第六章作业

1. 简述CT 发明过程。

1895年， 德国物理学家伦琴(Wilhelm Conarad Roentgen)发现了 X 射线，但传统X射线技术因只能提供二维重叠图像而存在局限。

1950年代末，南非物理学家阿兰·科马克（Allan Cormack）率先提出断层成像的数学理论。他通过研究不同角度X射线穿透人体后的衰减数据，建立了利用投影数据重建断层图像的数学模型，并于1963-1964年发表论文。

1967年，戈弗雷·豪斯菲尔德（Godfrey Hounsfield）在EMI公司工作时，基于科马克的理论，尝试将数学算法与工程技术结合。经过四年攻关，他成功研制出首台临床CT原型机，通过X射线管旋转扫描和探测器接收数据，结合计算机重建图像。1971年，第一台头部CT机在英国阿特金森-莫利医院投入使用，首次清晰呈现人脑断层图像，使颅内肿瘤和出血的诊断准确率大幅提升。

1980年代螺旋CT实现连续扫描，1990年代多层螺旋CT显著提升速度和分辨率。如今，CT已成为肿瘤诊断、创伤评估和血管成像的核心工具，其快速、精准的特点极大推动了早期疾病筛查和微创治疗的发展。

2. 试证明投影定理。

二维函数 $f(x,y)$ 的投影 $p_\theta(r)$ 定义为沿角度 θ 的线积分:

$$p_\theta(r) = \int_{-\infty}^{\infty} f(r\cos\theta - s\sin\theta, r\sin\theta + s\cos\theta)\, ds,$$

其中 r 是沿方向 θ 的坐标，s 是垂直于 θ 的坐标。

函数 $f(x,y)$ 的二维傅里叶变换为:

$$F(u,v) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x,y) e^{-i2\pi(ux+vy)}\, dxdy.$$

考虑沿角度 θ 的径向线 $(u=\omega\cos\theta, v=\omega\sin\theta)$，代入二维傅里叶变换：

$$F(\omega\cos\theta,\omega\sin\theta)=\iint_{-\infty}^{\infty} f(x,y)e^{-i2\pi\omega(x\cos\theta+y\sin\theta)}\,dxdy.$$

引入坐标旋转变换：

$$\begin{cases} x=r\cos\theta-s\sin\theta \\ y=r\sin\theta+s\cos\theta \end{cases},$$

其雅可比行列式 $|J|=1$，故 $dxdy=drds$。代入后：

$$x\cos\theta+y\sin\theta=r(\cos^2\theta+\sin^2\theta)+s(\cos\theta\sin\theta-\sin\theta\cos\theta)=r,$$

因为交叉项被抵消。于是：

$$F(\omega\cos\theta,\omega\sin\theta)=\iint_{-\infty}^{\infty} f(r\cos\theta-s\sin\theta, r\sin\theta+s\cos\theta)e^{-i2\pi\omega r}\,drds.$$

将二重积分拆分为先对 s 积分，再对 r 积分：

$$F(\omega\cos\theta,\omega\sin\theta)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(r\cos\theta-s\sin\theta, r\sin\theta+s\cos\theta)ds\right]e^{-i2\pi\omega r}\,dr.$$

其中，方括号内项即为投影定义 $p_\theta(r)$，因此：

$$F(\omega\cos\theta,\omega\sin\theta)=\int_{-\infty}^{\infty} p_\theta(r)e^{-i2\pi\omega r}\,dr.$$

这等价于：

$$F(\omega\cos\theta,\omega\sin\theta)=\mathcal{F}_1\{p_\theta(r)\}(\omega),$$

即投影 $p_\theta(r)$ 的一维傅里叶变换等于图像傅里叶变换在对应方向的径向切片。
