

4) Suponga $AB=BA$ demuestre que:

a) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

$$\begin{aligned} \rightarrow (A+B)^2 &= (A+B)(A+B) \\ &= A(A+B) + B(A+B) \\ &= AA + AB + BA + BB \\ &= A^2 + AB + AB + B^2 \\ &= A^2 + 2AB + B^2 \end{aligned}$$

b) $(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$

$$\begin{aligned} \rightarrow (A+B)^3 &= (A+B)^2(A+B) \\ &= (A^2 + 2AB + B^2)(A+B) \\ &= A^2(A+B) + 2AB(A+B) + B^2(A+B) \\ &= A^2A + A^2B + 2ABA + 2ABB + B^2A + B^2B \\ &= A^3 + A^2B + 2AAB + 2BAB + B^2A + B^3 \\ &= A^3 + A^2B + 2A^2B + 2BBA + B^2A + B^3 \\ &= A^3 + A^2B + 2A^2B + 2B^2A + B^2A + B^3 \\ &= A^3 + 3A^2B + 3B^2A + B^3 \end{aligned}$$

5) Suponga que un operador L puede ser escrito como la composición de otros dos operadores $L = L_1 L_2$ con $[L_1, L_2] = I$. Demostrar que:

Si $L|x\rangle = \lambda|x\rangle$ y $|y\rangle = L_2|x\rangle$ entonces $L|y\rangle = (\lambda+1)|y\rangle$

Queremos relacionar L y $L_2 \rightarrow [L, L_2] = [L_1 L_2, L_2] = L_1 L_2 L_2 - L_2 L_1 L_2 \rightarrow [L, L_2] = L L_2 - L_2 L = L_2$

$$\begin{aligned} &= L_2 L_2 - L_2 L_2 + L_2 L_2 - L_2 L_2 \\ &\quad \text{nuevo término} \\ &= L_2 [L_2, L_2] + [L_2, L_2] L_2 \\ &= L_2 [L_2, L_2] + [L_2, L_2] L_2 \\ &= L_2 \end{aligned}$$

Ahora, aplicamos $L|y\rangle = L(L_2|x\rangle) = (L_2 L_2)|x\rangle$

$$\begin{aligned} &= L_2 |x\rangle + L_2 (L_2|x\rangle) \\ &= L_2 |x\rangle + L_2 (\lambda|x\rangle) \\ &= |y\rangle + \lambda|y\rangle \\ &= (\lambda+1)|y\rangle \checkmark \end{aligned}$$

Del mismo modo, demuestre que $L|x\rangle = \lambda|x\rangle$ y $|z\rangle = L_1|x\rangle$ entonces $L|z\rangle = (\lambda-1)|z\rangle$

Queremos relacionar L y $L_1 \rightarrow [L, L_1] = [L_1 L_2, L_1] = L_1 L_2 L_1 - L_1 L_1 L_2 \rightarrow [L, L_1] = L L_1 - L_1 L = -L_1$

$$\begin{aligned} &= L_1 L_2 L_1 - L_1 L_1 L_2 \\ &\quad \text{nuevo término} \\ &= L_2 [L_1, L_1] + [L_1, L_1] L_2 \\ &= L_2 [L_1, L_1] + [L_1, L_1] L_2 \\ &= -L_1 \end{aligned}$$

Ahora, aplicamos $L|z\rangle = L(L_1|x\rangle) = (L_1 L_2 L_1)|x\rangle$

$$\begin{aligned} &= L_1 (L_2|x\rangle) - L_1 |x\rangle \\ &= L_1 (\lambda|x\rangle) - |z\rangle \\ &= \lambda|z\rangle - |z\rangle \\ &= (\lambda-1)|z\rangle \checkmark \end{aligned}$$