ДОДАТОК

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНОМУ УНІВЕРСИТЕТІ "ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"

Кафедра систем штучного інтелекту

Лабораторна робота №3

з дисципліни
«Дискретна математика»

Виконала:
студент групи КН-114
Ярка Ірина
Викладач:
Мельникова Н.І.

Львів – 2019 р.

Побудова матриці бінарного відношення

Мета роботи: набуття практичних вмінь та навичок при побудові матриць бінарних відношень та визначені їх типів.

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Декартів добуток множин A і B (позначається $A\times B$) – це множина всіх упорядкованих пар
елементів (a,b), де $a \in A$, $b\in B$. При цьому вважається, що $(a1,b1) = (a2,b2)$ тоді і тільки тоді, коли $a1 = a2$, $b1 = b2$.

Потужність декартового добутку дорівнює $|A\times B| = |A| \times |B|$

Бінарним відношенням R називається підмножина декартового добутку $A\times B$ (тобто $R \subset A\times B$).

Якщо пара (a,b) належить відношенню R , то пишуть $(a, b)\in R$, або aRb .

Областю визначення бінарного відношення $R \subset X \times Y$ називається множина $\delta_R = \{x \mid \exists y\ (x,\ y)\in R\}$, а *областю значень* – множина $\rho_R = \{y \mid \exists x\ (x,\ y)\in R\}$ (∃- існує).

Для скінчених множин бінарне відношення $R \subset A\times B$ зручно задавати за допомогою *матриці відношення* $R_{m\times n} = (r_{ij})$, де $m = |A|$, а $n = |B|$.

Елементами матриці є значення $r_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } (a_i, b_j)\in \mathrm{R}, \\ 0, & \text{якщо } (a_i, b_j)\notin \mathrm{R}. \end{cases}$

<u>Види бінарних відношень</u>.

Нехай задано бінарне відношення R на множині $\mathrm{A}^2 : R \subseteq A\times A = \{(a,\ b) \mid a\in A,\ b\in A\}$.

1. Бінарне відношення R на множині A називається *рефлексивним*, якщо для будь якого $a \in A$ виконується aRa , тобто $(a,a)\in$R . Головна діагональ матриці рефлексивного відношення складається з одиниць. Граф рефлексивного відношення обов'язково має петлі у кожній вершині.
2. Бінарне відношення R на множині A називається *антирефлексивним*, якщо для будь якого $a \in A$ не виконується aRa , тобто $(a,a)\notin R$. Головна діагональ матриці антирефлексивного відношення складається з нулів. Граф антирефлексивного відношення не має петель.
3. Бінарне відношення R на множині A називається *симетричним*, якщо для будь яких $a,b\in A$ з aRb слідує bRa , тобто якщо $(a,b)\in R$ то і $(b,a)\in R$. Матриця симетричного відношення симетрична відносно головної діагоналі. Граф симетричного відношення не є орієнтованим.
4. Бінарне відношення R на множині A називається *антисиметричним*, якщо для будь яких $a,b\in A$ з aRb та bRa слідує що $a = b$. Тобто якщо $(a,b)\in R$ і $(b,a)\in R$, то $a = b$. Матриця антисиметричного відношення не має жодної пари одиниць, які знаходяться на симетричних місцях по відношенню до головної діагоналі. У графа антисиметричного відношення вершини з'єднуються тільки однією напрямною дугою.

5. Бінарне відношення R на множині A називається *транзитивним*, якщо для будь яких a, b, $c\in A$ з aRb та bRc слідує, що aRc . Тобто якщо $(a,b)\in R$ і $(b,c)\in R$, то $(a,c)\in R$. Матриця транзитивного відношення характеризується тим, що якщо елемент матриці $\sigma_{ij} = 1$ та $\sigma_{jm} = 1$, то обов'язково $\sigma_{im} = 1$. Граф транзитивного відношення такий, що якщо з'єднані дугами, наприклад, перша-друга та друга-третя вершини, то обов'язково є дуга з першої в третю вершину.

6. Бінарне відношення R на множині A називається *антитранзитивним*, якщо для будь яких a, b, $c\in A$ з aRb та bRc слідує що не виконується aRc . Тобто якщо $(a, b)\in R$ і $(b, c)\in R$, то $(a, c)\notin R$. Матриця антитранзитивного відношення характеризується тим, що якщо елемент матриці $\sigma_{ij} = 1$ та $\sigma_{jm} = 1$, то обов'язково $\sigma_{im} = 0$. Граф транзитивного відношення такий, що якщо з'єднані дугами, наприклад, перша-друга та друга-третя вершини, то обов'язково немає дуги з першої в третю вершину.

