

# DES Médecine Nucléaire

---

## Reconstruction tomographique

Irène Buvat  
U1023 Inserm/CEA/Université Paris Sud  
ERL 9218 CNRS  
CEA/SHFJ, Orsay

[irene.buvat@u-psud.fr](mailto:irene.buvat@u-psud.fr)  
<http://www.guillemet.org/irene>

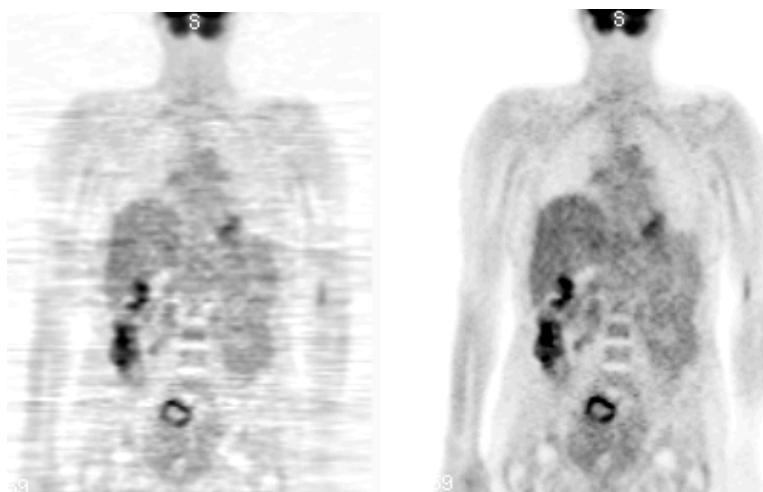
Mars 2015

# Objectifs pédagogiques

---

## Démystifier la reconstruction tomographique

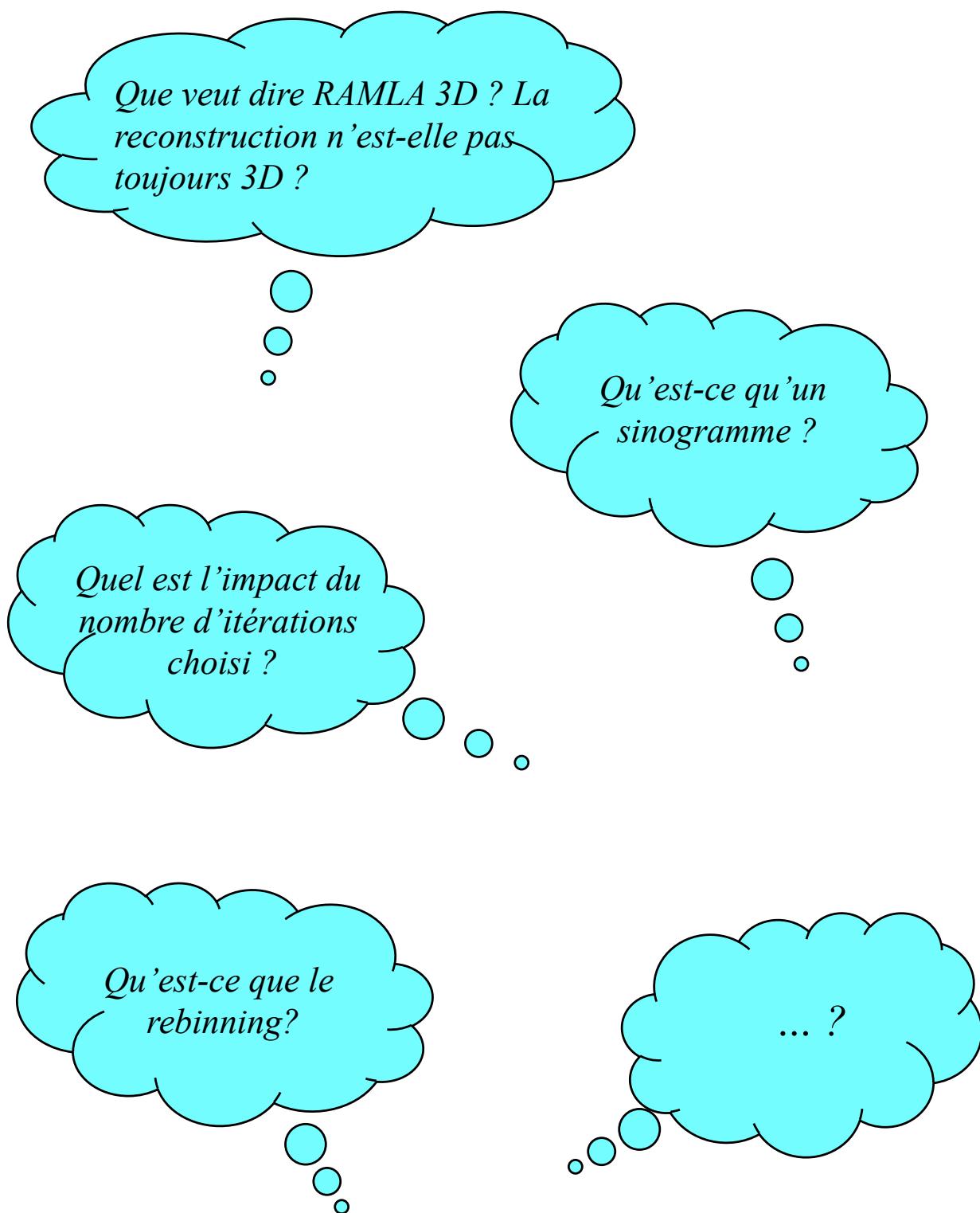
- Comprendre comment les images SPECT et PET sont obtenues à partir des signaux délivrés par les gamma caméras ou tomographes PET
- Comprendre les différences entre les algorithmes de reconstruction tomographique proposés sur les consoles
- Comprendre la signification des paramètres sur lesquels on peut jouer pour améliorer la qualité des images reconstruites



# Objectifs pédagogiques

---

Apporter des réponses à des questions pratiques



# Vos questions sur la reconstruction ...

---



# Plan

---

- Introduction
  - La tomographie
  - Tomographie en transmission
  - Tomographie en émission
  - Spécificité du problème de reconstruction tomographique
- Notions de base
  - Projection
  - Transformée de Radon
  - Sinogramme
- Méthodes de reconstruction analytique
  - Principe
  - Théorème de la coupe centrale
  - Rétroprojection filtrée
  - Filtres
- Méthodes de reconstruction itérative
  - Principe et méthodes
  - Opérateur de projection  $R$
  - Méthodes, MLEM, OSEM, RAMLA
  - Régularisation
- Reconstruction « fully 3D »
  - Principe
  - Méthodes de rebinning
- Questions / Discussion

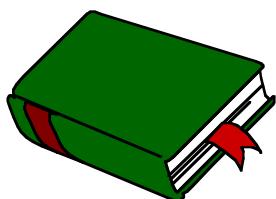
# Avertissement

---

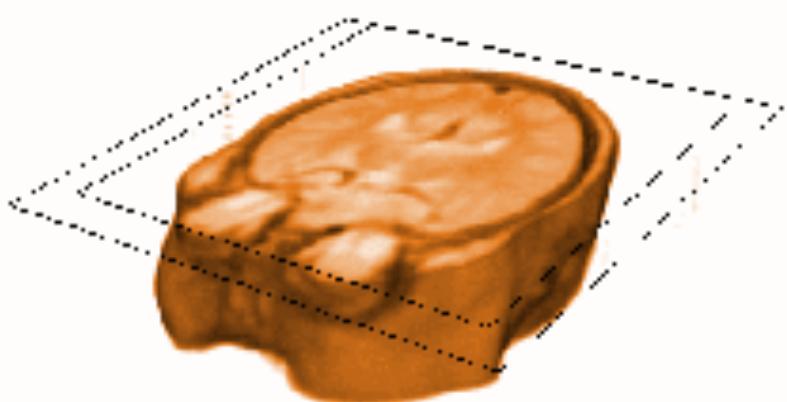


# Introduction : la tomographie

---



- Tomos : coupe, section (grec)
  - Graphia : écrire
- 
- Cartographie d'un paramètre **interne** à un objet, selon un ou plusieurs plans de coupes, à partir de mesures externes et de calculs

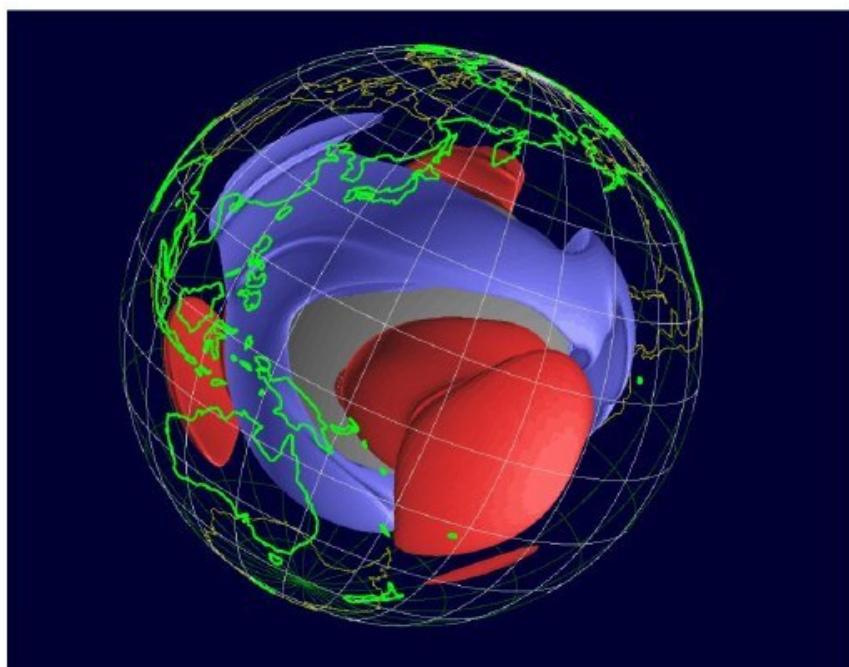


# Introduction : la tomographie

---



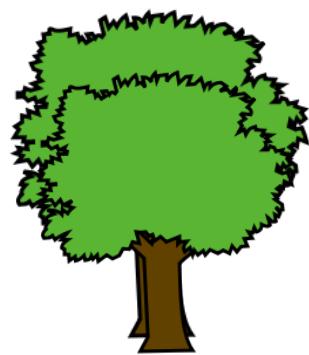
- Un moyen de sonder la matière, lorsqu'on ne peut pas simplement la « découper » ou l'explorer directement, qui a de multiples domaines d'applications, e.g. :
  - contrôle non destructif
  - géophysique (sondage des océans, des couches géologiques)
  - astrophysique
  - imagerie médicale



