ESPACIOS VECTORIALES LINEALES:

I) Grupos, campos y espacios vectoriales:

Sea Pn el conjunto de los polinomios de grado n, en x, con coeficientes reales: $|P_n\rangle \doteq p(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$

a) Demostrar que Pn es un espacio vectorial respecto a la suma de polinomios y la multiplicación de polinomios por un número real

- Cerrado bajo la suma: si se tiene $p_1(x), P_2(x) \in P_n \rightarrow |P_1\rangle+|P_2\rangle=(a_0+a_1x^1+a_2x^2+\ldots+a_nx^n)+(b_0+b_1x^1+b_2x^2+\ldots+b_nx^n)$

$$=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i+\sum_{j=0}^{n}b_jx^j=\sum_{i=0}^{n}(a_i+b_i)x^i=\sum_{i=0}c_ix^i=|P_3\rangle \in P_n$$

- La suma de polinomios es conmutativa: $|P_1\rangle+|P_2\rangle=(a_0+a_1x^1+a_2x^2+\ldots+a_nx^n)+(b_0+b_1x^1+b_2x^2+\ldots+b_nx^n)$

$$=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i+\sum_{j=0}^{n}b_jx^j=\sum_{i=0}^{n}(a_i+b_i)x^i=\sum_{i=0}^{n}(b_i+a_i)x^i=\sum_{j=0}^{n}b_jx^j+\sum_{i=0}^{n}a_ix^i=|P_2\rangle+|P_1\rangle$$

- La suma de polinomios es asociativo: $(|P_1\rangle+|P_2\rangle)+|P_3\rangle=((a_0+a_1x^1+a_2x^2+\ldots+a_nx^n)+(b_0+b_1x^1+b_2x^2+\ldots+b_nx^n))+(c_0+c_1x^1+c_2x^2+\ldots+c_nx^n)$

$$=\left(\sum_{i=0}^{n}a_ix^i+\sum_{j=0}^{n}b_jx^j\right)+\sum_{k=0}^{n}c_kx^k=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i+\sum_{j=0}^{n}b_jx^j+\sum_{k=0}^{n}c_kx^k=\sum_{i=0}a_ix^i+\left(\sum_{j=0}b_jx^j+\sum_{k=0}^{n}c_kx^k\right)=|P_1\rangle+(|P_2\rangle+|P_3\rangle)$$

- Único elemento neutro: $|0\rangle \rightarrow |0\rangle+|P_1\rangle=(0+0x^1+0x^2+\ldots+0x^n)+(a_0+a_1x^1+a_2x^2+\ldots+a_nx^n)=\sum_{i=0}^{n}0x^i+\sum_{j=0}^{n}a_jx^j=\sum_{j=0}^{n}a_jx^j+\sum_{i=0}^{n}0x^i=\sum_{j=0}^{n}a_jx^j=(a_0+a_1x^1+a_2x^2+\ldots+a_nx^n)=|P_1\rangle$

  ↑ $|0\rangle \in P_n$

- Un elemento simétrico para cada elemento: $|P_1\rangle+|-P_1\rangle=(a_0+a_1x^1+a_2x^2+\ldots+a_nx^n)+(-a_0-a_1x^1-a_2x^2-\ldots-a_nx^n)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i+\sum_{j=0}^{n}(-a_jx^j)=|0\rangle$

  ↑ $|-P_1\rangle \in P_n$

- Cerrado bajo el producto por un número real: $\alpha \in \mathbb{R}, P_1(x) \in P_n \rightarrow \alpha|P_1\rangle=\alpha(a_0+a_1x^1+a_2x^2+\ldots+a_nx^n)$

$$=\alpha\sum_{i=0}^{n}a_ix^i=\sum_{i=0}^{n}(\alpha a_i)x^i=(\alpha a_0+\alpha a_1x^1+\alpha a_2x^2+\ldots+\alpha a_nx^n)=\alpha|P_1\rangle \in P_n$$

- $\alpha,\beta \in \mathbb{R}, P_1(x) \in P_n \rightarrow \alpha(\beta|P_1\rangle)=\alpha(\beta a_0+\beta a_1x^1+\ldots+\beta a_nx^n)=\alpha\sum_{i=0}^{n}(\beta a_i)x^i=\alpha\beta\sum_{i=0}^{n}a_ix^i=(\alpha\beta)(a_0+a_1x^1+\ldots+a_nx^n)=(\alpha\beta)|P_1\rangle$

- $\alpha,\beta \in \mathbb{R}, P_1(x) \in P_n \rightarrow (\alpha+\beta)|P_1\rangle=(\alpha+\beta)(a_0+a_1x^1+a_2x^2\ldots+a_nx^n)=(\alpha+\beta)\sum_{i=0}^{n}a_ix^i=\alpha\sum_{i=0}^{n}a_ix^i+\beta\sum_{i=0}^{n}a_ix^i=\sum_{i=0}^{n}(\alpha a_i)x^i+\sum_{i=0}^{n}(\beta a_i)x^i$

$$=(\alpha a_0+\alpha a_1x^1+\alpha a_2x^2+\ldots+\alpha a_nx^n)+(\beta a_0+\beta a_1x^1+\beta a_2x^2+\ldots+\beta a_nx^n)=\alpha|P_1\rangle+\beta|P_1\rangle$$

- $\alpha \in \mathbb{R}, P_1(x), P_2(x) \in P_n \rightarrow \alpha(|P_1\rangle+|P_2\rangle)=\alpha((a_0+a_1x^1+a_2x^2+\ldots+a_nx^n)+(b_0+b_1x^1+b_2x^2+\ldots+b_nx^n))$

$$=\alpha\left(\sum_{i=0}^{n}a_ix^i+\sum_{j=0}^{n}b_jx^j\right)=\alpha\sum_{i=0}^{n}a_ix^i+\alpha\sum_{j=0}^{n}b_jx^j=\sum_{i=0}^{n}(\alpha a_i)x^i+\sum_{j=0}^{n}(\alpha b_j)x^j=\alpha|P_1\rangle+\alpha|P_2\rangle$$

- $1 \in \mathbb{R}, P_1(x) \in P_n \rightarrow 1|P_1\rangle=1(a_0+a_1x^1+a_2x^2+\ldots+a_nx^n)=1\sum_{i=0}^{n}a_ix^i=\sum_{i=0}^{n}((1)a_i)x^i=((1)a_0+(1)a_1x^1+(1)a_2x^2+\ldots+(1)a_nx^n)=a_0+a_1x^1+a_2x^2+\ldots+a_nx^n=|P_1\rangle$

→ P_n es un espacio vectorial (EV) con el campo de reales!

b) Si los coeficientes ai son enteros ¿Pn será un espacio vectorial? ¿Por qué?

Este no será un E.V. sobre $\mathbb{Z}$ porque los enteros no son un campo. Para ser un campo, $\mathbb{Z}$ debería ser un grupo abeliano para la suma y la multiplicación y debe ser distributiva respecto a la suma. Sin embargo, los enteros no son un grupo abeliano respecto a la multiplicación pues, a pesar de tener producto conmutativo y el 1 como elemento neutro, muchos elementos no tienen inversos multiplicativos. Por ejemplo, $2\cdot\frac{1}{2}=1$ pero $\frac{1}{2}\notin\mathbb{Z}$. En consecuencia, si los coeficientes a_i son enteros, P_n no será un E.V.

c) ¿Cuál de los siguientes subconjuntos de Pn es un subespacio vectorial?

