Reconstruction tomographique

Irène Buvat
U494 INSERM
Paris

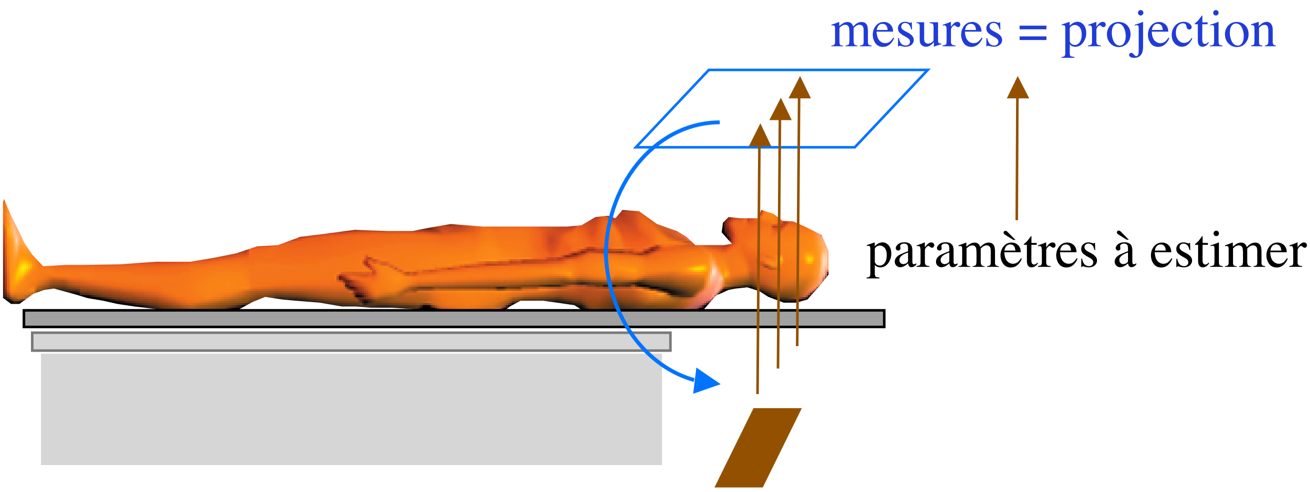
buvat@imed.jussieu.fr
http://www.guillemet.org/irene

novembre 2004

Plan du cours

- Introduction
  - Problème de reconstruction tomographique
  - Tomographie en transmission
  - Tomographie en émission
  - Spécificité du problème de reconstruction tomographique
- Notions de base
  - Projection
  - Transformée de Radon
  - Sinogramme
  - Rétroprojection
- Méthodes de reconstruction analytique
  - Principe
  - Théorème de la coupe centrale
  - Rétroprojection filtrée
  - Filtres
- Méthodes de reconstruction itérative
  - Principe et et méthodes
  - Opérateur de projection R
  - Méthodesalgébriques
  - Méthodes statistiques
  - Régularisation
- Reconstruction « fully 3D »
  - Problématique
  - Méthodes analytiques
  - Méthodes de rebinning
  - Méthodes itératives
- Discussion

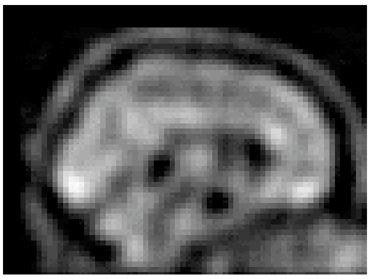
Introduction : la reconstruction tomographique



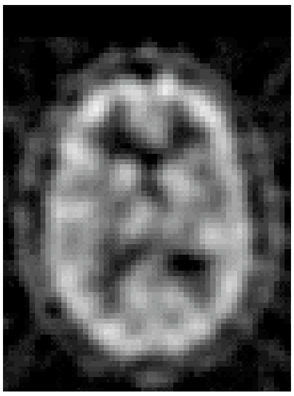
Mesures intégrales sous différentes incidences angulaires

projections

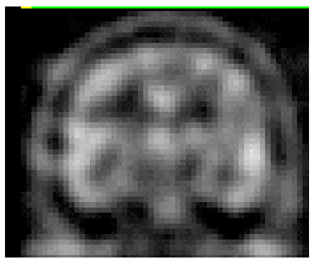
Reconstruction tomographique



sagittale



transverse

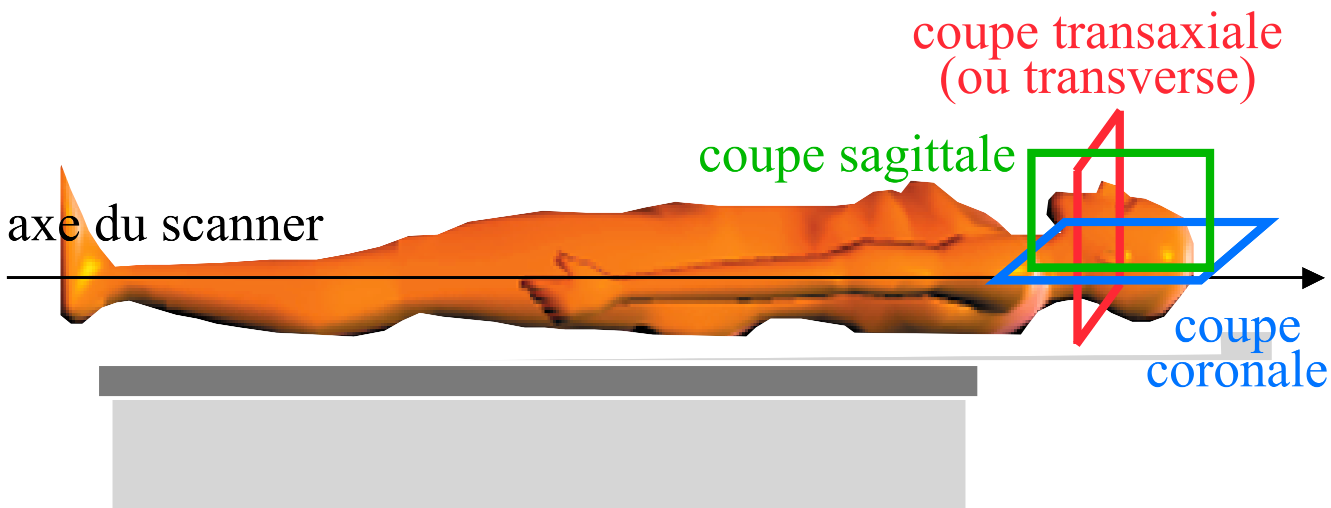


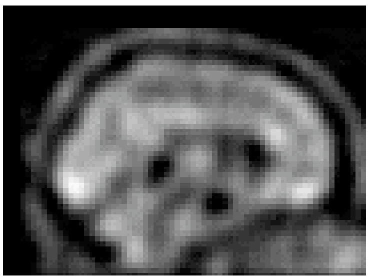
coronale

coupes d’orientation quelconque :
imagerie 3D

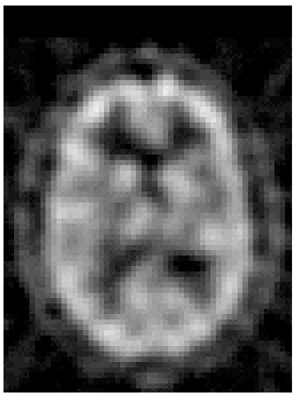
Reconstruction tomographique = problème inverse :
estimer la distribution 3D à partir des projections 2D mesurées

Introduction : coupes tomographiques

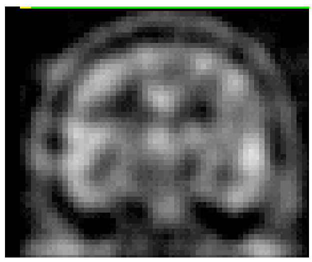




sagittale



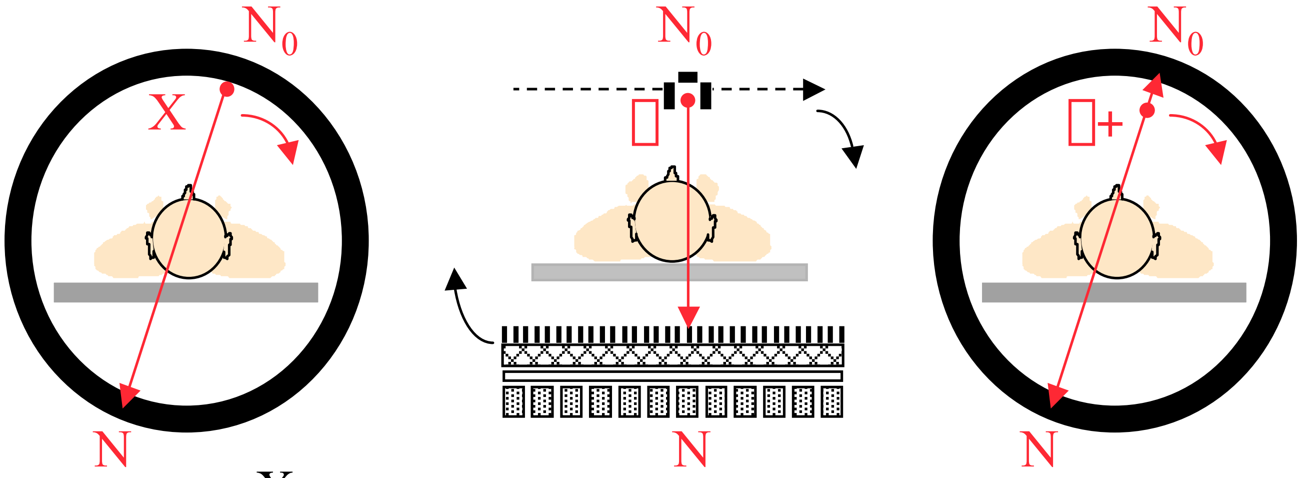
transverse



coronale

Introduction : tomographie de transmission

- Source (X ou γ) externe au patient

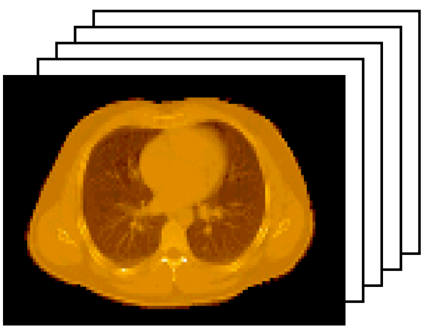


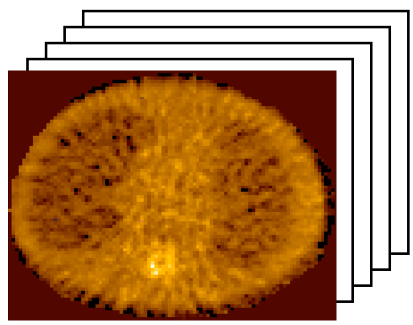
scanner X (tomodensitométrie) SPECT PET

- Mesures : projection du rayonnement ayant traversé le patient ⇒ intégrale des coefficients d'atténuation

$$N = N_0 \exp\left(-\int_0^d \mu(l)\,dl\right) \qquad \ln \frac{N_0}{N} = \int_0^d \mu(l)\,dl$$

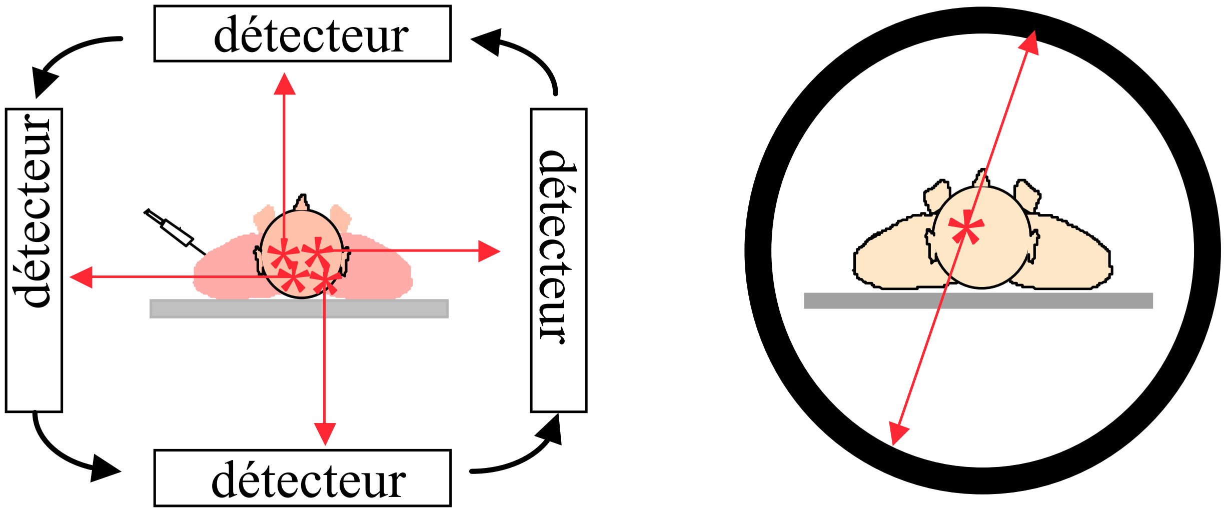
- Objet à reconstruire : cartographie 3D des coefficients d'atténuation μ du milieu traversé





Introduction : tomographie d'émission

• Source γ ou β^+ interne au patient

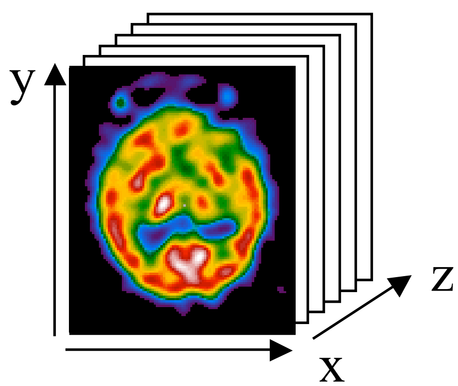


SPECT PET

• Mesures idéales (sans atténuation) : intégrale de l'activité le long des raies de projections

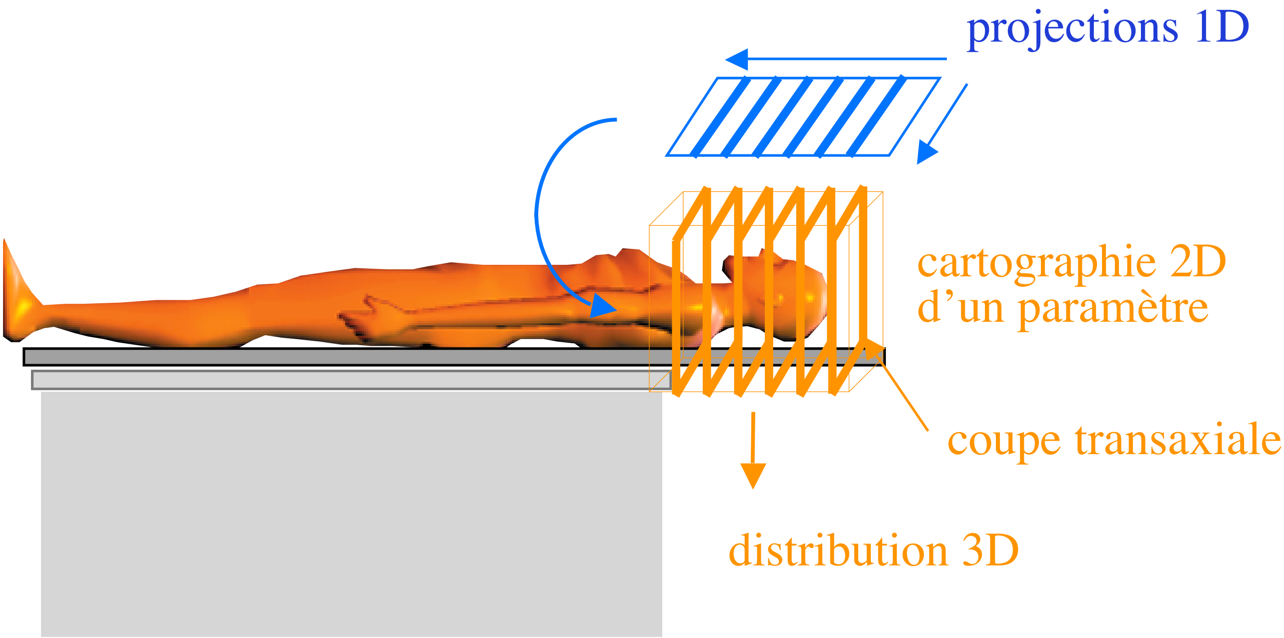
$$N = \int_0^d f(l)\, dl$$

• Objet à reconstruire : cartographie 3D de la distribution d'activité f dans l'organisme



