ФКН

Департамент больших данных и информационного поиска

Москва 2025

Лекция 4
Доверительные интервалы и проверка гипотез

Машинное обучение в цифровом продукте

Полякова И.Ю.

Оценки параметров/статистик

Точечные

Интервальные

Доверительный интервал

- Доверительным интервалом уровня α для оцениваемого параметра θ является такой интервал со случайными концами *L* и *R,* для которого

1. $L < R$ почти наверное;
2. $P(\mathrm{L} < \theta < R) = 1 - \alpha$

L и R – это случайные величины/функции от выборки!

Чем шире доверительный интервал – тем менее устойчивая оценка

Пример

$$X_1, \dots, X_n \overset{iid}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$$

Дов. инт$_\alpha$ для $E(X)$ – ?

$$P\left(z_{\alpha/2} < \frac{\frac{1}{n}\sum_i X_i - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{1-\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

$$L = \frac{\sum X_i}{n} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot z_{\alpha/2}; \quad R = \frac{\sum X_i}{n} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot z_{1-\alpha/2}$$

$$L \le \mu \le R$$

- Записываем дов. интервал по определению, пользуясь ЦПТ
- Раскрываем скобки
- Получаем левую и правую границы оценки

Пример

???

$$L = \frac{\sum x_i}{n} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot z_{\alpha/2}; \quad R = \frac{\sum x_i}{n} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot z_{1-\alpha/2}$$

$$L \le \mu \le R$$

- Теоретическое СКО нам неизвестно практически никогда!
- Однако, по лемме Слуцкого имеем право заменять теоретическое СКО на выборочное СКО и считать интервал
- При маленьких выборках рекомендуется использовать t-распределение вместо z-распределения

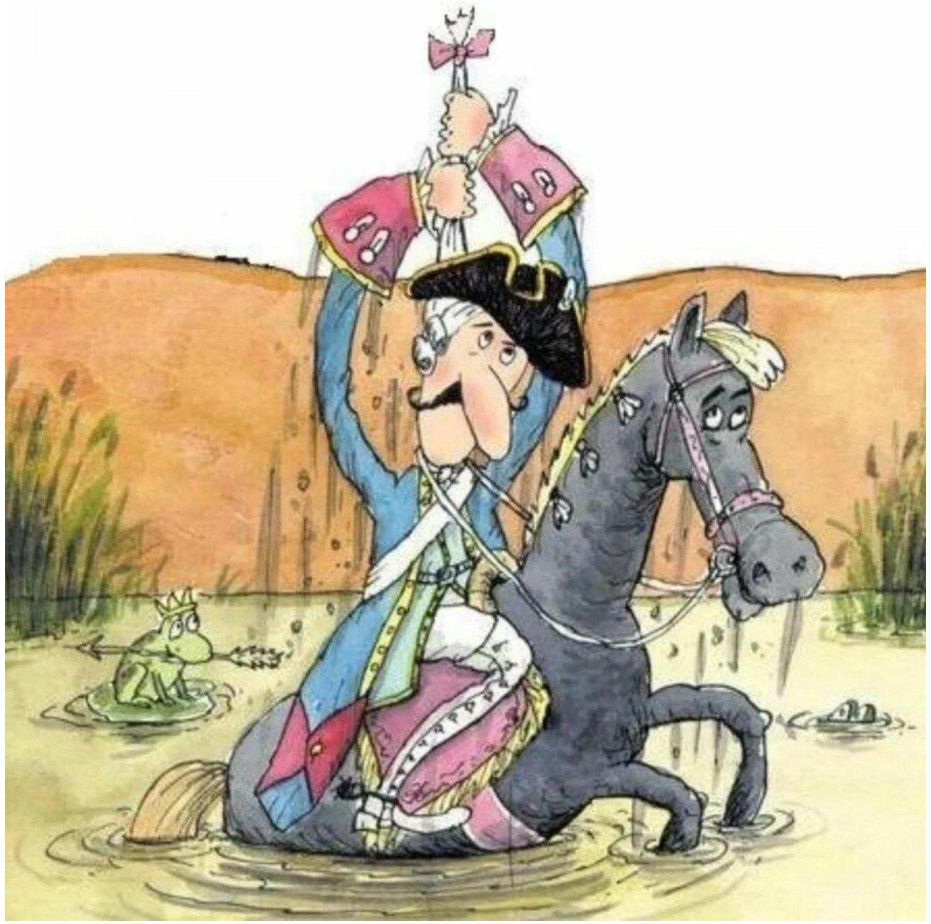
Про лемму Слуцкого:

