胡延伸 PB22050983

问题一

1. DFT（离散傅里叶变换）

对于二维DFT：

$$F(u,v) = \sum_{x=0}^{3}\sum_{y=0}^{3} f(x,y) \cdot e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{4}+\frac{vy}{4}\right)} \tag{1}$$

计算步骤：

1. **垂直方向（列）DFT**：
   每列均为全0或全1，列DFT仅在$u=0$非零：
   • 列0（全0）：$F_{\text{col}}(u,0)=0$。
   • 列1和列2（全1）：$F_{\text{col}}(0,1)=F_{\text{col}}(0,2)=4$（其他$u$为0）。
   • 列3（全0）：$F_{\text{col}}(u,3)=0$。

   中间矩阵（仅保留$u=0$行）：

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

2. **水平方向（行）DFT**：
   对中间矩阵的$u=0$行$[0,4,4,0]$计算DFT：
   • $v=0$：$0+4+4+0=8$。
   • $v=1$：$4e^{-j\pi/2}+4e^{-j\pi}=-4j-4=-4(1+j)$。
   • $v=2$：$4e^{-j\pi}+4e^{-j2\pi}=0$。
   • $v=3$：$4e^{-j3\pi/2}+4e^{-j3\pi}=4j-4=4(-1+j)$。

DFT结果：

$$\text{DFT} = \begin{bmatrix} 8 & -4(1+j) & 0 & 4(-1+j) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

---

2. DCT（离散余弦变换）

DCT 变换公式为

$$C(u,v) = \frac{1}{2}\alpha(u)\alpha(v)\sum_{x=0}^{3}\sum_{y=0}^{3} f(x,y) \cdot \cos\left(\frac{(2x+1)u\pi}{8}\right) \cdot \cos\left(\frac{(2y+1)v\pi}{8}\right) \tag{4}$$

其中$\alpha(w)=\frac{1}{\sqrt{2}}$（当$w=0$）否则1。

1. **垂直方向（列）DCT**：
   每列均为全0或全1，列DCT仅在$v=0$非零：
   • 列0和列3：$C_{\text{col}}(v,0)=C_{\text{col}}(v,3)=0$。
   • 列1和列2：$C_{\text{col}}(0,1)=C_{\text{col}}(0,2)=2\sqrt{2}$（其他$v$为0）。
2. **水平方向（行）DCT**：
   对中间矩阵的$v=0$行$[0,2\sqrt{2},2\sqrt{2},0]$计算DCT：
   • $u=0$：$\sqrt{2}(2\sqrt{2})=2$。
   • $u=2$：$\sqrt{2}(-\sqrt{2})=-2$（其他u为0）。

DCT结果：

$$\text{DCT}=\begin{bmatrix}2 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{5}$$

---

3. Hadamard变换

变换矩阵为4阶哈达玛矩阵H_4：

$$H_4=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix} \tag{6}$$

变换结果为$\text{Hadamard}=\frac{1}{4}H_4\cdot F\cdot H_4$。

1. **行变换**：$H_4\cdot F$结果仅第一行非零：

$$\begin{bmatrix}0 & 4 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{7}$$

2. **列变换**：$H_4\cdot(H_4\cdot F)$：
   • 第一行：$8,0,0,-8$，归一化后为$2,0,0,-2$。

Hadamard结果：

$$\text{Hadamard}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{8}$$

---

4. Haar变换

公式：
一级分解通过平均（低频）和差值（高频）实现，未归一化版本：

$$\text{Haar} = \begin{cases} \text{低频：} & \frac{f(2k)+f(2k+1)}{2} \\ \text{高频：} & \frac{f(2k)-f(2k+1)}{2} \end{cases} \tag{9}$$

计算步骤：

1. **行变换**：每行$[0,1,1,0]$分解为：
   - 低频：$[1,1]$（平均），高频：$[-1,1]$（差值）。
2. **列变换**：每列均为相同值，分解后仅保留低频：
   - 列1和列2：低频为$1,1$，高频为$0,0$。