Factorisation du problème de reconstruction

volume 3D à partir d'images 2D

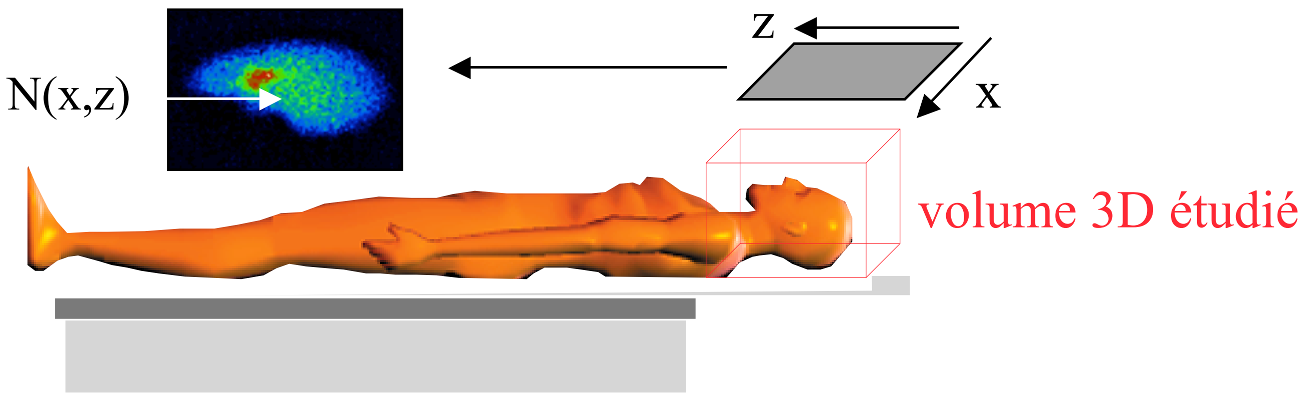


volume 3D reconstruit à partir de la
reconstruction d'un ensemble de volume 2D

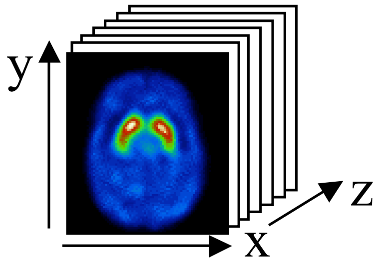
Factorisation du problème de reconstruction

- Un ensemble de projections 2D

une projection □ ←———— détecteur en position □

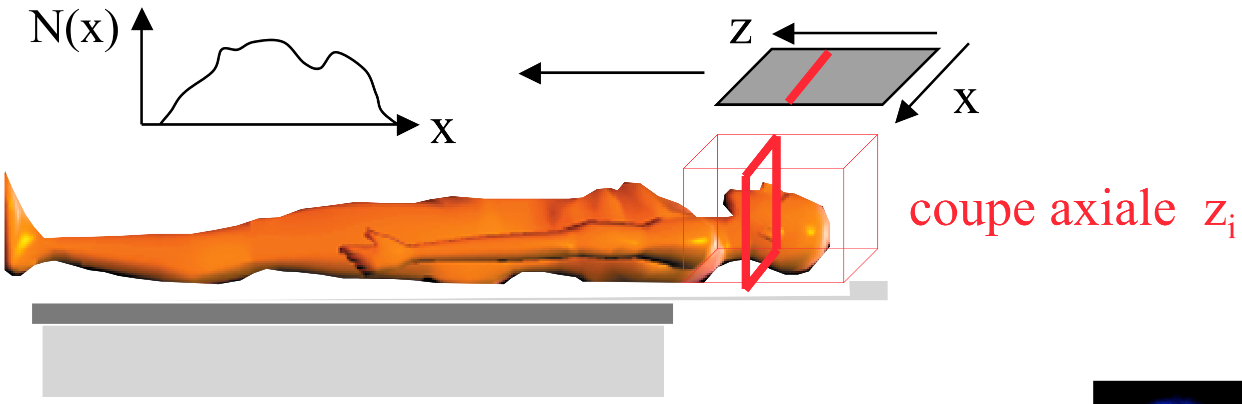


➡ reconstruction d'un objet 3D

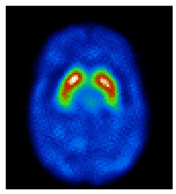


- Un ensemble de projections 1D

une ligne de projection ←———— détecteur en position □



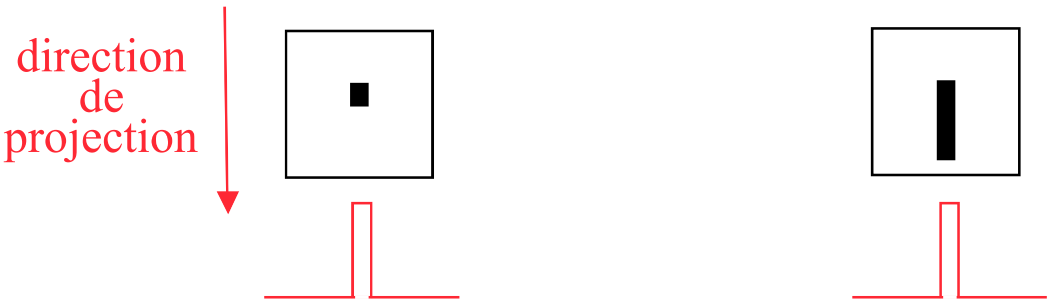
➡ reconstruction d'un objet 2D (coupe z_i)
ensemble de coupes z_i = volume d'intérêt



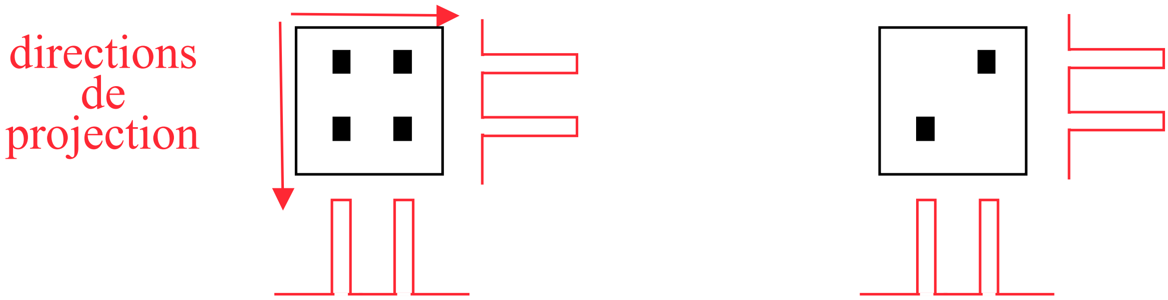
Reconstruction : non unicité de la solution

• Pas de solution unique : toujours plusieurs objets compatibles avec un ensemble fini de projections

1 projection : plusieurs solutions possibles



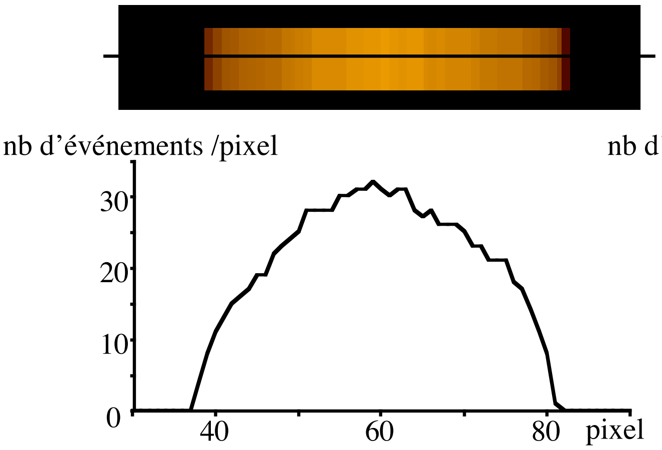
2 projections : plusieurs solutions possibles



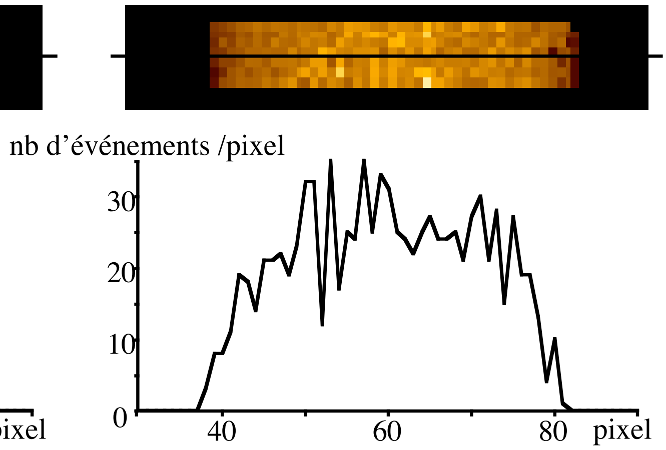
➡ Unicité de la solution pour une infinité de projections seulement

Reconstruction : problème inverse mal posé

• Pas de solution du fait du bruit entachant les données



projection idéale



projection bruitée

• Non unicité de la solution du fait du manque d'informations (nombre de projections fini)

typiquement, 64 ou 128 projections <<

Instabilité de la solution : petite différence sur les projections peut provoquer des écarts importants sur les coupes reconstruites

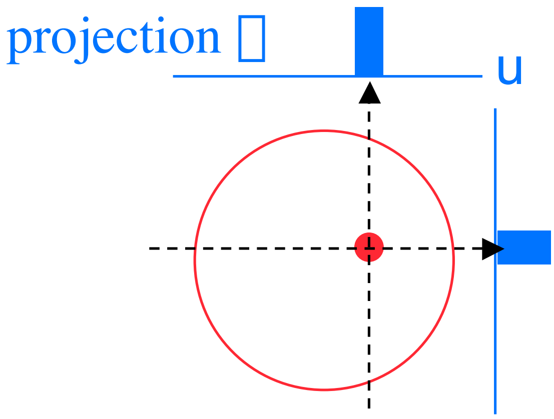
Notions de base

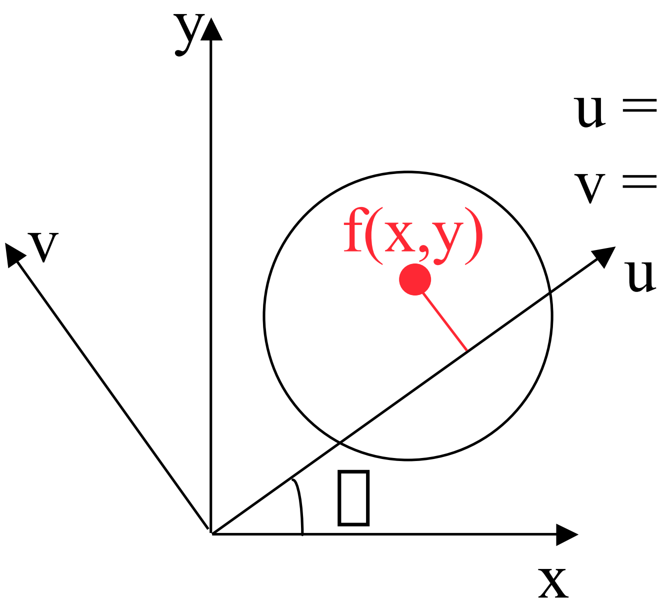
Travaux princeps

1887-1956

1917 : Johann Radon : "De la détermination des fonctions à partir de leurs intégrales selon certaines directions", Math. Phys. Klass

Opération de projection





$$u = x \cos\theta + y \sin\theta$$
$$v = -x \sin\theta + y \cos\theta$$

$$p(u,\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, dv$$

Transformée de Radon

$$p(u,\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, dv$$

ensemble des projections pour $\theta = [0, \pi]$
= transformée de Radon de f(x,y)

$$R[f(x,y)] = \int_{0}^{\pi} p(u,\theta)\, d\theta$$

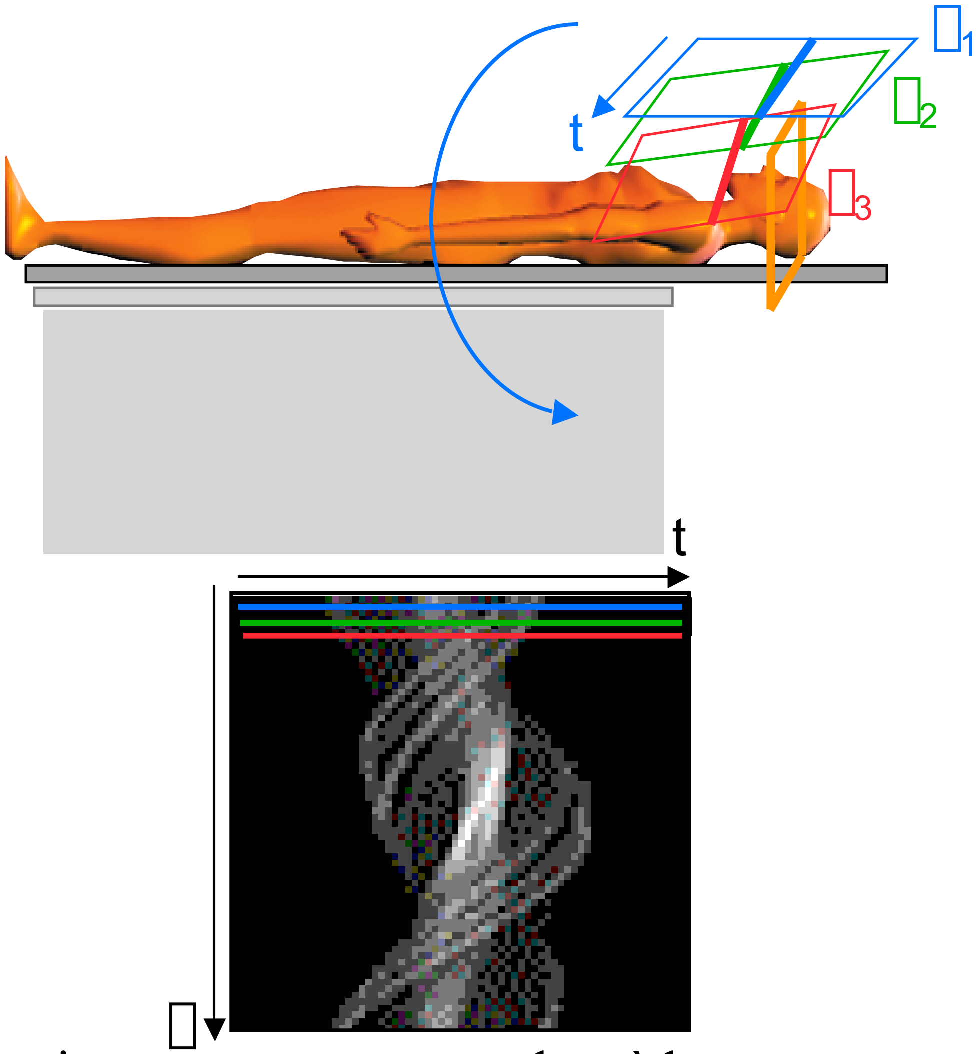
$$f(x,y) \longrightarrow p(u,\theta)$$

domaine spatial — espace de Radon

Problème de reconstruction tomographique :
inverser la transformée de Radon, i.e.,
estimer f(x,y) à partir de $p(u,\theta)$

