5) Considere el espacio vectorial de las matrices complejas 2 x 2 hermíticas. Tal y como demostraremos con rigor en la sección 4.3.2.2, una matriz hermítica (o autoadjunta) será igual a su adjunta. Esto es, una matriz será igual a su traspuesta conjugada $(A^{\dagger})^i_j \to (A^{*})^j_i \equiv A^i_j \quad A \leftrightarrow \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix} = A^{\dagger} = \begin{pmatrix} z_1^* & z_3^* \\ z_2^* & z_4^* \end{pmatrix}$ es decir $\begin{cases} z_1^* = z_1 \text{ real,} \\ z_4^* = z_4 \text{ real,} \\ z_2^* = z_3 \text{ complejos} \end{cases}$

Entonces:

a) Muestre que las matrices de Pauli $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ presentadas en los ejercicios de la sección 2.2.4 forman una base para ese espacio vectorial.

En primera medida, comprobemos que $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_0\}$ son L.I: $\alpha\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \alpha+\lambda & \beta-i\gamma \\ \beta+i\gamma & \alpha-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{cases} \alpha+\lambda=0 \\ \beta-i\gamma=0 \\ \beta+i\gamma=0 \\ \alpha-\lambda=0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \alpha+\lambda=0 \\ +\ \alpha-\lambda=0 \\ \hline 2\alpha=0 \end{array} \to \alpha=0, \lambda=0 \qquad \begin{array}{r} \beta-i\gamma=0 \\ +\ \beta+i\gamma=0 \\ \hline 2\beta=0 \end{array} \to \beta=0, \gamma=0$$

Ya que $\alpha=\beta=\gamma=\lambda=0$, estas matrices son L.I. Ahora, demostremos que $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_0\}$ genera el EV de matrices complejas 2x2 hermíticas:

$a_0\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + a_1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + a_3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_2^* & z_4 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a_0+a_3 & a_1-ia_2 \\ a_1+ia_2 & a_0-a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_2^* & z_4 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} z_1=a_0+a_3 \\ z_2=a_1-ia_2 \\ z_2^*=a_1+ia_2 \\ z_4=a_0-a_3 \end{cases}$$

$z_1=a_0+a_3 \to a_0=z_1-a_3$, $z_4=(z_1-a_3)-a_3$, $a_3=\dfrac{z_1-z_4}{2}$, $a_0=\dfrac{z_1+z_4}{2}$

$\to a_1=z_2+ia_2$, $z_2^*=z_2+ia_2+ia_2$, $z_2^*=z_2+2ia_2$, $\dfrac{z_2^*-z_2}{2i}=a_2 \to -\mathrm{Im}(z_2)=a_2$, $\mathrm{Re}(z_2)=a_1$

Ya que $a_k \in \mathbb{R}$ y son únicos, cualquier matriz hermítica 2x2 se puede escribir como combinación lineal de $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$. Además ya que $\dim V=4$ y $\dim\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}=4$, este conjunto forma una base para este espacio vectorial!

b) Compruebe que esa base es ortogonal bajo la definición de producto interno $\langle a|b\rangle \rightleftharpoons \mathrm{Tr}(A^{\dagger}B)$ que introdujimos en los ejercicios de esa misma sección.

Por lo demostrado en a), si se tienen $A, B \in$ hermíticas con $A^{\dagger}=A$ y $B^{\dagger}=B \to \langle A|B\rangle = \mathrm{Tr}(A^{\dagger}B) = \mathrm{Tr}(AB^{\dagger}) = \mathrm{Tr}(AB)$. Así, $\langle \sigma_\alpha|\sigma_\beta\rangle = \mathrm{Tr}(\sigma_\alpha\sigma_\beta)$ ($\alpha, \beta \in \{0,1,2,3\}$). Además, de ejercicios anteriores sabemos que $\sigma_i\sigma_j = \delta^i_j\sigma_0 + i\varepsilon^{ijk}\sigma_k$

Así, tenemos que $Tr(\sigma_1)=Tr(\sigma_2)=Tr(\sigma_3)=0 \rightarrow Tr(\sigma_K)=0 \rightarrow$

$$\sigma_i\sigma_j=\delta^i_j\sigma_0+i\varepsilon^{ijK}\sigma_K$$
$$Tr(\sigma_i\sigma_j)=\delta^i_j Tr(\sigma_0)+i\varepsilon^{ijK}\cancel{Tr(\sigma_K)}^{0}$$
$$Tr(\sigma_i\sigma_j)=2\delta^i_j$$

