I) Considere los operadores $\mathbb{A}=\mathbb{A}^\dagger$ hermítico, $\mathbb{K}=-\mathbb{K}^\dagger$ antihermítico, $\mathbb{U}^{-1}=\mathbb{U}^\dagger$ unitario, $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ genéricos. Pruebe las siguientes afirmaciones:

a) En general:

1) $(\mathbb{P}^\dagger)^{-1}=(\mathbb{P}^{-1})^\dagger$

$\mathbb{P}\mathbb{P}^{-1}=\mathbb{I}$ $\qquad$ $\mathbb{P}^{-1}\mathbb{P}=\mathbb{I}$

$(\mathbb{P}\mathbb{P}^{-1})^\dagger=\mathbb{I}^\dagger$ $\qquad$ $(\mathbb{P}^{-1}\mathbb{P})^\dagger=\mathbb{I}^\dagger$

$(\mathbb{P}^{-1})^\dagger\mathbb{P}^\dagger=\mathbb{I}$ $\qquad$ $\mathbb{P}^\dagger(\mathbb{P}^{-1})^\dagger=\mathbb{I}$

Ya que $(\mathbb{P}^{-1})^\dagger$ es la inversa de $\mathbb{P}^\dagger$ a izq. y der.

$(\mathbb{P}^{-1})^\dagger=(\mathbb{P}^\dagger)^{-1}$

2) $(\mathbb{P}\mathbb{Q})^{-1}=\mathbb{Q}^{-1}\mathbb{P}^{-1}$

$$
\begin{aligned}
(\mathbb{P}\mathbb{Q})(\mathbb{Q}^{-1}\mathbb{P}^{-1}) &= \mathbb{P}(\mathbb{Q}\mathbb{Q}^{-1})\mathbb{P}^{-1} \\
&= \mathbb{P}\mathbb{I}\mathbb{P}^{-1} \\
&= \mathbb{P}\mathbb{P}^{-1} \\
&= \mathbb{I}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\mathbb{Q}^{-1}\mathbb{P}^{-1})(\mathbb{P}\mathbb{Q}) &= \mathbb{Q}^{-1}(\mathbb{P}^{-1}\mathbb{P})\mathbb{Q} \\
&= \mathbb{Q}^{-1}\mathbb{I}\mathbb{Q} \\
&= \mathbb{Q}^{-1}\mathbb{Q} \\
&= \mathbb{I}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $\rightarrow (\mathbb{P}\mathbb{Q})^{-1}=\mathbb{Q}^{-1}\mathbb{P}^{-1}$

3) Si $[\mathbb{P},\mathbb{Q}]=0$, entonces $\mathbb{P}(\mathbb{Q})^{-1}=(\mathbb{Q})^{-1}\mathbb{P}$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\mathbb{Q}-\mathbb{Q}\mathbb{P}=0 \rightarrow \mathbb{P}\mathbb{Q}&=\mathbb{Q}\mathbb{P} \\
\mathbb{Q}^{-1}\mathbb{P}\mathbb{Q}&=\mathbb{Q}^{-1}\mathbb{Q}\mathbb{P} \\
\mathbb{Q}^{-1}\mathbb{P}\mathbb{Q}&=\mathbb{I}\mathbb{P} \\
\mathbb{Q}^{-1}\mathbb{P}\mathbb{Q}&=\mathbb{P} \\
\mathbb{Q}^{-1}\mathbb{P}\mathbb{Q}\mathbb{Q}^{-1}&=\mathbb{P}\mathbb{Q}^{-1} \\
\mathbb{Q}^{-1}\mathbb{P}\mathbb{I}&=\mathbb{P}\mathbb{Q}^{-1} \\
\mathbb{Q}^{-1}\mathbb{P}&=\mathbb{P}\mathbb{Q}^{-1}
\end{aligned}
$$

