

数学建模作业二

胡延伸 PB22050983

1. 问题描述与约束分析

输入条件：

- **时间资源**：周一至周五每天5个教学时间段，共25个时间段。
- **课程与教师**：共 n 门课程，由 m 位教师讲授。每位教师授课1-3门，周总工作量 ≤ 5 个时间段；每门课程周授课次数 $c_i \in \{1, 2, 3\}$ ，且由一位教师独立负责。设所有课程周总授课次数为 $S = \sum_{i=1}^n c_i$ 。
- **排课约束**：
 - 每门课程每天至多安排一次。
 - 相邻两次授课至少间隔一天。
 - 同一时间段内，不同课程需占用不同教室。
- **教师工作量约束**：
 - 每位教师总授课次数不超过5。因此，总需求 $S \leq 5m$
 - 由于每位教师最多交3门课，因此总课程数满足： $3m \geq n$ ，即 $m \geq \lceil \frac{n}{3} \rceil$

优化目标：最小化教室数量 R ，即所有时间段中所需教室数的最大值。

2. 数学模型与理论下限

总需求与教室下限：

由于每个时间段最多被使用 R 次（即该时间段安排的课程数），故总需求：

$$S \leq 25R$$

因此，教室数量的下限为：

$$R_{\min} = \left\lceil \frac{S}{25} \right\rceil$$

该下限成立的充分条件是存在一种排课方案，使得每个时间段内课程数不超过 R_{\min} ，且满足所有约

束。

3. 分阶段排课算法

为逼近理论下限，提出以下两阶段排课策略：

阶段一：课程的天分配

1. 固定间隔分配：

- $c_i = 3$ 的课程分配至周一、周三、周五。
- $c_i = 2$ 的课程分配至非连续天（如周一与周三、周二与周四等）。
- $c_i = 1$ 的课程可分配至任意天。

2. 冲突检测：确保同一教师的多门课程不在同一天。

3. 遍历所有时间段 $t \in \{1, 2, \dots, 25\}$ ，统计每个时间段分配的课程数 N_t 。若存在 $N_t > R_{\text{current}}$ （当前尝试的教室数，初始值为 R_{min} ），则触发调整。

• 冲突类型分类：

- 教师冲突：同一教师在某一时间段被分配多门课程。
- 教室过载：同一时间段课程数超过 R_{current} 。

阶段二：时间段分配

1. 贪心策略：

- 按 c_i 从大到小排序课程，优先处理约束严格的课程。
- 对每门课程的每次授课，选择当前占用率最低的时间段，并避开同一教师的其他课程时段。

2. 动态调整

• 冲突课程筛选：从过载时间段 t 中筛选可调整的课程，优先选择约束较弱的课程：

- 授课次数少的课程（如 $c_i = 1$ 的课程）。
- 时间段灵活性高的课程（如该课程的其他授课时段尚未固定）。
- 无教师冲突的课程（优先调整不引发教师冲突的课程）。
 - 排除无法调整的课程（如该课程的所有可能时段均已被占用）。

• 回溯式时段重分配

◦ 单课程调整：

- 对选定的课程 C ，从其可用的其他时段集合 $T_{\text{available}}$ 中选择一个时段 t' ，使得：
 - t' 所在天未被 C 占用（满足每天至多一次）。
 - t' 与 C 的其他授课时段间隔至少一天。
 - 教师在该时段 t' 无其他课程。
 - $N_{t'} < R_{\text{current}}$ 。

- b. 若找到满足条件的 t' ，将 C 从 t 移至 t' ，更新 N_t 和 $N_{t'}$ 。
 - **多课程链式调整：**
 - 若直接移动 C 导致 t' 过载或引发新冲突，需递归调整影响链。例如：
 - 移动 C 至 $t' \rightarrow t'$ 过载 \rightarrow 选择 t' 中的另一门课程 C' 移至 t'' 。
 - **约束维护与可行性验证**
 - **硬约束检查：**
 - 每门课程每天至多一个时段。
 - 同一教师不同课程时段不重叠。
 - 课程间隔至少一天（如周一与周三允许，周二与周三禁止）。
 - **终止条件：**
 - 成功：所有 $N_t \leq R_{\text{current}}$ 且无约束冲突。
 - 失败：无法在有限步骤内找到可行解 \rightarrow 提升 R_{current} 至 $R_{\text{current}} + 1$ ，重新运行阶段二。
-

6. 结论

本研究证明了在教师工作量与课程间隔约束下，教室数量的理论下限为 $\lceil S/25 \rceil$ ，并提出一种高效的两阶段排课算法。通过合理分配天和时间段资源，可实际达到该下限，显著优化教室使用效率。未来工作可扩展至多教室类型或动态课程需求场景。