I) El polinomio cero y todos los polinomios de grado n - 1. → Denominémoslo $P_{n-1,\{0\}}$ ↗ SI, es un subespacio

1) La instrucción inicial nos indica que $|0\rangle \in P_{n-1,\{0\}}$
2) Cerrado bajo la suma: suponga $|P_1\rangle=a_{n-1}x^{n-1}$ y $|P_2\rangle=b_{n-1}x^{n-1}$: $|P_1\rangle+|P_2\rangle=a_{n-1}x^{n-1}+b_{n-1}x^{n-1}=(a_{n-1}+b_{n-1})x^{n-1}=c_{n-1}x^{n-1}=|P_3\rangle \in P_{n-1,\{0\}}$
3) Cerrado bajo el producto por escalar: suponga $|P_1\rangle=a_{n-1}x^{n-1}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$: $\alpha|P_1\rangle=\alpha(a_{n-1}x^{n-1})=(\alpha a_{n-1})x^{n-1}=\alpha|P_1\rangle \in P_{n-1,\{0\}}$

II) El polinomio cero y todos los polinomios de grado par. → Denominémoslo P_{2n} ↗ SI, es un subespacio

1) La instrucción inicial nos indica que $|0\rangle \in P_{2n}$
2) Cerrado bajo la suma: $|P_1\rangle, |P_2\rangle \in P_{2n} \rightarrow |P_1\rangle+|P_2\rangle=(a_0+a_2x^2+\ldots+a_{2n}x^{2n})+(b_0+b_2x^2+\ldots+b_{2n}x^{2n})=(a_0+b_0)+(a_2+b^2)x^2+\ldots+(a_{2n}+b_{2n})x^{2n} \in P_{2n}$
3) Cerrado bajo el producto por escalar: si $|P_1\rangle \in P_{2n}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$: $\alpha|P_1\rangle=\alpha(a_0+a_2x^2+\ldots+a_{2n}x^{2n})=(\alpha a_0)+(\alpha a_2)x^2+\ldots+(\alpha a_{2n})x^{2n} \in P_{2n}$

III) Todos los polinomios que tienen a x como un factor (grado $n > 1$) $\rightarrow$ Denominémoslo P_x

SI, es un subespacio

1) $|0\rangle \in P_x$ pues $|0\rangle = x \cdot 0$

2) Cerrado bajo la suma: $|p_1\rangle, |p_2\rangle \in P_x \rightarrow |p_1\rangle + |p_2\rangle = x(a_0 + a_1x^1 + \dots + a_nx^n) + x(b_0 + b_1x^1 + \dots + b_nx^n) = x((a_0+b_0) + (a_1+b_1)x^1 + \dots (a_n+b_n)x^n) = |p_3\rangle \in P_x$

Además, ya que para $|p\rangle \in P_x$, $|p\rangle = x|q\rangle \rightarrow p(0) = 0$. Así, si $|p\rangle, |v\rangle \in P_x$, $p(0)=0$, $v(0)=0$, $(p+v)(0) = p(0) + v(0) = 0 \in P_x$

3) Cerrado bajo el producto por escalar: si $|p\rangle \in P_x$ y $\alpha \in \mathbb{R}$: $\alpha|p\rangle = \alpha(x(a_0 + a_1x^1 + \dots + a_nx^n)) = x((\alpha a_0) + (\alpha a_1)x^1 + \dots + (\alpha a_n)x^n) \in P_x$

Además, ya que $|p\rangle \in P_x$ y $p(0)=0$, $\alpha p(0) = \alpha(0) = 0 \in P_x$

IV) Todos los polinomios que tienen a $(x-1)$ como un factor. $\rightarrow$ Denominémoslo $P_{(x-1)}$

Ya que $(x-1)$ es un factor, para $|p\rangle \in P_{(x-1)}$, $p(1) = (1-1)(a_0 + a_1(0) + \dots + a_n(0)) = 0$

SI, es un subespacio

1) $|0\rangle \in P_{(x-1)}$ pues $p(1)=0$, como ya demostramos.

2) Cerrado bajo la suma: $|p_1\rangle, |p_2\rangle \in P_{(x-1)} \rightarrow |p_1\rangle + |p_2\rangle = (x-1)(a_0 + a_1x^1 + \dots + a_nx^n) + (x-1)(b_0 + b_1x^1 + \dots + b_nx^n) = (x-1)((a_0+b_0) + (a_1+b_1)x^1 + \dots (a_n+b_n)x^n) = |p_3\rangle \in P_{(x-1)}$

Además, si $|p\rangle, |v\rangle \in P_{(x-1)}$, $p(1)=0$, $v(1)=0$, $(p+v)(1) = p(1) + v(1) = 0 \in P_{(x-1)}$

3) Cerrado bajo el producto por escalar: si $|p\rangle \in P_{(x-1)}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$: $\alpha|p\rangle = \alpha((x-1)(a_0 + a_1x^1 + \dots + a_nx^n)) = (x-1)((\alpha a_0) + (\alpha a_1)x^1 + \dots + (\alpha a_n)x^n) \in P_{(x-1)}$

Además, ya que $|p\rangle \in P_{(x-1)}$ y $p(1)=0$, $\alpha p(1) = \alpha(0) = 0 \in P_{(x-1)}$

2) Espacios métricos, normados y con producto interno

6) a) Compruebe si los cuaterniones $|a\rangle$ forman un espacio vectorial respecto a esa operación suma y esa multiplicación por escalares, análoga a la de los vectores en R en coordenada cartesianas.

Si $|a\rangle = a^{\alpha}|q_{\alpha}\rangle$, $|b\rangle = b^{\alpha}|q_{\alpha}\rangle$, $|c\rangle = c^{\alpha}|q_{\alpha}\rangle \in$ Cuaterniones y escalares $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, comprobemos las propiedades de un espacio vectorial:

- Cerrado bajo la suma: $|a\rangle + |b\rangle = a^{\alpha}|q_{\alpha}\rangle + b^{\alpha}|q_{\alpha}\rangle = (a^{\alpha}+b^{\alpha})|q_{\alpha}\rangle = c^{\alpha}|q_{\alpha}\rangle = |c\rangle \in$ Cuaterniones
- La suma es conmutativa: $|a\rangle + |b\rangle = a^{\alpha}|q_{\alpha}\rangle + b^{\alpha}|q_{\alpha}\rangle = (a^{\alpha}+b^{\alpha})|q_{\alpha}\rangle = (b^{\alpha}+a^{\alpha})|q_{\alpha}\rangle = b^{\alpha}|q_{\alpha}\rangle + a^{\alpha}|q_{\alpha}\rangle = |b\rangle + |a\rangle$
- La suma es asociativa: $|a\rangle + (|b\rangle + |c\rangle) = a^{\alpha}|q_{\alpha}\rangle + (b^{\alpha}|q_{\alpha}\rangle + c^{\alpha}|q_{\alpha}\rangle) = a^{\alpha}|q_{\alpha}\rangle + b^{\alpha}|q_{\alpha}\rangle + c^{\alpha}|q_{\alpha}\rangle = (a^{\alpha}|q_{\alpha}\rangle + b^{\alpha}|q_{\alpha}\rangle) + c^{\alpha}|q_{\alpha}\rangle = (|a\rangle + |b\rangle) + |c\rangle$
- Único elemento neutro: $|0\rangle = 0^{\alpha}|q_{\alpha}\rangle \in$ Cuaterniones pues $|a\rangle + |0\rangle = a^{\alpha}|q_{\alpha}\rangle + 0^{\alpha}|q_{\alpha}\rangle = (a^{\alpha}+0^{\alpha})|q_{\alpha}\rangle = a^{\alpha}|q_{\alpha}\rangle = |a\rangle$
- Un elemento simétrico para cada elemento: para cada $|a\rangle$ existe un $|-a\rangle = (-a^{\alpha})|q_{\alpha}\rangle$ tal que $|a\rangle + |-a\rangle = a^{\alpha}|q_{\alpha}\rangle + (-a^{\alpha})|q_{\alpha}\rangle = (a^{\alpha}+(-a^{\alpha}))|q_{\alpha}\rangle = 0|q_{\alpha}\rangle = |0\rangle$
- Cerrado bajo el producto por un número real: $\beta|a\rangle = \beta(a^{\alpha}|q_{\alpha}\rangle) = (\beta a^{\alpha})|q_{\alpha}$
- $\beta(\gamma|a\rangle) = \beta(\gamma a^{\alpha}|q_{\alpha}\rangle) = (\beta\gamma)a^{\alpha}|q_{\alpha}\rangle = (\beta\gamma)|a\rangle \in$ Cuaterniones
- $(\beta+\gamma)|a\rangle = (\beta+\gamma)a^{\alpha}|q_{\alpha}\rangle = \beta a^{\alpha}|q_{\alpha}\rangle + \gamma a^{\alpha}|q_{\alpha}\rangle = \beta|a\rangle + \gamma|a\rangle$
- $\beta(|a\rangle + |b\rangle) = \beta(a^{\alpha}|q_{\alpha}\rangle + b^{\alpha}|q_{\alpha}\rangle) = \beta a^{\alpha}|q_{\alpha}\rangle + \beta b^{\alpha}|q_{\alpha}\rangle = \beta|a\rangle + \beta|b\rangle$
- $1|a\rangle = 1(a^{\alpha}|q_{\alpha}\rangle) = ((1)a^{\alpha})|q_{\alpha}\rangle = (a^{\alpha})|q_{\alpha}\rangle = |a\rangle$