Функцією з множини X на множину Y називається всюди визначена бінарна відповідність, при якому
кожен елемент множини X зв'язаний з єдиним елементом множини Y.

Види функціональних відношень

1. Функція називається ін'єктивною (ін'єкцією), якщо з умови $f(x_1) = f(x_2)$ слідує, що $x_1 = x_2$ для будь-яких $x_1, x_2 \in X$.

Функція ін'єктивна тоді і тільки тоді, коли для будь-яких $x_1, x_2 \in X$ якщо $x_1 \neq x_2$, то $f(x_1) \neq f(x_2)$, тобто для різних аргументів функція f приймає різні значення.

2. Функція називається сюр'єктивною (сюр'єкцією), якщо для кожного $y^*\in Y$ знайдеться такий $x^*\in X$, що $y^* = f(x^*)$.

3. Функція називається бієктивною (бієкцією), якщо вона ін'єктивна та сюр'єктивна одночасно. Таку функцію ще називають взаємно-однозначним відображенням.

Варіант 15

Завдання 1

Чи є вірною рівність:

$(A\times(B\cap C))\cap((A\cap B)\times C) = (A\times C)\cap(B\times B)$?

$(A\times B)\cap(A\times C)\cap(A\times C)\cap(B\times C) =$

$= (A\times B)\cap(B\times C) = (A\times C)\cap(B\times B)$, що і треба було довести.

Завдання 2

Знайти матрицю відношення $R\subset M\times 2^{M}$, де $M = \{1,2,3\}$:

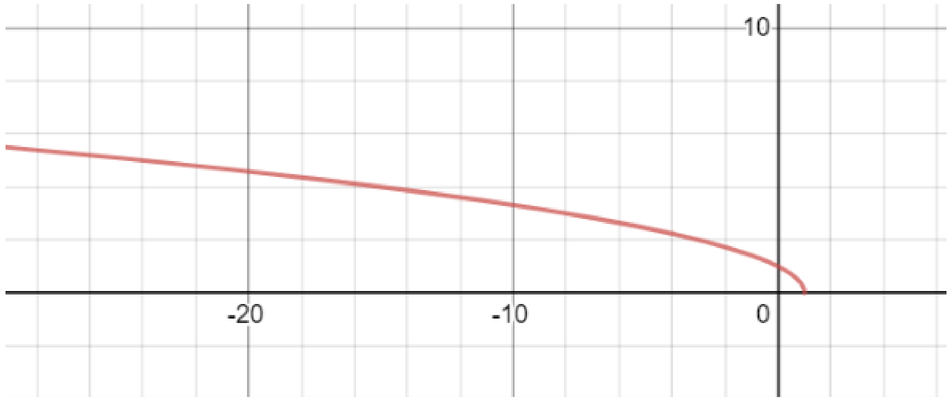
$R = \{(x, y)\ x\in M \ \&\ y\subset M \ \&\ y\le x\}$.

X\Y	∅	{1}	{2}	{3}	{2, 1}	{3,1}	{3, 2}	{1, 2, 3}
1	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**
2	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**
3	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**

Завдання 3

Зобразити відношення графічно:

$\alpha = \{(x,\ y)|(x, y)\in R^2\ \& x + y^2 - 1 > 0\}$, де R - множина дійсних чисел.



Завдання 4

Навести приклад бінарного відношення $R \subset A \times A$, де $A = \{a, b, c, d, e\}$, яке є антирефлексивне, несиметричне, транзитивне, та побудувати його матрицю.

$R \subset$ {{a, b}, {a, e}, {b, c}, {b, e}, {c, a}, {c, e}, {d, a}, {d, b}, {d, c}, {e, d}}

a	b	c	d	e	
0	1	0	0	1	a
0	0	1	0	1	b
1	0	0	0	1	c
1	1	1	0	0	d
0	0	0	1	0	e

Завдання 5

Визначити множину (якщо це можливо), на якій дане відношення є: а) функціональним; б)бієктивним:

$\alpha = \{(x, y)\ (x, y) \in R^2\ \&\ y = x + |x|\}$.

Відношення буде функціональним ЛИШЕ при x >0, адже при x<=0
y = 0 + 0 або y = x – x.

Бієктивне відношення є ін'єктивним та сюр'єктивним водночас. Дане відношення не є сюр'єктивним, оскільки у завжди додатні, отже відношення не бієктивне.