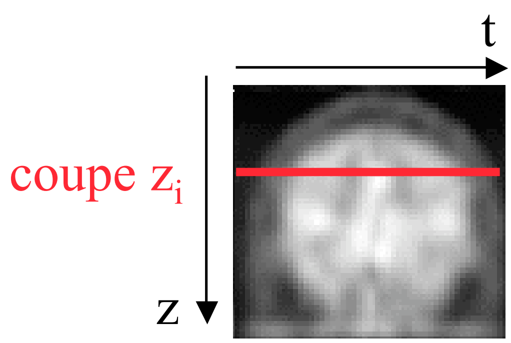
Sinogramme

Sinogramme = signal issu d'une coupe z_i vue sous différentes incidences θ

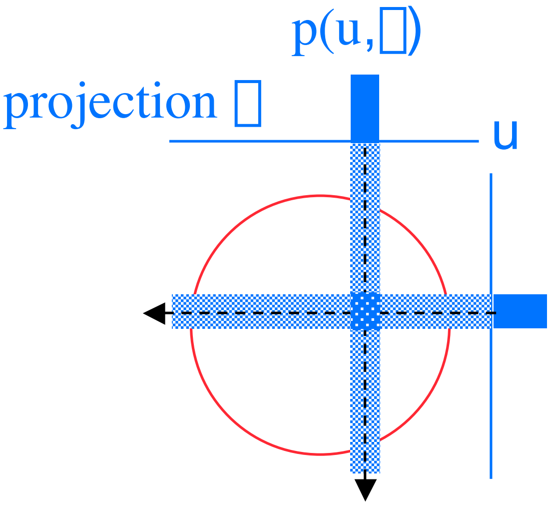


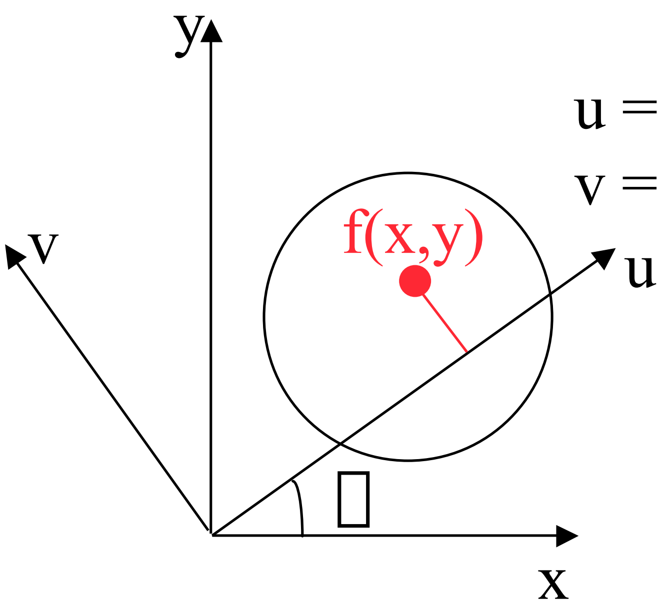
sinogramme correspondant à la coupe z_i

reconstruction tomographique



Opération de rétroprojection





$$u = x \cos\theta + y \sin\theta$$
$$v = -x \sin\theta + y \cos\theta$$

$$f^*(x,y) = \int_0^{\pi} p(u,\theta)\, d\theta$$

Attention : la rétroprojection n'est pas l'inverse de la transformée de Radon

Deux approches à la reconstruction tomographique

- Les méthodes analytiques

$$R[f(x,y)] = \int_0^{\pi} p(u,\varphi)\, d\varphi$$

- Les méthodes discrètes (ou itératives)

$$p = R\, f$$

Méthodes de reconstruction analytique : introduction

• Inversion analytique de la transformée de Radon

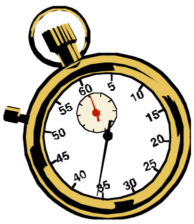
$$R[f(x,y)] = \int_0^{\pi} p(u,\theta)\, d\theta$$

• Expression continue du problème de reconstruction tomographique

• Méthode la plus courante : rétroprojection filtrée

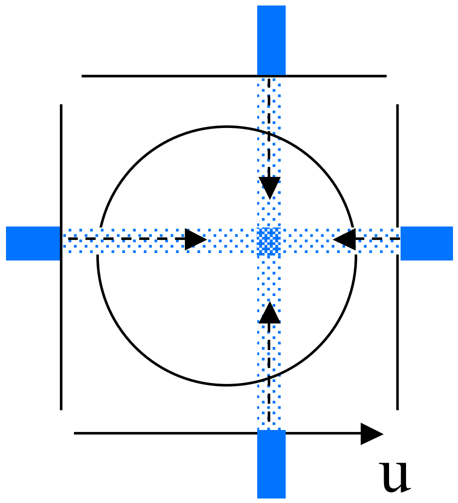
FBP : Filtered BackProjection

• Méthodes rapides



• Méthodes disponibles sur tous les dispositifs d'acquisition commercialisés (scanner X, SPECT, PET)

Limites de la rétroprojection simple



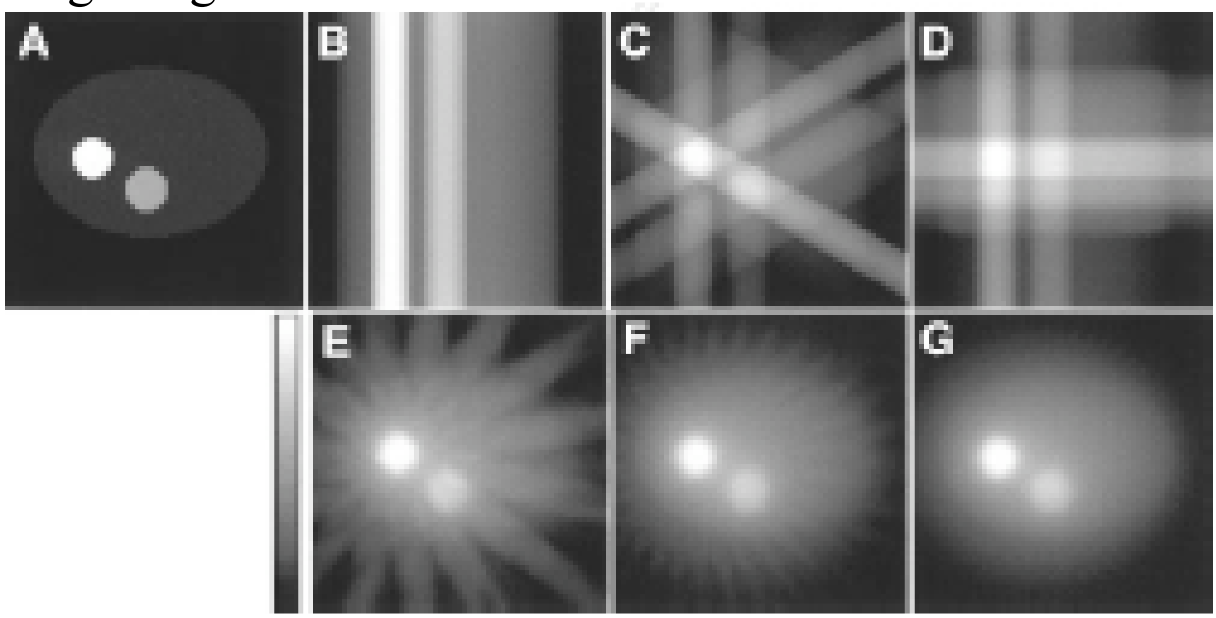
$$f^*(x,y) = \int_0^{\pi} p(u,\theta)\, d\theta$$

rétroprojection simple

➡ artefacts d'épandage en étoile

nombre de projections

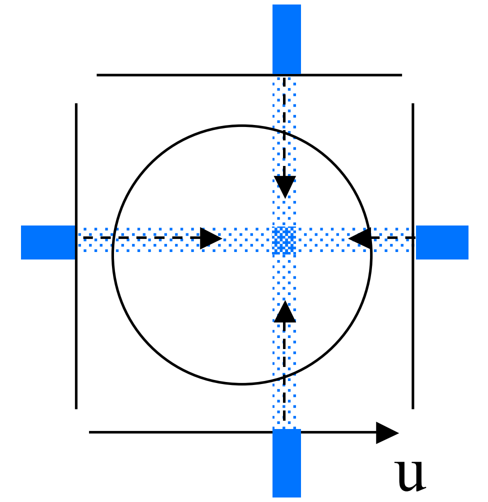
image originale 1 3 4



16 32 64

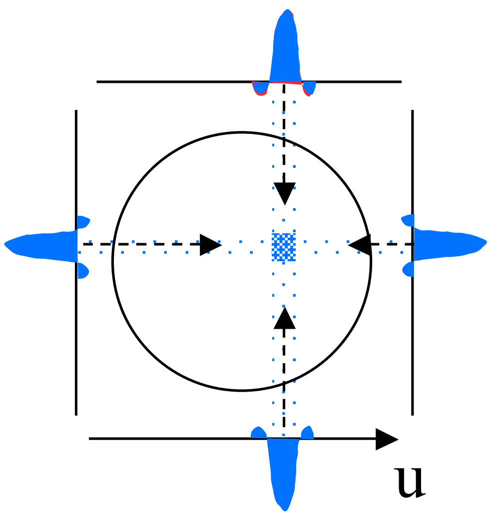
La rétroprojection n'inverse pas la transformée de Radon

Rétroprojection filtrée : principe



$$f^*(x,y) = \int_0^{\pi} p(u,\theta)\, d\theta$$

rétroprojection simple



$$f^*(x,y) = \int_0^{\pi} p(u,\theta)\, d\theta$$

projection filtrée

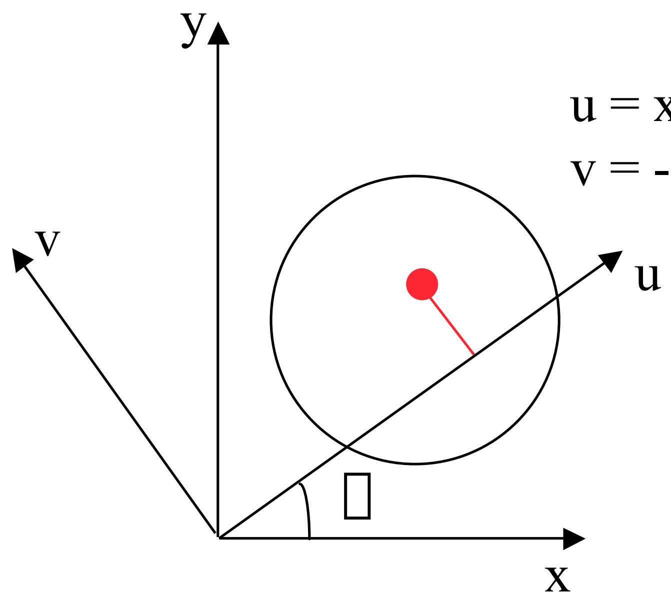
rétroprojection filtrée

➡ réduction des artefacts

➡ inversion de la transformée de Radon

Théorème de la coupe centrale (TCC)

$$p(u,\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, dv \quad \xrightarrow[\text{Fourier (TF)}]{\text{transformée de}} \quad P(\nu,\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(u,\varphi)\, e^{-i2\pi\nu u}\, du$$



$$u = x \cos\varphi + y \sin\varphi$$
$$v = -x \sin\varphi + y \cos\varphi$$

$$\nu_x = \nu \cos \varphi$$
$$\nu_y = \nu \sin \varphi$$
$$du.dv = dx.dy$$

changement de variable : $(u,v) \longrightarrow (x,y)$

$$P(\nu,\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, e^{-i2\pi\nu u}\, du\, dv = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, e^{-i2\pi(x\nu_x + y\nu_y)}\, dx\, dy$$

TF monodimensionnelle d’une projection par rapport à u

=

TF bidimensionnelle de la distribution à reconstruire

Rétroprojection filtrée

$$\boxed{P(\rho,\theta) = F(\nu_x, \nu_y)}$$

TF^{-1}

$$f(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu_x,\nu_y)e^{i2\pi(x\nu_x + y\nu_y)}\, d\nu_x\, d\nu_y$$

TCC

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} P(\rho,\theta)e^{i2\pi(x\nu_x + y\nu_y)}\, d\nu_x\, d\nu_y$$

changement de variable : $(\nu_x, \nu_y) \rightarrow (\rho, \theta)$

$$= \int_{0}^{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} P(\rho,\theta)\, |\rho| e^{i2\pi\rho u}\, d\rho\, d\theta$$

$\nu_x = \rho \cos \theta$
$\nu_y = \rho \sin \theta$
$\rho = (\nu_x^2 + \nu_y^2)^{1/2}$
$d\nu_x.d\nu_y = \rho.d\rho.d\theta$
$u = x \cos\theta + y \sin\theta$

$$= \int_{0}^{\pi} p'(u,\theta)\, d\theta \quad \text{avec} \quad p'(u,\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(\rho,\theta)\, |\rho| e^{i2\pi\rho u}\, d\rho$$

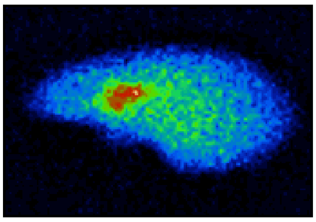
projections filtrées

filtre rampe

objet f(x,y) à reconstruire
=
rétroprojection des projections filtrées

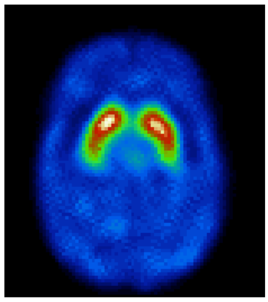
Algorithme de rétroprojection filtrée

$$f(x,y) = \int_0^{\pi} p'(u,\theta)\, d\theta \quad \text{avec} \quad p'(u,\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(\nu,\theta)\, |\nu| e^{i2\pi\nu u}\, d\nu$$



projections

$p(u,\theta)$



images reconstruites

$f(x,y)$

$p(u,\theta)$ → transformée de Fourier → $P(\nu,\theta)$ → filtrage → $|\nu|\, P(\nu,\theta)$ → Transformée de Fourier inverse → $p'(u,\theta)$ → rétroprojection → $f(x,y)$

Insuffisance du filtre rampe

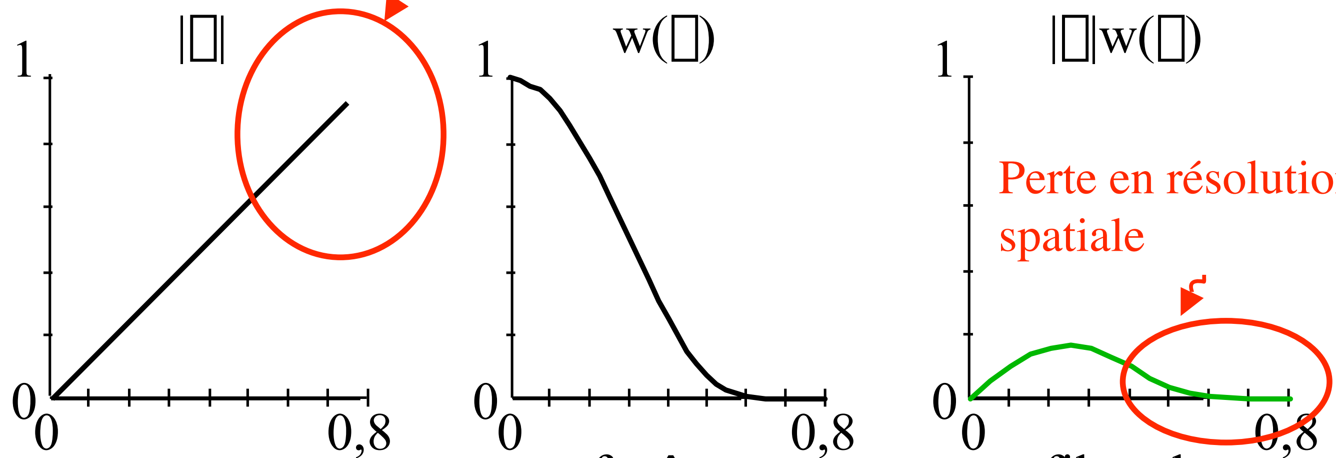
$$f(x,y) = \int_0^{\pi} p'(u,\theta)\, d\theta \quad \text{avec} \quad p'(u,\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(\nu,\theta)\, |\nu| e^{i2\pi\nu u}\, d\nu$$

filtre rampe

$$|\nu| \longrightarrow |\nu| w(\nu)$$

fenêtre d'apodisation

amplification des hautes fréquences



filtre rampe

fenêtre d'apodisation de Hann $\longrightarrow$ filtre de Hann résultant

$$w(\nu) = 0{,}5.(1+\cos(\pi\nu/\nu_c)) \quad \text{si } \nu < \nu_c$$
$$= 0 \quad \text{si } \nu \geq \nu_c$$

domaine fréquentiel

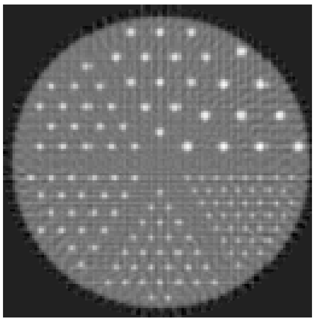
$$\Longleftrightarrow \quad 1/16 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{si } \nu_c = \nu_N$$

domaine spatial

Filtres classiques : filtre de Hann

- Filtre rampe

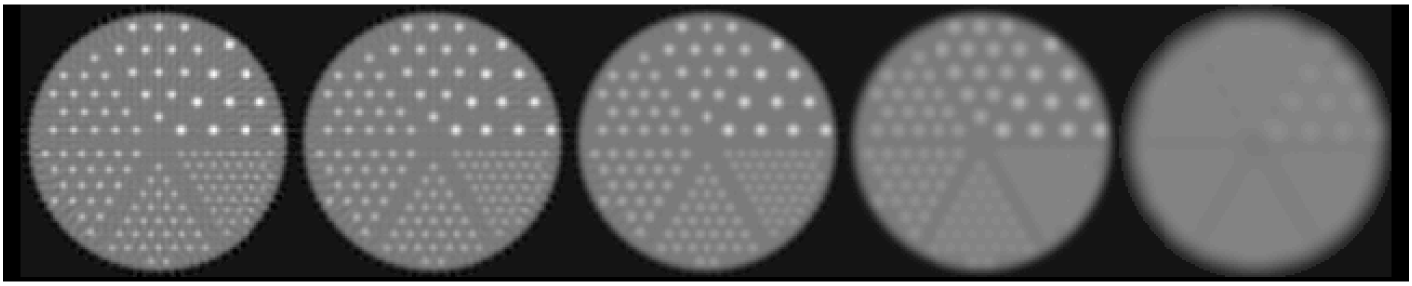
  ➡ meilleure résolution spatiale mais forte amplification du bruit haute fréquence