Así, se tiene que $Tr(\sigma_\alpha\sigma_\beta)=2\delta^\alpha_\beta$

Si $\alpha=\beta=0$, $Tr(\sigma_0\sigma_0)=Tr(I\cdot I)=Tr(I)=2$

Si $\alpha=0$ y $\beta=i\in\{1,2,3\}$, $Tr(\sigma_0\sigma_i)=Tr(\sigma_i)=0$

Si $\alpha=\beta\in\{1,2,3\}$, $Tr(\sigma_\alpha\sigma_\beta)=Tr(\sigma_\alpha^2)=Tr(\sigma_0)=2$

Si $\alpha\neq\beta$, $\alpha,\beta\in\{1,2,3\}$, $Tr(\sigma_\alpha\sigma_\beta)=2\delta^\alpha_\beta=0$

Así, se demuestra que $\{\sigma_0,\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\}$ es ortogonal bajo ese producto interno pues si $\alpha\neq\beta$, $\langle\sigma_\alpha|\sigma_\beta\rangle=0$ y cada σ_α tiene norma $\sqrt{\langle\sigma_\alpha|\sigma_\alpha\rangle}=\sqrt{2}$

c) Explore si se pueden construir subespacios vectoriales de matrices reales e imaginarias puras.

Para un subespacio de matrices reales puras $S_{\mathbb{R}}$, las matrices hermíticas que lo componen tendrán todas sus entradas reales, es decir, z_2 deberá ser real pues $z_2=z_2^*$. De esta manera, si se tiene una matriz M_R de este subespacio, $M_R=a_0\sigma_0+a_1\sigma_1+a_3\sigma_3$ pues $a_2=0$ para que $\sigma_2=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}$ no aporte componentes imaginarios a este subespacio. Así, una base para el subespacio de matrices reales sería $\{\sigma_0,\sigma_1,\sigma_3\}$. Para este subespacio: $\rightarrow \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\in S_{\mathbb{R}}$ pues $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=a_0\sigma_0+a_1\sigma_1+a_3\sigma_3$ con $a_0=a_1=a_3=0$

$\rightarrow$ cerrado bajo suma: suponga $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}a'&b'\\c'&d'\end{pmatrix}\in S_{\mathbb{R}}$, $A+B=\begin{pmatrix}a+a'&c+c'\\b+b'&d+d'\end{pmatrix}\in S_{\mathbb{R}}$

$\in\mathbb{R}$

$\rightarrow$ cerrado bajo mult. por escalar: suponga $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in S_{\mathbb{R}}$ y $\lambda\in\mathbb{R}$, $\lambda A=\begin{pmatrix}\lambda a&\lambda b\\\lambda c&\lambda d\end{pmatrix}\in S_{\mathbb{R}}$

Para un subespacios de matrices imaginarias puras S_I, las matrices hermíticas que lo componen tendrán todas sus entradas puramente imaginarias, por lo cual estas deberán tener 0 en sus diagonales y $it, -it$ con $t\in\mathbb{R}$ en las otras dos entradas, es decir, serían del tipo $M_I=\begin{pmatrix}0&it\\-it&0\end{pmatrix}=t\sigma_2$. En consecuencia, la base para este subespacio sería $\{\sigma_2\}$. Para este subespacio:

$\rightarrow \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\in S_I$ pues $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&it\\-it&0\end{pmatrix}$ con $t=0$

$\rightarrow$ cerrado bajo suma: suponga $A=\begin{pmatrix}0&it_1\\-it_1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&it_2\\-it_2&0\end{pmatrix}\in S_I$, $A+B=t_1\sigma_2+t_2\sigma_2=(t_1+t_2)\sigma_2\in S_I$

$\rightarrow$ cerrado bajo mult. por escalar: suponga $A=\begin{pmatrix}0&it_1\\-it_1&0\end{pmatrix}\in S_I$ y $\lambda\in\mathbb{R}$, $\lambda A=\lambda(t_1\sigma_2)=(\lambda t_1)\sigma_2\in S_I$