→ Los cuaterniones forman un EV sobre $\mathbb{R}$ con la suma y multiplicación por escalares dadas!

b) Dados dos cuaterniones cualesquiera $|b\rangle \equiv (b^0, b)$ y $|r\rangle \equiv (r^0, r)$, y su tabla de multiplicación, muestre que el producto entre esos cuaterniones podrá representarse como $|d\rangle = |b\rangle \odot |r\rangle \to (d^0, d) = (b^0r^0 - b\cdot r,\ r^0 b + b^0 r + b\times r)$ donde $\cdot$ y $\times$ corresponden con los productos escalares y vectoriales tridimensionales de siempre.

Construyamos su tabla de multiplicación:

$\odot$	1	$\lvert b\rangle$	$\lvert r\rangle$	$\lvert d\rangle$
1	1	$\lvert b\rangle$	$\lvert r\rangle$	$\lvert d\rangle$
$\lvert b\rangle$	$\lvert b\rangle$	-1	$\lvert d\rangle$	$-\lvert r\rangle$
$\lvert r\rangle$	$\lvert r\rangle$	$-\lvert d\rangle$	-1	$\lvert b\rangle$
$\lvert d\rangle$	$\lvert d\rangle$	$\lvert r\rangle$	$-\lvert b\rangle$	-1

→ Primero, observe que $|q_j\rangle \odot |q_j\rangle = -1$, es decir, con $i=j$, $|q_i\rangle \odot |q_j\rangle = -1$, un sistema muy parecido a δ^i_j, por lo tanto, diremos, por el momento, que $|q_i\rangle \odot |q_j\rangle = -\delta^i_j |q_0\rangle$

→ Para $i \neq j$, se observa fácilmente que existe un operador antisimétrico, pues $|q_1\rangle \odot |q_2\rangle = |q_3\rangle$, pero $|q_2\rangle \odot |q_1\rangle = -|q_3\rangle$, muy similar al funcionamiento de ε^{ijk}, de manera que diremos que, para $i \neq j$, $|q_i\rangle \odot |q_j\rangle = \varepsilon^{ijk}|q_k\rangle$

Podemos juntar estas dos ideas para describir el producto como $|q_i\rangle \odot |q_j\rangle = -\delta^i_j|q_0\rangle + \varepsilon^{ijk}|q_k\rangle$ pues la operación dependerá de si $i=j \vee i\neq j$

Ahora, resolvemos: $|d\rangle = |b\rangle \odot |r\rangle = (b^0|q_0\rangle + b^i|q_i\rangle) \odot (r^0|q_0\rangle + r^j|q_j\rangle)$

$$d^0|q_0\rangle + d^k|q_k\rangle = b^0r^0 + b^0r^j|q_j\rangle + b^ir^0|q_i\rangle + b^ir^j(|q_i\rangle \odot |q_j\rangle)$$
$$= b^0r^0 + b^0r^j|q_j\rangle + b^ir^0|q_i\rangle + b^ir^j(-\delta^i_j|q_0\rangle + \varepsilon^{ijk}|q_k\rangle)$$

→ $d^0 = b^0r^0 + b^ir^j(-\delta^i_j) = b^0r^0 - b^ir^i = b^0r^0 - b\cdot r$

→ $d = b^0r^k + b^kr^0 + b^ir^j\varepsilon_{ijk} = r^0 b + b^0 r + b\times r$

$|d\rangle = (d^0, d) = (b^0r^0 - b\cdot r,\ r^0b + b^0r + b\times r)$

c) Ahora con índices: dados $|b\rangle = b^{\alpha}|q_{\alpha}\rangle$ y $|r\rangle = r^{\alpha}|q_{\alpha}\rangle$, compruebe si el producto $|d\rangle = |b\rangle \odot |r\rangle$ puede ser siempre escrito de la forma $|d\rangle = a|q_0\rangle + S^{(\alpha j)}\delta^0_{\alpha}|q_j\rangle + A^{[jk]i}b_jr_k|q_i\rangle$, donde a representa un número, $S^{(\alpha j)}\delta^0_{\alpha}$ (recuerde que j,k,l= 1,2,3 y alfa=0, 1,2,3), donde $S^{(ij)}$ indica $S^{ji} = S^{ij}$, que la cantidad S^{ij} es simétrica y $(S^{\alpha j}\delta^0_{\alpha} + S^{j\alpha}\delta^0_{\alpha})|q_j\rangle$ Mientras $A^{[jk]i}$ representa un conjunto de objetos anti simétricos en j, k: $A^{jki} = -A^{kji} \to (A^{jki}b_jr_k - A^{kji}b_jr_k)|q_i\rangle$

Del punto b) obtuvimos que para cualquier $|b\rangle$ y $|r\rangle$, tenemos que $|d\rangle = |b\rangle \odot |r\rangle = (d^0, d) = (b^0r^0 - b\cdot r,\ r^0b + b^0r + b\times r)$

De esto, observemos que obtenemos una parte con solo componentes reales $d^0 = b^0r^0 - b\cdot r$, y que b se compone de una operación simétrica $(b^0r + r^0b)$ y una antisimétrica $(b\times r)$.

al igual que a

$S^{(\alpha j)}\delta^0_{\alpha} = S^j_0$

De c), tenemos $S^{(ij)} \to S^{ij} = S^{ji}$, una operación simétrica entre términos de índices distintos, al igual que r^0b y b^0r. Además, está la operación $A^{[jk]i}$ que es antisimétrica pues $A^{jki} = -A^{kji}$, al igual que $r\times b = -(b\times r)$. Por lo tanto, $|d\rangle = |b\rangle \odot |r\rangle$ siempre podrá ser visto como:

$|d\rangle = \underbrace{a|q_0\rangle}_{\text{parte real}} + \underbrace{S^{(\alpha j)}\delta^0_{\alpha}|q_j\rangle}_{\text{simétrica respecto a 0,j}} + \underbrace{A^{[jk]i}b_jr_k|q_i\rangle}_{\text{Antisimétrica entre } b_jr_k}$

d) Identifique las cantidades a, $S^{(ij)}$ y $A^{[ik]i}$ en términos de las componentes de los cuaterniones. ¿El producto $|d\rangle = |a\rangle \odot |r\rangle$ sera un vector, pseudovector o ninguna? ¿Por qué?

