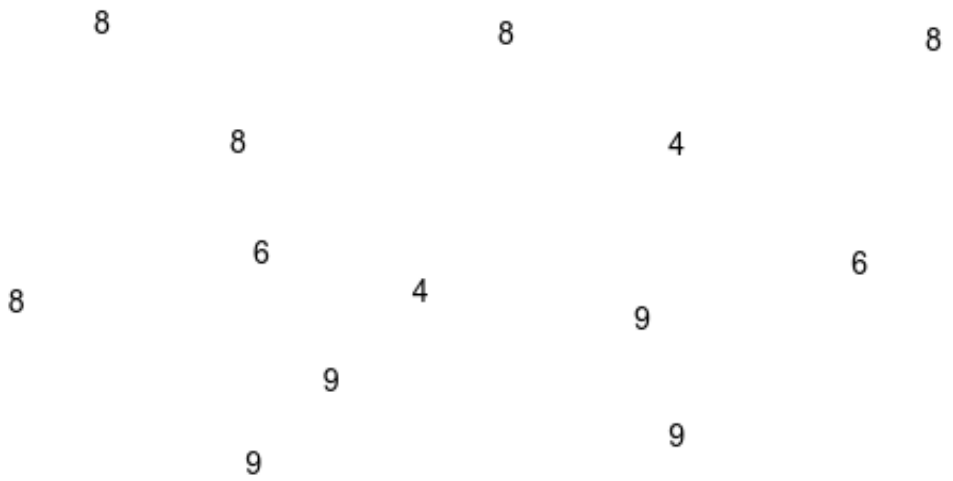


第四章 数值计算模型

例 4.1. (Hydrographic Data) 在低潮时测得坐标 (x_i, y_i) 处的水深 z_i 如下。

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
x_i	129	140	108.5	88	185.5	195	105.5	157.5	107.5	77	162	162	117.5
y_i	7.5	141.5	28	147	22.5	137.5	85.5	-6.5	-81	3	-66.5	84	-38.5
z_i	4	8	6	8	6	8	8	9	9	8	9	4	9

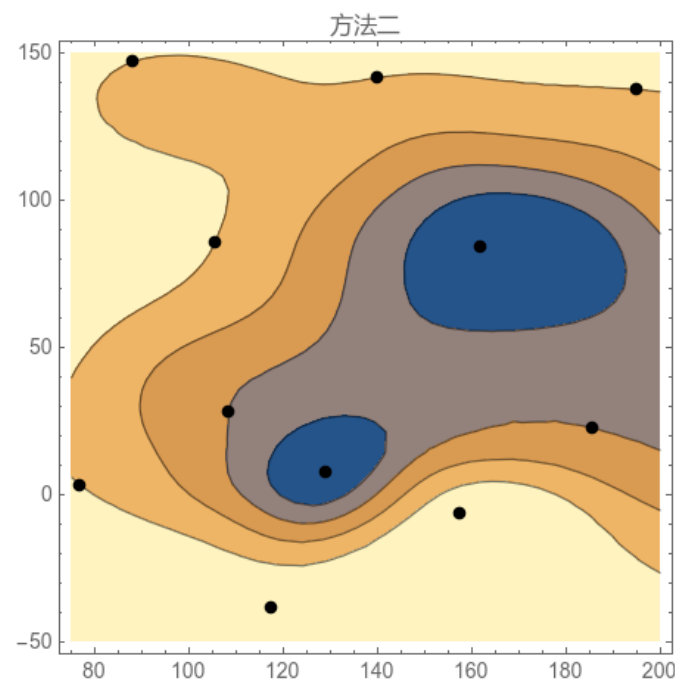
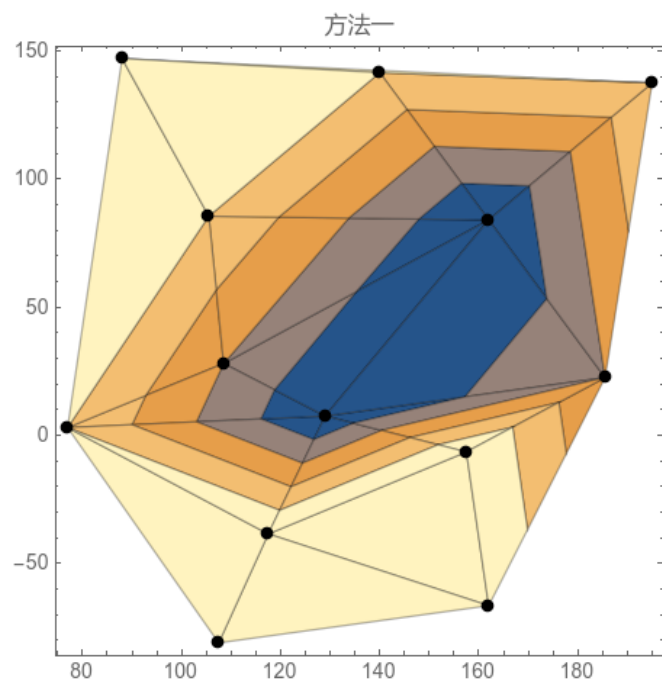
吃水深度 5 的船应避免进入矩形 $[75, 200] \times [-50, 150]$ 内的哪些区域？



模型建立：利用数据 (x_i, y_i, z_i) ，构造插值函数 $z = f(x, y)$ 。具体做法如下。

- 方法一：对数据点作三角剖分，构造分片线性函数，插值函数在 (x, y) 处的值为 $f(x, y)$ 。
- 方法二：设点 (x_i, y_i) 处有亮度 z_i 的点光源， (x, y) 处的亮度为 $f(x, y)$ 。即以 $\frac{1}{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}$ 为权值，构造线性拟合函数，拟合函数在 (x, y) 处的值为 $f(x, y)$ 。

下为 $z = f(x, y)$ 的等高线图。深蓝色为避开进入区域。

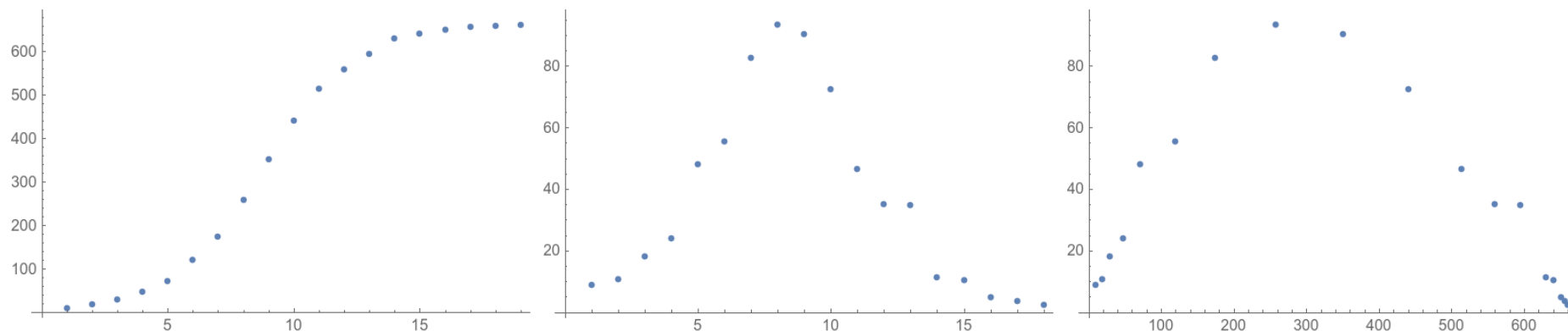


例 4.2. (酵母培养物的增长) 下表中的数据是从测量酵母培养物增长的实验收集来的。

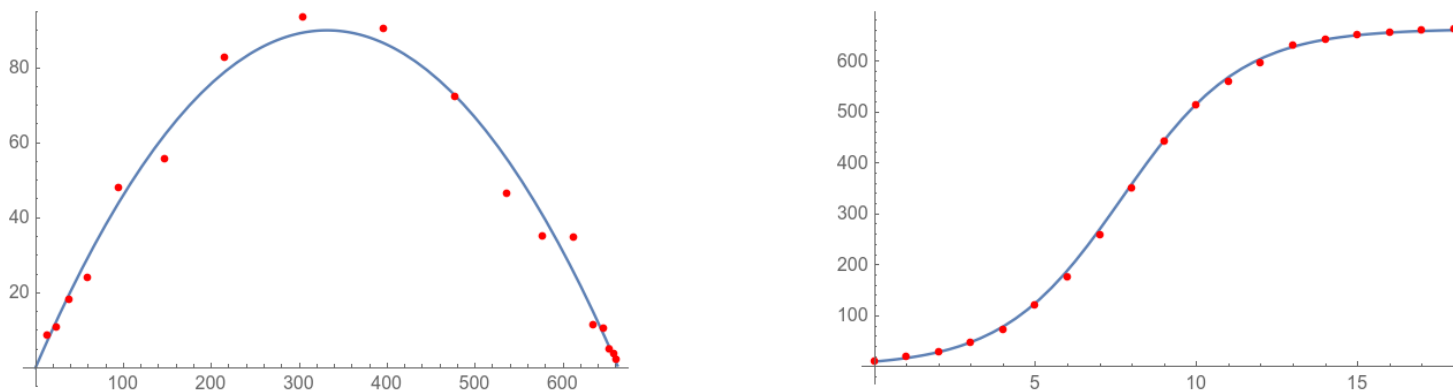
时间	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
数量	9.6	18.3	29.0	47.2	71.1	119.1	174.6	257.3	350.7	441.0
时间	10	11	12	13	14	15	16	17	18	
数量	513.3	559.7	594.8	629.4	640.8	651.1	655.9	659.6	661.8	

试建立模型预测培养物种群的数量。

模型建立：设培养物在时刻 t 的数量为 x_t 。观察数列 $\{x_n\}_{0 \leq n \leq 18}$ ， $\{x_{n+1} - x_n\}_{0 \leq n \leq 17}$ ，以及点列 $\{(x_n, x_{n+1} - x_n)\}_{0 \leq n \leq 17}$ 的图像，猜测 $x'(t) = -ax^2 + bx \Rightarrow x(t) = \frac{b}{a - ce^{-bt}}$ 。

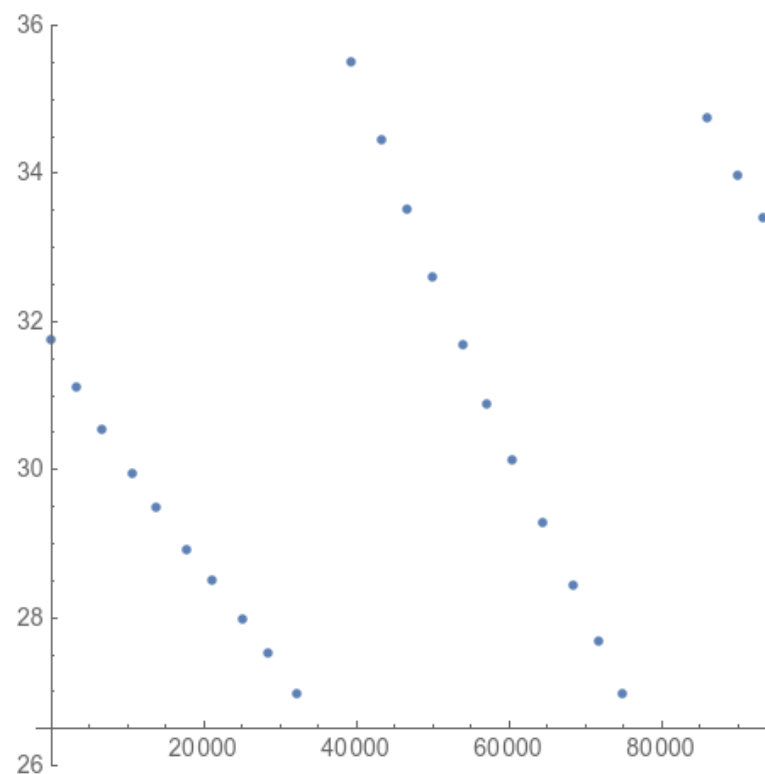


对点列 $\{(\frac{x_n + x_{n+1}}{2}, x_{n+1} - x_n)\}$ 作最小二乘拟合 $y = -ax^2 + bx$ ，得 $a \approx 8.18877 \times 10^{-4}$ ， $b \approx 0.542837$ 。再求数列 $\{(a - \frac{b}{x_n})e^{bn}\}_{0 \leq n \leq 18}$ 的均值，得 $c \approx -0.531075$ 。拟合效果如图。



例 4.3. (Water Tank Flow) 社区有一个直径 $d = 57$ 英尺的圆柱形水塔。当水位下降到最低水位 $L = 27$ 英尺时，水泵开始向水塔注水直到最大高度 $H = 35.5$ 英尺。水泵每天供水 1 至 2 次，每次约 2 小时。请根据以下数据 (精度在 0.5%) 估计水塔每时刻的供水量 $f(t)$ ，以及每天的总用水量。

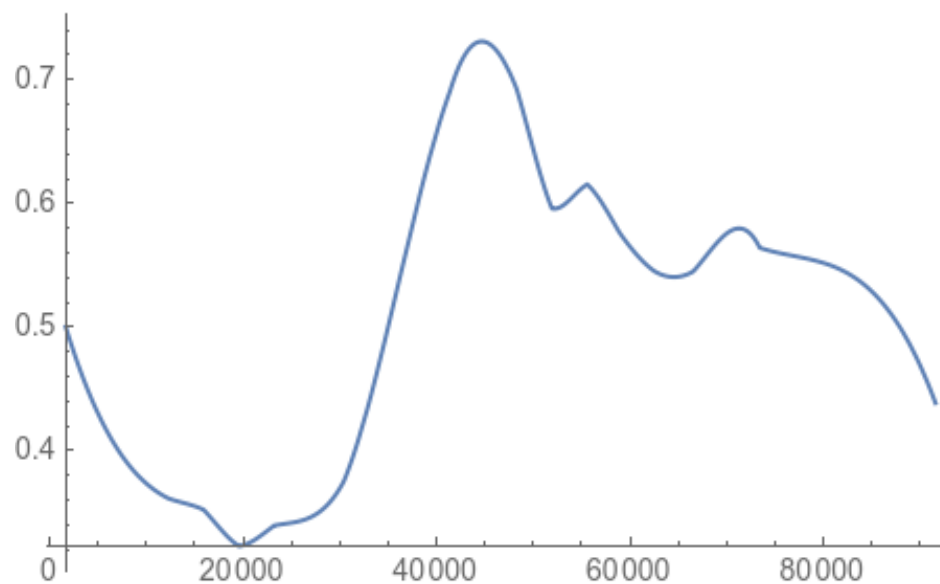
时间	水位	时间	水位	时间	水位
0	31.75	35932	—	68535	28.42
3316	31.10	39332	—	71854	27.67
6635	30.54	39435	35.50	75021	26.97
10619	29.94	43318	34.45	79254	—
13937	29.47	46636	33.50	82649	—
17921	28.92	49953	32.60	85968	34.75
21240	28.50	53936	31.67	89953	33.97
25223	27.97	57254	30.87	93270	33.40
28543	27.52	60574	30.12		
32284	26.97	64554	29.27		



模型建立： 设水塔水位 $h(t)$ ，则 $f(t) = -\frac{\pi d^2}{4} h'(t)$ 。根据数据，可把

$$\left(\frac{t_i + t_{i+1}}{2}, \frac{\pi d^2}{4} \frac{h_i - h_{i+1}}{t_{i+1} - t_i} \right), \quad i \in \{1, 2, \dots, 27\} \setminus \{10, 11, 12, 23, 24, 25\}$$

作为 $f(t)$ 的插值节点，构造 $f(t)$ 的样条插值函数，图像如下。

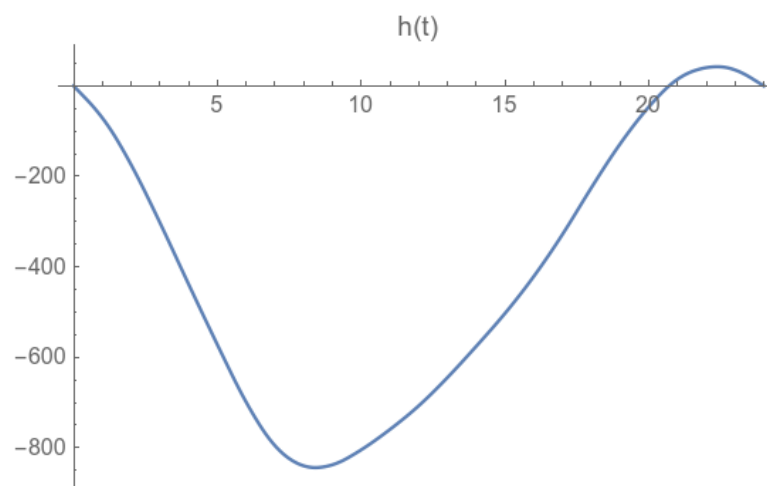
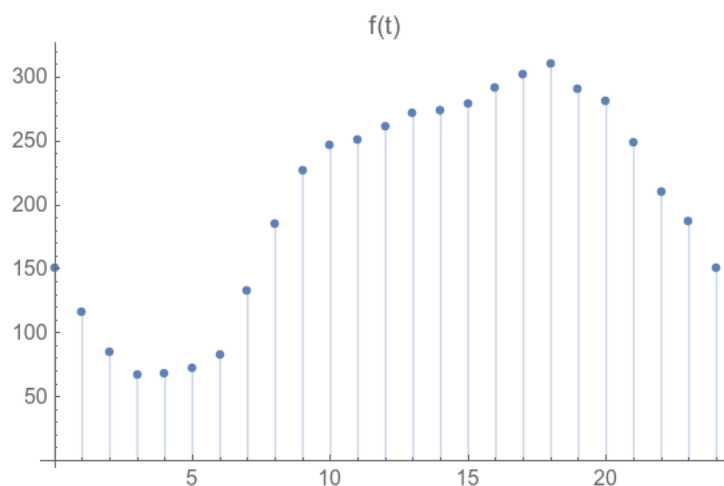