# Introduction : la tomographie au quotidien (1)

---

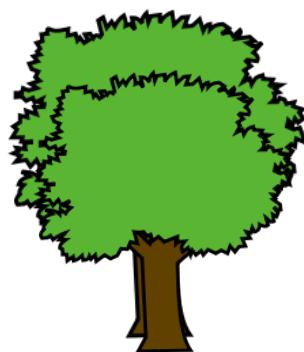
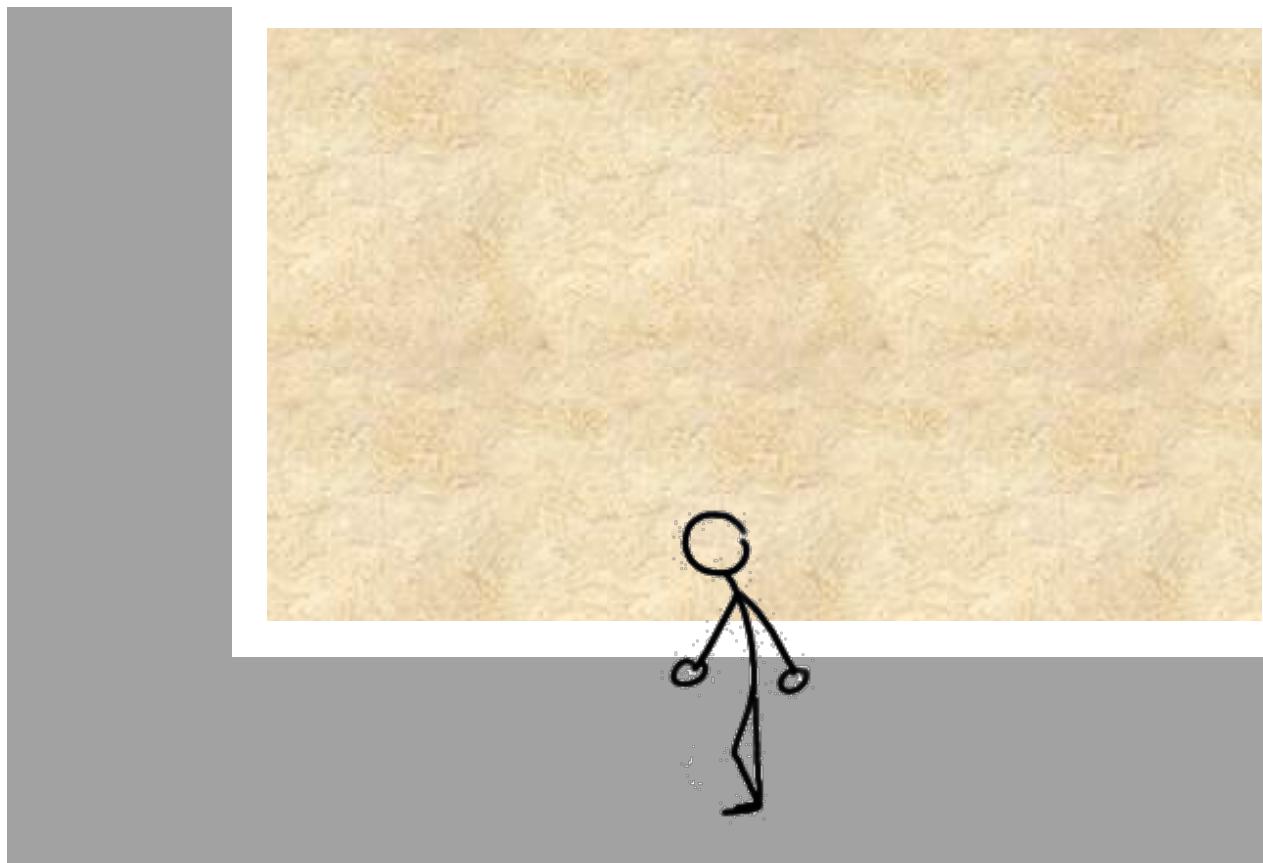
Cartographier un lieu à partir de vues partielles



# Introduction : la tomographie au quotidien (1)

---

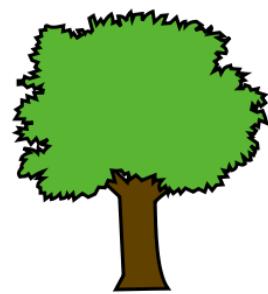
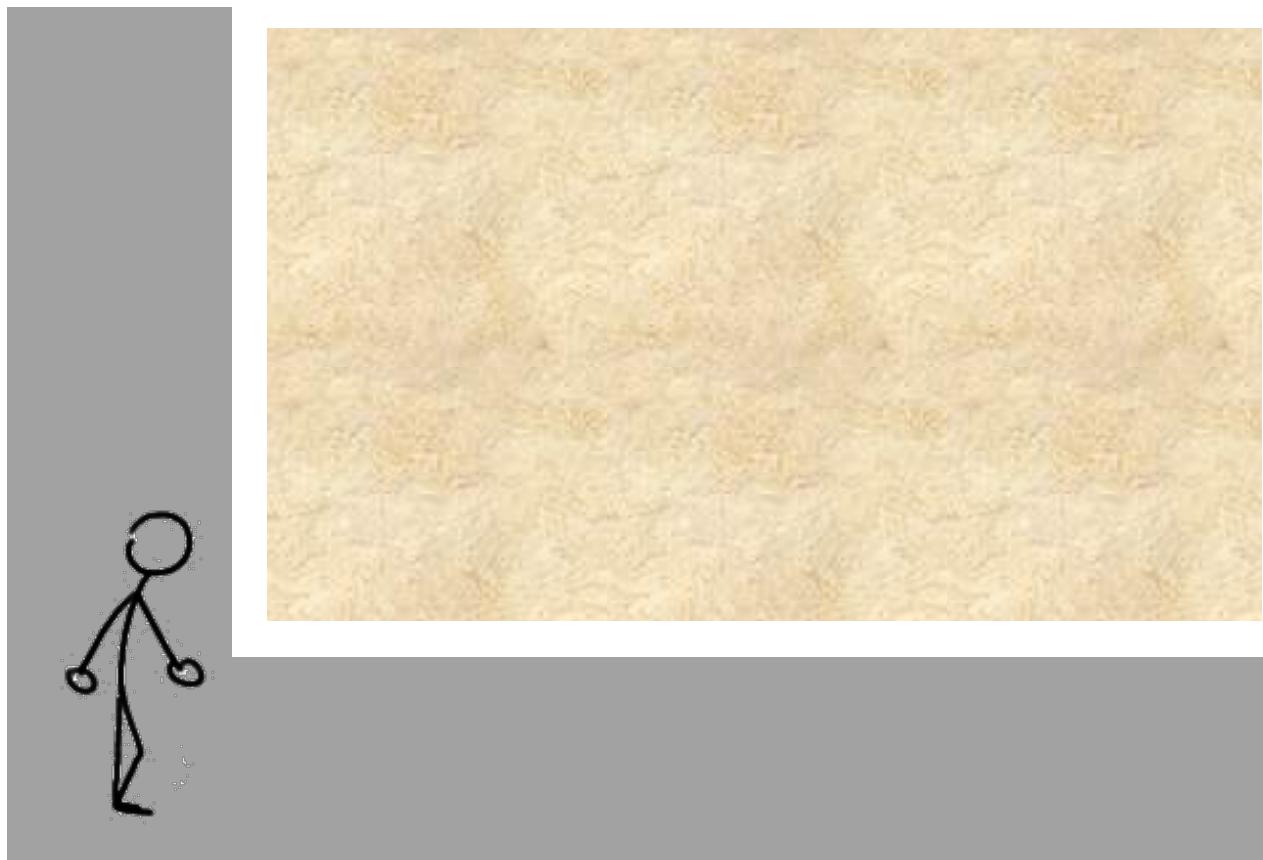
Cartographier un lieu à partir de vues partielles



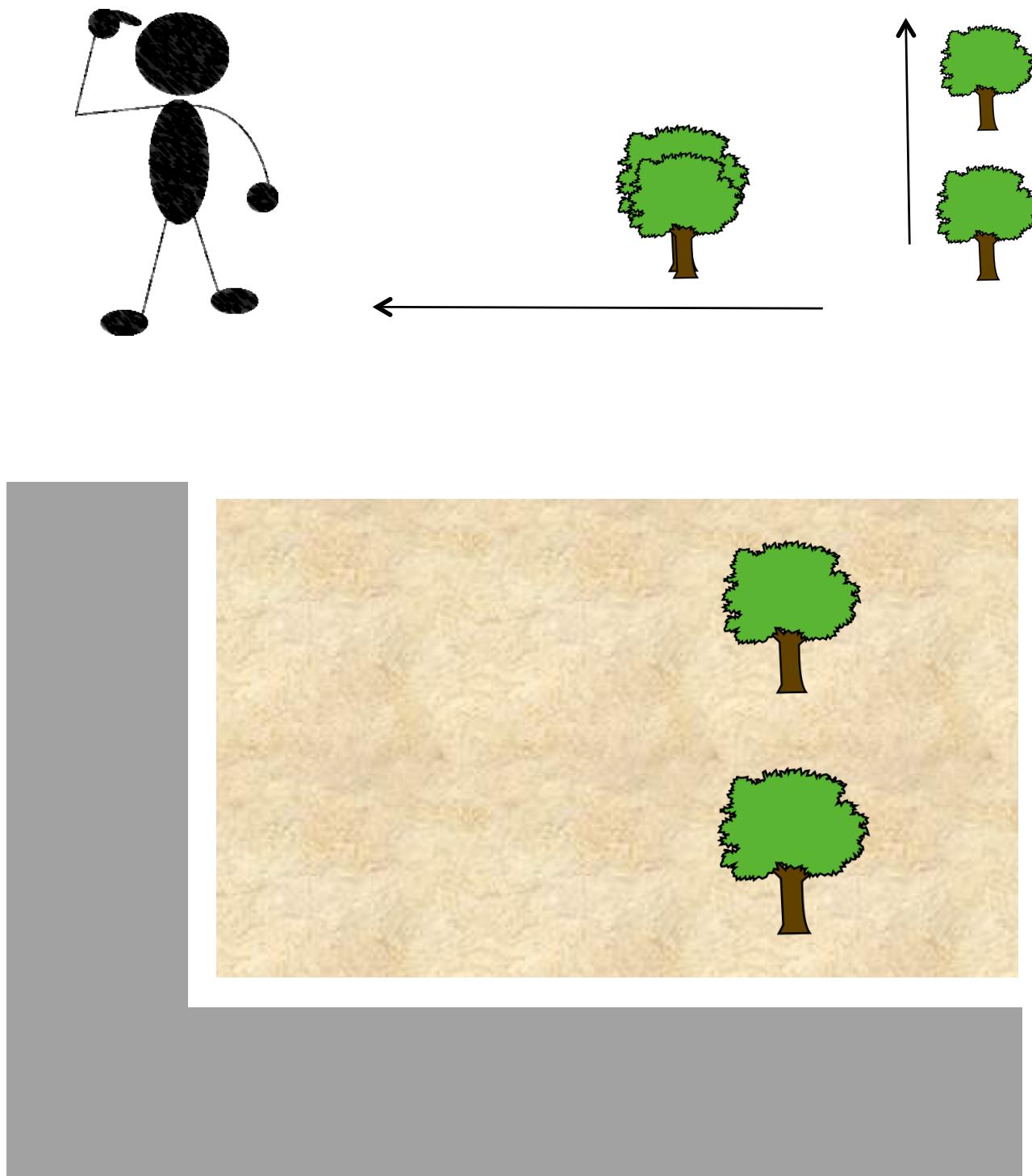
# Introduction : la tomographie au quotidien (2)

---

Cartographier un lieu à partir de vues partielles



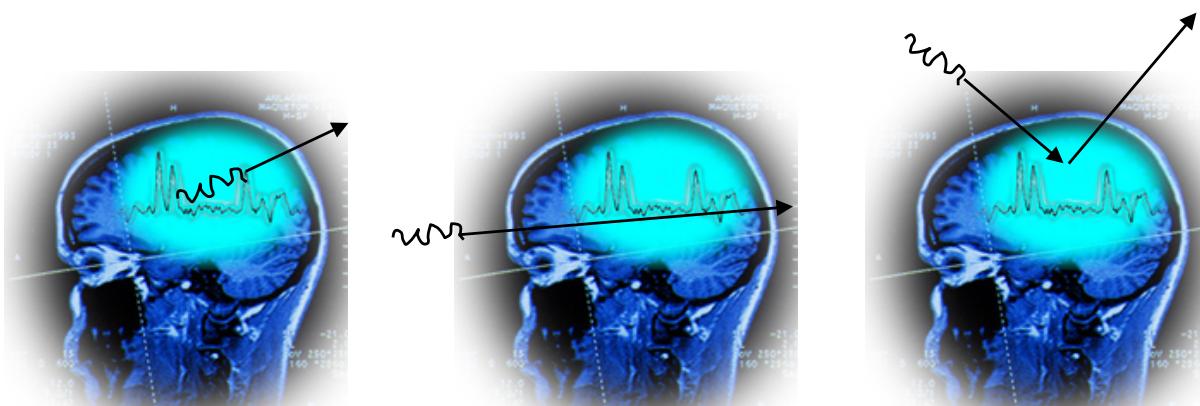
# Introduction : la tomographie au quotidien (3)



La reconstruction tomographique est la manière systématique de résoudre ce type de problème

# La tomographie : principe

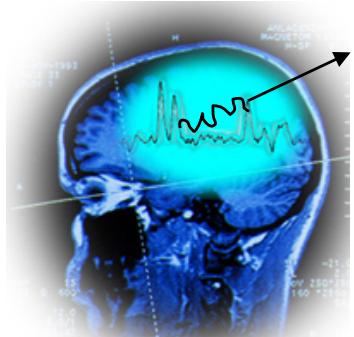
- Mesure de rayonnement émis, transmis ou réfléchi par la matière : **mesure indirecte** du paramètre relatif à l'objet d'intérêt



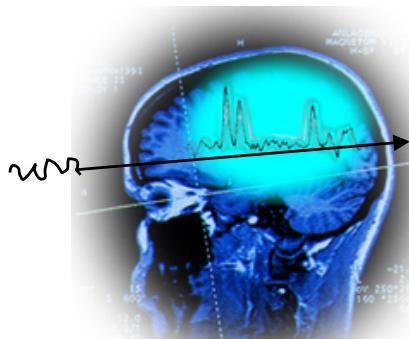
- Traitement de l'information détectée pour estimer le paramètre



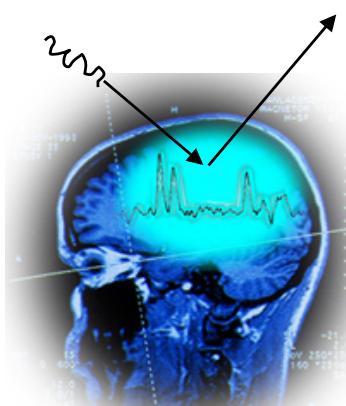
# La tomographie médicale : quelles situations ?