Con base en el análisis desarrollado en c), tenemos:

$a \to b^0 r^0 - b^i r^i = b^0 r^0 - \mathbf{b} \cdot \mathbf{r}$

$S^{(ij)} \to b^0 r^i + b^i r^0 = S^{(0j)}$

$A^{[ik]i} \to \varepsilon^{ijk}$ con $A^{[jk]i} b_j r_k = \varepsilon^{ijk} b_j r_k$

$|d\rangle$ se compone de: $\to d^0 = b^0 r^0 - \mathbf{b} \cdot \mathbf{r} \to$ Componente escalar

$\to \mathbf{d} = \underbrace{b^0 \mathbf{r} + r^0 \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{r}}_{\text{componente vectorial}} \to r^0\mathbf{b} + b^0\mathbf{r}$ es vector pues $r^0(-\mathbf{b}) + b^0(-\mathbf{r}) = -(r^0\mathbf{b} + b^0\mathbf{r})$

$\to \mathbf{b} \times \mathbf{r}$ es pseudovector pues $(-\mathbf{b}) \times (-\mathbf{r}) = \mathbf{b} \times \mathbf{r}$

$\to$ Por lo tanto, $|d\rangle$ no es vector ni pseudovector, es un cuaternión, compuesto por una parte escalar y otra vectorial.

e) Compruebe su las matrices de Pauli y la identidad $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \sigma_0 \equiv I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pueden representar la base de los cuaterniones $\{|q_1\rangle, |q_2\rangle, |q_3\rangle, |q_4\rangle\}$. Seguidamente muestre que matrices complejas 2x2 $|b\rangle \leftrightarrow \begin{pmatrix} z & w \\ -w^* & z^* \end{pmatrix}$ pueden ser consideradas como cuaterniones, donde $z = x + iy$ y $w = a + ib$ son números complejos.

Para verificar que estas matrices pueden representar la base de los cuaterniones, comprobemos si estos cumplen la misma tabla de multiplicación: $|q_0\rangle \odot |q_i\rangle = |q_i\rangle$, $|q_i\rangle \odot |q_j\rangle = -\delta^i_j |q_0\rangle + \varepsilon^{ijk} |q_k\rangle$

$\to$ Note que σ_0 es la identidad, así que $\sigma_0 \sigma_i = \sigma_i \sigma_0 = \sigma_i$, con $i = 1,2,3$

$\to \sigma_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \sigma_0$

$\sigma_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \sigma_0$

$\sigma_3^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \sigma_0$

$\sigma_i^2 = \sigma_0$

$\sigma_i \sigma_j = \delta^i_j I = I$ cuando $i = j$

$\to \sigma_1 \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = i\sigma_3$

$\sigma_2 \sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = i\sigma_1$

$\sigma_2 \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = -i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -i\sigma_3$

$\sigma_i \sigma_j$	σ_0	σ_1	σ_2	σ_3
σ_0	I	σ_1	σ_2	σ_3
σ_1	σ_1	I	$i\sigma_3$	$-i\sigma_2$
σ_2	σ_2	$-i\sigma_3$	I	$i\sigma_1$
σ_3	σ_3	$i\sigma_2$	$-i\sigma_1$	I

Podemos concluir: $\sigma_i \sigma_j = \delta^i_j I + i\varepsilon^{ijk} \sigma_k$

Para que sean la base de los cuaterniones, emplearemos $E_0 = \sigma_0 = I$ y $E_i = -i\sigma_i$, de manera que $E_i E_j = -\delta^i_j E_0 + \varepsilon^{ijk} E_k$

$\to E_0 = I$, $E_i I = I E_i = E_i$

$\to E_i^2 = (-i\sigma_i)(-i\sigma_i) = i^2 \sigma_i^2 = -(\delta^i_i I) = -I = -E_0$

$\to E_i E_j = (-i\sigma_i)(-i\sigma_j) = (-i)^2 \sigma_i \sigma_j = -(\delta^i_j I + i\varepsilon^{ijk}\sigma_k) = -\delta^i_j E_0 + \varepsilon^{ijk}(-i\sigma_k)$

Estas 4 matrices SI son una base de los cuaterniones!

Ahora, demostremos que las matrices $|b\rangle = \begin{pmatrix} z & w \\ -w^* & z^* \end{pmatrix}$ pueden ser consideradas cuaterniones: Considere $M_a = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix}$ y $M_b = \begin{pmatrix} z & w \\ -w^* & z^* \end{pmatrix}$, donde $\alpha = a^0 + ia^1$, $\beta = a^2 + ia^3$, $z = b^0 + ib^1$, $w = b^2 + ib^3$: La idea es demostrar que $M_a M_b = |a\rangle \odot |b\rangle$ para cuaterniones.

$M_a M_b = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z & w \\ -w^* & z^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha z - \beta w^* & \alpha w + \beta z^* \\ -(\alpha w + \beta z^*)^* & (\alpha z - \beta w^*)^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ -\beta'^* & \alpha'^* \end{pmatrix} \leftarrow$ $M_a M_b$ mantiene la misma forma. Ahora comprobemos que α' y β' son cuaterniones:

Recordemos que si tenemos $|a\rangle = a^0 + a^1|q_1\rangle + a^2|q_2\rangle + a^3|q_3\rangle$, $|b\rangle = b^0 + b^1|q_1\rangle + b^2|q_2\rangle + b^3|q_3\rangle$, entonces $|c\rangle = |a\rangle + |b\rangle = c_0 + c_1|q_1\rangle + c_2|q_2\rangle + c_3|q_3\rangle$, donde:

$c^0 = a^0b^0 - (a^1b^1 + a^2b^2 + a^3b^3)$, $c_1 = a^0b^1 + b^0a^1 + (a^2b^3 - a^3b^2)$, $c_2 = a^0b^2 + b^0a^2 + (a^3b^1 - a^1b^3)$, $c_3 = a^0b^3 + b^0a^3 + (a^1b^2 - a^2b^1)$, pues $|c\rangle = (c_0, \mathbf{c}) = (a^0b^0 - \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}, a^0\mathbf{b} + \mathbf{a}b^0 + \mathbf{a}\times\mathbf{b})$

Demostremos que $\alpha' = c^0 + ic^1$ y $\beta' = c^2 + ic^3$

$\to \alpha' = \alpha z - \beta w^* = (a^0 + ia^1)(b^0 + ib^1) - (a^2 + ia^3)(b^2 - ib^3) = (a^0b^0 - a^1b^1 - a^2b^2 - a^3b^3) + i(a^0b^1 + a^1b^0 - a^3b^2 + a^2b^3) = c^0 + ic^1$

$\to \beta' = \alpha w + \beta z^* = (a^0 + ia^1)(b^2 + ib^3) + (a^2 + ia^3)(b^0 - ib^1) = (a^0b^2 - a^1b^3 + a^2b^0 + a^3b^1) + i(a^0b^3 + a^3b^0 + a^1b^1 - a^2b^1) = c^2 + ic^3$

De esta manera, si asociamos a un cuaternion $|a\rangle$ una matriz $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix}$ con la definición dada de α y β, $M_a M_b$ generan los α' y β' hallados previamente, de manera que $M_a M_b = |a\rangle \odot |b\rangle$

f) Muestre que una representación posible para la base de cuaterniones es: la matriz identidad y las matrices reales 4x4 de la forma: $|q_1\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, |q_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, |q_3\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Para demostrar este punto, comprobemos que estas matrices cumplen la tabla de multiplicación de los cuaterniones:

$Q_0 = \begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}$ $Q_1 = \begin{pmatrix} 0&1&0&0 \\ -1&0&0&0 \\ 0&0&0&1 \\ 0&0&-1&0 \end{pmatrix}$ $Q_2 = \begin{pmatrix} 0&0&0&-1 \\ 0&0&-1&0 \\ 0&1&0&0 \\ 1&0&0&0 \end{pmatrix}$ $Q_3 = \begin{pmatrix} 0&0&-1&0 \\ 0&0&0&1 \\ 1&0&0&0 \\ 0&-1&0&0 \end{pmatrix}$ $Q_0Q_0 = \begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} = Q_0$

$Q_0Q_1 = \begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0&1&0&0 \\ -1&0&0&0 \\ 0&0&0&1 \\ 0&0&-1&0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0&1&0&0 \\ -1&0&0&0 \\ 0&0&0&1 \\ 0&0&-1&0 \end{pmatrix} = Q_1$

$Q_2Q_2 = \begin{pmatrix} 0&0&0&-1 \\ 0&0&-1&0 \\ 0&1&0&0 \\ 1&0&0&0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0&0&0&-1 \\ 0&0&-1&0 \\ 0&1&0&0 \\ 1&0&0&0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1&0&0&0 \\ 0&-1&0&0 \\ 0&0&-1&0 \\ 0&0&0&-1 \end{pmatrix} = -Q_0$

$Q_3Q_3 = \begin{pmatrix} 0&0&-1&0 \\ 0&0&0&1 \\ 1&0&0&0 \\ 0&-1&0&0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0&0&-1&0 \\ 0&0&0&1 \\ 1&0&0&0 \\ 0&-1&0&0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1&0&0&0 \\ 0&-1&0&0 \\ 0&0&-1&0 \\ 0&0&0&-1 \end{pmatrix} = -Q_0$

$Q_0Q_2 = \begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0&0&0&-1 \\ 0&0&-1&0 \\ 0&1&0&0 \\ 1&0&0&0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0&0&0&-1 \\ 0&0&-1&0 \\ 0&1&0&0 \\ 1&0&0&0 \end{pmatrix} = Q_2$

$Q_1Q_2 = \begin{pmatrix} 0&1&0&0 \\ -1&0&0&0 \\ 0&0&0&1 \\ 0&0&-1&0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0&0&0&-1 \\ 0&0&-1&0 \\ 0&1&0&0 \\ 1&0&0&0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0&0&-1&0 \\ 0&0&0&1 \\ 1&0&0&0 \\ 0&-1&0&0 \end{pmatrix} = Q_3 = -Q_2Q_1 = \begin{pmatrix} 0&0&0&1 \\ 0&0&1&0 \\ 0&-1&0&0 \\ -1&0&0&0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0&1&0&0 \\ -1&0&0&0 \\ 0&0&0&1 \\ 0&0&-1&0 \end{pmatrix}$

$Q_0Q_3 = \begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0&0&-1&0 \\ 0&0&0&1 \\ 1&0&0&0 \\ 0&-1&0&0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0&0&-1&0 \\ 0&0&0&1 \\ 1&0&0&0 \\ 0&-1&0&0 \end{pmatrix} = Q_3$

$Q_1Q_3 = \begin{pmatrix} 0&1&0&0 \\ -1&0&0&0 \\ 0&0&0&1 \\ 0&0&-1&0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0&0&-1&0 \\ 0&0&0&1 \\ 1&0&0&0 \\ 0&-1&0&0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0&0&0&1 \\ 0&0&1&0 \\ 0&-1&0&0 \\ -1&0&0&0 \end{pmatrix} = -Q_2 = -Q_3Q_1 = \begin{pmatrix} 0&0&1&0 \\ 0&0&0&-1 \\ -1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0&1&0&0 \\ -1&0&0&0 \\ 0&0&0&1 \\ 0&0&-1&0 \end{pmatrix}$

[illegible] $\begin{pmatrix} 0&1&0&0 \\ -1&0&0&0 \\ 0&0&0&1 \\ 0&0&-1&0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0&1&0&0 \\ -1&0&0&0 \\ 0&0&0&1 \\ 0&0&-1&0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1&0&0&0 \\ 0&-1&0&0 \\ 0&0&-1&0 \\ 0&0&0&-1 \end{pmatrix} = -Q_0$

$Q_2Q_3 = \begin{pmatrix} 0&0&0&-1 \\ 0&0&-1&0 \\ 0&1&0&0 \\ 1&0&0&0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0&0&-1&0 \\ 0&0&0&1 \\ 1&0&0&0 \\ 0&-1&0&0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0&1&0&0 \\ -1&0&0&0 \\ 0&0&0&1 \\ 0&0&-1&0 \end{pmatrix} = Q_1 = -Q_3Q_2 = \begin{pmatrix} 0&0&1&0 \\ 0&0&0&-1 \\ -1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0&0&0&-1 \\ 0&0&-1&0 \\ 0&1&0&0 \\ 1&0&0&0 \end{pmatrix}$

Así, se observa que Q_1, Q_2, Q_3, Q_0 representan una posible base para los cuaterniones.

g) Compruebe si la siguiente es una buena definición de producto interno: $\widetilde{\langle a|b\rangle} = |a\rangle^{*} \odot |b\rangle$

Llevemos a cabo la operación: Suponga $|a\rangle = (a^0, a)$ y $|b\rangle = (b^0, b) \rightarrow \widetilde{\langle a|b\rangle} = |a\rangle^{*} \odot |b\rangle = (a^0|q_0\rangle - a^i|q_i\rangle) \odot (b^0|q_0\rangle + b^j|q_j\rangle)$

$= a^0b^0 + a^0b^j|q_j\rangle - a^ib^0|q_i\rangle - a^ib^j(|q_i\rangle \odot |q_j\rangle)$

$= a^0b^0 + a^0b^j|q_j\rangle - a^ib^0|q_i\rangle - a^ib^j(-\delta^i_j|q_0\rangle + \varepsilon^{ijk}|q_k\rangle)$

$= (\underbrace{a^0b^0 + a\cdot b}_{\text{Escalar}}, \underbrace{a^0 b - a b^0 - a\times b}_{\text{vectorial}})$

Se observa que $\widetilde{\langle a|b\rangle}$ dará como resultado un cuaternión. Ya que un producto interno debe cumplir $\langle\cdot,\cdot\rangle : V\times V \rightarrow \mathbb{R}$, $\widetilde{\langle a|b\rangle} = |a\rangle^{*} \odot |b\rangle$ no cumple las condiciones para ser producto interno pues no da un número real. Este producto serviría si se dijera que, por ejemplo, el producto interno fuera solo la parte escalar de $\widetilde{\langle a|b\rangle}$, es decir, $a^0b^0 + a\cdot b$

h) Modifique un poco la definición anterior de tal forma que: $\langle a|b\rangle = \frac{1}{2}[\widetilde{\langle a|b\rangle} - |q_1\rangle \odot \widetilde{\langle a|b\rangle} \odot |q_1\rangle]$ y compruebe si esta definición compleja de producto interno cumple con todas las propiedades. Nótese que un cuaternión de la forma $|f\rangle = f^0 + f^1|q_1\rangle$ es un número complejo convencional.