每日总用水量 $T = \int_0^{86400} f(t) dt \approx 44002.7$ 立方英尺。

例 4.4. (污水均流池的设计) 以下表中社区一天的生活污水流量为依据，并留有 25% 的裕量设计污水均流池。设均流池的形状为长方体，深度 3m，底部施工面积的成本 340 元/ m^2 ，两条长边及一条短边的施工成本 250 元/m，另一条短边的施工成本 450 元/m。确定均流池的恒定流量、最大容量和具体尺寸。

时刻	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
流量	0.0417	0.0321	0.0236	0.0185	0.0189	0.0199	0.0228	0.0369	0.0514	0.063	0.0685	0.0697
时刻	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
流量	0.0725	0.0754	0.0761	0.0775	0.081	0.0839	0.0863	0.0807	0.0781	0.069	0.0584	0.0519

模型建立： 设均流池的容积 V ，时刻 t 时的污水流量 $f(t)$ 为分段线性函数。均流池的恒定流量 $c = \frac{1}{24} \int_0^{24} f(x)dx \approx \frac{1}{24} \sum_{i=0}^{23} f(i) = 203.67m^3/h$ 。时刻 t 时，均流池中的污水总量 $g(t) = g(0) - ct + \int_0^t f(x)dx$ ，其中 $g(0)$ 满足 $0 \leq g(0) - ct + \int_0^t f(x)dx \leq V, \forall t$ 。



当 $f(t) = c$ 时， $h(t) = \int_0^t f(x)dx - ct$ 取到极值。解得 $h(t)$ 的最小值 $h_1 \approx -835.904$ ，最大值 $h_2 \approx 39.3977$ 。故 $V = 1.25(h_2 - h_1) \approx 1094.13$ 。

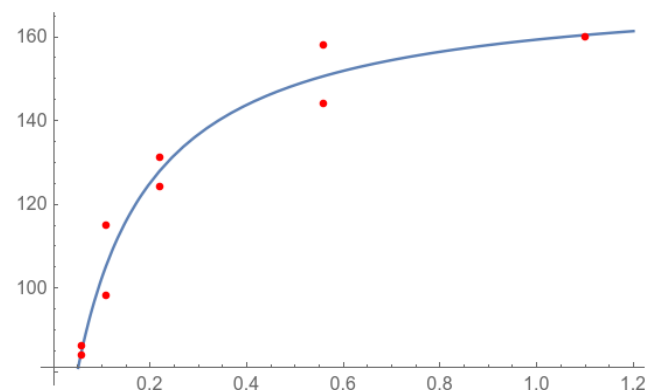
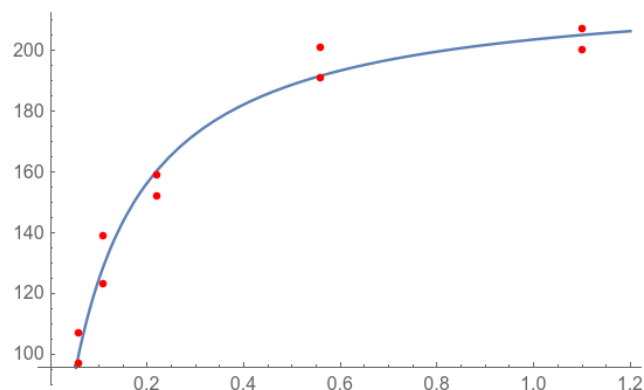
设均流池的短边长度 a ，长边长度 $b = \frac{V}{3a}$ ，则施工成本 $S = \frac{340V}{3} + 700a + 500b$ 。

当 $a = \sqrt{\frac{5V}{21}} \approx 16.1402$ ， $b = \sqrt{\frac{7V}{15}} \approx 22.5963$ 时， S 最小。

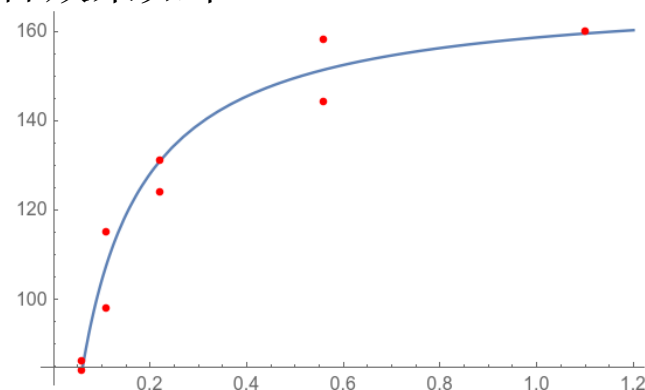
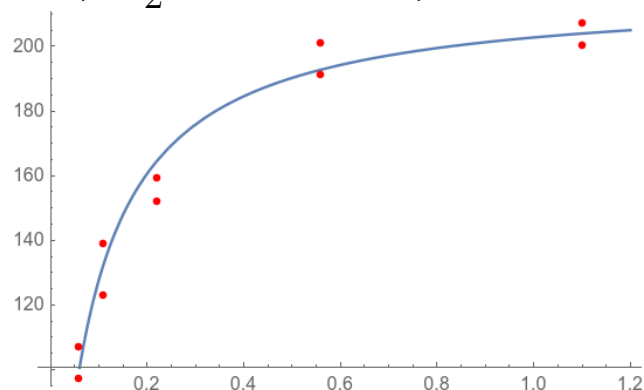
例 4.5. (酶促反应) 某生化系学生为了研究嘌呤霉素在某项酶促反应中对反应速度与底物浓度之间关系的影响，设计了两个实验，一个实验中所使用的酶是经过嘌呤霉素处理的，而另一个实验所用的酶是未经嘌呤霉素处理的，所得的实验数据见表。试根据问题的背景和这些数据建立一个合适的数学模型，来反应这项酶促反应的速度与底物浓度以及嘌呤霉素处理与否之间的关系。

底物浓度		0.02		0.06		0.11		0.22		0.56		1.10	
反应 速度	处理	76	47	97	107	123	139	159	152	191	201	207	200
	未处理	67	51	84	86	98	115	131	124	144	158	160	—

模型建立： 设在使用经过处理/未经处理的酶时，反应速度 y 与底物浓度 x 的关系分别记作 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 。根据数据图像，猜测 $f(x) = a_1 + \frac{b_1}{x+c_1}$ ， $g(x) = a_2 + \frac{b_2}{x+c_2}$ ，解得 $(a_1, b_1, c_1) \approx (221.67, -19.8829, 0.104666)$ ， $(a_2, b_2, c_2) \approx (172.526, -14.639, 0.108726)$ 。拟合效果如下。

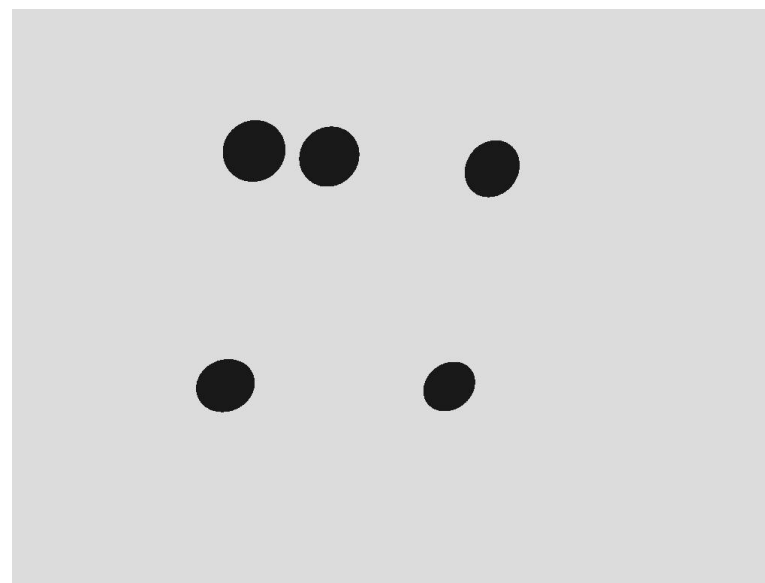
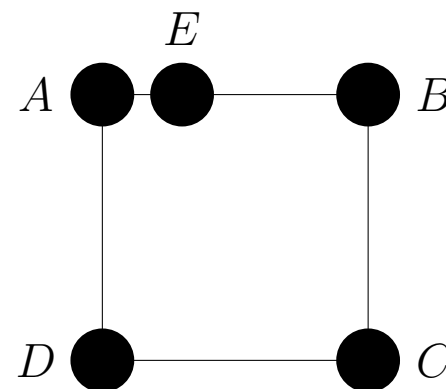


进一步猜测 $f(x) = a_1 + \frac{b_1}{x+c}$ ， $g(x) = a_2 + \frac{b_2}{x+c}$ 。解得 $a_1 \approx 217.005$ ， $b_1 \approx -15.2924$ ， $a_2 \approx 168.909$ ， $b_2 \approx -11.0654$ ， $c \approx 0.0710108$ 。拟合效果如下。



例 4.6. (数码相机定位) 有人设计靶标如下, 取 1 个边长为 100mm 的正方形 $ABCD$, 分别以四个顶点为圆心, 12mm 为半径作圆。以 AB 边上距离 A 点 30mm 处的 E 为圆心, 12mm 为半径作圆。用一位置固定的数码相机摄得其像, 如图所示。请你们:

1. 建立数学模型和算法以确定靶标上圆的圆心在该相机像平面的像坐标, 这里坐标系原点取在该相机的光学中心, $x-y$ 平面平行于像平面;
2. 对分别给出的靶标及其像, 计算靶标上圆的圆心在像平面上的像坐标, 该相机的像距 (即光学中心到像平面的距离) 是 1577 个像素单位 (1 毫米约为 3.78 个像素单位), 相机分辨率为 1024×768 ;
3. 设计一种方法检验你们的模型, 并对方法的精度和稳定性进行讨论;
4. 建立用此靶标给出两部固定相机相对位置的数学模型和方法。



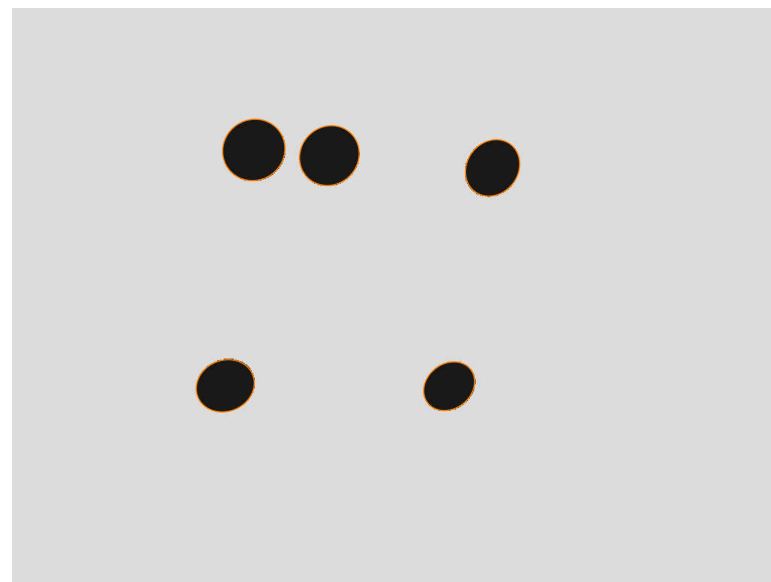
模型建立： 设靶标上的点 $P(x, y)$ 对应照片中的像素点 $Q(i, j)$ ，则存在 a_1, \dots, a_8 使得

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \text{ 平行于 } \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ j \\ 1 \end{pmatrix}.$$

若已知 A, B, C, D 对应的像素点 $(i_1, j_1), (i_2, j_2), (i_3, j_3), (i_4, j_4)$ ，则可求解线性方程组，唯一确定 a_1, \dots, a_8 。

定义函数 $S(i_1, j_1, i_2, j_2, i_3, j_3, i_4, j_4) = m_1 + m_2$ ，其中 m_1 是满足“ P 在靶标圆外”的黑色像素点 Q 的个数， m_2 是满足“ P 在靶标圆内”的灰色像素点 Q 的个数。 S 的最小值点即为 A, B, C, D 对应的像素点。

问题求解： 最小值点 $(i_1, j_1, i_2, j_2, i_3, j_3, i_4, j_4) \approx (189.688, 323, 213.5, 640.875, 503.5, 583, 503, 284.969)$ 。
靶标中的 5 个圆的像如图中橙色部分。



例 4.7. (储油罐的变位识别与罐容表标定) 通常加油站都有若干个储存燃油的地下储油罐，并且一般都有与之配套的“油位计量管理系统”，采用流量计和油位计来测量进/出油量与罐内油位高度等数据，通过预先标定的罐容表（即罐内油位高度与储油量的对应关系）进行实时计算，以得到罐内油位高度和储油量的变化情况。

许多储油罐在使用一段时间后，由于地基变形等原因，使罐体的位置会发生纵向倾斜和横向偏转等变化（以下称为变位），从而导致罐容表发生改变。按照有关规定，需要定期对罐容表进行重新标定。图 1 是一种典型的储油罐尺寸及形状示意图，其主体为圆柱体，两端为球冠体。图 2 是其罐体纵向倾斜变位示意图，图 3 是罐体横向偏转变位的截面示意图。

请你们用数学建模方法研究解决储油罐的变位识别与罐容表标定的问题。

1. 为了掌握罐体变位后对罐容表的影响，利用如图 4 的小椭圆型储油罐（两端平头的椭圆柱体），分别对罐体无变位和倾斜角为 $\alpha = 4.1^\circ$ 的纵向变位两种情况做了实验，实验数据如附件 1 所示。请建立数学模型研究罐体变位后对罐容表的影响，并给出罐体变位后油位高度间隔为 1cm 的罐容表标定值。
2. 对于图 1 所示的实际储油罐，试建立罐体变位后标定罐容表的数学模型，即罐内储油量与油位高度及变位参数（纵向倾斜角度 α 和横向偏转角度 β ）之间的一般关系。请利用罐体变位后在进/出油过程中的实际检测数据（附件 2），根据你们所建立的数学模型确定变位参数，并给出罐体变位后油位高度间隔为 10cm 的罐容表标定值。进一步利用附件 2 中的实际检测数据来分析检验你们模型的正确性与方法的可靠性。

