
Reconstruction tomographique

Irène Buvat
U678 INSERM
Paris

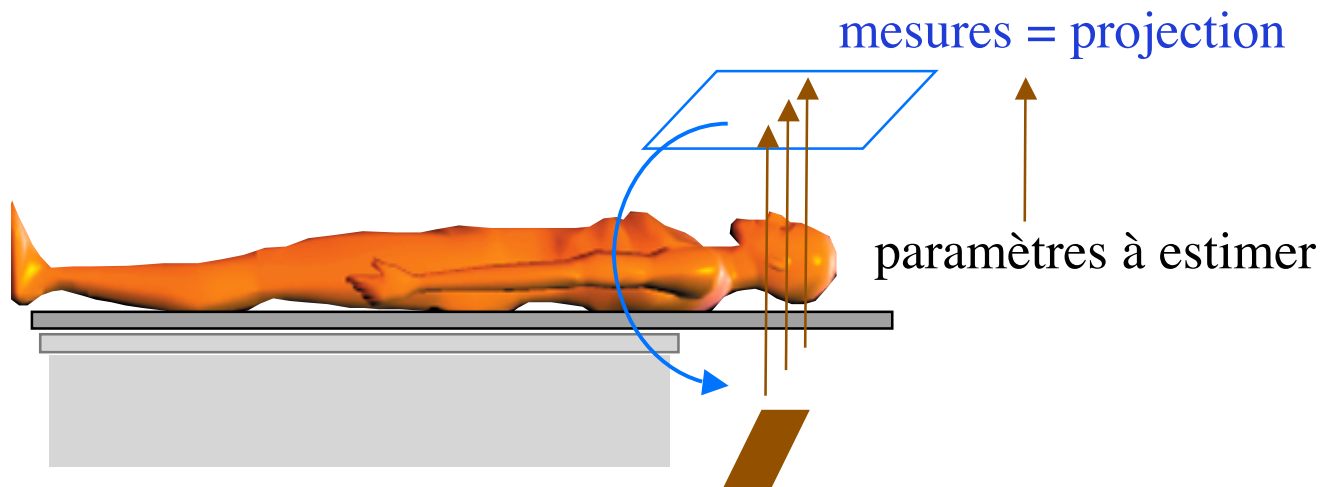
buvat@imed.jussieu.fr
<http://www.guillemet.org/irene>

Janvier 2005

Plan du cours

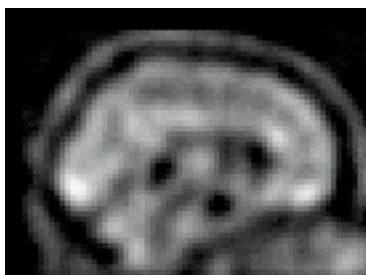
- Introduction
 - Problème de reconstruction tomographique
 - Tomographie en transmission
 - Tomographie en émission
 - Spécificité du problème de reconstruction tomographique
- Notions de base
 - Projection
 - Transformée de Radon
 - Sinogramme
 - Rétroprojection
- Méthodes de reconstruction analytique
 - Principe
 - Théorème de la coupe centrale
 - Rétroprojection filtrée
 - Filtres
- Méthodes de reconstruction itérative
 - Principe et méthodes
 - Opérateur de projection R
 - Méthodes algébriques
 - Méthodes statistiques
 - Régularisation
- Reconstruction « fully 3D »
 - Problématique
 - Méthodes analytiques
 - Méthodes de rebinning
 - Méthodes itératives
- Discussion

Introduction : la reconstruction tomographique



Mesures intégrales sous différentes incidences angulaires
projections

Reconstruction  tomographique



sagittale



transverse

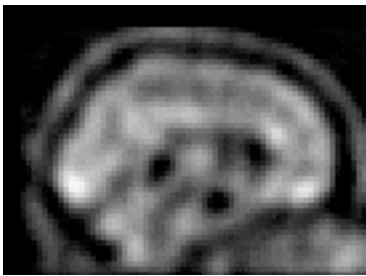
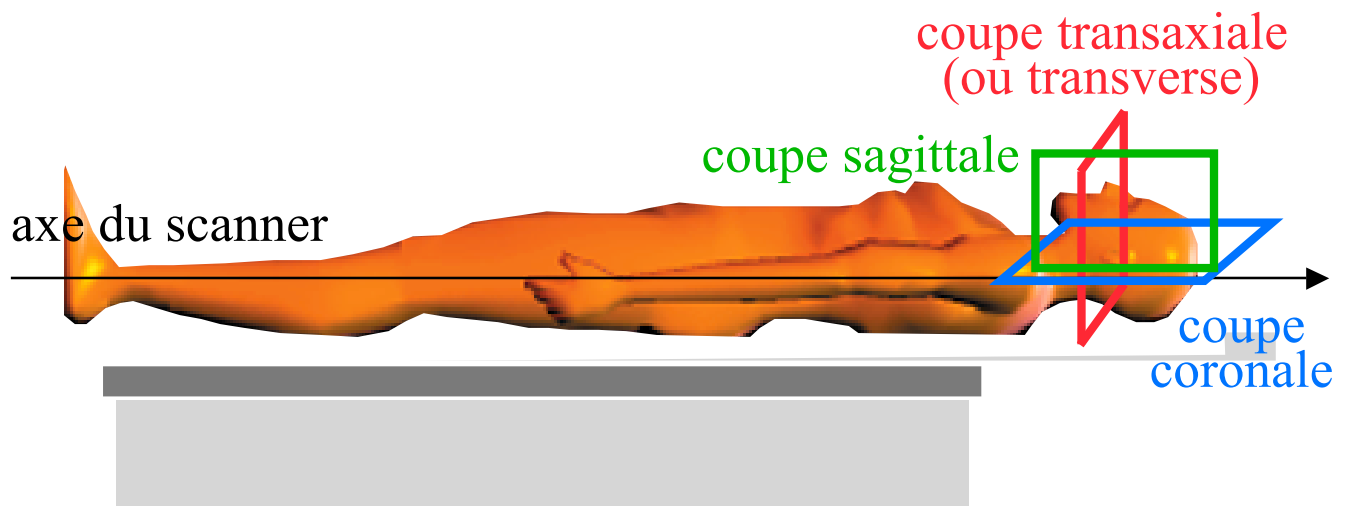


coronale

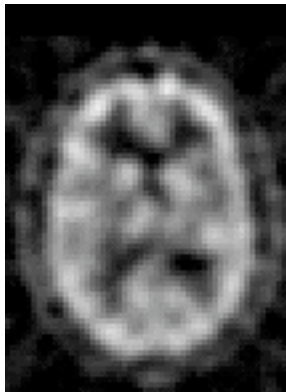
coupes d'orientation quelconque :
imagerie 3D

Reconstruction tomographique = problème inverse :
estimer la distribution 3D à partir des projections 2D mesurées

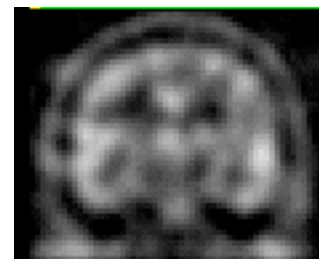
Introduction : coupes tomographiques



sagittale



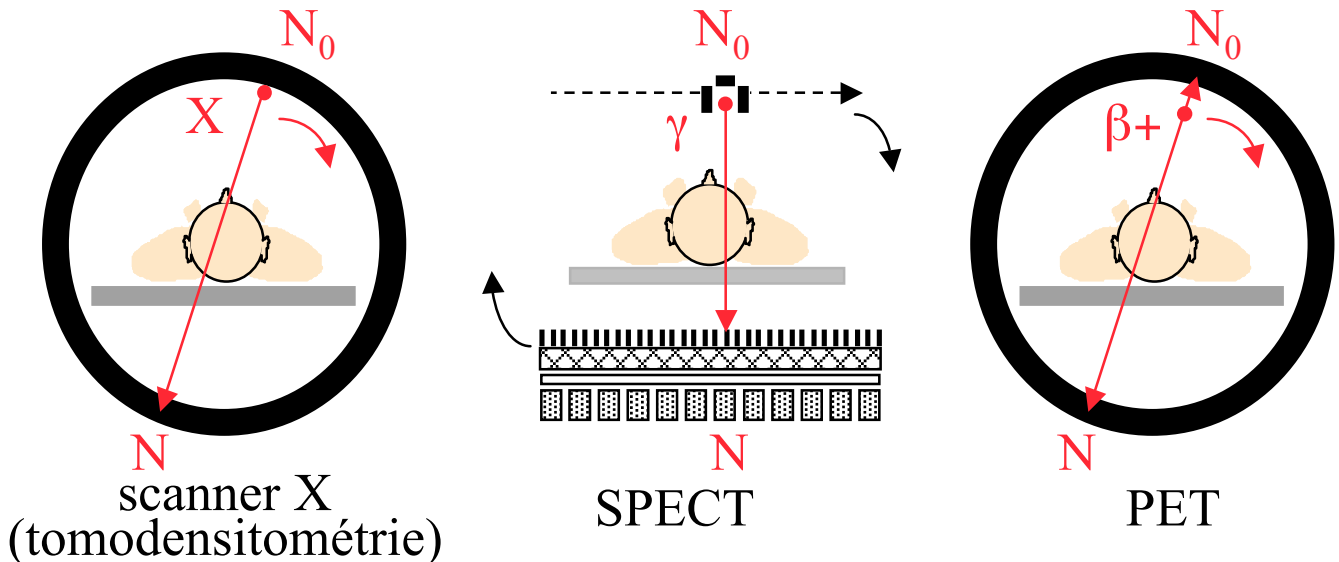
transverse



coronale

Introduction : tomographie de transmission

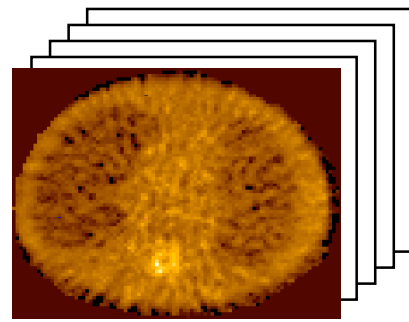
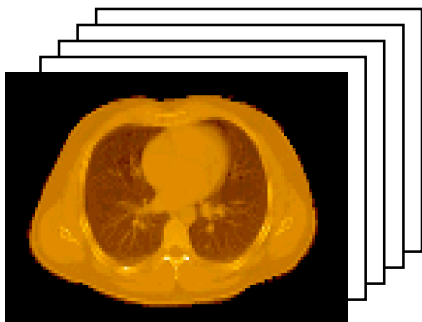
- Source (X ou γ) externe au patient



- Mesures : projection du rayonnement ayant traversé le patient \Rightarrow intégrale des coefficients d'atténuation

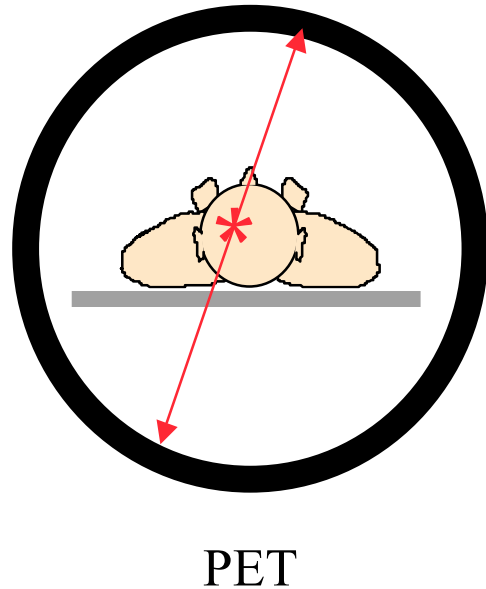
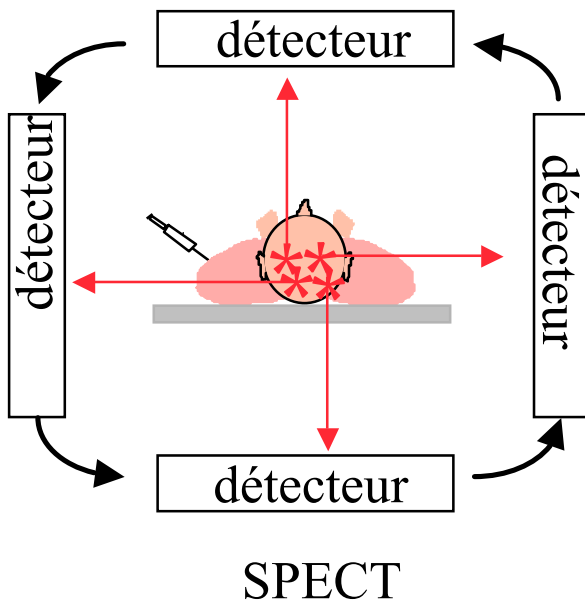
$$N = N_0 \exp\left(-\int_0^d \mu(l) dl\right) \quad \ln \frac{N_0}{N} = \int_0^d \mu(l) dl$$

- Objet à reconstruire : cartographie 3D des coefficients d'atténuation μ du milieu traversé



Introduction : tomographie d'émission

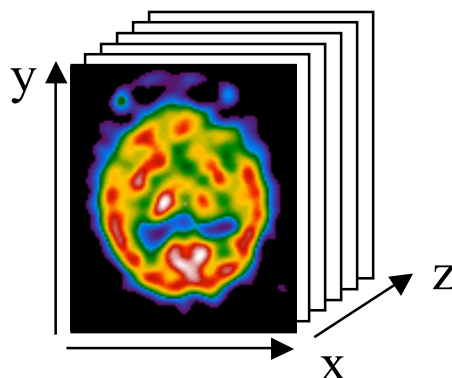
- Source γ ou β^+ interne au patient



- Mesures idéales (sans atténuation) : intégrale de l'activité le long des raies de projections

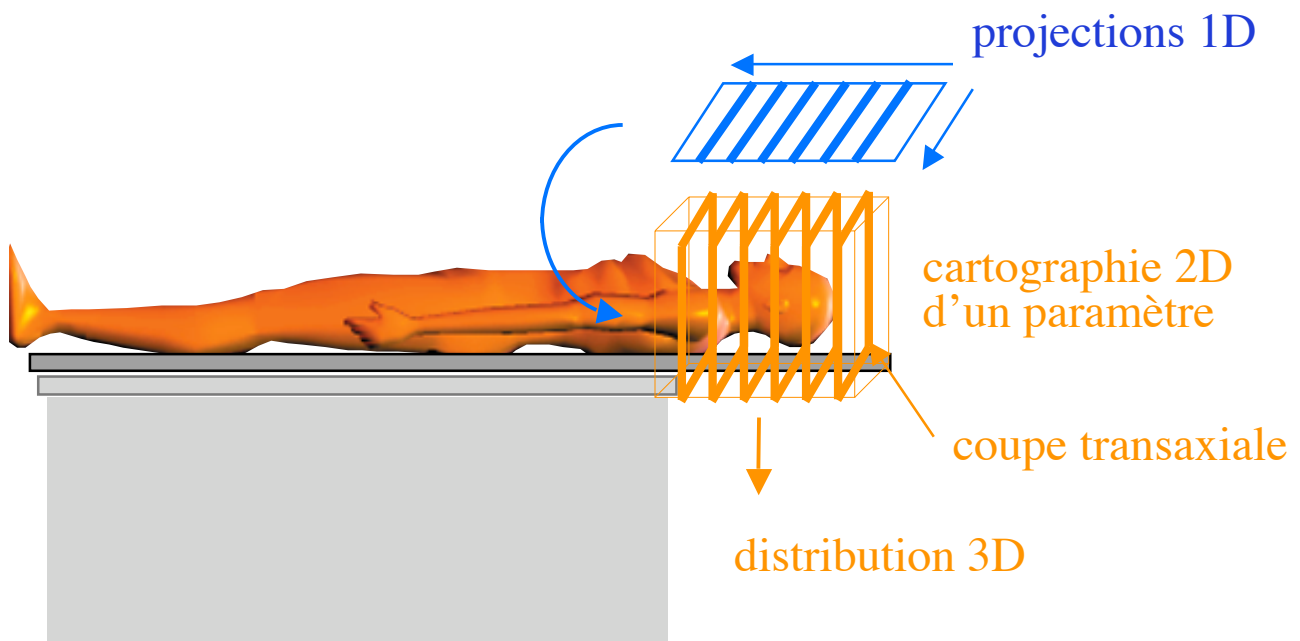
$$N = \int_0^d f(l) dl$$

- Objet à reconstruire : cartographie 3D de la distribution d'activité f dans l'organisme



Factorisation du problème de reconstruction

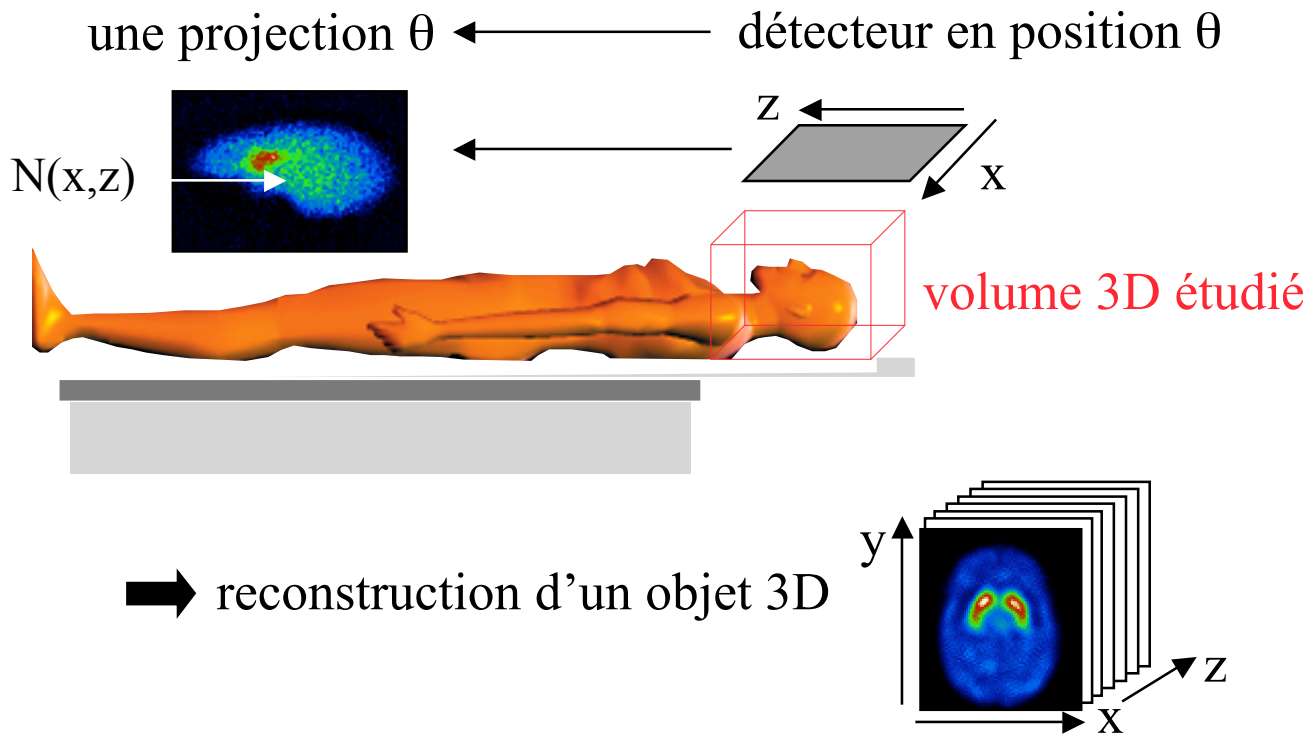
volume 3D à partir d'images 2D



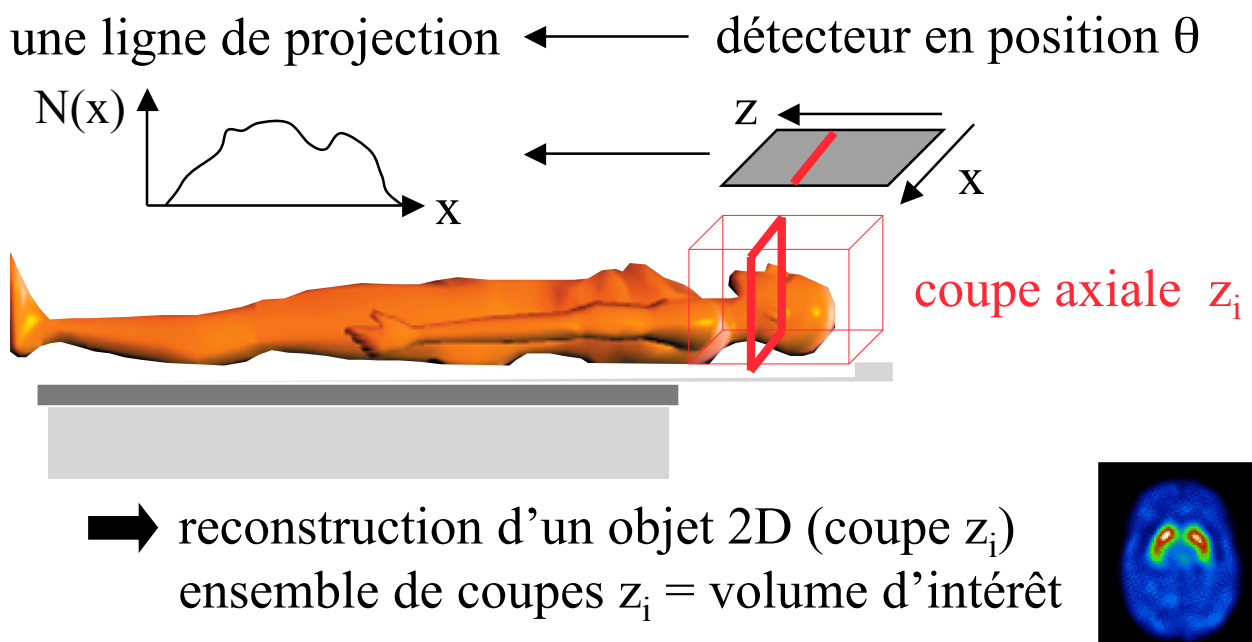
volume 3D reconstruit à partir de la
reconstruction d'un ensemble de volume 2D

