4) Si un operador lineal $\mathbb{A}$ tiene un autovector $|v_0\rangle$ con autovalor λ_0. Demuestre que $|v_0\rangle$ es también autovector del operador $\mathbb{A}^2$ con autovalor λ_0^2

$$\mathbb{A}|v_0\rangle = \lambda_0|v_0\rangle \rightarrow \mathbb{A}(\mathbb{A}|v_0\rangle) = \mathbb{A}(\lambda_0|v_0\rangle) \rightarrow \mathbb{A}^2|v_0\rangle = \lambda_0(\mathbb{A}|v_0\rangle)$$
$$= \lambda_0(\lambda_0|v_0\rangle$$
$$= \lambda_0^2|v_0\rangle$$

$\rightarrow$ Autovalor $= \lambda_0^2 \rightarrow$ Autovector $= |v_0\rangle$

5) Aún si un operador lineal $\mathbb{A}$ no tiene autovectores el operador $\mathbb{A}^2$ puede llegar a tenerlos. Demuestre que si $\mathbb{A}^2$ tiene un autovector con un autovalor no degenerado $\lambda_0 = \mu^2$, entonces $\mathbb{A}$ no tiene un autovector.

Sea $|v_0\rangle$ un autovector de $\mathbb{A}^2$ asociado al autovalor $\lambda = \mu^2 \rightarrow \mathbb{A}^2|v_0\rangle = \mu^2|v_0\rangle$

$$\mathbb{A}(\underbrace{\mathbb{A}|v_0\rangle}) = \mu^2|v_0\rangle$$

$\mapsto$ $|v_0\rangle$ puede no ser un autovector de $\mathbb{A}$

$\rightarrow$ $\mathbb{A}(\mathbb{A}|v_0\rangle) = \mu^2|v_0\rangle$

$\mathbb{A}|\phi\rangle = \mu^2|v_0\rangle \rightarrow |\phi\rangle$ puede no ser un autovector de $\mathbb{A}$

$|\Psi\rangle = \mu^2|v_0\rangle \rightarrow$ $\mathbb{A}$ no tiene autovectores

12) Una vez más consideremos las matrices a Pauli: $(\sigma_x)^i_j=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, $(\sigma_y)^i_j=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}$, $(\sigma_z)^i_j=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$, $(\mathbb{I})^i_j=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$. a) Muestre si los operadores de Pauli $\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z$, conjuntamente con el operador identidad, forman un grupo respecto a la operación $\sigma_j\odot\sigma_k\equiv\sigma_j\sigma_k=i\varepsilon_{jkm}\sigma^m+\delta_{jk}\mathbb{I}$ con j,k,m=x,y,z

→Cerradura respecto a $\odot$: Si $j=k\rightarrow\sigma_j\odot\sigma_j=\sigma_j\sigma_j=\mathbb{I}$

Si $j\neq k\rightarrow\sigma_j\odot\sigma_k=\sigma_j\sigma_k=i\varepsilon_{jkm}\sigma^m\rightarrow i\varepsilon_{ijkm}\sigma^m$ no siempre pertenecerá al conjunto → $\sigma_x\odot\sigma_y=\sigma_x\sigma_y=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix}$
$=i\sigma_z\notin\{I,\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z\}$

Por lo tanto, el conjunto $\{I,\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z\}$ no forma un grupo

b) Muestre si las matrices de Pauli, $(\sigma_x)^i_j,(\sigma_y)^i_j,(\sigma_z)^i_j$, conjuntamente con la matriz identidad $(\mathbb{I})^i_j$ son linealmente independientes

Comprobemos si $\{I,\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z\}$ son L.I: $\alpha\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}\alpha+\lambda&\beta-i\gamma\\\beta+i\gamma&\alpha-\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{cases}\alpha+\lambda=0\\\beta-i\gamma=0\\\beta+i\gamma=0\\\alpha-\lambda=0\end{cases}$

$\alpha+\lambda=0$, $+\ \alpha-\lambda=0$: $2\alpha=0\rightarrow\alpha=0,\lambda=0$

$\beta-i\gamma=0$, $+\ \beta+i\gamma=0$: $2\beta=0\rightarrow\beta=0,\gamma=0$

Ya que $\alpha=\beta=\gamma=\lambda=0$, estas matrices son L.I.

c) ¿Las matrices de Pauli forman base para un espacio vectorial de matrices complejas 2 x 2? ¿Por qué? Si forman una base exprese la matriz $\begin{pmatrix}3&i\\5&1\end{pmatrix}$ en términos de esa base.

