2) Encuentre el plano tangente y la línea normal a la superficie $\varphi = x^2+y^2+z^2=a^2$ en el punto $(0,0,a)$

Vector normal $\rightarrow$ $\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}|\hat{i}\rangle + \frac{\partial\varphi}{\partial y}|\hat{j}\rangle + \frac{\partial\varphi}{\partial z}|\hat{k}\rangle = 2x|\hat{i}\rangle + 2y|\hat{j}\rangle + 2z|\hat{k}\rangle$

$= 2(0)|\hat{i}\rangle + 2(0)|\hat{j}\rangle + 2(a)|\hat{k}\rangle \leftarrow (0,0,a)$

$= 0|\hat{i}\rangle + 0|\hat{j}\rangle + 2a|\hat{k}\rangle$

Línea normal $\rightarrow$ Pasa por $(0,0,a)$ y tiene la dirección de $\nabla\varphi(0,0,a)$: $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=a+2at \rightarrow t\in\mathbb{R} \end{cases}$

Plano tangente (vectores $\perp$ al gradiente): $\nabla\varphi\cdot((x,y,z)-(x_0,y_0,z_0))=0$

$(0|\hat{i}\rangle+0|\hat{j}\rangle+2a|\hat{k}\rangle)\cdot(x|\hat{i}\rangle+y|\hat{j}\rangle+(z-a)|\hat{k}\rangle)=0$

$2a(z-a)=0$

$z-a=0$

$z=a$

5) Una partícula se mueve siguiendo el radio vector $\vec{r}=\vec{a}\cos(wt)+\vec{b}\,\mathrm{sen}(wt)$, donde $\vec{a},\vec{b},w$ son constantes. Demuestre que la fuerza que actúa sobre la partícula es una fuerza central.

$\vec{r}(t)=\vec{a}\cos(wt)+\vec{b}\,\mathrm{sen}(wt) \rightarrow \vec{v}(t)=\frac{d\vec{r}(t)}{dt}=-w\vec{a}\cos(wt)+w\vec{b}\,\mathrm{sen}(wt) \rightarrow \vec{a}(t)=\frac{d\vec{v}(t)}{dt}=-w^2\vec{a}\cos(wt)-w^2\vec{b}\,\mathrm{sen}(wt)=-w^2(\vec{a}\cos(wt)+\vec{b}\,\mathrm{sen}(wt))=-w^2\vec{r}(t)$

$\vec{F}(t)=m\vec{a}(t)=-mw^2\vec{r}(t)$ $\rightarrow$ Esta es una fuerza central pues para todo t, $\vec{F}(t)$ será colineal con el radio vector $\vec{r}(t)$ pues $\vec{F}(t)$ es múltiplo escalar de $\vec{r}(t)$. Otra forma de demostrarlo es calculando el torque respecto al origen:

$\tau(t)=\vec{r}(t)\times\vec{F}(t)=\vec{r}(t)\times(-mw^2\vec{r}(t))=-mw^2(\vec{r}\times\vec{r})=0 \leftarrow \vec{\tau}=0$, $\vec{L}$ (momento angular) $=\vec{r}(t)\times m\vec{v}(t)=\text{cte}.$ $\leftarrow$ Fuerza central!

10) La ecuación de equilibrio hidrostático en simetría esférica es $\nabla P(r)+\rho(r)\nabla\varphi(r)=0$ donde $P(r)$ es la presión, $\rho(r)$ la densidad y (r) el potencial gravitacional. Muestre que las normales a las superficies isóbaras y las normales a las superficies equipotenciales, son paralelas.

Se tiene que, si $f(x,y,z)=\text{cte}$ es una superficie de nivel, entonces $\nabla f(x,y,z)$ es normal a cada punto sobre esa superficie. Así, ∇P será la normal a una superficie isóbara ($P(r)=\text{cte}$) y $\nabla\varphi$ será la normal a una superficie equipotencial ($\varphi(r)=\text{cte}$).