Factorisation du problème de reconstruction

- Un ensemble de projections 2D



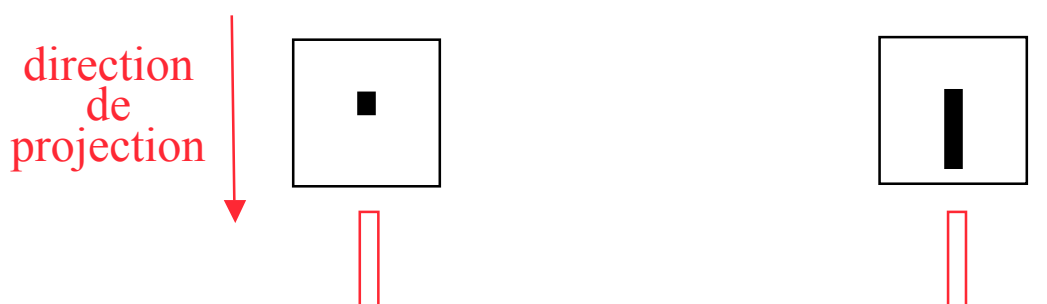
- Un ensemble de projections 1D



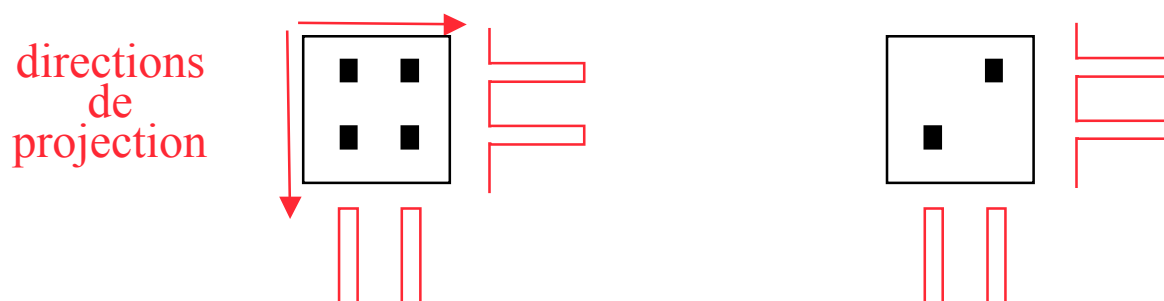
Reconstruction : non unicité de la solution

- Pas de solution unique : toujours plusieurs objets compatibles avec un ensemble fini de projections

1 projection : plusieurs solutions possibles



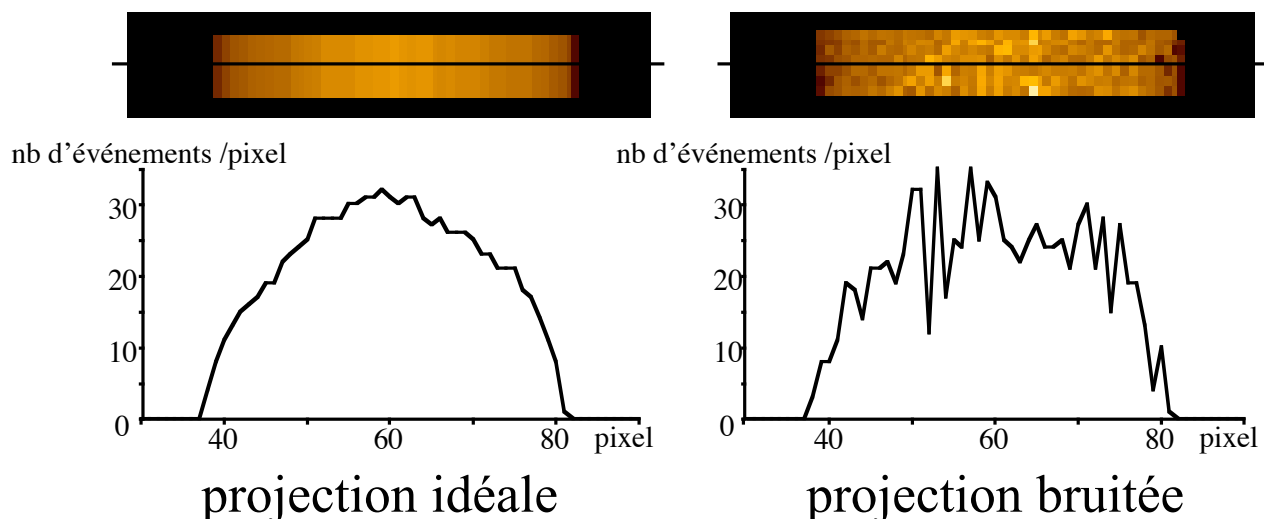
2 projections : plusieurs solutions possibles



➡ Unicité de la solution pour une infinité de projections seulement

Reconstruction : problème inverse mal posé

- Pas de solution du fait du bruit entachant les données



- Non unicité de la solution du fait du manque d'informations (nombre de projections fini)

typiquement, 64 ou 128 projections $\ll \infty$

➔ Instabilité de la solution : petite différence sur les projections peut provoquer des écarts importants sur les coupes reconstruites

Notions de base



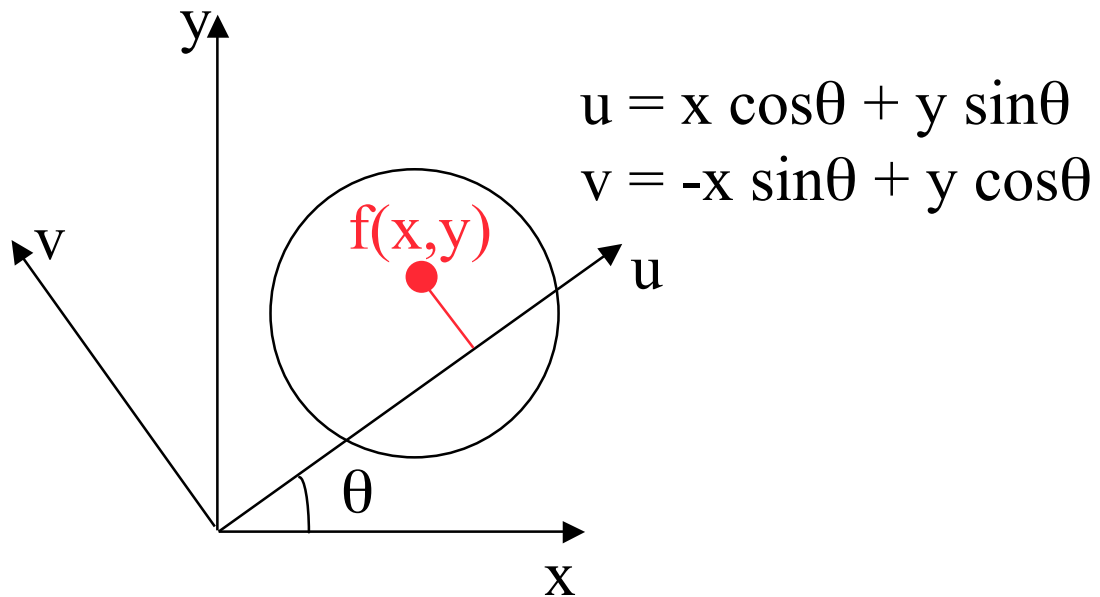
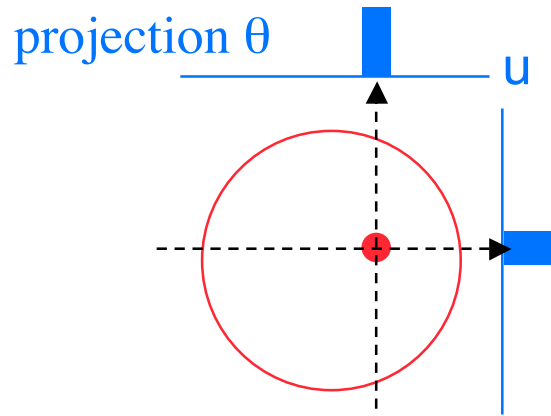
Travaux princeps



1887-1956

1917 : Johann Radon : “De la détermination des fonctions à partir de leurs intégrales selon certaines directions”, Math. Phys. Klass

Opération de projection

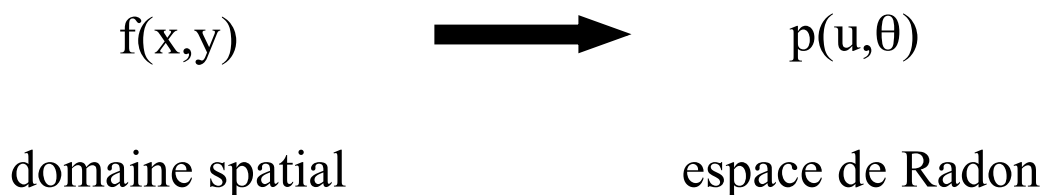


$$p(u, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \, dv$$

Transformée de Radon

$$p(u, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \, dv$$

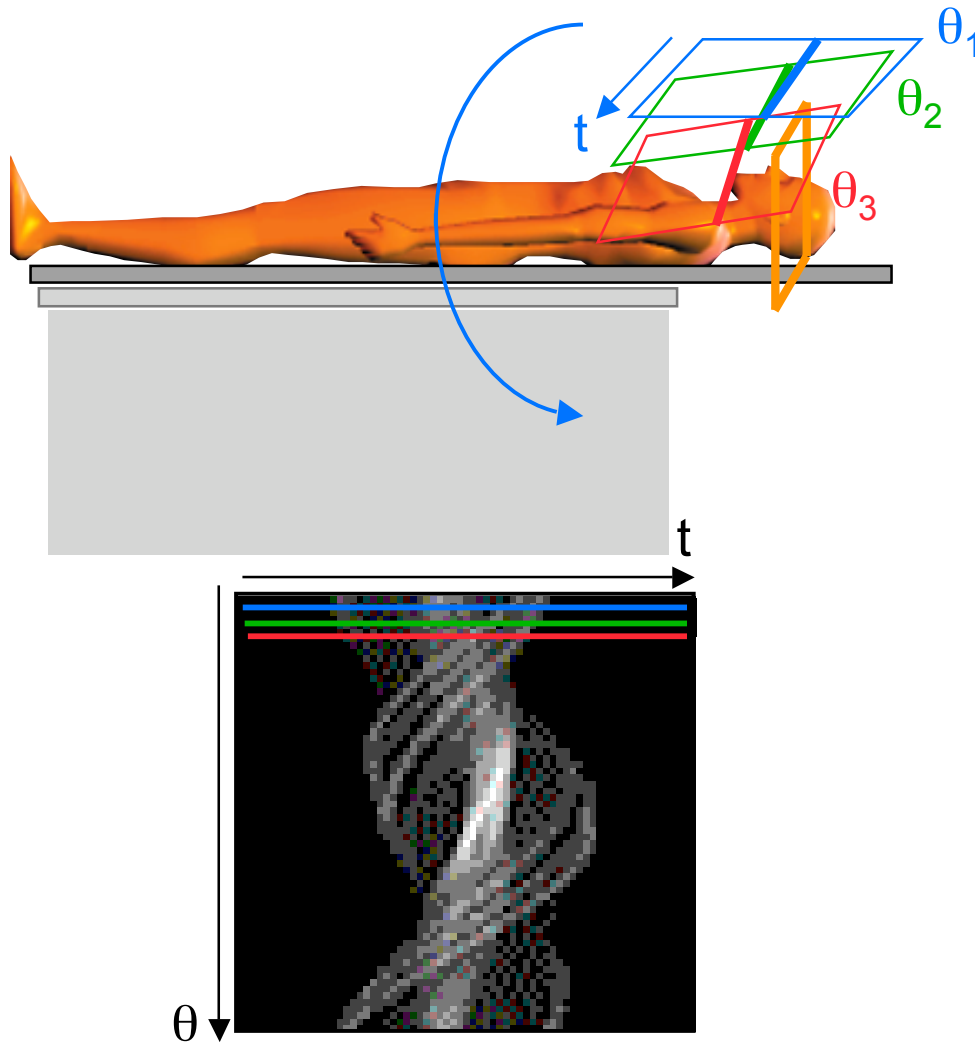
ensemble des projections pour $\theta = [0, \pi]$
= transformée de Radon de $f(x, y)$



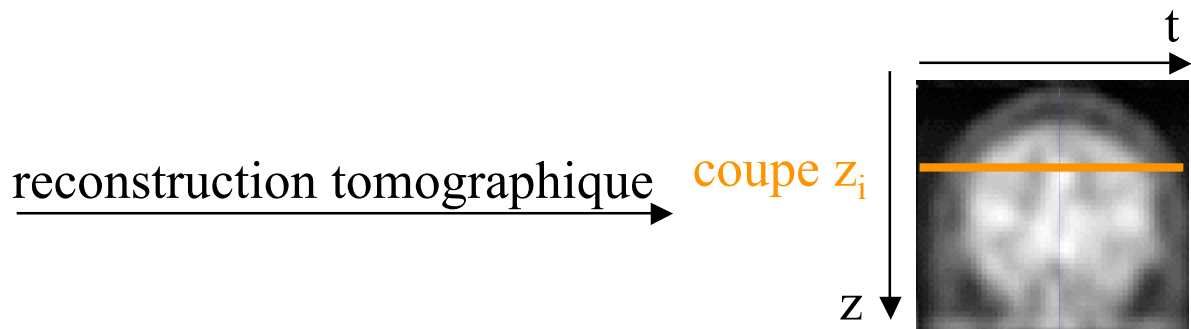
Problème de reconstruction tomographique :
inverser la transformée de Radon, i.e.,
estimer $f(x, y)$ à partir de $p(u, \theta)$

Sinogramme

Sinogramme = signal issu d'une coupe z_i vue sous différentes incidences θ

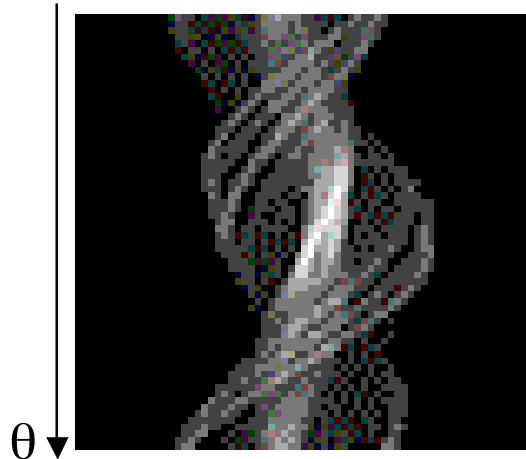


sinogramme correspondant à la coupe z_i



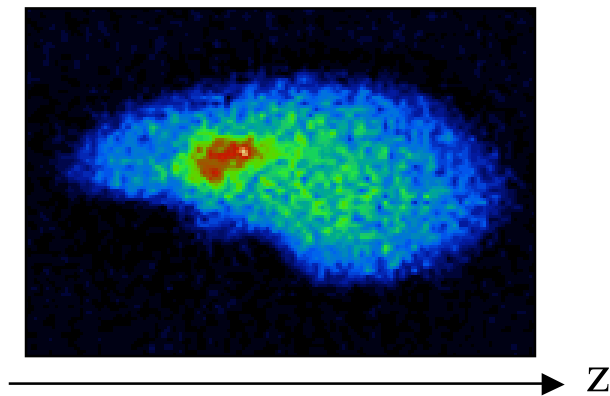
Sinogrammes et projections

Les sinogrammes et les projections contiennent les mêmes informations : ils ne diffèrent que par l'organisation avec laquelle les informations sont représentés.



sinogramme correspondant à la coupe z_i

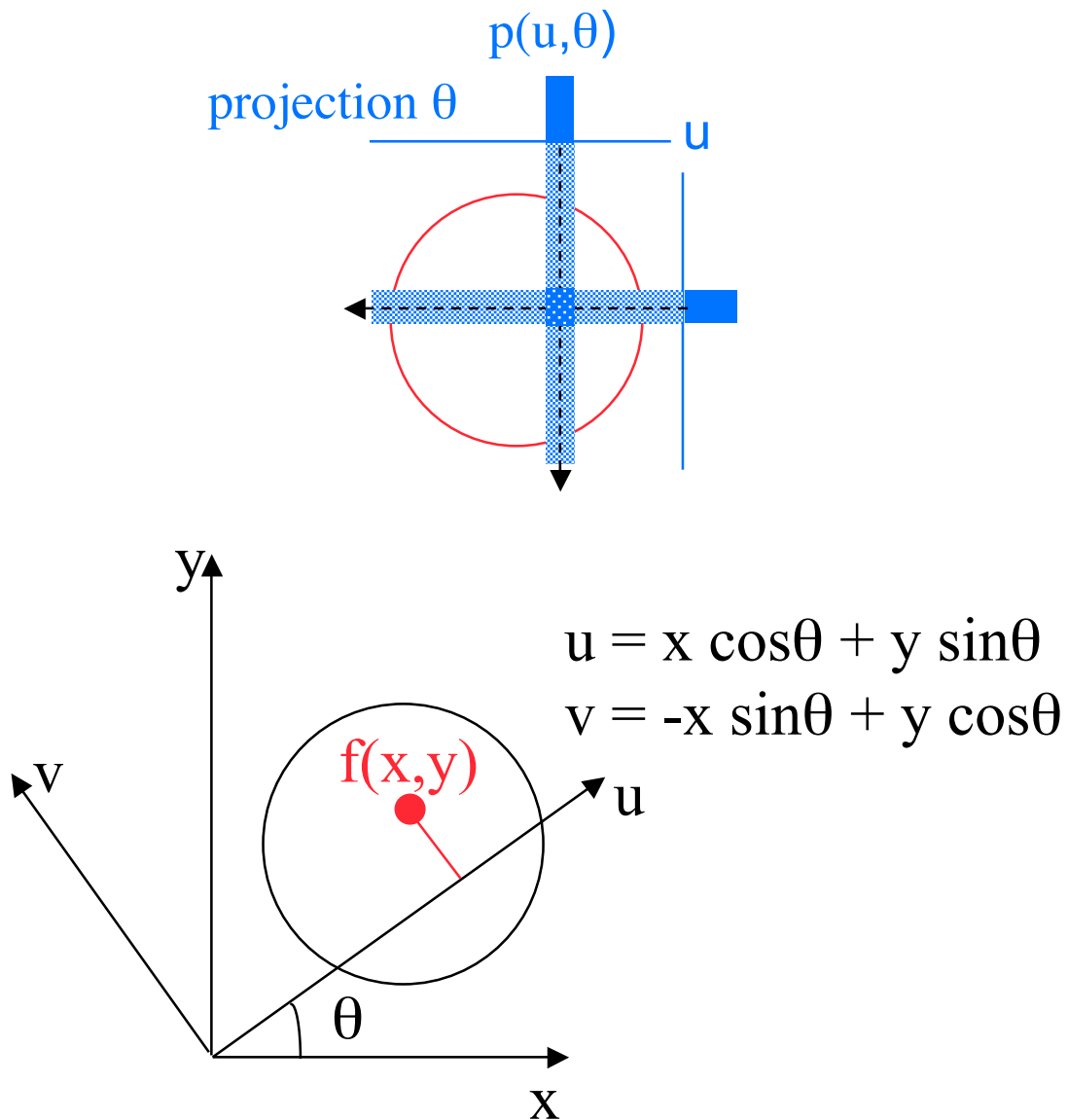
Un sinogramme : toute l'information relative à une coupe, obtenue pour tous les angles de projection.



projection correspondant à l'angle θ

Une projection : l'information relative à toutes les coupes, mais pour une incidence angulaire unique.

