Analysis of bidding game

Zakaria IRAQI

29 septembre 2020

Table des matières

1 Introduction au problème

Dans ce rapport, nous allons tenter d'expliquer comment on va inférer une stratégie de trading en fonction des paramètres donnés dans le problème, notamment la loi de génération de θ, et les données sortantes instant par instant, pour déterminer le fixing, qui sera ensuite utilisé pour déterminer nos prix de trading.

Nous allons de ce fait essayer de trouver un estimateur initial de θ en fonction de 11 la loi de génération de ce dernier, ensuite, nous allons estimer encore une fois θ en fonction des données sortantes du problème(le volume échangé et le nombre de villageois survivants). pour au final arriver à une stratégie qui garde en mémoire les données précédentes, et permet donc d'utiliser les résultats précédents pour fournir une stratégie optimale(pas encore testée). Nous allons au final aborder le cas de sauts abrupts et autres évènements perturbateurs dans une dernière partie.

2 Estimateurs de θ

Notre variable de tirage des poissons suit, d'après l'énoncé, une loi exponentielle de paramètre $p_t = exp(-(exp(\theta_t)))$, de plus, on a :

$$\theta_{t+1} \sim \mathcal{N}(\mu + \kappa(\theta_t - \mu), \sigma)$$

2.1 Estimateur de θ indépendant du temps

Nous allons commencer par introduire un premier estimateur de theta, et ce, indépendamment du temps de simulation. On pose

$$\phi_t = \frac{\theta_t - \mu}{\sigma}.$$

D'après le code GitHub donné, on a :

$$\theta_0 \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{1-\kappa^2}})$$

. On a de ce fait :

$$\phi_{t+1}|\phi_t \sim \mathcal{N}(\kappa\phi_t, 1), \ et \ \phi_0 \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{\sqrt{1-\kappa^2}}).$$

Nous allons montrer le résultat suivant :

$$\forall t \geq 0, \quad \phi_t \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{\sqrt{1-\kappa^2}}),$$

Il s'en suivra directement :

$$\forall \mathbf{t} \geq \mathbf{0}, \quad \theta_{\mathbf{t}} \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{\mathbf{1}-\kappa^{\mathbf{2}}}})$$

Démonstration : On note par f la fonction de distribution. On montrera le résultat pour $t = 1$, le reste s'en suivera naturellement.

$$\begin{aligned}
f(\phi_1) &= \textstyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(\phi_1|\phi_0)f(\phi_0)d\phi_0 = \frac{\sqrt{1-\kappa^2}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\frac{1}{2}((\phi_1-\kappa\phi_0)^2+(1-\kappa^2)\Phi_0^2))d\phi_0 \\
&= \textstyle\frac{\sqrt{1-\kappa^2}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\frac{1}{2}(\phi_1^2-2\kappa\phi_0\phi_1+\kappa^2\phi_0^2+(1-\kappa^2)\phi_0^2)d\phi_0 \\
&= \textstyle\frac{\sqrt{1-\kappa^2}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\frac{1}{2}(1-\kappa^2)\phi_1^2)\exp(-\frac{1}{2}(\phi_0-\kappa\phi_1)^2)d\phi_0 \\
&= \textstyle\frac{\sqrt{1-\kappa^2}}{2\pi}\exp(-\frac{1}{2}(1-\kappa^2)\phi_1^2)\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\frac{1}{2}(\phi_0-\kappa\phi_1)^2)d\phi_0 \\
&= \textstyle\frac{\sqrt{1-\kappa^2}}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{1}{2}(1-\kappa^2)\phi_1^2)
\end{aligned}$$

Car $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\frac{1}{2}(\phi_0-\kappa\phi_1)^2)d\phi_0 = \sqrt{2\pi}$

D'où :

$$\phi_1 \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{\sqrt{1-\kappa^2}}) \textbf{ CQFD.}$$

Le premier estimateur fourni est très intéressant, il montre que la distribution de θ prise à un instant déjà choisi suit une loi normale avec des paramètres indépendants du temps. Nous pourrons affiner le résultat en déterminant de nouveaux estimateurs de θ, qui cette fois ci dépendront du temps et des variables donnés par la simulation.

2.2 Estimation de θ dépendant des autres paramètres.

Dans cette partie, nous allons estimer θ en fonction des données de trade quotidiens donnés. Pour ce faire, nous allons utiliser des postulats qui viennent de l'hypothèse de pricing en fixing :

- Si quelqu'un achète, il a **besoin** d'acheter
- Si quelqu'un souhaite vendre, il essaie de vendre pour ne garder que 2 poissons à la fin du jour.
- Si quelqu'un achète, il souhaitera acheter uniquement le nombre de poissons nécessaire pour arriver à 2 poissons, il demandera exactement autant d'ordres que le nombre de poissons désirés.

