2) Evalúe la integral de línea de $\vec{a}=x\hat{\imath}+\frac{y^2}{b}\hat{\jmath}-\frac{z^2}{c}\hat{k}$ a lo largo de la curva C: $x=a\cos(\pi\lambda/2),\ y=b\,\text{sen}(\pi\lambda/2),\ z=c\lambda$, desde el punto (a,0,0) al (0,b,c).

$(a,0,0)\rightarrow a=a\cos(\frac{\pi\lambda}{2})$, $0=\pi\lambda/2\rightarrow\lambda=0$ $\quad (0,b,c)\rightarrow 0=a\cos(\pi\lambda/2)$, $\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}\lambda\rightarrow\lambda=1$ $\quad \vec{r}(\lambda)=a\cos(\pi\lambda/2)\hat{\imath}+b\,\text{sen}(\pi\lambda/2)\hat{\jmath}+c\lambda\hat{k}$ $\quad \frac{d\vec{r}}{d\lambda}=-\frac{a\pi}{2}\text{sen}(\pi\lambda/2)\hat{\imath}+\frac{b\pi}{2}\cos(\pi\lambda/2)\hat{\jmath}+c\hat{k}$

$$\int_C\vec{a}\cdot d\vec{r}=\int_C(a\cos(\pi\lambda/2)\hat{\imath}+b\,\text{sen}^2(\pi\lambda/2)\hat{\jmath}-c\lambda^2\hat{k})\cdot(-\tfrac{a\pi}{2}\text{sen}(\pi\lambda/2)\hat{\imath}+\tfrac{b\pi}{2}\cos(\pi\lambda/2)\hat{\jmath}+c\hat{k})\,d\lambda=\int_0^1(-\tfrac{a^2\pi}{2}\cos(\pi\lambda/2)\text{sen}(\pi\lambda/2)+\tfrac{b^2\pi}{2}\cos(\pi\lambda/2)\text{sen}^2(\pi\lambda/2)-c^2\lambda^2)\,d\lambda$$

$$=-\frac{a^2\pi}{2}\int_0^1\cos(\pi\lambda/2)\text{sen}(\pi\lambda/2)\,d\lambda+\frac{b^2\pi}{2}\int_0^1\cos(\pi\lambda/2)\text{sen}^2(\pi\lambda/2)\,d\lambda-c^2\int_0^1\lambda^2 d\lambda$$

$$=-\frac{a^2}{2}(\text{sen}^2(\pi\lambda/2)|_0^1)+\frac{b^2}{3}(\text{sen}^3(\pi\lambda/2)|_0^1)-\frac{c^2}{3}(\lambda^3|_0^1)=-\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{3}-\frac{c^2}{3}$$

3) Evalúe la siguiente integral $\oint_C y(4x^2+y^2)dx+x(2x^2+3y^2)dy$ alrededor de la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

Teorema de Green: $\oint_C(Pdx+Qdy)=\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy\rightarrow\oint_C y(4x^2+y^2)dx+x(2x^2+3y^2)dy=\iint_D(6x^2+3y^2-4x^2-3y^2)dA$ $\quad x=au,\ y=bv\rightarrow u^2+v^2\leq 1$

$P=4x^2y+y^3\quad Q=2x^3+3xy^2$

$\frac{\partial P}{\partial y}=4x^2+3y^2\quad\frac{\partial Q}{\partial x}=6x^2+3y^2$

$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}a&0\\0&b\end{vmatrix}=ab$

$u=r\cos\theta\ \ v=r\,\text{sen}\theta$, $dA=rdrd\theta$ $\rightarrow$ $=\iint_{u^2+v^2\leq1}(2a^2u^2)(ab)\,dudv$

$=2a^3b\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3\cos^2\theta\,drd\theta$

$=\frac{1}{2}a^3b\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta=\frac{1}{2}a^3b\int_0^{2\pi}(\frac{1}{2}+\frac{\cos2\theta}{2})d\theta$

$=\frac{1}{4}a^3b(\theta+\frac{1}{2}\text{sen}2\theta|_0^{2\pi})=\frac{\pi a^3b}{2}$

8) Dado el campo vectorial $\vec{a}=[3x^2(y+z)+y^3+z^3]\hat{\imath}+[3y^2(x+z)+x^3+z^3]\hat{\jmath}+[3z^2(x+y)+x^3+y^3]\hat{k}$:

a) Calcule $\nabla\times\vec{a}$:

$\nabla\times\vec{a}=[\partial_y a_z-\partial_z a_y]\hat{\imath}+[\partial_z a_x-\partial_x a_z]\hat{\jmath}+[\partial_x a_y-\partial_y a_x]\hat{k}=[(3z^2+3y^2)-(3y^2+3z^2)]\hat{\imath}+[(3x^2+3z^2)-(3z^2+3x^2)]\hat{\jmath}+[(3y^2+3x^2)-(3x^2+3y^2)]\hat{k}=0\hat{\imath}+0\hat{\jmath}+0\hat{k}$

b) Evalúe la integral $\int_C\vec{a}\cdot d\vec{r}$ a lo largo de cualquier línea que conecte el punto (1,-1,1) con el punto (2,1,2)

Ya que $\nabla\times\vec{a}=0$, el campo es irrotacional y conservativo. Por lo tanto, la integral de línea entre dos puntos es independiente de la trayectoria. Encontremos el potencial escalar $\phi(x,y,z)$ tal que $\nabla\phi=\vec{a}$:

$\frac{\partial\phi(x,y,z)}{\partial x}=a_x\rightarrow\phi(x,y,z)=\int(3x^2(y+z)+y^3+z^3)dx=x^3y+x^3z+xy^3+xz^3+f(y,z)$