Tomographie .... ?



Tomographie .... ?



Tomographie .... ?

# La tomographie médicale

---

- Mesure de rayonnement émis ou transmis par des tomodensitomètres, gamma caméras ou tomographes à émission de positons (réfléchi = tomographie optique)



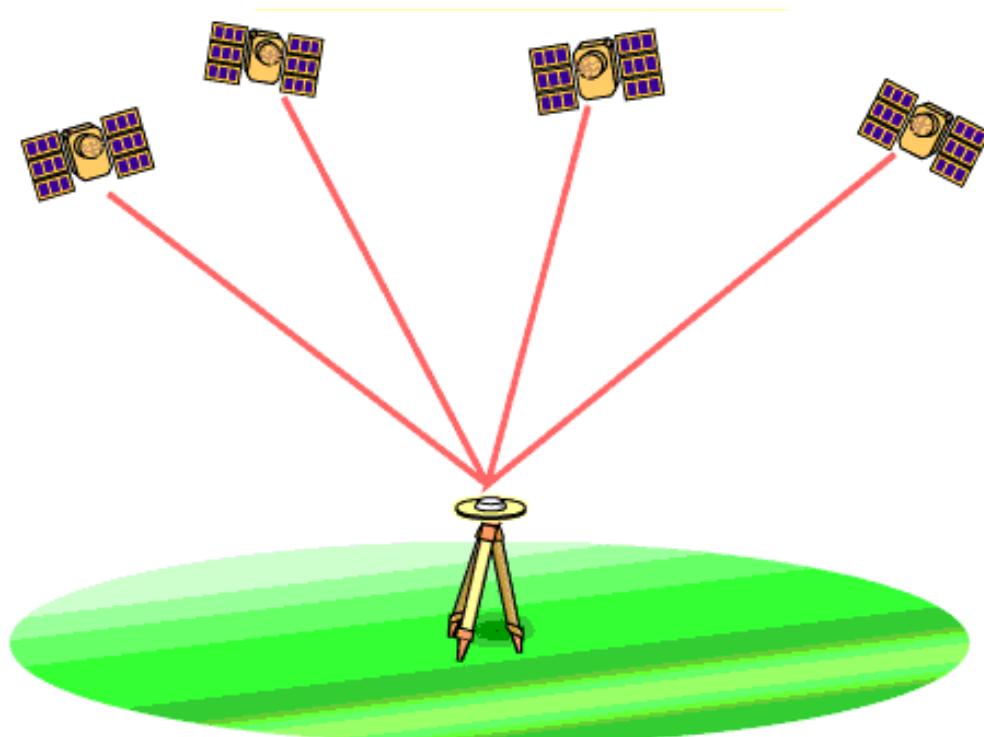
- Traitement de l'information détectée



# Le point clef

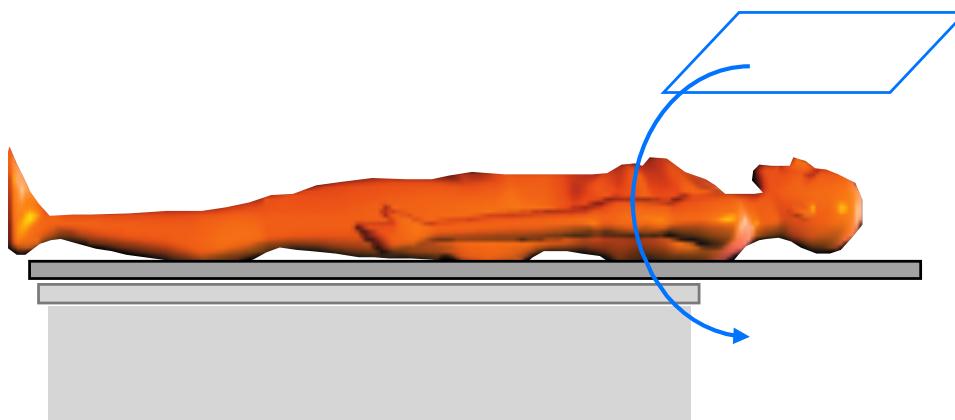
---

- Mesures sous différentes incidences angulaires



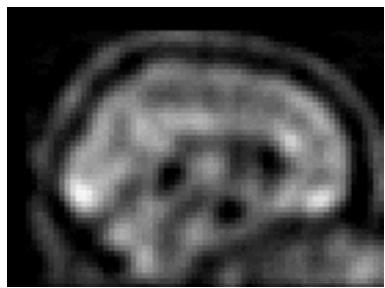
# En imagerie médicale

mesures = projections

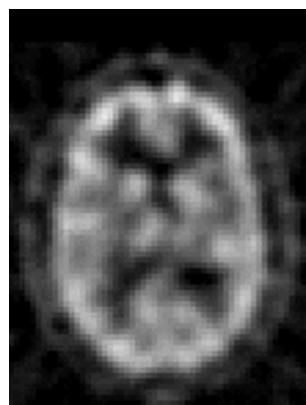


Mesures intégrales sous différentes incidences angulaires  
projections

Traitement de l'information détectée



sagittale



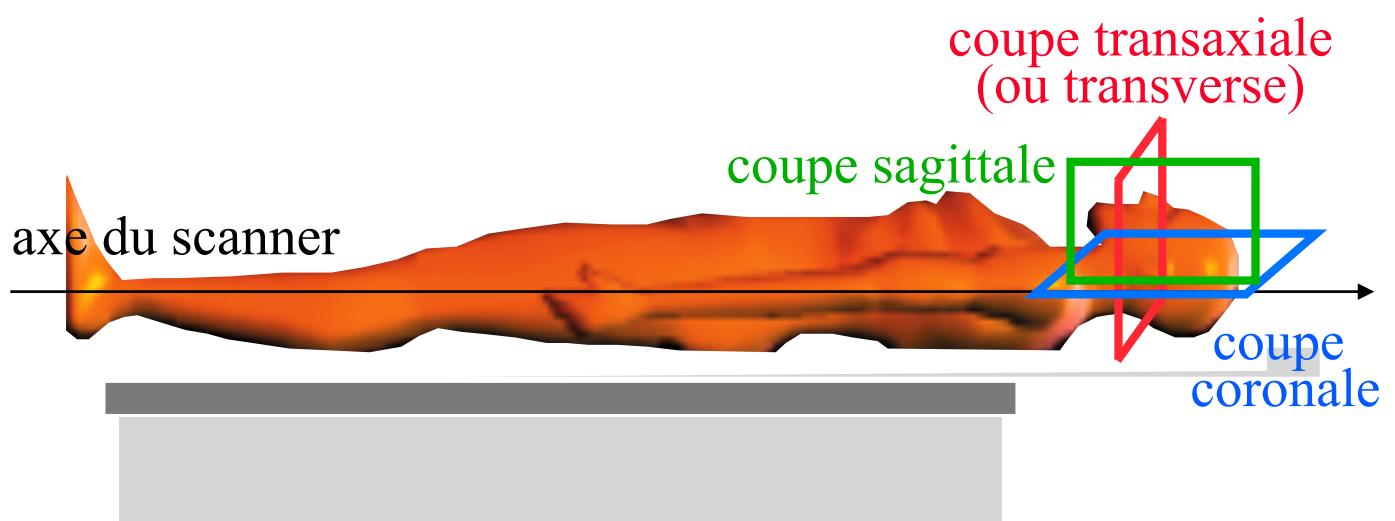
transverse



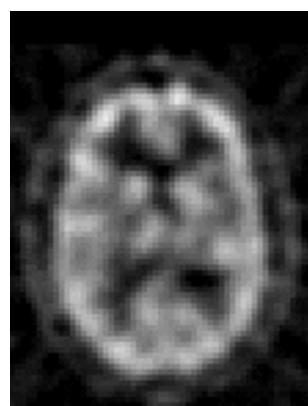
coronale

coupes d'orientation quelconque :  
imagerie 3D

# Coupes tomographiques



sagittale



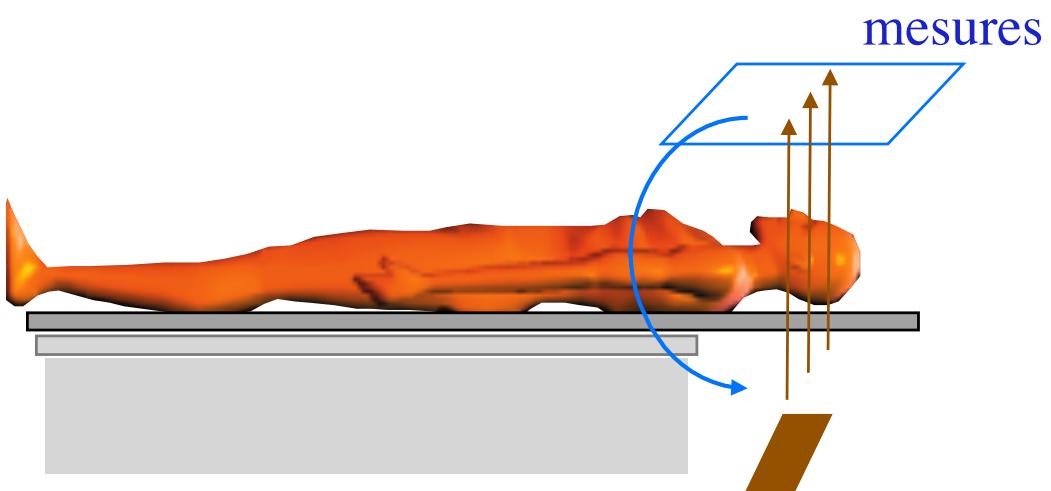
transverse



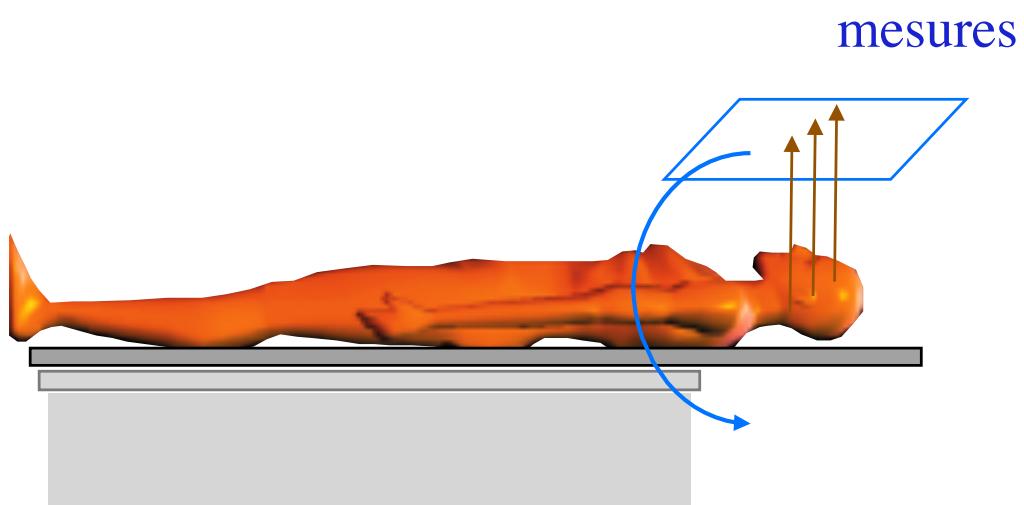
coronale

# Deux types de mesure en imagerie médicale

- Tomographie de transmission

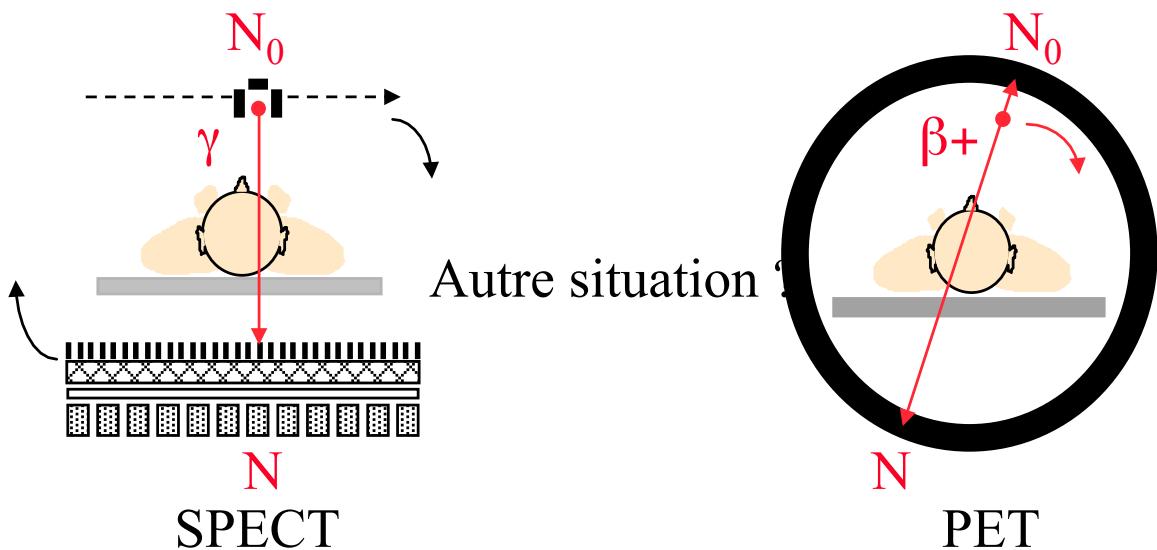
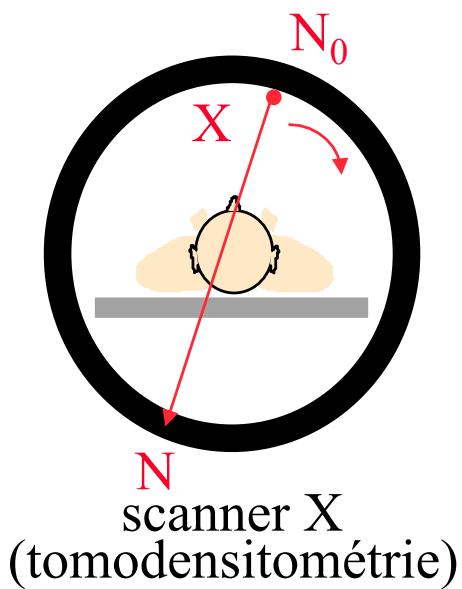


- Tomographie d'émission



# Tomographie de transmission : dispositifs

- Source externe au patient



Donne des informations sur l'atténuation induite par les tissus, donc sur la densité des tissus