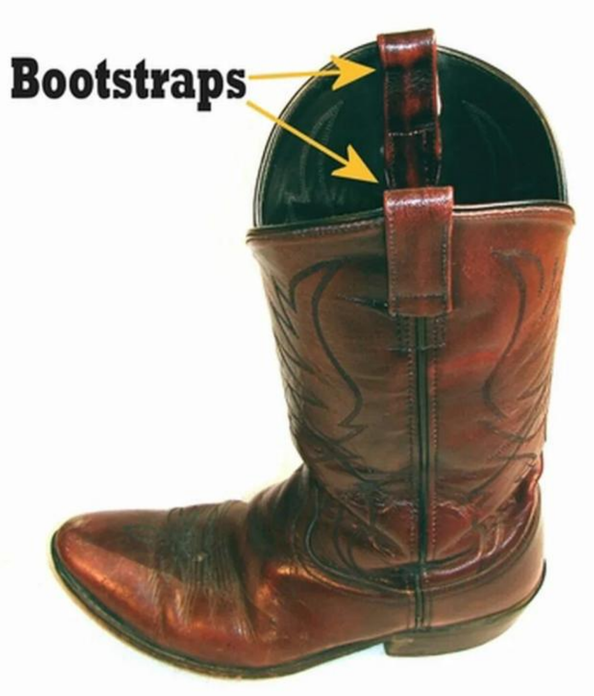
Пример

- При $n \to \infty$ статистики L и R будут сходиться к мат. ожиданию, что является следствием ЗБЧ

Как еще считать доверительный интервал?

Бутстреп





Бутстреп

Бутстреп – набор техник, позволяющих искусственно генерировать большие данные из уже имеющихся, при этом получается распределение, похожее на исходное распределение выборки.

Этими данными можно манипулировать, добиваясь нужных для ЦПТ и других полезных конструкций предположений.

Можно понимать как одну из разновидностей метода Монте-Карло

Бутстреп

- Бутстреп НЕ позволяет сделать оценку точнее (доверительный интервал уже)
- Можно сказать, что бутстреп из данных «непонятного» распределения приводит данные к чуть более «понятному» распределению

- **Главное:** бутстреп позволяет дать интервальную оценку параметра, тогда когда совсем не понятно, как ее построить более формальными методами

Бутстреп

Параметрический

Непараметрический

Непараметрический бутстреп

Предпосылка использования: нет уверенности в том, что данные подчиняются какому-либо известному параметрическому распределению

Непараметрический бутстреп

Идея:

- Имеется исходная выборка
- Из этой выборки **случайно, с возвращением** извлекается новая выборка такого же размера n: такая выборка называется **бутстреп-выборка**
- Так как выборка с возвращением, некоторые исходные точки могут попасть в новую выборку несколько раз, а некоторые - ни разу

Непараметрический бутстреп

Идея:

- Для каждой бутстреп-выборки вычисляется интересующая нас статистика θ^*
- Предыдущие шаги повторяются большое количество раз. В результате мы получаем бутстреп-распределение статистики θ^*.
- Бутстреп-распределение используется для построения доверительных интервалов, оценки стандартной ошибки и т.д.

Параметрический бутстреп

Предпосылка использования: предполагаем, что данные пришли из распределения определенного типа. Однако нам неизвестны параметры этого распределения

Параметрический бутстреп

Идея:

- Используем исходную выборку, чтобы оценить эти параметры. Затем генерируем новые выборки уже из этого подобранного параметрического распределения

Параметрический бутстреп

Идея:

- Генерируем новую выборку размера n не из исходных данных, а из этого подобранного параметрического распределения
- Для каждой такой сгенерированной выборки вычисляется статистика θ^*
- Получаем бутстреп-распределение статистики θ^*
- Так же используем бутстреп-распределение для построения доверительных интервалов, оценки стандартной ошибки и т.д.

