2) Identifique los ceros, polos y las singularidades esenciales de las siguientes funciones:

a) $f(z)=\frac{z-2}{z^2}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{1-z}\right)$ Singularidades: $z=0 \to \lim_{z\to 0}(z-0)^2\frac{z-2}{z^2}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{1-z}\right)=\lim_{z\to 0}(z-2)\operatorname{sen}\frac{1}{1-z}=-2\operatorname{sen}(1)\neq 0 \to$ Polo de orden 2

$z=1 \to$ no hay un entero $n>0$ para el cual $\lim_{z\to 0}(z-1)^n\frac{z-2}{z^2}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{1-z}\right)$ $\exists \to$ Singularidad esencial

Ceros: $z=2 \to$ ya que, para $z=2$, $z^2=4\neq 0$ y $\operatorname{sen}\frac{1}{1-z}=\operatorname{sen}(-1)\neq 0 \to$ Cero simple

$z=1-\frac{1}{k\pi} \to \operatorname{sen}\frac{1}{1-z}=0 \to \frac{1}{1-z}=k\pi \to z=1-1/k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ y $k\neq 0 \longrightarrow$ Cero simple

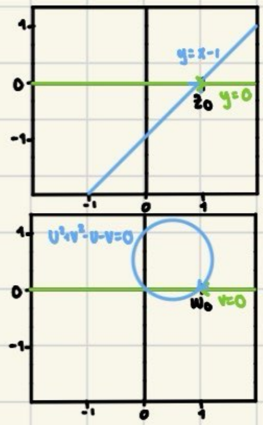
b) $f(z)=e^{1/z}$ Singularidades: $z=0 \to \lim_{z\to 0}e^{1/z}=\lim_{z\to 0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!z^n}\ \nexists \to$ Singularidad esencial aislada

Ceros: No hay pues $e^{1/z}$ nunca se anula

c) $f(z)=\tan(1/z)$ Singularidades: $z=\frac{2}{(2k+1)\pi} \to \tan\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{\operatorname{sen}(1/z)}{\cos(1/z)} \to \cos\left(\frac{1}{z}\right)=0 \to \frac{1}{z}=\frac{\pi}{2}+k\pi \to z=\frac{2}{(2k+1)\pi},\ k\in\mathbb{Z} \to$ Polos simples

Ceros: $z=1/k\pi \to \operatorname{sen}\left(\frac{1}{z}\right)=0 \to \frac{1}{z}=k\pi \to z=1/k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ y $k\neq 0 \to$ Ceros simple

7) Demuestre que bajo la transformación $w=1/z$ las imágenes de las líneas $y=x-1$, $y=0$ son el círculo $u^2+v^2-u-v=0$ y $v=0$, respectivamente. Dibuje las cuatro curvas, determine las direcciones correspondientes a lo largo de ellas y verifique la conformidad del mapeo en el punto $z_0=1$.



$|z|^2=zz^*$, $z=x+iy$ $\to w=\frac{1}{z}=\frac{z^*}{|z|^2}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}$
$\to u=\frac{x}{x^2+y^2} \to u^2+v^2=\frac{x^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{1}{x^2+y^2}$
$\to v=\frac{-y}{x^2+y^2}$ $x=\frac{u}{u^2+v^2}$ $y=\frac{-v}{u^2+v^2}$

$w=\frac{1}{z}=f(z)$ $f'(z)=-\frac{1}{z^2}$ $f'(1)=-1 \leftarrow$ Rotación de 180°

$y=0 \to u=\frac{1}{x}$, $v=0 \to$ La imagen está en el eje real $v=0$ y $u=1/x$ con $x\neq 0$

$y=0$ pasa por $z_0=1$ en $1+0i$, un vector tangente (dirección) es $(1,0)$ hacia la derecha
El vector tangente tras la transformación será $f'(1)\cdot(1,0)=(-1,0)$ hacia la izquierda
$\to 1\to -1$