$\nabla P(r)+\rho(r)\nabla\varphi=0 \rightarrow \nabla P(r)=-\rho(r)\nabla\varphi(r)$ $\rightarrow$ ya que $\rho(r)$ es un escalar en cada punto, $\nabla P(r)$ será un múltiplo escalar de $\nabla\varphi(r)$, por lo tanto $\nabla P(r)$ y $\nabla\varphi(r)$ son colineales y $\nabla P(r)\parallel\nabla\varphi(r)$

Otra forma de demostrarlo usando coordenadas esféricas: Supongamos una función escalar $f(r)$ con $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$:

$\nabla f(r)=\frac{df}{dr}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{df}{dr}\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{df}{dr}\frac{\partial r}{\partial z}=\frac{df}{dr}\nabla r$ donde $\nabla r=\nabla(\sqrt{x^2+y^2+z^2})=\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(2x|\hat{i}\rangle+2y|\hat{j}\rangle+2z|\hat{k}\rangle)=\frac{1}{r}(x|\hat{i}\rangle+y|\hat{j}\rangle+z|\hat{k}\rangle)=\hat{u}_r$ Vector unitario radial

Entonces, $\nabla f(r)=f'(r)\,\hat{u}_r$. Ahora revisemos $\nabla P(r)$ y $\nabla\varphi(r)$: $\nabla P(r)=P'(r)\hat{u}_r$ y $\nabla\varphi(r)=\varphi'(r)\hat{u}_r$ $\rightarrow$ ya que $\nabla P(r)$ y $\nabla\varphi(r)$ están alineados con $\hat{u}_r$, $\nabla P(r)$ y $\nabla\varphi(r)$ son paralelos

16) Considere dos sistemas de coordenadas, uno con y otro sin primas: $B^{i'}_{j'}\leftrightarrow B^{i}_{j}$

a) Demuestre que $\Gamma^{i'}_{j'k'}=\alpha^{i'}_{l}\alpha^{m}_{j'}\alpha^{n}_{k'}\Gamma^{l}_{mn}+\alpha^{i'}_{n}\alpha^{m}_{k'}\frac{\partial\alpha^{n}_{j'}}{\partial q^{m}}$

Se tiene que $d_{e_k}e_j\equiv\frac{\partial e_j}{\partial q^k}=\Gamma^{i}_{jk}e_i$. Si ahora consideramos un nuevo sistema de coordenadas $q^{k'}$ con vectores base $e_{j'}=\frac{\partial q^m}{\partial q^{j'}}e_m=\alpha^{m}_{j'}e_m$.

Primero, hallamos $\frac{\partial e_{j'}}{\partial q^{k'}}=\frac{\partial\alpha^{m}_{j'}}{\partial q^{k'}}e_m+\alpha^{m}_{j'}\frac{\partial e_m}{\partial q^{k'}}$

$=\alpha^{n}_{k'}\frac{\partial\alpha^{m}_{j'}}{\partial q^{n}}e_m+\alpha^{m}_{j'}\alpha^{n}_{k'}\frac{\partial e_m}{\partial q^{n}}$

$=\alpha^{n}_{k'}\frac{\partial\alpha^{m}_{j'}}{\partial q^{n}}e_m+\alpha^{m}_{j'}\alpha^{n}_{k'}\Gamma^{l}_{mn}e_l$

Además: $\frac{\partial e_{j'}}{\partial q^{k'}}=\Gamma^{i'}_{j'k'}e_{i'}$

$=\Gamma^{i'}_{j'k'}\alpha^{r}_{i'}e_r$

Por lo tanto: $\Gamma^{i'}_{j'k'}\alpha^{r}_{i'}e_r=\alpha^{n}_{k'}\frac{\partial\alpha^{m}_{j'}}{\partial q^{n}}e_m+\alpha^{m}_{j'}\alpha^{n}_{k'}\Gamma^{l}_{mn}e_l$

$\left(\Gamma^{i'}_{j'k'}\alpha^{r}_{i'}=\alpha^{n}_{k'}\frac{\partial\alpha^{m}_{j'}}{\partial q^{n}}+\alpha^{m}_{j'}\alpha^{n}_{k'}\Gamma^{l}_{mn}\right)\alpha^{i'}_{r}$

$\Gamma^{i'}_{j'k'}=\alpha^{i'}_{l}\alpha^{n}_{k'}\frac{\partial\alpha^{m}_{j'}}{\partial q^{n}}+\alpha^{i'}_{r}\alpha^{m}_{j'}\alpha^{n}_{k'}\Gamma^{l}_{mn}$

