2) Considere ahora el espacio vectorial $P_{(t)4}$ de polinomios en t de grado 4, definidos en el intervalo $[-1,1]$. Esto es $|f\rangle_t \leftrightarrow \sum_{n=0}^{4} a_n t^n$ y este espacio está equipado con un producto interno de la forma $\langle f|g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$. Considere además para este espacio vectorial un operador lineal representado por $\Pi = e^{\mathbb{D}} \equiv \exp(\mathbb{D})$ donde $\mathbb{D} = \frac{d}{dt}$. Claramente, podemos encontrar dos bases para ese espacio vectorial: $\{1,t,t^2,t^3,t^4\}$ y la base de polinomios de Legendre $\{P_0,P_1,P_2,P_3,P_4\}$

a) Considere el polinomio $|f\rangle_t \leftrightarrow f(t) = 5t+3t^2+4t^3$. Encuentre la expresión de este polinomio en término de las bases arriba mencionadas. ¿Cuál es la matriz de transformación de las componentes de ese vector entre ambas bases?

$f(t) = 0+5t+3t^2+4t^3+0t^4 \longrightarrow |f\rangle_m = \begin{pmatrix}0\\5\\3\\4\\0\end{pmatrix}$

$P_0 = 1$

$P_1 = t$

$P_2 = \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}$

$P_3 = \frac{5}{2}t^3 - \frac{3}{2}t$

$P_4 = \frac{35}{8}t^4 - \frac{15}{4}t^2 + \frac{3}{8}$

$$0+5t+3t^2+4t^3+0t^4 = a_0(1) + a_1(t) + a_2\left(\frac{3}{2}t^2-\frac{1}{2}\right) + a_3\left(\frac{5}{2}t^3-\frac{3}{2}t\right) + a_4\left(\frac{35}{8}t^4-\frac{15}{4}t^2+\frac{3}{8}\right) \rightarrow |f\rangle_L = \begin{pmatrix}1\\37/5\\2\\8/5\\0\end{pmatrix}$$

$$= \left(a_0 - \frac{1}{2}a_2 + \frac{3}{8}a_4\right) + \left(a_1 - \frac{3}{2}a_3\right)t + \left(\frac{3}{2}a_2 - \frac{15}{4}a_4\right)t^2 + \left(\frac{5}{2}a_3\right)t^3 + \left(\frac{35}{8}a_4\right)t_4$$

$0 = a_4$ $\quad 4 = \frac{5}{2}a_3$, $\frac{8}{5} = a_3$ $\quad 3 = \frac{3}{2}a_2 - \frac{15}{4}(0)$, $2 = a_2$ $\quad 5 = a_1 - \frac{3}{2}\left(\frac{8}{5}\right)$, $\frac{37}{5} = a_1$ $\quad 0 = a_0 - \frac{1}{2}(2) + \frac{3}{8}(0)$, $1 = a_0$

Base Legendre → Base monomios

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 & 0 & 3/8 \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 & 0 & -15/4 \\ 0 & 0 & 0 & 5/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 35/8 \end{pmatrix} \rightarrow |f\rangle_m = A|f\rangle_L$$

Base monomios → Base Legendre

$$B = A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 & 0 & 1/5 \\ 0 & 1 & 0 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 0 & 4/7 \\ 0 & 0 & 0 & 2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8/35 \end{pmatrix} \rightarrow |f\rangle_L = A|f\rangle_m$$

b) Construya un proyector sobre el subespacio $P_{(t)2}$ de polinomios de grado 2 y encuentre la proyección de $|f\rangle_t$ en ese subespacio. Discuta las diferencias y semejanzas entre las proyecciones de $|f\rangle_t$ en ese subespacio expresado en las bases $\{1,t,t^2\}$ y $\{P_0,P_1,P_2\}$.

$\{|e_i\rangle\} = \{1,t,t^2\}$: $|p\rangle = \sum_i a_i|v_i\rangle$ ← Proyección de $|f\rangle$ en una base dada