— Le fait que le pricing soit en fixing garantit la véracité des postulats.
— Afin d'ajouter les stratégies "bizarres", on pourra ajouter un paramètre d'erreurs.
— On pourra rajouter une "stratégie différente" quand N_t est petit.
— On supposera les trades indépendants des prix, car on n'a pas accès aux réserves de coquillage de chaque individu, de, plus, si on aborde le problème avec une vision statistique, on peut ignorer en premier lieu la quantité des coquillages que possèdent les individus moment par moment.

Sous ces hypothèses, on pourra réécrire p_{t-1} de la manière suivante, en notant T la v.a du tirage, V_t le nombre de poissons échangés à l'instant $t-1$ et reçu par nous à l'instant t, et N_{t-1} Le nombre de villageois en vie à l'instant $t-1$, un estimateur de p_{t-1}, que l'on notera p^* est une solution de (si il existe) :

$$\begin{aligned} V_t &= N_{t-1}\min(2\mathbb{P}(T=0|p^*)+\mathbb{P}(T=1|p^*), \mathbb{P}(T=3|p^*)+2\mathbb{P}(T=4|p^*)+3\mathbb{P}(T=5|p^*)+...) \\ &= N_{t-1}\min(2\mathbb{P}(T=0|p^*)+\mathbb{P}(T=1|p^*), \textstyle\sum_{k\geq 3}(k-2)\mathbb{P}(T=k|p^*)) \\ &= N_{t-1}\min(2p^*+p^*(1-p^*), \textstyle\sum_{k\geq 3}(k-2)p^*(1-p^*)^k) \\ &= N_{t-1}\min(3p^*-{p^*}^2, \tfrac{1-3p^*+3{p^*}^2-{p^*}^3}{p}) \end{aligned}$$

De plus, $p^*-{p^*}^2-\frac{1-3p^*+3{p^*}^2-{p^*}^3}{p}$ change de signe uniquement en $p=\frac{1}{3}$

Le terme de gauche dans le min représente le nombre de coquillages qui doivent être achetés, le terme de droite le nombre de coquillages qui doivent être vendus par les vendeurs, si tout se passe bien et que l'offre et la demande se rencontrent, l'un de ces deux termes est égal à $\mathbb{E}(\frac{V_t}{N_t-1})$.

C'est un estimateur assez basique de p_{t-1}, qui servira uniquement à faire le suivi. Quand j'ai fait le test de ce dernier par rapport aux volumes et au nombre de villageois survivants, les valeurs donnés de p^* étaient assez proches de celles attendues. Il faut néanmoins prendre garde lorsque le nombre des villageois est petit. De plus, il est calculé à l'instant t pour une valeur en t-1, ce qui nous donnera un intervalle de confiance pour p_t.

2.3 Estimateur final de θ

Pour estimer notre paramètre θ, on pourra commencer d'abord par une estimation de ce dernier par la méthode 2.2, si l'estimateur ne donne pas de solution, on garde l'estimateur précédent pour θ(qu'on propage selon la définition de la diffusion). On vérifie que la valeur est dans le quantile à 99% de la distribution trouvée en 2.1, si ce n'est pas le cas, on reprend notre l'un des deux quantiles supérieurs ou inférieurs à 99%(le plus proche des deux). En attendant de retrouver des estimateurs de θ(un estimateur de p_t n'est rien d'autre qu'un estimateur de θ).

3 Détermination à priori du prix de fixing

3.1 Fixing initial

Pour le fixing initial, on laissera les autres équipes en déterminer un : On gardera en mémoire tous les fixings des simulations précédentes, puis on prendra la moyenne sur les 100 derniers premiers fixings comme notre fixing de base.

3.2 Fixing à temps donné

L'idée principale pour déterminer le prix du fixing est de comparer les quantités nécessaires à acheter et les quantités nécessaires à la ventes, renormalisées. Nous comparerons alors :

$$(2\mathbb{P}(T=0|p^*)+\mathbb{P}(T=1|p^*)\ et\ \sum_{k\geq 3}(k-2)\mathbb{P}(T=k|p^*)$$

.

Plus le terme de gauche est petit comparé au terme de droite, plus c'est les acheteurs qui sont rares dans le marché, ce sont donc eux qui contrôlent les prix, et ces derniers baissent (dû à la forte demande, on aura plus de chance d'être exécuté). Par contre, si le terme de droite est grand relativement au terme de gauche, c'est les vendeurs qui se font rare, on aura tendance à faire monter le prix du fixing dans nos estimations.

Une première proposition serait d'estimer le fixing par rapport à $(2\mathbb{P}(T=0|p^*)+\mathbb{P}(T=1|p^*)-\sum_{k\geq 3}(k-2)\mathbb{P}(T=k|p^*)$. On pourrait faire une régression entre les vecteurs des variations des fixing réels et le paramètre précédemment cité, ou bien juste ce qui suit (en notant F_t le prix du fixing à l'instant t) :

— $F_{t+1}=0.9F_t$ si $(2\mathbb{P}(T=0|p^*)+\mathbb{P}(T=1|p^*)-\sum_{k\geq 3}(k-2)\mathbb{P}(T=k|p^*)>-\alpha$

— $F_{t+1}=F_t$ si $(2\mathbb{P}(T=0|p^*)+\mathbb{P}(T=1|p^*)-\sum_{k\geq 3}(k-2)\mathbb{P}(T=k|p^*)\in[-\alpha,\alpha]$

— $F_{t+1}=1.1F_t$ Sinon.