- Filtre de Hann

$$w(\nu) = 0{,}5.(1+\cos(\pi\nu/\nu_c)) \quad \text{si } \nu < \nu_c$$
$$= 0 \quad \text{si } \nu \geq \nu_c$$

  ➡ modifie les moyennes fréquences



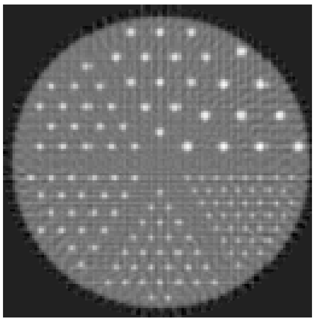
0,5 0,4 0,3 0,2 0,1

fréquence de coupure ν_c

➡ plus faible est la fréquence de coupure, moins on préserve les détails “haute fréquence”, i.e., plus fort est le lissage

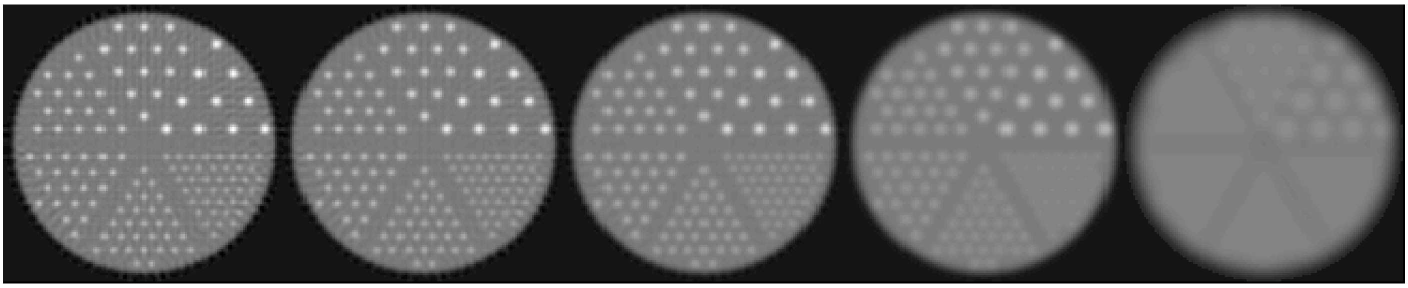
Filtres classiques : filtre de Hamming

• Filtre rampe



• Filtre de Hamming

$$w(\nu) = 0{,}54+0{,}46(\cos \pi\nu/\nu_c) \qquad \text{si } \nu < \nu_c$$
$$= 0 \qquad \text{si } \nu \geq \nu_c$$



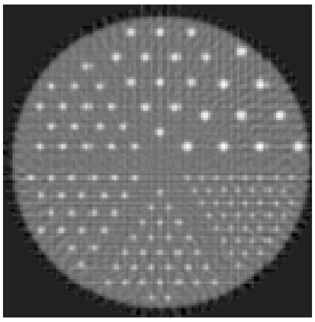
0,5 0,4 0,3 0,2 0,1

fréquence de coupure ν_c

➡ plus faible est la fréquence de coupure,
moins on préserve les détails “haute fréquence”, i.e.,
plus fort est le lissage

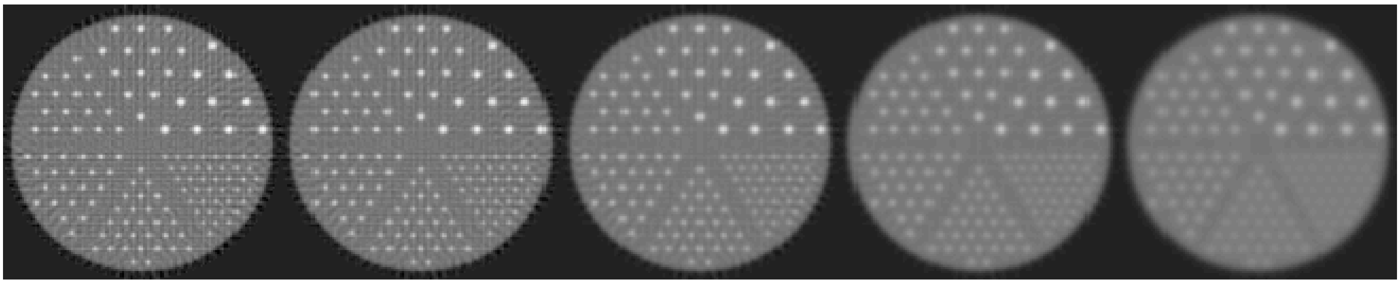
Filtres classiques : filtre gaussien

- Filtre rampe



- Filtre gaussien (domaine spatial)

$$c(x) = (1/\sigma\sqrt{2\pi}).\exp[-(x-x_0)^2/2\sigma^2] \quad \text{si } \nu < \nu_c$$
$$= 0 \quad \text{si } \nu \geq \nu_c$$



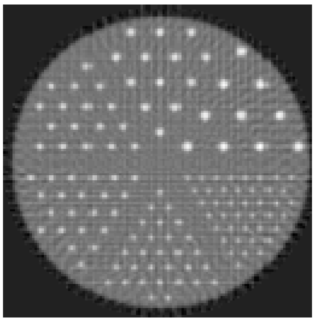
0 1 2 3 4

$$\text{FWHM} = 2\sqrt{2\ln 2}\ \sigma \text{ (pixel)}$$

➡ plus grande est la dispersion du filtre gaussien (FWHM ou σ),
moins on préserve les détails “haute fréquence”, i.e., plus fort est le lissage

Filtres classiques : filtre de Butterworth

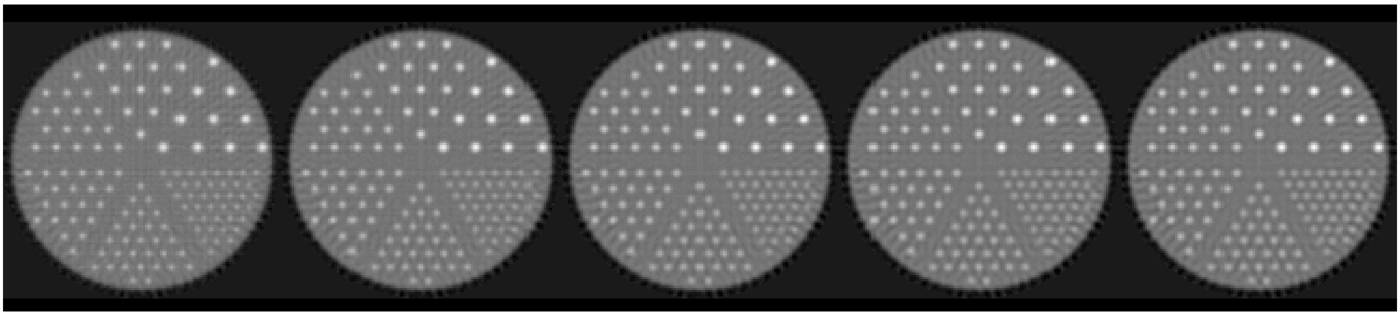
- Filtre rampe



- Filtre de Butterworth

$$w(\nu) = 1/[1+(\nu/\nu_c)^{2n}] \qquad \text{si } \nu < \nu_c$$
$$= 0 \qquad \text{si } \nu \geq \nu_c$$

➡ 2 paramètres : fréquence de coupure ν_c et ordre n



2 4 6 8 10

ordre n, ν_c=0,25

➡ plus faible est l'ordre
moins on préserve les détails “haute fréquence”, i.e.,
plus fort est le lissage

Implantation du filtrage

• Multiplication du filtre rampe par une fenêtre d'apodisation

$$|\nu| \longrightarrow |\nu|w(\nu)$$

➡ filtrage 1D (direction x)

• Filtrage des projections puis reconstruction avec un filtre rampe

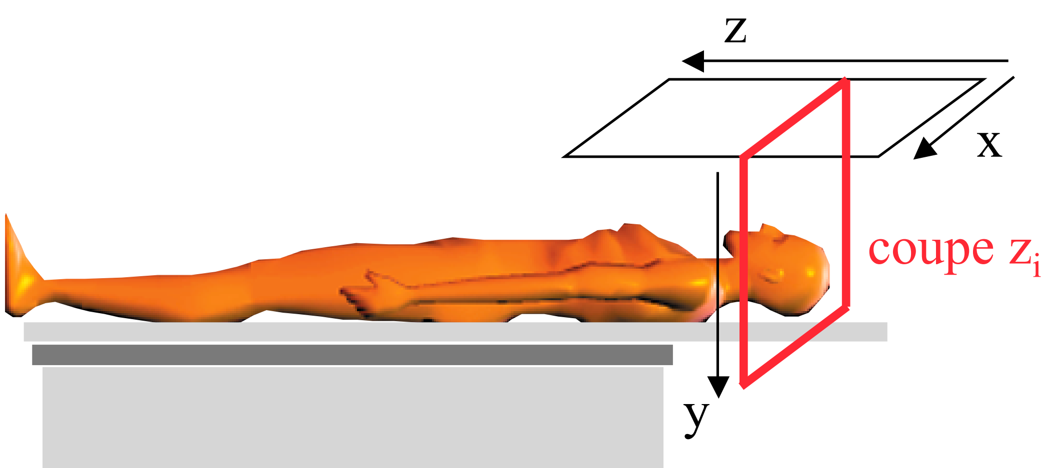
➡ filtrage 2D (directions x,z)

• Reconstruction avec un filtre rampe puis filtrage 2D des coupes reconstruites

➡ filtrage 2D (directions x,y)

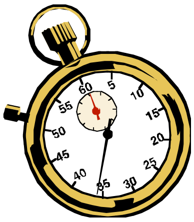
• Reconstruction avec un filtre rampe puis filtrage 3D du volume reconstruit

➡ filtrage 3D (directions x,y,z)



Méthodes de reconstruction analytique : discussion

• Rapide



• Mais beaucoup d'approximations non vérifiées en pratique :

- modèle de lignes intégrales (résolution spatiale parfaite du détecteur)

- pas de prises en compte des fluctuations statistiques

➡ Approche alternative : la reconstruction discrète, ou itérative

Méthodes de reconstruction itératives : introduction

• Expression discrète et matricielle du problème de reconstruction tomographique

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & \cdots & r_{14} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ r_{41} & \cdots & r_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix}$$

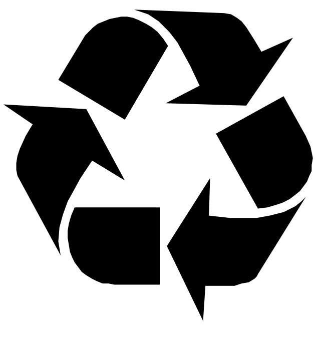
• Problème de reconstruction : système d'équations de grande taille

128 projections 128 x 128

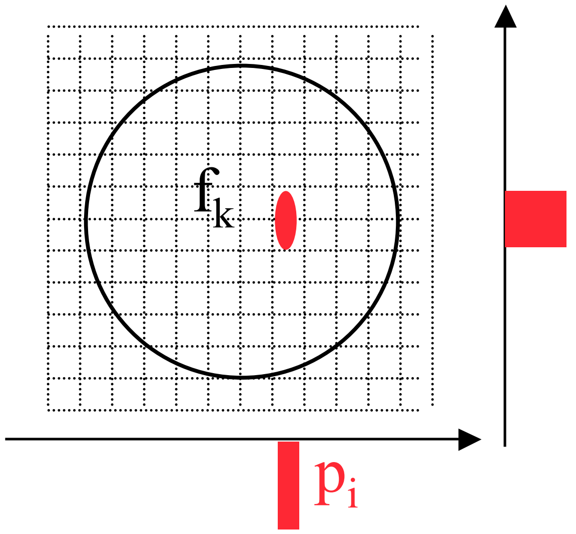
$\Updownarrow$

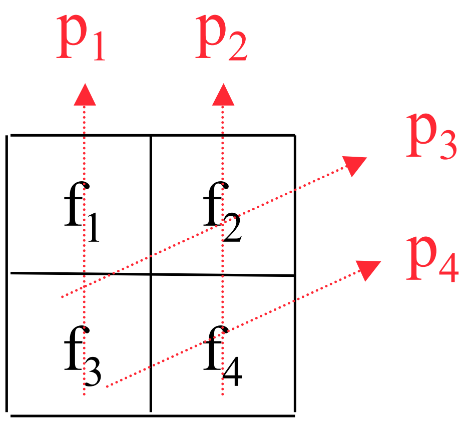
2 097 152 équations à autant d'inconnues

• Inversion itérative du système d'équations



Expression discrète du problème de reconstruction





$$
\begin{aligned}
p_1 &= r_{11}\, f_1 + r_{12} f_2 + r_{13} f_3 + r_{14}\, f_4 \\
p_2 &= r_{21}\, f_1 + r_{22} f_2 + r_{23} f_3 + r_{24}\, f_4 \\
p_3 &= r_{31}\, f_1 + r_{32} f_2 + r_{33} f_3 + r_{34}\, f_4 \\
p_4 &= r_{41}\, f_1 + r_{42} f_2 + r_{43} f_3 + r_{44}\, f_4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & \cdots & r_{14} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{41} & \cdots & r_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix}
$$

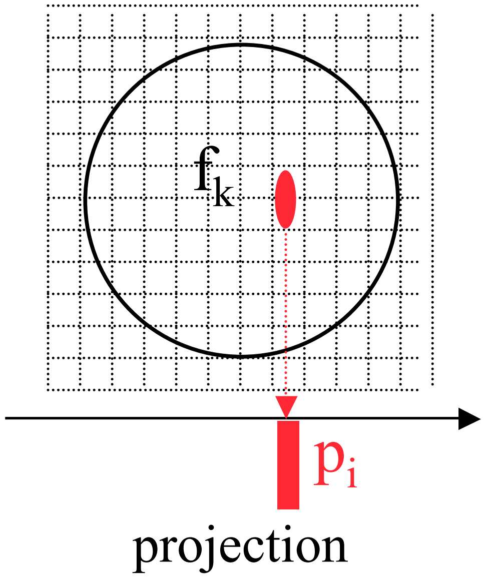
$$
p = R\, f
$$

projections acquises — opérateur de projection — objet à reconstruire

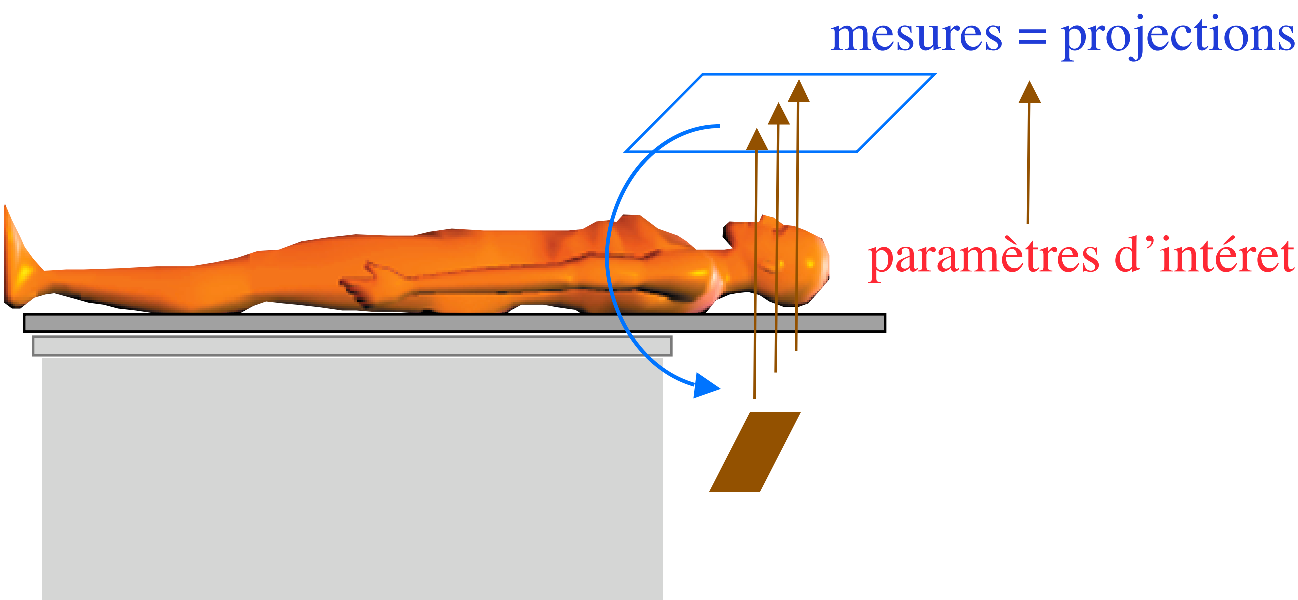
➡ Problème : déterminer f connaissant p et R

