2) Si A_{ijk} son las componentes de un tensor covariante de orden 3 y B^{lmnp} las de uno contravariante de orden 4, pruebe que $A_{ijk}B^{jknp}$ corresponden a las componentes de un tensor mixto de orden 3.

Por contracción de tensores → $A_{ijk}B^{jknp} = C_i^{np}$ ← Mixto de orden 3

7) En este ejercicio generalizamos la definición del momento de inercia para cuerpos continuos, el cual se define como: $I^i_j = \int_V dv\,\rho(\vec{r})\left(\delta^i_j(x^k x_k) - x^i x_j\right)$ con $x^i = \{x, y, z\}$ y $dv = dx\,dy\,dz$

a) Muestre que I^i_j es un tensor $\quad I^i_j = \int (dx^1 dx^2 dx^3)\,\rho(x^1, x^2, x^3)\underbrace{(\delta^i_j x^k x_k - x^i x_j)}_{I}$

1) Tengamos presente que:

$$\bar{I}^i_j = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^l}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^j} I^l_m$$

$$x^i = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j}\bar{x}^j$$

$$x_i = \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^i}\bar{x}_m$$

Además:

$$x^i(\bar{x}^e) \longleftrightarrow \bar{x}^m(x^i)$$

$$\delta^i_j = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^j} \leftarrow \text{Inversas una de la otra}$$

Demostremos que un producto interno (escalar $x^k x_k$) es independiente del sistema de coordenadas:

$$x^k x_k = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^m}\bar{x}^m \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^k}\bar{x}_l$$

$$= \underbrace{\frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^m}}\bar{x}^m \bar{x}_l = \delta^l_m \bar{x}^m \bar{x}_l$$

$$\delta^l_m \leftarrow \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial \bar{x}^m}$$

$$= \bar{x}^l \bar{x}_l$$

Por otro lado, para $x^i x_j$:

$$x^i x_j = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^p}\bar{x}^p \frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^j}\bar{x}^q$$

$$= \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^p}\frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^j}\bar{x}^p \bar{x}_q$$

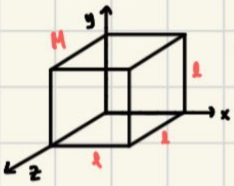
De esta manera se tendrá:

$$I^i_j = \int dv\,\rho(\vec{r})(\delta^i_j x^k x_k - x^i x_j)$$

$$\bar{I}^p_q = \int dv\,\rho(\vec{r})\left(\delta^p_q \bar{x}^l \bar{x}_l - \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^p}\frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^j}\bar{x}^p \bar{x}_q\right) = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^p}\frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^j} I^i_j$$

↳ Ya que I^i_j transforma como tensor, I^i_j es un tensor en este caso de 2do orden

b) Considere un cubo de lado l y masa total M tal que tres de sus aristas coinciden con un sistema de coordenadas cartesiano. Encuentre el tensor momento de inercia I^i_j



$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{M}{l^3}$$

$$I^i_j = \int_V \rho\left(\delta^i_j(x^2+y^2+z^2) - x^i x_j\right) dV$$

$$I^1_1 = \rho\int_0^l\int_0^l\int_0^l \left((x^2+y^2+z^2) - x^2\right)dx\,dy\,dz$$

$$= \rho\int_0^l\int_0^l\int_0^l (y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$$

$$= \rho l\int_0^l\int_0^l (y^2+z^2)\,dy\,dz$$

$$= \rho l\int_0^l \left(\frac{1}{3}l^3 + l z^2\right)dz$$

$$= \rho l\left[\frac{2}{3}l^4\right]$$

$$= \frac{M}{l^3}\cdot\frac{2l^5}{3}$$

$$= \frac{2}{3}Ml^2 = I^2_2 = I^3_3 \longleftarrow \text{Conclusiones debido a la simetría del sistema}$$

$$I^1_2 = \int_0^l\int_0^l\int_0^l \rho(-xy)\,dx\,dy\,dz$$

$$I^1_2 = \rho\left(-\frac{1}{2}l^2\right)\int_0^l\int_0^l y\,dy\,dz$$

$$= \rho\left(-\frac{1}{2}l^2\right)\left(\frac{1}{2}l^2\right)\int_0^l dz$$

$$= \rho\left(-\frac{1}{2}l^2\right)\left(\frac{1}{2}l^2\right)(l)$$

$$= \frac{M}{l^3}\cdot\left(-\frac{1}{4}l^5\right)$$

$$= -\frac{1}{4}Ml^2 = I^2_1 = I^1_3 = I^3_1 = I^2_3 = I^3_2$$

$$I^i_j = Ml^2\begin{pmatrix} 2/3 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 2/3 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 2/3 \end{pmatrix}$$