Desarrollemos el nuevo producto interno: $\langle a|b\rangle = \frac{1}{2}[\widetilde{\langle a|b\rangle} - |q_1\rangle \odot \widetilde{\langle a|b\rangle} \odot |q_1\rangle] \rightarrow$ Tomemos $\widetilde{\langle a|b\rangle} = |g\rangle = g^0|q_0\rangle + g^1|q_1\rangle + g^2|q_2\rangle + g^3|q_3\rangle$

$\hookrightarrow g^0 = a^0b^0 + a\cdot b$

$\hookrightarrow g^k = a^0b^k - a^kb^0 - a\times b \; (k=1,2,3)$

$\rightarrow |q_1\rangle \odot \widetilde{\langle a|b\rangle} = |q_1\rangle \odot |g\rangle$

$= g^0(q_1 \odot q_0) + g^1(q_1 \odot q_1) + g^2(q_1 \odot q_2) + g^3(q_1 \odot q_3)$

$= g^0|q_1\rangle - g^1|q_0\rangle + g^2|q_3\rangle - g^3|q_2\rangle$

$\rightarrow |q_1\rangle \odot \widetilde{\langle a|b\rangle} \odot |q_1\rangle = g^0(q_1 \odot q_1) - g^1(q_0 \odot q_1) + g^2(q_3 \odot q_1) - g^3(q_2 \odot q_1)$

$= -g^0|q_0\rangle - g^1|q_1\rangle + g^2|q_2\rangle + g^3|q_3\rangle$

$\langle a|b\rangle = \frac{1}{2}[(g^0|q_0\rangle + g^1|q_1\rangle + g^2|q_2\rangle + g^3|q_3\rangle) - (-g^0|q_0\rangle - g^1|q_1\rangle + g^2|q_2\rangle + g^3|q_3\rangle)$

$= \frac{1}{2}[2g^0|q_0\rangle + 2g^1|q_1\rangle]$

$= g^0|q_0\rangle + g^1|q_1\rangle$

$= (a^0b^0 + a\cdot b)|q_0\rangle + (a^0b^1 - a^1b^0 - (a^2b^3 - a^3b^2))|q_1\rangle$

$\rightarrow$ ¿Cumple con las propiedades?

1) $\langle a|a\rangle = (a^0a^0 + a\cdot a)|q_0\rangle + (a^0a - aa^0 - (a^2a^3 - a^3a^2))|q_1\rangle$

$= (a^0)^2 + \|a\|^2 \geq 0$, y $\langle a|a\rangle = 0$ si $|a\rangle \equiv |0\rangle$

2) $\langle a|b\rangle = (a^0b^0 + a\cdot b)|q_0\rangle + (a^0b^1 - a^1b^0 - (a^2b^3 - a^3b^2))|q_1\rangle$

$\langle b|a\rangle^{*} = (b^0a^0 + b\cdot a)|q_0\rangle - (b^0a^1 - b^1a^0 - (b^2a^3 - b^3a^2))|q_1\rangle$

$= (a^0b^0 + a\cdot b)|q_0\rangle + (a^0b^1 - a^1b^0 - (a^2b^3 - a^3b^2))|q_1\rangle$

$= \langle a|b\rangle$

3) $\langle a|\alpha b + \beta c\rangle = \rightarrow \alpha b + \beta c = (z|q_0\rangle + w|q_1\rangle)(b^0|q_0\rangle + b^1|q_1\rangle + b^2|q_2\rangle + b_3|q_3\rangle) + (x|q_0\rangle + y|q_1\rangle)(c^0|q_0\rangle + c^1|q_1\rangle + c^2|q_2\rangle + c_3|q_3\rangle)$

$\alpha = z|q_0\rangle + w|q_1\rangle$

$\beta = x|q_0\rangle + y|q_1\rangle$

$= zb^0|q_0\rangle + zb^1|q_1\rangle + zb^2|q_2\rangle + zb^3|q_3\rangle + wb^0|q_1\rangle - wb^1|q_0\rangle + wb^2|q_3\rangle - wb^3|q_2\rangle$

$+ xc^0|q_0\rangle + xc^1|q_1\rangle + xc^2|q_2\rangle + xc^3|q_3\rangle + yc^0|q_1\rangle - yc^1|q_0\rangle + yc^2|q_3\rangle - yc^3|q_2\rangle$

$= (zb^0 - zb^1 + xc^0 - yc^1)|q_0\rangle + (zb^1 + wb^0 + xc^1 + yc^0)|q_1\rangle + (zb^2 - wb^3 + xc^2 - yc^3)|q_2\rangle + (zb^3 + wb^2 + xc^3 + yc^2)|q_3\rangle$

$\langle a|\alpha b + \beta c\rangle = (a^0zb^0 - a^0zb^1 + a^0xc^0 - a^0yc^1 + a^1zb^1 + a^1wb^0 + a^1xc^1 + a^1yc^0 + a^2zb^2 - a^2wb^3 + a^2xc^2 - a^2yc^3 + a^3zb^3 + a^3wb^2 + a^3xc^3 + a^3yc^2)|q_0\rangle$

$+ ((a^0zb^1 + a^0wb^0 + a^0xc^1 + a^0yc^0) - (a^1zb^0 - a^1zb^1 + a^1xc^0 - a^1yc^1) - ((a^2zb^3 + a^2wb^2 + a^2xc^3 + a^2yc^2) - (a^3zb^2 - a^3wb^3 + a^3xc^2 - a^3yc^3)))|q_1\rangle$

$= (za^0b^0 + za^1b^1 + za^2b^2 + za^3b^3)|q_0\rangle + (za^0b^1 - za^1b^0 - (za^2b^3 - za^3b^2))|q_1\rangle + (wa^0b^0 + wa^1b^1 + wa^2b^2 + wa^3b^3)|q_1\rangle - (wa^0b^1 - wa^1b^0 - (wa^2b^3 - wa^3b^2))|q_0\rangle$

$+ (xa^0c^0 + xa^1c^1 + xa^2b^2 + xa^3b^3)|q_0\rangle + (xa^0c^1 - xa^1c^0 - (xa^2c^3 - xa^3c^2))|q_1\rangle + (ya^0c^0 + ya^1c^1 + ya^2c^2 + ya^3c^3)|q_1\rangle - (ya^0c^1 - ya^1c^0 - (ya^2c^3 - ya^3c^2))|q_0\rangle$

$= (z|q_0\rangle + w|q_1\rangle)((a^0b^0 + a^1b^1 + a^2b^2 + a^3b^3)|q_0\rangle + (a^0b^1 - a^1b^0 - (a^2b^3 - a^3b^2))|q_1\rangle)$

$+ (x|q_0\rangle + y|q_1\rangle)((a^0c^0 + a^1c^1 + a^2c^2 + a^3c^3)|q_0\rangle + (a^0c^1 - a^1c^0 - (a^2c^3 - a^3c^2))|q_1\rangle)$

$= \alpha\langle a|b\rangle + \beta\langle a|c\rangle$

4) $\langle \alpha b + \beta c|a\rangle = \rightarrow \alpha b + \beta c = (zb^0 - zb^1 + xc^0 - yc^1)|q_0\rangle + (zb^1 + wb^0 + xc^1 + yc^0)|q_1\rangle + (zb^2 - wb^3 + xc^2 - yc^3)|q_2\rangle + (zb^3 + wb^2 + xc^3 + yc^2)|q_3\rangle$

$\langle \alpha b + \beta c|a\rangle = (zb^0a^0 - zb^1a^0 + xc^0a^0 - yc^1a^0 + zb^1a^1 + wb^0a^1 + xc^1a^1 + yc^0a^1 + zb^2a^2 - wb^3a^2 + xc^2a^2 - yc^3a^2 + zb^3a^3 + wb^2a^3 + xc^3a^3 + yc^2a^3)|q_0\rangle$