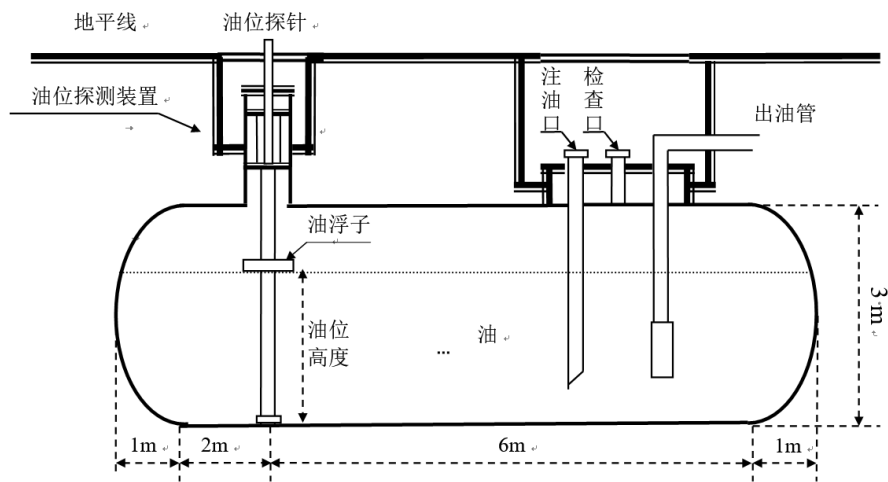


图1·储油罐正面示意图

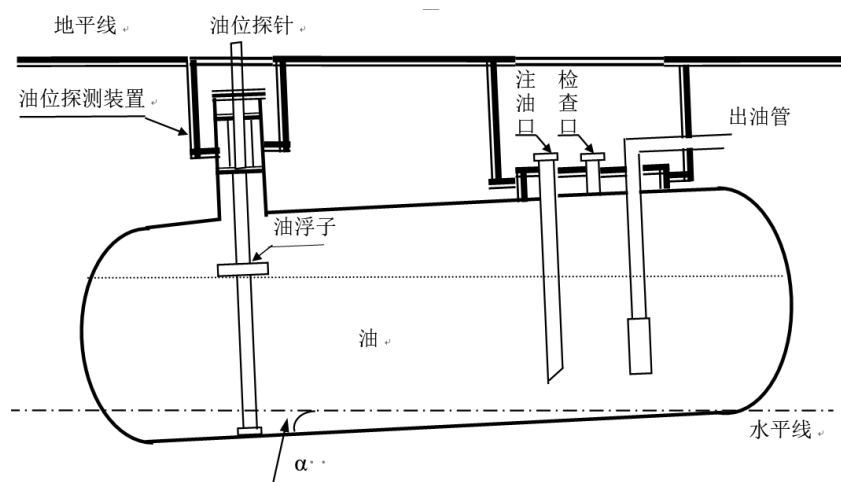


图2·储油罐纵向倾斜变位后示意图

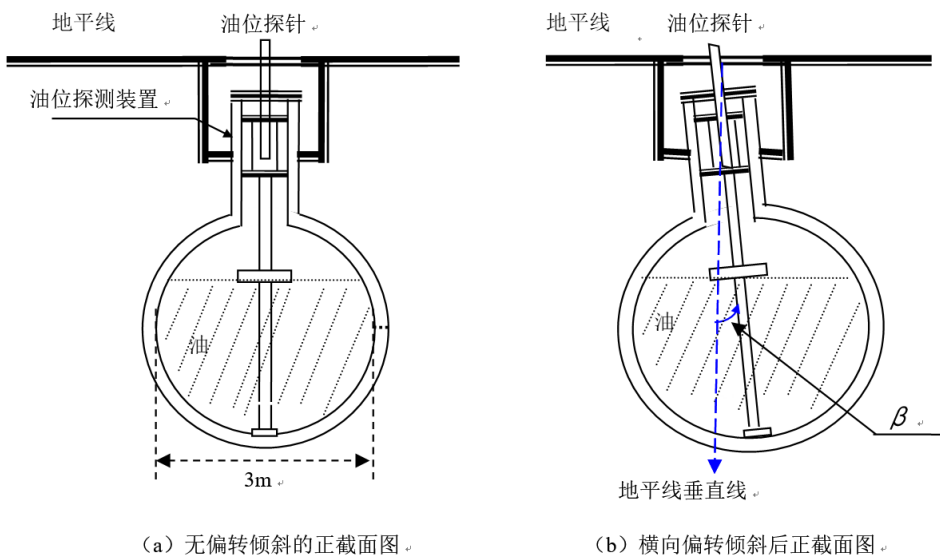


图3·储油罐截面示意图

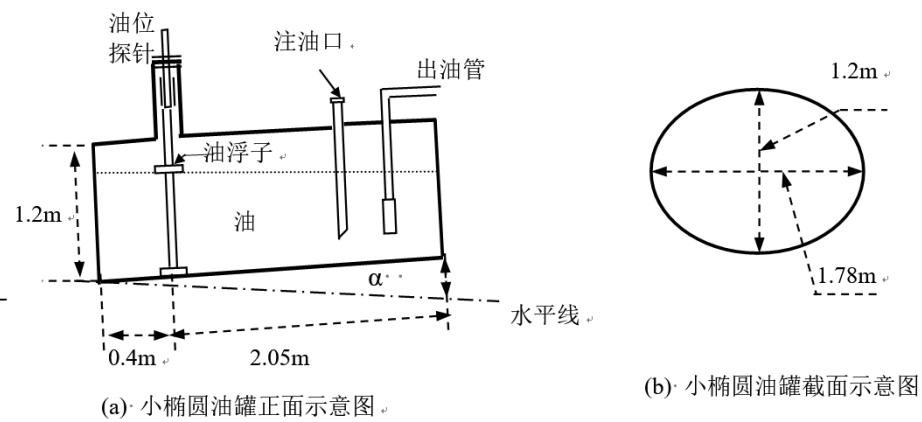
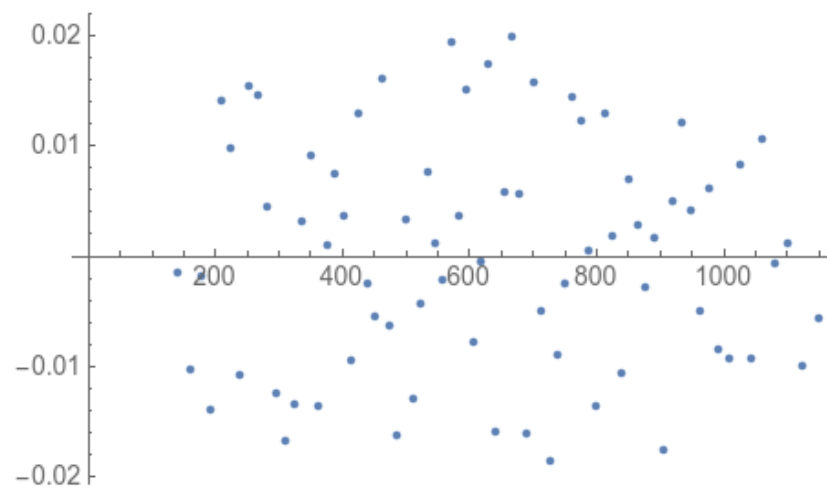
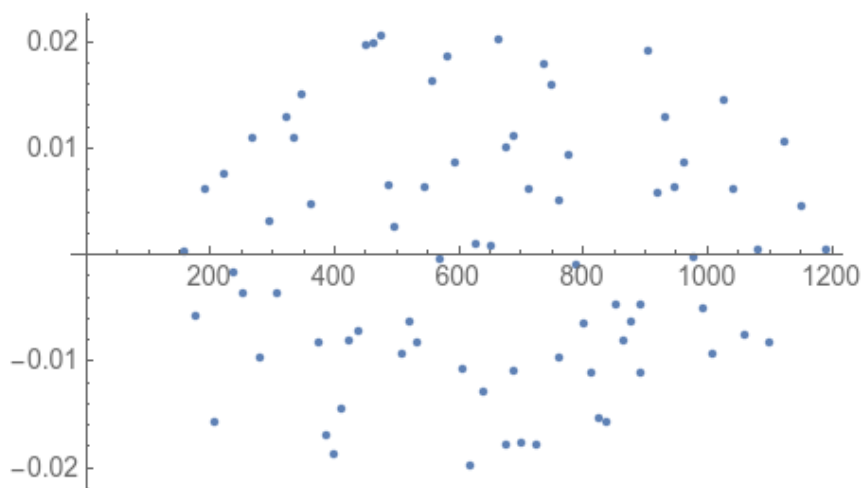


图4·小椭圆型油罐形状及尺寸示意图

模型建立：首先考虑小油罐。以椭圆柱轴线为 x 轴，油位探针为 z 轴，建立空间直角坐标系。设油浮子坐标 $(0, 0, h - 0.6)$ ，液面方程 $(\tan \alpha)x + z = h - 0.6$ ，则储油量

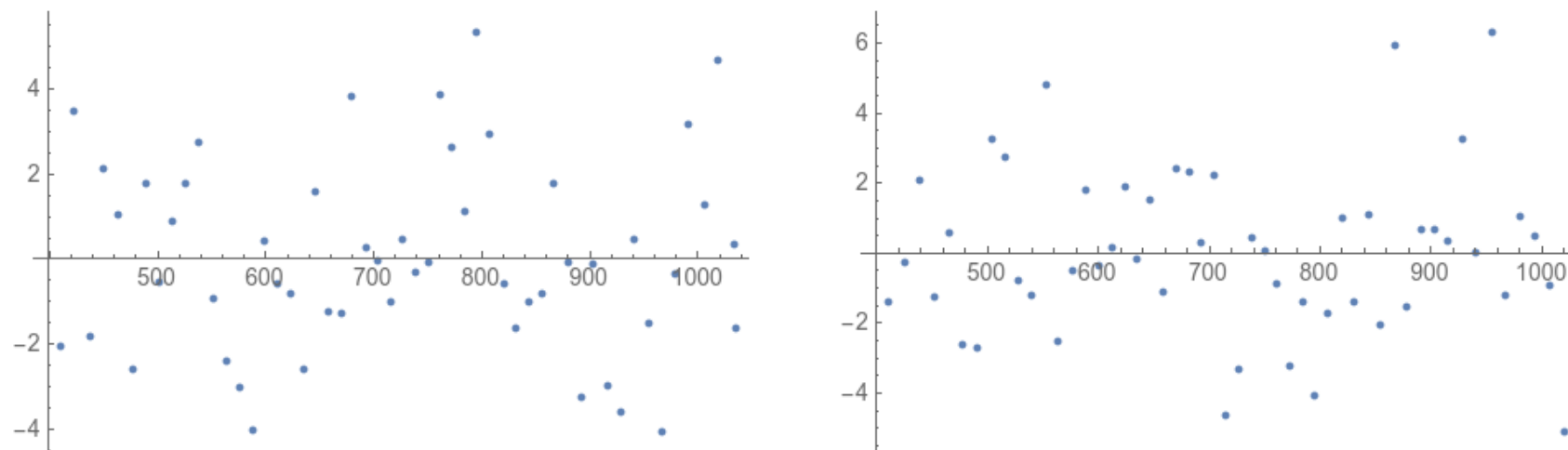
$$V_{\alpha}(h) = \iiint_{[-0.4, 2.05] \times [-0.89, 0.89] \times [-0.6, 0.6]} \text{boole} \left(\frac{y^2}{0.89^2} + \frac{z^2}{0.6^2} \leq 1, (\tan \alpha)x + z \leq h - 0.6 \right) dx dy dz$$

对于无变位情形，算出的理论值 $V(h)$ 与实验值 $U(h)$ 存在较大偏差。拟合数据发现累计进油量 $U_{in}(h) \approx 0.00117698 + 0.966291V(h)$ ，累计出油量 $U_{out}(h) \approx 3968.91 - 0.966291V(h)$ 。残差的图像如下。推测：油罐形状测量不准确，造成 $V(h)$ 不准确。



对于倾斜变位情形，累计进油量 $U_{in}(h) \approx 243.624 - 1.204.39h + 0.000455172h^2 + 1.12833V(h)$ ，

累计出油量 $U_{out}(h) \approx 3148.72 + 1.9428h - 0.00046811h^2 - 1.30251V(h)$ 。残差的图像如下。



推测：罐体变位后，油位计读数 h 不准确，造成 $V(h)$ 不准确。为了便于应用，我们不校正油位计读数，而用公式 $U_{in}(h)$ 标定罐容表。

下面考虑大油罐。以圆柱轴线为 x 轴，油位探针为 z 轴，建立空间直角坐标系。设油浮子坐标 $(0, 0, h - 1.5)$ ，液面方程 $ax + by + z = h - 1.5$ ，则储油量

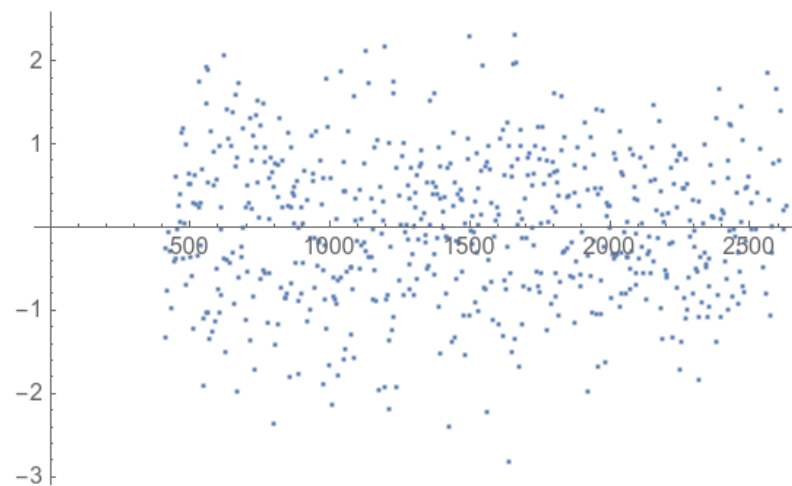
$$V_{a,b}(h) = \iiint_{[-3,7] \times [-1.5,1.5] \times [-1.5,1.5]} \text{boole}\left((x, y, z) \text{ 在油罐内并且 } ax + by + z \leq h - 1.5\right) dx dy dz.$$

定义函数 $F(a, b) = \sum_{i=2}^n \left(V_{a,b}(h_i) + u_i - V_{a,b}(h_1) - u_1 \right)^2$, h_i 为累计出油 u_i 后油位计的读数。

由 F 的最小值点 (a, b) 可得变位参数 $\alpha = \arcsin \frac{a}{\sqrt{1+a^2+b^2}}$, $\beta = \arcsin \frac{b}{\sqrt{1+a^2+b^2}}$ 。

解得 $a \approx 0.0371094$, $b \approx 0.0744141$, $\alpha \approx 2.11938^\circ$, $\beta \approx 4.25285^\circ$ 。

拟合数据得 $U_{out}(h) \approx 58996.5 + 0.00391486h - 1.00017V(h)$, 残差的图像如下。



标定罐容表值 $U(h) = 1.00017V(h) - 0.00017V(0) + 0.00391486h$ 。

模型思考：要根据实际情况有针对性地作出合理的假设，并加以检验。

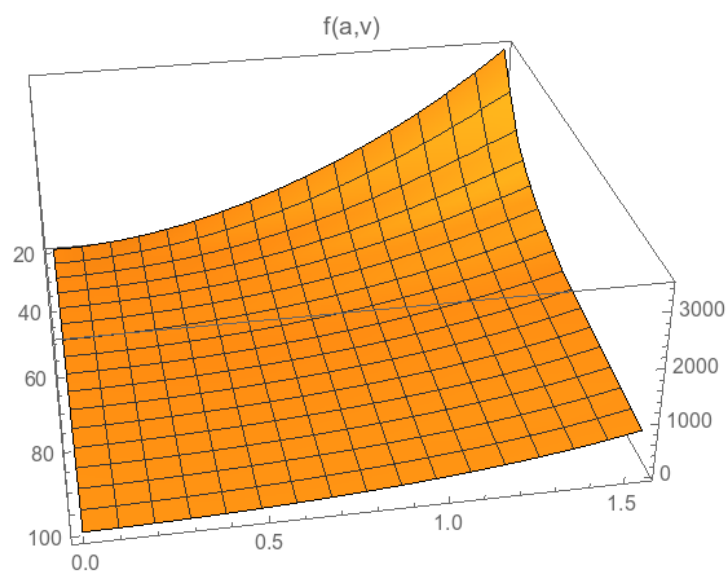
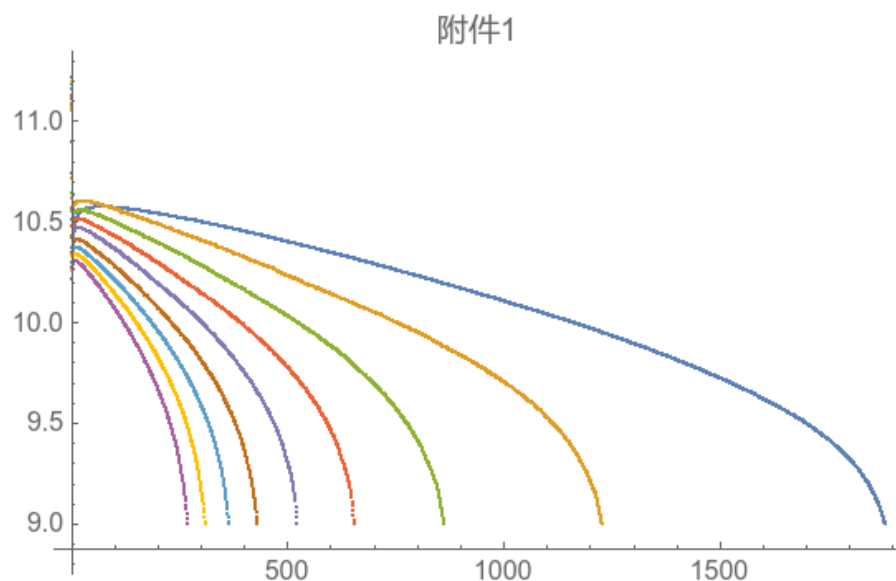
例 4.8. (电池剩余放电时间预测) 铅酸电池作为电源被广泛用于工业、军事、日常生活中。在铅酸电池以恒定电流强度放电过程中，电压随放电时间单调下降，直到额定的最低保护电压 U_m (本题中为 9V)。从充满电开始放电，电压随时间变化的关系称为放电曲线。电池在当前负荷下还能供电多长时间 (即以当前电流强度放电到 U_m 的剩余放电时间) 是使用中必须回答的问题。电池通过较长时间使用或放置，充满电后的荷电状态会发生衰减。

问题 1: 附件 1 是同一生产批次电池出厂时以不同电流强度放电测试的完整放电曲线的采样数据。请根据附件 1 用初等函数表示各放电曲线，并分别给出各放电曲线的平均相对误差 (MRE, 定义见附件 1)。如果在新电池使用中，分别以 30A、40A、50A、60A 和 70A 电流强度放电，测得电压都为 9.8 伏时，根据你获得的模型，电池的剩余放电时间分别是多少？

问题 2: 试建立以 20A 到 100A 之间任一恒定电流强度放电时的放电曲线的数学模型，并用 MRE 评估模型的精度。用表格和图形给出电流强度为 55A 时的放电曲线。

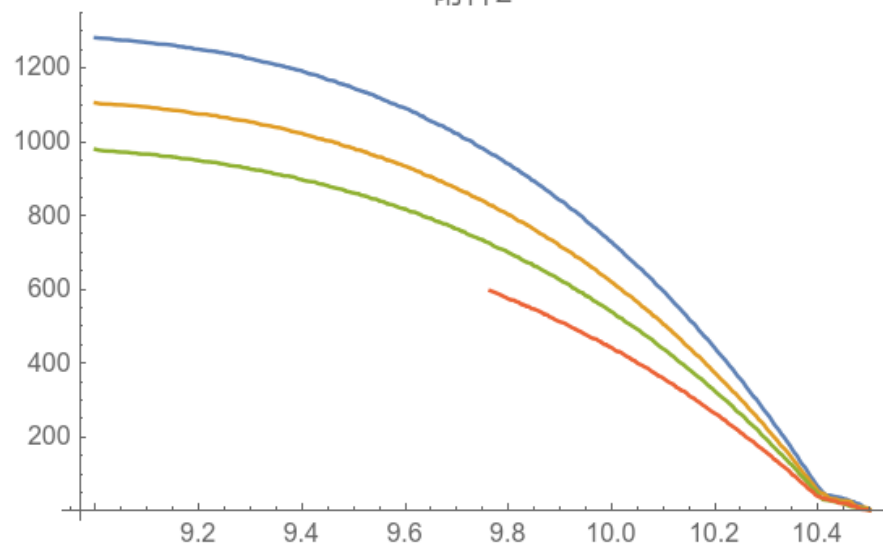
问题 3: 附件 2 是同一电池在不同衰减状态下以同一电流强度从充满电开始放电的记录数据。试预测附件 2 中电池衰减状态 3 的剩余放电时间。

模型建立： 设 $f(a, v)$ 是电压 v 的电池在电流强度 a 下的剩余放电时间。分析采样数据后发现，对于 $a = 20, 30, \dots, 100$ ， f 近似为 v 的低次多项式，记作 $p_2(v), p_3(v), \dots, p_{10}(v)$ 。从而对于任意 $a \in [10k, 10(k+1)]$ ，可设 $f(a, v) = (1 - \lambda)p_k(v) + \lambda p_{k+1}(v)$ ， $\lambda = \frac{a}{10} - k$ 。