$\langle v_k|f-p\rangle = 0$ ← Deben ser ortogonales

$\langle v_k|f\rangle = \sum_i a_i\langle v_k|v_i\rangle$

$b_k = G_{ki}a_i$

$a_i = G^{-1}_{ki}b_k$

M. de Gram

$$\mathbb{P}_m = \sum_{i,j=0}^{2} |e_i\rangle(G^{-1})\langle e_j| \rightarrow G = \begin{pmatrix} \langle 1|1\rangle & \langle 1|t\rangle & \langle 1|t^2\rangle \\ \langle t|1\rangle & \langle t|t\rangle & \langle t|t^2\rangle \\ \langle t^2|1\rangle & \langle t^2|t\rangle & \langle t^2|t^2\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/5 \end{pmatrix} \rightarrow G^{-1} = \begin{pmatrix} 9/8 & 0 & -15/8 \\ 0 & 3/2 & 0 \\ -15/8 & 0 & 45/8 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{P}_m|f\rangle_t = \sum_{i,j=0}^{2} |e_i\rangle(G^{-1})\langle e_j|f\rangle \rightarrow b = \langle v_j|f\rangle = \begin{pmatrix} \langle 1|5t+3t^2+4t^3\rangle \\ \langle t|5t+3t^2+4t^3\rangle \\ \langle t^2|5t+3t^2+4t^3\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 74/15 \\ 6/5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 9/8 & 0 & -15/8 \\ 0 & 3/2 & 0 \\ -15/8 & 0 & 45/8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 74/15 \\ 6/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 37/5 \\ 3 \end{pmatrix} = 0|1\rangle + \frac{37}{5}|t\rangle + 3|t^2\rangle$$

$\{|w_i\rangle\} = \{P_0,P_1,P_2\}$:

$$\mathbb{P}_L = \sum_{i,j=0}^{2} |w_i\rangle(G^{-1})\langle w_j| \rightarrow G = \begin{pmatrix} \langle P_0|P_0\rangle & \langle P_0|P_1\rangle & \langle P_0|P_2\rangle \\ \langle P_1|P_0\rangle & \langle P_1|P_1\rangle & \langle P_1|P_2\rangle \\ \langle P_2|P_0\rangle & \langle P_2|P_1\rangle & \langle P_2|P_2\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2/5 \end{pmatrix} \rightarrow G^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 5/2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{P}_L|f\rangle_t = \sum_{i,j=0}^{2} |w_i\rangle(G^{-1})\langle w_j|f\rangle \rightarrow b = \langle w_j|f\rangle = \begin{pmatrix} \langle P_0|5t+3t^2+4t^3\rangle \\ \langle P_1|5t+3t^2+4t^3\rangle \\ \langle P_2|5t+3t^2+4t^3\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 74/15 \\ 4/5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 5/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 74/15 \\ 4/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 37/5 \\ 2 \end{pmatrix} = 1|P_0\rangle + \frac{37}{5}|P_1\rangle + 2|P_2\rangle = 1(1) + \frac{37}{5}(t) + 2\left(\frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{37}{5}t + 3t^2$$

Al representar $|f\rangle_t$ en ambas bases, algunos coeficientes difieren; Sin embargo, al expresar los polinomios de Legendre en términos de t y simplificar, ambas expresiones son iguales.

c) Para $P_{(t)4}$, construya el operador inverso Π^{-1}, el adjunto del operador $\Pi^{\dagger}$ y precise si Π es hermítico o unitario

$\Pi = e^{\mathbb{D}}$ con $\mathbb{D} = \frac{d}{dt}$

$\Pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbb{D}^n}{n!}$

$$\Pi^{-1} = (e^{\mathbb{D}})^{-1} = (e^{-\mathbb{D}}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\mathbb{D})^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\mathbb{D}^n$$

$$\Pi^{\dagger} = (e^{\mathbb{D}})^{\dagger} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathbb{D}^n)^{\dagger}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathbb{D}^{\dagger})^n}{n!} = e^{\mathbb{D}^{\dagger}}$$

$\mathbb{D}^{\dagger}$? Supongamos unos $p,q \in P_{(t)4}$:

$u = q \quad dv = p'dt$

$du = q'dt \quad v = p$

$$\langle q|\mathbb{D}|p\rangle = \int_{-1}^{1} p'(t)q(t)dt = p(t)q(t)\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} p(t)q'(t)dt$$

$$= p(1)q(1) - p(-1)q(-1) - \langle p|\mathbb{D}|q\rangle$$

$\mathbb{D}^{\dagger}$ exige que $\langle q|\mathbb{D}|p\rangle^* = \langle p|\mathbb{D}^{\dagger}|q\rangle$, así que queremos $\langle p|\mathbb{D}^{\dagger}|q\rangle = -\langle p|\mathbb{D}|q\rangle + p(1)q(1) - p(-1)q(-1)$

$\mathbb{D}^{\dagger}|q\rangle = -\mathbb{D}|q\rangle + q(1)q_1(t) - q(-1)q_{-1}(t)$