Expression de l'opérateur de projection R

$$p = R\,f$$



Modélisation du problème direct



Expression de l’opérateur de projection R

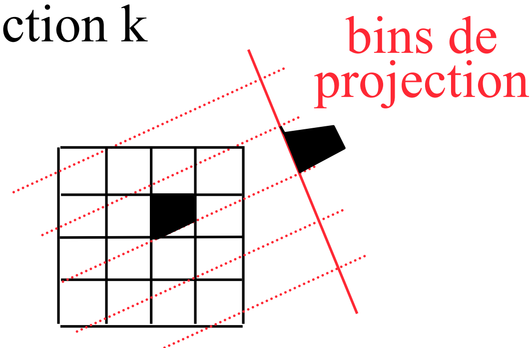
Deux aspects

• Modélisation géométrique
  - choix d’un modèle de distribution de l’intensité des pixels
  - modélisation de la géométrie de détection

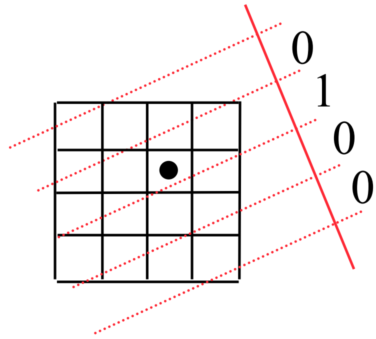
• Modélisation de la physique de détection
  * atténuation
  * diffusion
  * résolution limitée du détecteur

Modélisation géométrique de l'opérateur R

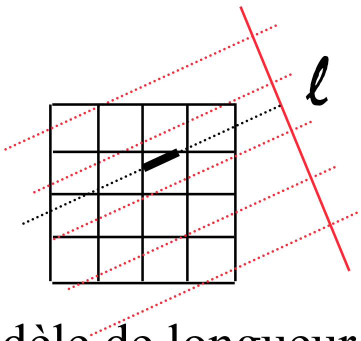
• Modèle de distribution de l'intensité des pixels : détermination de la contribution de chaque pixel i à une raie de projection k



modèle exact
= modèle uniforme



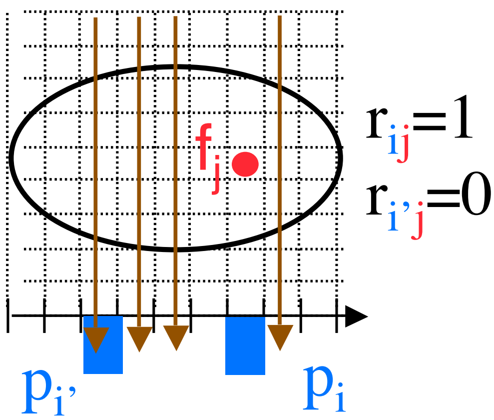
modèle de Dirac



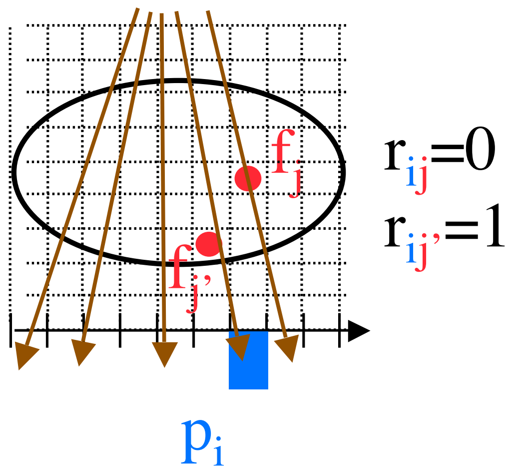
modèle de longueur
de raies

• Modèle de la géométrie de détection

géométrie parallèle

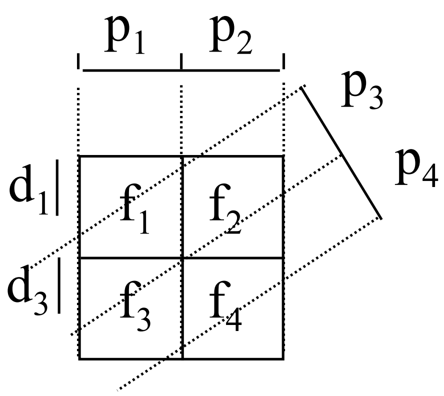


géométrie en éventail

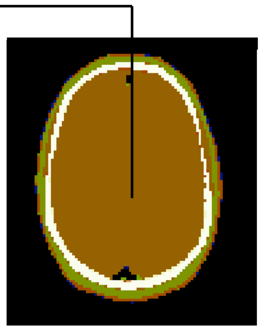


Modélisation physique de l'opérateur R

- Atténuation

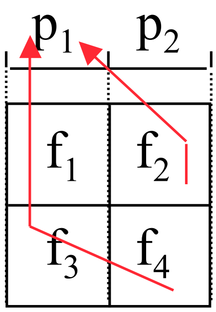


$$p_1 = r_{11}\, f_1 \exp(-\square_1 d_1) + r_{13} f_3 \exp(-\square_3 d_3/2 - 2\,\square_1 d_1)$$



carte des $\square$

- Diffusion



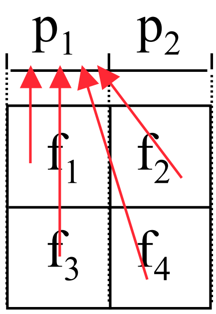
sans modélisation de la diffusion :

$$p_1 = r_{11}\, f_1 + r_{13}\, f_3$$

avec modélisation de la diffusion :

$$p_1 = r_{11}\, f_1 + r_{12}\, f_2 + r_{13}\, f_3 + r_{14}\, f_4$$

- Réponse du détecteur



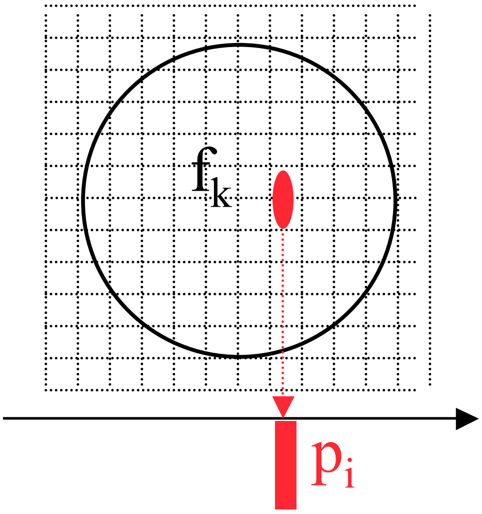
sans modélisation de la fonction de réponse de la caméra :

$$p_1 = r_{11}\, f_1 + r_{13}\, f_3$$

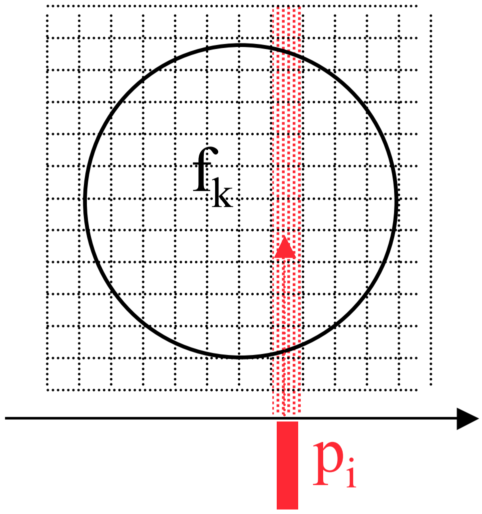
avec modélisation :

$$p_1 = r_{11}\, f_1 + r_{12}\, f_2 + r_{13}\, f_3 + r_{14}\, f_4$$

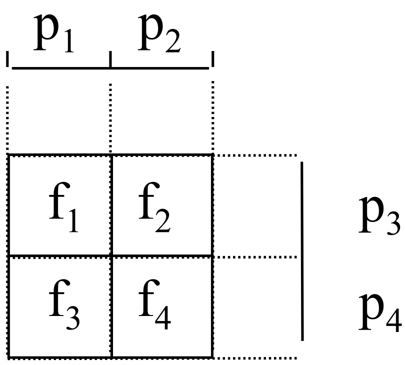
Opérateurs de projection R et de rétroprojection



projection



rétroprojection



$$p_1 = f_1 + f_3$$
$$p_2 = f_2 + f_4$$
$$p_3 = f_1 + f_2$$
$$p_4 = f_3 + f_4$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$f^*_1 = p_1 + p_3$$
$$f^*_2 = p_2 + p_3$$
$$f^*_3 = p_1 + p_4$$
$$f^*_4 = p_2 + p_4$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = R^t$$

Résolution du problème inverse

$$p = R\,f$$

Recherche d'une solution f minimisant une distance d(p,Rf), p et R étant connus

estimée initiale de l'objet à reconstruire

$f^{n=0}$

$p = R\,f$

comparaison

$\hat{p}^n$

$\hat{p}^n$ vs p

facteur de correction c^n

f^{n+1}

projection correspondant à l 'estimée f^n

définit la méthode itérative :

additive : $f^{n+1} = f^n + c^n$

multiplicative : $f^{n+1} = f^n \,.\, c^n$

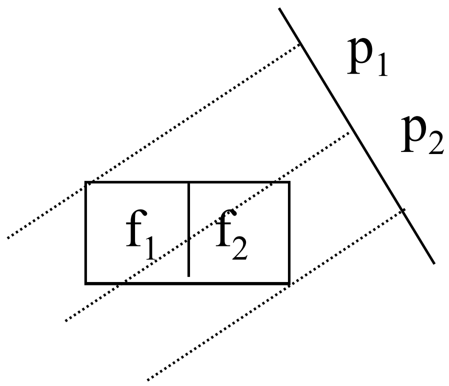
Deux classes de méthodes discrètes itératives

- Méthodes algébriques
  - méthodes itératives conventionnelles résolvant un système d'équations linéaires
  - minimisent $\|p - R f\|^2$
  - ART, SIRT, ILST, Gradient conjugué, etc

- Méthodes statistiques
  - estimation bayesienne
  - prennent en compte le bruit dans les données
  - maximisent une fonction de vraisemblance
  - MLEM, OSEM

Exemple

- Deux pixels et deux raies de projection
  ➡ système de deux équations à deux inconnues



$$f_1 = 10$$
$$f_2 = 15$$

Opérateur de projection (connu)

$$R = \begin{bmatrix} 7/8 & 1/8 \\ 1/8 & 7/8 \end{bmatrix}$$

Valeurs de projection mesurées

$$p_1 = 7/8\ f_1 + 1/8\ f_2 = 85/8$$
$$p_2 = 1/8\ f_1 + 7/8\ f_2 = 115/8$$

Inconnues à déterminer : f_1 et f_2

Approche ART (Algebraic Reconstruction Technique)

$p_1 = 7/8\ f_1 + 1/8\ f_2 = 85/8$ (équation 1)
$p_2 = 1/8\ f_1 + 7/8\ f_2 = 115/8$ (équation 2)

• Utilisation d'une seule équation de raie par itération, et mise à jour de chaque inconnue à partir de cette équation :

itération 1 : estimation de f_1 à partir de l'équation 1 slmt
estimation de f_2 à partir de l'équation 1 slmt
itération 2 : estimation de f_1 à partir de l'équation 2 slmt
estimation de f_2 à partir de l'équation 2 slmt
itération 3 : estimation de f_1 à partir de l'équation 1 slmt
estimation de f_2 à partir de l'équation 1 slmt
etc…

• Modification à chaque itération proportionnelle à l'erreur par rapport à la projection vraie

• ART additive (erreur = $p_k - p_k^n$)
ou ART multiplicative (erreur = p_k / p_k^n)

ART additive

$$p_1 = 7/8\ f_1 + 1/8\ f_2 = 85/8 = 10{,}6$$
$$p_2 = 1/8\ f_1 + 7/8\ f_2 = 115/8 = 14{,}4$$

• Repose sur la méthode de Kaczmarz

contribution du pixel i
à la raie de projection k

$$f_i^{n+1} = f_i^n + (p_k - p_k^n)\ r_{ki}/\sum_j r_{kj}^2$$

écart entre valeurs du bin de
projection estimée et observée

• Exemple (initialisation $f_1^0 = f_2^0 = 0 \Rightarrow p_1^0 = p_2^0 = 0$) :

itération n=1, raie k=1, estimation de f_1 et f_2 :

$$f_1^1 = 0 + (85/8-0).(7/8)/(49/64+1/64) = 119/10 = 11{,}9$$
$$f_2^1 = 0 + (85/8-0).(1/8)/(49/64+1/64) = 17/10 = 1{,}7$$
$$\Rightarrow\ p_2^1 = 119/40 = 3{,}0$$

itération n=2, raie k=2, estimation de f_1 et f_2 :

$$f_1^2 = 11{,}9 + (115/8-119/40).(1/8)/(49/64+1/64) = 13{,}7$$
$$f_2^2 = 1{,}7 + (115/8-119/40).(7/8)/(49/64+1/64) = 14{,}5$$
$$\Rightarrow\ p_1^1 = 13{,}8$$

itération	1	2	3	4	5
f_1	11,9	13,7	10,1	10,3	10,0
f_2	1,7	14,5	13,9	14,9	14,9

• A chaque itération, mise à jour successive de toutes les inconnues (ici f_1 et f_2) à partir de l'équation correspondant à une seule raie de projection

Approche SIRT

$p_1 = 7/8\ f_1 + 1/8\ f_2 = 85/8$ (équation 1)

$p_2 = 1/8\ f_1 + 7/8\ f_2 = 115/8$ (équation 2)

• SIRT : Simultaneous Iterative Reconstruction Technique

• Utilisation de toutes les équations à chaque itération et mise à jour de chaque inconnue :

itération 1 : estimation de f_1 en résolvant l'équation 1
estimation de f_2 en résolvant l'équation 2
itération 2 : estimation de f_1 en résolvant l'équation 1
estimation de f_2 en résolvant l'équation 2
itération 3 : estimation de f_1 en résolvant l'équation 1
estimation de f_2 en résolvant l'équation 2
etc…

• Modification à chaque itération proportionnelle à l'erreur par rapport à la projection vraie

• Méthode de Jacobi
Méthode de Gauss-Seidel

• Nombre d'itérations réduit par rapport aux méthodes ART

SIRT : méthode de Jacobi

$p_1 = 7/8\ f_1 + 1/8\ f_2 = 85/8 = 10{,}6$
$p_2 = 1/8\ f_1 + 7/8\ f_2 = 115/8 = 14{,}4$

contribution du pixel i
à la raie de projection i

$$f_i^{n+1} = f_i^n + (p_k - p_k^n) / r_{ii}$$

écart entre valeurs du bin de
projection estimée et observée

- Exemple (initialisation $f_1^0 = f_2^0 = 0$ $p_1^0 = p_2^0 = 0$) :

itération n=1 :

estimation de f_1 en résolvant l'équation 1
$f_1^1 = (85/8)/(7/8) = 85/7 = 12{,}1$
estimation de f_2 en résolvant l'équation 2
$f_2^1 = (115/8)/(7/8) = 115/7 = 16{,}4$

itération n=2 :

estimation de f_1 en résolvant l'équation 1
$f_1^2 = [85/8-(1/8)*(115/7)]/(7/8) = 9{,}8$
estimation de f_2 en résolvant l'équation 2
$f_2^2 = [115/8-(1/8)*(85/7)]/(7/8) = 14{,}7$

itération	1	2	3
f_1	12,1	9,8	10,0
f_2	16,4	14,7	15,0

SIRT : méthode de Gauss-Seidel

$$p_1 = 7/8\ f_1 + 1/8\ f_2 = 85/8 = 10{,}6$$
$$p_2 = 1/8\ f_1 + 7/8\ f_2 = 115/8 = 14{,}4$$

• Identique à la méthode de Jacobi mais en tirant immédiatement parti des estimations obtenues aux itérations précédentes

$$f_i^{n+1} = f_i^{n} + (p_k - \underbrace{p_k^{n \text{ ou } (n+1)}}_{\text{estimé à partir de toutes les valeurs courantes des } f_i}) / r_{ii}$$