Opération de rétroprojection



$$f^*(x, y) = \int_0^{\pi} p(u, \theta) d\theta$$

Attention : la rétroprojection n'est pas l'inverse de la transformée de Radon

Deux approches à la reconstruction tomographique

- Les méthodes analytiques

$$R[f(x,y)] = \int_0^\pi p(u,\theta) d\theta$$

- Les méthodes discrètes (ou itératives)

$$p = R f$$

Méthodes de reconstruction analytique : introduction

- Inversion analytique de la transformée de Radon
- Expression continue du problème de reconstruction tomographique
- Méthode la plus courante : rétroprojection filtrée

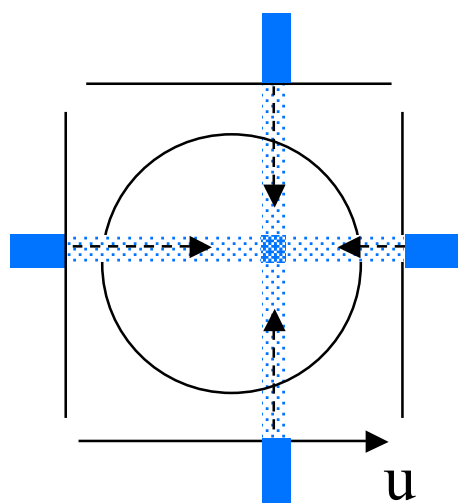
FBP : Filtered BackProjection

- Méthodes rapides



- Méthodes disponibles sur tous les dispositifs d'acquisition commercialisés (scanner X, SPECT, PET)

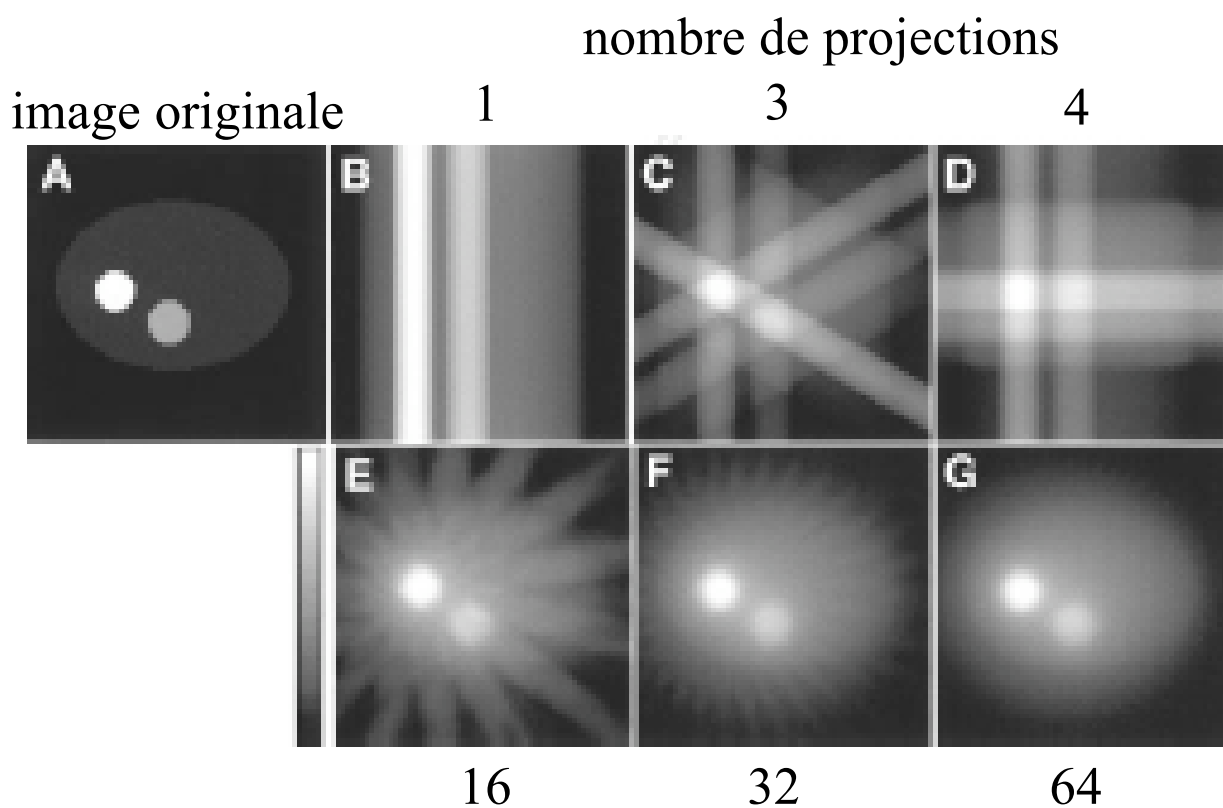
Limites de la rétroprojection simple



$$f^*(x,y) = \int_0^{\pi} p(u,\theta) d\theta$$

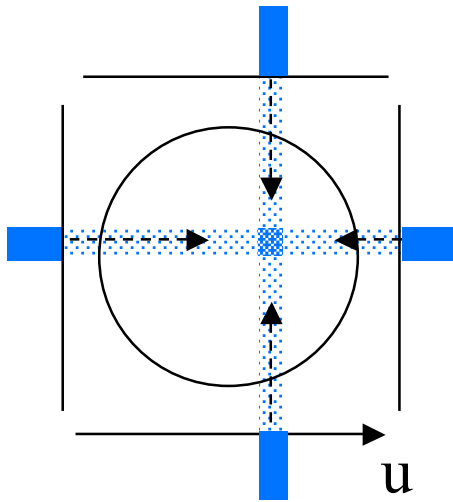
rétroprojection simple

➡ artefacts d'épandage en étoile



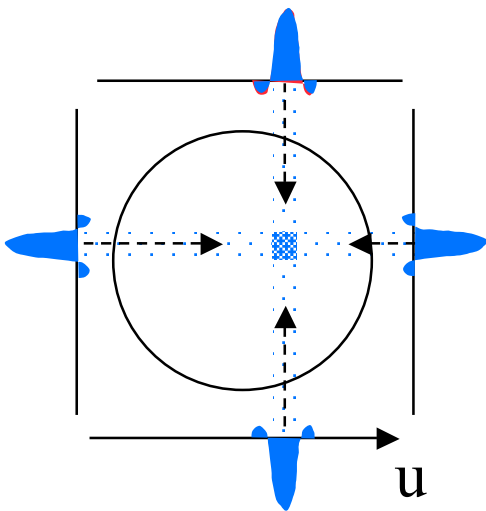
La rétroprojection n'inverse pas la transformée de Radon

Rétroprojection filtrée : principe



$$f^*(x,y) = \int_0^{\pi} p(u,\theta) d\theta$$

rétroprojection simple



$$f^*(x,y) = \int_0^{\pi} p(u,\theta) d\theta$$

projection filtrée

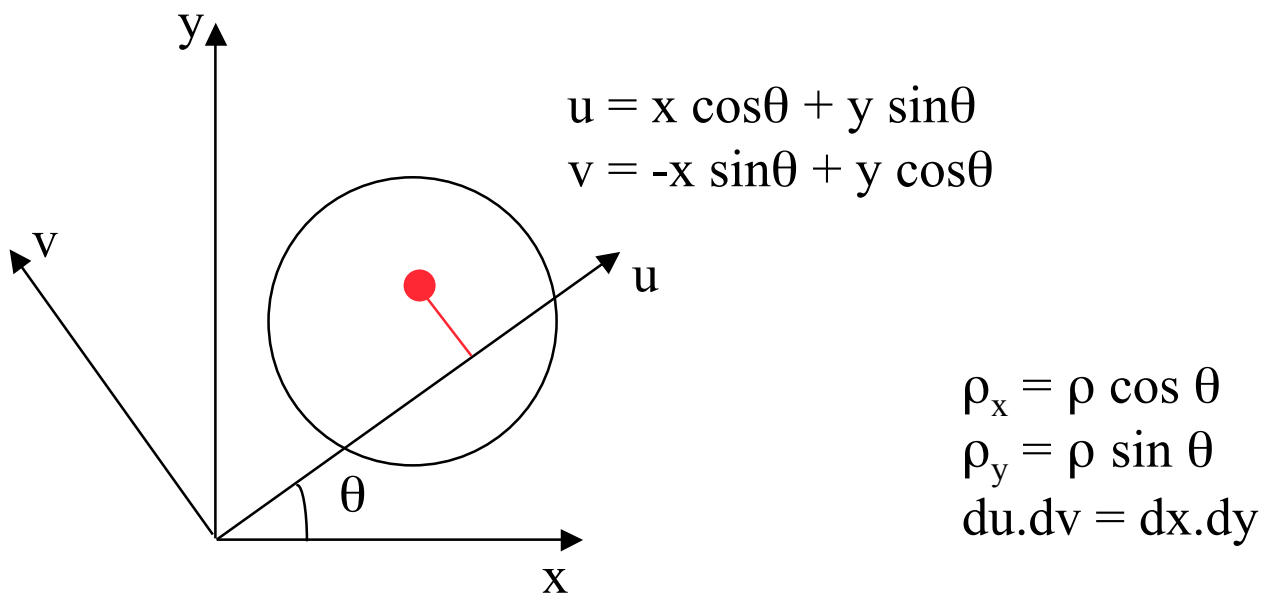
rétroprojection filtrée

➡ réduction des artefacts

➡ inversion de la transformée de Radon

Théorème de la coupe centrale (TCC) (1)

$$p(u, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dv \xrightarrow{\text{transformée de Fourier (TF)}} P(\rho, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(u, \theta) e^{-i2\pi\rho u} du$$



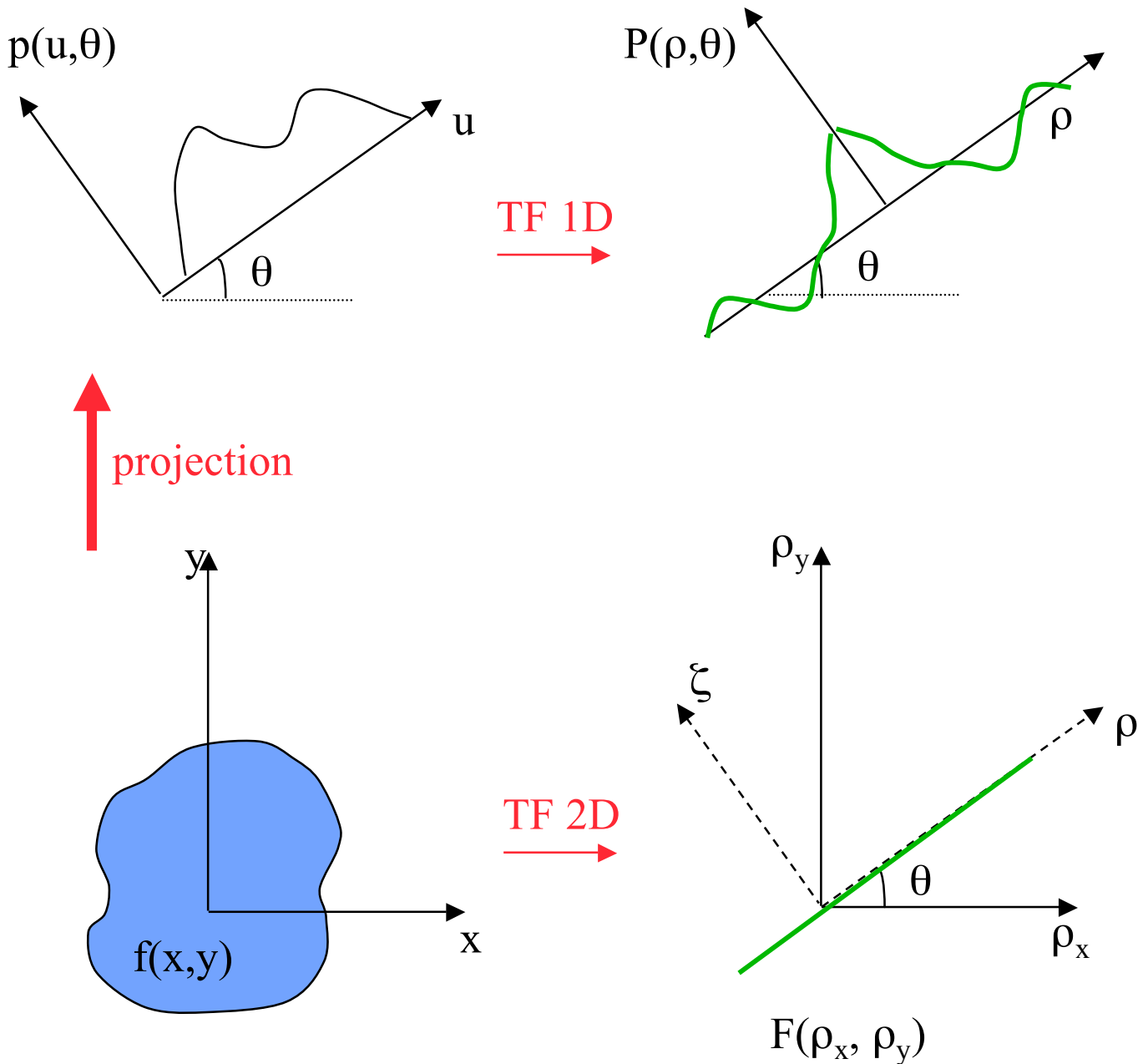
changement de variable : $(u, v) \rightarrow (x, y)$

$$P(\rho, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-i2\pi\rho u} du dv \xrightarrow{\downarrow} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-i2\pi(x\rho_x + y\rho_y)} dx dy$$

TF monodimensionnelle d'une projection par rapport à u
 =
 TF bidimensionnelle de la distribution à reconstruire

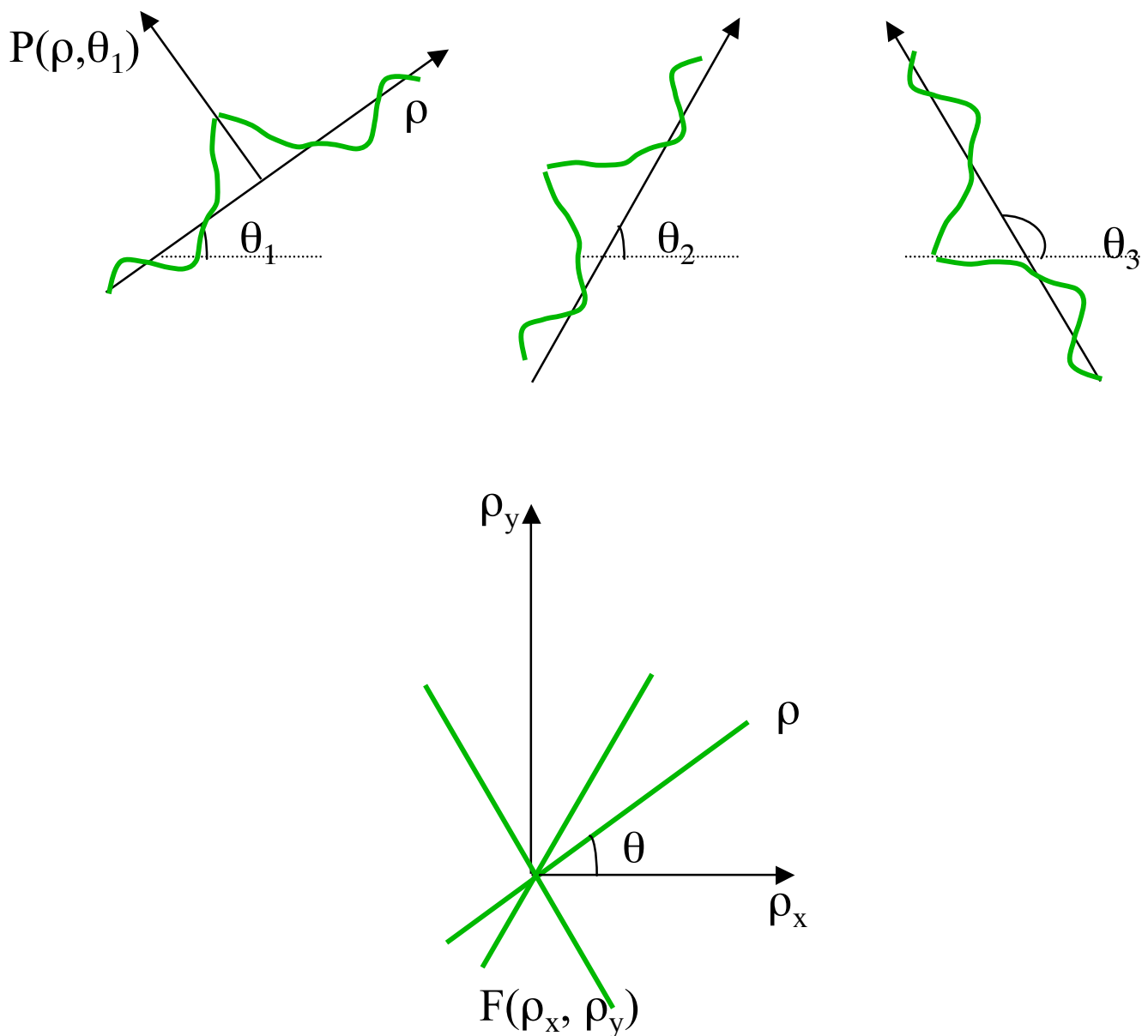
Théorème de la coupe centrale (TCC) (2)

$$P(\rho, \theta) = F(\rho_x, \rho_y) \Big|_{\xi=0}$$



Rétroprojection filtrée : principe

Si on a $p(\rho, \theta)$ pour tous les angles θ entre 0 et π , on peut reconstruire la transformée de Fourier de l'objet, et donc l'objet



Rétroprojection filtrée : démonstration

$$P(\rho, \theta) = F(\rho_x, \rho_y)$$

$$\text{TF}^{-1} \downarrow$$
$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\rho_x, \rho_y) e^{i2\pi(x\rho_x + y\rho_y)} d\rho_x d\rho_y$$

$$\text{TCC} \downarrow$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P(\rho, \theta) e^{i2\pi(x\rho_x + y\rho_y)} d\rho_x d\rho_y$$

changement de variable : $(\rho_x, \rho_y) \rightarrow (\rho, \theta)$

$$\downarrow$$
$$= \int_0^\pi \int_{-\infty}^{+\infty} P(\rho, \theta) |\rho| e^{i2\pi\rho u} d\rho d\theta$$

$$\begin{aligned} \rho_x &= \rho \cos \theta \\ \rho_y &= \rho \sin \theta \\ \rho &= (\rho_x^2 + \rho_y^2)^{1/2} \\ d\rho_x \cdot d\rho_y &= \rho \cdot d\rho \cdot d\theta \\ u &= x \cos \theta + y \sin \theta \end{aligned}$$

$$= \int_0^\pi p'(u, \theta) d\theta \quad \text{avec} \quad p'(u, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(\rho, \theta) |\rho| e^{i2\pi\rho u} d\rho$$

↑
projections filtrées

↑
filtre rampe

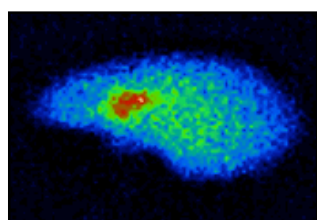
objet $f(x, y)$ à reconstruire

=

rétroprojection des projections filtrées

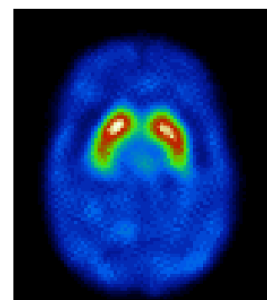
Algorithme de rétroprojection filtrée

$$f(x,y) = \int_0^\pi p'(u,\theta) d\theta \quad \text{avec} \quad p'(u,\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(\rho,\theta) |\rho| e^{i2\pi\rho u} d\rho$$