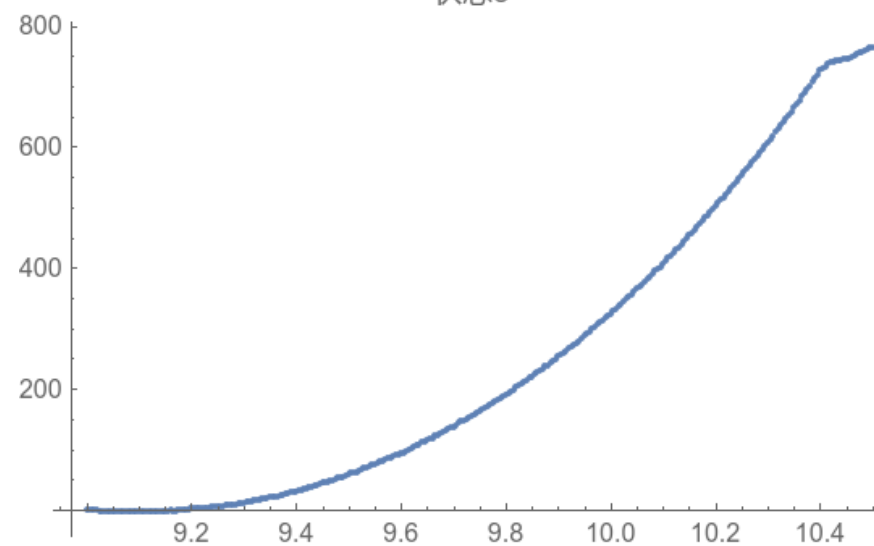


对于问题 3，可设衰减状态 3 的供电时间 $q(v) = \sum_{1 \leq i \leq 3} \lambda_i q_i(v) + \sum_{0 \leq j \leq 2} \mu_j v^j$ ，其中 $q_i(v)$ 是其他三种衰减状态的供电时间， $q(Um) - q(v)$ 即为剩余放电时间。

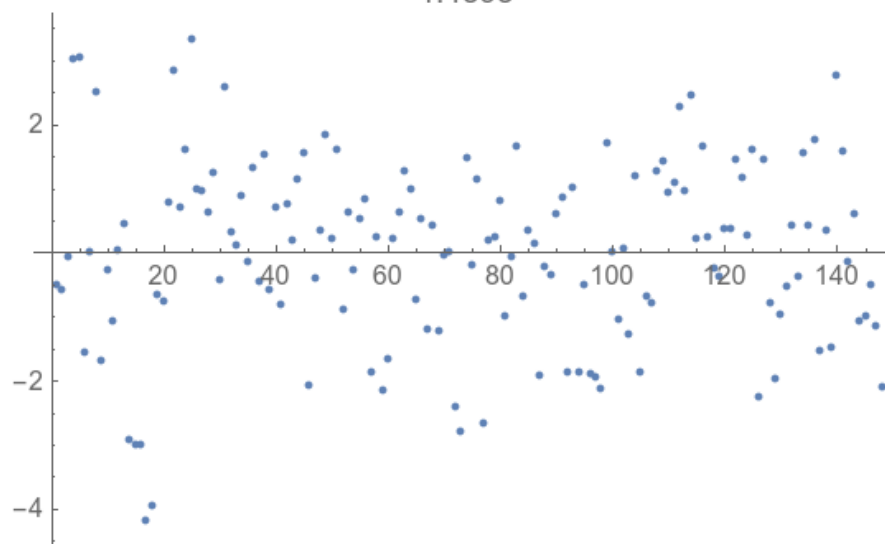
附件2



状态3



1.4393



经检验，拟合效果很好。

例 4.9. (CT 的图像重建) Computed Tomography 可以在不破坏样品的情况下，利用样品对射线能量的吸收特性对生物组织和工程材料的样品进行断层成像，由此获取样品内部的结构信息。一种典型的二维 CT 系统如图 1 所示，平行入射的 X 射线垂直于探测器平面，每个探测器单元看成一个接收点，且等距排列。X 射线的发射器和探测器相对位置固定不变，整个发射-接收系统绕某固定的旋转中心逆时针旋转 180 次。对每一个 X 射线方向，在具有 512 个等距单元的探测器上测量经位置固定不动的二维待检测介质吸收衰减后的射线能量，并经过增益等处理后得到 180 组接收信息。

CT 系统安装时往往存在误差，从而影响成像质量，因此需要对安装好的 CT 系统进行参数标定，即借助于已知结构的样品（称为模板）标定 CT 系统的参数，并据此对未知结构的样品进行成像。请建立相应的数学模型和算法，解决以下问题：

1. 在正方形托盘上放置两个均匀固体介质组成的标定模板，模板的几何信息如图 2 所示，相应的数据文件见附件 1，其中每一点的数值反映了该点的吸收强度，这里称为“吸收率”。对应于该模板的接收信息见附件 2。请根据这一模板及其接收信息，确定 CT 系统旋转中心在正方形托盘中的位置、探测器单元之间的距离以及该 CT 系统使用的 X 射线的 180 个方向。
2. 附件 3 是利用上述 CT 系统得到的某未知介质的接收信息。利用 (1) 中得到的标定参数，确定该未知介质在正方形托盘中的位置、几何形状和吸收率等信息。另外，请具体给出图 3 所给的 10 个位置处的吸收率，相应的数据文件见附件 4。
3. 附件 5 是利用上述 CT 系统得到的另一个未知介质的接收信息。利用 (1) 中得到的标定参数，给

出该未知介质的相关信息。另外请具体给出图 3 所给的 10 个位置处的吸收率。

4. 分析 (1) 中参数标定的精度和稳定性。在此基础上自行设计新模板、建立对应的标定模型，以改进标定精度和稳定性，并说明理由。

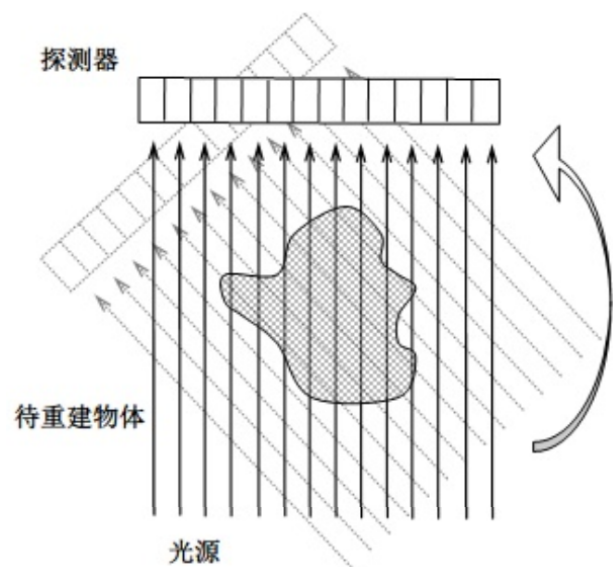


图 1. CT 系统示意图

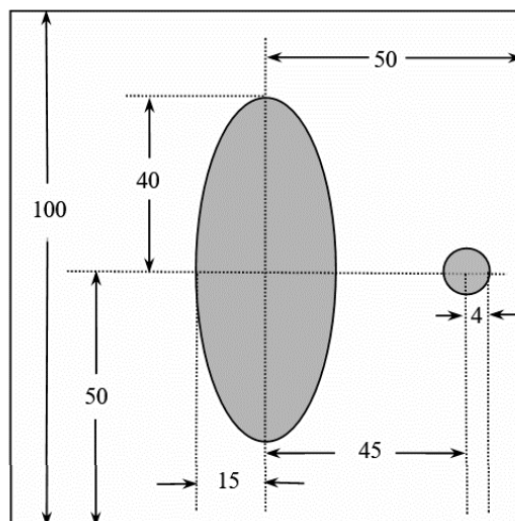


图 2. 模板示意图 (单位: mm)

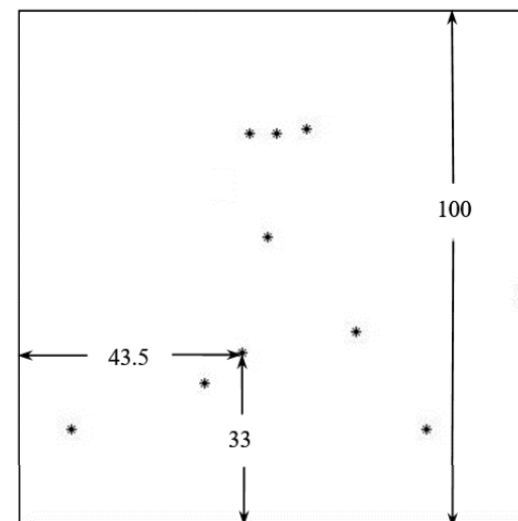


图 3. 10 个位置示意图

参数标定模型： 建立平面直角坐标系，设模板中的椭圆和小圆方程为

$$\frac{x^2}{15^2} + \frac{y^2}{40^2} = 1, \quad (x - 45)^2 + y^2 = 4^2.$$

设 CT 系统的旋转中心为 (x_0, y_0) ，第 i 个探测器在第 j 个旋转角时接收到 X 射线

$$L_{ij} : (x - x_0) \cos \theta_j + (y - y_0) \sin \theta_j = a + ib$$

的能量为 $y_{ij} = c \left(f(d_{ij}, \theta_j) + g(d_{ij}, \theta_j) \right)$ ，其中 $x_0, y_0, a, b, c, \theta_j$ 是待求参数，

$$d_{ij} = a + bi + x_0 \cos \theta_j + y_0 \sin \theta_j, \quad (*)$$

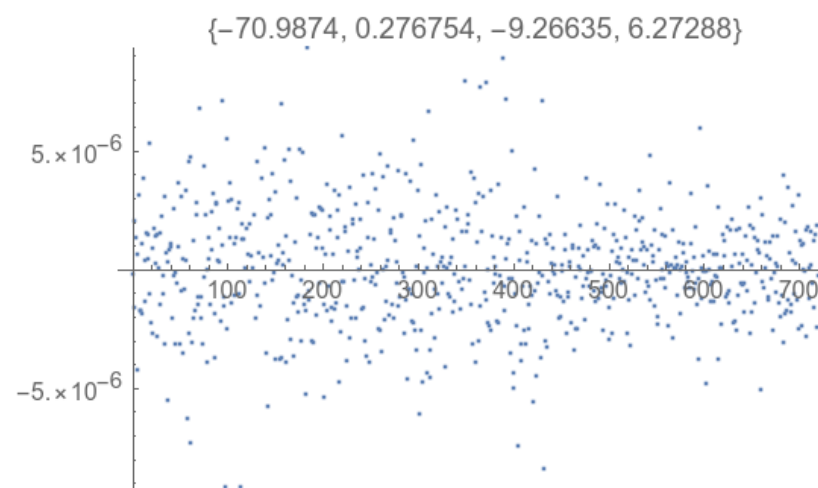
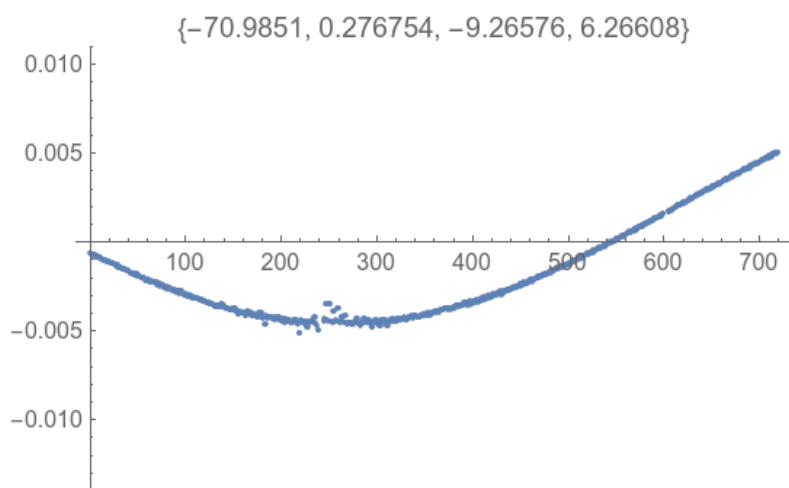
$f(d, \theta)$ 和 $g(d, \theta)$ 分别是直线 $L : x \cos \theta + y \sin \theta = d$ 在椭圆和小圆内部的线段长度，

$$f(d, \theta) = 1200 \sqrt{\frac{1}{(15 \cos \theta)^2 + (40 \sin \theta)^2} \left(1 - \frac{d^2}{(15 \cos \theta)^2 + (40 \sin \theta)^2} \right)},$$

$$g(d, \theta) = 2 \sqrt{16 - (d - 45 \cos \theta)^2}.$$

问题求解： 对于每个 j ，由数据求得 $i = i_1, i_2, i_3, i_4$ 使 $d_{ij} = \pm \sqrt{(15 \cos \theta_j)^2 + (40 \sin \theta_j)^2}$ 和 $45 \cos \theta_j \pm 4$ 。由 (*) 得 $\sqrt{(15 \cos \theta_j)^2 + (40 \sin \theta_j)^2} = 4 \cdot \frac{i_1 - i_2}{i_3 - i_4}$ 。由数列 $\{\theta_j\}$ 的连续性，确定 $\cos \theta_j$ 和 $\sin \theta_j$ 的正负号，求出每个 θ_j 。用最小二乘法拟合 (*) 式，求得 $(a, b, x_0, y_0) \approx$

$(-70.9851, 0.276754, -9.26576, 6.26608)$ 。残差的图像如下 (左), 推测是 θ_j 不准确造成的。故把 a, b, x_0, y_0 代入 (*) 式, 重新计算每个 θ_j , 拟合出新的 a, b, x_0, y_0 。迭代 15 轮后, 得 $(a, b, x_0, y_0) \approx (-70.9874, 0.276754, -9.26635, 6.27288)$ 。残差的图像如下 (右)。

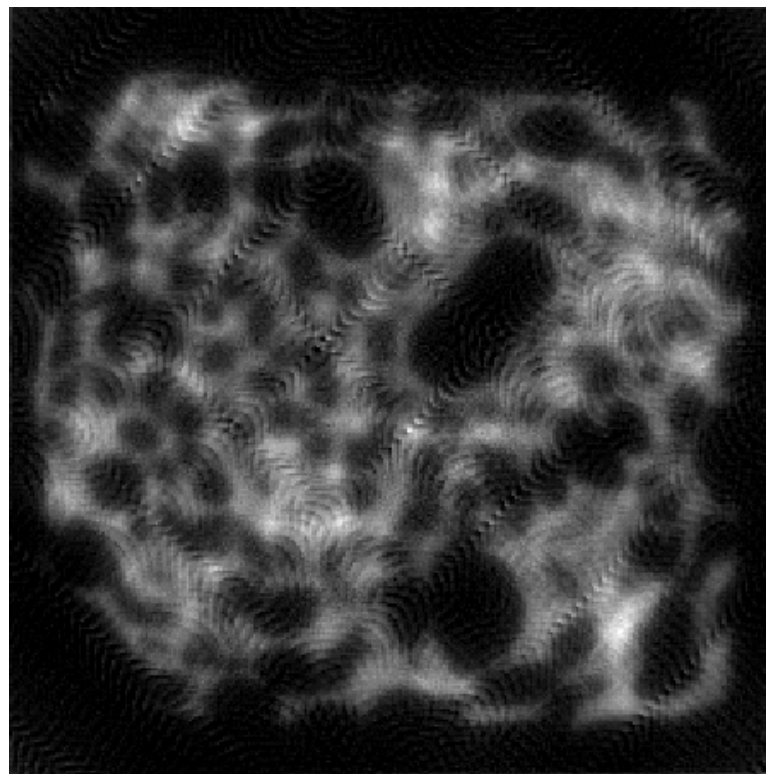
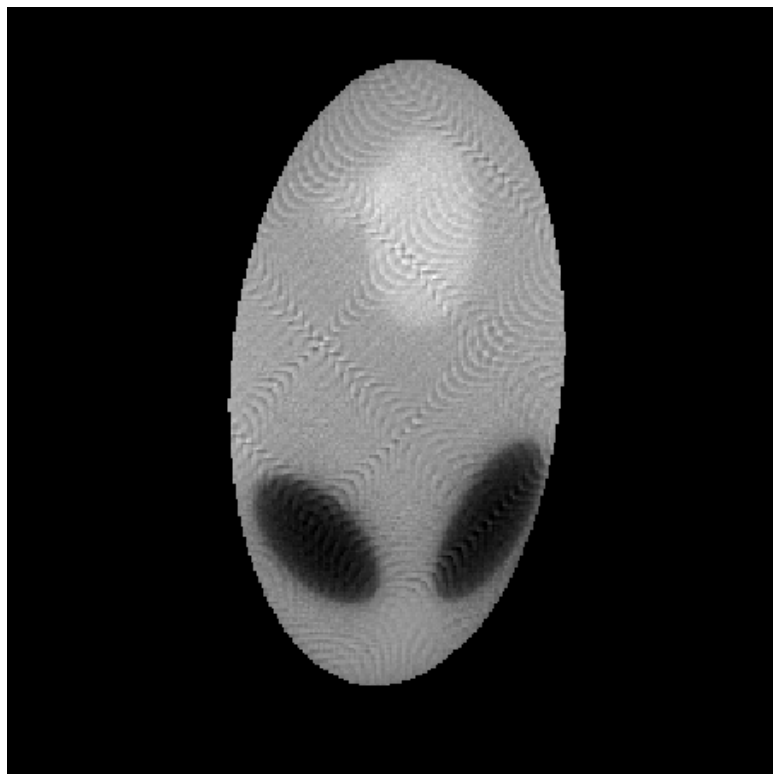


图像重建模型: 把托盘分成 $n = 300 \times 300$ 个小正方形, 假设第 k 个小正方形 S_k 中介质的吸收率都是 x_k , 第 i 个探测器在第 j 个旋转角时的接收信息 $y_{ij} = \sum_{k=1}^n \lambda_{ijk} x_k$, 其中 λ_{ijk} 是 L_{ij} 在 S_k 内部的线段长度。问题化为求线性方程组 $Ax = y$ 的最小二乘解, 其中 A 是 $m \times n$ 稀疏矩阵, $m = 512 \times 180$, A, x, y 的元素都是非负实数。

问题求解：可用线性迭代法求解线性方程组 $A^T Ax = A^T y$ 。

$$x_{k+1} = x_k + \frac{1}{\lambda} A^T (y - Ax_k), \quad k \in \mathbb{N}.$$

取 $\lambda = \|A\|_1 \|A\|_\infty$, $x_0 = \mathbf{0}$, 迭代 30 轮后, 得附件 3 和附件 5 的吸收率图像如下。