Доверительный интервал на основе бутстрепа

- Для каждой бутстреп выборки вычисляем оцениваемую величину
- Сортируем вычисленные статистики по возрастанию, получаем эмпирическое распределение
- Из этого распределения вычисляем левосторонний и/или правосторонний квантиль в соответствие с назначенным уровнем значимости
- Значения квантилей и будут границами доверительного интервала на основе бутстрепа

Jacknife

- Зачастую более экономный подвид бутстрепа (но массово используется реже)

- Идея в том, чтобы сгенерировать n выборок из исходной, где каждая выборка получается путем удаления одного единственного i-го элемента

- Такой метод не очень хорошо показывает себя в вычислении порядковых статистик, медианы и квантилей

Проверка статистических гипотез

Проверка гипотез

- **Статистическая гипотеза:** предположение о свойствах генеральной совокупности (о виде распределения, значении параметра и т.д.), которое можно проверить на основе выборочных данных

Гипотеза это «догадка» исследователя, она может быть сформулирована на основе анализа литературы, EDA, априорных знаний и тд…

Проверка гипотез

$$\boldsymbol{H_0} \quad \textbf{vs} \quad \boldsymbol{H_1}$$

- Выдвигаются две гипотезы: нулевая (H_0) и альтернативная (H_1)
- Гипотезы обязаны быть взаимоисключающими!
- Но при этом не обязаны покрывать все «множество допустимых значений»

Например: постановка $H_0: \theta \neq 5$ и $H_1: \theta < 5$ является валидной

Проверка гипотез

$$\boldsymbol{H_0} \quad \textbf{vs} \quad \boldsymbol{H_1}$$

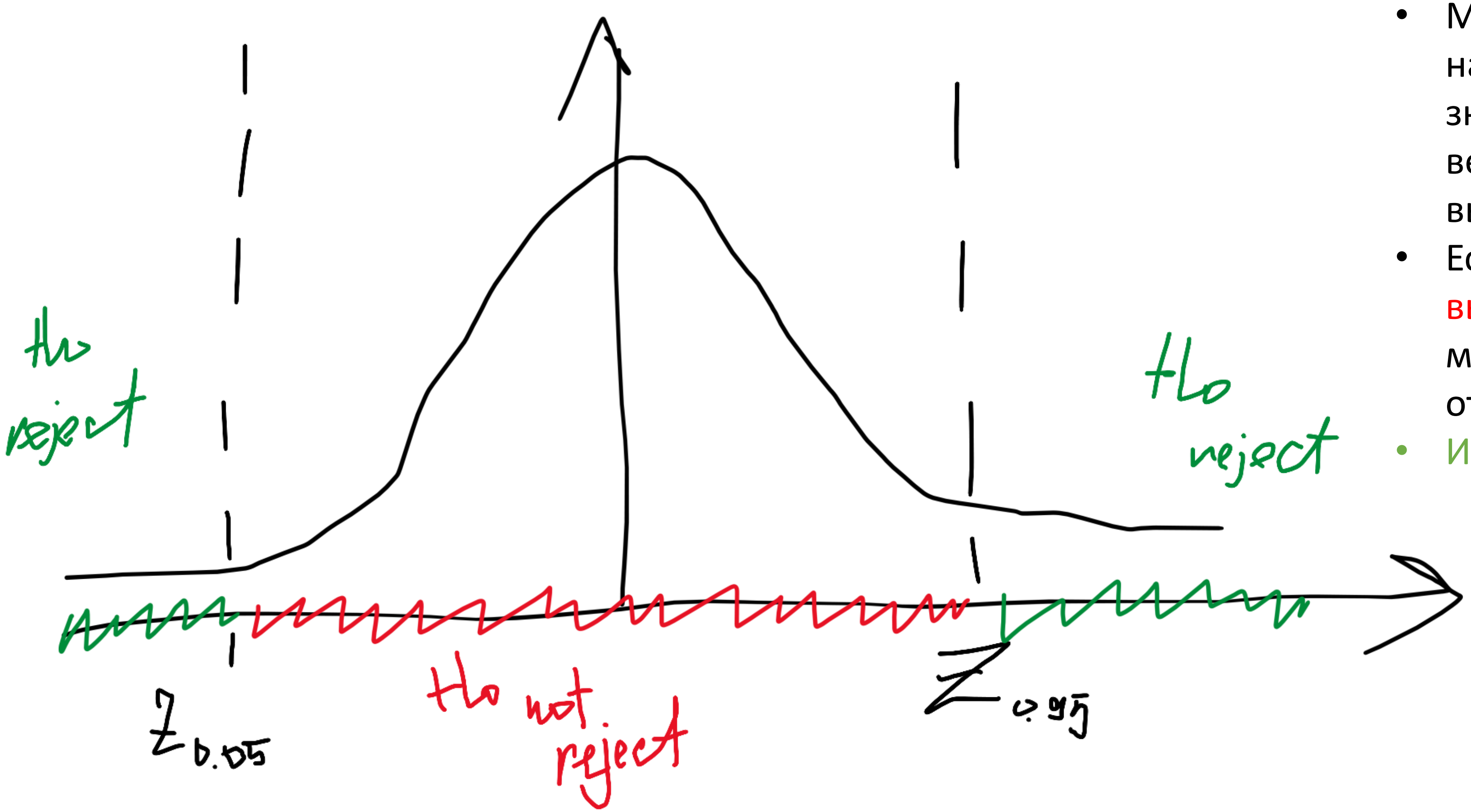
- Как правило, гипотеза H_0 говорит о состоянии «по умолчанию», «об отсутствии эффекта/различия/связи»
- H_1, в свою очередь, гипотеза, противоречащая нулевой: то, что мы хотим «доказать»