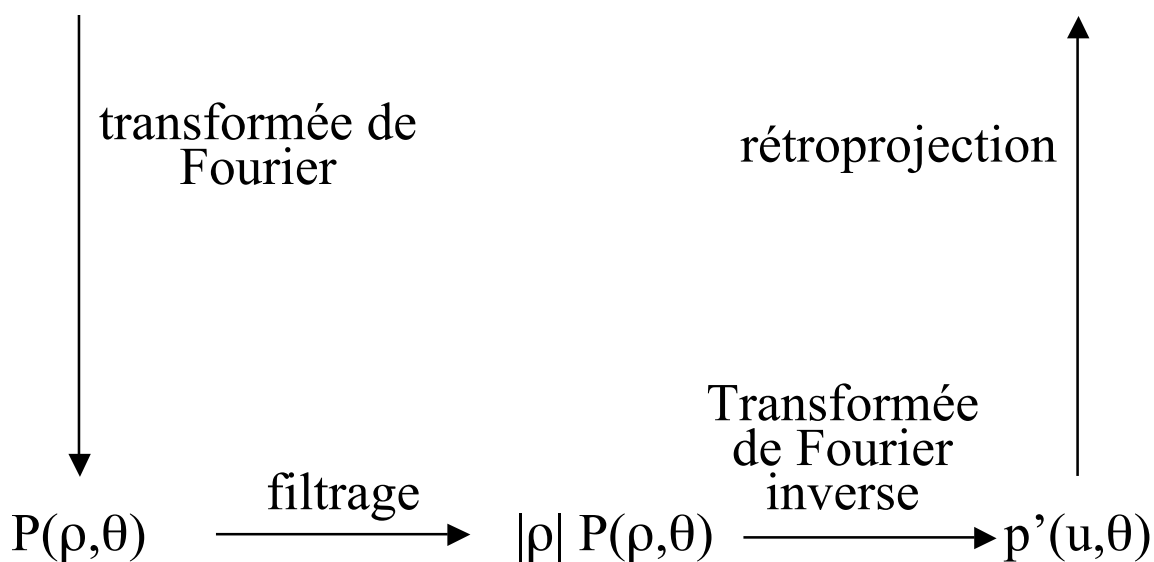
projections

$p(u,\theta)$



images reconstruites

$f(x,y)$



Insuffisance du filtre rampe

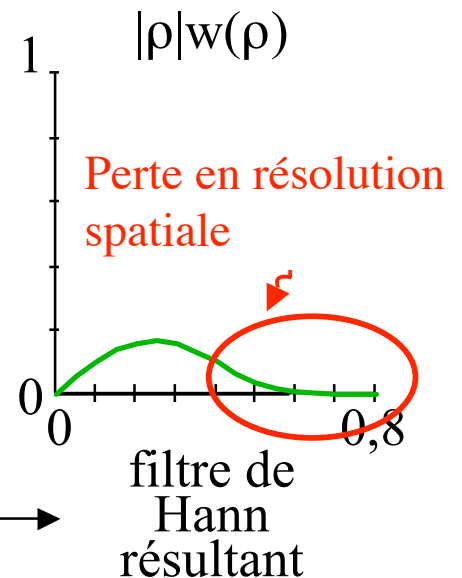
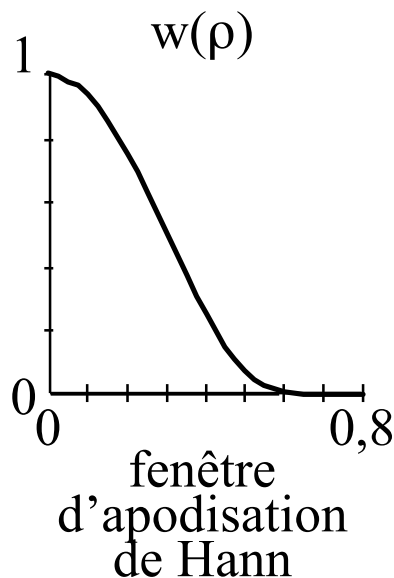
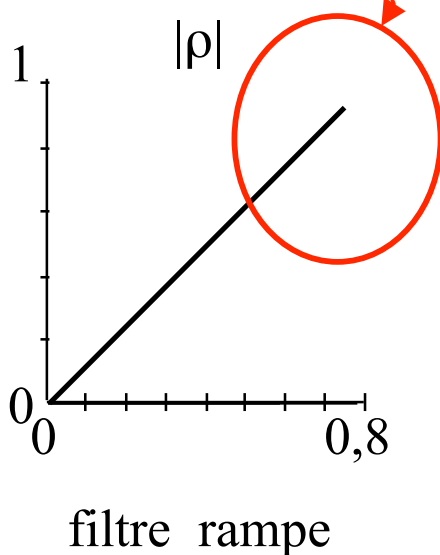
$$f(x,y) = \int_0^\pi p'(u,\theta) d\theta \quad \text{avec} \quad p'(u,\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(\rho,\theta) |\rho| e^{i2\pi\rho u} d\rho$$

↑
filtre rampe

$$|\rho| \longrightarrow |\rho|w(\rho)$$

↑
fenêtre d'apodisation

amplification des hautes fréquences



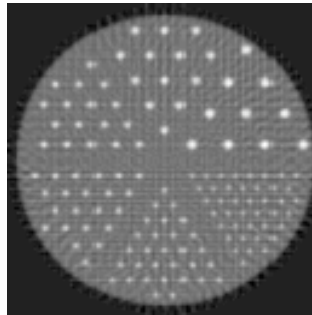
$$w(\rho) = \begin{cases} 0,5 \cdot (1 + \cos \pi \rho / \rho_c) & \text{si } \rho < \rho_c \\ 0 & \text{si } \rho \geq \rho_c \end{cases} \quad \text{domaine fréquentiel}$$

$$\longleftrightarrow \quad 1/16 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{si } \rho_c = \rho_N \quad \text{domaine spatial}$$

Filtres classiques : filtre de Hann

- Filtre rampe

➡ meilleure résolution spatiale mais forte amplification du bruit haute fréquence



- Filtre de Hann

$$w(\rho) = \begin{cases} 0,5 \cdot (1 + \cos \pi \rho / \rho_c) & \text{si } \rho < \rho_c \\ 0 & \text{si } \rho \geq \rho_c \end{cases}$$

➡ modifie les moyennes fréquences



0,5

0,4

0,3

0,2

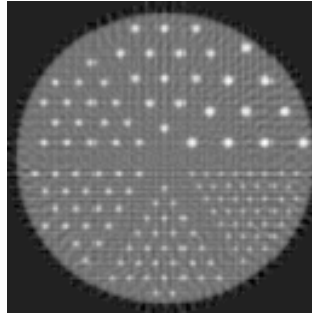
0,1

fréquence de coupure ρ_c

➡ plus faible est la fréquence de coupure, moins on préserve les détails “haute fréquence”, i.e., plus fort est le lissage

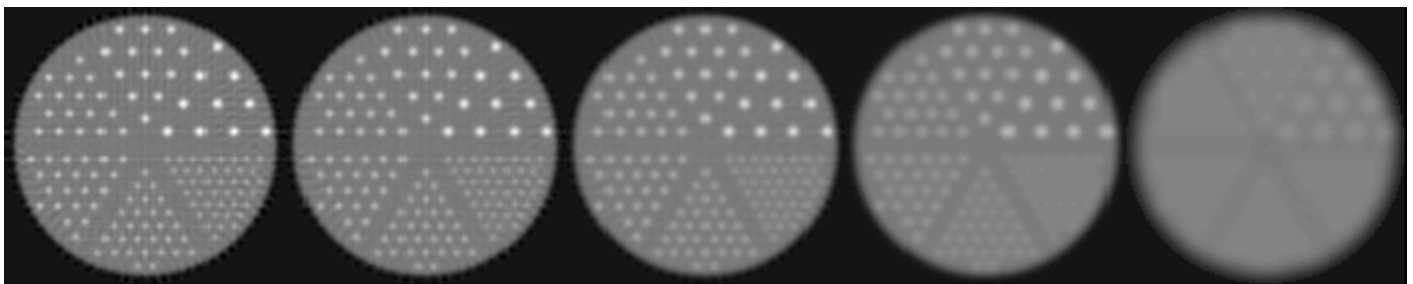
Filtres classiques : filtre de Hamming

- Filtre rampe



- Filtre de Hamming

$$w(\rho) = \begin{cases} 0,54 + 0,46(\cos \pi \rho / \rho_c) & \text{si } \rho < \rho_c \\ 0 & \text{si } \rho \geq \rho_c \end{cases}$$



0,5

0,4

0,3

0,2

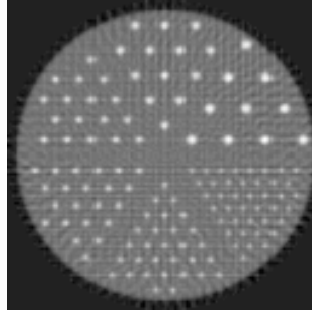
0,1

fréquence de coupure ρ_c

➡ plus faible est la fréquence de coupure,
moins on préserve les détails “haute fréquence”, i.e.,
plus fort est le lissage

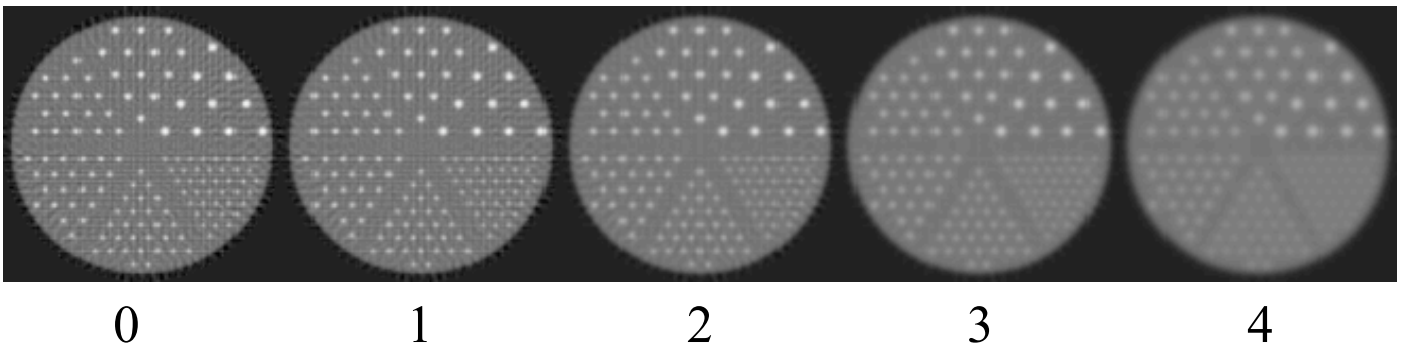
Filtres classiques : filtre gaussien

- Filtre rampe



- Filtre gaussien (domaine spatial)

$$c(x) = \begin{cases} (1/\sigma\sqrt{2\pi}).\exp[-(x-x_0)^2/2\sigma^2] & \text{si } \rho < \rho_c \\ 0 & \text{si } \rho \geq \rho_c \end{cases}$$

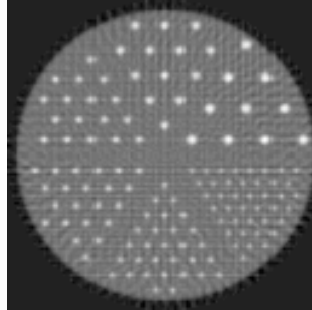


$$\text{FWHM} = 2\sqrt{2\ln 2} \sigma \text{ (pixel)}$$

- ➡ plus grande est la dispersion du filtre gaussien (FWHM ou σ),
moins on préserve les détails “haute fréquence”, i.e.,
plus fort est le lissage

Filtres classiques : filtre de Butterworth

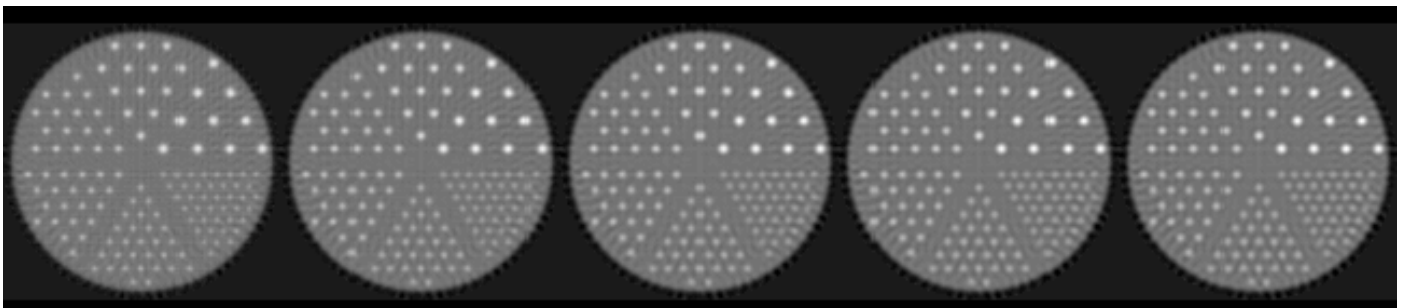
- Filtre rampe



- Filtre de Butterworth

$$w(\rho) = \frac{1}{[1+(\rho/\rho_c)^{2n}]} \quad \begin{array}{l} \text{si } \rho < \rho_c \\ = 0 \quad \text{si } \rho \geq \rho_c \end{array}$$

➡ 2 paramètres : fréquence de coupure ρ_c et ordre n



2

4

6

8

10

ordre n , $\rho_c=0,25$

➡ plus faible est l'ordre
moins on préserve les détails “haute fréquence”, i.e.,
plus fort est le lissage

Implantation du filtrage

- Multiplication du filtre rampe par une fenêtre d'apodisation

$$|\rho| \longrightarrow |\rho|w(\rho)$$

➡ filtrage 1D (direction x)

- Filtrage des projections puis reconstruction avec un filtre rampe

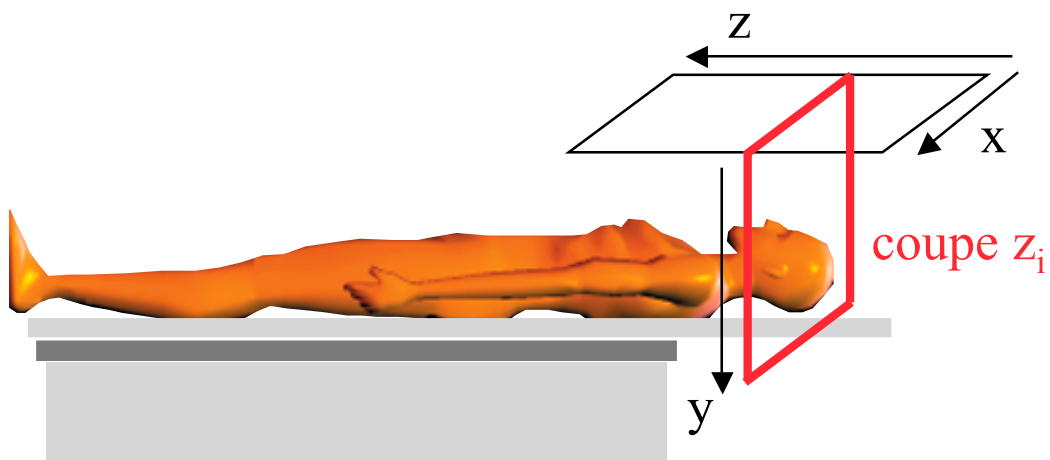
➡ filtrage 2D (directions x,z)

- Reconstruction avec un filtre rampe puis filtrage 2D des coupes reconstruites

➡ filtrage 2D (directions x,y)

- Reconstruction avec un filtre rampe puis filtrage 3D du volume reconstruit

➡ filtrage 3D (directions x,y,z)



Méthodes de reconstruction analytique : discussion

- Rapide



- Mais beaucoup d'approximations non vérifiées en pratique :
 - modèle de lignes intégrales (résolution spatiale parfaite du détecteur)
 - pas de prises en compte des fluctuations statistiques

➡ Approche alternative : la reconstruction discrète, ou itérative

Méthodes de reconstruction itératives : introduction

- Expression discrète et matricielle du problème de reconstruction tomographique

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & \cdots & r_{14} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{41} & \cdots & r_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix}$$

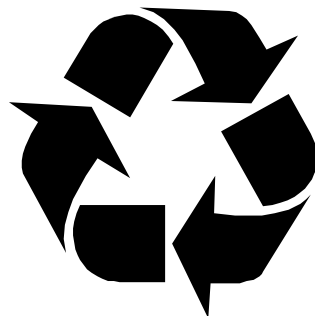
- Problème de reconstruction : système d'équations de grande taille

128 projections 128 x 128

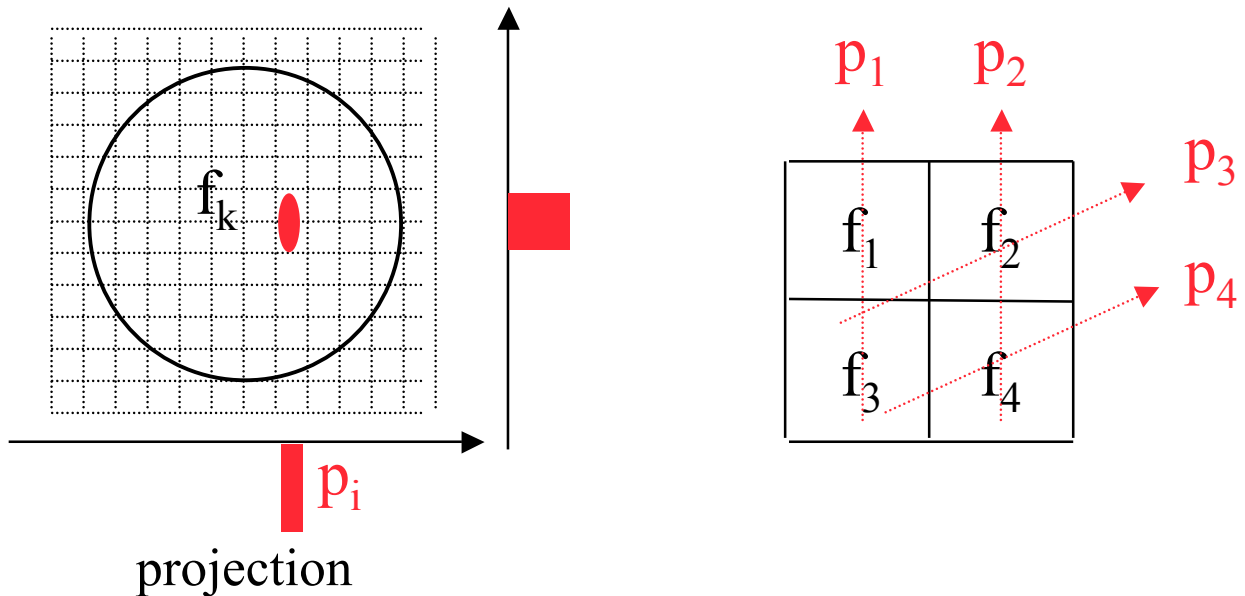


2 097 152 équations à autant d'inconnues

- Inversion itérative du système d'équations



Expression discrète du problème de reconstruction



$$\begin{aligned}
 p_1 &= r_{11} f_1 + r_{12} f_2 + r_{13} f_3 + r_{14} f_4 \\
 p_2 &= r_{21} f_1 + r_{22} f_2 + r_{23} f_3 + r_{24} f_4 \\
 p_3 &= r_{31} f_1 + r_{32} f_2 + r_{33} f_3 + r_{34} f_4 \\
 p_4 &= r_{41} f_1 + r_{42} f_2 + r_{43} f_3 + r_{44} f_4
 \end{aligned}$$

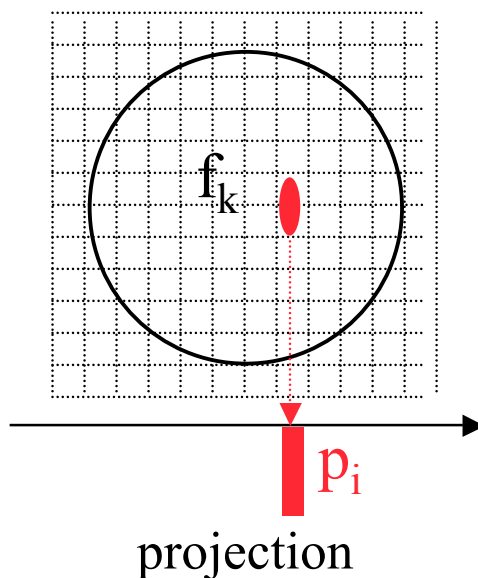
$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & \dots & r_{14} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{41} & \dots & r_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{projections} \\ \text{acquises}}}{\mathbf{p}} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{opérateur} \\ \text{de projection}}}{\mathbf{R}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{objet à} \\ \text{reconstruire}}}{\mathbf{f}}$$

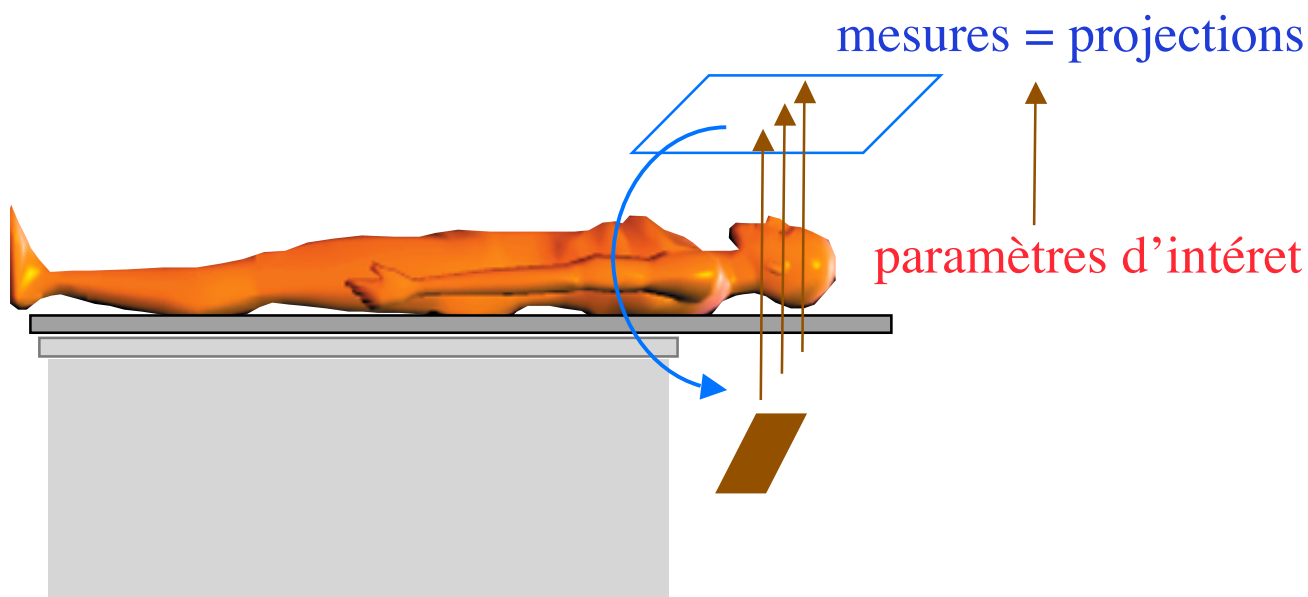
➡ Problème : déterminer \mathbf{f} connaissant \mathbf{p} et \mathbf{R}