# Tomographie de transmission : mesures

- Projection du rayonnement ayant traversé le patient



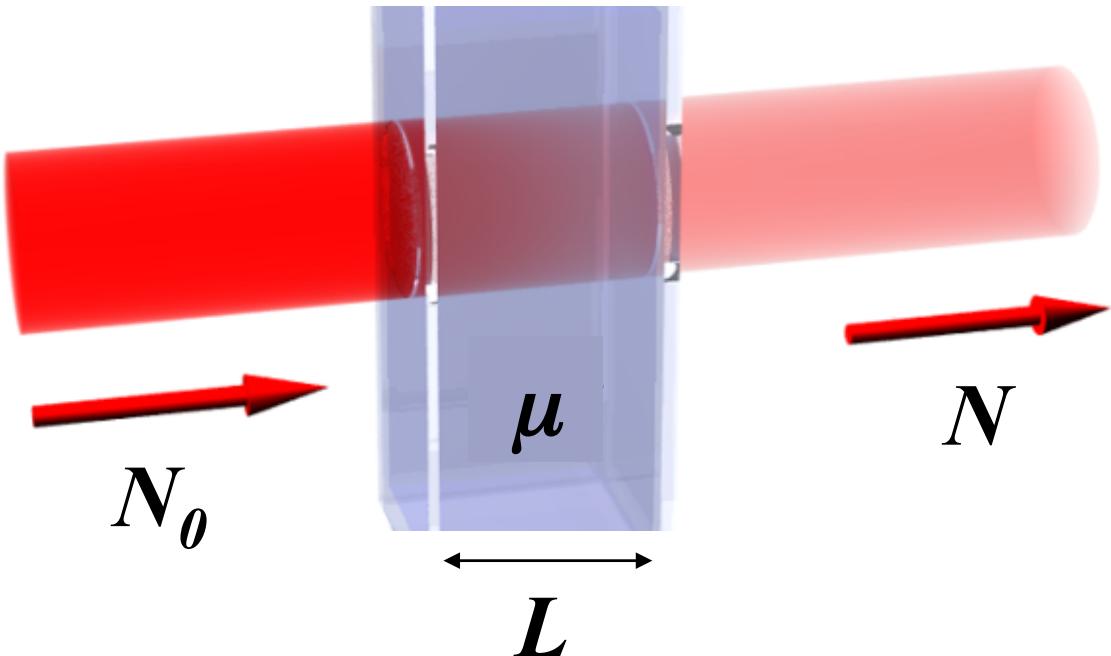
Si signal recueilli  $\sim$  signal source :  
⇒ quasiment pas d'atténuation : poumons ?

Si signal recueilli <<< signal source :  
⇒ beaucoup d'atténuation : os ?

Comment remonter à une information précise ?

# Caractérisation de l'atténuation d'un milieu

- Le coefficient d'atténuation,  $\mu$ , exprimé en  $\text{cm}^{-1}$



$$N = N_0 \exp(-\mu L)$$



Dans l'eau, à 140 keV :  $\mu = 0,15 \text{ cm}^{-1}$

Quel pourcentage de photons de 140 keV après la traversée de 20 cm d'eau ?

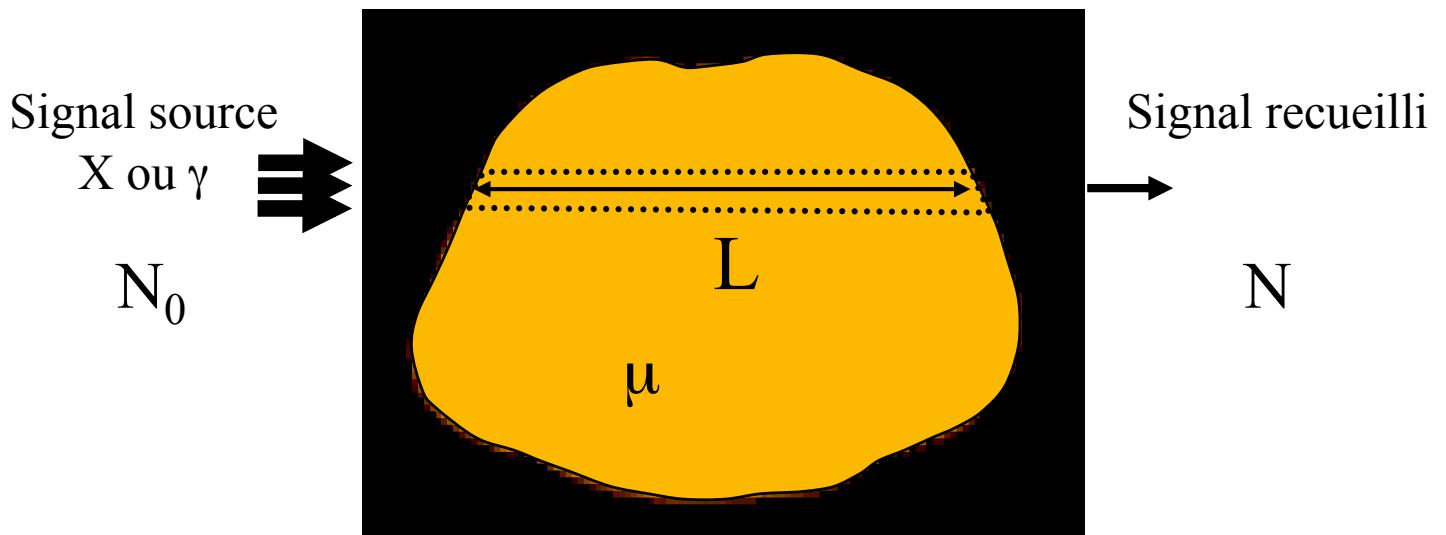
$$N = N_0 \exp(-0,15 \times 20) = 0,05 N_0, \text{ soit } 5\%$$

Quel milieu si on détecte 45% des photons de 140 keV après la traversée de 20 cm de ce milieu ?

$$\begin{aligned} N/N_0 &= 0,45 = \exp(-\mu \times 20) \\ 20 \mu &= -\ln 0,45 \Rightarrow \mu = 0,04 \text{ cm}^{-1} \text{ (poumons)} \end{aligned}$$

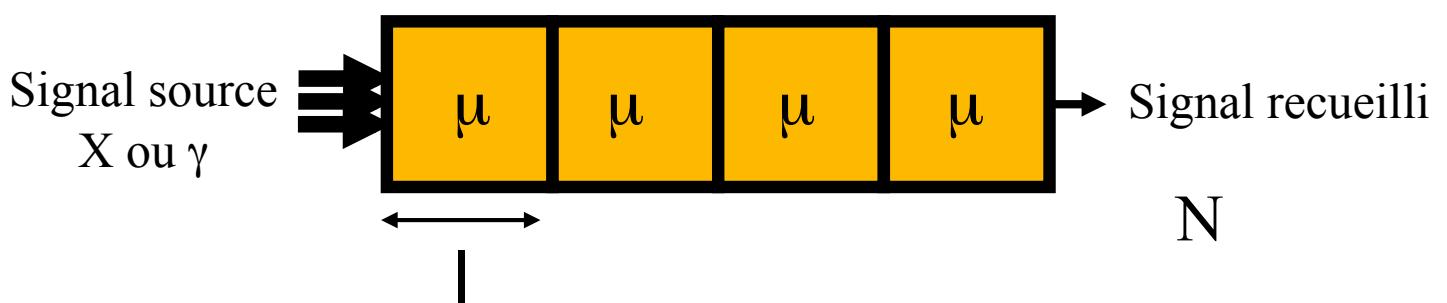
# Modélisation des mesures

- Atténuation d'une source  $\gamma$  ou  $X$  dans un milieu homogène de coefficient d'atténuation  $\mu$  (en  $\text{cm}^{-1}$ )



$$N = N_0 \exp(-\mu L)$$

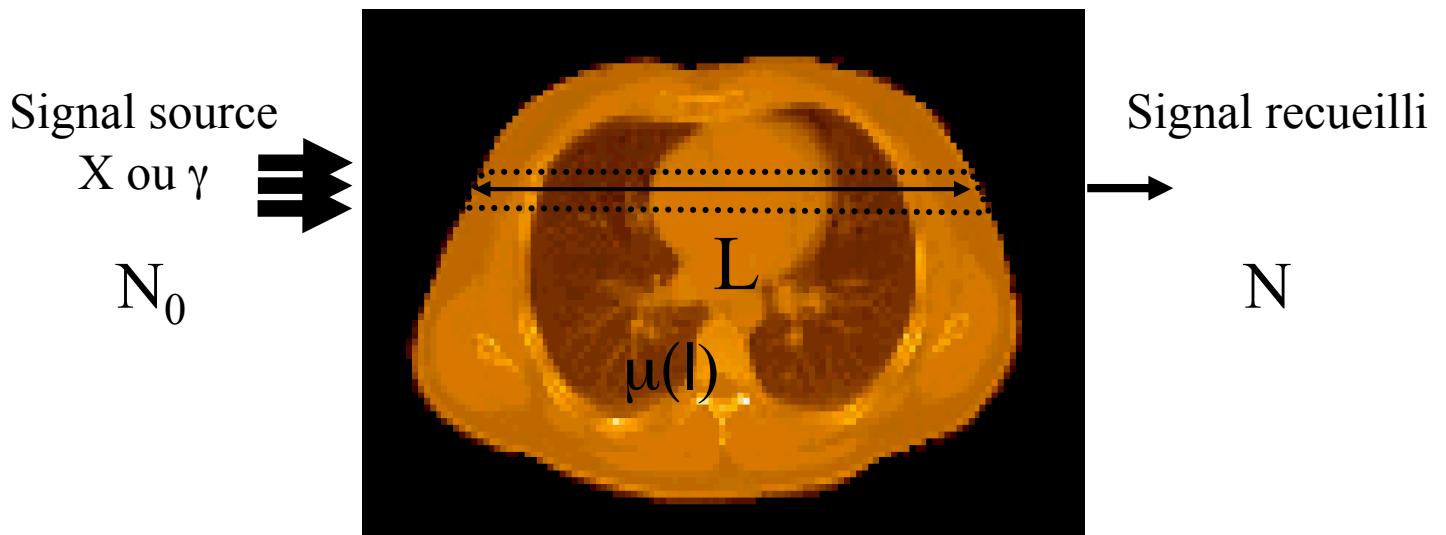
- Formulation discrète :