↳donde $\langle p|q_1\rangle = p(1)$, $\langle p|q_{-1}\rangle = p(-1)$

$$\mathbb{D}^{\dagger} = -\mathbb{D} + \underbrace{q(1)q_1(t) - q(-1)q_{-1}(t)}_{\text{Denotémoslo con } E}$$

$\langle p|q_1\rangle = p(1) \rightarrow q_1(t) = c_1 + c_2t + c_3t^2 + c_4t^3 + c_5t^4$

evaluar cada vector base en $t=1$ $\rightarrow \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = G_m\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\\c_4\\c_5\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\\c_4\\c_5\end{pmatrix} = G^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \rightarrow q_1(t) = \frac{15}{16} - \frac{15}{14}t - \frac{105}{8}t^2 + \frac{35}{4}t^3 + \frac{315}{16}t^4$

$\langle p|q_{-1}\rangle = p(-1) \rightarrow q_{-1}(t) = d_1 + d_2t + d_3t^2 + d_4t^3 + d_5t^4$

evaluar cada vector base en $t=-1$ $\rightarrow \begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\\c_4\\c_5\end{pmatrix} = G^{-1}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\\1\end{pmatrix} \rightarrow q_{-1}(t) = \frac{15}{16} + \frac{15}{14}t - \frac{105}{8}t^2 - \frac{35}{4}t^3 + \frac{315}{16}t^4$

Gram en base de monomios

$$G_m = \langle t^i|t_j\rangle = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2/3 & 0 & 2/5 \\ 0 & 2/3 & 0 & 2/5 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/5 & 0 & 2/7 \\ 0 & 2/5 & 0 & 2/7 & 0 \\ 2/5 & 0 & 2/7 & 0 & 2/9 \end{pmatrix}, \quad G_m^{-1} = \begin{pmatrix} 225/128 & 0 & -525/64 & 0 & 945/128 \\ 0 & 75/8 & 0 & -105/8 & 0 \\ -525/64 & 0 & 2205/32 & 0 & -4725/64 \\ 0 & -105/8 & 0 & 175/8 & 0 \\ 945/128 & 0 & -4725/64 & 0 & 11025/128 \end{pmatrix}$$

$i,j = 0,1,2,3,4$

¿$\Pi^{\dagger}=\Pi$? → Contraejemplo: considere $|f\rangle=1$, $|g\rangle=t$ → Si Π fuera hermítico, $\langle f|\Pi^{\dagger}|g\rangle=\langle f|\Pi|g\rangle=\langle g|\Pi|f\rangle^{*}$

$\Pi|t\rangle=e^{\mathbb{D}}|t\rangle=\mathbb{D}^{0}|t\rangle+\frac{1}{1!}\mathbb{D}^{1}|t\rangle=t+1$

$\Pi|1\rangle=e^{\mathbb{D}}|1\rangle=\mathbb{D}^{0}|1\rangle=1$

¿$\langle f|\Pi|g\rangle=\langle g|\Pi|f\rangle^{*}$? $\langle f|\Pi|g\rangle=\langle 1|\Pi|t\rangle=\langle 1|t+1\rangle=2$ $\xleftarrow{\quad\neq\quad}$ $\langle g|\Pi|f\rangle^{*}=\langle t|\Pi|1\rangle^{*}=\langle t|1\rangle^{*}=0$ ← Π no es hermítico!

$\langle x|A^{\dagger}|y\rangle=\langle y|A|x\rangle^{*}$

¿$\Pi^{-1}=\Pi$? Contraejemplo: considere $|f\rangle=1$, $|g\rangle=t$ → Si Π fuera unitaria, $\langle f|g\rangle=\langle f|\Pi^{-1}\Pi|g\rangle=\langle f|\Pi^{\dagger}\Pi|g\rangle=\langle(\Pi|g\rangle)|(\Pi|f\rangle)\rangle$

$\Pi|t\rangle=e^{\mathbb{D}}|t\rangle=\mathbb{D}^{0}|t\rangle+\frac{1}{1!}\mathbb{D}^{1}|t\rangle=t+1$

$\Pi|1\rangle=e^{\mathbb{D}}|1\rangle=\mathbb{D}^{0}|1\rangle=1$

$\langle f|g\rangle=\langle 1|t\rangle=0$ $\neq$ $\langle(\Pi|g\rangle)|(\Pi|f\rangle)\rangle=\langle(\Pi|t\rangle)|(\Pi|1\rangle)\rangle=\langle t+1|1\rangle=2$ ← Π no es unitario!