Expression de l'opérateur de projection R

$$p = R f$$



Modélisation du problème direct



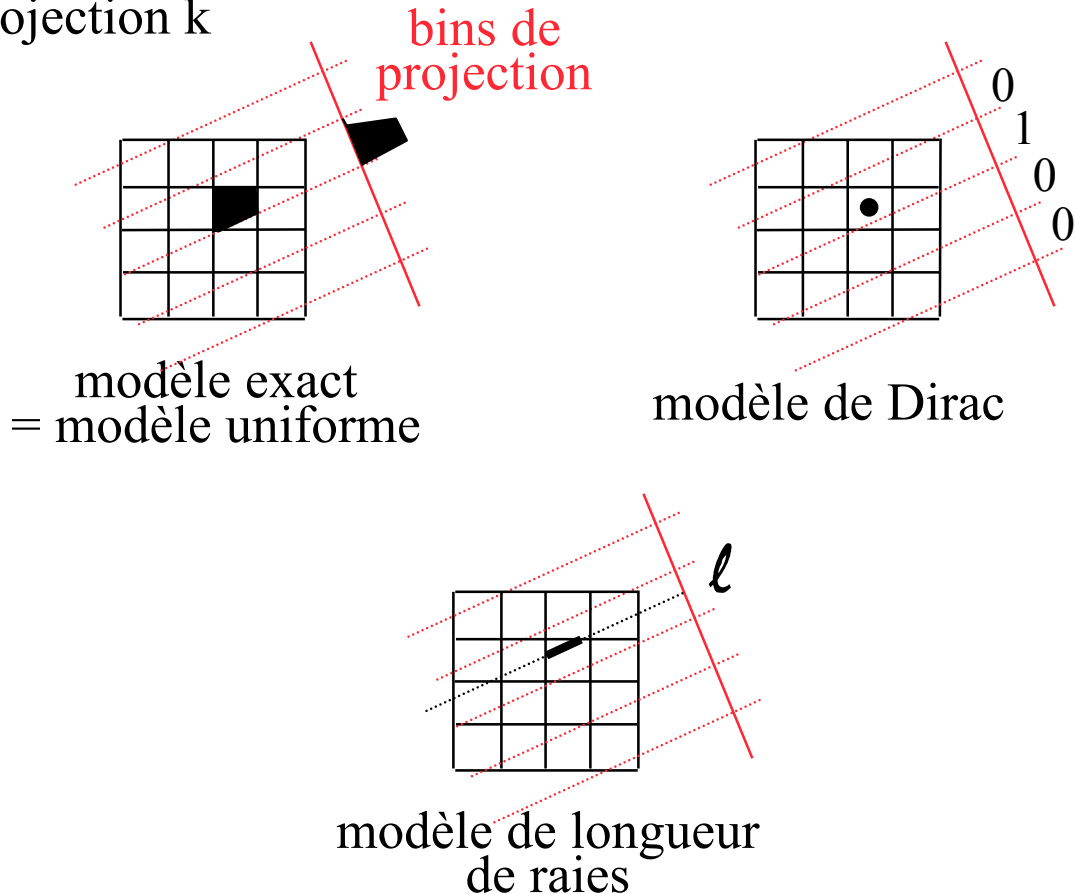
Expression de l'opérateur de projection R

Deux aspects

- Modélisation géométrique
 - choix d'un modèle de distribution de l'intensité des pixels
 - modélisation de la géométrie de détection
- Modélisation de la physique de détection
 - * atténuation
 - * diffusion
 - * résolution limitée du détecteur

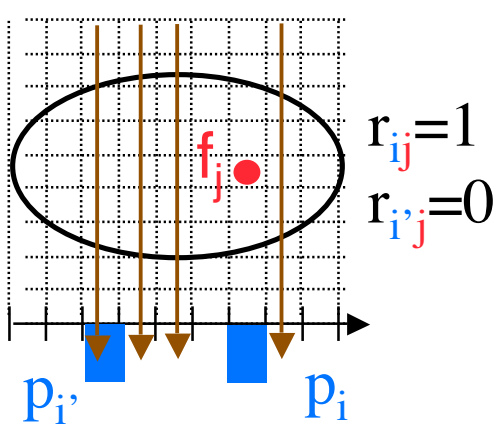
Modélisation géométrique de l'opérateur R

- Modèle de distribution de l'intensité des pixels :
détermination de la contribution de chaque pixel i à une raie de projection k



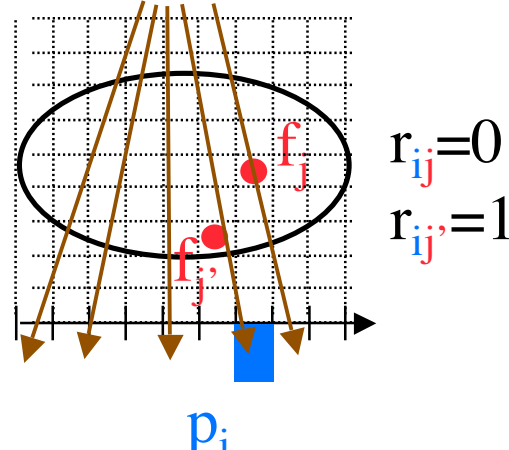
- Modèle de la géométrie de détection

géométrie parallèle



$r_{ij}=1$
 $r_{i'j}=0$

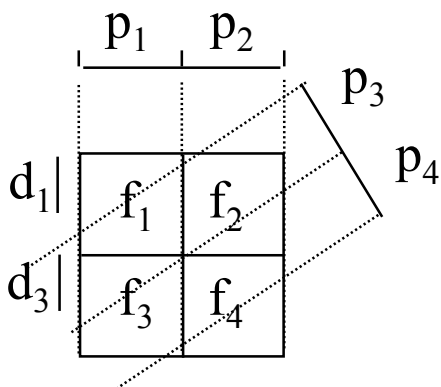
géométrie en éventail



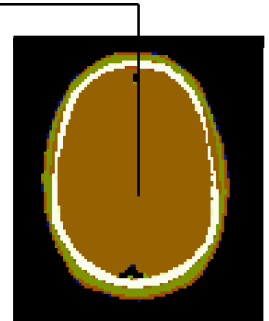
$r_{ij}=0$
 $r_{i'j}=1$

Modélisation physique de l'opérateur R

- Atténuation

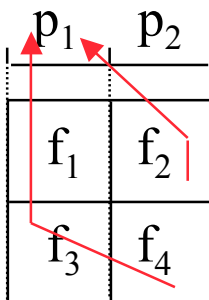


$$p_1 = r_{11} f_1 \exp(-\mu_1 d_1) + r_{13} f_3 \exp(-\mu_3 d_3/2 - 2 \mu_1 d_1)$$



carte des μ

- Diffusion



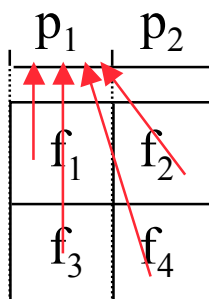
sans modélisation de la diffusion :

$$p_1 = r_{11} f_1 + r_{13} f_3$$

avec modélisation de la diffusion :

$$p_1 = r_{11} f_1 + r_{12} f_2 + r_{13} f_3 + r_{14} f_4$$

- Réponse du détecteur



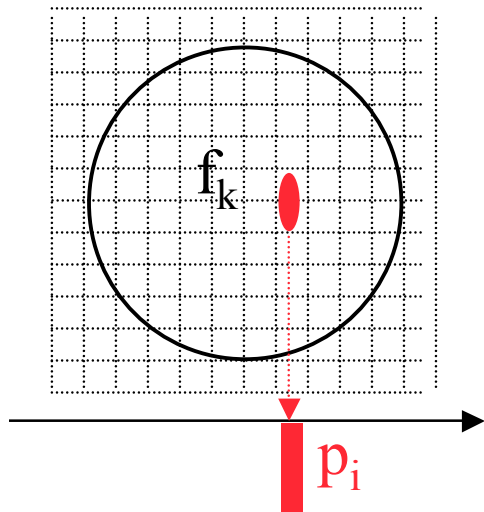
sans modélisation de la fonction de réponse de la caméra :

$$p_1 = r_{11} f_1 + r_{13} f_3$$

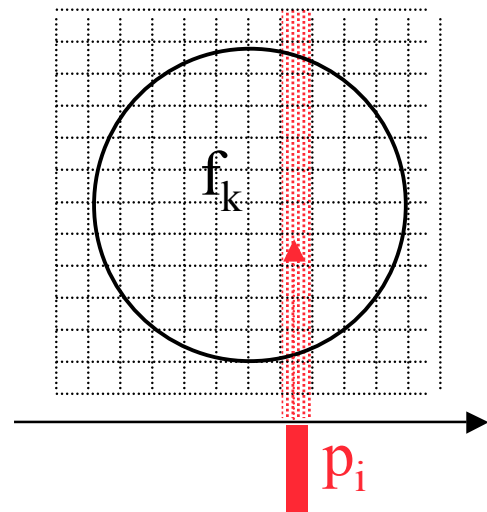
avec modélisation :

$$p_1 = r_{11} f_1 + r_{12} f_2 + r_{13} f_3 + r_{14} f_4$$

Opérateurs de projection R et de rétroprojection



projection



rétroprojection

p_1 p_2		
f_1	f_2	
f_3	f_4	

p_3

p_4

$$\begin{aligned} p_1 &= f_1 + f_3 \\ p_2 &= f_2 + f_4 \\ p_3 &= f_1 + f_2 \\ p_4 &= f_3 + f_4 \end{aligned}$$



$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} f^*_1 &= p_1 + p_3 \\ f^*_2 &= p_2 + p_3 \\ f^*_3 &= p_1 + p_4 \\ f^*_4 &= p_2 + p_4 \end{aligned}$$



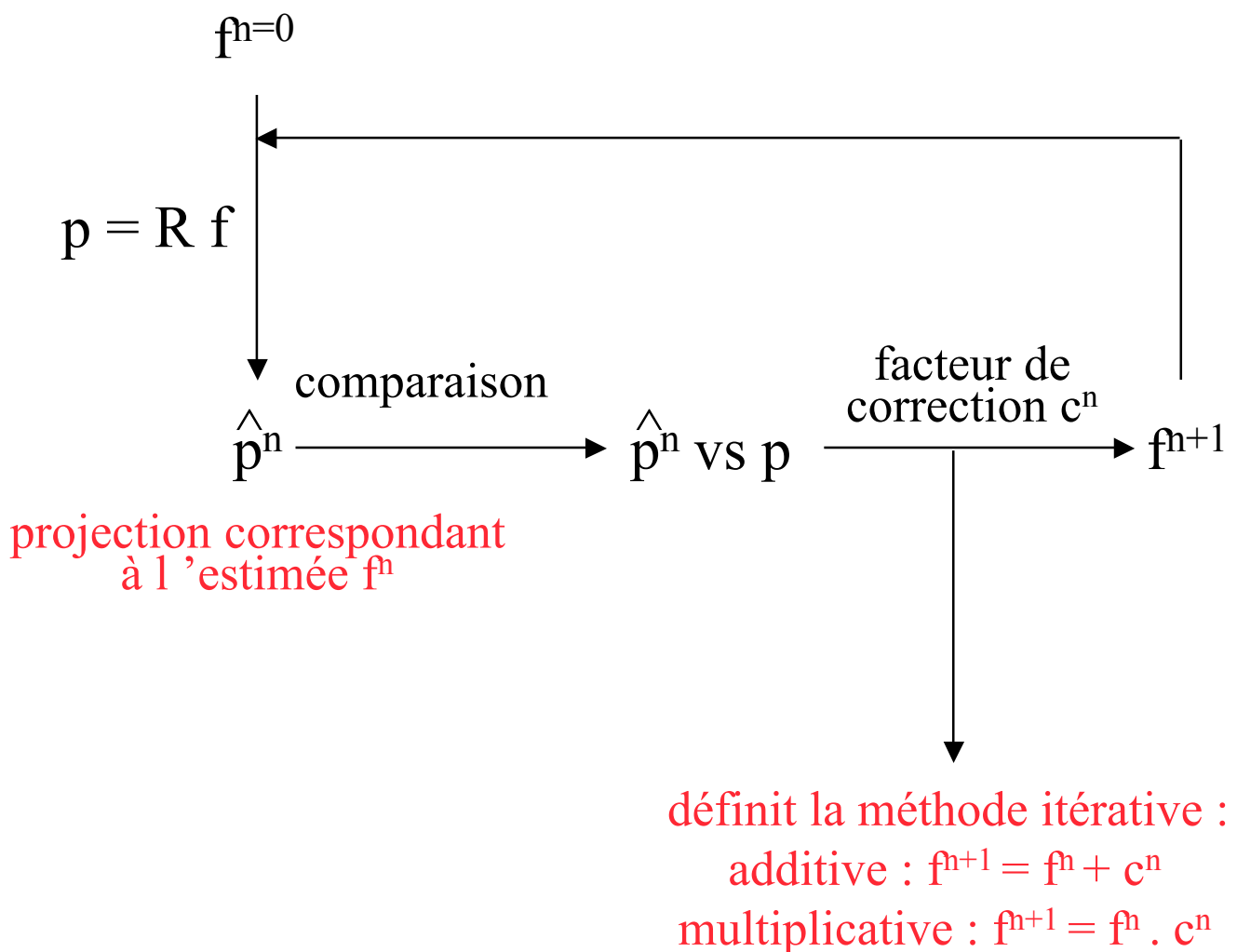
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = R^t$$

Résolution du problème inverse

$$p = R f$$

Recherche d'une solution f minimisant une distance $d(p, Rf)$, p et R étant connus

estimée initiale de
l'objet à reconstruire

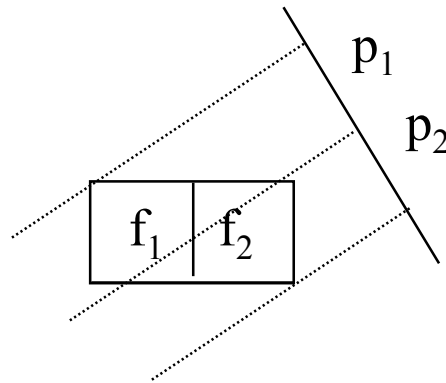


Deux classes de méthodes discrètes itératives

- Méthodes algébriques
 - méthodes itératives conventionnelles résolvant un système d'équations linéaires
 - minimisent $\|p - R f\|^2$
 - ART, SIRT, ILST, Gradient conjugué, etc
- Méthodes statistiques
 - estimation bayésienne
 - prennent en compte le bruit dans les données
 - maximisent une fonction de vraisemblance
 - MLEM, OSEM

Exemple

- Deux pixels et deux raies de projection
➡ système de deux équations à deux inconnues



$$f_1 = 10$$

$$f_2 = 15$$

Opérateur de projection (connu)

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 7/8 & 1/8 \\ 1/8 & 7/8 \end{bmatrix}$$

Valeurs de projection mesurées

$$p_1 = 7/8 f_1 + 1/8 f_2 = 85/8$$

$$p_2 = 1/8 f_1 + 7/8 f_2 = 115/8$$

Inconnues à déterminer : f_1 et f_2

Approche ART (Algebraic Reconstruction Technique)

$$p_1 = 7/8 f_1 + 1/8 f_2 = 85/8 \quad (\text{équation 1})$$

$$p_2 = 1/8 f_1 + 7/8 f_2 = 115/8 \quad (\text{équation 2})$$

- Utilisation d'une seule équation de raie par itération, et mise à jour de chaque inconnue à partir de cette équation :

itération 1 : estimation de f_1 à partir de l'équation 1 slmt

estimation de f_2 à partir de l'équation 1 slmt

itération 2 : estimation de f_1 à partir de l'équation 2 slmt

estimation de f_2 à partir de l'équation 2 slmt

itération 3 : estimation de f_1 à partir de l'équation 1 slmt

estimation de f_2 à partir de l'équation 1 slmt

etc...

- Modification à chaque itération proportionnelle à l'erreur par rapport à la projection vraie

- ART additive (erreur = $p_k - p_k^n$)
ou ART multiplicative (erreur = p_k / p_k^n)



ART additive

$$p_1 = 7/8 f_1 + 1/8 f_2 = 85/8 = 10,6$$

$$p_2 = 1/8 f_1 + 7/8 f_2 = 115/8 = 14,4$$

- Repose sur la méthode de Kaczmarz

$$f_i^{n+1} = f_i^n + \underbrace{(p_k - p_k^n)}_{\substack{\text{écart entre valeurs du bin de} \\ \text{projection estimée et observée}}} \underbrace{r_{ki} / \sum_j r_{kj}^2}_{\substack{\text{contribution du pixel } i \\ \text{à la raie de projection } k}}$$

- Exemple (initialisation $f_1^0 = f_2^0 = 0 \Rightarrow p_1^0 = p_2^0 = 0$) :

itération n=1, raie k=1, estimation de f_1 et f_2 :

$$f_1^1 = 0 + (85/8 - 0) \cdot (7/8) / (49/64 + 1/64) = 119/10 = 11,9$$

$$f_2^1 = 0 + (85/8 - 0) \cdot (1/8) / (49/64 + 1/64) = 17/10 = 1,7$$

$$\Rightarrow p_2^1 = 119/40 = 3,0$$

itération n=2, raie k=2, estimation de f_1 et f_2 :

$$f_1^2 = 11,9 + (115/8 - 119/40) \cdot (1/8) / (49/64 + 1/64) = 13,7$$

$$f_2^2 = 1,7 + (115/8 - 119/40) \cdot (7/8) / (49/64 + 1/64) = 14,5$$

$$\Rightarrow p_1^1 = 13,8$$

itération	1	2	3	4	5
f_1	11,9	13,7	10,1	10,3	10,0
f_2	1,7	14,5	13,9	14,9	14,9

- A chaque itération, mise à jour successive de toutes les inconnues (ici f_1 et f_2) à partir de l'équation correspondant à une seule raie de projection

Approche SIRT

$$p_1 = 7/8 f_1 + 1/8 f_2 = 85/8 \quad (\text{équation 1})$$

$$p_2 = 1/8 f_1 + 7/8 f_2 = 115/8 \quad (\text{équation 2})$$

- SIRT : Simultaneous Iterative Reconstruction Technique
- Utilisation de toutes les équations à chaque itération et mise à jour de chaque inconnue :
 - itération 1 : estimation de f_1 en résolvant l'équation 1
 estimation de f_2 en résolvant l'équation 2
 - itération 2 : estimation de f_1 en résolvant l'équation 1
 estimation de f_2 en résolvant l'équation 2
 - itération 3 : estimation de f_1 en résolvant l'équation 1
 estimation de f_2 en résolvant l'équation 2
 - etc...
- Modification à chaque itération proportionnelle à l'erreur par rapport à la projection vraie
- Méthode de Jacobi
Méthode de Gauss-Seidel
- Nombre d'itérations réduit par rapport aux méthodes ART

SIRT : méthode de Jacobi

$$p_1 = 7/8 f_1 + 1/8 f_2 = 85/8 = 10,6$$

$$p_2 = 1/8 f_1 + 7/8 f_2 = 115/8 = 14,4$$

contribution du pixel i
à la raie de projection i

$$f_i^{n+1} = f_i^n + (p_k - p_k^n) / r_{ii}$$

↑
écart entre valeurs du bin de
projection estimée et observée

- Exemple (initialisation $f_1^0 = f_2^0 = 0 \Rightarrow p_1^0 = p_2^0 = 0$) :
itération n=1 :

estimation de f_1 en résolvant l'équation 1

$$f_1^1 = (85/8)/(7/8) = 85/7 = 12,1$$

estimation de f_2 en résolvant l'équation 2

$$f_2^1 = (115/8)/(7/8) = 115/7 = 16,4$$

itération n=2 :

estimation de f_1 en résolvant l'équation 1

$$f_1^2 = [85/8 - (1/8) * (115/7)] / (7/8) = 9,8$$

estimation de f_2 en résolvant l'équation 2

$$f_2^2 = [115/8 - (1/8) * (85/7)] / (7/8) = 14,7$$

itération	1	2	3
f_1	12,1	9,8	10,0
f_2	16,4	14,7	15,0

SIRT : méthode de Gauss-Seidel

$$\begin{aligned}p_1 &= 7/8 f_1 + 1/8 f_2 = 85/8 = 10,6 \\p_2 &= 1/8 f_1 + 7/8 f_2 = 115/8 = 14,4\end{aligned}$$