$y=x-1 \to \frac{-v}{u^2+v^2}=\frac{u}{u^2+v^2}-1$
$-v=u-(u^2+v^2)$
$0=u^2+v^2-u-v$
$\to \frac{1}{2}=(u-\frac{1}{2})^2+(v-\frac{1}{2})^2$

$y=x-1$ pasa por $z_0=1$ en $1+0i$, un vector tangente (dirección) es $(1,1)$, pendiente $+1$ apunta "arriba-derecha"
El vector tangente tras la transformación será $f'(1)\cdot(1,1)=(-1,-1)$ pendiente $+1$ apunta "abajo-izquierda"
$\to 1+i \to -(1+i)$

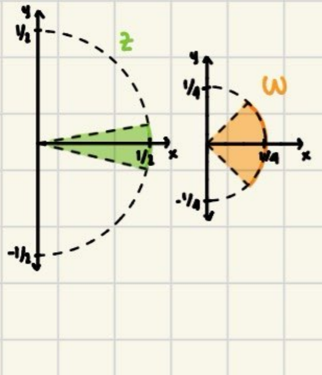
11) Dibuje o grafique la región dada y su imagen bajo las siguientes transformaciones

$w=z^n=(|z|e^{i\theta})^n \to |w|=|z|^n$, $\operatorname{Arg}(w)=n\operatorname{Arg}(z)$ $w=\frac{1}{z}=\frac{z^*}{|z|^2}$

a) $|z|\leq 1/2$, $-\pi/8<\operatorname{Arg}(z)<\pi/8$, $w=z^2$

$\to |w|=|z|^2\leq |1/2|^2=1/4$

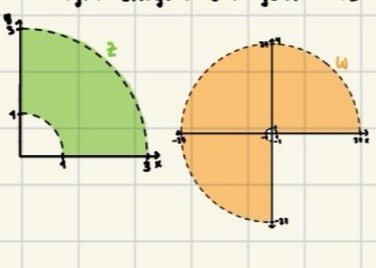
$\to \operatorname{Arg}(w)=2\operatorname{Arg}(z) \to -\frac{\pi}{4}<\operatorname{Arg}(w)<\pi/4$



b) $1<|z|<3$, $0<\operatorname{Arg}(z)<\pi/2$, $w=z^3$

$\to |w|=|z|^3 \to 1<|w|<27$

$\to \operatorname{Arg}(w)=3\operatorname{Arg}(z) \to 0<\operatorname{Arg}(w)<3\pi/2$



c) $2\leq \operatorname{Im}(z)\leq 5$, $w=z^3$

La región es una franja horizontal entre $y=2$, $y=5$

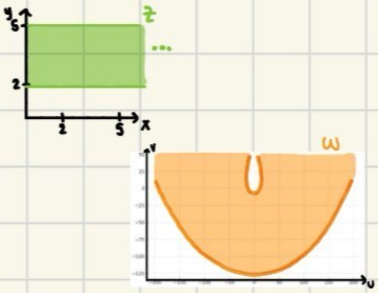
Para $y=c$:

$z=x+ic \to w(x)=x^3+3ix^2c-3xc^2-ic^3$

$u(x)=x^3-3xc^2$ $v(x)=3x^2c-c^3$

$y=2 \to u(x)=x^3-6x^2$ $v(x)=6x^2-8$

$y=5 \to u(x)=x^3-75x^2$ $v(x)=15x^2-125$



d) $|z-\frac{1}{2}|\leq 1/2$, $w=1/z$

La región es un disco centrado en $1/2$ y de radio $1/2$

$|z-\frac{1}{2}|=\frac{1}{2} \to (x-\frac{1}{2})^2+y^2=\frac{1}{4} \to x^2+y^2=x$

$w=\frac{1}{z}=\frac{z^*}{|z|^2}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}$
$\to u=\frac{x}{x^2+y^2}=\frac{x}{x}=1$
$\to v=\frac{-y}{x^2+y^2}=-\frac{y}{x}$

$|z-\frac{1}{2}|\leq\frac{1}{2} \to x^2+y^2\leq x \to u\geq\frac{x}{x}=1$