Lo cual es equivalente a

$\Gamma^{i'}_{j'k'}=\alpha^{i'}_{l}\alpha^{m}_{j'}\alpha^{n}_{k'}\Gamma^{l}_{mn}+\alpha^{i'}_{n}\alpha^{m}_{k'}\frac{\partial\alpha^{n}_{j'}}{\partial q^{m}}$

b) Ahora muestre que $a^{i'}_{;j'}=\alpha^{i'}_{l}\alpha^{m}_{j'}a^{l}_{;m}$

Para un vector contravariante a^i, su derivada covariante es $a^{i}_{;j}=\frac{\partial a^i}{\partial q^j}+\Gamma^{i}_{mj}a^m$. Por lo tanto, en el sistema primado $a^{i'}_{;j'}=\frac{\partial a^{i'}}{\partial q^{j'}}+\Gamma^{i'}_{m'j'}a^{m'}$ con $a^{i'}=\frac{\partial q^{i'}}{\partial q^{l}}a^l=\alpha^{i'}_{l}a^l$. Entonces se tiene: $a^{i'}_{;j'}=\frac{\partial a^{i'}}{\partial q^{j'}}+\Gamma^{i'}_{m'j'}a^{m'}=\left(\frac{\partial\alpha^{i'}_{l}}{\partial q^{j'}}a^l+\alpha^{i'}_{l}\frac{\partial a^l}{\partial q^{j'}}\right)+\Gamma^{i'}_{m'j'}\alpha^{m'}_{p}a^p$

$=\alpha^{m}_{j'}\frac{\partial\alpha^{i'}_{l}}{\partial q^{m}}a^l+\alpha^{i'}_{l}\alpha^{m}_{j'}\frac{\partial a^l}{\partial q^m}+\underbrace{\Gamma^{i'}_{m'j'}}\alpha^{m'}_{p}a^p$

$\alpha^{s}_{m'}\alpha^{m'}_{p}=\delta^{s}_{p}$

$=\alpha^{m}_{j'}\frac{\partial\alpha^{i'}_{l}}{\partial q^{m}}a^l+\alpha^{i'}_{l}\alpha^{m}_{j'}\frac{\partial a^l}{\partial q^m}+\left(\alpha^{i'}_{r}\alpha^{s}_{m'}\alpha^{t}_{j'}\Gamma^{r}_{st}+\alpha^{i'}_{n}\alpha^{s}_{j'}\frac{\partial\alpha^{n}_{m'}}{\partial q^{s}}\right)\alpha^{m'}_{p}a^p$

$=\alpha^{m}_{j'}\frac{\partial\alpha^{i'}_{l}}{\partial q^{m}}a^l+\alpha^{i'}_{l}\alpha^{m}_{j'}\frac{\partial a^l}{\partial q^m}+\alpha^{i'}_{r}\alpha^{t}_{j'}\Gamma^{r}_{tp}a^p+\alpha^{i'}_{n}\alpha^{s}_{j'}\frac{\partial\alpha^{n}_{m'}}{\partial q^{s}}\alpha^{m'}_{p}a^p$

Ya que $\alpha^{m'}_{p}\alpha^{n}_{m'}=\delta^{n}_{p}\to\frac{\partial(\alpha^{m'}_{p}\alpha^{n}_{m'})}{\partial q^{s}}=0\to\frac{\partial\alpha^{m'}_{p}}{\partial q^{s}}\alpha^{n}_{m'}=-\alpha^{m'}_{p}\frac{\partial\alpha^{n}_{m'}}{\partial q^{s}}$. Así:

$$a^{i'}_{;j'}=-\alpha^{m}_{j'}\alpha^{i'}_{n'}\frac{\partial\alpha^{n'}_{p}}{\partial q^{m}}\alpha^{p}_{l}a^{l}+\alpha^{i'}_{l}\alpha^{m}_{j'}\frac{\partial a^{l}}{\partial q^{m}}+\alpha^{i'}_{r}\alpha^{t}_{j'}\Gamma^{r}_{tp}a^{p}+\alpha^{i'}_{n}\alpha^{s}_{j'}\frac{\partial\alpha^{n}_{m'}}{\partial q^{s}}\alpha^{m'}_{p}a^{p} \quad \leftarrow n\to n',\ s\to m,\ p\to l$$

$$=-\alpha^{m}_{j'}\alpha^{i'}_{n'}\frac{\partial\alpha^{n'}_{p}}{\partial q^{m}}\alpha^{p}_{l}a^{l}+\alpha^{i'}_{l}\alpha^{m}_{j'}\frac{\partial a^{l}}{\partial q^{m}}+\alpha^{i'}_{r}\alpha^{t}_{j'}\Gamma^{r}_{tp}a^{p}+\alpha^{i'}_{n'}\alpha^{m}_{j'}\frac{\partial\alpha^{n'}_{m'}}{\partial q^{m}}\alpha^{m'}_{l}a^{l} \quad \leftarrow \alpha^{n'}_{m'}\alpha^{m'}_{l}=\delta^{n'}_{l}$$