$+ ((zb^0a^1 - zb^1a^1 + xc^0a^1 - yc^1a^1) - (zb^1a^0 + wb^0a^0 + xc^1a^0 + yc^0a^0) - ((zb^2a^3 - wb^3a^3 + xc^2a^3 - yc^3a^3) - (zb^3a^2 + wb^2a^2 + xc^3a^2 + yc^2a^2)))|q_1\rangle$

$= (zb^0a^0 + zb^1a^1 + zb^2a^2 + zb^3a^3)|q_0\rangle + (zb^0a^1 - zb^1a^0 - zb^2a^3 + zb^3a^2)|q_1\rangle + (-wb^0a^0 - wb^1a^1 - wb^2a^2 - wb^3a^3)|q_1\rangle + (wb^0a^1 - wb^1a^0 - wb^2a^3 + wb^3a^2)|q_0\rangle$

$+ (xc^0a^0 + xc^1a^1 + xc^2a^2 + xc^3a^3)|q_0\rangle + (xc^0a^1 - xc^1a^0 - xc^2a^3 + xc^3a^2)|q_1\rangle + (-yc^0a^0 - yc^1a^1 - yc^2a^2 - yc^3a^3)|q_1\rangle + (yc^0a^1 - yc^1a^0 - yc^2a^3 + yc^3a^2)|q_0\rangle$

$= (z|q_0\rangle - w|q_1\rangle)((b^0a^0 + b^1a^1 + b^2a^2 + b^3a^3)|q_0\rangle + (b^0a^1 - b^1a^0 - (b^2a^3 - b^3a^2))|q_1\rangle)$

$+ (x|q_0\rangle - y|q_1\rangle)((c^0a^0 + c^1a^1 + c^2a^2 + c^3a^3)|q_0\rangle + (c^0a^1 - c^1a^0 - (c^2a^3 - c^3a^2))|q_1\rangle)$

$= \alpha^{*}\langle b|a\rangle + \beta^{*}\langle c|a\rangle$

5) $\langle a|0\rangle = (a^0 0 + a\cdot 0)|q_0\rangle + (a^0 0 - a 0^0 - (a^2 0^3 - a^3 0^2))|q_1\rangle = (0^0 a + 0\cdot a)|q_0\rangle + (0^0 a - 0 a^0 - (0^2 a^3 - 0^3 a^2))|q_1\rangle = \langle 0|a\rangle = 0$

→ Este producto interno cumple con las propiedades y da como resultado un número complejo convencional

i) Compruebe si la siguiente es una buena definición de norma para los cuaterniones: $n(|b\rangle) = \||a\rangle\| = \sqrt{\langle a|a\rangle} = \sqrt{|a\rangle^{*} \odot |a\rangle}$

$n(|a\rangle) = \||a\rangle\| = \sqrt{\langle a|a\rangle} = \sqrt{|a\rangle^{*} \odot |a\rangle} = \sqrt{(a^0a^0 + a\cdot a)|q_0\rangle + (a^0 a - a a^0 - (a^2a^3 - a^3a^2))|q_1\rangle} = \sqrt{(a^0)^2 + \|a\|^2}$

¿Cumplirá las propiedades de la norma? $N: V \to \mathbb{R}$ ✓

1) $\||a\rangle\| = \sqrt{(a^0)^2 + \|a\|^2} \geq 0$, si $\||a\rangle\| = 0 \Rightarrow |a\rangle \equiv |0\rangle$

2) $\|\alpha|a\rangle\| = \sqrt{(\alpha^2a^0a^0 + \alpha^2 a\cdot a)|q_0\rangle + (\alpha^2a^0a - \alpha^2 a a^0 - (\alpha^2a^2a^3 - \alpha^2a^3a^2))|q_1\rangle} = \sqrt{\alpha^2((a^0a^0 + a\cdot a)|q_0\rangle + (a^0a - aa^0 - (a^2a^3 - a^3a^2))|q_1\rangle)}$

$= \sqrt{\alpha^2((a^0)^2 + \|a\|^2)} = |\alpha|\||a\rangle\|$

3) ¿$\||a\rangle + |b\rangle\| \leq \||a\rangle\| + \||b\rangle\|$? → $\||a\rangle + |b\rangle\|^2 = \langle a+b|a+b\rangle = \||a\rangle\|^2 + \langle a|b\rangle + \langle b|a\rangle + \||b\rangle\|^2$

$= \||a\rangle\|^2 + \langle a|b\rangle + \langle a|b\rangle^{*} + \||b\rangle\|^2$

$= \||a\rangle\|^2 + \||b\rangle\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle a|b\rangle$

$\leq \||a\rangle\|^2 + \||b\rangle\|^2 + 2\||a\rangle\|\,\||b\rangle\|$

$= (\||a\rangle\| + \||b\rangle\|)^2$

$\||a\rangle\| + \||b\rangle\| \leq \||a\rangle\| + \||b\rangle\|$

Aplicamos Cachy-Schwarz:
$\|\langle a|b\rangle\| \leq \||a\rangle\|\,\||b\rangle\|$
$\|\langle a|b\rangle\|^2 \leq \langle a|a\rangle\langle b|b\rangle$

→ ya que se cumplen las propiedades, esta es una buena definición de norma para cuaterniones.

j) Compruebe si un cuaternión definido por: $|\bar{a}\rangle = \frac{|a\rangle^{*}}{\||a\rangle\|^2}$ puede ser considerado como el inverso o elemento simétrico de $|a\rangle$ respecto a la multiplicación $\odot$

$|\bar{a}\rangle \odot |a\rangle = \frac{|a\rangle^{*}}{\||a\rangle\|^2} \odot |a\rangle = \frac{1}{\||a\rangle\|^2}(|a\rangle^{*} \odot |a\rangle) = \frac{1}{\||a\rangle\|^2}((a^0)^2 + \|a\|^2)|q_0\rangle = \frac{1}{\||a\rangle\|^2}\||a\rangle\|^2|q_0\rangle = |q_0\rangle$

$|a\rangle \odot |\bar{a}\rangle = |a\rangle \odot \frac{|a\rangle^{*}}{\||a\rangle\|^2} = (|a\rangle \odot |a\rangle^{*})\frac{1}{\||a\rangle\|^2} = ((a^0)^2 + \|a\|^2)|q_0\rangle\frac{1}{\||a\rangle\|^2} = \||a\rangle\|^2|q_0\rangle\frac{1}{\||a\rangle\|^2} = |q_0\rangle$

$|\bar{a}\rangle$ puede ser considerado como el inverso o elemento simétrico de $|a\rangle$ respecto a $\odot$

k) Compruebe si los cuaterniones $|a\rangle$ forman un grupo respecto a la operación multiplicación $\odot$. Construya la tabla de multiplicación para el grupo de cuaterniones.

• Cerrada respecto a $\odot$: para $|a\rangle = (a^0, a)$, $|b\rangle = (b^0, b) \in$ cuaterniones, $|a\rangle \odot |b\rangle = (a^0|q_0\rangle + a^i|q_i\rangle) \odot (b^0|q_0\rangle + b^j|q_j\rangle)$

$= a^0b^0 + a^0b^j|q_j\rangle + a^ib^0|q_i\rangle + a^ib^j(|q_i\rangle \odot |q_j\rangle)$

$= a^0b^0 + a^0b^j|q_j\rangle + a^ib^0|q_i\rangle + a^ib^j(-\delta^i_j|q_0\rangle + \varepsilon^{ijk}|q_k\rangle)$

$= (a^0b^0 - a\cdot b, a^0b + b^0a + a\times b) = (c^0, c) = |c\rangle \in$ cuaterniones

• Asociativa respecto a $\odot$: $(a\odot b)\odot c$ → Para demostrar esta propiedad, retomemos el punto e) con $|q_0\rangle = E_0 = I$ y $|q_i\rangle = E_i = -\sigma_i$.
Tomando $M_a = (a^0 I - i a^i\sigma_i)$, $M_b = (b^0 I - i b^j\sigma_j)$ como matrices 2x2 con las operaciones indicadas.