Haar结果：

$$\text{Haar} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{10}$$

问题二

图像维度为64×64，展平为4096维向量，协方差矩阵为4096×4096的单位矩阵。 单位矩阵的特征值均为1，共有4096个特征值。

当保留前 k 个主成分时，重建的均方误差为 **被舍弃的特征值之和**。舍弃的特征值数量为 $4096-k$，此处$k=\frac{4096}{2}=2048$。

被舍弃的特征值总和：$(4096-2048)\times 1=2048$。则总均方误差（MSE） 为被舍弃特征值总和除以像素数：

$$\text{MSE} = \frac{2048}{4096} = 0.5. \tag{11}$$

问题三

手动 DFT:

```
def dft_matrix(N):
    x, u = np.meshgrid(np.arange(N), np.arange(N))
    omega = np.exp(-2j * np.pi * x * u / N)
    return omega / np.sqrt(N)  # 标准化

def dft2d(image):
    N, M = image.shape
    # 构建行和列的DFT矩阵
    W_row = dft_matrix(N)
    W_col = dft_matrix(M)
    # 行变换 → 列变换
    dft_rows = np.dot(W_row, image)
    dft_result = np.dot(dft_rows, W_col)
    return dft_result
```

手动 DCT:

```
def dct_matrix(N):
    c = np.zeros((N, N))
    for u in range(N):
        for x in range(N):
            if u == 0:
                c[u, x] = np.sqrt(1/N)
            else:
                c[u, x] = np.sqrt(2/N) * np.cos((2*x + 1) * u * np.pi / (2*N))
    return c

def dct2d(image):
    N, M = image.shape
    # 构建DCT矩阵
    C_row = dct_matrix(N)
    C_col = dct_matrix(M)
    # 行变换 → 列变换
    dct_rows = np.dot(C_row, image)
    dct_result = np.dot(dct_rows, C_col.T)
    return dct_result
```

频谱可视化:

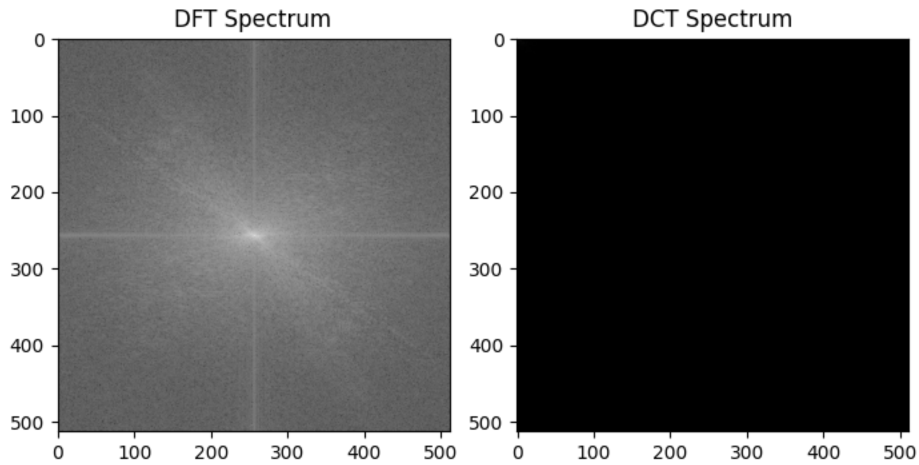
```
def plot_spectrum(dft, dct):
    plt.figure(figsize=(12, 4))

    # DFT频谱（对数幅度 + 中心化）
    dft_shift = np.fft.fftshift(dft)
    magnitude = np.log(np.abs(dft_shift) + 1e-9)  # 避免log(0)
    plt.subplot(131), plt.imshow(magnitude, cmap='gray'), plt.title('DFT Spectrum')

    # DCT频谱（直接显示）
    plt.subplot(132), plt.imshow(np.abs(dct), cmap='gray'), plt.title('DCT Spectrum')

    plt.tight_layout()
    plt.show()
```

输出结果如下图:



DFT Spectrum
DCT Spectrum
0
100
200
300
400
500