$$=\underbrace{-\alpha^{m}_{j'}\alpha^{i'}_{n'}\frac{\partial\alpha^{n'}_{p}}{\partial q^{m}}\alpha^{p}_{l}a^{l}}_{1}+\alpha^{i'}_{l}\alpha^{m}_{j'}\frac{\partial a^{l}}{\partial q^{m}}+\alpha^{i'}_{r}\alpha^{t}_{j'}\Gamma^{r}_{tp}a^{p}\underbrace{-\alpha^{i'}_{n'}\alpha^{m}_{j'}\alpha^{n'}_{m'}\frac{\partial\alpha^{m'}_{l}}{\partial q^{m}}a^{l}}_{2} \quad \leftarrow 1+2=0$$

$$=\alpha^{i'}_{l}\alpha^{m}_{j'}\frac{\partial a^{l}}{\partial q^{m}}+\alpha^{i'}_{r}\alpha^{t}_{j'}\Gamma^{r}_{tp}a^{p} \quad \leftarrow r\to l,\ t\to m$$

$$=\alpha^{i'}_{l}a^{m}_{j'}\left(\frac{\partial a^{l}}{\partial q^{m}}+\Gamma^{l}_{mp}a^{p}\right)=\alpha^{i'}_{l}a^{m}_{j'}a^{l}_{;m}$$

c) Finalmente demuestre que $a_{i';j'}=\alpha^{l}_{i'}\alpha^{m}_{j'}a_{l;m}$

Para un vector covariante a_i, su derivada covariante es $a_{i;j}=\frac{\partial a_i}{\partial q^j}-\Gamma^{m}_{ij}a_m$. Por lo tanto, en el sistema primado $a_{i';j'}=\frac{\partial a_{i'}}{\partial q^{j'}}-\Gamma^{m'}_{i'j'}a_{m'}$ con $a_{i'}=\frac{\partial q^{l}}{\partial q^{i'}}a_l=\alpha^{l}_{i'}a_l$. Entonces se tiene: $a_{i';j'}=\frac{\partial a_{i'}}{\partial q^{j'}}-\Gamma^{m'}_{i'j'}a_{m'}=\frac{\partial\alpha^{l}_{i'}}{\partial q^{j'}}a_l+\alpha^{l}_{i'}\frac{\partial a_l}{\partial q^{j'}}-\Gamma^{m'}_{i'j'}\alpha^{p}_{m'}a_p$

$$=\alpha^{m}_{j'}\frac{\partial\alpha^{l}_{i'}}{\partial q^{m}}a_l+\alpha^{l}_{i'}\alpha^{m}_{j'}\frac{\partial a_l}{\partial q^{m}}-\left(\alpha^{m'}_{r}\alpha^{s}_{i'}\alpha^{t}_{j'}\Gamma^{r}_{st}+\alpha^{m'}_{n}\alpha^{t}_{j'}\frac{\partial\alpha^{n}_{i'}}{\partial q^{t}}\right)\alpha^{p}_{m'}a_p \quad \leftarrow \alpha^{m'}_{r}a^{p}_{m'}=\delta^{p}_{r}$$

$$=\alpha^{m}_{j'}\frac{\partial\alpha^{l}_{i'}}{\partial q^{m}}a_l+\alpha^{l}_{i'}\alpha^{m}_{j'}\frac{\partial a_l}{\partial q^{m}}-\left(\alpha^{s}_{i'}\alpha^{t}_{j'}\Gamma^{p}_{st}a_p+\underbrace{\alpha^{t}_{j'}\frac{\partial\alpha^{p}_{i'}}{\partial q^{t}}a_p}\right) \quad \leftarrow t\to m,\ p\to l$$

$$=\underbrace{\alpha^{m}_{j'}\frac{\partial\alpha^{l}_{i'}}{\partial q^{m}}a_l}_{1}+\alpha^{l}_{i'}\alpha^{m}_{j'}\frac{\partial a_l}{\partial q^{m}}-\alpha^{s}_{i'}\alpha^{t}_{j'}\Gamma^{p}_{st}a_p\underbrace{-\alpha^{m}_{j'}\frac{\partial\alpha^{l}_{i'}}{\partial q^{m}}a_l}_{2} \quad \to 1+2=0$$

$$=\alpha^{l}_{i'}\alpha^{m}_{j'}\frac{\partial a_l}{\partial q^{m}}-\alpha^{s}_{i'}\alpha^{t}_{j'}\Gamma^{p}_{st}a_p \quad \to s\to l,\ t\to m$$

$$=\alpha^{l}_{i'}\alpha^{m}_{j'}\left(\frac{\partial a_l}{\partial q^{m}}-\Gamma^{p}_{lm}a_p\right)=\alpha^{l}_{i'}\alpha^{m}_{j'}a_{l;m}$$