• Exemple (initialisation $f_1^0 = f_2^0 = 0 \Rightarrow p_1^0 = p_2^0 = 0$) :

itération n=1 :

estimation de f_1 en résolvant l'équation 1

$f_1^1 = (85/8-0)/(7/8) = 85/7 = 12{,}1$

estimation de f_2 en résolvant l'équation 2 avec $f_1^1 = 85/7$

$f_2^1 = [115/8-(1/8)*(85/7)]/(7/8) = 14{,}7$

itération n=2 :

estimation de f_1 en résolvant l'équation 1 avec $f_2^1 = 14{,}7$

$f_1^2 = (85/8-14{,}7/8)/(7/8) = 10{,}0$

estimation de f_2 en résolvant l'équation 2 avec $f_1^2 = 10{,}0$

$f_2^2 = (115/8-10{,}0/8)/(7/8) = 15{,}0$

itération	1	2
f_1	12,1	10,0
f_2	14,7	15,0

$\Rightarrow$ convergence plus rapide que Jacobi

Méthodes de descente

- Méthodes ART et SIRT :

$$f_i^{n+1} = f_i^n + \square \text{ (erreur}^n\text{)}$$

coefficient de
pondération constant

e.g., $p_k - p_k^n$

- Méthodes de descente :

$$f_i^{n+1} = f_i^n + \square^n \text{ (erreur}^n\text{)}$$

coefficient de
pondération optimisé

➡ modification du coefficient de pondération à chaque itération

- Méthode du gradient : Iterative Least Squared Technique (ILST)

  Méthode du gradient conjugué

Méthodes de descente : gradient conjugué

• Adaptée à la résolution d'un système d'équations dont la matrice est symétrique :

$$p = R\,f \;\Rightarrow\; R^t\,p = \underbrace{R^t\,R}_{\text{matrice symétrique}}\,f$$

• Formule de mise à jour :

$$f_i^{n+1} = f_i^{n} + \alpha^n\, d^n$$

coefficient de pondération optimisé à chaque itération (vitesse de descente)

direction de descente optimisée à chaque itération

• Vitesse de descente optimisée à chaque itération :

$$\alpha^n = \|R^t\,p - R^t\,R\,f^n\|^2 \,/\, (R^t\,p - R^t\,R\,f^n)^t\,R\,(R^t\,p - R^t\,R\,f^n)$$

• Direction de descente optimisée à chaque itération :

itération 1 : $d^1 = R^t\,p - R^t\,R\,f^0$

itération n : $d^n = (R^t\,p - R^t\,R\,f^n) + b^n\,d^{n-1}$

➡ optimisation de la convergence

➡ convergence rapide

➡ méthode additive

➡ utilisée en SPECT

Deux classes de méthodes discrètes itératives

• Méthodes algébriques

méthodes itératives conventionnelles résolvant un système d'équations linéaires

minimisent $||p - R f||^2$

ART, SIRT, ILST, Gradient conjugué, etc

• Méthodes statistiques

estimation bayesienne

prennent en compte le bruit dans les données

maximisent une fonction de vraisemblance

MLEM, OSEM

Méthode statistique : MLEM

• MLEM = Maximum Likelihood Expectation Maximization

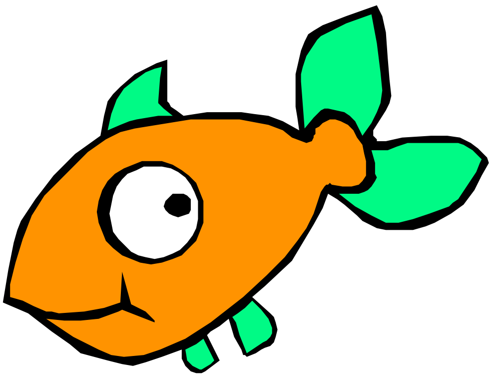
• Utilise une formulation probabiliste du problème de reconstruction :

- modèle probabiliste :

Les p_k sont des variables aléatoires de Poisson de paramètres $\overline{p_k}$, d'où l'expression de la vraisemblance de f :

$$\text{prob}(p|f) = \prod_k \exp(- \overline{p_k}) \,.\, \overline{p_k}^{\,p_k} / \, p_k\,!$$

- détermine la solution f qui maximise la vraisemblance (ou log-vraisemblance), i.e., prob(p|f) par rapport au modèle probabiliste choisi.



Algorithme MLEM

- Deux étapes :
  - calcul de l'espérance de la log-vraisemblance compte tenu des projections p_k mesurées et de l'estimation courante des f_i.
  - maximisation de l'espérance en annulant les dérivées partielles par rapport à f_i.

- Formule de mise à jour :

$$f_i^{n+1} = f_i^n \,.\, \left[\sum_k r_{ki} \left(p_k / p_k^n\right)\right] / \sum_k r_{ki}$$

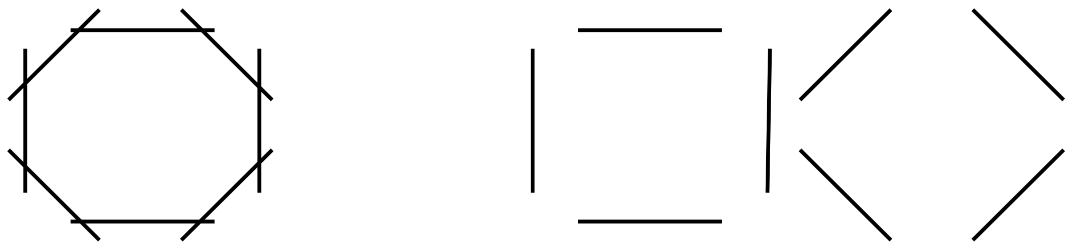
$$f^{n+1} = f^n \,.\, R^t \left[\, p / p^n \,\right]$$

opérateur de rétroprojection — erreur

* méthode multiplicative
* solution toujours positive ou nulle
* nombre d'événements conservé au fil des itérations
* convergence lente
* méthode itérative la plus utilisée en SPECT
(dans sa version accélérée OSEM)

Version accélérée de MLEM : OSEM

- OSEM = Ordered Subset Exepectation Maximisation
- Tri des P projections en sous-ensembles ordonnés
  Exemple :



8 projections ➡ 2 sous-ensembles de 4 projections

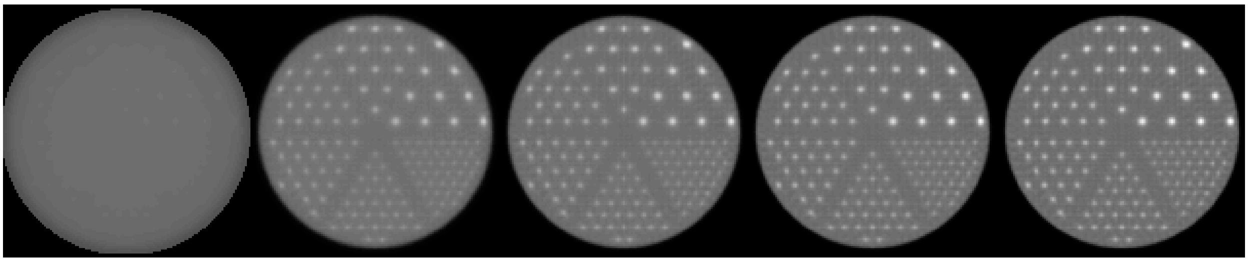
- Application de MLEM sur les sous-ensembles :
  - itération 1 :
    estimation de f^1 à partir de l'initialisation f^0 et des projections p^1 correspondant au sous-ensemble 1
    $$f^1 = f^0 . R^t [p / p^1]$$
    estimation de f'^1 à partir de f^1 et des projections p'^1 correspondant au sous-ensemble 2
    $$f'^1 = f^1 . R^t [p / p'^1]$$
  - itération 2 :
    estimation de f^2 à partir de f'^1 et des projections p^2 correspondant au sous-ensemble 1
    $$f^2 = f'^1 . R^t [p / p^2]$$
    estimation de f'^2 à partir de f^2 et des projections p'^2 correspondant au sous-ensemble 2
    $$f'^2 = f^2 . R^t [p / p'^2]$$

  etc.

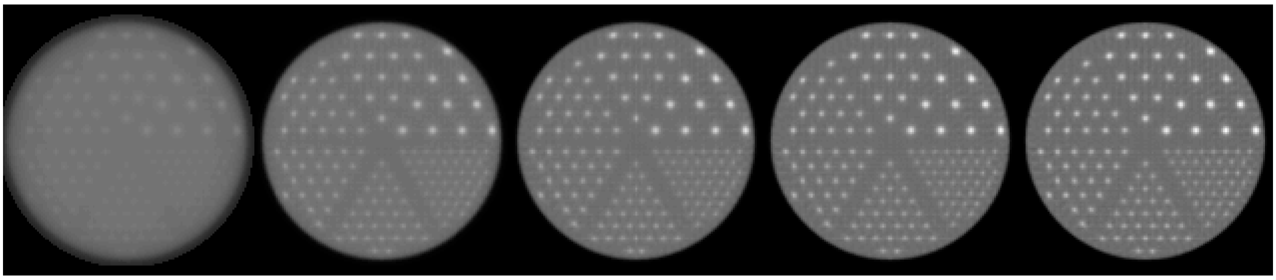
Caractéristiques de OSEM

• OSEM avec S sous-ensembles et I iterations
  SI itérations de MLEM

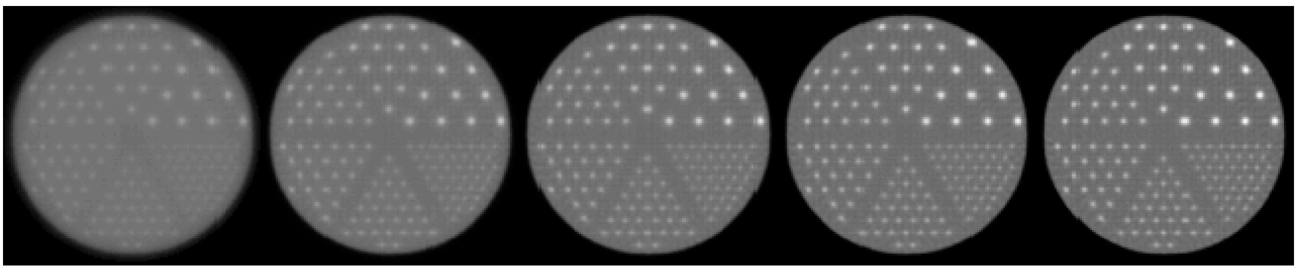
MLEM 1 16 24 32 40 itér.



OSEM 1 4 6 8 10 itér.
4 ss-ens.



OSEM 1 2 3 4 5
8 ss-ens.



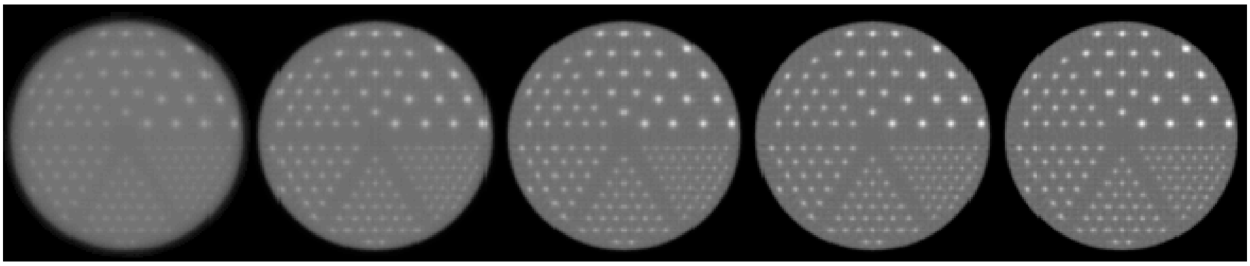
• Facteur d'accélération ~ nombre de sous-ensembles

➡ méthode itérative la plus utilisée en SPECT

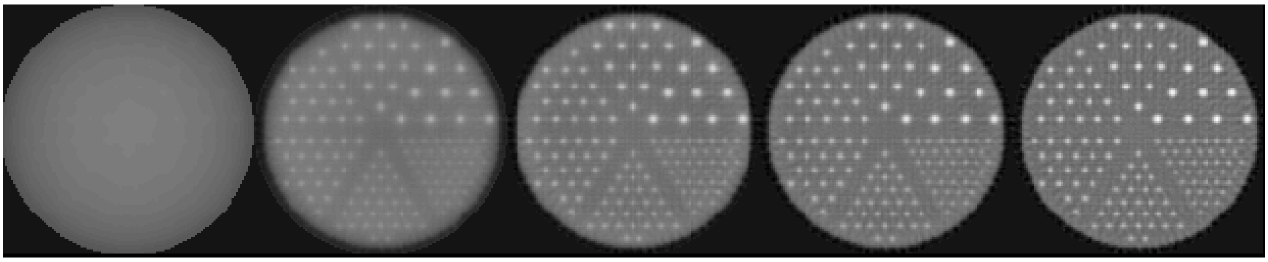
Caractéristiques des méthodes itératives

• Plus élevé est le nombre d'itérations, meilleure est la restitution des hautes fréquences

OSEM 1 2 3 4 5
8 ss-ens.



gradient 1 2 3 4 5
conjugué



• Problème du choix du nombre d'itérations
  - convergence vers la solution puis divergence de la procédure lors de la reconstruction des très hautes fréquences du fait de la présence de bruit (haute fréquence)

➡ nécessité de « régulariser »

Importance de la régularisation

• Régularisation implicite : arrêt précoce des itérations

• Régularisation explicite : introduction d'un a priori sur la solution :

- solution non régularisée :

$$\text{minimisation de } d(p,Rf)$$

- solution régularisée :

$$\text{minimisation de } d_1(p,Rf) + \lambda d_2(f,f_a)$$

a priori régularisant

➡ solution compromis entre la fidélité aux mesures et l'a priori

• Exemples d'a priori régularisants :
- distribution de f connue (Poisson, Gauss)
- image lisse
- image présentant des discontinuités

Effet de la régularisation

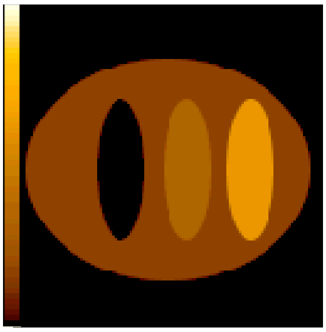
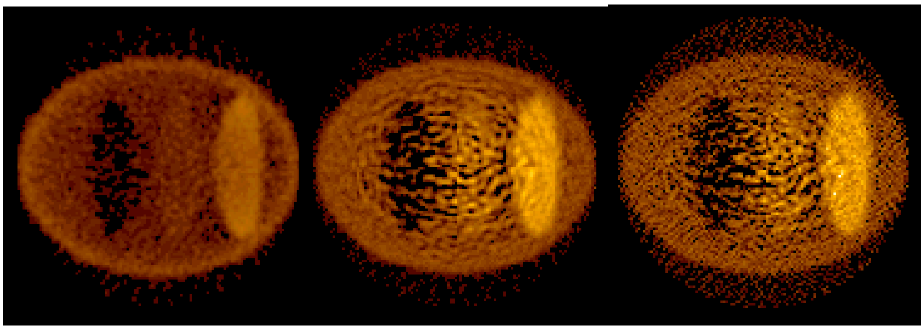
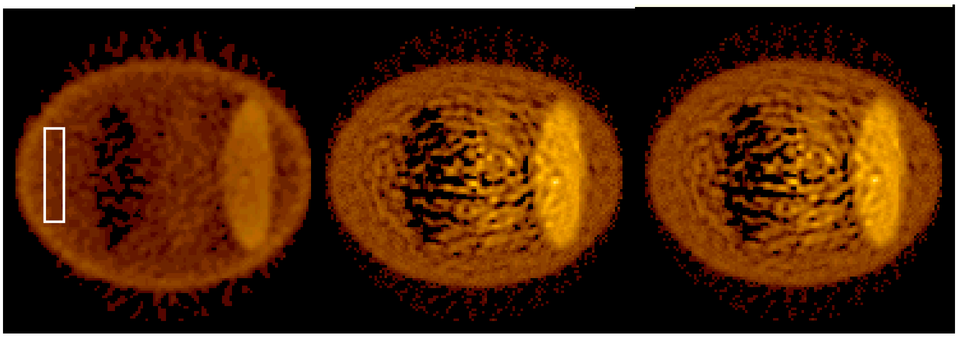


image idéale

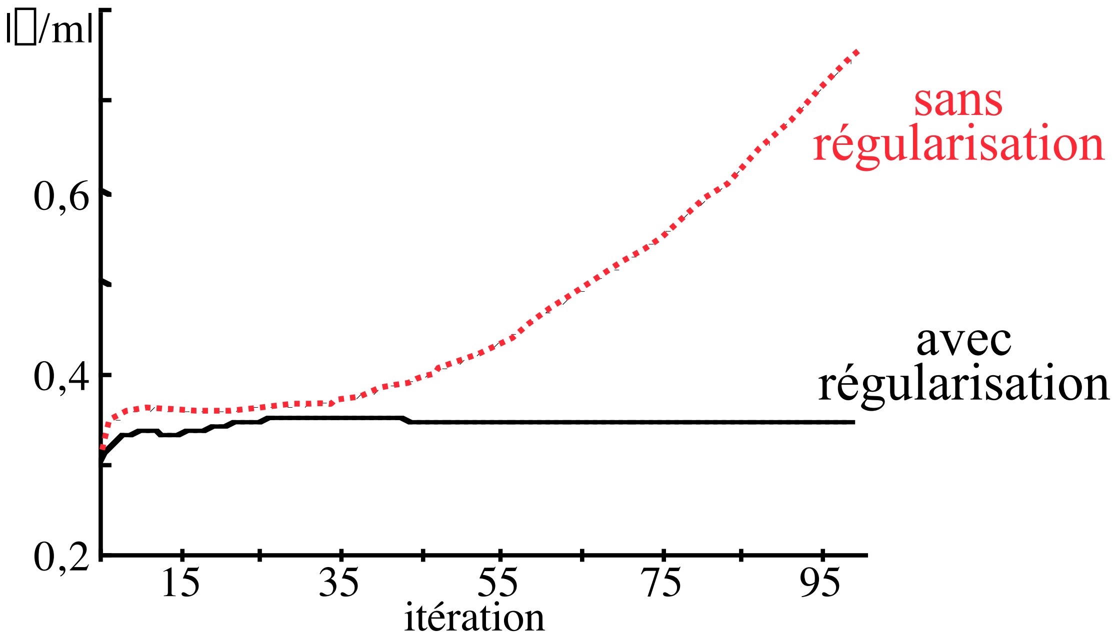
sans régularisation



avec régularisation



itérations : 0 30 80



Interprétation probabiliste de la régularisation

- Méthodes statistiques de reconstruction :
  Chercher f la plus probable compte tenu des projections p observées