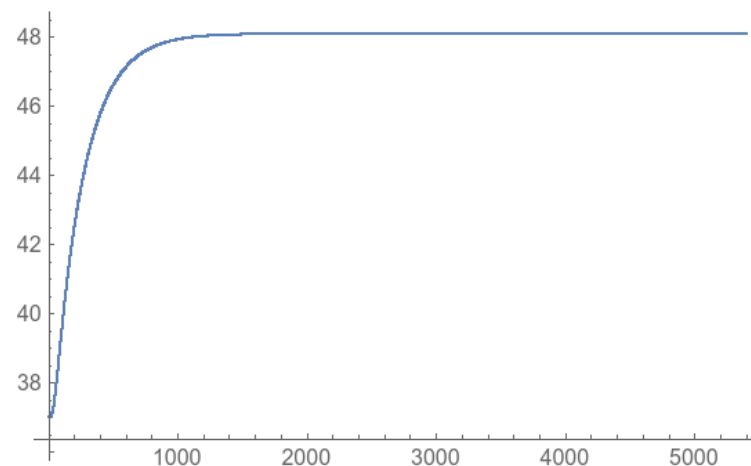


例 4.10. (高温作业专用服装设计) 在高温环境下工作时，人们需要穿着专用服装以避免灼伤。专用服装通常由三层织物材料构成，记为 I、II、III 层，其中 I 层与外界环境接触，III 层与皮肤之间还存在空隙，将此空隙记为 IV 层。为设计专用服装，将体内温度控制在 37°C 的假人放置在实验室的高温环境中，测量假人皮肤外侧的温度。为了降低研发成本、缩短研发周期，请利用数学模型来确定假人皮肤外侧的温度变化情况，并解决以下问题：

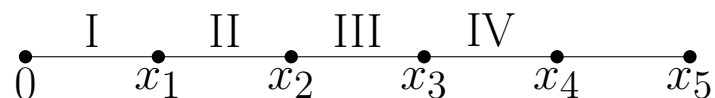
(1) 专用服装材料的某些参数值由附件 1 给出，对环境温度为 75°C 、II 层厚度为 6mm、IV 层厚度为 5mm、工作时间为 90 分钟的情形开展实验，测量得到假人皮肤外侧的温度（见附件 2）。建立数学模型，计算温度分布。

(2) 当环境温度为 65°C 、IV 层的厚度为 5.5mm 时，确定 II 层的最优厚度，确保工作 60 分钟时，假人皮肤外侧温度不超过 47°C ，且超过 44°C 的时间不超过 5 分钟。

(3) 当环境温度为 80°C 时，确定 II 层和 IV 层的最优厚度，确保工作 30 分钟时，假人皮肤外侧温度不超过 47°C ，且超过 44°C 的时间不超过 5 分钟。



模型建立：建立 1 维热传导模型。



设 $x \in [0, x_1]$ 为 I 层, $x \in [x_1, x_2]$ 为 II 层, $x \in [x_2, x_3]$ 为 III 层, $x \in [x_3, x_4]$ 为 IV 层, $x \in [x_4, x_5]$ 为假人体内, t 为时间, 则温度 $u(x, t)$ 满足

$$\begin{cases} u_t = a_i u_{xx}, & u(x, 0) = u(x_5, t) = 37, \quad \forall x \in [x_{i-1}, x_i] \\ u_x(0, t) = \lambda(u_0 - u(0, t)), & u_x(x_5, t) = \mu(37 - u(x_5, t)), \quad \forall t \geq 0. \end{cases}$$

其中 u_0 是环境温度, a_i, λ, μ 是常数。当 $1 \leq i \leq 4$ 时, $a_i = \frac{k_i}{c_i \rho_i}$, 其中 ρ_i, c_i, k_i 分别是各层的密度、比热、热传导率。 x_5, a_5, λ, μ 未知。需要解决的数学问题是:

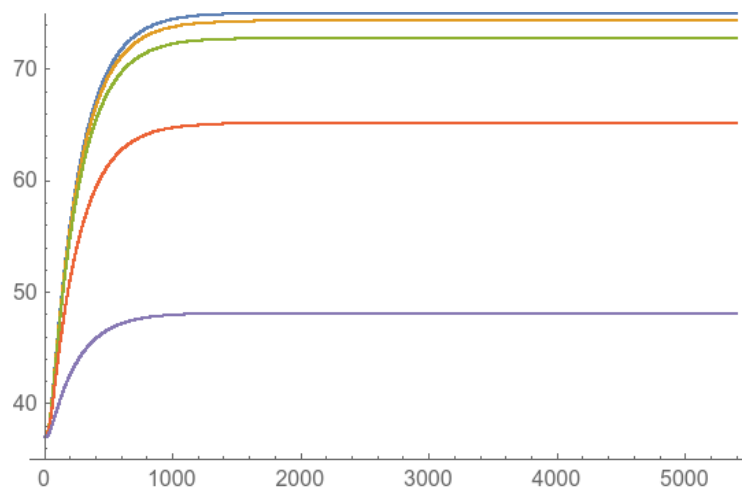
- 由 $u(x_4, t)$ 确定 $u(x, t)$ 。
- 当参数改变时, 由 $u(x_4, t)$ 确定新的解 $\tilde{u}(x, t)$ 。

问题求解:

(1) 求 $u(x, t)$ 的解析表达式或数值解过于复杂。注意到 $u(0, \infty) = u_0$, $u(x_5, t) = 37$, 并且 $u(x, \infty)$ 在 $[0, x_5]$ 上为分段线性函数。对给定的时刻 t , 我们近似 $u(x, t)$ 为 x 的分段线性函数, 记 $d_i = x_i - x_{i-1}$, 则

$$u(x, t) \approx u(0, t) - \frac{\frac{d_1}{k_1} + \dots + \frac{d_{i-1}}{k_{i-1}} + \frac{x - x_{i-1}}{k_i}}{\frac{d_1}{k_1} + \dots + \frac{d_5}{k_5}} (u(0, t) - 37), \quad \forall x \in [x_{i-1}, x_i]. \quad (*)$$

由 (*) 得 $u(0, t) - 37 \approx \frac{\frac{d_1}{k_1} + \dots + \frac{d_4}{k_4}}{\frac{d_5}{k_5}} (u(x_4, t) - 37)$ 。另由 $u(x_4, \infty) \approx 48.08$, 得 $\frac{d_5}{k_5} \approx 0.116111$ 。



当参数改变时, 假设 $\tilde{u}(0, t) - 37 \approx \frac{\tilde{u}_0 - 37}{u_0 - 37} (u(0, t) - 37)$, $\tilde{u}(x, t)$ 的形式同 (*).

$$(2) \quad \tilde{u}(\tilde{x}_4, t) - 37 \approx \frac{\frac{d_5}{k_5}}{\frac{d_1}{k_1} + \dots + \frac{d_5}{k_5}} \cdot \frac{28}{38} (u(0, t) - 37). \text{ 由题设得 } \begin{cases} \tilde{u}(\tilde{x}_4, 3600) \leq 47 \\ \tilde{u}(\tilde{x}_4, 3300) \leq 44 \end{cases}.$$

解得 $d_2 \geq 0.024$.

$$(3) \quad \tilde{u}(\tilde{x}_4, t) - 37 \approx \frac{\frac{d_5}{k_5}}{\frac{d_1}{k_1} + \dots + \frac{d_5}{k_5}} \cdot \frac{43}{38} (u(0, t) - 37). \text{ 由题设得 } \begin{cases} \tilde{u}(\tilde{x}_4, 1800) \leq 47 \\ \tilde{u}(\tilde{x}_4, 1500) \leq 44 \end{cases}.$$

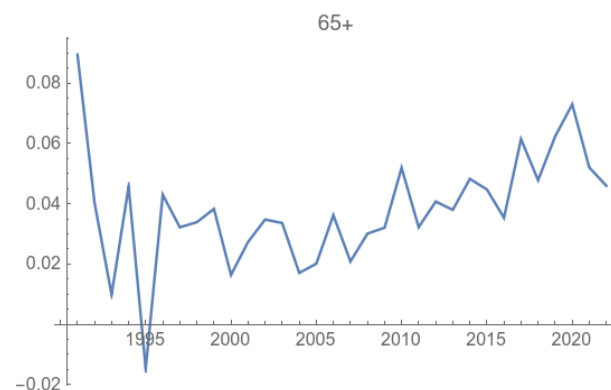
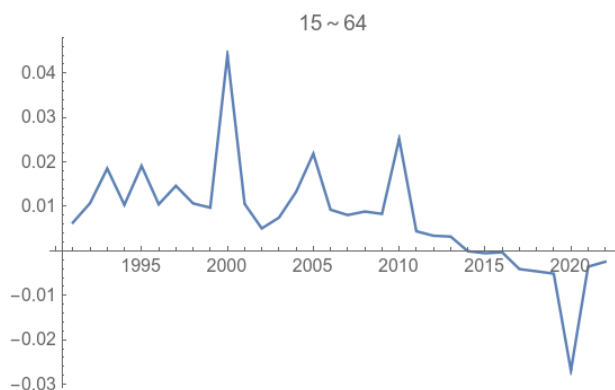
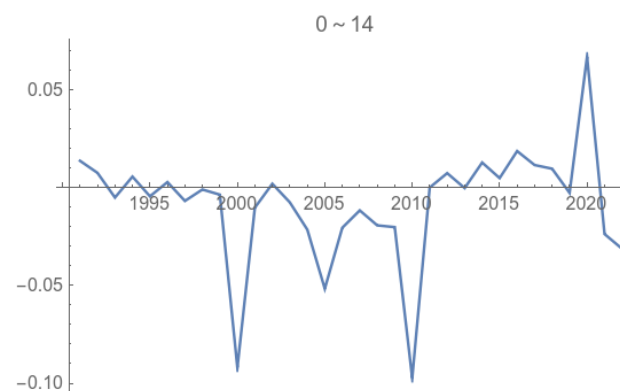
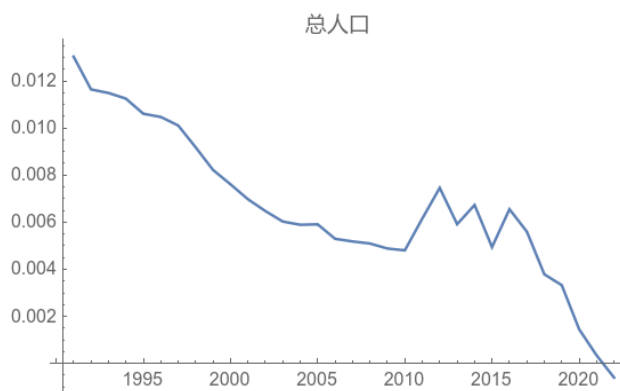
化简得 $2.7027d_2 + 35.7143d_4 \geq 0.509184$. 在 $[0.0006, 0.025] \times [0.0006, 0.0064]$ 中无解。

第五章 微分方程模型

例 5.1. (人口增长) 从国家统计局网站 www.stats.gov.cn 可查到建国以来全国人口数据 (单位万人)。部分数据如下。请建立数学模型描述人口发展规律，做出较准确的生长预测。

年份	2022	2021	2020	2019	2018	2017	2016	2015	2014	2013	2012
年末总人口	141175	141260	141212	141008	140541	140011	139232	138326	137646	136726	135922
0—14 岁	23908	24678	25277	23689	23751	23522	23252	22824	22712	22423	22427
15—64 岁	96289	96526	96871	99552	100065	100528	100943	100978	101032	101041	100718
65 岁及以上	20978	20056	19064	17767	16724	15961	15037	14524	13902	13262	12777
年份	2011	2010	2009	2008	2007	2006	2005	2004	2003	2002	2001
年末总人口	134916	134091	133450	132802	132129	131448	130756	129988	129227	128453	127627
0—14 岁	22261	22259	24659	25166	25660	25961	26504	27947	28559	28774	28716
15—64 岁	100378	99938	97484	96680	95833	95068	94197	92184	90976	90302	89849
65 岁及以上	12277	11894	11307	10956	10636	10419	10055	9857	9692	9377	9062
年份	2000	1999	1998	1997	1996	1995	1994	1993	1992	1991	1990
年末总人口	126743	125786	124761	123626	122389	121121	119850	118517	117171	115823	114333
0—14 岁	29012	31950	32064	32093	32311	32218	32360	32177	32339	32095	31659
15—64 岁	88910	85157	84338	83448	82245	81393	79868	79051	77614	76791	76306
65 岁及以上	8821	8679	8359	8085	7833	7510	7622	7289	7218	6938	6368

人口数量建模：记 n 年末人口数为 x_n 。定义当年的人口净增长率 $\lambda_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1}}$ 。由数据图像可知， λ_n 受多种因素的影响，随 n 变化较大，通常无法给出长期的估计。但是在短期内可估计出 λ_n 的经验公式，并预测 $x_{n+k} = x_n \prod_{i=1}^k (1 + \lambda_{n+i})$ 。关系 $x_n - x_{n-1} = \lambda_n x_{n-1}$ 也可以表示成微分方程的形式。 $x'(t) = \lambda(t)x(t) \Rightarrow x(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t \lambda(s)ds\right) x(t_0)$ 。



年龄结构建模：记 n 年末 k 周岁的人口数为 $x_k(n)$, $0 \leq k \leq m$, 则有

$$\begin{pmatrix} x_0(n) \\ x_1(n) \\ \vdots \\ x_m(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & \cdots & b_m \\ 1 - d_1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 - d_m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0(n-1) \\ x_1(n-1) \\ \vdots \\ x_m(n-1) \end{pmatrix} \quad \text{记作 } X_n = A_n X_{n-1},$$

其中 b_k 表示 k 周岁人的生育率, 受多种因素的影响, 随时间变化较大, d_k 表示 $k-1$ 周岁人的死亡率, 一般随时间缓慢下降。

上述关系也可以表示成微分方程组 $X'(t) = A(t)X(t)$ 的形式。当 $\{A(t) \mid t \geq t_0\}$ 两两乘积可交换时, 微分方程组有公式解 $X(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t A(s)ds\right) X(t_0)$ 。

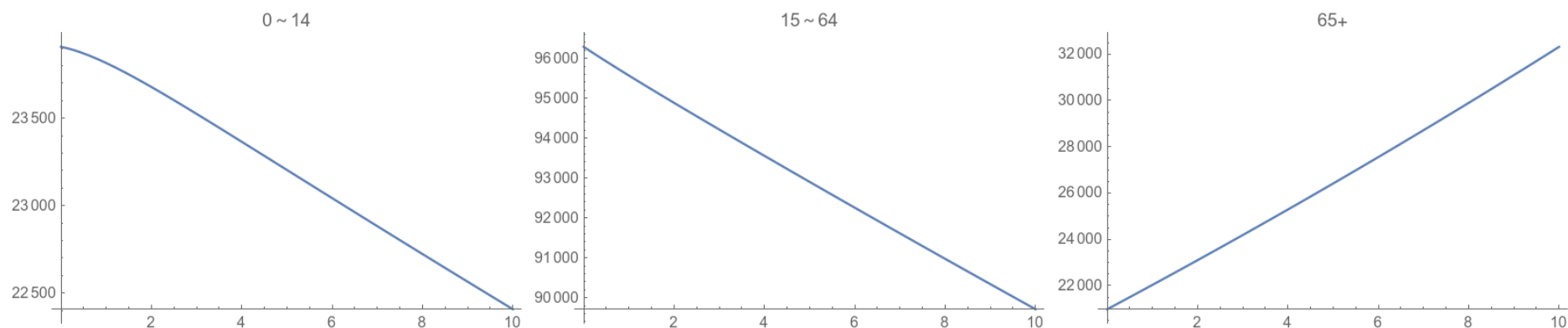
对于所给数据, 修改模型为 $X_n = A_n X_{n-1}$, 其中 $X_n \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$, A_n 形如 $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ a_4 & a_5 & 0 \\ 0 & a_6 & a_7 \end{pmatrix}$ 。

用 2017 ~ 2022 的数据, 拟合得 $A \approx \begin{pmatrix} 0.473 & 0.120 & 0 \\ 0.336 & 0.909 & 0 \\ 0 & 0.006 & 1.021 \end{pmatrix}$ 。

转化为连续模型，

$$X(t) = A^t X(0) \approx \begin{pmatrix} -122.943\lambda_1^t + 24030.9\lambda_2^t \\ 79.4904\lambda_1^t + 96209.5\lambda_2^t \\ -0.809845\lambda_1^t - 22502.7\lambda_2^t + 43481.5\lambda_3^t \end{pmatrix},$$

其中 $t = 0$ 为 2022 年末， $\lambda_1 \approx 0.38854$ ， $\lambda_2 \approx 0.993027$ ， $\lambda_3 \approx 1.0256$ 。 $X(t)$ 的三个分量的函数图像如下。



例 5.2. (药物中毒急救) 一天夜晚，你作为见习医生正在医院内科急诊室值班，两位家长带着一个孩子急匆匆进来，诉说两小时前孩子一口气误吞下 11 片治疗哮喘病的、剂量为每片 100mg 的氨茶碱片，已经出现呕吐、头晕等不良症状。按照药品使用说明书，氨茶碱的每次用量成人是 100~200mg，儿童是 3~5mg/kg。如果过量服用，可使血药浓度 (单位血液溶剂中的药量) 过高。当血药浓度达到 $100\mu\text{g/mL}$ 时，会出现严重中毒，达到 $200\mu\text{g/mL}$ ，则可致命。

作为一位医生你清楚地知道，由于孩子服药是在两小时前，现在药物已经从胃进入肠道，无法再用刺激呕吐的办法排除。当前需要作出判断的是，孩子的血药浓度会不会达到 $100\mu\text{g/mL}$ 甚至 $200\mu\text{g/mL}$ 。如果会达到，则临床上应采取紧急方案来救治孩子。

模型建立：设在 0 时刻，患者误吞药物；在 t_0 时刻，某种救治方案被实施，以降低血液中的药物含量。记 t 时刻肠道和血液中的药物含量为 $x(t), y(t)$ ，则有