- Identique à la méthode de Jacobi mais en tirant immédiatement parti des estimations obtenues aux itérations précédentes

$$f_i^{n+1} = f_i^n + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{estimé à partir de toutes les} \\ \text{valeurs courantes des } f_i}}{(p_k - p_k^{n \text{ ou } (n+1)})} / r_{ii}$$

- Exemple (initialisation $f_1^0 = f_2^0 = 0 \Rightarrow p_1^0 = p_2^0 = 0$) :
itération $n=1$:

estimation de f_1 en résolvant l'équation 1

$$f_1^1 = (85/8 - 0)/(7/8) = 85/7 = 12,1$$

estimation de f_2 en résolvant l'équation 2 avec $f_1^1 = 85/7$

$$f_2^1 = [115/8 - (1/8) * (85/7)] / (7/8) = 14,7$$

itération $n=2$:

estimation de f_1 en résolvant l'équation 1 avec $f_2^1 = 14,7$

$$f_1^2 = (85/8 - 14,7/8) / (7/8) = 10,0$$

estimation de f_2 en résolvant l'équation 2 avec $f_1^2 = 10,0$

$$f_2^2 = (115/8 - 10,0/8) / (7/8) = 15,0$$

itération	1	2	\Rightarrow convergence plus rapide que Jacobi
f_1	12,1	10,0	
f_2	14,7	15,0	

Méthodes de descente

- Méthodes ART et SIRT :

$$f_i^{n+1} = f_i^n + \alpha (\text{erreur}^n)$$

coefficient de pondération constant e.g., $p_k - p_k^n$

- Méthodes de descente :

$$f_i^{n+1} = f_i^n + \alpha^n (\text{erreur}^n)$$

coefficient de pondération optimisé

➡ modification du coefficient de pondération à chaque itération

- Méthode du gradient : Iterative Least Squared Technique (ILST)

Méthode du gradient conjugué



Méthodes de descente : gradient conjugué

- Adaptée à la résolution d'un système d'équations dont la matrice est symétrique :

$$p = R f \Rightarrow R^t p = \underbrace{R^t R}_\text{matrice symétrique} f$$

- Formule de mise à jour :

$$f_i^{n+1} = f_i^n + \alpha^n d^n$$

↗ ↖

coefficient de direction de descente
pondération optimisé optimisée à chaque
à chaque itération itération
(vitesse de descente)

- Vitesse de descente optimisée à chaque itération :

$$\alpha^n = \|R^t p - R^t R f^n\|^2 / (R^t p - R^t R f^n)^t R (R^t p - R^t R f^n)$$

- Direction de descente optimisée à chaque itération :

$$\text{itération 1 : } d^1 = R^t p - R^t R f^0$$

$$\text{itération n : } d^n = (R^t p - R^t R f^n) + b^n d^{n-1}$$

- ➡ optimisation de la convergence
- ➡ convergence rapide
- ➡ méthode additive
- ➡ utilisée en SPECT

Deux classes de méthodes discrètes itératives

- Méthodes algébriques
 - méthodes itératives conventionnelles résolvant un système d'équations linéaires
 - minimisent $\|p - R f\|^2$
 - ART, SIRT, ILST, Gradient conjugué, etc
- Méthodes statistiques
 - estimation bayésienne
 - prennent en compte le bruit dans les données
 - maximisent une fonction de vraisemblance
 - MLEM, OSEM

Méthode statistique : MLEM

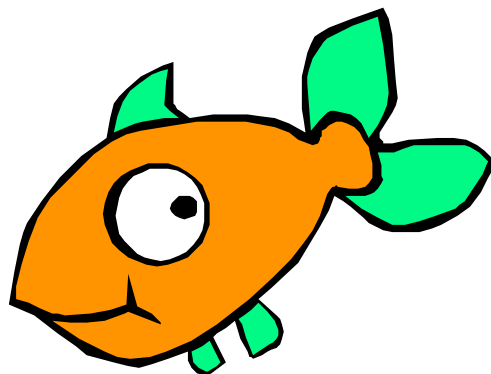
- MLEM = Maximum Likelihood Expectation Maximization
- Utilise une formulation probabiliste du problème de reconstruction :

- modèle probabiliste :

Les p_k sont des variables aléatoires de Poisson de paramètres \bar{p}_k , d'où l'expression de la vraisemblance de f :

$$\text{prob}(p|f) = \prod_k \exp(-\bar{p}_k) \cdot \bar{p}_k^{p_k} / p_k !$$

- détermine la solution f qui maximise la vraisemblance (ou log-vraisemblance), i.e., $\text{prob}(p|f)$ par rapport au modèle probabiliste choisi.



Algorithme MLEM

- Deux étapes :
 - calcul de l'espérance de la log-vraisemblance compte tenu des projections p_k mesurées et de l'estimation courante des f_i .
 - maximisation de l'espérance en annulant les dérivées partielles par rapport à f_i .

- Formule de mise à jour :

$$f_i^{n+1} = f_i^n \cdot \left[\sum_k r_{ki} (p_k / p_k^n) \right] / \sum_k r_{ki}$$

$$f^{n+1} = f^n \cdot R^t \left[\underset{\substack{\uparrow \\ \text{erreur}}}{p} / p^n \right]$$

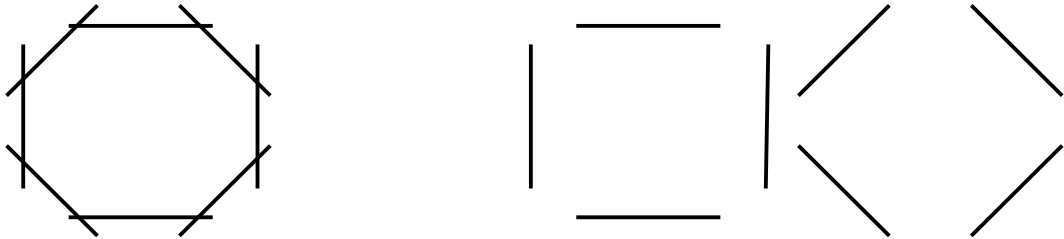
opérateur de
rétroprojection

- * méthode multiplicative
- * solution toujours positive ou nulle
- * nombre d'événements conservé au fil des itérations
- * convergence lente
- * méthode itérative la plus utilisée en SPECT
(dans sa version accélérée OSEM)

Version accélérée de MLEM : OSEM

- OSEM = Ordered Subset Expectation Maximisation
- Tri des P projections en sous-ensembles ordonnés

Exemple :



8 projections \longrightarrow 2 sous-ensembles de 4 projections

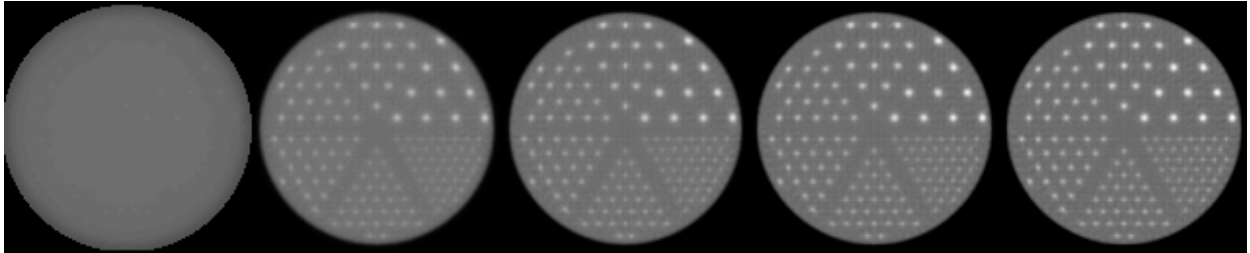
- Application de MLEM sur les sous-ensembles :
 - itération 1 :
 - estimation de f^1 à partir de l'initialisation f^0 et des projections p^1 correspondant au sous-ensemble 1
$$f^1 = f^0 \cdot R^t [p / p^1]$$
 - estimation de f'^1 à partir de f^1 et des projections p'^1 correspondant au sous-ensemble 2
$$f'^1 = f^1 \cdot R^t [p / p'^1]$$
 - itération 2 :
 - estimation de f^2 à partir de f'^1 et des projections p^2 correspondant au sous-ensemble 1
$$f^2 = f'^1 \cdot R^t [p / p^2]$$
 - estimation de f'^2 à partir de f^2 et des projections p'^2 correspondant au sous-ensemble 2
$$f'^2 = f^2 \cdot R^t [p / p'^2]$$

etc.

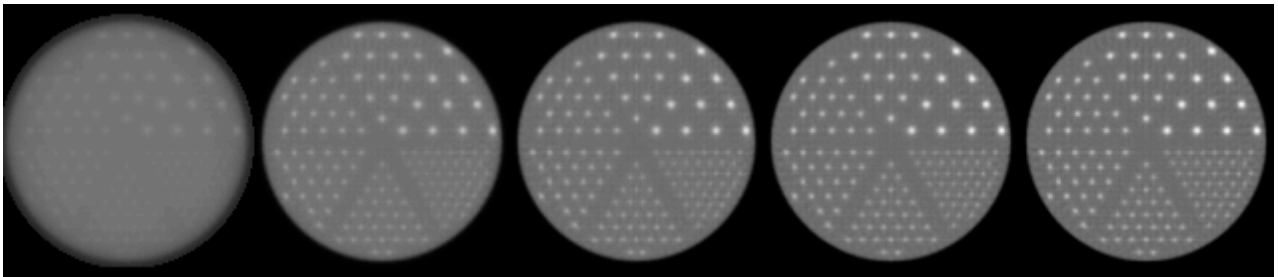
Caractéristiques de OSEM

- OSEM avec S sous-ensembles et I iterations
⇔ SI itérations de MLEM

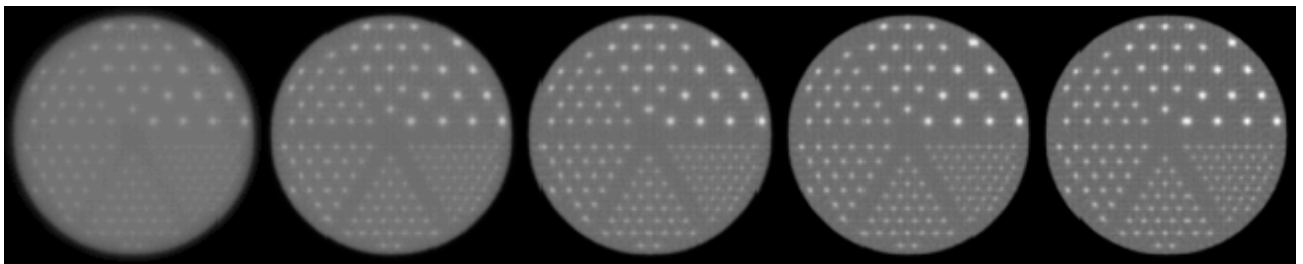
MLEM 1 16 24 32 40 itér.



OSEM 1 4 6 8 10 itér.
4 ss-ens.



OSEM 1 2 3 4 5
8 ss-ens.



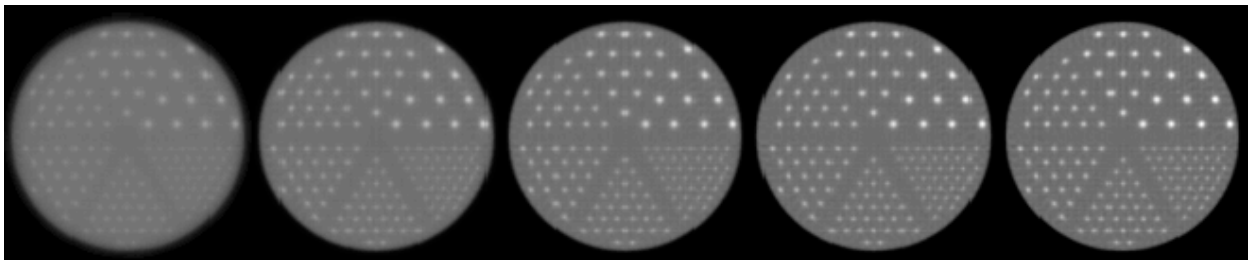
- Facteur d'accélération ~ nombre de sous-ensembles

➡ méthode itérative la plus utilisée en SPECT

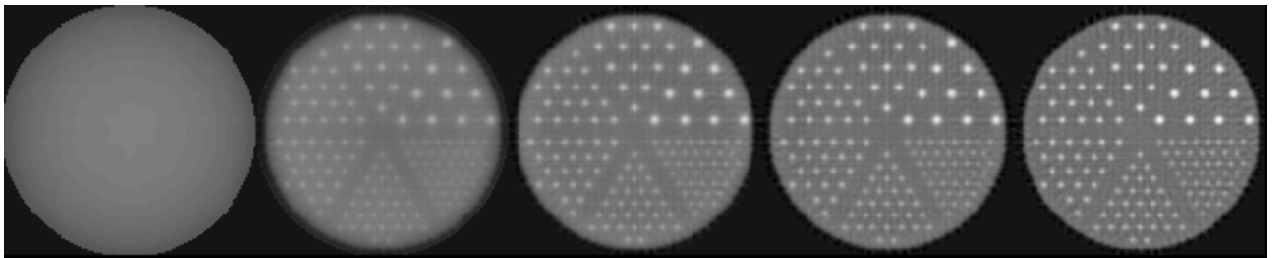
Caractéristiques des méthodes itératives

- Plus élevé est le nombre d'itérations, meilleure est la restitution des hautes fréquences

OSEM 1 2 3 4 5
8 ss-ens.



gradient 1 2 3 4 5
conjugué



- Problème du choix du nombre d'itérations
 - convergence vers la solution puis divergence de la procédure lors de la reconstruction des très hautes fréquences du fait de la présence de bruit (haute fréquence)

➡ nécessité de « régulariser »

Importance de la régularisation

- Régularisation implicite : arrêt précoce des itérations
- Régularisation explicite : introduction d'un a priori sur la solution :
 - solution non régularisée :
minimisation de $d(p, Rf)$

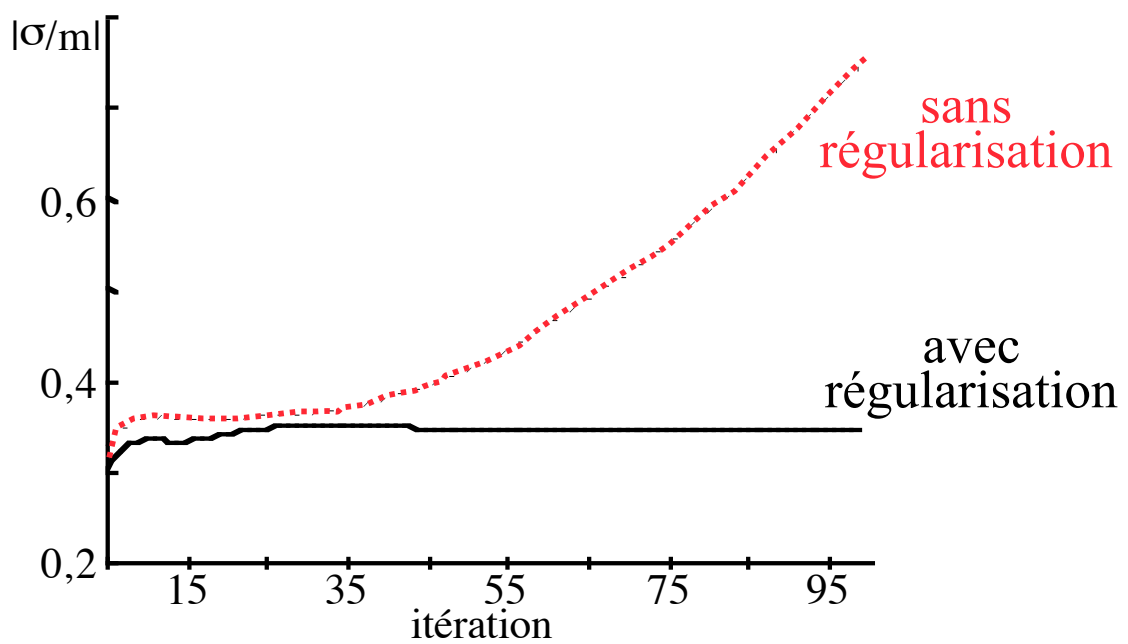
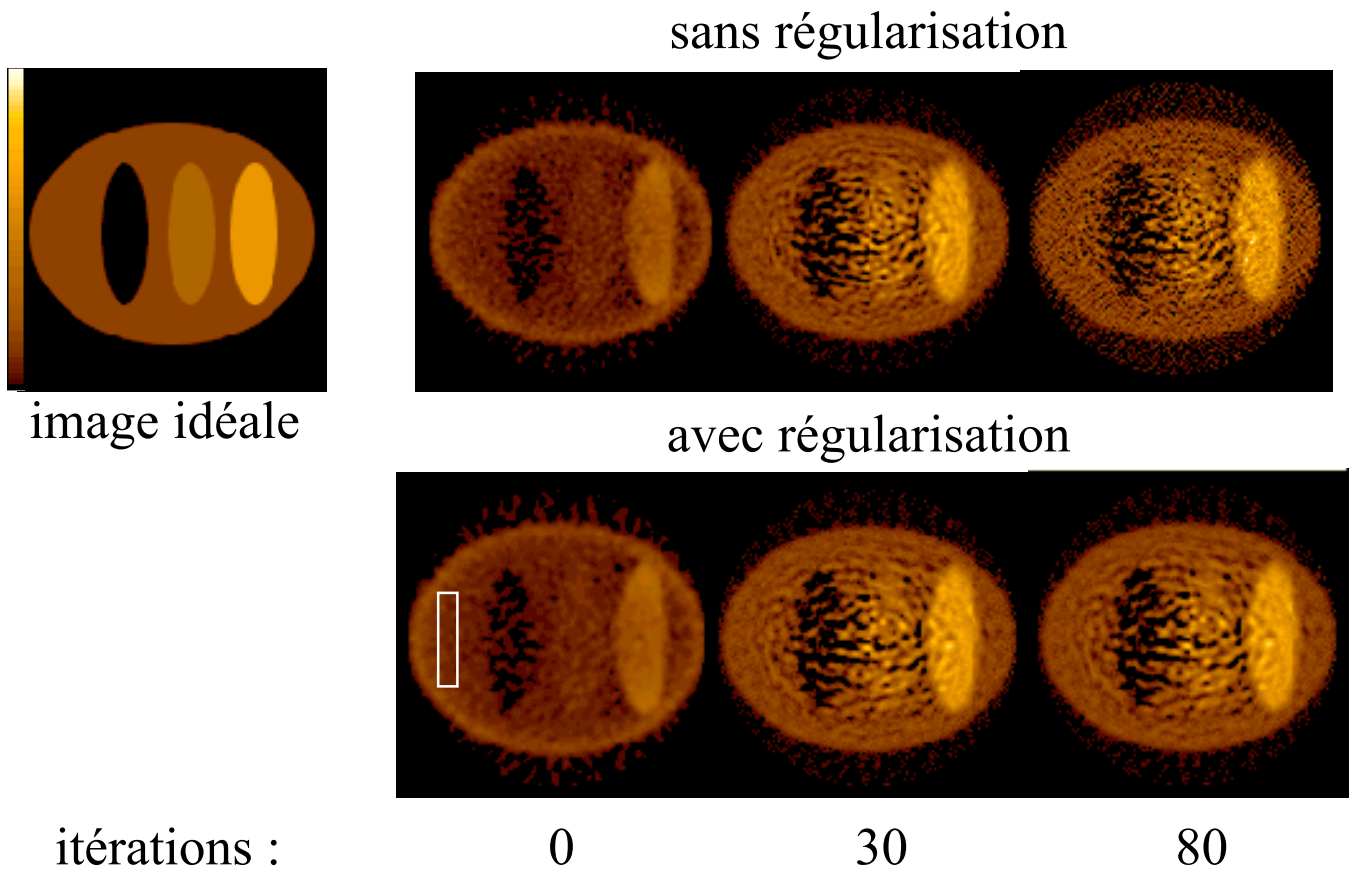
- solution régularisée :
minimisation de $d_1(p, Rf) + \lambda d_2(f, f_a)$

↑
a priori régularisant

➡ solution compromis entre la fidélité aux mesures et l'a priori

- Exemples d'a priori régularisants :
 - distribution de f connue (Poisson, Gauss)
 - image lisse
 - image présentant des discontinuités

Effet de la régularisation



Interprétation probabiliste de la régularisation

- Méthodes statistiques de reconstruction :
Chercher f la plus probable compte tenu des projections p observées
- Interprétation probabiliste :
Maximiser $\text{prob}(f|p)$: probabilité avoir l'image f quand les projections valent p
- Théorème de Bayes :

probabilité a priori de l'image f	probabilité a priori des projections p
	↓
$\text{prob}(f p) = \text{prob}(p f) \cdot \text{prob}(f) / \text{prob}(p)$	
↑	
probabilité de mesurer les projections p pour une image f = vraisemblance des projections p	

projections connues $\Rightarrow \text{prob}(p) = 1$

pas d'hypothèse a priori sur $f \Rightarrow \text{prob}(f) = 1$

alors :

$$\text{prob}(f|p) = \text{prob}(p|f)$$



maximiser $\text{prob}(f|p)$ = maximiser la vraisemblance $\text{prob}(p|f)$
= minimiser l'écart entre projections calculées et observées

Algorithmes associés à l'interprétation probabiliste

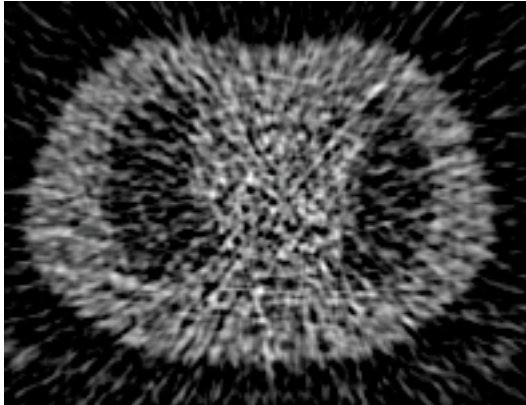
- Régularisation

$$\begin{array}{c} \text{probabilité a priori} \\ \text{de l'image } f \neq 1 \\ \downarrow \\ \text{prob}(f|p) = \text{prob}(p|f) \cdot \text{prob}(f) \\ \uparrow \\ \text{probabilité a posteriori} \\ \text{de l'image } f \end{array}$$

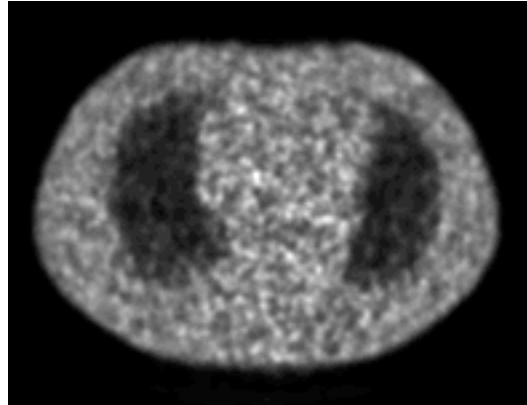
méthodes MAP (maximum a posteriori)
versions régularisées :
MLEM \Rightarrow MAP-EM

Reconstruction analytique ou itérative ?