α devra être choisi de manière à garantir le meilleur résultat. De plus, à prix de fixing fixé, on pourra alors garder la stratégie donnée dans le code Github "example.py", notamment pour des ordres d'achat à $1.2F_t$ et des ordres de vente à $1F_t$.

La stratégie reste assez naîve, mais nous n'avons pas eu le temps suffisant ni des données pour la tester.

4 Implémentation

Dès le départ, en n'utilisant uniquement le path-indpendent estiamtor, nous avons une idée assez bonne des quantiles à 99% est entre 0.284 et 0.43. L'estimateur ne varie pas beaucoup. De plus, avec les variables données, l'espérance de la variable initiale est de 0.36 , les variables à comparer $(2\mathbb{P}(T=0|p^*)+\mathbb{P}(T=1|p^*)$ et $\sum_{k\geq 3}(k-2)\mathbb{P}(T=k|p^*)$. varient entre :

- Concernant $(2\mathbb{P}(T=0|p^*)+\mathbb{P}(T=1|p^*)$: entre 0.77 et 1.1, avec 0.92 pour la moyenne
- Concernant $\sum_{k\geq 3}(k-2)\mathbb{P}(T=k|p^*)$: entre 1.3 et 0.43, en passant par 0.79 pour la moyenne.
- De plus, le seuil vérifiant $(2\mathbb{P}(T=0|p^*)+\mathbb{P}(T=1|p^*)=\sum_{k\geq 3}(k-2)\mathbb{P}(T=k|p^*)$ est de $\frac{1}{3}$, qui est bien entre les deux quantiles extrêmales.
- Même la propagation de p instant par instant est très petite. On pourra toujours assimiler p_t à p_{t-1}.
- Une autre idée serait de fitter les différences des prix de Fixing par rapport à notre estimateur. Nous allons donc stocker tous les fixings et les différences des fixings et fitter le second par rapport au premier (on utilisera une régression, avec en plus les log-différences au lieu des différences.)

L'idée finale implémentée a été d'estimer la valeur $\frac{F_{t+1}-F_t}{F_t}$ en fonction de p_t^* et de $Imbalance_t^*$ estimée à partir de p_t^*. Je ne sais pas quels seront les résultats obtenus, ni même si mon code contient des bugs.

5 Réaction aux chocs

5.1 Choc d'inflation

On garde notre position si avant ce choc, nos quantités de coquillages sont suffisantes pour acheter plus de 6 poissons dans l'ancien fixing, et que la probabilité de pêcher est assez grandes. Ce choc d'inflation causera que le nombre de poissons deviendra encore plus rare(vu que peu de gens vont pêcher). Rester pêcher si les conditions précédentes sont vérifiées, et consommer les fixing proposer en cas de bonne pêche. Après 5 à 10 jours, le prix va se stabiliser.(Ces chocs n'ont pas été inclus dans notre code).

5.2 Choc de divisibilité

Si les prix de fixing sont suffisamment grands, cela ne va pas changer grand chose. De toutes les façons, notre quantité initiale est de 1000. Cela va juste impliquer que nos quantités respectives de coquillages seraient de "250" en réalité. De plus, la plupart des stratégies travailleraient tous en modulo 1 actuellement.

5.3 Pénurie de Poisson

Actuellement, la loi de génération des poissons donnaient une moyenne de 1.8. Cela imposerait deux stratégies différentes :

- Si on n'a que peu de coquillages(moins de 6 fois le fixing), on augmente nos prix de ventes de $\frac{1.8}{1}$.
- Sinon, on ne vend pas (au cas où on peut vendre) : Ceci augmentera notre probabilité de survie l'instant d'après.
- On achète au prix fort dans ce genre de situation.

6 Test sur le terminal, remarques générales

Malheureusement, je n'ai pas pu obtenir de résultat pratique qui soit du moins logique, vu que j'obtiens 0 à chaque session. De plus, la manière avec laquelle nous avons construit l'estimateur n'est pas compatible avec des tests de utilisés 5 ou 6 fois, mais nécessite plusieurs itérations, ce qui n'est pas possible dans les donnees test. De plus, on n'obtient pas le nombre de villageois survivants ni le nombre de poissons échangés à chaque jour, ce qui n'est pas le cas de l'énoncé (et donc de mon estimateur).

Mon estimateur contient des erreurs, vu que je n'ai malheureusement pas pu le tester. La stratégie naïve de ne rien faire ne marche pas non plus pour une seule journée.