4) $(e^{\mathbb{P}})^\dagger=e^{\mathbb{P}^\dagger}$

$$
e^{\mathbb{P}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathbb{P}^n}{n!}\rightarrow (e^{\mathbb{P}})^\dagger=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathbb{P}^n)^\dagger}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathbb{P}^\dagger)^n}{n!}=e^{\mathbb{P}^\dagger}
$$

$n=1\rightarrow(\mathbb{P})^\dagger=\mathbb{P}^\dagger$

$n=K\rightarrow$ si $(\mathbb{P}^K)^\dagger=(\mathbb{P}^\dagger)^K$ entonces

$$
\begin{aligned}
(\mathbb{P}^{K+1})^\dagger=(\mathbb{P}^K\mathbb{P})^\dagger&=\mathbb{P}^\dagger(\mathbb{P}^K)^\dagger \\
&=\mathbb{P}^\dagger(\mathbb{P}^\dagger)^K \\
&=(\mathbb{P}^\dagger)^{K+1}\ \checkmark
\end{aligned}
$$

5) $\mathbb{P}e^{\mathbb{Q}}\mathbb{P}^{-1}=e^{\mathbb{P}\mathbb{Q}\mathbb{P}^{-1}}\rightarrow \mathbb{P}e^{\mathbb{Q}}\mathbb{P}^{-1}=\mathbb{P}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathbb{Q}^n}{n!}\right)\mathbb{P}^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathbb{P}\mathbb{Q}^n\mathbb{P}^{-1}}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathbb{P}\mathbb{Q}\mathbb{P}^{-1})^n}{n!}=e^{\mathbb{P}\mathbb{Q}\mathbb{P}^{-1}}$

$n=1\rightarrow\mathbb{P}\mathbb{Q}\mathbb{P}^{-1}=(\mathbb{P}\mathbb{Q}\mathbb{P}^{-1})^1$, si $\mathbb{P}\mathbb{Q}^n\mathbb{P}^{-1}=(\mathbb{P}\mathbb{Q}\mathbb{P}^{-1})^n$, entonces $\mathbb{P}\mathbb{Q}^{n+1}\mathbb{P}^{-1}=\mathbb{P}\mathbb{Q}^n\mathbb{Q}\mathbb{P}^{-1}=(\mathbb{P}\mathbb{Q}^n\mathbb{P}^{-1})(\mathbb{P}\mathbb{Q}\mathbb{P}^{-1})=(\mathbb{P}\mathbb{Q}\mathbb{P}^{-1})^n(\mathbb{P}\mathbb{Q}\mathbb{P}^{-1})=(\mathbb{P}\mathbb{Q}\mathbb{P}^{-1})^{n+1}\ \checkmark$

b) Si $\mathbb{A}$ es hermítico entonces $\tilde{\mathbb{A}}=\mathbb{U}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{U}$ también lo será

Si $\mathbb{A}$ es hermítico, $\mathbb{A}^\dagger=\mathbb{A}$ y $\tilde{\mathbb{A}}=\mathbb{U}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{U}\rightarrow$

$$
\begin{aligned}
(\tilde{\mathbb{A}})^\dagger&=(\mathbb{U}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{U})^\dagger \\
&=\mathbb{U}^\dagger\mathbb{A}^\dagger(\mathbb{U}^{-1})^\dagger \\
&=\mathbb{U}^\dagger\mathbb{A}^\dagger(\mathbb{U}^\dagger)^\dagger \\
&=\mathbb{U}^\dagger\mathbb{A}\mathbb{U} \\
&=\underline{\mathbb{U}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{U}}\longrightarrow(\tilde{\mathbb{A}})^\dagger=\tilde{\mathbb{A}}\rightarrow \text{Es hermítico!}
\end{aligned}
$$