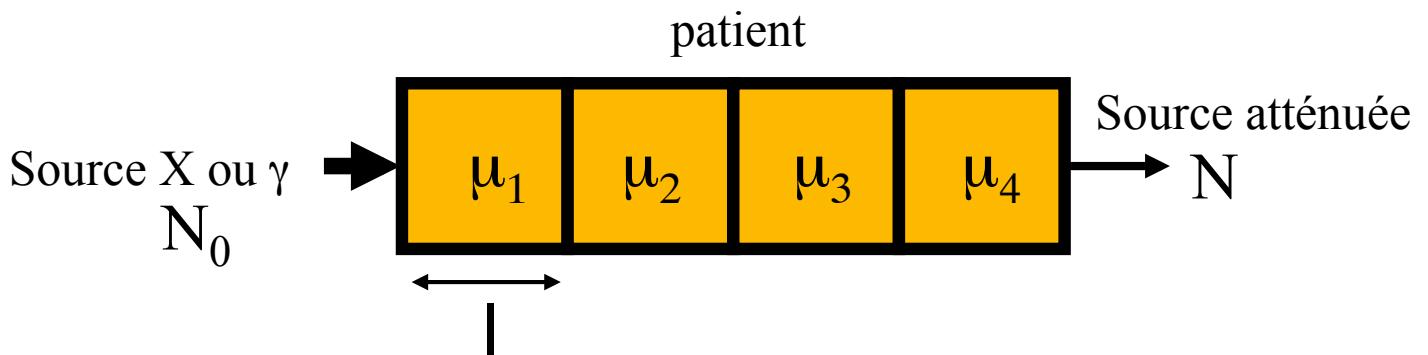
$$\begin{aligned} N &= N_0 \exp(-\mu l) \exp(-\mu l) \exp(-\mu l) \exp(-\mu l) \\ &= N_0 \exp(-4\mu l) = N_0 \exp(-4\mu l) \end{aligned}$$

# Modélisation des mesures

- Atténuation d'une source  $\gamma$  ou X dans un milieu de densité inhomogène



- Formulation discrète

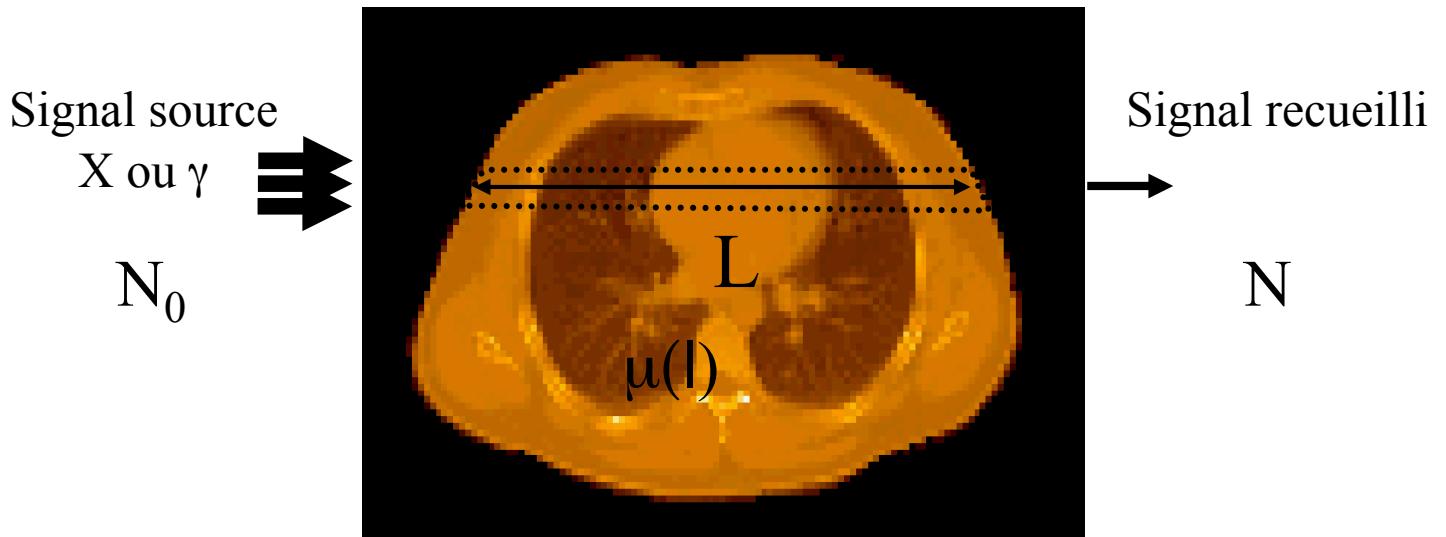


$$\begin{aligned} N &= N_0 \exp[-\mu_1 | -\mu_2 | -\mu_3 | -\mu_4 |] \\ &= N_0 \exp[-(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4)] | \end{aligned}$$

$$N = N_0 \exp\left(- \int_0^L \mu(l) dl\right)$$

## Problème à résoudre

- Trouver  $\mu(l)$ , qui représente la cartographie du coefficient d'atténuation dans le milieu



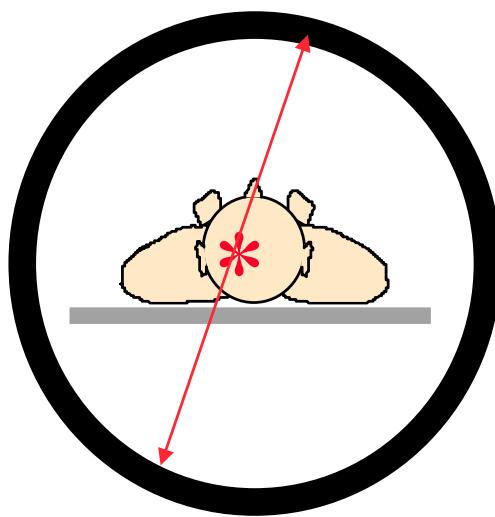
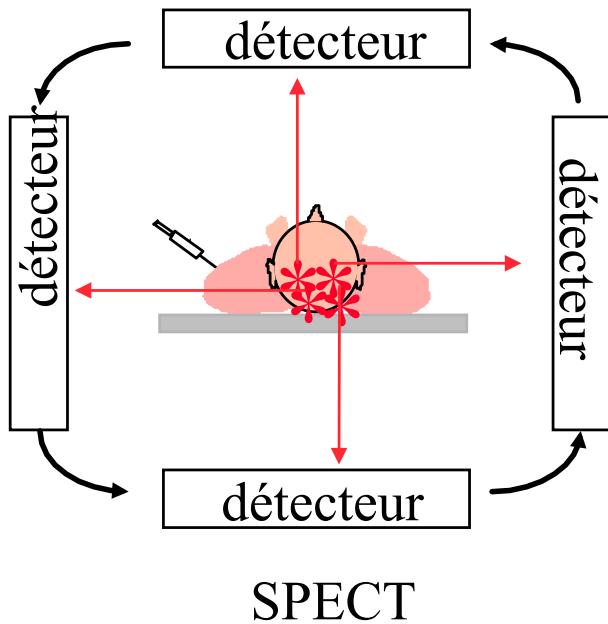
$$N = N_0 \exp\left(- \int_0^L \mu(l) dl\right)$$

$$\ln \frac{N_0}{N} = \int_0^L \mu(l) dl$$

... à partir des mesures intégrales  
(i.e. des sommes mesurées)

# Tomographie d'émission : dispositifs

- Source  $\gamma$  ou  $\beta^+$  interne au patient

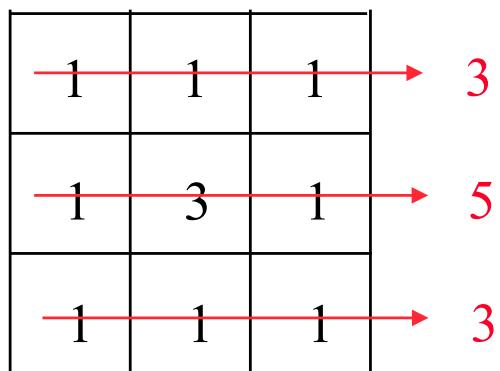
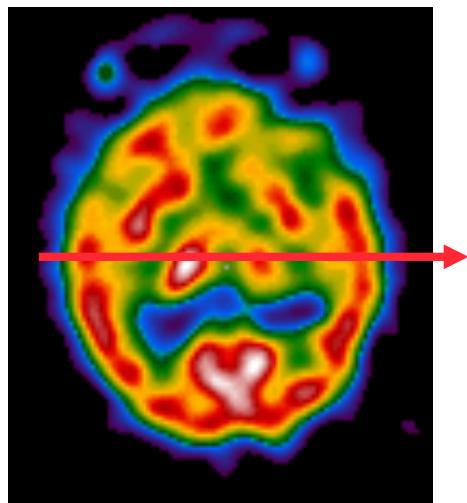


PET

Donne des informations sur la localisation de la source dans l'organisme

# Tomographie d'émission : mesures

- Idéalement (sans atténuation) : somme (intégrale) de l'activité le long des raies de projections



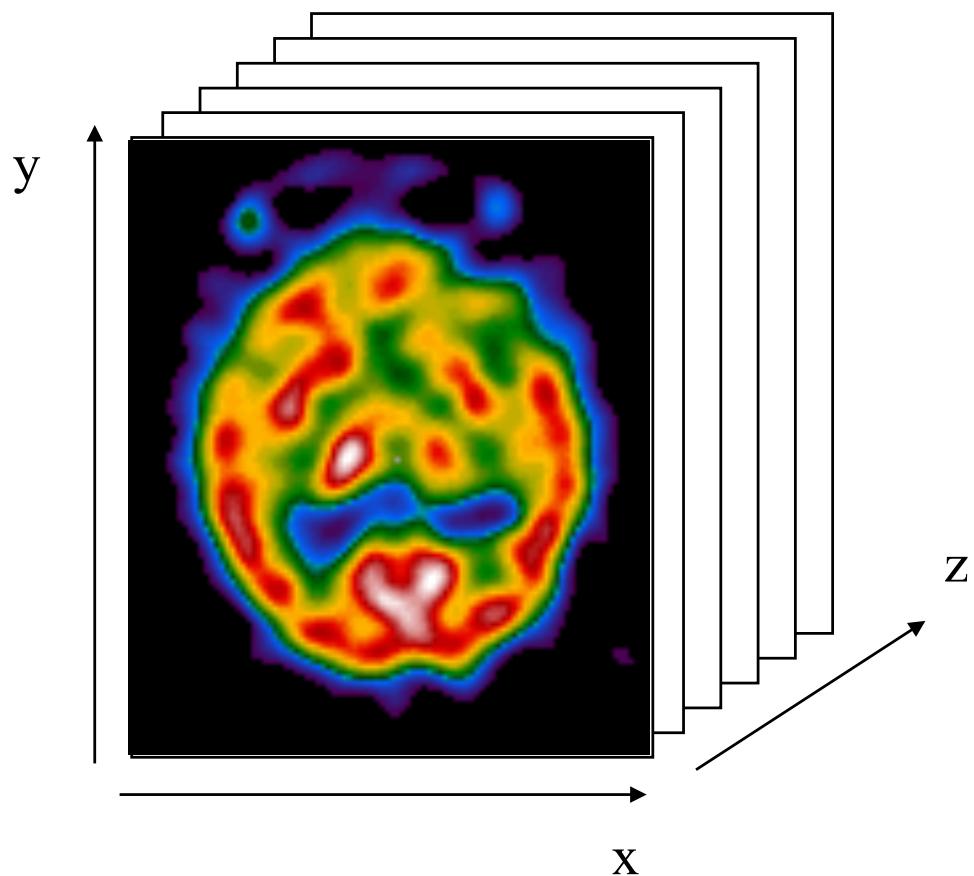
$$N = a_1 + a_2 + a_3$$

$$N = \int_0^D f(l) dl$$

# Problème à résoudre

---

- Objet à reconstruire : cartographie 3D de la concentration du radiotraceur dans l'organisme