Tomographie de transmission PET

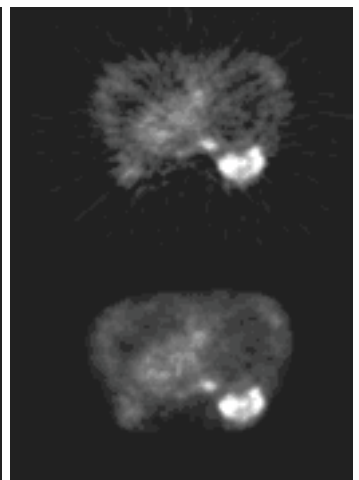
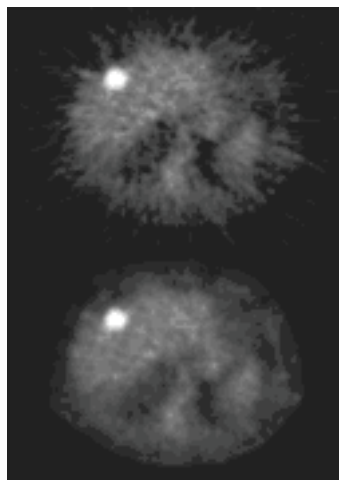
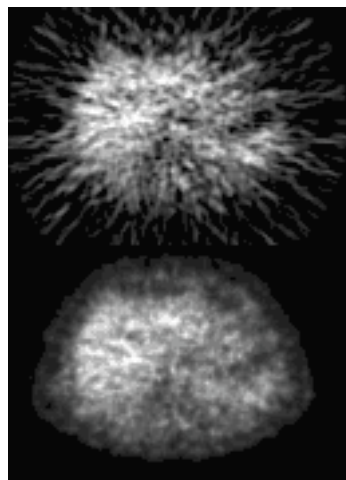
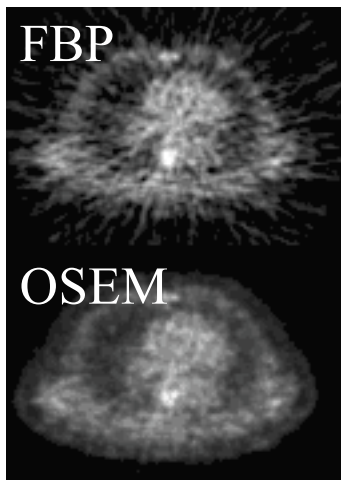


rétroprojection filtrée



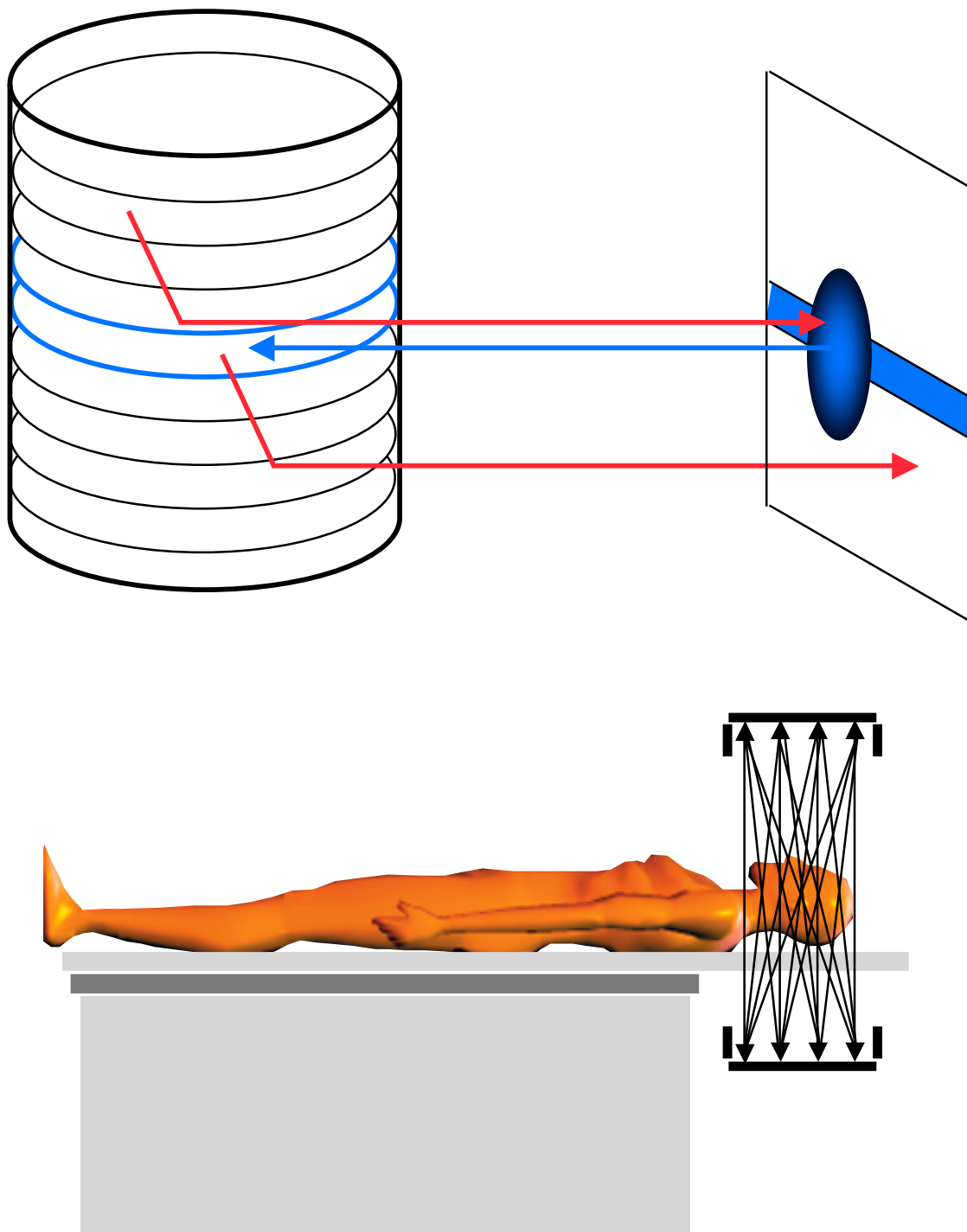
algorithme ML

Tomographie d'émission PET



- Algorithmes itératifs par rapport à rétroprojection filtrée (FBP)
 - * réduction des artefacts de raies
 - * temps de calculs accrus
 - * possible compensation des phénomènes parasites via une modélisation adéquate dans le projecteur R (diffusion, atténuation, fonction de réponse du détecteur)
 - * possible modélisation des caractéristiques statistiques des données

Au delà de la reconstruction 2D...



Solution : « fully 3D reconstruction »

Trois approches de reconstruction 3D complète

- Méthode analytique

3D FBP : généralisation de la rétroprojection filtrée
au 3D

- Méthodes de rebinning

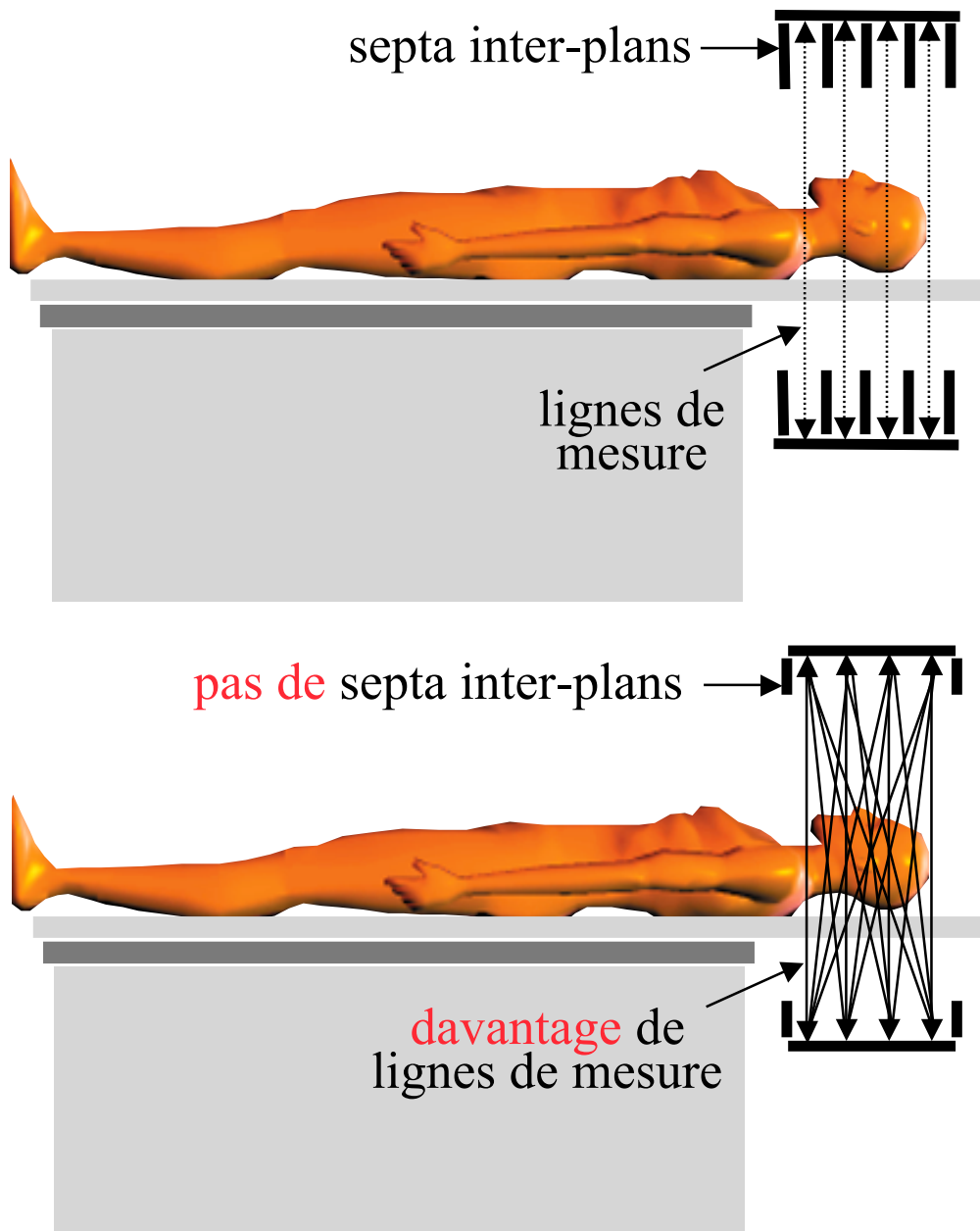
réorganisation des données pour se ramener à la
configuration de reconstruction 2D

- Méthodes discrètes itératives

estimation d'un projecteur 3D

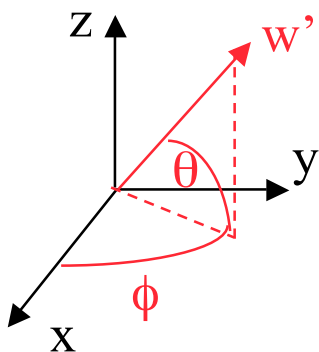
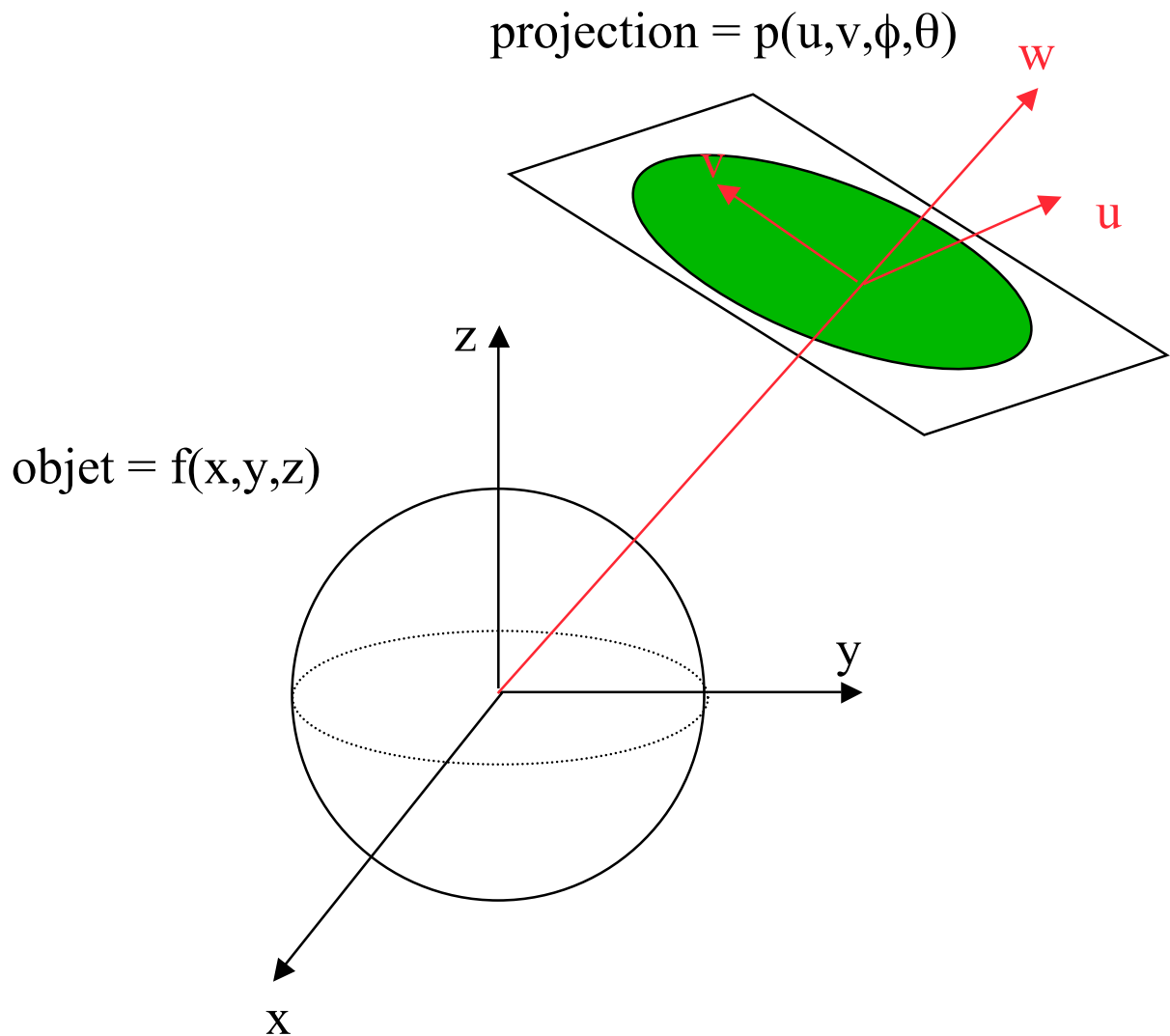
Méthodes analytiques de reconstruction 3D

- 3D FBP : généralisation de la rétroprojection filtrée au 3D :
 - prend en compte la redondance des données