c) Si $\mathbb{A}$ es hermítico entonces $e^{i\mathbb{A}}$ es unitario

Si $\mathbb{A}$ es hermítico, $\mathbb{A}^\dagger=\mathbb{A}$ y si $\mathbb{B}\equiv e^{i\mathbb{A}}\rightarrow$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{B}^\dagger&=(e^{i\mathbb{A}})^\dagger \\
&=e^{(i\mathbb{A})^\dagger} \\
&=e^{(-i\mathbb{A})}
\end{aligned}
\longrightarrow
\begin{aligned}
\mathbb{B}\mathbb{B}^\dagger&=e^{i\mathbb{A}}e^{(-i\mathbb{A})} \\
&=e^0 \\
&=\mathbb{I}
\end{aligned}
\longrightarrow
\begin{aligned}
\mathbb{B}^\dagger\mathbb{B}&=e^{(-i\mathbb{A})}e^{i\mathbb{A}} \\
&=e^0 \\
&=\mathbb{I}
\end{aligned}
\rightarrow (e^{i\mathbb{A}})^\dagger=(e^{i\mathbb{A}})^{-1}\rightarrow \text{Es unitario!}
$$

d) Si $\mathbb{K}$ es antihermítico entonces $\tilde{\mathbb{K}}=\mathbb{U}^{-1}\mathbb{K}\mathbb{U}$ también lo será. En particular esto se cumple para $\tilde{\mathbb{K}}=i\mathbb{A}$. Es decir, podemos construir un operador antihermítico a partir de uno hermítico.

Si $\mathbb{K}$ es antihermítico, $\mathbb{K}=-\mathbb{K}^\dagger$ y $\tilde{\mathbb{K}}=\mathbb{U}^{-1}\mathbb{K}\mathbb{U}\rightarrow$

$$
\begin{aligned}
(\tilde{\mathbb{K}})^\dagger&=(\mathbb{U}^{-1}\mathbb{K}\mathbb{U})^\dagger \\
&=\mathbb{U}^\dagger\mathbb{K}^\dagger(\mathbb{U}^{-1})^\dagger \\
&=\mathbb{U}^\dagger(-\mathbb{K})(\mathbb{U}^\dagger)^\dagger \\
&=\underline{-\mathbb{U}^{-1}\mathbb{K}\mathbb{U}}\longrightarrow(\tilde{\mathbb{K}})^\dagger=-\tilde{\mathbb{K}}\rightarrow \text{Es antihermítico!}
\end{aligned}
$$

Si $\tilde{\mathbb{K}}=i\mathbb{A}$, $(\tilde{\mathbb{K}})^\dagger=(i\mathbb{A})^\dagger=-i\mathbb{A}^\dagger=-i\mathbb{A}=-\tilde{\mathbb{K}}$

e) Dados dos operadores $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ hermíticos, su composición $\mathbb{A}\mathbb{B}$ será hermítica si y solo si $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ conmutan

Si $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ son hermíticos, $\mathbb{A}^{\dagger}=\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}^{\dagger}=\mathbb{B}$ $\rightarrow$ Si $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ conmutan $(\mathbb{A}\mathbb{B}=\mathbb{B}\mathbb{A}) \rightarrow (\mathbb{A}\mathbb{B})^{\dagger}=\mathbb{B}^{\dagger}\mathbb{A}^{\dagger}=\mathbb{B}\mathbb{A}=\mathbb{A}\mathbb{B} \rightarrow (\mathbb{A}\mathbb{B})^{\dagger}=\mathbb{A}\mathbb{B}$ $\rightarrow$ Es hermítico

$\rightarrow$ Si $\mathbb{A}\mathbb{B}$ es hermítico $\rightarrow (\mathbb{A}\mathbb{B})^{\dagger}=\mathbb{B}^{\dagger}\mathbb{A}^{\dagger}$, $\mathbb{A}\mathbb{B}=\mathbb{B}\mathbb{A}$ $\rightarrow \mathbb{A}\mathbb{B}=\mathbb{B}\mathbb{A} \rightarrow$ $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ conmutan!

f) Si $\mathbb{S}$ es un operador real y antisimétrico y $\mathbb{I}$ el operador unidad, pruebe:

I) Los operadores $(\mathbb{I}-\mathbb{S})$ y $(\mathbb{I}+\mathbb{S})$ conmutan

Si $\mathbb{S}$ es real y $\mathbb{S}^{T}=-\mathbb{S} \rightarrow$

$$(\mathbb{I}-\mathbb{S})(\mathbb{I}+\mathbb{S})=\mathbb{I}^2+\mathbb{S}-\mathbb{S}-\mathbb{S}^2 = \mathbb{I}^2-\mathbb{S}+\mathbb{S}-\mathbb{S}^2 = (\mathbb{I}+\mathbb{S})(\mathbb{I}-\mathbb{S})$$

$\rightarrow (\mathbb{I}-\mathbb{S})(\mathbb{I}+\mathbb{S})=(\mathbb{I}+\mathbb{S})(\mathbb{I}-\mathbb{S}) \rightarrow (\mathbb{I}+\mathbb{S})$ y $(\mathbb{I}-\mathbb{S})$ conmutan!

II) El operador $(\mathbb{I}-\mathbb{S})(\mathbb{I}+\mathbb{S})$ es simétrico mientras que $(\mathbb{I}-\mathbb{S})(\mathbb{I}+\mathbb{S})^{-1}$ es ortogonal.

1) $((\mathbb{I}-\mathbb{S})(\mathbb{I}+\mathbb{S}))^{T}=(\mathbb{I}+\mathbb{S})^{T}(\mathbb{I}-\mathbb{S})^{T}=(\mathbb{I}^{T}+\mathbb{S}^{T})(\mathbb{I}^{T}-\mathbb{S}^{T})=(\mathbb{I}-\mathbb{S})(\mathbb{I}+\mathbb{S}) \rightarrow ((\mathbb{I}-\mathbb{S})(\mathbb{I}+\mathbb{S}))^{T}=(\mathbb{I}-\mathbb{S})(\mathbb{I}+\mathbb{S}) \rightarrow (\mathbb{I}-\mathbb{S})(\mathbb{I}+\mathbb{S})$ es simétrico!

2)
$$\begin{aligned}((\mathbb{I}-\mathbb{S})(\mathbb{I}+\mathbb{S})^{-1})^{T} &= ((\mathbb{I}+\mathbb{S})^{-1})^{T}(\mathbb{I}-\mathbb{S})^{T}\\ &=((\mathbb{I}+\mathbb{S})^{T})^{-1}(\mathbb{I}-\mathbb{S})^{T}\\ &=(\mathbb{I}^{T}+\mathbb{S}^{T})^{-1}(\mathbb{I}^{T}-\mathbb{S}^{T})\\ &=(\mathbb{I}-\mathbb{S})^{-1}(\mathbb{I}+\mathbb{S})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}((\mathbb{I}-\mathbb{S})(\mathbb{I}+\mathbb{S})^{-1})^{T}((\mathbb{I}-\mathbb{S})(\mathbb{I}+\mathbb{S})^{-1}) &= (\mathbb{I}-\mathbb{S})^{-1}(\mathbb{I}+\mathbb{S})(\mathbb{I}-\mathbb{S})(\mathbb{I}+\mathbb{S})^{-1}\\ &=(\mathbb{I}-\mathbb{S})^{-1}(\mathbb{I}-\mathbb{S})(\mathbb{I}+\mathbb{S})(\mathbb{I}+\mathbb{S})^{-1} \leftarrow \text{Conmutan}\\ &=(\mathbb{I}-\mathbb{S})^{0}(\mathbb{I}+\mathbb{S})^{0}=\mathbb{I}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}((\mathbb{I}-\mathbb{S})(\mathbb{I}+\mathbb{S})^{-1})((\mathbb{I}-\mathbb{S})(\mathbb{I}+\mathbb{S})^{-1})^{T} &= (\mathbb{I}-\mathbb{S})(\mathbb{I}+\mathbb{S})^{-1}(\mathbb{I}-\mathbb{S})^{-1}(\mathbb{I}+\mathbb{S}) \leftarrow \text{Conmutan}\\ &=(\mathbb{I}-\mathbb{S})(\mathbb{I}-\mathbb{S})^{-1}(\mathbb{I}+\mathbb{S})^{-1}(\mathbb{I}+\mathbb{S})\\ &=(\mathbb{I}-\mathbb{S})^{0}(\mathbb{I}+\mathbb{S})^{0}=\mathbb{I}\end{aligned}$$