$\frac{\partial\phi(x,y,z)}{\partial y}=a_y\rightarrow x^3+3y^2x+\partial_y f(y,z)=3y^2x+3y^2z+x^3+z^3\rightarrow f(y,z)=y^3x+yz^3+g(z)$

$\frac{\partial\phi(x,y,z)}{\partial z}=a_z\rightarrow x^3+3z^2x+3z^2y+\partial_z g(z)=3z^2x+3z^2y+x^3+y^3\rightarrow g(z)=y^3z$

$\rightarrow\phi(x,y,z)=x^3(y+z)+y^3(x+z)+z^3(x+y)$

$\int_{P_1}^{P_2}\vec{a}\cdot d\vec{r}=\phi(P_2)-\phi(P_1)=[2^3(3)+1^3(4)+2^3(3)]-[1^3(0)+(-1)^3(2)+1^3(0)]$

$=52-(-2)=54$

12) Demuestre la validez del Teorema de Gauss:

a) Calculando el flujo del campo vectorial $\vec{a}=\frac{\alpha\vec{r}}{(r^2+a^2)^{3/2}}$ a través de la superficie $|\vec{r}|=\sqrt{3}a$

$\vec{a}$ es un campo radial pues es paralelo a $\vec{r}$, con módulo $=\frac{\alpha}{(r^2+a^2)^{3/2}}$, por lo tanto podemos usar simetría esférica: $\vec{r}=|\vec{r}|\hat{r}=r\hat{r}$

Flujo: $\iint_S\vec{a}\cdot d\vec{S}=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\alpha r}{(r^2+a^2)^{3/2}}(\hat{r}\cdot\hat{r})r^2\text{sen}\theta\,d\theta d\varphi=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\alpha r^3}{(r^2+a^2)^{3/2}}\text{sen}\theta\,d\theta d\varphi=\frac{\alpha r^3}{(r^2+a^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi}(-\cos\theta|_0^{\pi})d\varphi=\frac{2\alpha r^3}{(r^2+a^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi}d\varphi=\frac{4\pi\alpha r^3}{(r^2+a^2)^{3/2}}=\frac{4\pi\alpha(\sqrt{3}a)^3}{(3a^2+a^2)^{3/2}}=\frac{3\sqrt{3}}{2}\pi\alpha$

b) Demostrando que $\nabla\cdot\vec{a}=\frac{3\alpha a^2}{(r^2+a^2)^{5/2}}$ y evaluando la integral de volumen de $\nabla\cdot\vec{a}$ sobre el interior de la esfera $|\vec{r}|=\sqrt{3}a$

Ya que $\nabla\cdot(\vec{r}f(r))=f(r)\nabla\cdot\vec{r}+\vec{r}\cdot\nabla f(r)$

$=f(r)(\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z})+\vec{r}\cdot(f'(r)\hat{u}_r)$

$=3f(r)+f'(r)(\vec{r}\cdot\frac{\vec{r}}{r})$

$=3f(r)+rf'(r)$

módulo de $\vec{a}$

$\rightarrow\nabla\cdot\vec{a}=\nabla\cdot(g(r)\vec{r})=3g(r)+rg'(r)\rightarrow g(r)=\frac{\alpha}{(r^2+a^2)^{3/2}}\rightarrow g'(r)=\frac{-3\alpha r}{(r^2+a^2)^{5/2}}$

$\nabla\cdot\vec{a}=\frac{3\alpha}{(r^2+a^2)^{3/2}}+(\frac{-3\alpha r^2}{(r^2+a^2)^{5/2}})=\frac{3\alpha(r^2+a^2)-3\alpha r^2}{(r^2+a^2)^{5/2}}=\frac{3\alpha a^2}{(r^2+a^2)^{5/2}}$

$$\iiint_V(\nabla\cdot\vec{a})dV=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\ell}\frac{3\alpha a^2}{(r^2+a^2)^{5/2}}r^2\text{sen}\theta\,drd\theta d\varphi=3\alpha a^2\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\underbrace{\int_0^{\ell}\frac{r^2}{(r^2+a^2)^{5/2}}\text{sen}\theta\,dr}\,d\theta d\varphi=3\alpha a^2(\frac{\sqrt{3}}{8a^2})\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\text{sen}\theta\,d\theta d\varphi=\frac{3\sqrt{3}}{8}\alpha\int_0^{2\pi}(-\cos\theta|_0^{\pi})d\varphi=\frac{3\sqrt{3}}{4}\alpha\int_0^{2\pi}d\varphi=\frac{3\sqrt{3}}{2}\pi\alpha$$

$r=a\tan\theta\rightarrow\sqrt{3}a=a\tan\theta\rightarrow\theta=\pi/3$

$dr=a\sec^2\theta\,d\theta$

$a\sec\theta=\sqrt{r^2+a^2}$

$$\int_0^{\ell}\frac{r^2}{(r^2+a^2)^{5/2}}\text{sen}\theta\,dr=\int_0^{\pi/3}\frac{a^2\tan^2\theta}{a^5\sec^5\theta}\cdot a\sec^2\theta\,d\theta=\frac{1}{a^2}\int_0^{\pi/3}\tan^2\theta\cos^3\theta\,d\theta=\frac{1}{a^2}\int_0^{\pi/3}\text{sen}^2\theta\cos\theta\,d\theta=\frac{1}{a^2}(\frac{1}{3}\text{sen}^3\theta|_0^{\pi/3})=\frac{\sqrt{3}}{8a^2}$$