# Traitements de l'information détectée



Estimer la distribution 3D du paramètre d'intérêt à partir des projections 2D mesurées

## Reconstruction tomographique

- Tomographie de transmission  
Paramètres d'intérêt = coefficient d'atténuation  $\mu$

- Tomographie d'émission  
Paramètres d'intérêt = carte d'activité

# Problème de reconstruction tomographique



Estimer la distribution du paramètre d'intérêt à partir  
de ses mesures intégrales

$$\ln \frac{N_0}{N} = \int_0^L \mu(l) dl$$

↑                      ↑  
Connu (mesuré)    A estimer

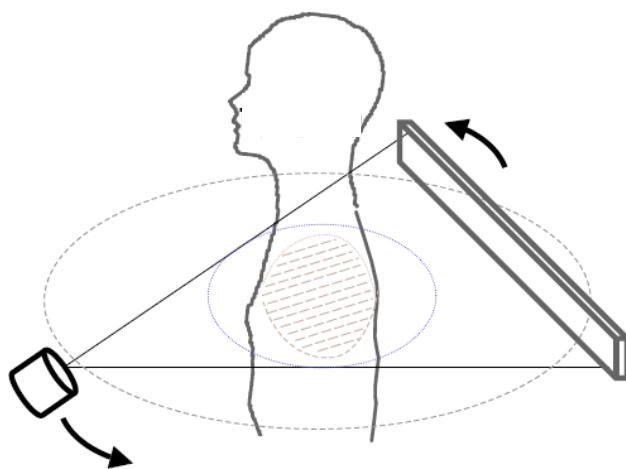
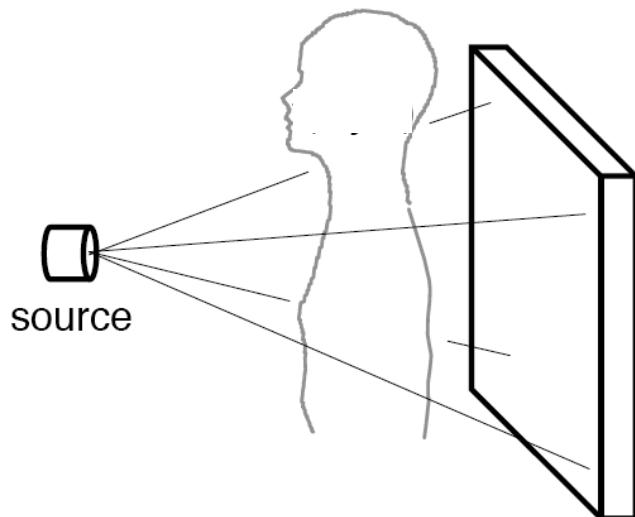
$$N = \int_0^D f(l) dl$$

↑                      ↑  
Connu (mesuré)    A estimer

Le problème de reconstruction est formellement le  
même en tomographie de transmission et en  
tomographie d'émission

# Pourquoi faire de la tomographie ?

- Accès à une information volumique



Possibilité de déterminer la profondeur d'une anomalie

# Pourquoi faire de la tomographie ?

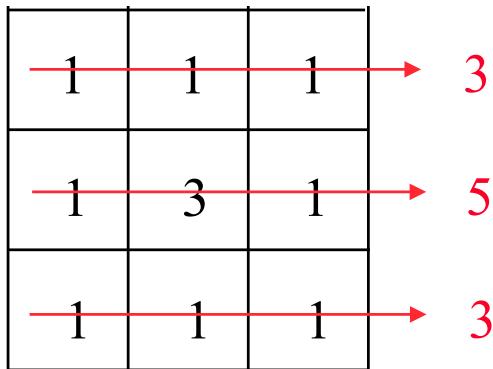
- Rehaussement de contraste par rapport aux données projetées



Contraste = (signal d'intérêt - signal de fond)/signal de fond

Attention, il existe plusieurs définitions du contraste !

Exemple en tomographie d'émission :



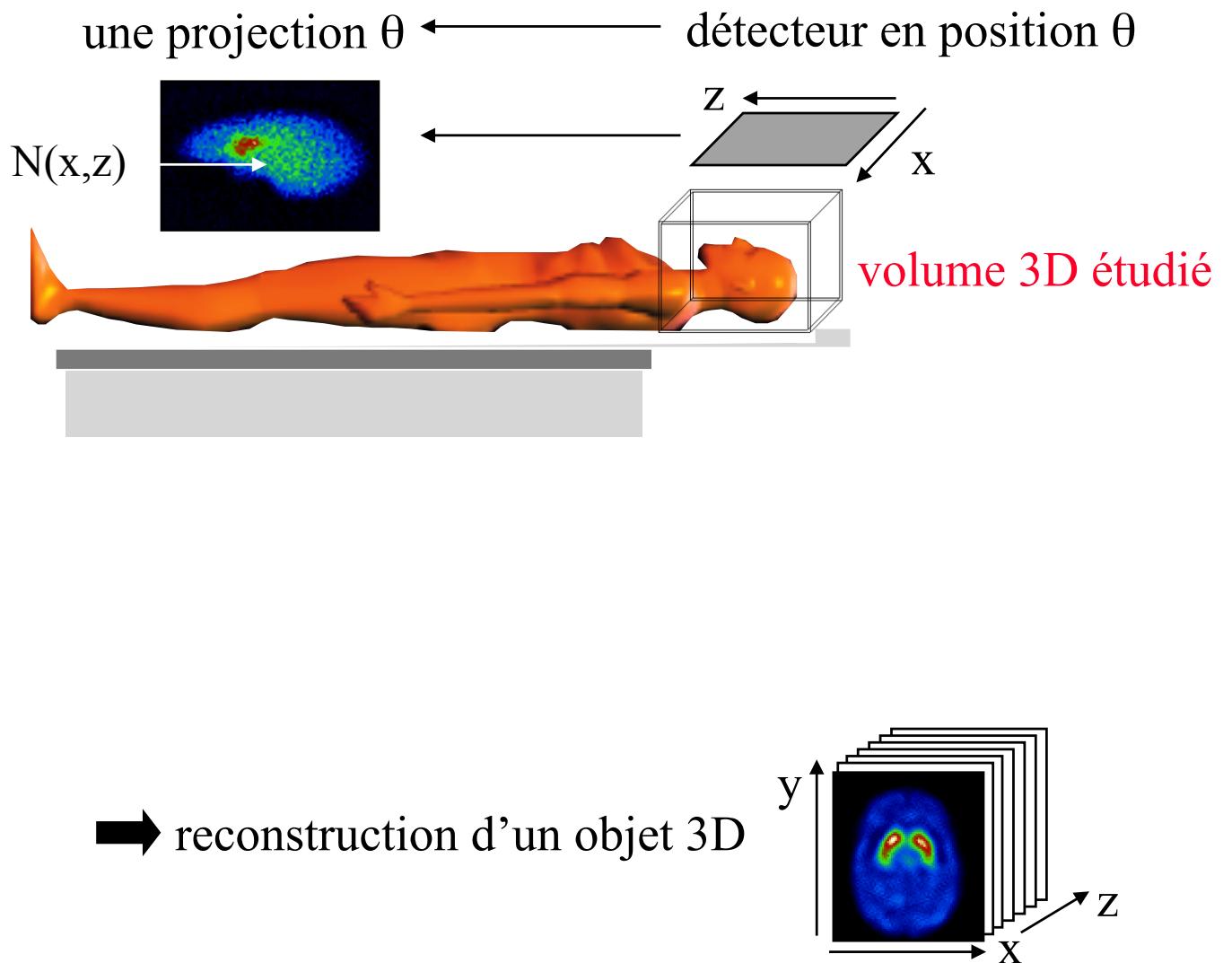
Contraste sur les projections :  $(5-3)/3 = 0,66$

Contraste sur les coupes :  $(3-1)/1 = 2$

L'anomalie sera plus facilement détectable car plus contrastée

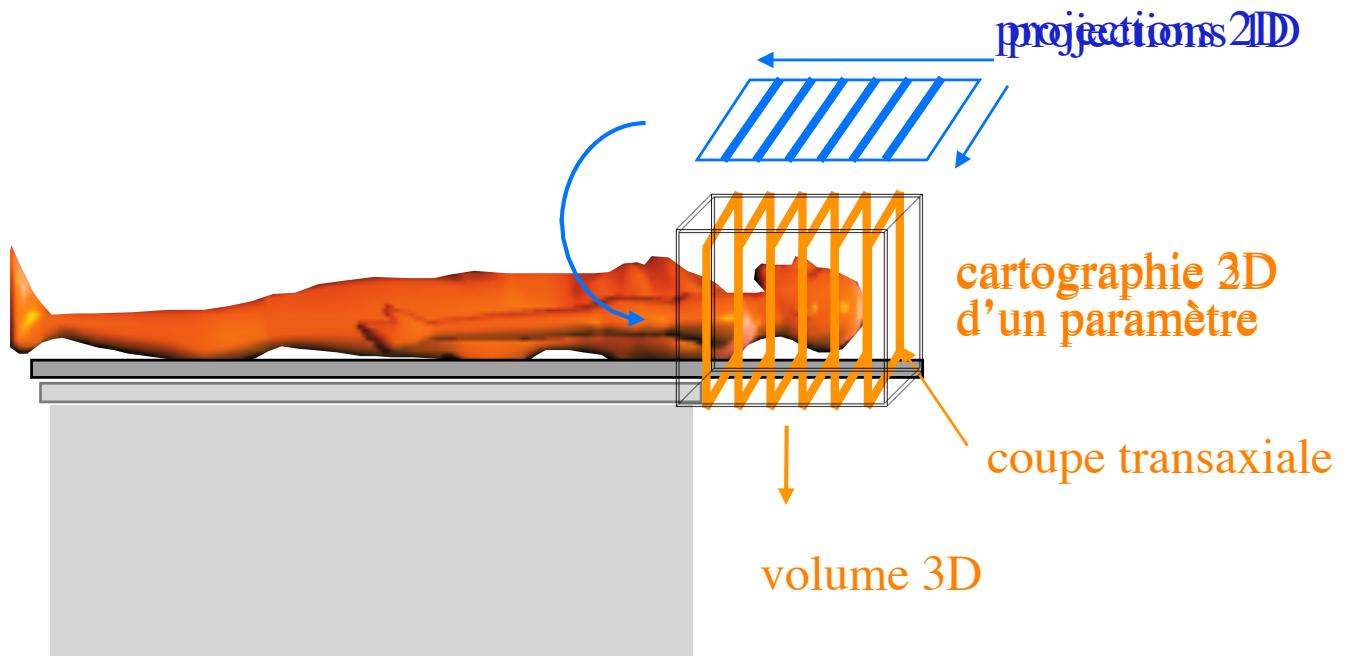
# Formulation du problème en 3D

- Un ensemble de projections 2D



# Factorisation du problème de reconstruction

volume 3D à partir d'images 2D

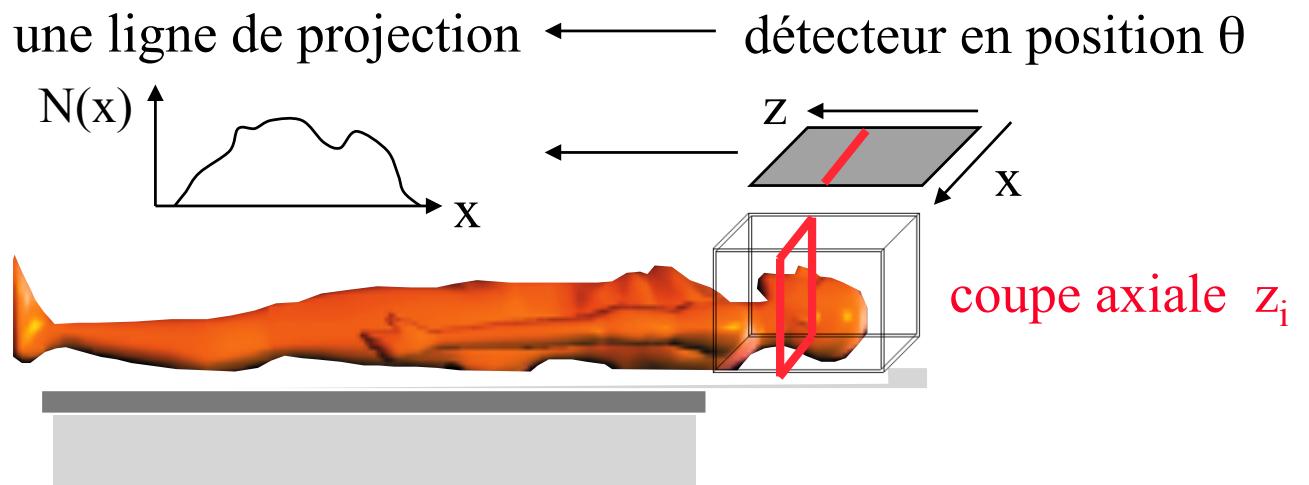


volume 3D reconstruit à partir de la  
reconstruction d'un ensemble d'images 2D

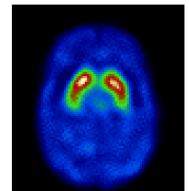
Dans un 1er temps, il suffit donc de  
comprendre comment on reconstruit l'image  
d'une coupe