8) Dados dos sistemas de coordenadas ortogonales $O \rightleftharpoons (x, y, z)$ y $O' \rightleftharpoons (x', y', z')$ donde el sistema de coordenadas O' se obtiene rotando a O, $\pi/6$ alrededor del eje z y $\pi/2$ alrededor del eje x', con lo cual los ejes y' y z coinciden.

a) Si tenemos los vectores: $a = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 3\hat{k}$, $b = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath} + 3\hat{k}$, expréselos en el sistema de coordenadas O' = (x', y', z').

El sistema O se obtiene en 2 pasos: 1) Rotación de $\pi/6$ alrededor del eje z: $R_z = \begin{pmatrix} \cos\pi/6 & -\text{sen}\,\pi/6 & 0 \\ \text{sen}\,\pi/6 & \cos\pi/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2) Rotación de $\pi/6$ alrededor del eje x': $R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\pi/2 & -\text{sen}\,\pi/2 \\ 0 & \text{sen}\,\pi/2 & \cos\pi/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Así, las coordenadas de la base de O' expresados en la base O, serán:

$$R_z R'_x = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = R^i_j$$

↳ $e'_i = R^j_i e_j$

→ $v = v^i e_j = v^{i'} e'_i = v^{i'} R^j_i e_j$

↳ $v^j = R^j_i v^{i'}$

↳ $v^{i'} = (R^{-1})^i_j v^j$

Por lo tanto: $a' = R^{-1}a = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}+1 \\ 3 \\ \frac{1}{2}-\sqrt{3} \end{pmatrix}$ $\quad b' = R^{-1}b = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}+\sqrt{3} \\ 3 \\ 1-\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$

b) El tensor de esfuerzos (tensiones normales y tangenciales a una determinada superficie) se expresa en el sistema $O = (x, y, z)$ como P^i_j. ¿Cuál será su expresión en ek sistema de coordenadas O'?

$$P^i_j = \begin{pmatrix} P_1 & 0 & P_4 \\ 0 & P_2 & 0 \\ 0 & 0 & P_3 \end{pmatrix}$$

P^i_j es un operador tal que, dados un vector v^j le asocia un vector $w^i \rightarrow w^i = P^i_j v^j$. Estamos buscando $P^{i'}_j$ tal que se cumpla $w^{i'} = P^{i'}_j v^{j'}$. Del inciso a) tenemos $w^{i'} = (R^{-1})^i_k w^k$, por lo tanto si sustituimos $w^k = P^k_l v^l$:

$$\begin{aligned} w^{i'} &= (R^{-1})^i_k w^k \\ &= (R^{-1})^i_k P^k_l v^l \\ &= \underbrace{(R^{-1})^i_k P^k_l R^l_m}_{P^{i'}_m} v^{m'} \end{aligned}$$

Por lo tanto: $P^{i'}_m = (R^{-1})^i_k P^k_l R^l_m = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 & 0 & P_4 \\ 0 & P_2 & 0 \\ 0 & 0 & P_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}P_1 & \frac{1}{2}P_2 & \frac{\sqrt{3}}{2}P_4 \\ 0 & 0 & P_3 \\ \frac{1}{2}P_1 & -\frac{\sqrt{3}}{2}P_2 & \frac{1}{2}P_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(3P_1+P_2) & \frac{\sqrt{3}}{2}P_4 & \frac{\sqrt{3}}{4}(P_1-P_2) \\ 0 & P_3 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{4}(P_1-P_2) & \frac{1}{2}P_4 & \frac{1}{4}(P_1+3P_2) \end{pmatrix}$$