$M_aM_b = (a^0 I - i a^i\sigma_i)(b^0 I - i b^j\sigma_j)$

$= (a^0b^0 I^2 - i a^0b^j\sigma^j - i b^0a^i\sigma^i - (a^i\sigma^i)(b^j\sigma^j))$

$= (a^0b^0 - a^ib^i)I - i(a^0b^k + a^kb^0 + \varepsilon^{ijk}a^ib^j)\sigma_k$

$(a^i\sigma^i)(b^j\sigma^j) = a^ib^j\sigma^i\sigma^j$

$= a^ib^j(\delta^i_j I + i\varepsilon^{ijk}\sigma^k)$

$= a^ib^i + i(\varepsilon^{ijk}a^ib^j)\sigma^k$

↑ Lo cual coincide con $|a\rangle \odot |b\rangle = (a^0b^0 - a\cdot b, a^0b + ab^0 + a\times b)$

→ Por lo tanto, $M_aM_b = |a\rangle \odot |b\rangle$. Ahora, si $|a\rangle, |b\rangle, |c\rangle \in$ cuaterniones: $(|a\rangle \odot |b\rangle)\odot c = (M_aM_b)M_c = M_aM_bM_c = M_a(M_bM_c) = |a\rangle \odot (|b\rangle \odot |c\rangle)$

• Existe un (1) elemento neutro: en este caso, $|q_0\rangle$ es el elemento neutro pues: $|q_0\rangle \odot |a\rangle = (1|q_0\rangle + 0^i|q_i\rangle) \odot (a^0|q_0\rangle + a^j|q_j\rangle)$

$= a^0|q_0\rangle + a^j|q_j\rangle + 0^i a^0|q_i\rangle + 0^i a^j(|q_i\rangle \odot |q_j\rangle)$

$= |a\rangle \odot |q_0\rangle = |a\rangle$

• Existe un elemento inverso: para todo $|a\rangle \neq 0$, existe un $|\bar{a}\rangle = \frac{|a\rangle^{*}}{\||a\rangle\|^2}$, tal que:

$|\bar{a}\rangle \odot |a\rangle = \frac{|a\rangle^{*}}{\||a\rangle\|^2} \odot |a\rangle = \frac{1}{\||a\rangle\|^2}(|a\rangle^{*} \odot |a\rangle) = \frac{1}{\||a\rangle\|^2}((a^0)^2 + \|a\|^2)|q_0\rangle = \frac{1}{\||a\rangle\|^2}\||a\rangle\|^2|q_0\rangle = |a\rangle \odot \frac{|a\rangle^{*}}{\||a\rangle\|^2} = |a\rangle \odot |\bar{a}\rangle = |q_0\rangle$

→ Así, los cuaterniones $|a\rangle$ forman un grupo respecto a la multiplicación $\odot$

1) Los vectores en R3 en coordenadas cartesianas $|v\rangle$ pueden ser representados como cuaterniones, donde la parte escalar es nula $v^0=0 \to |v\rangle = v^i|q_i\rangle$. Compruebe si el siguiente producto conserva la norma: $|v'\rangle = |\bar{a}\rangle \odot |v\rangle \odot |a\rangle$, esto es: $\||v'\rangle\|^2 = (v^{1'})^2+(v^{2'})^2+(v^{3'})^2 \equiv (v^1)^2+(v^2)^2+(v^3)^2 = \||v\rangle\|^2$

Verifiquemos si $\||v'\rangle\|^2 = \||v\rangle\|^2$:

$$\||v'\rangle\|^2 = \||\bar{a}\rangle \odot |v\rangle \odot |a\rangle\|^2 = (|\bar{a}\rangle \odot |v\rangle \odot |a\rangle)^* \odot (|\bar{a}\rangle \odot |v\rangle \odot |a\rangle)$$

$$= \left(\frac{|a\rangle^*}{\||a\rangle\|^2} \odot |v\rangle \odot |a\rangle\right)^* \odot \left(\frac{|a\rangle^*}{\||a\rangle\|^2} \odot |v\rangle \odot |a\rangle\right)$$

$$= \left(\frac{|a\rangle}{\||a\rangle\|^2} \odot |v\rangle^* \odot |a\rangle^*\right) \odot \left(\frac{|a\rangle^*}{\||a\rangle\|^2} \odot |v\rangle \odot |a\rangle\right)$$

$$\to \frac{1}{\||a\rangle\|^2}|a\rangle^* \odot |v\rangle = \frac{1}{\||a\rangle\|^2}(a^i v^i,\ a^0 v^i - \varepsilon^{ijk} a^j v^k) = (d^0, d) = |d\rangle$$

$$\to |d\rangle \odot |a\rangle = \left(a^0 a^i v^i - [(a^0 v^i - \varepsilon^{ijk} a^j v^k)^I a_I]\right)|q_0\rangle + \left((a^i v^i)^k a_k + a^0[a^0 v - \varepsilon^{ijk} a^j v^k] + [a^0 v - a\times v]\times a\right)|q_i\rangle$$

$$= (0)|q_0\rangle + \left((a^i v^i) a_k + \|a^0\|^2 v - (a\times v)a^0 + a^0(v\times a) - a\times v\times a\right)|q_i\rangle$$

$$= \left(0,\ (a^i v^i) a_k + \|a^0\|^2 v - (a\times v)a^0 + a^0(v\times a) - (\|a\|^2 v - a[v\cdot a])\right)|q_j\rangle$$

$$= \left(0,\ v((a^0)^2 + \|a\|^2) + 2[(a^i v^i) a_k + [v\times a]a^0]\right)$$

$$= \left(0,\ v(|a\rangle^* \odot |a\rangle) + 2[(av)^i a + [v\times a]a^0]\right) = |\bar{a}\rangle \odot |v\rangle \odot |a\rangle$$

$$(|\bar{a}\rangle \odot |v\rangle \odot |a\rangle)^* = \left(0,\ -v(|a\rangle^* \odot |a\rangle) - 2[(av)^i a + [v\times a]a^0]\right)$$

$$= \left(0,\ -v(|a\rangle^* \odot |a\rangle) - 2\alpha a - \beta[v\times a]\right),\ \text{con } \alpha = 2av,\ \beta = 2a^0$$

Si suponemos $a_0 =$ nulo $= \left(0,\ -v\|a\|^2 - \alpha a - \beta[v\times a]\right)$

$\to$ Ahora miremos $[v\|a\|^2 - \alpha a - \beta[v\times a]]^2 = [v\|a\|^2]^2 + [\alpha a]^2 + \beta^2[a^2\|v\|^2 - (a\cdot v)]^2 - 2v\|a\|^2\alpha a$

$$= \|v\|^2\|a\|^4 + (av)^2\|a\|^2 + 4a_0[a^2\|v\|^2 - (a\cdot v)]^2 - 2(v\|a\|^2(a\cdot v)\cdot a)$$

$a_0 = 0 \to\ = \|v\|^2\|a\|^4$

$$\hookrightarrow \frac{1}{\||a\rangle\|^4} \cdot \||v\rangle\|^2 \||a\rangle\|^4 = \||v\rangle\|^2\ ✓$$