Пример H1: разработанный препарат лучше плацебо, спрос мужчин и женщин на предметы роскоши различен и тд…

Процедура проверки гипотез

- Для проверки гипотез используется идея доверительных интервалов
- Применяем статистический критерий: правило, по которому на основании выборки принимается решение — отклонить или не отклонить нулевую гипотезу

Пример



- Мы знаем теор. распр-е статистики при верной H0
- Можем проверить, насколько вычисленное значение статистики вероятно получить при выполненной H0
- Если попадает в область высокой вероятности, то мы не имеем оснований отклонять H0
- Иначе, H0 отклоняется

Проверка гипотез: уровень значимости

- При проверке гипотез α обозначается **«уровень значимости»**
- Задается исследователем
- Обозначает в-ть ошибки первого рода, которую мы считаем «приемлемой» совершить

- Ошибка первого рода – отвержение H0 при том, что H0 верна
- Ошибка второго рода – НЕотвержение H0 при том, что H0 неверна

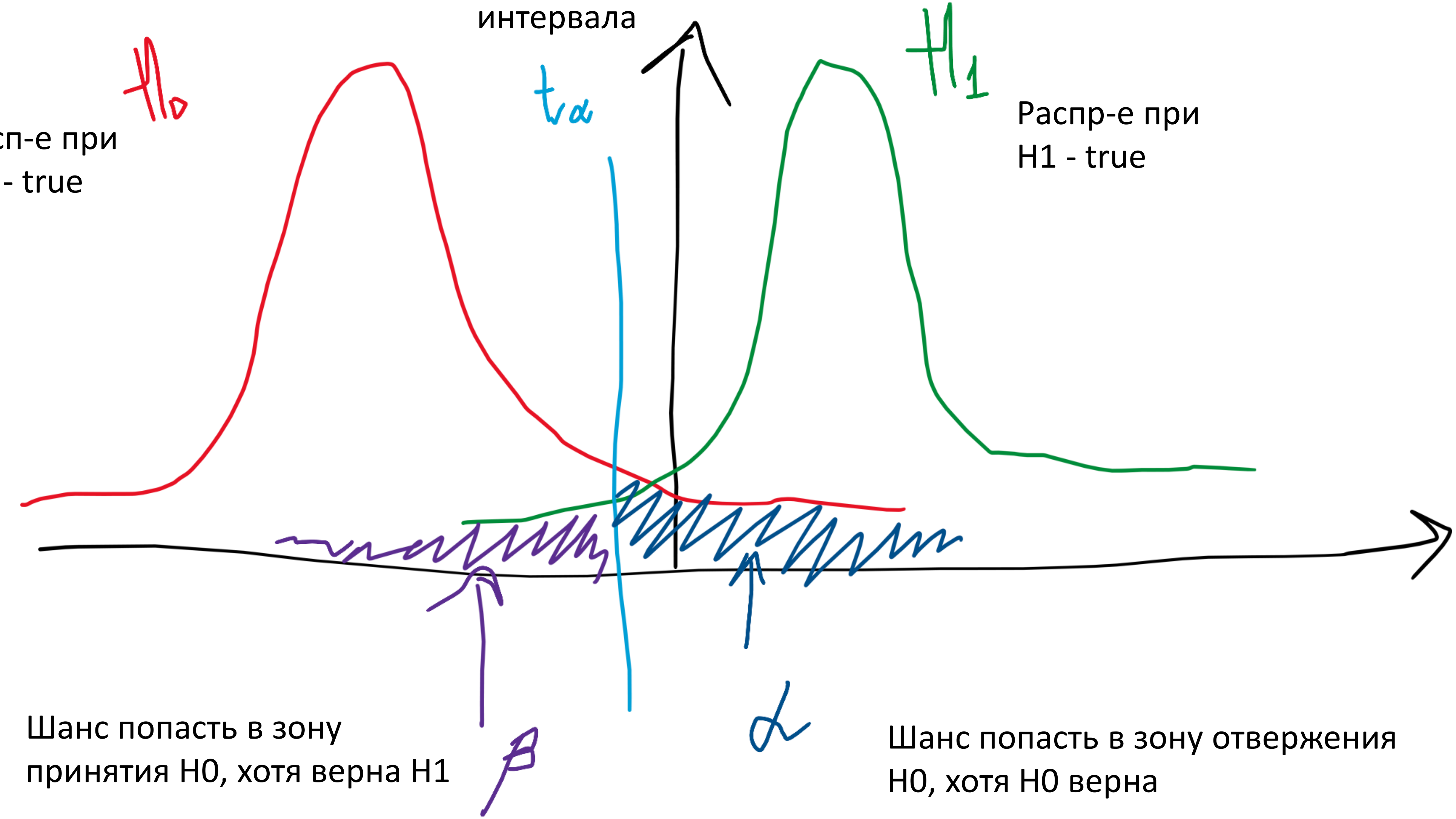
- Чем меньше ошибку первого рода мы готовы «терпеть» – тем шире будет наш доверительный интервал и тем выше в-ть совершить ошибку второго рода