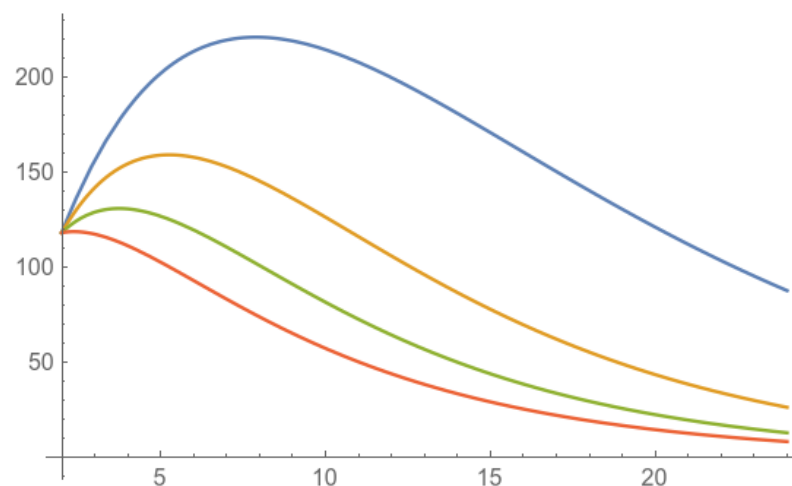
$$x'(t) = -ax(t), \quad y'(t) = \begin{cases} ax(t) - by(t), & t \leq t_0 \\ ax(t) - (b+c)y(t), & t \geq t_0 \end{cases}.$$

其中 a, b, c 是常数， a, b 体现消化系统对药物的吸收和代谢能力， c 体现救治措施强度。

问题求解：设 $x(0) = x_0 = 1100\text{mg}$ ， $y(0) = 0$ ， $t_0 = 2$ ，解得 $x(t) = x_0 e^{-at}$ ，

$$y(t) = \begin{cases} \frac{x_0 a}{b-a}(e^{-at} - e^{-bt}), & t \leq t_0; \\ \frac{x_0 a e^{-at_0}}{b+c-a} \left(e^{-a(t-t_0)} - e^{-(b+c)(t-t_0)} \right) + y(t_0) e^{-(b+c)(t-t_0)}, & t \geq t_0. \end{cases}$$

经查阅资料，设患者血液容积 2000mL， $a \approx 0.1386$ ， $b \approx 0.1155$ ，分别取 $c = 0, b, 2b, 3b$ ，得 $y(t)$ 的函数图像如下 (严重中毒/致命的阈值为 200/400)。医生应选取恰当的救治方案。



例 5.3. (饮酒驾车) 大李在中午 12 点喝了一瓶啤酒，下午 6 点检查时符合新的驾车标准（20 毫克 / 百毫升），紧接着他在吃晚饭时又喝了一瓶啤酒，为了保险起见他呆到凌晨 2 点才驾车回家，又一次遭遇检查时却被定为饮酒驾车，这让他既懊恼又困惑，为什么喝同样多的酒，两次检查结果会不一样呢？请你参考下面给出的数据（或自己收集资料）建立饮酒后血液中酒精含量的数学模型，并讨论以下问题：

1. 对大李碰到的情况做出解释；
2. 在喝了 3 瓶啤酒或者半斤低度白酒后多长时间内驾车就会违反上述标准，在以下情况下回答：
 - (1) 酒是在很短时间内喝的；
 - (2) 酒是在较长一段时间（比如 2 小时）内喝的。
3. 怎样估计血液中的酒精含量在什么时间最高。
4. 根据你的模型论证：如果天天喝酒，是否还能开车？
5. 根据你做的模型并结合新的国家标准写一篇短文，给想喝一点酒的司机如何驾车提出忠告。

参考数据

1. 人的体液占人的体重的 65% 至 70%，其中血液只占体重的 7% 左右；而药物（包括酒精）在血液中的含量与在体液中的含量大体是一样的。

2. 体重约 70kg 的某人在短时间内喝下 2 瓶啤酒后，隔一定时间测量他的血液中酒精含量（毫克 / 百毫升），得到数据如下：

时间	0.25	0.5	0.75	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
含量	30	68	75	82	82	77	68	68	58	51	50	41
时间	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
含量	38	35	28	25	18	15	12	10	7	7	4	

模型建立：设饮酒后肠胃和体液中的酒精浓度分别为 $x(t), y(t)$ 。

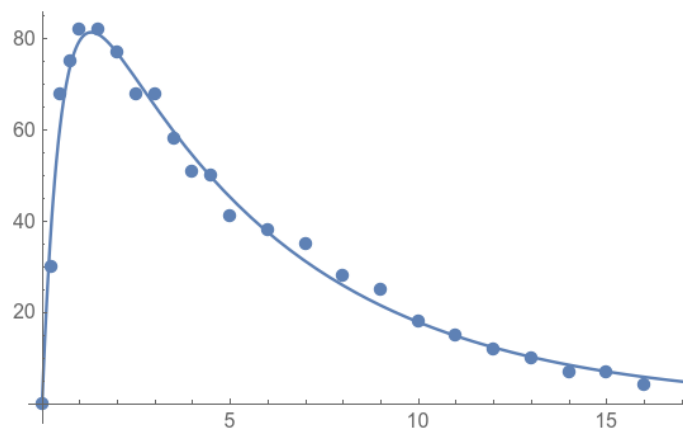
$$\begin{cases} x'(t) = -ax(t) \\ y'(t) = bx(t) - cy(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = x_0 e^{-at} \\ y(t) = y_0 e^{-ct} + \frac{x_0 b}{c-a} (e^{-at} - e^{-ct}) \end{cases}$$

其中常数 a, b, c 体现身体吸收和分解酒精的能力。

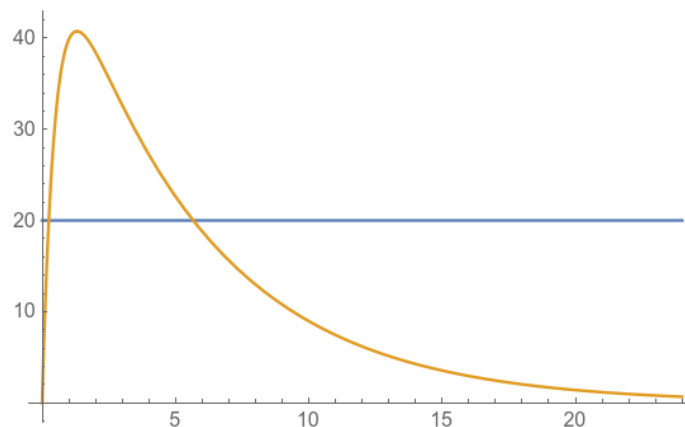
以上是常系数线性微分方程组，故“多次饮酒后的解”是若干个“单次饮酒后的解”之和。

问题求解：假设 $y(0) = 0$ ，则 $y(t) = \frac{x_0 b}{c-a} (e^{-at} - e^{-ct})$ 。

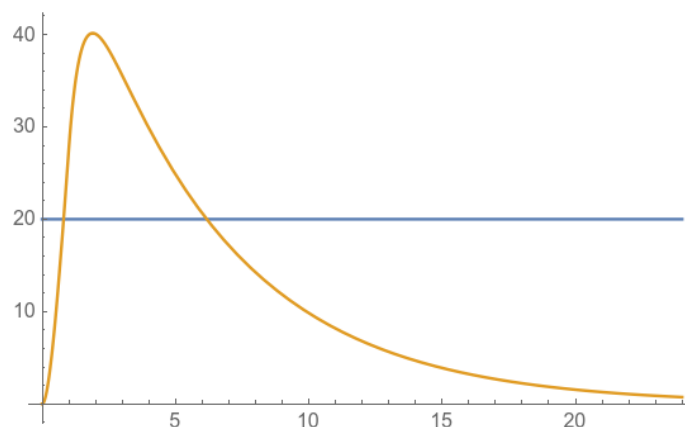
- 拟合参考数据，得 $y(t) = \mu(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t})$ ， $\lambda_1 \approx 0.185502$ ， $\lambda_2 \approx 2.00794$ ， $\mu \approx 114.433$ 。



- 在 $t = 0$ 时快速喝下 m 瓶啤酒, 则 $y(t) = \frac{m\mu}{2}(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t})$ 。最大值点 $t = \frac{\ln \lambda_2 - \ln \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}$ 。

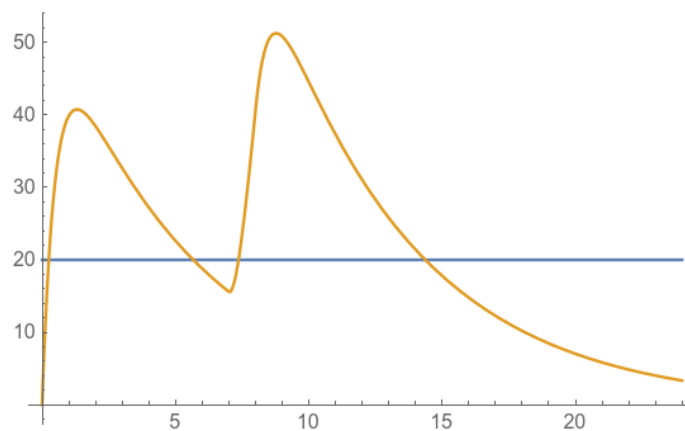


- 在 $[0, n]$ 时间段内匀速喝下 m 瓶啤酒, 则 $y(t) = \frac{m\mu}{2n} \int_0^{\min(n,t)} (e^{-\lambda_1(t-s)} - e^{-\lambda_2(t-s)}) ds = \frac{m\mu}{2} \left(\frac{e^{\lambda_1 \min(n,t)} - 1}{\lambda_1 n} e^{-\lambda_1 t} - \frac{e^{\lambda_2 \min(n,t)} - 1}{\lambda_2 n} e^{-\lambda_2 t} \right)$ 。最大值点 $t = \frac{\ln(e^{\lambda_2 n} - 1) - \ln(e^{\lambda_1 n} - 1)}{\lambda_2 - \lambda_1}$ 。



- 先在 $t = 0$ 时快速喝下 m_1 瓶啤酒，再在 $[T, T + n]$ 时间段内匀速喝下 m_2 瓶啤酒，则

$$y(t) = \frac{m_1\mu}{2}(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) + \frac{m_2\mu}{2} \left(\frac{e^{\lambda_1 \min(n, t-T)} - 1}{\lambda_1 n} e^{-\lambda_1(t-T)} - \frac{e^{\lambda_2 \min(n, t-T)} - 1}{\lambda_2 n} e^{-\lambda_2(t-T)} \right)。$$



假设 $y(0) = 20$ ，则 $y(t) = y_0(t) + 20e^{-ct}$ ，其中 $y_0(t)$ 是 $y(0) = 0$ 时的解。在 $t = 0$ 时快速喝下 m 瓶啤酒后， $y(t) = 20$ 的最小正数解 t 如下表所示。

t	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$
$c = \lambda_1$	7.28	10.27	12.18	13.59	14.71
$c = \lambda_2$	5.67	9.40	11.59	13.14	14.34

例 5.4. (传染病模型) 随着卫生设施的改善，医疗水平的提高以及人类文明的不断发展，诸如霍乱、天花等曾经肆虐全球的传染性疾病已经得到有效的控制。但是一些新的、不断变异着的传染病毒却悄悄向人类袭来。长期以来，建立传染病的数学模型来描述传染病的传播过程，分析受感染人数的变化规律，探索制止传染病蔓延的手段等，一直是各国有关专家和官员关注的课题。

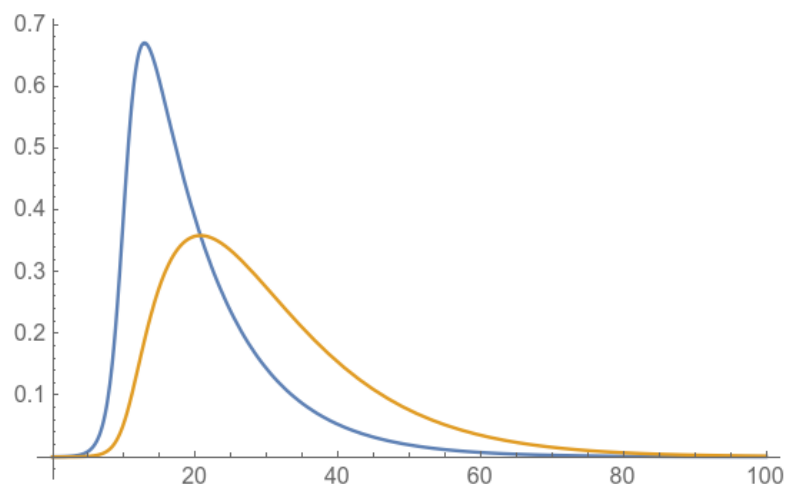
不同类型传染病的传播过程有其各自不同的特点，弄清这些特点需要相当多的病理知识，这里不可能从医学的角度一一分析各种传染病的传播，而只是按照一般的传播机理建立模型。

模型建立：重点考虑三类人群：未感染且易被感染、未被发现感染且易传染他人、被发现感染且被隔离治疗。设这三类人群在时刻 t 的人数分别为 $x(t), y(t), z(t)$ 。

- 假设病人在治愈 (含死亡) 后有了免疫力, 不再被感染和传染他人, 则有

$$x'(t) = -a_1x - a_2xy, \quad y'(t) = a_1x + a_2xy - a_3y, \quad z'(t) = a_3y - a_4z$$

其中 a_1 表示未知感染源对人的传染率, a_2 表示人对人的传染率, a_3 表示确诊收治率, a_4 表示治愈 (含死亡) 率。例如: 设 $x(0) = 1, y(0) = 0.0001, z(0) = 0, a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 0.1, a_4 = 0.1$, 得 $y(t)$ 和 $z(t)$ 的函数图像如下。

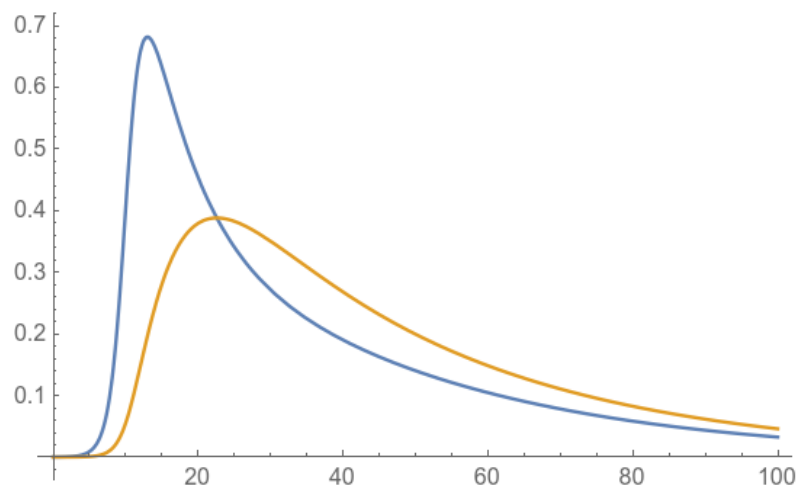


- 假设部分病人在治愈 (含死亡) 后仍易被感染和传染他人, 其他病人在治愈后有了免疫

力，不再被感染和传染他人，则有

$$x'(t) = -a_1x - a_2xy + a_4a_5z, \quad y'(t) = a_1x + a_2xy - a_3y, \quad z'(t) = a_3y - a_4z$$

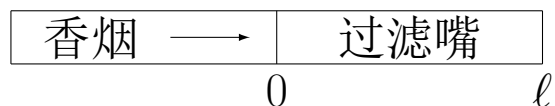
其中 a_1, \dots, a_4 同上， a_5 表示免疫率。例如：设 $x(0) = 1$ ， $y(0) = 0.0001$ ， $z(0) = 0$ ， $a_1 = 0$ ， $a_2 = 1$ ， $a_3 = 0.1$ ， $a_4 = 0.1$ ， $a_5 = 0.5$ ，得 $y(t)$ 和 $z(t)$ 的函数图像如下。



模型评价：模型假设医疗资源充足，并且没有考虑病毒的升级变异和潜伏期。模型定性地给出了各类人群人数的变化规律。模型中的参数通常受各种因素的影响，并随时间变化。有针对性地调整参数，有利于更加经济有效地控制疫情。

例 5.5. (香烟过滤嘴的作用) 尽管科学家们对于吸烟的危害提出了许多无可辩驳的证据,不少国家的政府和有关部门也一直致力于减少或禁止吸烟,但是仍有不少人不愿放弃对香烟的嗜好。香烟制造商既要满足瘾君子的需要,又要顺应减少吸烟危害的潮流,还要获取丰厚的利润,于是普遍地在香烟上安装了过滤嘴。过滤嘴的作用到底有多大,与使用的材料和过滤嘴的长度有什么关系?要从定量的角度回答这些问题,就要建立一个描述吸烟过程的数学模型,分析人体吸入的毒物数量与哪些因素有关,以及它们之间的数量表达式。

模型建立：假设有毒物质均匀分布在香烟中，当香烟被点燃后，有毒物质以一定速度被释放出来。这些有毒物质一部分被吸入口腔，一部分留在过滤嘴中，其他随烟雾进入空气中，四处扩散，或被吸入鼻腔。



设经过过滤嘴截面 x 处的有毒物质的含量为 $u(x)$ ，满足

$$u'(x) = -bu(x), \quad x \in [0, \ell]$$

其中 b 表示过滤嘴的吸附能力， ℓ 是过滤嘴的长度，则过滤嘴吸附的有毒物质的总量为 $Q = u(0) - u(\ell) = (1 - e^{-b\ell})u(0)$ 。

模型检验：过滤嘴能够吸附掉一定量的有毒物质，但是作用有限，大多数的有毒物质仍通过各种方式被吸入人体内。吸烟危害公共健康，严禁在公共场所吸烟（包括电子烟）。

例 5.6. (生物群体模型) 当某个自然环境中只有一种生物的群体生存时，生物种群与天斗、与地斗，种群内部也存在合作与竞争。如果一个自然环境中有两个或两个以上种群生存，那么它们之间就要存在着或是相互竞争、或是相互依存、或是弱肉强食的关系。