Por b) sabemos que las matrices en $\{I,\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z\}$ son L.I. Ahora, miremos si genera el EV de matrices complejas 2x2:

$a_0\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+a_1\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+a_2\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}+a_3\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z_1&z_2\\z_3&z_4\end{pmatrix}\leftarrow z_i\in\mathbb{C}$

$\begin{pmatrix}a_0+a_3&a_1-ia_2\\a_1+ia_2&a_0-a_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z_1&z_2\\z_3&z_4\end{pmatrix}\begin{cases}z_1=a_0+a_3\\z_2=a_1-ia_2\\z_3=a_1+ia_2\\z_4=a_0-a_3\end{cases}$

$z_1=a_0+a_3\rightarrow a_0=z_1-a_3$, $z_4=(z_1-a_3)-a_3$, $a_3=\frac{z_1-z_4}{2}$, $a_0=\frac{z_1+z_4}{2}$

$z_2=a_1-ia_2\rightarrow a_1=z_2+ia_2$, $z_3=z_2+ia_2+ia_2$, $z_3=z_2+2ia_2$, $\frac{z_3-z_2}{2i}=a_2$, $\frac{z_2+z_3}{2}=a_1$

Ya que $a_k\in\mathbb{C}$ y son únicos, cualquier matriz 2x2 compleja se puede escribir como combinación lineal de $\{I,\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z\}$. Además ya que $\dim V=4$ y $\dim\{I,\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z\}=4$, este conjunto forma una base para este espacio vectorial!

$\begin{pmatrix}3&i\\5&1\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+d&b-ic\\b+ic&a-d\end{pmatrix}\rightarrow\begin{cases}a+d=3\\b-ic=i\\b+ic=5\\a-d=1\end{cases}$

$a+d=3\rightarrow a=3-d$, $3-d-d=1$, $d=1$, $a=2$

$b=i+ic$, $i+ic+ic=5$, $c=-\frac{5i+1}{2}$, $b=\frac{i+5}{2}$

$\rightarrow\begin{pmatrix}3&i\\5&1\end{pmatrix}=2I+\frac{5+i}{2}\sigma_x+\frac{-1-5i}{2}\sigma_y+1\sigma_z$

d) Derive la expresión general para el conmutador $[\sigma_j,\sigma_k]$ utilizando la descripción de composición de los operadores de Pauli que presentamos arriba

Se tiene que $\sigma_j\sigma_k=i\varepsilon_{jkm}\sigma^m+\delta_{jk}\mathbb{I}\rightarrow[\sigma_j,\sigma_k]=\sigma_j\sigma_k-\sigma_k\sigma_j$

$=i(\varepsilon_{jkm}-\varepsilon_{kjm})\sigma^m+(\delta_{jk}-\delta_{kj})\mathbb{I}\rightarrow\delta_{jk}=\delta_{kj},\ \varepsilon_{jkm}=-\varepsilon_{kjm}$

$=2i\varepsilon_{jkm}\sigma^m$

Así, se tiene que: $[\sigma_x,\sigma_y]=2i\sigma_z$, $[\sigma_y,\sigma_z]=2i\sigma_x$, $[\sigma_z,\sigma_x]=2i\sigma_y$

e) Como lo planteamos en el ejemplo 4.19, σ_z actúa de la siguiente forma: $\sigma_z|+\rangle=|+\rangle$, $\sigma_z|-\rangle=-|-\rangle$, $|+\rangle\rightleftharpoons\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $|-\rangle\rightleftharpoons\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$
Encuentre la expresión para los autovalores y autovectores de los otros operadores de Pauli:

$\sigma_x=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\rightarrow\det|\sigma_x-\lambda\mathbb{I}|=\det\begin{pmatrix}-\lambda&1\\1&-\lambda\end{pmatrix}=\lambda^2-1=0\rightarrow\lambda_{+x}=1,\lambda_{-x}=-1\rightarrow\sigma_x|+\rangle_x=\lambda_{+x}|+\rangle_x\Rightarrow\lambda_{+x}=1\rightarrow\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\begin{matrix}\rightarrow x_2=x_1\\\rightarrow x_1=x_2\end{matrix}\rightarrow\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\rightarrow\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\rightarrow|+\rangle_x=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt2}(|+\rangle+|-\rangle)$

$\rightarrow\sigma_x|-\rangle_x=\lambda_{-x}|-\rangle_x\Rightarrow\lambda_{-x}=-1\rightarrow\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\begin{matrix}\rightarrow x_2=-x_1\\\rightarrow x_1=-x_2\end{matrix}\rightarrow\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\rightarrow\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\rightarrow|-\rangle_x=\frac{1}{\sqrt2}(|+\rangle-|-\rangle)$

$\sigma_y=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\rightarrow\det|\sigma_y-\lambda\mathbb{I}|=\det\begin{pmatrix}-\lambda&-i\\i&-\lambda\end{pmatrix}=\lambda^2-1=0\rightarrow\lambda_{+y}=1,\lambda_{-y}=-1\rightarrow\sigma_y|+\rangle_y=\lambda_{+y}|+\rangle_y\Rightarrow\lambda_{+y}=1\rightarrow\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\begin{matrix}\rightarrow -ix_2=x_1\\\rightarrow ix_1=x_2\end{matrix}\rightarrow\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}\rightarrow\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}\rightarrow|+\rangle_y=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt2}(|+\rangle+i|-\rangle)$

$\rightarrow\sigma_y|-\rangle_y=\lambda_{-y}|-\rangle_y\Rightarrow\lambda_{-y}=-1\rightarrow\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\begin{matrix}\rightarrow -ix_2=-x_1\\\rightarrow ix_1=-x_2\end{matrix}\rightarrow\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}\rightarrow\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}\rightarrow|-\rangle_y=\frac{1}{\sqrt2}(|+\rangle-i|-\rangle)$

f) Muestre que cualquier representación matricial de un operador hermítico genérico $\mathbb{M}$ puede ser expresado como combinación lineal de las matrices de Pauli.