$(\mathbb{I}-\mathbb{S})(\mathbb{I}+\mathbb{S})^{-1}$ es ortogonal!

g) Considere una matriz ortogonal de la forma $\mathbb{R}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \operatorname{sen}\theta\\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$, encuentre la expresión para $\mathbb{S}$ que reproduce $\mathbb{R}=(\mathbb{I}-\mathbb{S})(\mathbb{I}+\mathbb{S})^{-1}$

Si $\mathbb{R}$ es ortogonal, $\mathbb{R}^{T}\mathbb{R}=\mathbb{R}\mathbb{R}^{T}=\mathbb{I} \longrightarrow$

$$\begin{aligned}\mathbb{R}&=(\mathbb{I}-\mathbb{S})(\mathbb{I}+\mathbb{S})^{-1}\\ \mathbb{R}(\mathbb{I}+\mathbb{S})&=(\mathbb{I}-\mathbb{S})\\ \mathbb{R}+\mathbb{R}\mathbb{S}&=\mathbb{I}-\mathbb{S}\\ \mathbb{R}\mathbb{S}+\mathbb{S}&=\mathbb{I}-\mathbb{R}\\ \mathbb{S}(\mathbb{R}+\mathbb{I})&=\mathbb{I}-\mathbb{R}\\ \mathbb{S}&=(\mathbb{I}-\mathbb{R})(\mathbb{R}+\mathbb{I})^{-1}\end{aligned}$$

Debe ser invertible

$$\mathbb{I}-\mathbb{R}=\begin{pmatrix}1-\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta\\ \operatorname{sen}\theta & 1-\cos\theta\end{pmatrix} \quad \mathbb{I}+\mathbb{R}=\begin{pmatrix}1+\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta\\ \operatorname{sen}\theta & 1+\cos\theta\end{pmatrix} \quad (\mathbb{I}+\mathbb{R})^{-1}=\frac{\operatorname{Adj}(\mathbb{I}+\mathbb{R})^{T}}{\det|\mathbb{I}+\mathbb{R}|}=\frac{1}{2(1+\cos\theta)}\begin{pmatrix}1+\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta\\ \operatorname{sen}\theta & 1+\cos\theta\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{S}=(\mathbb{I}-\mathbb{R})(\mathbb{I}+\mathbb{R})^{-1}&=\frac{1}{2(1+\cos\theta)}\begin{pmatrix}1-\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta\\ \operatorname{sen}\theta & 1-\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1+\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta\\ \operatorname{sen}\theta & 1+\cos\theta\end{pmatrix}\\ &=\frac{1}{2(1+\cos\theta)}\begin{pmatrix}1-\cos^2\theta-\operatorname{sen}^2\theta & -\operatorname{sen}\theta+\cos\theta\operatorname{sen}\theta-\operatorname{sen}\theta-\operatorname{sen}\theta\cos\theta\\ \operatorname{sen}\theta+\cos\theta\operatorname{sen}\theta+\operatorname{sen}\theta-\operatorname{sen}\theta\cos\theta & -\operatorname{sen}^2\theta+1-\cos^2\theta\end{pmatrix}\\ &=\frac{1}{2(1+\cos\theta)}\begin{pmatrix}0 & -2\operatorname{sen}\theta\\ 2\operatorname{sen}\theta & 0\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}0 & -\frac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta}\\ \frac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta} & 0\end{pmatrix}\end{aligned}$$