Додаток 2

Написати програму, яка знаходить матрицю бінарного відношення $\rho \subset A \times B$, заданого на двох числових множинах. Реалізувати введення цих множин, та виведення на екран матриці
відношення. Перевірити програмно якого типу є задане відношення. Навести різні варіанти тестових
прикладів.

15. $\rho = \{(a, b)\ a \in A \& b \in B \& (a + b + 1) > 3\}$;

Код програми:

```c
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

int main() {
    int numa, *pa, numb, *pb;
    printf("\nHow much elements will be in a A set? \n");
    scanf("%d", &numa);
    int* mas1 = (int*)malloc(numa * sizeof(int));
    pa = mas1;
    printf("Enter them all, please:\n ");
    for (int i = 0; i < numa; i++, pa++) {
        printf("%d element:  ", i + 1);
        scanf("%d", pa);
    }
    int tmp;
    for (int j = 0; j < numa - 1; j++) {
        for (int i = 0; i < numa - 1; i++) {
            if (mas1[i] > mas1[i + 1]) {
                tmp = mas1[i];
                mas1[i] = mas1[i + 1];
                mas1[i + 1] = tmp;
            }
        }
    }
    for (int i = 0; i < numa; i++)
        printf("%d ", mas1[i]);
    printf("\n");
    printf("\nHow much elements will be in a B set? \n");
    scanf("%d", &numb);
    int* mas2 = (int*)malloc(numb * sizeof(int));
    pb = mas2;
    printf("Enter them all, please:\n ");
    for (int i = 0; i < numb; i++, pb++) {
        printf("%d element:  ", i + 1);
        scanf("%d", pb);
    }
    for (int j = 0; j < numb - 1; j++) {
        for (int i = 0; i < numb - 1; i++) {
            if (mas2[i] > mas2[i + 1]) {
                tmp = mas2[i];
                mas2[i] = mas2[i + 1];
                mas2[i + 1] = tmp;
            }
        }
    }
    for (int i = 0; i < numb; i++)
        printf("%d ", mas2[i]);
    printf("\n");
    int **mas3 = (int**)malloc(numa*sizeof(int));
    for (int i = 0; i < numa; i++)
        mas3[i] = (int*)malloc(numb*sizeof(int));
    for (int i = 0; i < numa; i++) {
        for (int j = 0; j < numb; j++) {
            if ((mas1[i] + mas2[j]) > 2)
                mas3[j][i] = 1;
            else
                mas3[j][i] = 0;
        }
    }
    printf("Matrix: \n");
    for (int i = 0; i < numa; i++)
    {
        for (int j = 0; j < numb; j++)
            printf("%3d", mas3[i][j]);
        printf("\n");
    }
```

```
    int countR = 0, countIR = 0, countS = 0, countAS = 0, countT = 0, countAT = 0;
    int r = (numa*numb)-numa;
    for (int i = 0; i < numa; i++)
    {
        for (int j = 0; j < numb; j++)
        {
            //reflexivity
            if (i == j && mas3[j][i] == 1)
                countR++;
            //irreflexivity
            else if (i == j && mas3[j][i] == 0)
                countIR++;
            //symmetry
            if (mas3[i][j] == 1 && mas3[j][i] == 1 && i!=j)
                countS++;
            else if(mas3[i][j]==0 && mas3[j][i]==0 && i!=j)
                countAS++;
            for (int k = 0; k < numa; k++) {
                if (mas3[i][j] == mas3[j][k] == mas3[i][k])
                    countT++;
            }
        }
    }
    if (countR == numa)
        printf("\nThe matrix is reflexive!\n");
    else if (countIR == numa)
        printf("The matrix is irreflexive!\n");
    else if (countS == r)
        printf("The matrix is symmetric!\n");
    if (countAS == r)
        printf("The matrix is antisymmetric!\n");
    else
        printf("The matrix is asymmetric!\n");
    if (countT >= 1)
        printf("The matrix is transitive!\n");
    else
        printf("The matrix is antitransitive!\n");
    return 0;
}
```

Результат виконання:

```
How much elements will be in a A set?
4
Enter them all, please:
 1 element:4
  2 element:-5
  3 element:0
  4 element:3
  -5 0 3 4

How much elements will be in a B set?
4
Enter them all, please:
 1 element:7
  2 element:-5
  3 element:2
  4 element:1
  -5 1 2 7
Matrix:
  0  0  0  0
  0  0  1  1
  0  0  1  1
  0  1  1  1
The matrix is asymmetric!
The matrix is transitive!
```

Висновок

Ми на практиці навчилися будувати матриці бінарних відношень та визначати їх типи.