- Interprétation probabiliste :
  Maximiser prob(f|p) : probabilité avoir l'image f quand les projections valent p

- Théorème de Bayes :

probabilité a priori de l'image f

probabilité a priori des projections p

$$\text{prob}(f|p) = \text{prob}(p|f) \,.\, \text{prob}(f) \,/\, \text{prob}(p)$$

probabilité de mesurer les projections p pour une image f
= vraisemblance des projections p

projections connues ⇒ prob(p) = 1
pas d'hypothèse a priori sur f ⇒ prob(f) = 1

alors :

$$\text{prob}(f|p) = \text{prob}(p|f)$$

⇕

maximiser prob(f|p) = maximiser la vraisemblance prob(p|f)
= minimiser l'écart entre projections calculées et observées

Algorithmes associés à l'interprétation probabiliste

• Régularisation

probabilité a priori
de l'image f ≠ 1

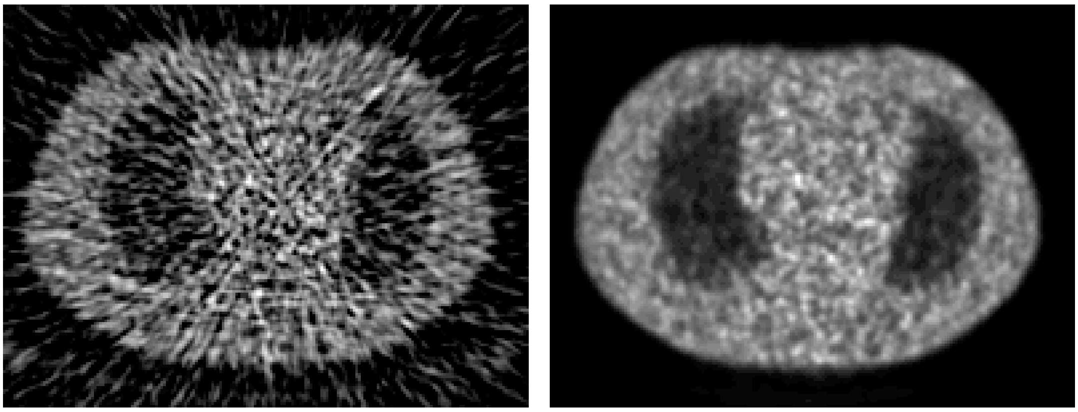
$$\text{prob}(f|p) = \text{prob}(p|f) \,.\, \text{prob}(f)$$

probabilité a posteriori
de l'image f

méthodes MAP (maximum a posteriori)
versions régularisées :
MLEM □ MAP-EM

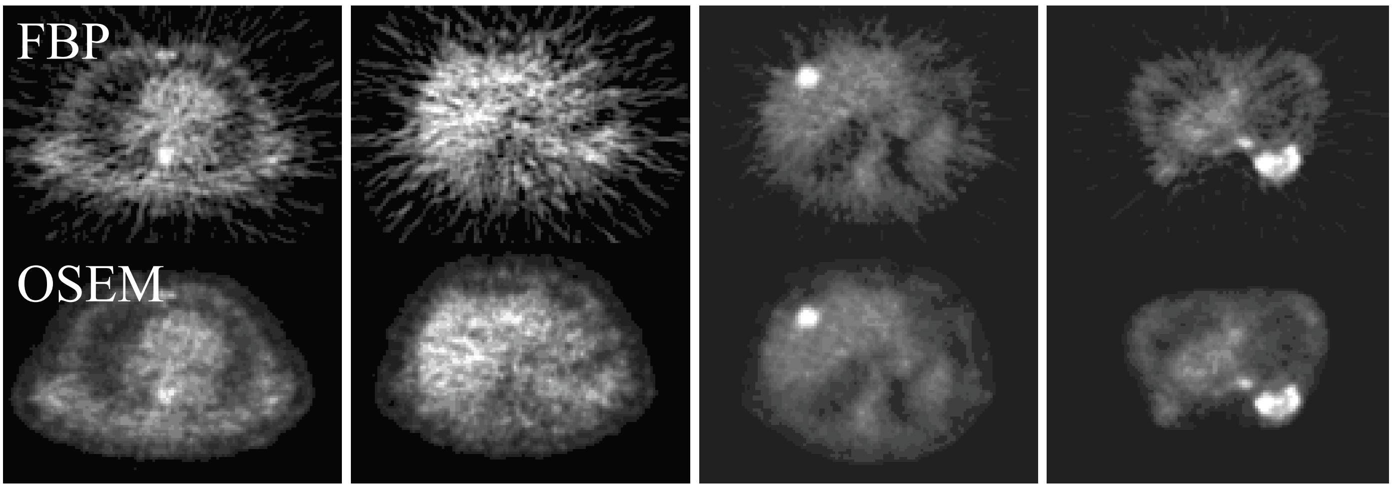
Reconstruction analytique ou itérative ?

Tomographie de transmission PET



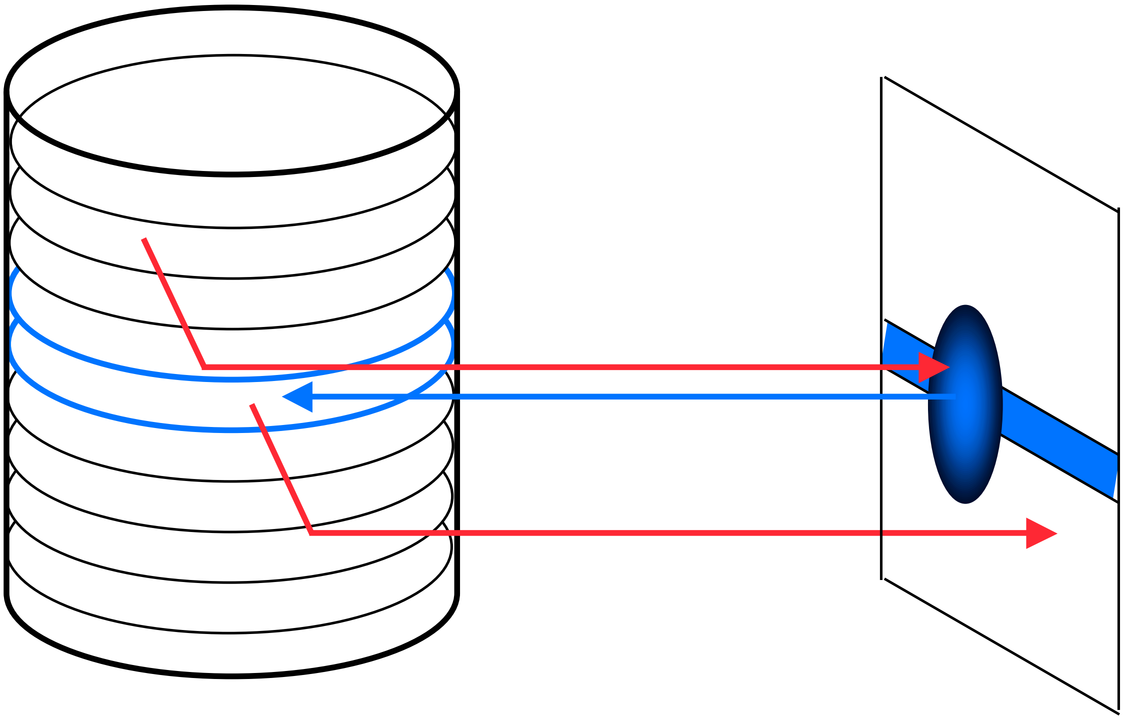
rétroprojection filtrée   algorithme ML

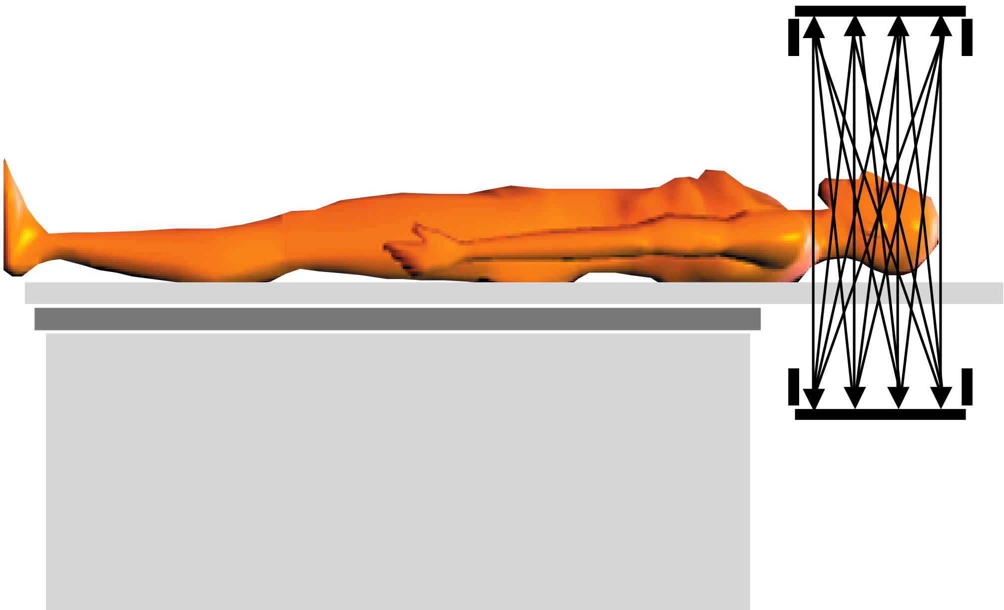
Tomographie d'émission PET



- Algorithmes itératifs par rapport à rétroprojection filtrée (FBP)
  - * réduction des artefacts de raies
  - * temps de calculs accrus
  - * possible compensation des phénomènes parasites via une modélisation adéquate dans le projecteur R (diffusion, atténuation, fonction de réponse du détecteur)
  - * possible modélisation des caractéristiques statistiques des données

Au delà de la reconstruction 2D…





Solution : « fully 3D reconstruction »

Trois approches de reconstruction 3D complète

• Méthode analytique
3D FBP : généralisation de la rétroprojection filtrée au 3D

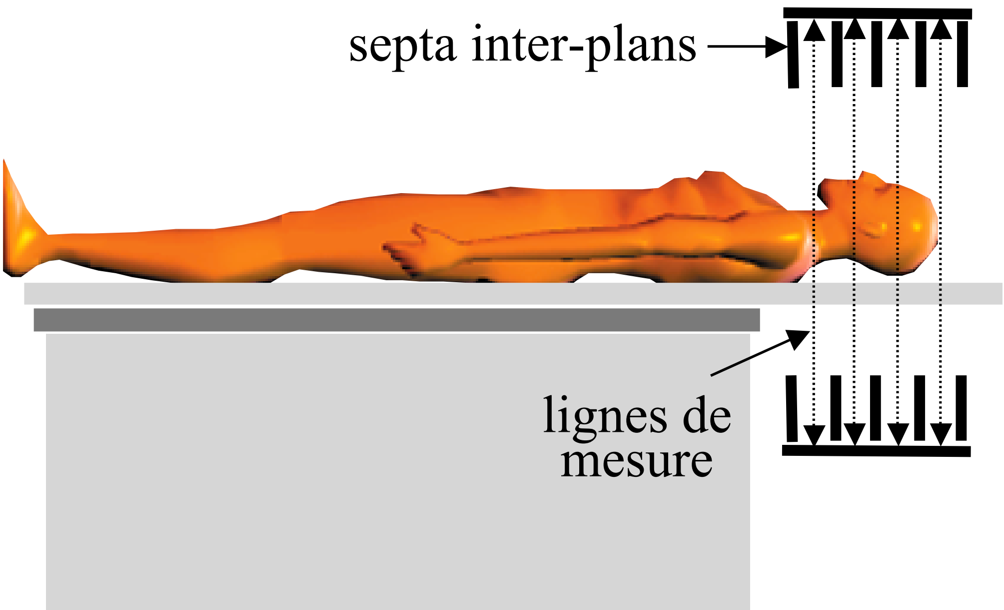
• Méthodes de rebinning
réorganisation des données pour se ramener à la configuration de reconstruction 2D

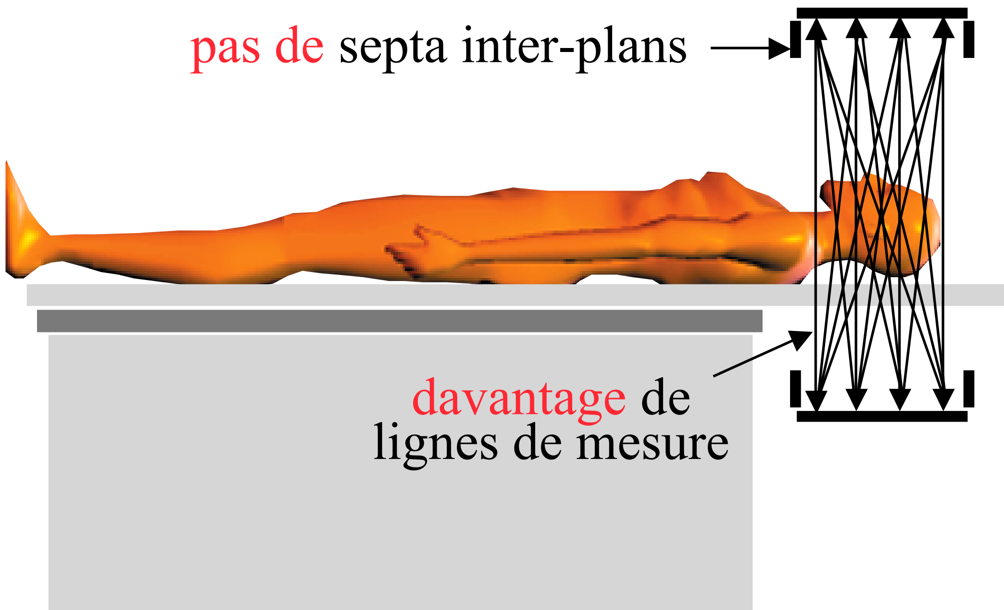
• Méthodes discrètes itératives
estimation d'un projecteur 3D

Méthodes analytiques de reconstruction 3D

• 3D FBP : généralisation de la rétroprojection filtrée au 3D :