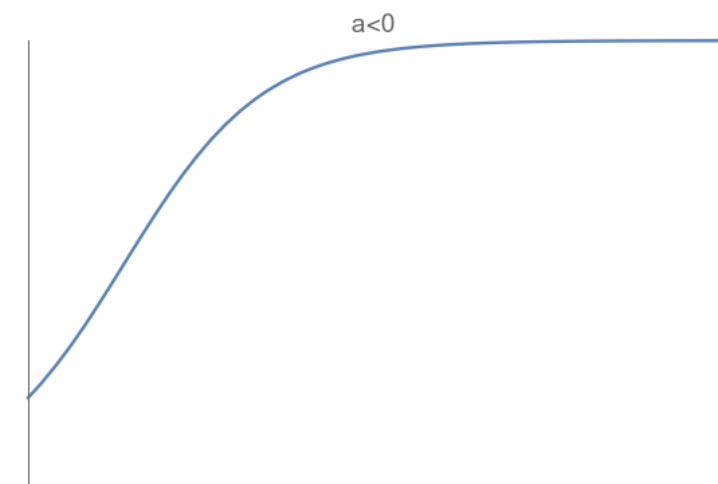
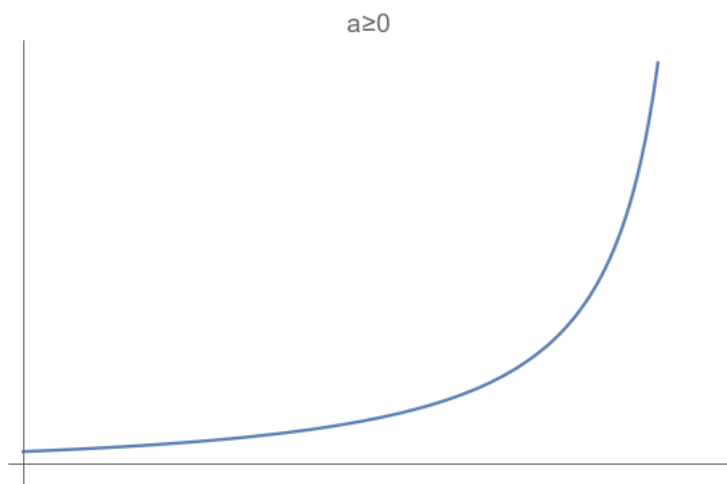
- 当两个种群为了争夺有限的同一种食物来源和生活空间而进行生存竞争时，最常见的结局是竞争力较弱的种群灭绝，竞争力较强的种群达到环境容许的最大数量。
- 自然界中处于同一环境下两个种群相互依存而共生的现象是很普遍的。植物可以独立生存，昆虫的授粉作用又可以提高植物的增长率，而以花粉为食物的昆虫却不能离开植物单独存活。人类与人工饲养的牲畜之间也有类似的关系。
- 自然界中不同种群之间还存在着一种非常有趣的既有依存、又有制约的生存方式：种群甲靠丰富的自然资源生长，而种群乙靠捕食种群甲为生。

建立一个模型解释上述现象，并分析产生这种结局的条件。

单物种模型：设物种在时刻 t 的数量为 $x(t)$ ， $\lambda(t) = \frac{x'(t)}{x(t)}$ 称为增长率。当资源丰富且每个生物都努力繁衍时， $\lambda(t)$ 是常值。考虑到内部的合作或竞争，可设 $\lambda(t) = ax + b$ ，其中 a, b 是常数， $a > 0$ 表示合作， $a < 0$ 表示竞争， b 称为自然增长率。

问题求解：微分方程 $x'(t) = ax^2 + bx$ 的通解为 $x(t) = \frac{b}{-a + ce^{-bt}}$ ，其中 $c = a + \frac{b}{x(0)}$ 。

当 $a \geq 0$ 时， $\lim_{t \rightarrow t_0} = +\infty$ ，其中 $t_0 = \frac{1}{b} \ln \frac{c}{a}$ 。当 $a < 0$ 时， $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \frac{b}{|a|}$ 。函数图像如下。



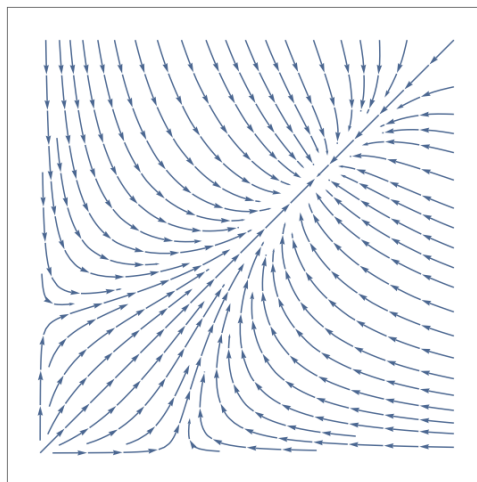
模型检验： $a \geq 0$ 情形不可能长期稳定，仅适用于短时间内的近似估计。

两物种模型：设物种 i 在时刻 t 的数量为 $x_i(t)$ ，与单物种模型类似，可设

$$\begin{cases} x_1'(t) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1)x_1 \\ x_2'(t) = (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2)x_2 \end{cases}$$

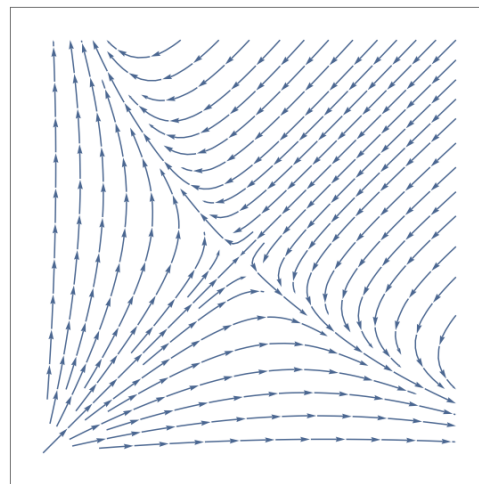
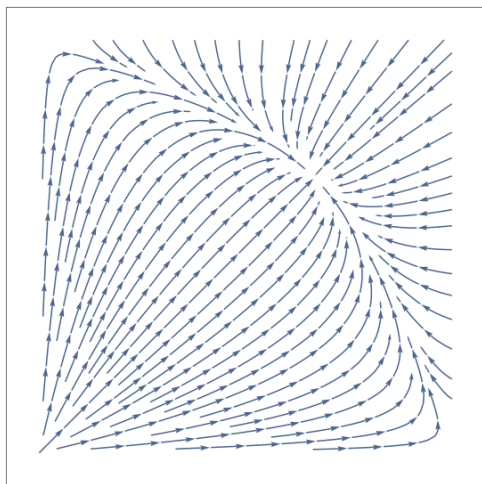
其中 a_*, b_* 是常数。根据 a_*, b_* 的不同取值，微分方程组的解有不同的性质。例如：

- $A = \begin{pmatrix} - & + \\ + & - \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} + \\ + \end{pmatrix}$ 。对内竞争，对外互利。双方共存。

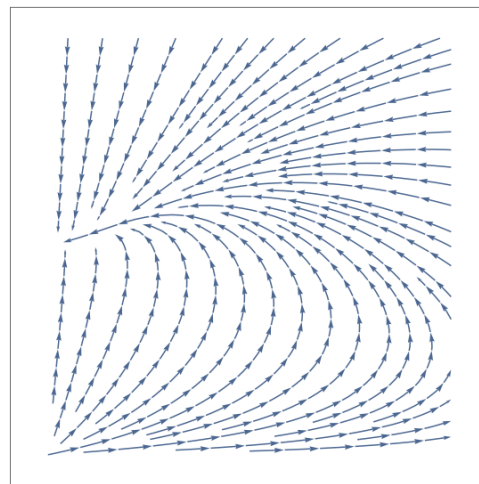
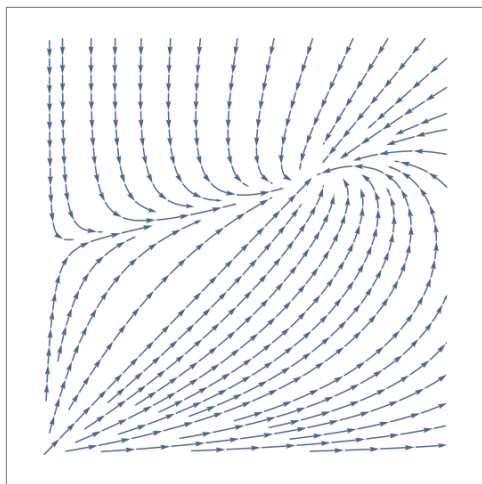


- $A = \begin{pmatrix} - & - \\ - & - \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} + \\ + \end{pmatrix}$ 。对内竞争，对外竞争。

当内外矛盾相互制衡时，双方共存。当内外矛盾失衡时，一方灭绝。故攘外必先安内。

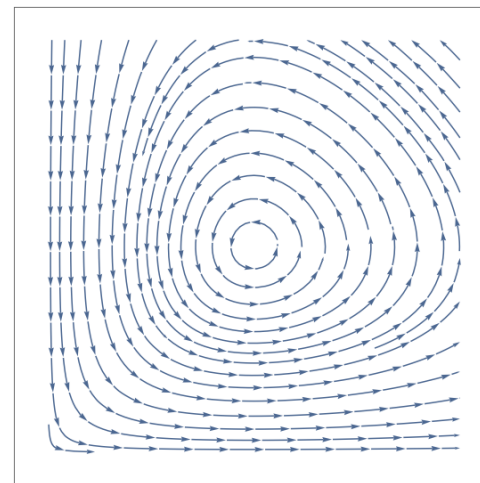
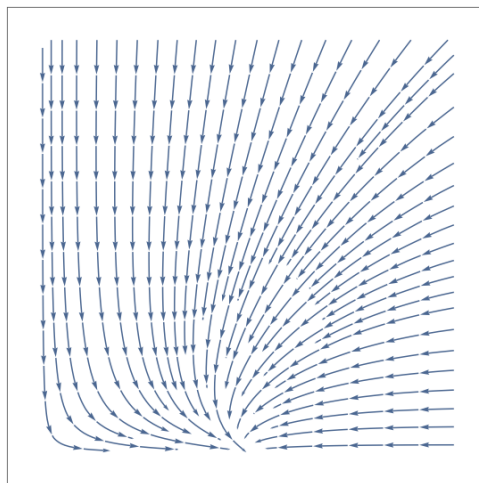
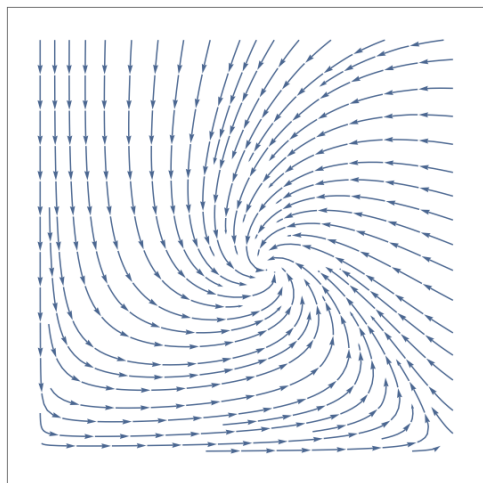


• $A = \begin{pmatrix} - & - \\ + & - \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} + \\ + \end{pmatrix}$ 。弱肉强食。双方共存或弱者灭绝。



- $A = \begin{pmatrix} - & - \\ + & - \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} + \\ - \end{pmatrix}$ 。弱肉强食，寄生关系。双方共存或强者饿死。

在某些情形下，微分方程组的解可能有不稳定的周期轨道。



模型推广：

- 对于多物种可类似建模 $x'_i(t) = \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + b_i \right) x_i$, $i = 1, \dots, n$ 。微分方程组通常无解析解，解的性质也非常复杂。
- 模型中的生物种群可以换成企业、阶级、国家等，物种数量可以换成财富、实力等。

例 5.7. (烟雾的扩散与消失) 广阔的平原上风 and 日丽，当一颗炮弹在蔚蓝色的天空中爆炸时我们看到，放出的烟雾以爆炸点为中心向四周迅速扩散，形成一个近于圆形的不透光区域。起初这个区域逐渐增大，后来它的边界变得明亮起来，不透光区域逐渐变小，最后烟雾完全消失，又是晴空万里。建立一个模型描述观察到的烟雾扩散和消失过程，分析消失的时间与哪些因素有关，以及怎样预报消失的时刻。

模型建立：以爆炸点为原点，建立空间直角坐标系。设时刻 t 点 (x, y, z) 处的烟雾浓度为 $p(x, y, z, t)$ 。不考虑重力的影响，在无风的条件下，烟雾的扩散满足

$$\frac{\partial p}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right)$$

其中 a 是常数。不妨设 $t = 0$ 时，烟雾集中在原点，则方程有解

$$p(x, y, z, t) = ct^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4at}}$$

其中 c 是与初始烟雾浓度有关的常数。

固定 (x, y, z) ， p 随 t 先增后减，在 $t = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{6a}$ 处取得最大值 $P = ct^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{3}{2}}$ 。

当 P 都小于某个阈值 ε 时，可认为烟雾消失了。消失的时刻 $T = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{c}{\varepsilon} \right)^{\frac{2}{3}}$ 。

第六章 泛函变分模型

例 6.1. (生产计划的制订) 工厂与客户签订了一项在某时刻提交一定数量产品的合同，在制定生产计划时要考虑生产和贮存两种费用。生产费用通常取决于生产率 (单位时间的产量)，生产率越高费用越大；贮存费用自然由已经生产出来的产品数量决定，数量越多费用越大。所谓生产计划这里简单地看作是到每一时刻为止的积累产量，它与每单位时间的产量可以相互推算。建模的目的是寻求最优的生产计划，使完成合同所需的总费用 (生产与贮存费用之和) 最小。

模型建立：设生产率 x 的生产费用为 $f(x)$ ，库存量 y 的贮存费用为 $g(y)$ 。设生产计划 $z(t)$ 为时刻 t 的累积产量。不妨设 $z(0) = 0$ ， $z(1) = 1$ 。总费用 $F(z) = \int_0^1 [f(z') + g(z)]dt$ 。

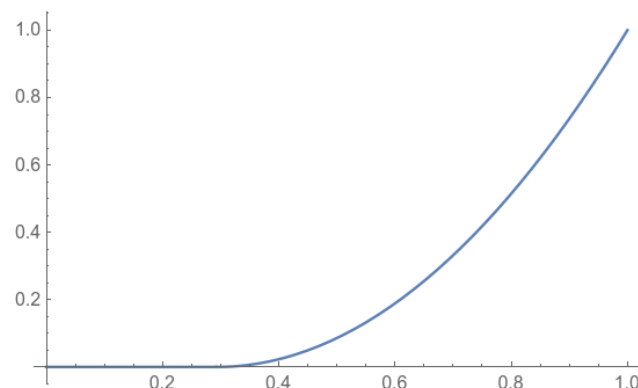
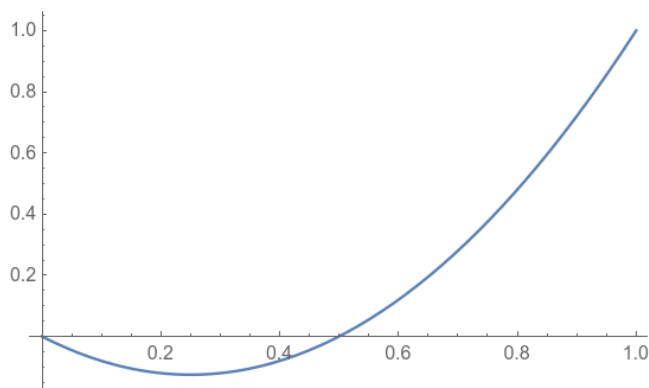
数学问题：求单调增的可微函数 $z(t)$ 使得 $z(0) = 0$ ， $z(1) = 1$ 并且 F 最小。

问题求解：由 $F(z + \delta) - F(z) \approx \int_0^T [f'(z')\delta' + g'(z)\delta]dt$ ，得 $\frac{d}{dt}f'(z') = g'(z)$ 。

使得 F 最小的 z 在函数区域的内部时， $\frac{d}{dt}f'(z') = g'(z)$ 是 z 应满足的必要条件。

使得 F 最小的 z 也有可能是在函数区域的边界上，应根据具体情况分析求解。

例如：设 $f(x) = ax^2 + bx$ ， $g(x) = cx$ ， z 满足 $\frac{d}{dt}(2az'(t) + b) = c$ ，得 $z''(t) = \frac{c}{2a}$ 。联立 $z(0) = 0$ ， $z(1) = 1$ ，解得 $z(t) = \frac{c}{4a}t^2 + (1 - \frac{c}{4a})t$ 。当 $\frac{c}{4a} \leq 1$ 时， $z(t)$ 满足要求。当 $\frac{c}{4a} > 1$ 时， $z(t)$ 非单调增。 $\tilde{z}(t) = \frac{c}{4a}(\max(0, t - s))^2$ 满足要求，其中 $s = 1 - \sqrt{\frac{4a}{c}}$ 。



例 6.2. (最优价格) 如果一个厂长有权制定产品在市面上的销售价格的话，最让他满意的当然莫过于使工厂利润最大的所谓最优价格了。下面我们讨论供销平衡情况下的最优价格模型。所谓供销平衡是指工厂产品的产量等于市面上产品的销售量。设每件商品的售价为 p ，成本为 q ，销售量 (也是产量) 为 x 。在市场竞争的情况下，销售量 x 自然取决于价格 p ，记作 $x = f(p)$ 。下面分三种情况，试制定最优价格函数 $p(t)$ 。

1. 在整个供销过程中， q 不变， $f(p) = a - bp$ ， $a, b > 0$ 。
2. 在时间为 T 的供销过程中， q 不变， $f(p) = a - bp$ ， $a, b > 0$ ，总销售量为 Q 。
3. 在时间为 T 的供销过程中， $q(t) = q_0 e^{ct}$ ， $f(p) = a - bp$ ， $a, b, c > 0$ ，总销售量为 Q 。

模型建立:

1. 利润 $F = (a - bp)(p - q) = -bp^2 + (a + bq)p - aq$ 。当 $p = \frac{a + bq}{2b}$ 时, F 最大。

2. 约束条件 $\int_0^T (a - bp)dt = Q$, 即 $\int_0^T p dt = \frac{aT - Q}{b}$ 。

总利润 $F = \int_0^T (a - bp)(p - q)dt = -b \int_0^T p^2 dt + C$ 。

欲使 F 最大, 需 $\int_0^T p^2 dt$ 最小, 故 p 为常值函数。

由约束条件解得 $p = \frac{aT - Q}{bT}$ 。

3. 约束条件 $\int_0^T (a - bp)dt = Q$, 即 $\int_0^T p dt = \frac{aT - Q}{b}$ 。

总利润 $F = \int_0^T (a - bp)(p - q)dt = \int_0^T (-bp^2 + bpq)dt + C$ 。

欲使 F 最大, 需 $-2bp + bq$ 为常值函数。

设 $p = \frac{q}{2} + \lambda$ 。由约束条件解得 $p = \frac{aT - Q}{bT} + \frac{q}{2} - \frac{q_0(e^{cT} - 1)}{2cT}$ 。