Tenemos dos maneras de demostrar esto:

1) Por b) sabemos que las matrices en $\{I,\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z\}$ son L.I. Ahora, miremos si generan el EV de matrices 2x2 hermíticas:

$$a_0\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+a_1\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+a_2\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}+a_3\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z_1&z_2\\z_2^*&z_4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a_0+a_3&a_1-ia_2\\a_1+ia_2&a_0-a_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z_1&z_2\\z_2^*&z_4\end{pmatrix}\quad\begin{cases}z_1=a_0+a_3\\z_2=a_1-ia_2\\z_2^*=a_1+ia_2\\z_4=a_0-a_3\end{cases}$$

$$\longrightarrow a_0=z_1-a_3,\quad z_4=(z_1-a_3)-a_3,\quad a_3=\frac{z_1-z_4}{2},\quad a_0=\frac{z_1+z_4}{2}$$

$$\longrightarrow a_1=z_2+ia_2,\quad z_2^*=z_2+ia_2+ia_2,\quad z_2^*=z_2+2ia_2,\quad \frac{z_2^*-z_2}{2i}=a_2$$

$$-\mathrm{Im}(z_2)=a_2,\quad \mathrm{Re}(z_2)=a_1$$

Ya que $a_k\in\mathbb{R}$ y son únicos, cualquier matriz hermítica 2x2 se puede escribir como combinación lineal de $\{\mathbb{I},\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z\}$. Además ya que $\dim V=4$ y $\dim\{\mathbb{I},\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z\}=4$, este conjunto forma una base para este espacio vectorial!

2) Sea $\mathbb{M}\in M_{2\times2}$ hermítica, ya que $\{\mathbb{I},\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z\}$ son base de $M_{2\times2}(\mathbb{C})$, debe existir $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ tal que $\mathbb{M}=a\mathbb{I}+b_x\sigma_x+b_y\sigma_y+b_z\sigma_z$

Recordemos que $\mathrm{Tr}(\mathbb{I})=2$, $\mathrm{Tr}(\sigma_k)=0$ y $\mathrm{Tr}(\sigma_j\sigma_k)=2\delta_{jk}$

→ Para hallar los b_k, tomamos $\sigma_k\mathbb{M}$ y hallamos la traza → $\mathrm{Tr}(\sigma_k\mathbb{M})=a\,\mathrm{Tr}(\sigma_k)+\sum_j b_j\mathrm{Tr}(\sigma_k\sigma_j)\longrightarrow b_k=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\sigma_k\mathbb{M}),\ k=x,y,z$

$$=0+\sum_j b_j(2\delta_{jk})$$
$$=2b_k$$

→ Para hallar a, tomamos la traza de $\mathbb{M}$ → $\mathrm{Tr}(\mathbb{M})=a\,\mathrm{Tr}(\mathbb{I})+\sum_j b_j\mathrm{Tr}(\sigma_j)\to a=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\mathbb{M})$

$$=a(2)+0$$
$$=2a$$

Ya que $\mathbb{M}=\mathbb{M}^\dagger$ y $\sigma_k=(\sigma_k)^\dagger$, $\mathrm{Tr}(\sigma_k\mathbb{M})\in\mathbb{R}$ y $\mathrm{Tr}(\mathbb{M})\in\mathbb{R}$. Por lo tanto, $a,b_x,b_y,b_z\in\mathbb{R}$ y $\{\mathbb{I},\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z\}$ es base para $M_{2\times2}$ hermíticas. Por lo tanto, se tendrá que $\mathbb{M}=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\mathbb{M})\mathbb{I}+\frac{1}{2}\sum_j\mathrm{Tr}(\sigma_j\mathbb{M})\sigma_j$

g) El polinomio característico para ese operador hermítico genérico $\mathbb{M}$ se puede expresar como $P_\lambda=\lambda^2-\lambda\,\mathrm{Tr}(\mathbb{M})+\det|\mathbb{M}|$ donde λ son los autovalores

Sea $\mathbb{M}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in M_{2\times2}$ hermítica → $P_\lambda=\det(\mathbb{M}-\lambda\mathbb{I})=\det\begin{pmatrix}a-\lambda&b\\c&d-\lambda\end{pmatrix}\to(a-\lambda)(d-\lambda)-cd=\lambda^2-(a+d)\lambda+(ad-bc)$

$$\lambda^2-\mathrm{Tr}(\mathbb{M})\lambda+\det|\mathbb{M}|$$