d) ¿Cuáles son las representaciones matriciales de Π en $\mathcal{P}_{(t)4}$ para cada una de las bases mencionadas? ¿Cómo transforman las representaciones? Compruebe que la traza y el determinante de ambas representaciones matriciales son iguales

$\{1,t,t^2,t^3,t^4\}\rightarrow(\Pi)^{i\,(m)}_{j}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&2&3&4\\0&0&1&3&6\\0&0&0&1&4\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$ $\Pi|1\rangle=e^{\mathbb{D}}|1\rangle=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathbb{D}^n}{n!}|1\rangle=\mathbb{D}^0|1\rangle=1$ $\Pi|t\rangle=\mathbb{D}^0|t\rangle+\frac{1}{1!}\mathbb{D}^1|t\rangle=t+1$

$\Pi|t^2\rangle=\mathbb{D}^0|t^2\rangle+\frac{1}{1!}\mathbb{D}^1|t^2\rangle+\frac{1}{2!}\mathbb{D}^2|t^2\rangle=t^2+2t+1$ $\Pi|t^3\rangle=t^3+3t^2+3t+1$ $\Pi|t^4\rangle=t^4+4t^3+6t^2+4t+1$

$\{P_0,P_1,P_2,P_3,P_4\}\rightarrow(\Pi)^{i\,(L)}_{j}=\begin{pmatrix}1&1&3/2&7/2&75/8\\0&1&3&15/2&41/2\\0&0&1&5&35/2\\0&0&0&1&7\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$ $\Pi|P_0\rangle=e^{\mathbb{D}}|P_0\rangle=\mathbb{D}^0|P_0\rangle=P_0$ $\Pi|P_1\rangle=e^{\mathbb{D}}|P_1\rangle=\mathbb{D}^0|P_1\rangle+\frac{1}{1!}\mathbb{D}^1|P_1\rangle=P_1+P_0$

$\Pi|P_2\rangle=\mathbb{D}^0|P_2\rangle+\frac{1}{1!}\mathbb{D}^1|P_2\rangle+\frac{1}{2!}\mathbb{D}^2|P_2\rangle=P_2+3P_1+\frac{3}{2}P_0$ $\Pi|P_3\rangle=P_3+5P_2+\frac{15}{2}P_1+\frac{7}{2}P_0$ $\Pi|P_4\rangle=P_4+7P_3+\frac{35}{2}P_2+\frac{41}{2}P_1+\frac{75}{8}P_0$

$\mathrm{Tr}(\Pi^{(m)})=5=\mathrm{Tr}(\Pi^{(L)})$ $\det|\Pi^{(m)}|=1=\det|\Pi^{(L)}|$

→ $|v\rangle_m=\mathbb{S}|v\rangle_L$

$P_0=1(1)$
$P_1=1(t)$
$P_2=-\frac{1}{2}(1)+\frac{3}{2}(t^2)$
$P_3=-\frac{3}{2}(t)+\frac{5}{2}(t^3)$
$P_4=\frac{3}{8}(1)-\frac{15}{4}(t)+\frac{35}{8}t^4$

→ $\mathbb{S}=\begin{pmatrix}1&0&-1/2&0&3/8\\0&1&0&-3/2&0\\0&0&3/2&0&-15/4\\0&0&0&5/2&0\\0&0&0&0&35/8\end{pmatrix}$ $\mathbb{S}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&1/3&0&1/5\\0&1&0&3/5&0\\0&0&2/3&0&4/7\\0&0&0&2/5&0\\0&0&0&0&8/35\end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{l}\Pi^{(L)}=\mathbb{S}^{-1}\Pi^{(m)}\mathbb{S}\\ \Pi^{(m)}=\mathbb{S}\Pi^{(L)}\mathbb{S}^{-1}\end{array}\right\}$ Esta es la manera en que transforman las representaciones

e) ¿Cuáles son las representaciones matriciales de Π^{-1} y $\Pi^{\dagger}$ en $\mathcal{P}_{(t)4}$ para cada una de las bases mencionadas? ¿Cómo transforman esas representaciones?