# Formulation du problème en 2D

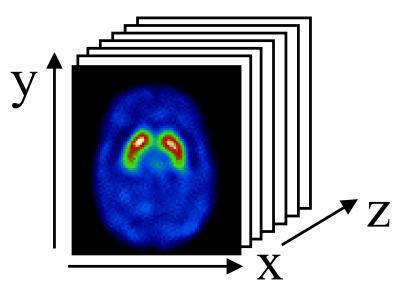
- Un ensemble de projections 1D



→ reconstruction d'un objet 2D (coupe  $z_i$ )



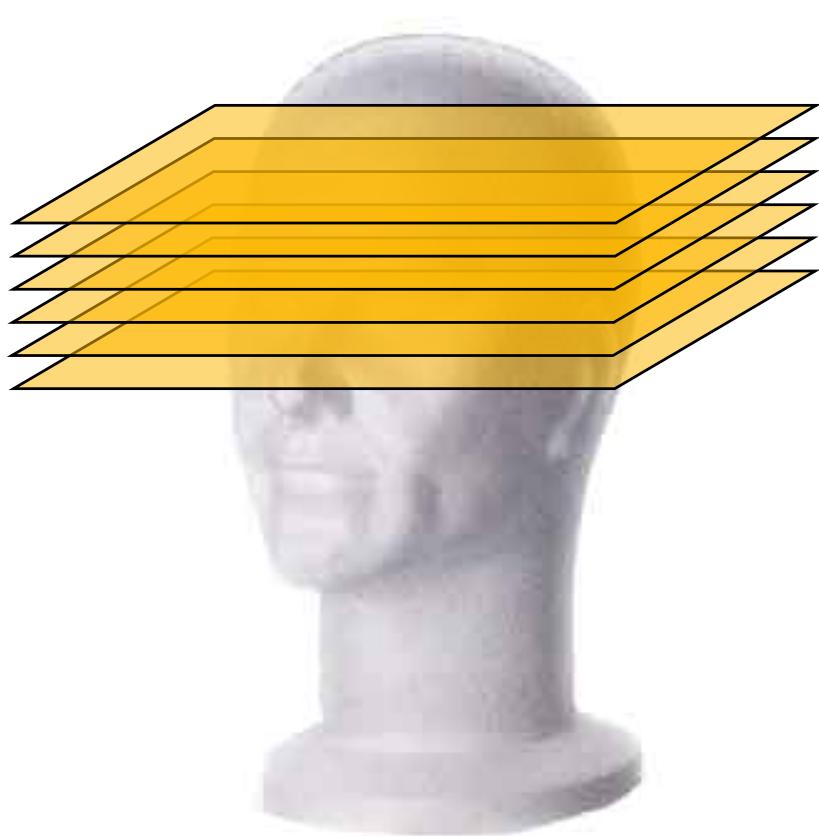
ensemble de coupes  $z_i$  = volume d'intérêt



# La reconstruction tomographique en général

---

- Estimation d'un volume 3D en reconstruisant indépendamment un ensemble de coupes 2D



# Pourquoi est-ce difficile ?

---



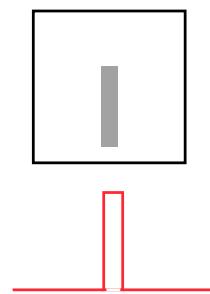
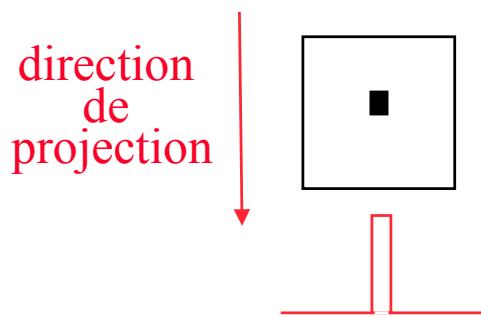
La leçon difficile, William Bouguereau (1825 - 1905)

# Non unicité de la solution

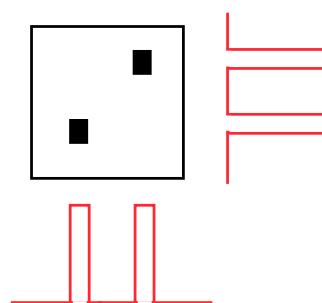
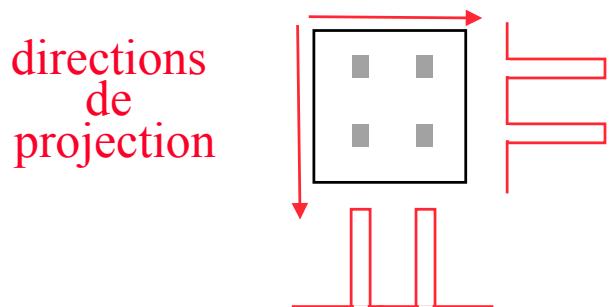
- Pas de solution unique : toujours plusieurs objets compatibles avec un ensemble fini de projections



1 projection : plusieurs solutions possibles



2 projections : plusieurs solutions possibles

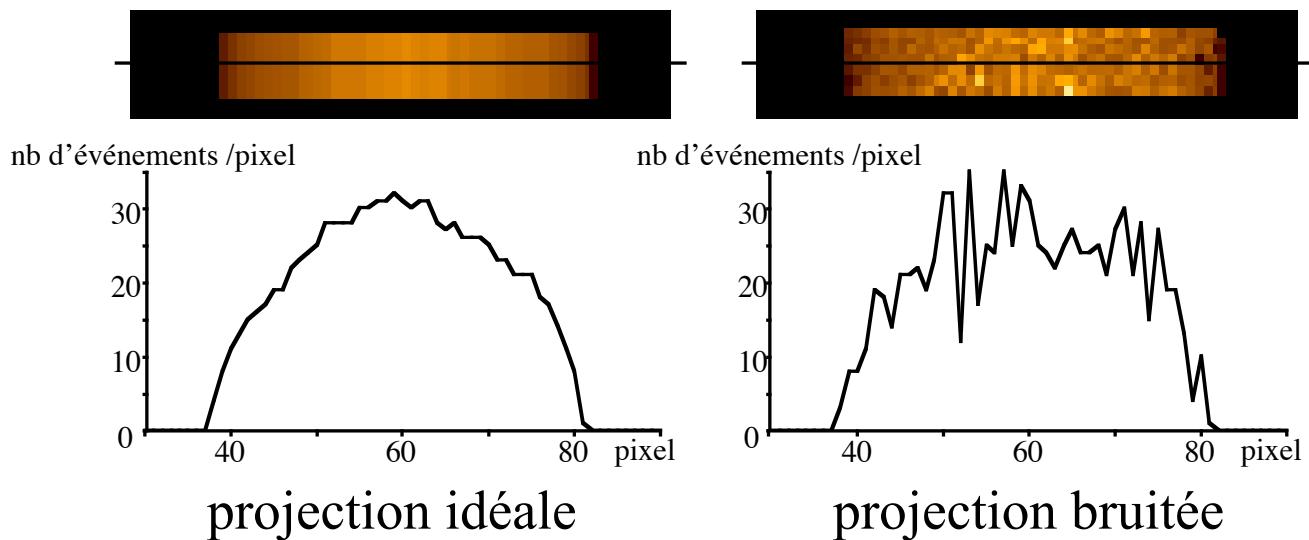


→ Unicité de la solution pour une infinité de projections seulement

# Bruit

- Pas de solution du fait du bruit entachant les données

			mesures imparfaites	
10	11	9	30	32
10	32	10	52	50
11	8	10	29	27



# Problème inverse mal posé

---



- Problème inverse :

On dispose de mesures et il faut trouver ce qui a produit ces mesures

- Problème mal posé :

La solution est instable : une petite différence sur les projections peut conduire à des coupes reconstruites substantiellement différentes

# Notions de base

---



# Travaux princeps

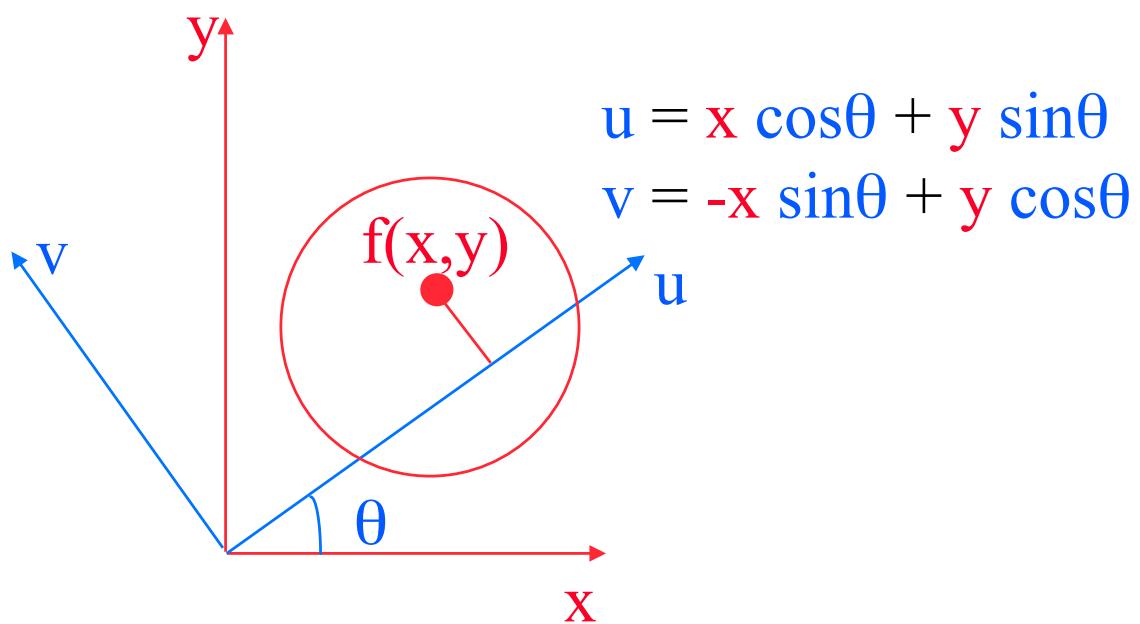
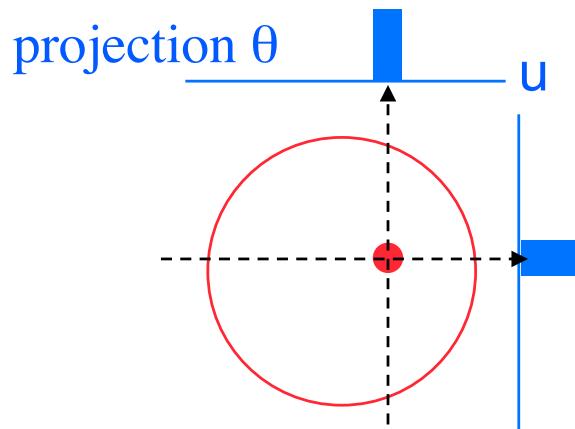
---



1887-1956

*1917 : Johann Radon : “De la détermination des fonctions à partir de leurs intégrales selon certaines directions”, Math. Phys. Klass*