Пример

Граница
дов.
интервала

Расп-е при
H0 - true

Распр-е при
H1 - true



Шанс попасть в зону
принятия H0, хотя верна H1

Шанс попасть в зону отвержения
H0, хотя H0 верна

«Золотое правило» проверки гипотез

$$\boldsymbol{p - value < \alpha \;=> H0\; reject}$$
$$\boldsymbol{p - value \geq \alpha \;=> H0\; not\; reject}$$

- P-value - это шанс получить такую же или более «экстремальную» статистику при истинности H0
- P-value – это минимальный уровень α, при котором мы отклонили бы H0

Распределения, произведенные от нормального

Распределение хи-квадрат

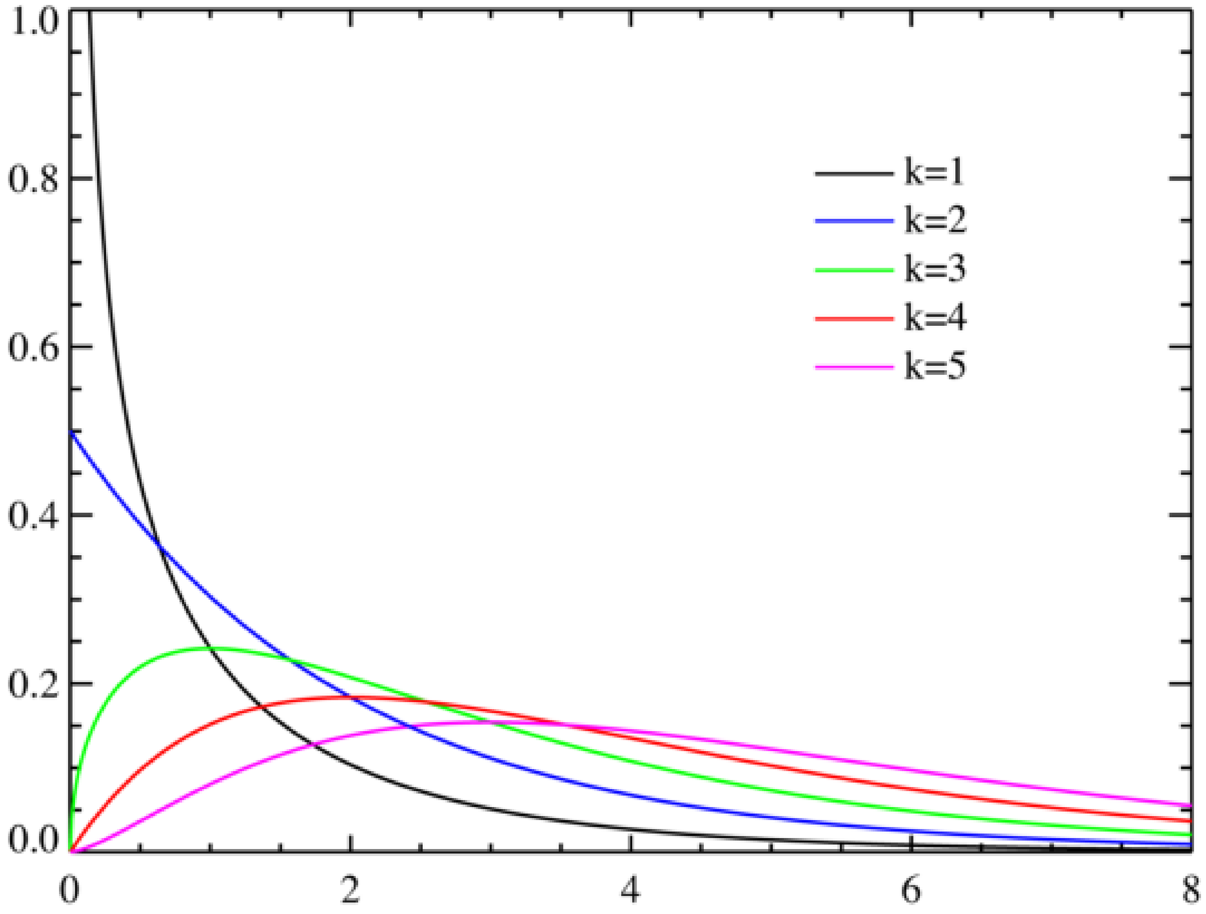
Пусть $X_1, \ldots, X_k$ независимы и имеют стандартное нормальное распределение $\mathcal{N}(0, 1)$.