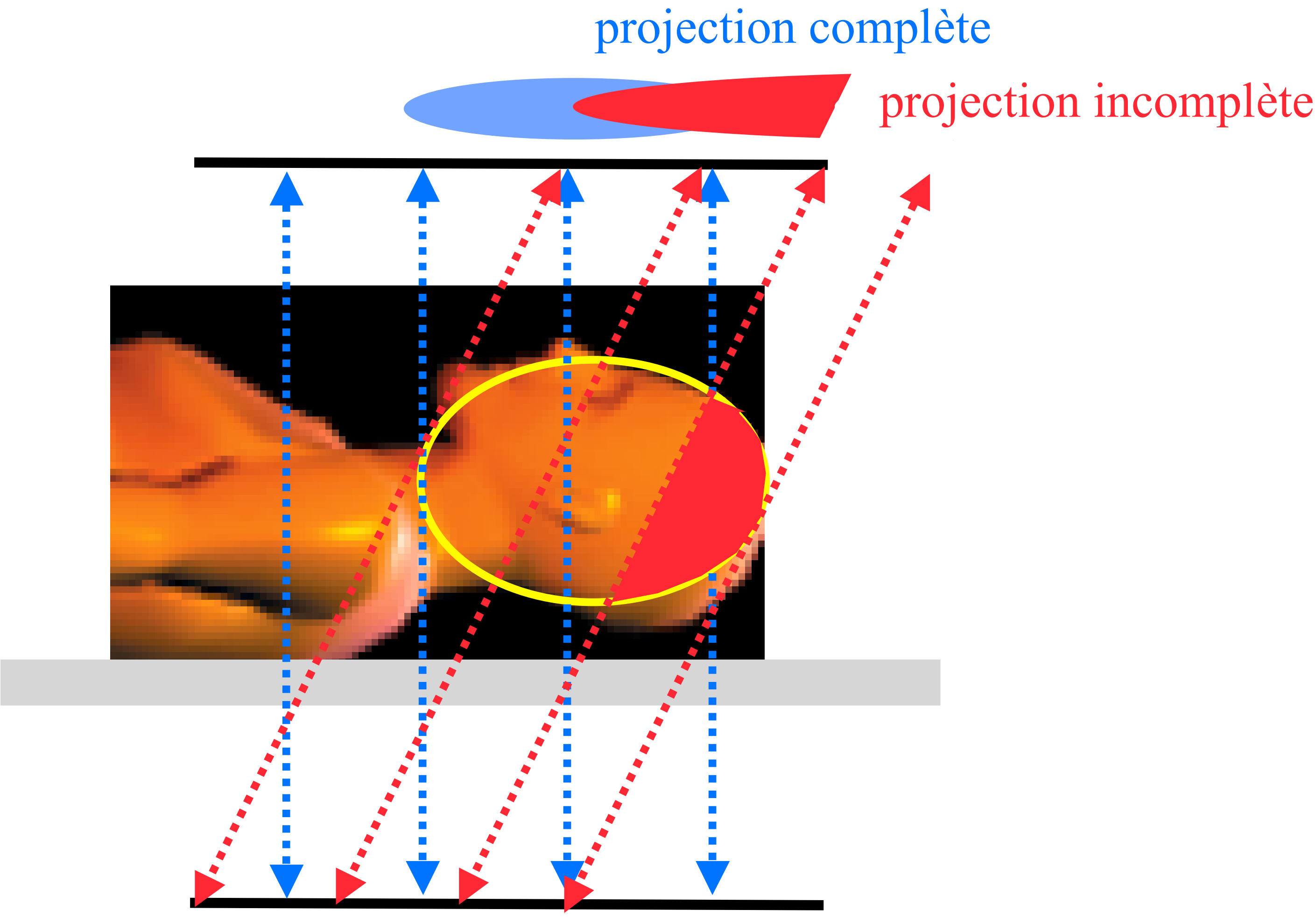
- prend en compte la redondance des données



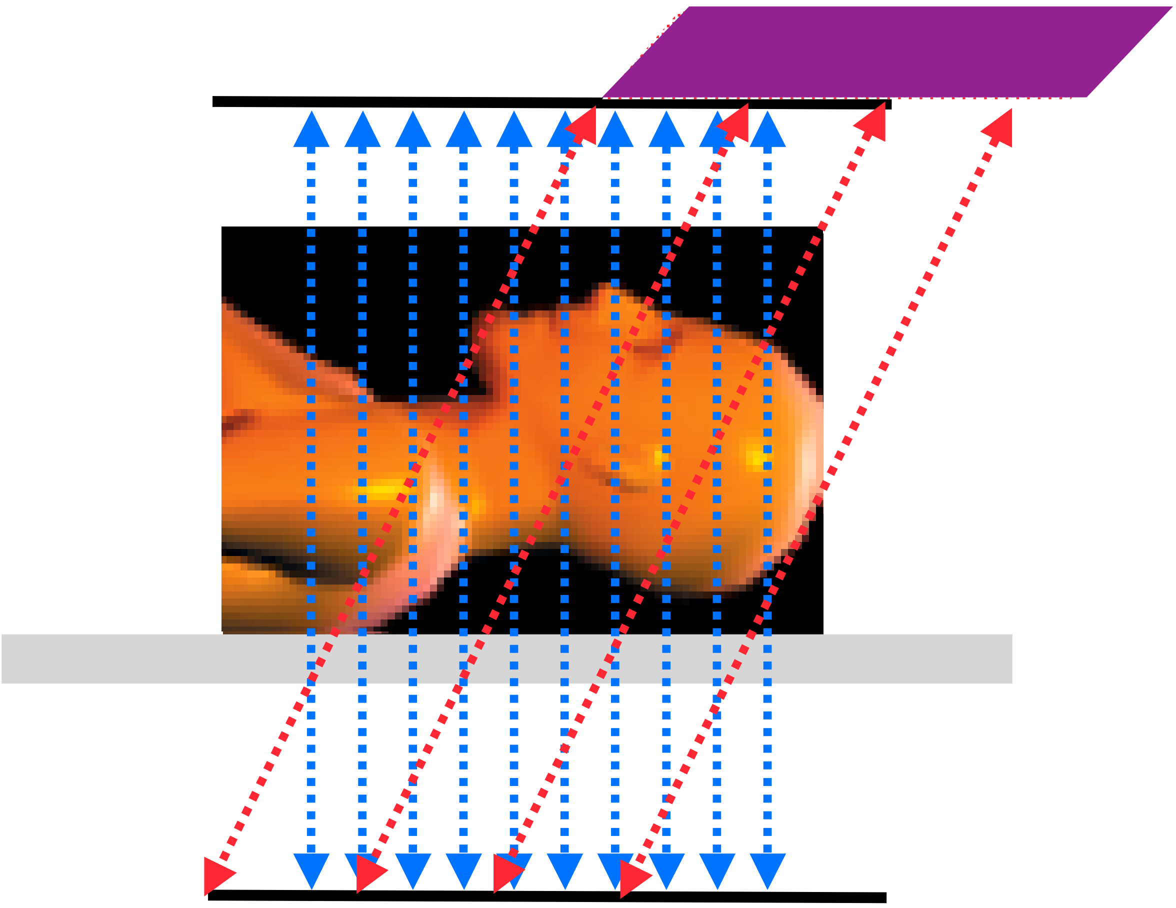


- nécessite des projections complètes

Notion de données complètes



Reprojection 3D traitant des données incomplètes



• Extraction des données 2D (non prise en compte des LOR obliques)

• Reconstruction d'une première estimée de l'objet par FBP 2D

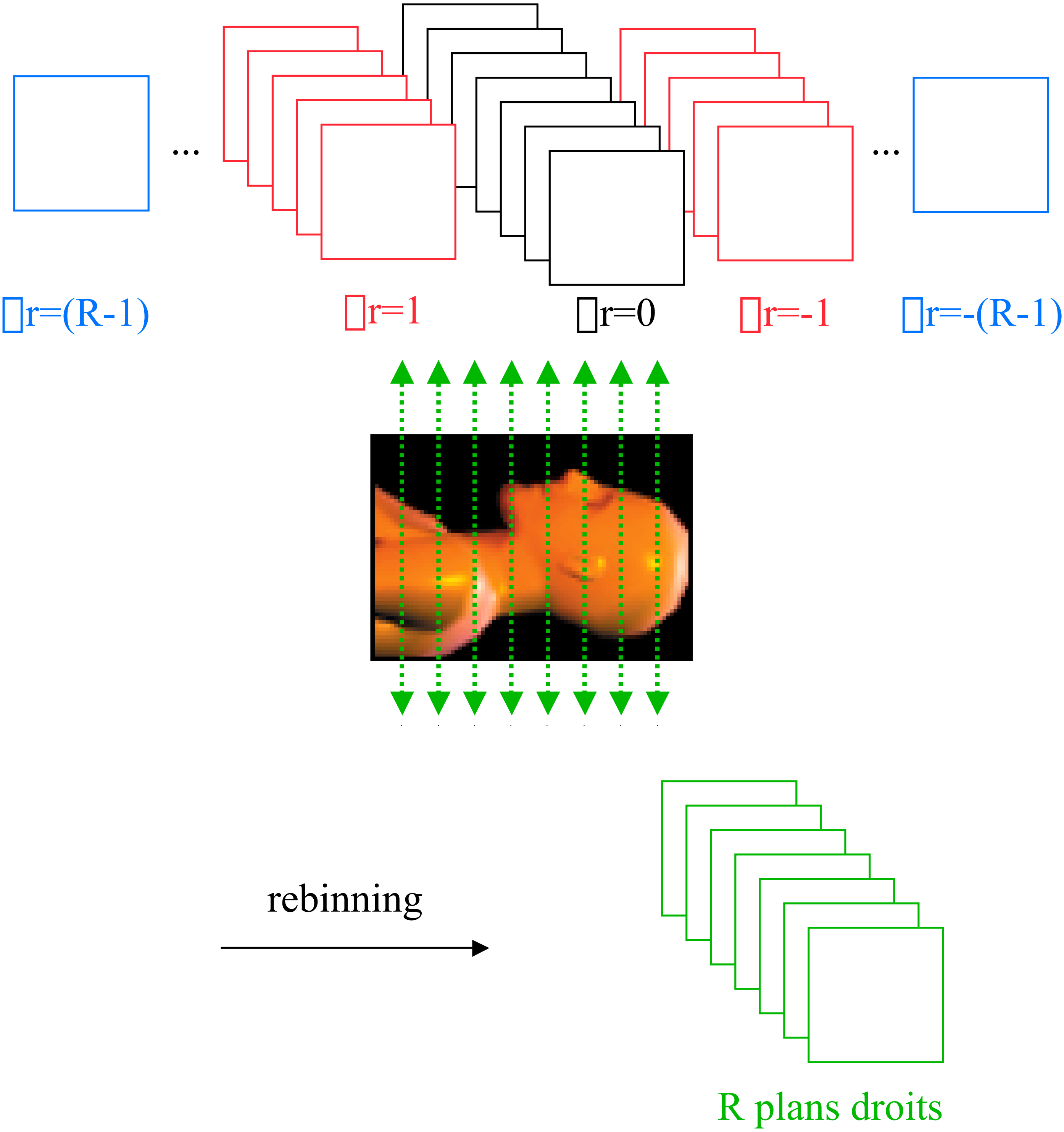
• Estimation des données tronquées en reprojetant l'objet estimé

• Fusion des données estimées et des données mesurées

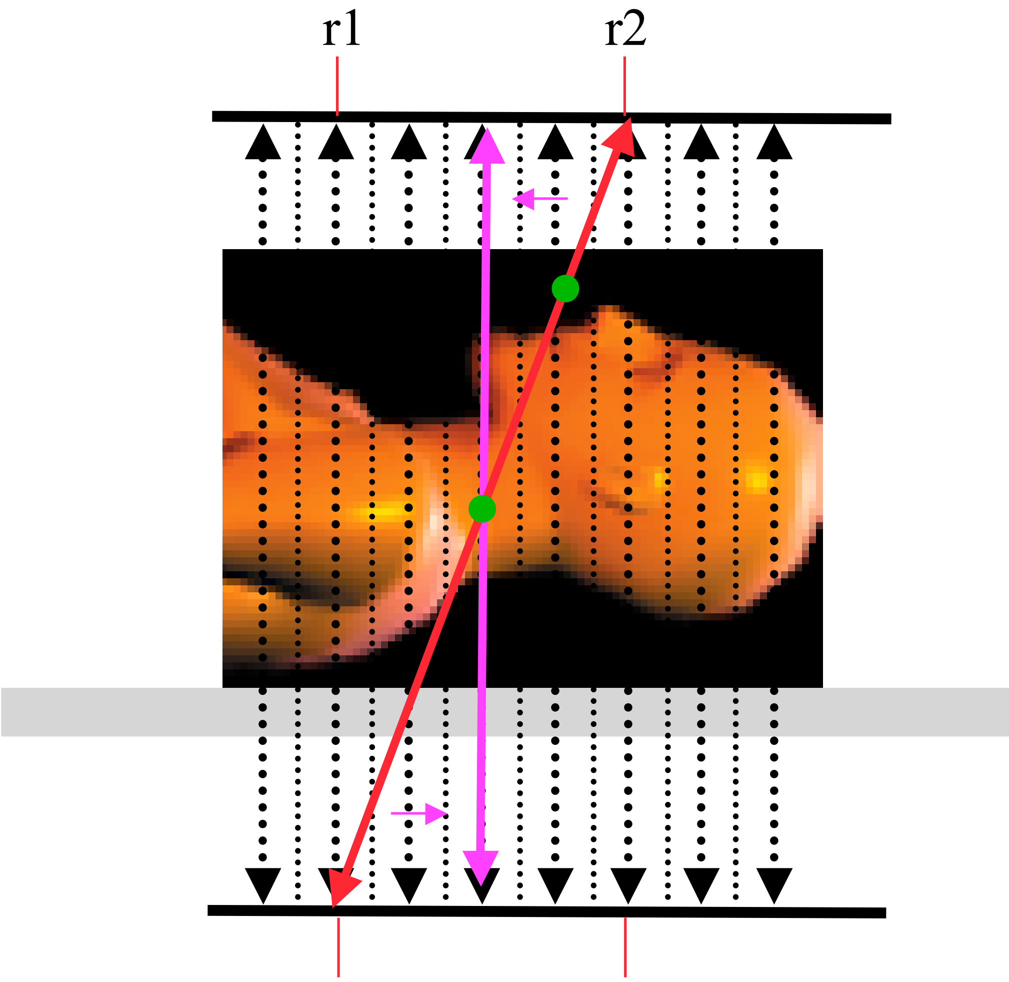
• Reconstruction par 3D FBP

Méthodes de rebinning

- A partir des R^2 sinogrammes (R nombre de couronnes), estimation de 2R-1 sinogrammes correspondant aux plans droits



Single slice rebinning



r_rebin = (r1+r2)/2

Autre technique de rebinning : Fourier rebinning

Méthodes discrètes itératives

• Aucune différence conceptuelle avec l'approche 2D

$$p = R\,f$$

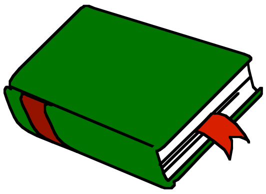
projections acquises — opérateur de projection — objet à reconstruire

• Challenges :

- taille du projecteur (ou matrice de transition) (plus de 10 millions de LOR en PET 3D)

- estimation du projecteur pour rendre compte correctement des phénomènes 3D affectant les données mesurées (diffusion, réponse du détecteur, sensibilité variable du détecteur dans la direction axiale).

Historique



• 1917 : Johann Radon : “De la détermination des fonctions à partir de leurs intégrales selon certaines directions”
⇨ travaux confinés au cercle des mathématiciens

• 1956 : Bracewell : démonstration des relations entre transformée de Fourier et transformée de Radon

• 1963 : premières applications de la tomographie médicale
- Kuhl, prof de radiologie : premières images tomographiques par rétroprojection simple
- Cormack, physicien : application des travaux de Radon aux acquisitions par rayons X

• 1970 : publication de la première image de tomodensitométrie X

• 1970-73 : mise au point du premier scanner X par Cormack et Hounsfield

• 1979 : Attribution du prix Nobel de Médecine à Cormack et Hounsfield

Quelle méthode pour quelle application ?

• Scanner X
 * rétroprojection filtrée car excellent rapport signal-sur-bruit

• Tomographie d'émission monophotonique
* routine clinique : longtemps rétroprojection filtrée seulement
* de plus en plus fréquemment : algorithmes itératifs, en particulier OSEM, du fait de :
  - la réduction des artefacts de raies
  - les plus grandes possibilités en terme de quantification
  - le traitement plus efficace de données présentant une faible statistique (10 000 moins d'événements qu'en scanner X)
  - l'augmentation de la puissance des calculateurs qui rend la mise en œuvre d'algorithmes itératifs compatible avec une utilisation clinique

• Tomographie d'émission de positons
* routine clinique : rétroprojection filtrée
* en cours de développement : algorithmes itératifs du fait de :
  - la possibilité de traiter totalement la nature 3D de la reconstruction sans factorisation et d'exploiter au mieux les nouveaux dispositifs d'acquisition
  - l'augmentation de la puissance des calculateurs

Pour en savoir plus ...

• Analytic and iterative reconstruction algorithms in SPECT. Journal of Nuclear Medicine 2002, 43:1343-1358

• Rétroprojection filtrée et reconstruction itérative : rappels théoriques et propriétés des deux approches sur :
http://www.guillemet.org/irene