Annexe IV - Démonstrations des modèles exponentiel, Weibull, log-logistique

I. Modèle Exponentiel

Le modèle exponentiel contraint le coefficient $\sigma = 1$. Le terme résiduel ε suit alors une fonction de distribution à valeurs extrêmes standard. Ce qui signifie que le log de t suit la même distribution. Et que T a une distribution exponentielle, d'où le nom du modèle. Ainsi, le modèle peut se réécrire :

$$ln\ t = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon^* \quad \Leftrightarrow \quad t = e^{\beta 0 + \beta 1X}\ \varepsilon$$

avec $\varepsilon^*=\ln\varepsilon$

$$f_w(w) = \exp\{w - \exp\{w\}\}$$

avec $w=\ln t - X\beta$

Par changement de variable :

$$\begin{aligned} f_t(t) &= f_w(w = g(t)) \cdot \frac{\partial g(t)}{\partial t} \\ &= \exp\{\ln t - X\beta - \exp\{\ln t - X\beta\}\} \cdot \frac{1}{t} \\ &= \exp\{\ln t - X\beta\} \cdot \exp\{-\exp\{\ln t - X\beta\}\} \cdot \frac{1}{t} \\ &= (\exp\{\ln t\} \cdot \exp\{-X\beta\}) \cdot \exp\{-\exp\{(\ln t - X\beta)\}\} \cdot \frac{1}{t} \end{aligned}$$

en posant : $\lambda = \exp\{-X\beta\}$

$$f_t(t) = \lambda \cdot \exp\{-\lambda t\}$$

Rque : fonction de densité exponentielle

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_0^t f(u)du \\ &= \int_0^t \lambda \cdot \exp\{-\lambda u\} du \\ &= [-\exp\{-\lambda u\}]_0^t \\ &= 1 - \exp\{-\lambda t\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S(t) &= 1 - F(t) \\ &= \exp\{-\lambda t\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{f(t)}{S(t)} \\ &= \frac{\lambda \cdot \exp\{-\lambda t\}}{\exp\{-\lambda t\}} \\ &= \lambda \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(t) &= -\ln\big(S(t)\big) \\ &= \lambda t \end{aligned}$$

La représentation graphique du hasard intégré face à t permet de vérifier l'adéquation de la distribution exponentielle avec l'échantillon.

II. Modèle Weibull :

Le modèle Weibull suppose une distribution des résidus ε à valeurs extrêmes standard et relaxe la contrainte sur σ. Ainsi, la distribution de t est une distribution de Weibull.

Si $\varepsilon \rightarrow EV$ alors la densité de la variable transformée : $w=(\ln t - X\beta)/\sigma$ est de la forme :

$$f_w(w) = \exp\{w - \exp\{w\}\}$$

Par changement de variable :

$$\begin{aligned} f_t(t) &= f_w(w = g(t)) \cdot \frac{\partial g(t)}{\partial t} \\ &= \exp\left\{\frac{\ln t - X\beta}{\sigma} - \exp\left\{\frac{\ln t - X\beta}{\sigma}\right\}\right\} \cdot \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{1}{t} \\ &= \exp\left\{\frac{\ln t - X\beta}{\sigma}\right\} \cdot \exp\left\{-\exp\left\{\frac{\ln t - X\beta}{\sigma}\right\}\right\} \cdot \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{1}{t} \\ &= \left(\exp\{\ln t\} \cdot \exp\{-X\beta\}\right)^{\frac{1}{\sigma}-1} \cdot \exp\{\ln t\} \cdot \exp\{-X\beta\} \cdot \exp\left\{-\exp\left\{(\ln t - X\beta)^{\frac{1}{\sigma}}\right\}\right\} \cdot \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{1}{t} \end{aligned}$$

en posant : $p = \dfrac{1}{\sigma}$ et $\lambda = \exp\{-X\beta\}$

$$f_t(t) = \lambda \cdot p \cdot (\lambda t)^{p-1} \cdot \exp\left\{-(\lambda t)^p\right\}$$

Rque : fonction de densité Weibull

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_0^t f(u)du \\ &= \int_0^t \lambda p(u\lambda)^{(p-1)} \cdot \exp\left\{-(\lambda u)^p\right\}du \\ &= \left[-\exp\left\{-(\lambda u)^p\right\}\right]_0^t \\ &= 1-\exp\left\{-(\lambda t)^p\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S(t) &= 1-F(t) \\ &= \exp\left\{-(\lambda t)^p\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{f(t)}{S(t)} \\ &= \frac{\lambda \cdot p \cdot (\lambda t)^{p-1} \cdot \exp\left\{-(\lambda t)^p\right\}}{\exp\left\{-(\lambda t)^p\right\}} \\ &= \lambda \cdot p \cdot (\lambda t)^{p-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(t) &= -\ln(S(t)) \\ &= (\lambda t)^p \end{aligned}$$

D'où l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \ln H(t) &= p\ln(\lambda \mathrm{t}) \\ &= p\ln t - pX\beta \end{aligned}$$

dont la représentation graphique face à *lnt* permet d'observer l'adéquation de la distribution Weibull avec l'échantillon.

III. Modèle log-logistique

Le modèle log-logistique suppose que les résidus, et donc le log de t, suit une distribution logistique. Ainsi t, suit une distribution log-logistique. Ce modèle permet un hasard non-monotone.

Si *$\varepsilon \rightarrow$Logistique* alors la densité de la variable transformée : avec *$w=(\ln t$ - $X\beta)/\sigma$*, est de la forme :

$$f_w(w) = \frac{\exp\{w\}}{1+\exp\{w\}}$$

Par changement de variable :

$$\begin{aligned} f_t(t) &= \frac{\exp\left\{(\ln t - X\beta)^{\frac{1}{\sigma}}\right\}}{t\sigma \cdot \left(1+\exp\left\{(\ln t - X\beta)^{\frac{1}{\sigma}}\right\}\right)^2} \\ &= \frac{p \cdot (\lambda t)^p}{t \cdot \left(1+(\lambda t)^p\right)^2} \\ &= \lambda p \cdot (\lambda t)^{p-1} \cdot \left(1+(\lambda t)^p\right)^{-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_0^t \lambda p \cdot (u\lambda)^{p-1} \cdot \left(1+(u\lambda)^p\right)^{-2} du \\ &= \left[\left(1+(u\lambda)^p\right)^{-1}\right]_0^t \\ &= \left(1+(\lambda t)^p\right)^{-1} - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S(t) &= 1 - F(t) \\ &= \left(1+(\lambda t)^p\right)^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{\lambda p \cdot (\lambda t)^{p-1} \cdot \left(1+(\lambda t)^p\right)^{-2}}{\left(1+(\lambda t)^p\right)^{-1}} \\ &= \frac{\lambda p \cdot (\lambda t)^{p-1}}{1+(\lambda t)^p} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(t) &= -\ln\left(\left(1+(\lambda t)^p\right)^{-1}\right) \\ &= \ln\left(1+(\lambda t)^p\right) \end{aligned}$$

D’où l’expression suivante :

$$\begin{aligned} \ln\left(\exp\{H(t)-1\}\right) &= p\ln(\lambda t) \\ &= p\ln t - pX\beta \end{aligned}$$

dont la représentation graphique face à *lnt* permet d’observer l’adéquation de la distribution log-logistique avec l’échantillon.