Распределением χ^2 (хи-квадрат) с k степенями свободы называется распределение случайной величины

$$Y = X_1^2 + \ldots + X_k^2.$$

Обозначение: χ_k^2 или H_k.

Распределение хи-квадрат



Распределение Стьюдента

Пусть $X_0, X_1, \ldots, X_k$ независимы и имеют стандартное нормальное распределение $\mathcal{N}(0,1)$.

Распределением Стьюдента с k степенями свободы называется распределение случайной величины

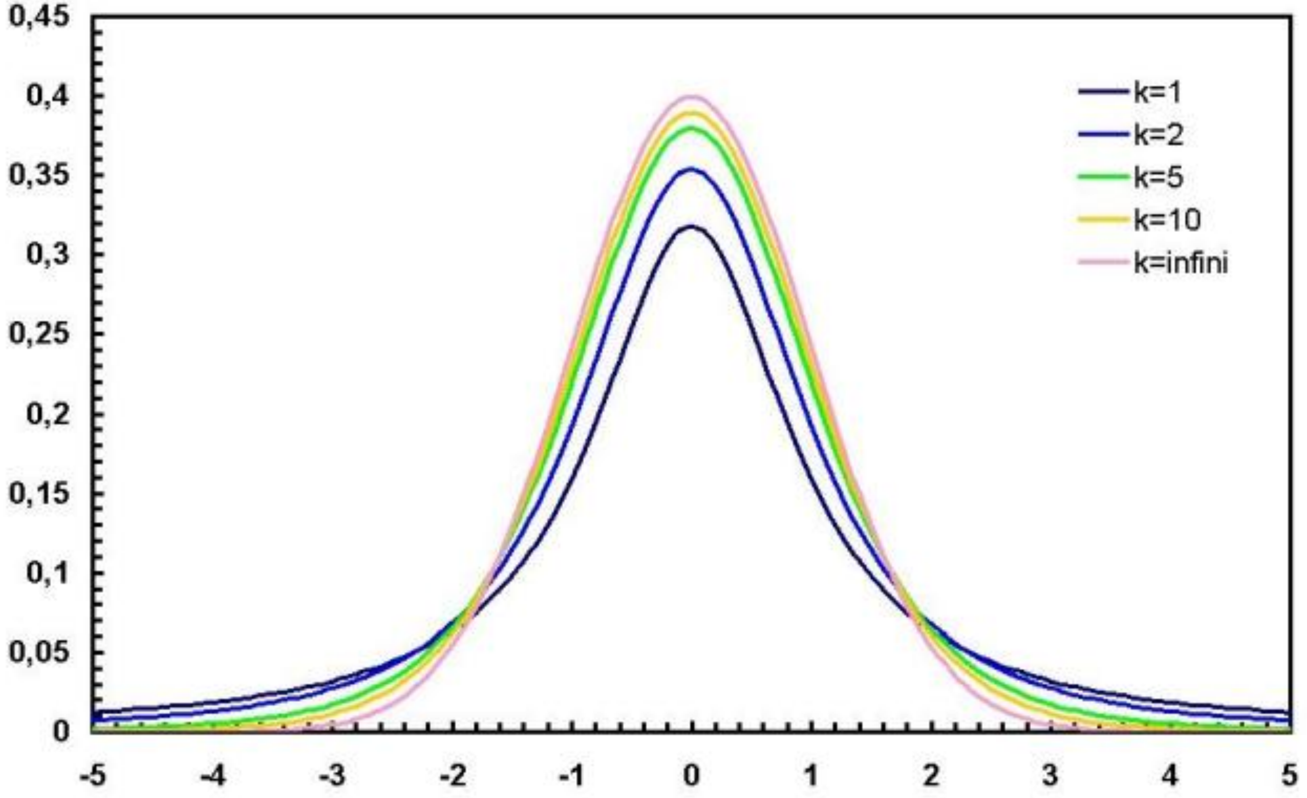
$N(0, \sigma^2)$

$$Y = \frac{X_0}{\sqrt{\frac{X_1^2+\ldots+X_k^2}{k}}}.$$

$\chi(n-k-1)$

Обозначение: t_k или T_k.