$\Pi^{-1}\rightarrow\left.\begin{array}{l}(\Pi^{-1})^{(L)}=\mathbb{S}^{-1}(\Pi^{-1})^{(m)}\mathbb{S}\\ (\Pi^{-1})^{(m)}=\mathbb{S}(\Pi^{-1})^{(L)}\mathbb{S}^{-1}\end{array}\right\}$ Esta es la manera en que transforman las representaciones

$\{1,t,t^2,t^3,t^4\}\rightarrow\underbrace{(\Pi^{-1})^{i\,(m)}_{j}}_{\text{Inversa de }\Pi^{(m)}}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&2&3&4\\0&0&1&3&6\\0&0&0&1&4\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&1&-1&1\\0&1&-2&3&-4\\0&0&1&-3&6\\0&0&0&1&-4\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$

$\{P_0,P_1,P_2,P_3,P_4\}\rightarrow(\Pi^{-1})^{i\,(L)}_{j}=\mathbb{S}^{-1}(\Pi^{-1})^{(m)}\mathbb{S}=\begin{pmatrix}1&0&1/3&0&1/5\\0&1&0&3/5&0\\0&0&2/3&0&4/7\\0&0&0&2/5&0\\0&0&0&0&8/35\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&1&-1&1\\0&1&-2&3&-4\\0&0&1&-3&6\\0&0&0&1&-4\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1/2&0&3/8\\0&1&0&-3/2&0\\0&0&3/2&0&-15/4\\0&0&0&5/2&0\\0&0&0&0&35/8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&3/2&-7/2&75/8\\0&1&-3&15/2&-41/2\\0&0&1&-5&35/2\\0&0&0&1&-7\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$

$\Pi^{\dagger}\rightarrow\left.\begin{array}{l}(\Pi^{\dagger})^{(L)}=\mathbb{S}^{-1}(\Pi^{\dagger})^{(m)}\mathbb{S}\\ (\Pi^{\dagger})^{(m)}=\mathbb{S}(\Pi^{\dagger})^{(L)}\mathbb{S}^{-1}\end{array}\right\}$ Esta es la manera en que transforman las representaciones

Considere un $|f\rangle$ con coordenadas en x y un $|g\rangle$ con coordenadas en y:

✓ para este caso

$\langle f|\Pi^{\dagger}|g\rangle=\langle g|\Pi|f\rangle^{*}=\langle g|\Pi|f\rangle$ y $\langle f|g\rangle=x^{T}Gy$ → $\langle g|\Pi|f\rangle=(\Pi x)^{T}Gy=x^{T}\Pi^{T}Gy$

→ $\langle f|\Pi^{\dagger}|g\rangle=x^{T}G(\Pi^{\dagger}y)$

→ $\Pi^{T}G=G\Pi^{\dagger}$, $\Pi^{\dagger}=G^{-1}\Pi^{T}G$

$\{1,t,t^2,t^3,t^4\}\rightarrow(\Pi^{\dagger})^{i\,(m)}_{j}=G_m^{-1}(\Pi^{(m)})^{T}G_m$

$=\begin{pmatrix}225/128&0&-525/64&0&945/128\\0&75/8&0&-105/8&0\\-525/64&0&2205/32&0&-4725/64\\0&-105/8&0&175/8&0\\945/128&0&-4725/64&0&11025/128\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\1&1&0&0&0\\1&2&1&0&0\\1&3&3&1&0\\1&4&6&4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&2/3&0&2/5\\0&2/3&0&2/5&0\\2/3&0&2/5&0&2/7\\0&2/5&0&2/7&0\\2/5&0&2/7&0&2/9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1849/64&329/16&1099/64&219/16&739/64\\-135/4&-101/4&-73/4&-63/4&-51/4\\-9765/32&-1785/8&-5743/32&-1179/8&-4113/32\\245/4&175/4&385/12&109/4&99/4\\23625/64&4305/16&13755/64&2835/16&9829/64\end{pmatrix}$

$\{P_0,P_1,P_2,P_3,P_4\}\rightarrow(\Pi^{\dagger})^{i\,(L)}_{j}=\mathbb{S}^{-1}(\Pi^{\dagger})^{(m)}\mathbb{S}=\begin{pmatrix}1&0&1/3&0&1/5\\0&1&0&3/5&0\\0&0&2/3&0&4/7\\0&0&0&2/5&0\\0&0&0&0&8/35\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1849/64&329/16&1099/64&219/16&739/64\\-135/4&-101/4&-73/4&-63/4&-51/4\\-9765/32&-1785/8&-5743/32&-1179/8&-4113/32\\245/4&175/4&385/12&109/4&99/4\\23625/64&4305/16&13755/64&2835/16&9829/64\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1/2&0&3/8\\0&1&0&-3/2&0\\0&0&3/2&0&-15/4\\0&0&0&5/2&0\\0&0&0&0&35/8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\3&1&0&0&0\\15/2&5&1&0&0\\44/2&35/2&7&1&0\\675/8&123/2&63/2&9&1\end{pmatrix}$