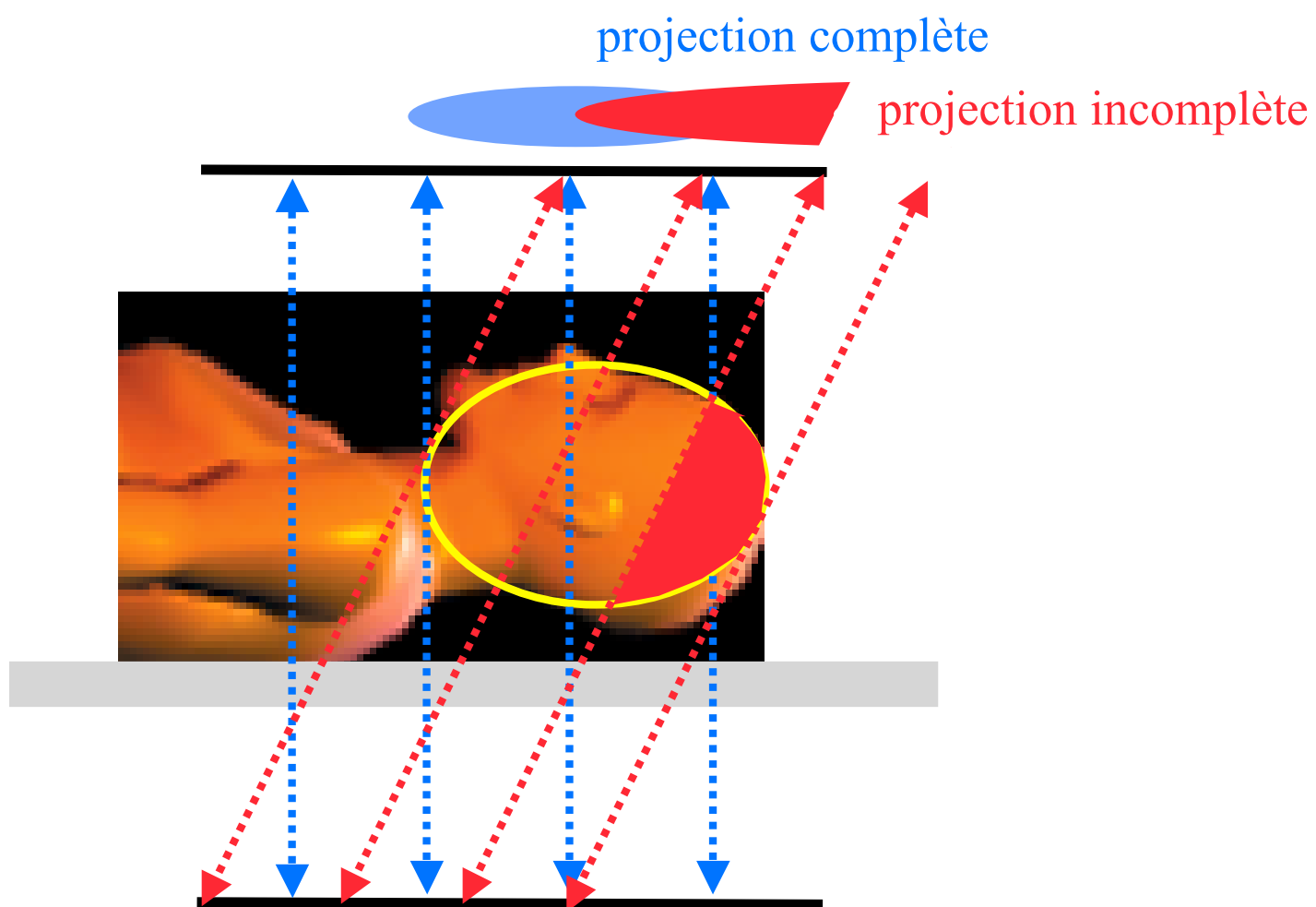
- nécessite des projections complètes

Notion de redondance

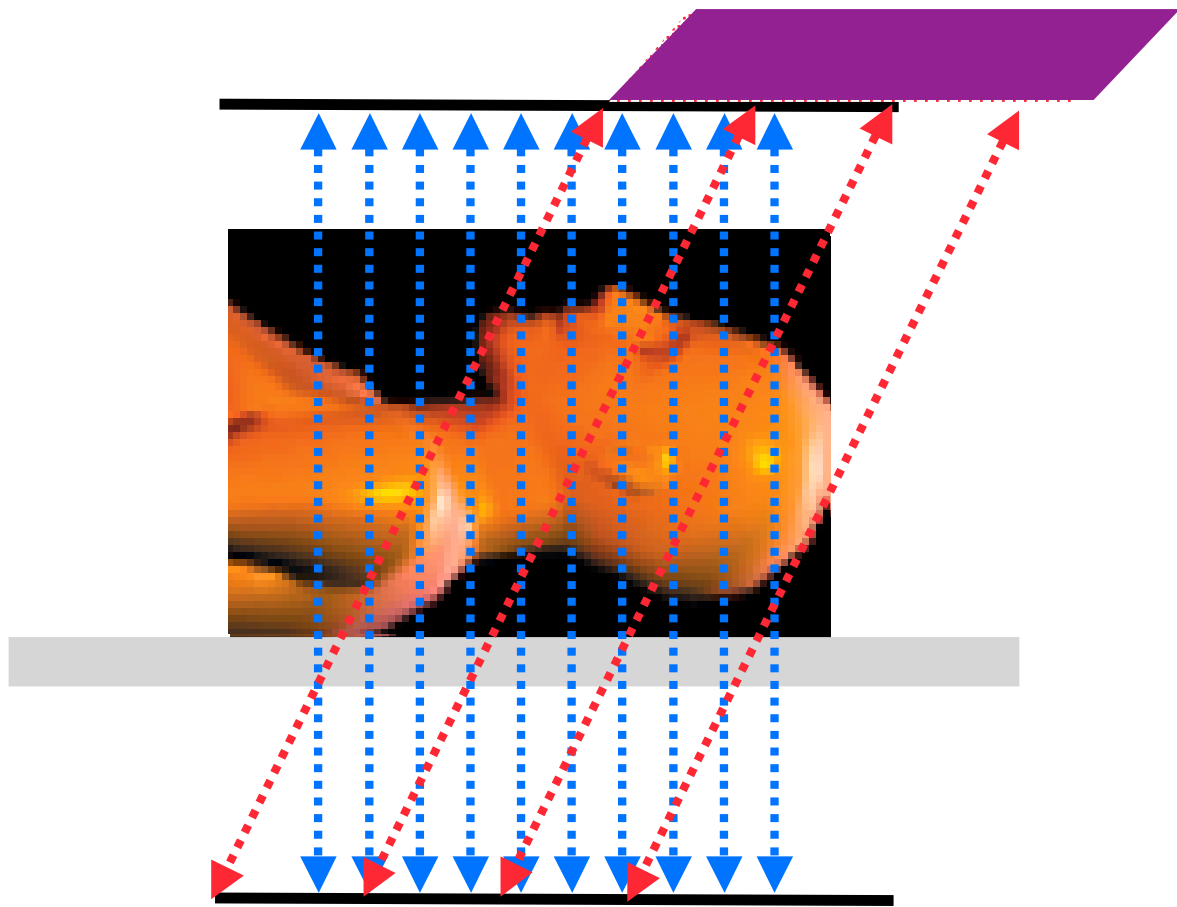


Passage d'une fonction 3D à une
fonction 4D : redondance
d'informations

Notion de données complètes



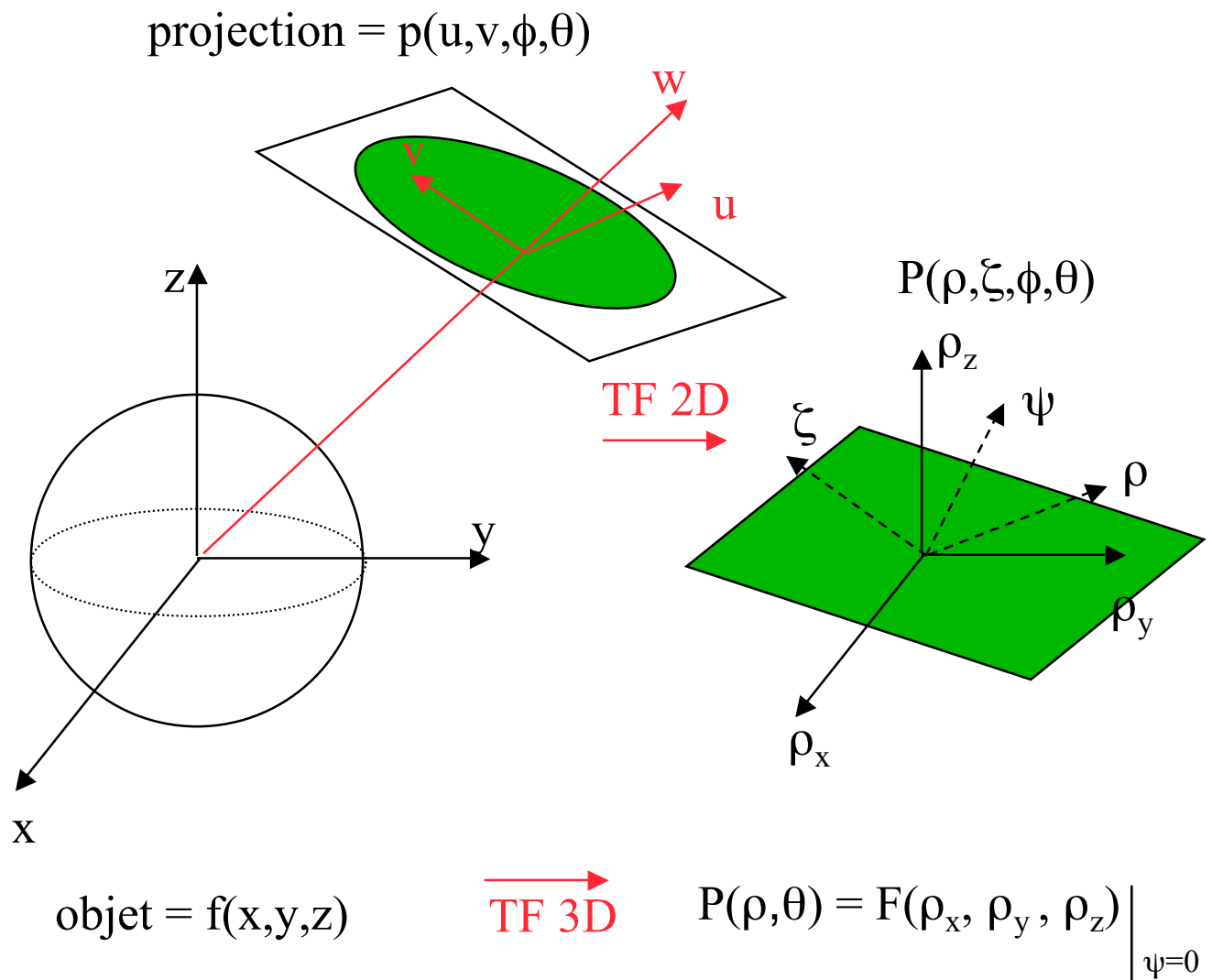
Reprojection 3D traitant des données incomplètes



- Extraction des données 2D (non prise en compte des LOR obliques)
- Reconstruction d'une première estimée de l'objet par FBP 2D
- Estimation des données tronquées en reprojétant l'objet estimé
- Fusion des données estimées et des données mesurées
- Reconstruction par 3D FBP

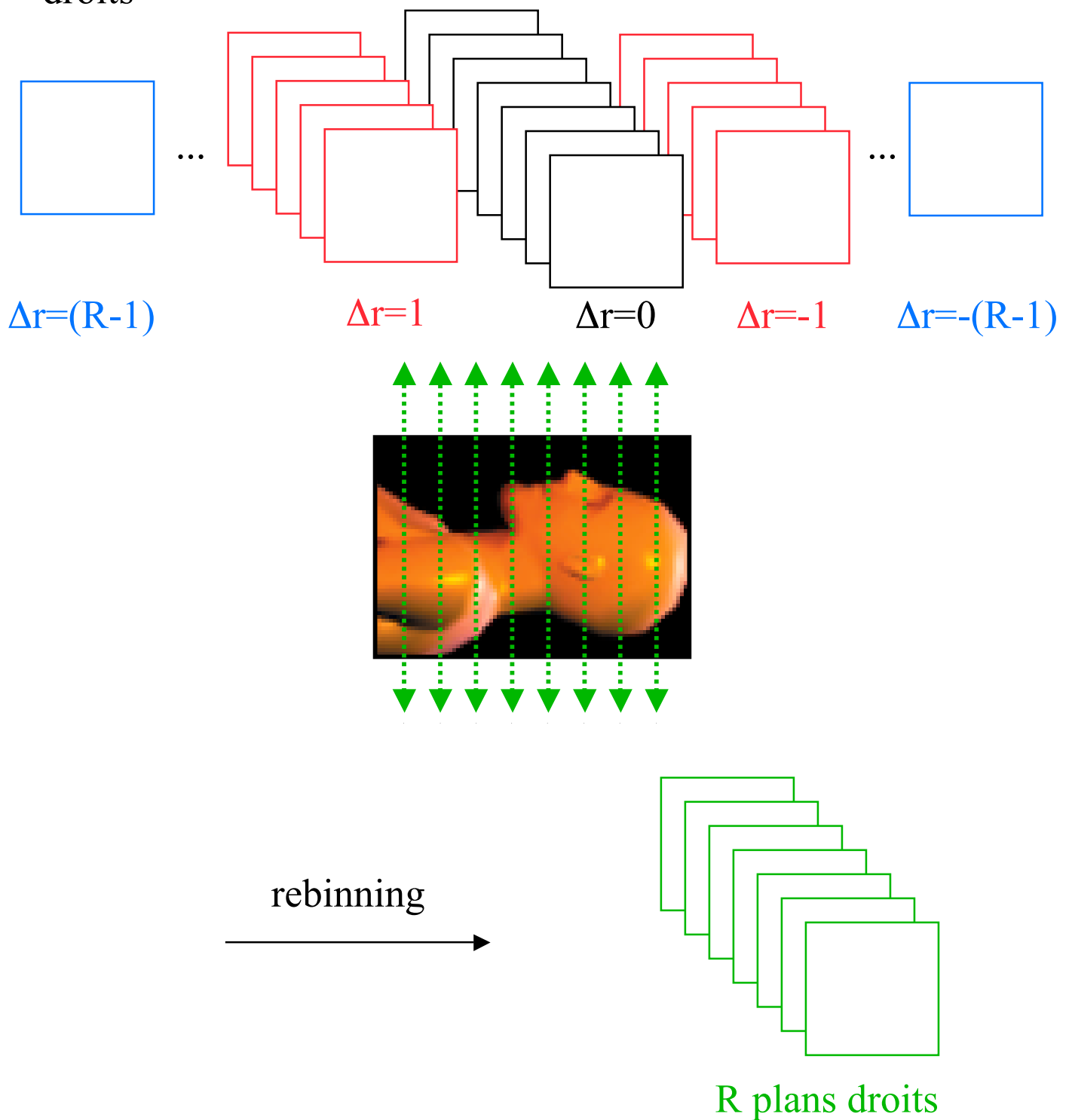
Théorème de la coupe centrale en 3D

Similaire à la version 2D

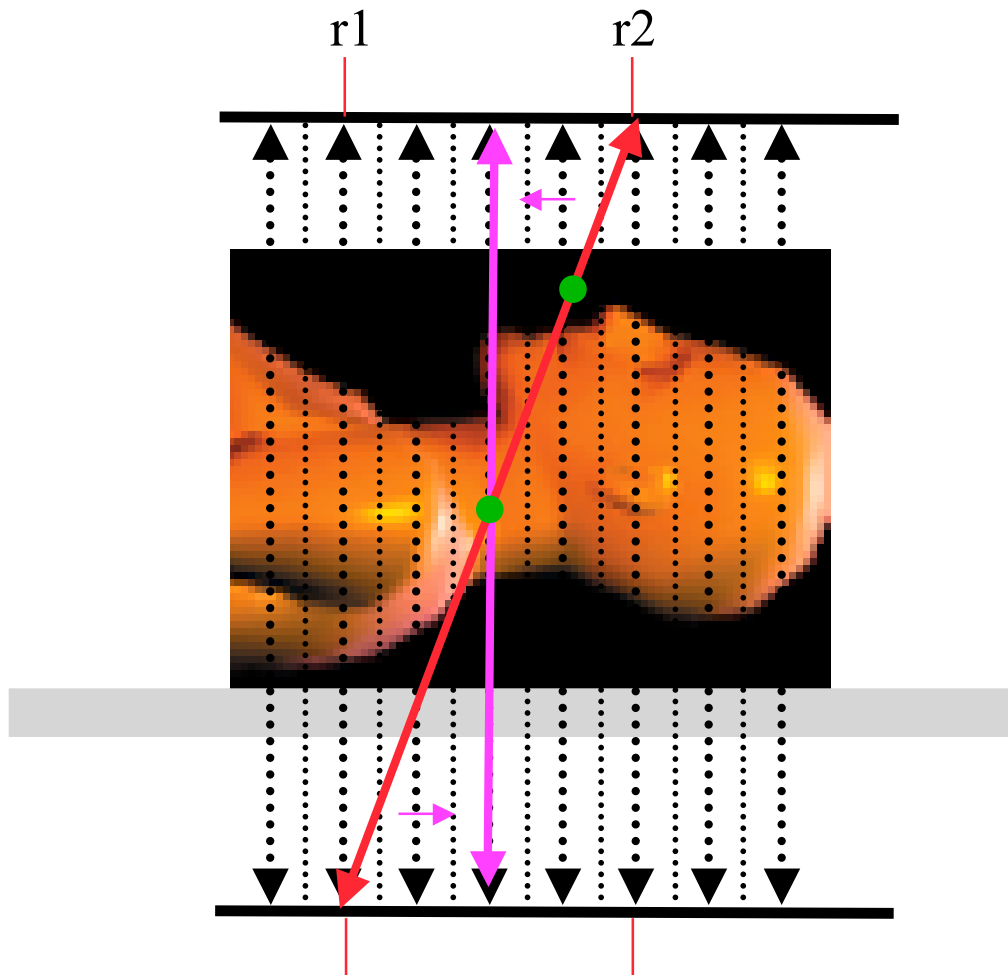


Méthodes de rebinning

- A partir des R^2 sinogrammes (R nombre de couronnes), estimation de $2R-1$ sinogrammes correspondant aux plans droits

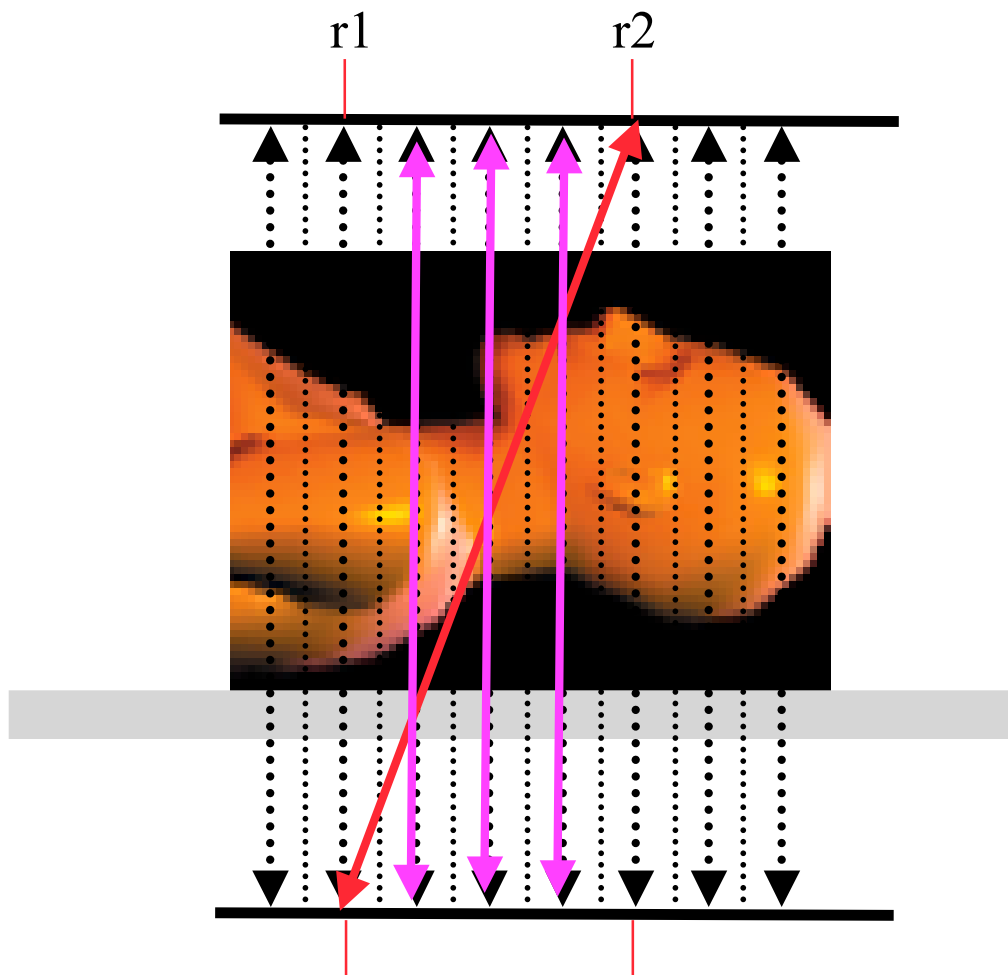


Single slice rebinning



$$r_{\text{rebin}} = (r1+r2)/2$$

Multi slice rebinning



Autre technique de rebinning : Fourier rebinning

Méthodes discrètes itératives

- Aucune différence conceptuelle avec l'approche 2D

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathbf{p} = \mathbf{R} \mathbf{f} & & \\ & \nearrow & \uparrow & \nwarrow & \\ \text{projections} & & \text{opérateur} & & \text{objet à} \\ \text{acquises} & & \text{de projection} & & \text{reconstruire} \end{array}$$

- Challenges :
 - taille du projecteur (ou matrice de transition) (plus de 10 millions de LOR en PET 3D)
 - estimation du projecteur pour rendre compte correctement des phénomènes 3D affectant les données mesurées (diffusion, réponse du détecteur, sensibilité variable du détecteur dans la direction axiale).

Historique



- 1917 : Johann Radon : “De la détermination des fonctions à partir de leurs intégrales selon certaines directions”
⇒ travaux confinés au cercle des mathématiciens
- 1956 : Bracewell : démonstration des relations entre transformée de Fourier et transformée de Radon
- 1963 : premières applications de la tomographie médicale
 - Kuhl, prof de radiologie : premières images tomographiques par rétroprojection simple
 - Cormack, physicien : application des travaux de Radon aux acquisitions par rayons X
- 1970 : publication de la première image de tomodensitométrie X
- 1970-73 : mise au point du premier scanner X par Cormack et Hounsfield
- 1979 : Attribution du prix Nobel de Médecine à Cormack et Hounsfield

Quelle méthode pour quelle application ?

- Scanner X
 - * rétroprojection filtrée car excellent rapport signal-sur-bruit

- Tomographie d'émission monophotonique
 - * routine clinique : longtemps rétroprojection filtrée seulement
 - * de plus en plus fréquemment : algorithmes itératifs, en particulier OSEM, du fait de :
 - la réduction des artefacts de raies
 - les plus grandes possibilités en terme de quantification
 - le traitement plus efficace de données présentant une faible statistique (10 000 moins d'événements qu'en scanner X)
 - l'augmentation de la puissance des calculateurs qui rend la mise en œuvre d'algorithmes itératifs compatible avec une utilisation clinique

- Tomographie d'émission de positons
 - * routine clinique : rétroprojection filtrée
 - * en cours de développement : algorithmes itératifs du fait de :
 - la possibilité de traiter totalement la nature 3D de la reconstruction sans factorisation et d'exploiter au mieux les nouveaux dispositifs d'acquisition
 - l'augmentation de la puissance des calculateurs

Pour en savoir plus ...

- Analytic and iterative reconstruction algorithms in SPECT. Journal of Nuclear Medicine 2002, 43:1343-1358
- Rétroprojection filtrée et reconstruction itérative : rappels théoriques et propriétés des deux approches sur :
<http://www.guillemet.org/irene>
- Articles didactiques téléchargeables sur:
<http://www.guillemet.org/irene/equipe4/cours.html>