Распределение Стьюдента



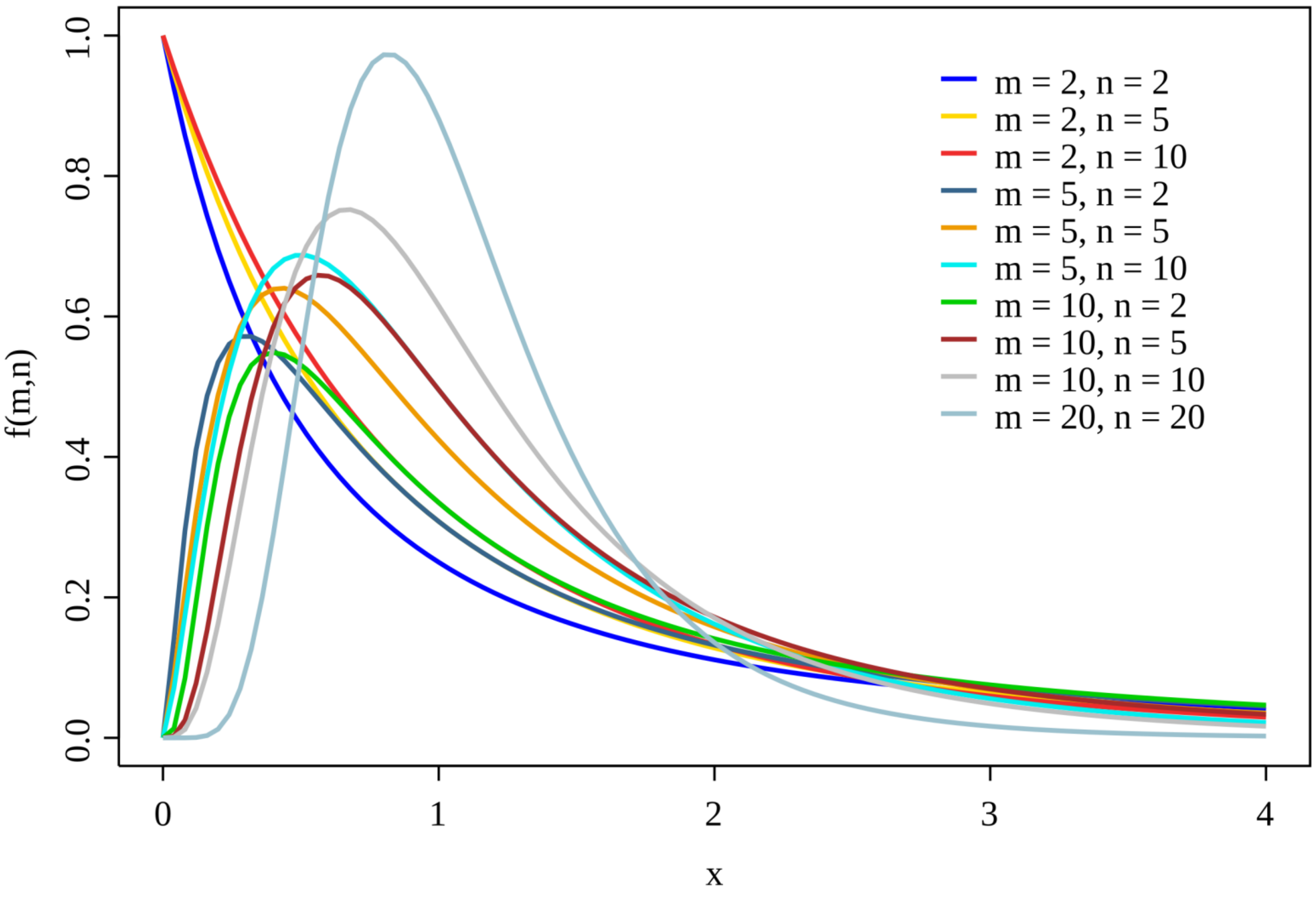
Распределение Фишера

Распределение Фишера показывает распределение отношения двух независимых СВ, которые распределены по закону хи-квадрат и имеют степени свободы k_1 и k_2 соответственно:

$$F = \frac{X / k_1}{Y / k_2}$$

$$F \sim F(k_1, k_2)$$

Распределение Фишера



Гипотезы об однородности/критерии согласия

Пример

- В какой из кофеен X и Y качество кофе более непредсказуемо?

$$H_0: \sigma_x^2 = \sigma_y^2$$

$$H_1: \sigma_x^2 > \sigma_y^2$$

$$T = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} \sim F(n-1; m-1)$$

В пользу отклонения H0 говорит очень большая статистика T (очень высокое отношение двух дисперсий)

Областью H0 reject здесь является полуинтервал:

$$(F_{1-\alpha}; +\infty)$$

Пример

- Процедура, сконструированная в предыдущем примере хорошо подходит для небольших выборок ($n < 1000$)

- Однако при крупных n более состоятельными можно считать тест Колмогорова-Смирнова (для непрерывных распр-й) или тест хи-квадрат (для дискретных)

Критерий Колмогорова

- Критерий о виде неизвестного распределения

$$H_0: F_x(x) = F_0(x)$$

$$H_1: F_x(x) \neq F_0(x)$$

Критерий Колмогорова

- Критерий о виде неизвестного распределения
- Нужно ввести меру расстояния между двумя распределениями

$$D_n(X_1, \ldots, X_n) = \sup_x |F_0(x) - \hat{F}_n(x)|$$

Теорема Колмогорова

- При справедливости H0, распределения статистики Dn одинаково для любых непрерывных распределений, при этом его функция распр-я:

$$\lim_{n\to\infty} P(\sqrt{n}\cdot D_n \le z) = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \exp^{-2k^2z^2}$$