例 6.3. (国民收入的增长) 国民经济收入主要用于两个方面：扩大再生产的积累资金和满足人民生活需要的消费资金。如何安排积累和消费资金的比例，使得国民收入得到最快的增长，是一个重大的理论和实践问题。

模型建立：设在时刻 t 的国民经济收入为 x ，其被分成两部分，用于扩大再生产的部分记作 y ，分配给人民用于生活消费的部分记作 z ， $x = y + z$ 。扩大再生产和生活消费都会对下一时刻的国民经济收入产生影响，可设 $x'(t) = f(y, z)$ 。

- 设目标是“国民收入得到最快增长”，则问题化为求 $y(t)$ 使得 $f(y, x - y)$ 最大。

此时， $y = 0$ 或 $y = x$ 或 $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z}$ 。

- 设目标是“尽快提高人民生活水平”，则问题化为求 $z(t)$ 使得 $x'(t) = f(x - z, z)$ 并且 $F = \int_0^T z(t)dt$ 最大，其中 T 是给定的充分大常数。

记 $v(t) = x'(t)$ 。由 $v = f(x - z, z)$ ，得 $dv = f_y dx + (f_z - f_y)dz$ 。视 z 为 x 和 v 的函数，得 $dz = \frac{f_y}{f_y - f_z} dx + \frac{1}{f_z - f_y} dv$ 。当 F 最大时， $z = 0$ 或 $z = x$ 或

$$\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right) = 0 \quad \text{即} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{f_z - f_y} \right) = \frac{f_y}{f_y - f_z}.$$

问题求解：例如，设 $f(y, z) = ay + bz$ ，其中 a, b 都是正数， $a > b$ 。

- 以“国民收入得到最快增长”为目标。设 $y = x$ ， $z = 0$ ，得

$$x'(t) = ax \quad \Rightarrow \quad x = x_0 e^{at}.$$

- 以“尽快提高人民生活水平”为目标。先使国民收入得到最快增长，再把所有收入用于消费，进入低速增长阶段。解得

$$z(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, s] \\ x(t), & t \in [s, T] \end{cases}, \quad x(t) = \begin{cases} x_0 e^{at}, & t \in [0, s] \\ x_0 e^{as+b(t-s)}, & t \in [s, T] \end{cases},$$

$$F = \int_s^T x(t) dt = \frac{1}{b} x_0 e^{as} (e^{b(T-s)} - 1).$$

假设 $\frac{b}{a} < 1 - e^{-bT}$ ，则 F 最大 $\Leftrightarrow s = T - \frac{1}{b} \ln \frac{a}{a-b}$ 。

例 6.4. (自然资源的开采) 考虑两类自然资源的开发：生物资源 (可再生资源) 的捕获与非生物资源 (不可再生资源) 的开采。我们的目的是要寻求最优策略，使得对自然资源的开发获得最大利润。生物资源与非生物资源的增长机理不同。生物资源的增长是自然性的，种群能不断延续后代并保持自身的数量，人们要得到持续捕获量，捕获策略需建立在保证种群处于平衡状态的基础上，也就是说过度的捕获，将导致生物种群的灭绝。非生物资源 (如矿藏、油田等) 是有限的，长期开采会使得资源趋于枯竭，随着开采量的减少，价格会上升，因而特别要注意利润问题。

可再生资源模型 (以海洋捕鱼为例): 设时刻 t 的捕捞强度 $x(t)$ 和资源数量 $y(t)$ 满足

$$y'(t) = -ay^2 + (b - x)y$$

- 假设优化目标是获得尽可能多的资源。在时间 T 内的总收获量

$$F = \int_0^T xy dt = y(0) - y(T) + \int_0^T (-ay^2 + by) dt.$$

欲使 F 最大, 并且 $y(T)$ 维持在合理水平, 则 $y(t) = \frac{b}{2a}$ (资源上限的一半), $x(t) = \frac{b}{2}$ (自然增长率的一半)。当 $y(t) < \frac{b}{2a}$ 时, 禁止捕捞。当 $y(t) > \frac{b}{2a}$ 时, 以强度 $\frac{b}{2}$ 捕捞。

- 假设优化目标是获得尽可能多的利润。随着捕捞强度的变化, 捕捞成本和产品价格都随之变化。例如, 设单位产品的利润为 $p - qx$, 固定资产投资为 r , 其中 $p, q, r > 0$, 则在时间 T 内获得的总利润

$$F = \int_0^T [(p - qx)xy - r] dt = \int_0^T f(y, y') dt.$$

欲使 F 最大, 则 $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = \frac{\partial f}{\partial y}$ 。非常复杂的微分方程, 不易求解。

考虑稳定情形, $x(t), y(t)$ 都是常值, 则 $(p - qx)xy - r$ 最大 $\Leftrightarrow x = \frac{p + bq - \sqrt{p^2 - pbq + b^2q^2}}{3q}$ 。
当 $y(t) < \frac{b}{a} - x$ 时, 禁止捕捞。当 $y(t) > \frac{b}{a} - x$ 时, 以强度 x 捕捞。

不可再生资源模型 (以采矿为例): 设时刻 t 的开采强度 $x(t)$ 和资源储量 $y(t)$ 满足

$$y'(t) = -x.$$

假设优化目标是资源的使用价值减去开采成本之后的利润。资源储量越少, 开采成本越高, 价格越贵。开采过多, 又会使价格回落。例如, 设单位产品的利润为 $p - qx - sy$, 固定资产投资为 r , 其中 $p, q, r, s > 0$, 则在时间 T 内获得的总利润

$$F = \int_0^T [(p - qx - sy)x - r]dt = \int_0^T f(y, y')dt.$$

欲使 F 最大, 则 $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = \frac{\partial f}{\partial y}$, 得 $y''(t) = 0$ 。故 $x(t)$ 是常值,

$$y(t) = y_0 - xt, \quad T = \frac{y_0}{x}, \quad F = \left(p - qx - \frac{sy_0}{2} - \frac{r}{x} \right) y_0.$$

当 $x = \sqrt{\frac{r}{q}}$ 时, F 最大。

例 6.5. (赛跑的速度) 参加赛跑的运动员要根据自己的生理状况对赛程中各阶段的速度作出最恰当的安排，以期获得最好的成绩。寻求速度安排的最佳策略是一个涉及生理力学的复杂问题。T. B. Keller 提出了一个简单模型，根据 4 个胜利参数从最优控制的角度确定赛程中的速度函数，并可以预测比赛成绩。

按照 Keller 的模型，短跑比赛应该用最大冲力跑完全程，对于中长跑则要将距离分为 3 段，先用最大冲力起跑，然后匀速跑过大部分赛程，最后把贮存在体内的能量用完，靠惯性冲过终点。

模型建立：设赛程 L ，运动员的质量 m ，在距起点 x 处的赛跑速度 $v(x)$ 满足

$$mv \frac{dv}{dx} = f - cv, \quad v(0) = 0, \quad (*)$$

其中 f 是运动员的爆发力， cv 是空气阻力， c 是常数。

数学问题：求函数 $v(x)$ 和 $f(x)$ ， $x \in [0, L]$ 满足 $(*)$ 式和条件 ① $f(x)$ 有上限 F ② 体能消耗 $e = \int_0^L f(x)dx$ 有上限 E ，使得比赛成绩 $T = \int_0^L \frac{dx}{v(x)}$ 最小。

问题求解：

- 当 $E \geq FL$ 时，必有 $f(x) \equiv F$ 。得 $v(x) \approx \frac{F}{c}$ ， $T \approx \frac{cL}{F}$ 。比赛策略：全力奔跑。
- 当 $E < FL$ 时， $v(x)$ 受到约束

$$c \int_0^L v(x)dx \leq E - \frac{1}{2}m(v(L))^2.$$

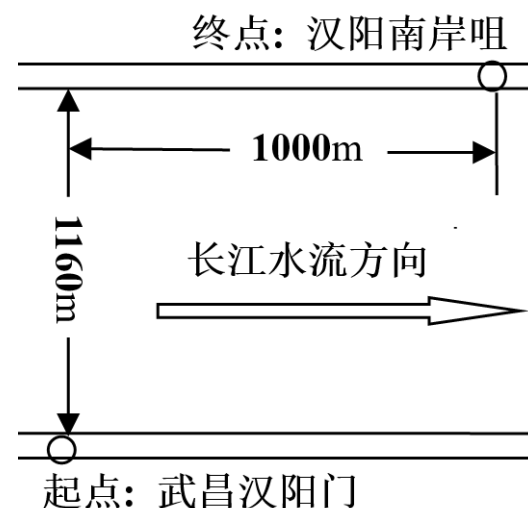
欲使 T 最小，则 $v(x)$ 近似常值，得

$$v(x) \approx u = \frac{1}{m} \left(\sqrt{c^2 L^2 + 2mE} - cL \right), \quad T \approx \frac{L}{u} = \frac{L}{2E} \left(\sqrt{c^2 L^2 + 2mE} + cL \right).$$

比赛策略：先全力提升速度至 u ，再匀速奔跑。不存在靠惯性冲刺阶段，否则有可能倒在终点线前。

例 6.6. (抢渡长江) 2002 年 5 月 1 日，抢渡的起点设在武昌汉阳门码头，终点设在汉阳南岸咀，江面宽约 1160 米。据报载，当日的平均水温 16.8°C ，江水的平均流速为 1.89 米/秒。参赛的国内外选手共 186 人 (其中专业人员将近一半)，仅 34 人到达终点，第一名的成绩为 14 分 8 秒。除了气象条件外，大部分选手由于路线选择错误，被滚滚的江水冲到下游，而未能准确到达终点。

假设在竞渡区域两岸为平行直线，它们之间的垂直距离为 1160 米，从武昌汉阳门的正对岸到汉阳南岸咀的距离为 1000 米，见示意图。



请你们通过数学建模来分析上述情况，并回答以下问题：

1. 假定在竞渡过程中游泳者的速度大小和方向不变，且竞渡区域每点的流速均为 1.89 米/秒。试说明 2002 年第一名是沿着怎样的路线前进的，求她游泳速度的大小和方向。如何根据游泳者自己的速度选择游泳方向，试为一个速度能保持在 1.5 米/秒的人选择游泳方向，并估计他的成绩。
2. 在 (1) 的假设下，如果游泳者始终以和岸边垂直的方向游，他 (她) 们能否到达终点？根据你们的数学模型说明为什么 1934 年和 2002 年能游到终点的人数的百分比有如此大

的差别；给出能够成功到达终点的选手的条件。

3. 若流速沿离岸边距离的分布为 (设从武昌汉阳门垂直向上为 y 轴正向):

$$v(y) = \begin{cases} 1.47, & 0 \leq y \leq 200 \\ 2.11, & 200 < y < 960 \\ 1.47, & 960 \leq y \leq 1160 \end{cases}$$

游泳者的速度大小 (1.5 米/秒) 仍全程保持不变, 试为他选择游泳方向和路线, 估计他的成绩。

4. 若流速沿离岸边距离为连续分布, 例如

$$v(y) = \begin{cases} 0.0114y, & 0 \leq y \leq 200 \\ 2.28, & 200 < y < 960 \\ 0.0114(1160 - y), & 960 \leq y \leq 1160 \end{cases}$$

或你们认为合适的连续分布, 如何处理这个问题。

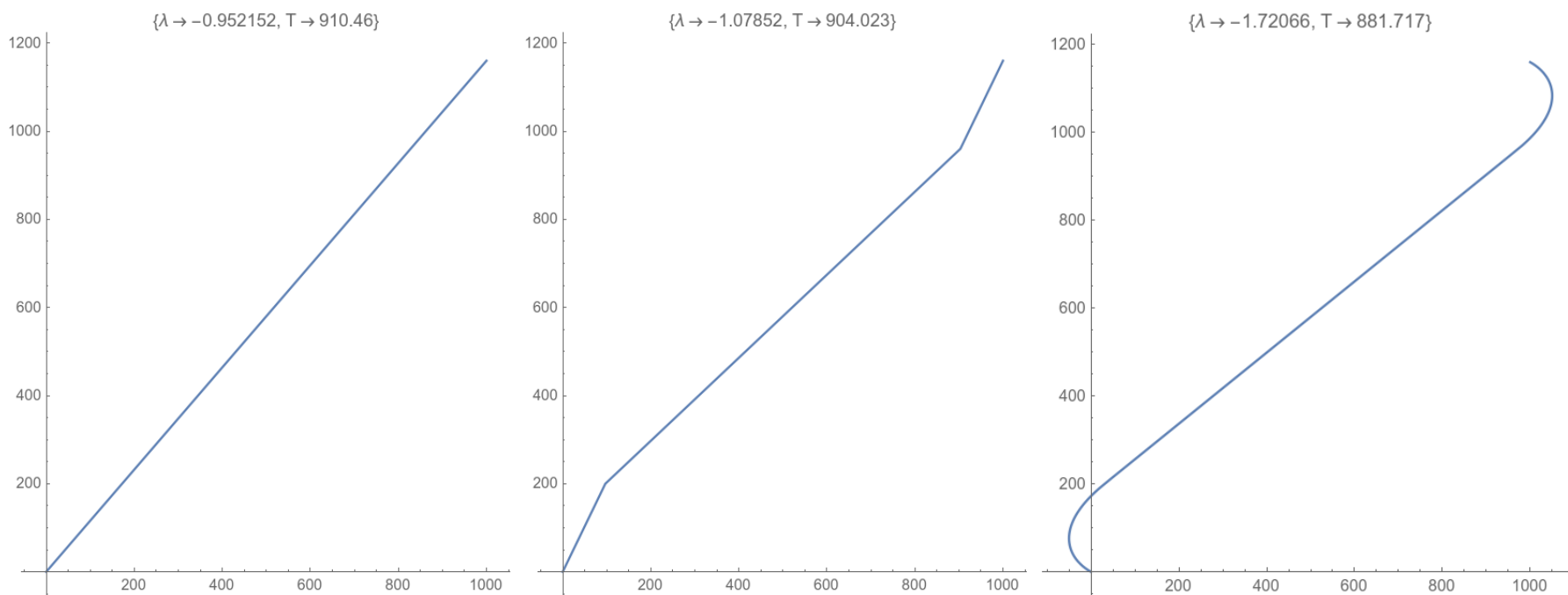
5. 用普通人能懂的语言, 给有意参加竞渡的游泳爱好者写一份竞渡策略的短文。

6. 你们的模型还可能有什么其他的应用?

模型建立：设游泳线路 (x, y) ，前进方向的倾斜角 θ ，则 $x'(t) = v + v_0 \cos \theta$ ， $y'(t) = v_0 \sin \theta$ 。

数学问题：求 $\theta(y)$ 使得 $\int_0^{1160} \frac{v + v_0 \cos \theta}{v_0 \sin \theta} dy = 1000$ ，并且用时 $T = \int_0^{1160} \frac{dy}{v_0 \sin \theta}$ 最小。

问题求解：由变分法可得 $\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{v + v_0 \cos \theta}{\sin \theta} \right) = \lambda \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \right)$ 即 $\cos \theta = \frac{v_0}{\lambda - v}$ ，其中 λ 是待定常数，可由约束条件解得。例如，问题 (1) 解得 $\lambda \approx -0.952152$ ，成绩 $T \approx 910.46$ 秒；问题 (3) 解得 $\lambda \approx -1.07852$ ，成绩 $T \approx 904.023$ 秒；问题 (4) 解得 $\lambda \approx -1.72066$ ，成绩 $T \approx 881.717$ 秒。游泳路线图如下。



例 6.7. (几个典型的变分法例子)

1. 已知 $f(x, y)$ 。求 $y = h(x)$ 使得 $F(y) = \int_0^1 f(x, y)dx$ 取得极值。

解答. 设 δ 是 h 的任意充分小扰动。

$$F(h + \delta) - F(h) \approx \int_0^1 f_y(x, h)\delta(x)dx$$

故 h 应满足方程 $f_y(x, h) = 0$ 。

□

2. 已知 $f(x, y, z)$ 。求 $y = h(x)$ 使得 $F(y) = \int_0^1 f(x, y, y')dx$ 取得极值。

解答. 设 δ 是 h 的任意充分小扰动。

$$\begin{aligned} F(h + \delta) - F(h) &\approx \int_0^1 [f_y(x, h, h')\delta(x) + f_z(x, h, h')\delta'(x)]dx \\ &= \int_0^1 [f_y(x, h, h') - \frac{d}{dt}f_z(x, h, h')]\delta(x)dx \end{aligned}$$

故 h 应满足微分方程 $\frac{d}{dt}f_z(x, h, h') = f_y(x, h, h')$ 。

□

3. 已知 $f(x, y)$ 和 $g(x, y)$ 。求 $y = h(x)$ 满足约束条件 $\int_0^1 f(x, y)dx = 0$, 并且使得 $G(y) = \int_0^1 g(x, y)dx$ 取得极值。

解答. 设 δ 是 h 的任意充分小扰动。同 (1)(2) 可得, δ 应满足

$$\begin{cases} \int_0^1 f_y(x, h)\delta(x)dx = 0 \\ \int_0^1 g_y(x, h)\delta(x)dx = 0 \end{cases}$$

故存在常数 λ 使得 $f_y(x, h) = \lambda g_y(x, h)$ 。由此解得含参变量 λ 的函数 $h(\lambda, x)$ 。

再由 $\int_0^1 f(x, h)dx = 0$ 解得 λ 。

□

4. 已知 $f(x, y, z)$ 和 $g(x, y, z)$ 。求 $y = h(x)$ 满足约束条件 $\int_0^1 f(x, y, y')dx = 0$, 并且使得 $G(y) = \int_0^1 g(x, y, y')dx$ 取得极值。

解答. 设 δ 是 h 的任意充分小扰动。同 (1)(2)(3) 可得, 存在常数 λ 使得

$$\frac{d}{dt}[f_z(x, h, h') - \lambda g_z(x, h, h')] = f_y(x, h, h') - \lambda g_y(x, h, h')$$

由此解得含参变量 λ 的函数 $h(\lambda, x)$ 。再由 $\int_0^1 f(x, h, h')dx = 0$ 解得 λ 。

□