则对偶变量 $y_i \geq 0$.
- 3) 互为对偶问题，或者同时都有最优解，或者同时都无最优解.
- 4) 对偶问题有可行解，则原问题也有可行解.
- 5) 原问题有多重解，对偶问题也有多重解.
- 6) 对偶问题有可行解，原问题无可行解，则对偶问题具有无界解.
- 7) 原问题无最优解，则对偶问题无可行解.
- 8) 对偶问题不可行，原问题可能无界解.
- 9) 原问题与对偶问题都可行，则都有最优解.
- 10) 原问题具有无界解，则对偶问题不可行.
- 11) 对偶问题具有无界解，则原问题无最优解.
- 12) 若 X^* 、 Y^* 是原问题与对偶问题的最优解，则 $X^* = Y^*$.

本章小结



学习要点:

1. 线性规划解的概念以及3个基本定理
2. 熟练掌握单纯形法的解题思路及求解步骤
3. 熟练掌握对偶问题的转换
4. 掌握对偶问题的5个性质
5. 熟练掌握对偶单纯形法的解题思路及求解步骤