- Критерий для проверки:

$$K_n = \sqrt{n}\cdot \sup_x |F_0(x) - \hat{F}_n(x)|$$

$$K_n \underset{H_0}{\sim} \text{распр-е Колмогорова}$$

Критерий Пирсона

- «Аналог» теста Колмогорова для дискретных величин;
- Необходимо сравнить все теоретические частоты с эмпирическими;

X	z_1	z_2	...	z_s	Возможные значения СВ
$P(X=z_i)$	$p_1(\theta)$	$p_2(\theta)$	...	$p_s(\theta)$	Теоретические вероятности
$\nu(X_i=z_i)$	ν_1	ν_2	...	ν_s	Эмпирические частоты

$$T = \sum_{j=1}^{s} \frac{\left(\nu_j - n \cdot p_j(\hat{\theta})\right)^2}{n \cdot p_j(\hat{\theta})} \sim \chi^2_{s-k-1}$$

Тестовая статистика представляет собой нормированную разность квадратов наблюдаемых частот и теоретических

Как проверить распределение на нормальность?

- **Тест Шапиро-Уилка** – один из самых мощных тестов для малых выборок (H0: данные распределены нормально)

- **Тест Жарка-Бера** – применяется для больших выборок (H0: данные распределены нормально)
- Тест Жарка-Бера делает вывод на основе асимметрии и эксцесса

- **QQ-plot**: график квантиль-квантиль
- Позволяет увидеть тяжелые хвосты, асимметрию и тд…

Дополнительно

- Подробнее при критерии согласия: https://github.com/pileyan/applied_statistics_2024/blob/master/lect04/S4.pdf
- Про бутстрап у Максима Каледина: https://github.com/XuMuK1/psmo/blob/master/lectures/Lec12-Boots.pdf
- Оригинальная статья: B.Efron. Bootsraps methods: Another look at the jackknife. *The annals of Statistics*, 7(1): 1-26, 1979
- ВШЭ: прикладная статистика (week10): https://www.youtube.com/watch?v=2p24KPez62U&list=PLCf-cQCe1FRyCcf47wwBlDObNcz4ud2_L