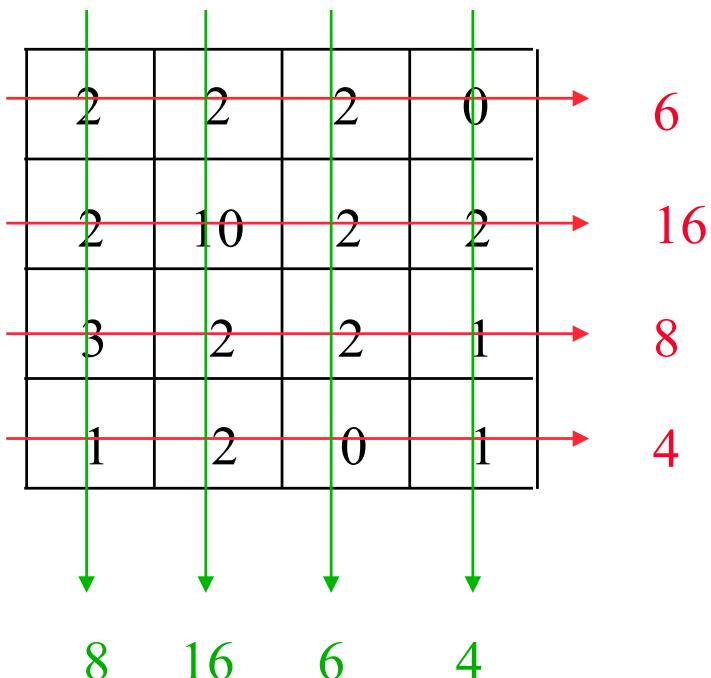
# Formulation continue de l'opération de projection



$$p(u, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \, dv$$

# Formulation discrète de l'opération de projection

- Calculer les 2 projections de la distribution d'activité représentée

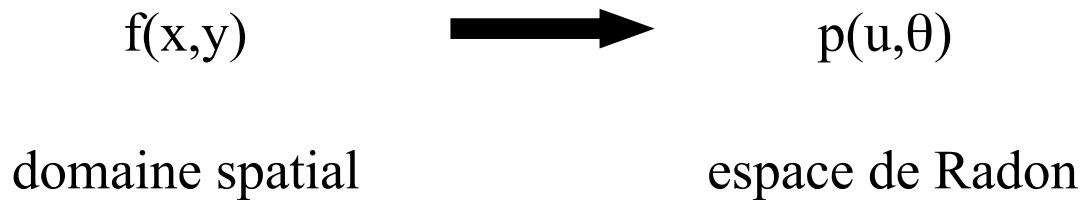


# Transformée de Radon

---

$$p(u, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \, dv$$

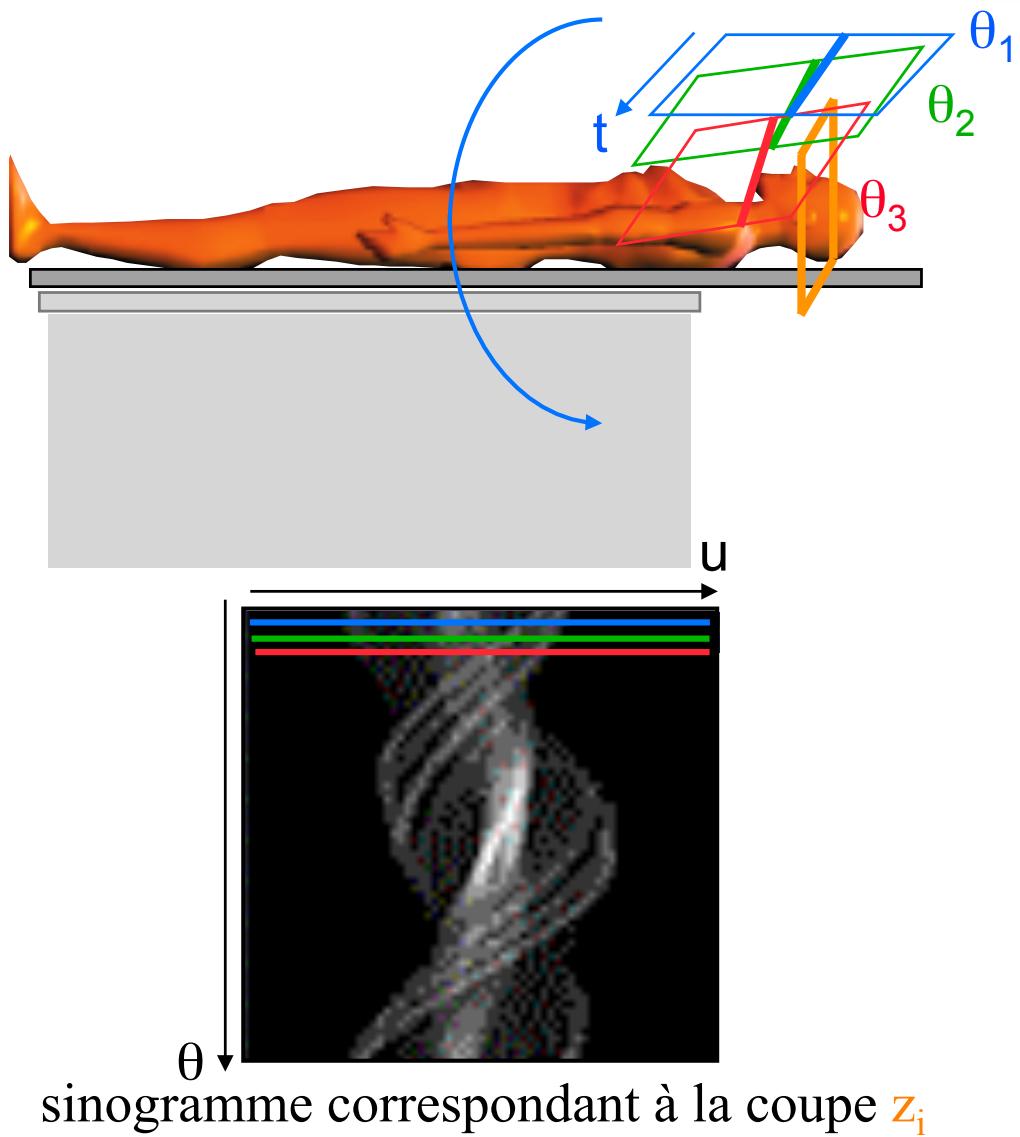
ensemble des projections pour  $\theta = [0, \pi]$   
= transformée de Radon de  $f(x, y)$



Problème de reconstruction tomographique :  
inverser la transformée de Radon, i.e.,  
estimer  $f(x, y)$  à partir de  $p(u, \theta)$

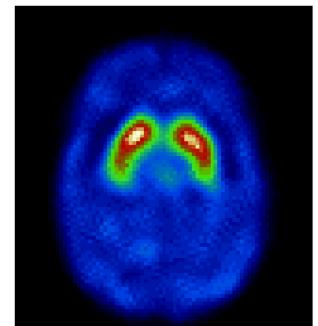
# Sinogramme

Sinogramme = signal issu d'une coupe  $z_i$  vue sous différentes incidences  $\theta$



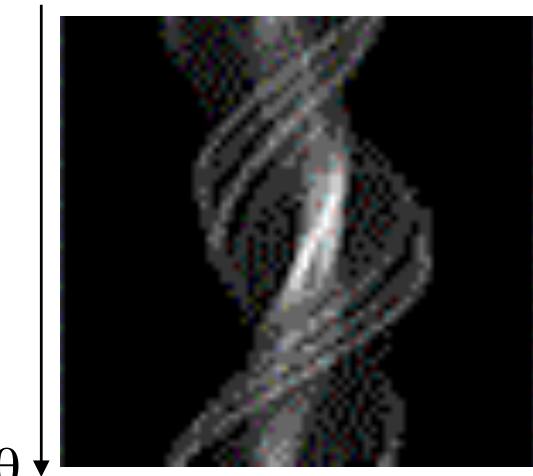
sinogramme correspondant à la coupe  $z_i$

reconstruction tomographique → coupe  $z_i$



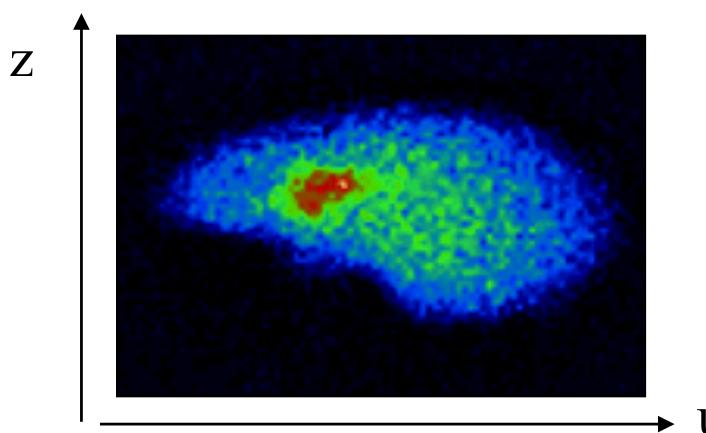
# Sinogrammes et projections

Les sinogrammes et les projections contiennent les mêmes informations : ils ne diffèrent que par l'organisation avec laquelle les informations sont représentés.



sinogramme correspondant à la coupe  $z_i$

Un sinogramme : toute l'information relative à une coupe, obtenue pour tous les angles de projection.



projection correspondant à l'angle  $\theta$

Une projection : l'information relative à toutes les coupes, mais pour une incidence angulaire unique.

# Compris ?

---

On dispose de 64 projections de dimension 128 pixels  
(dans la direction axiale ) x 256 pixels



- Combien de coupes transaxiales peut-on reconstruire sans interpolation ?

128

- Combien de sinogrammes peut-on former à partir de ces projections ?

128

- Quelles sont les dimensions d'un sinogramme ?

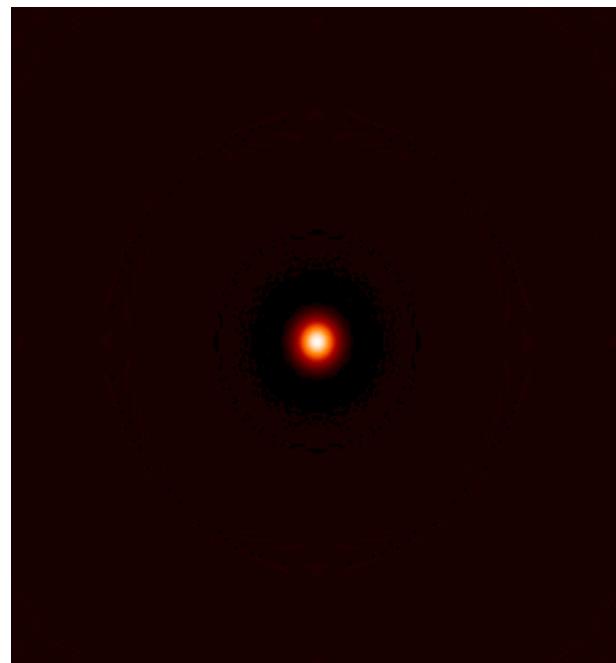
64 lignes et 256 colonnes



# Compris ?

---

Tomographie d'émission :  
Est-ce une projection ou un sinogramme ?

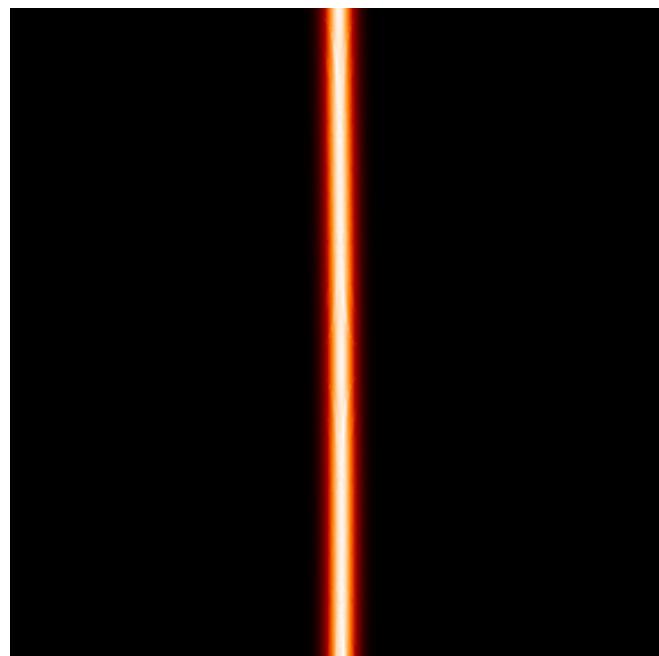
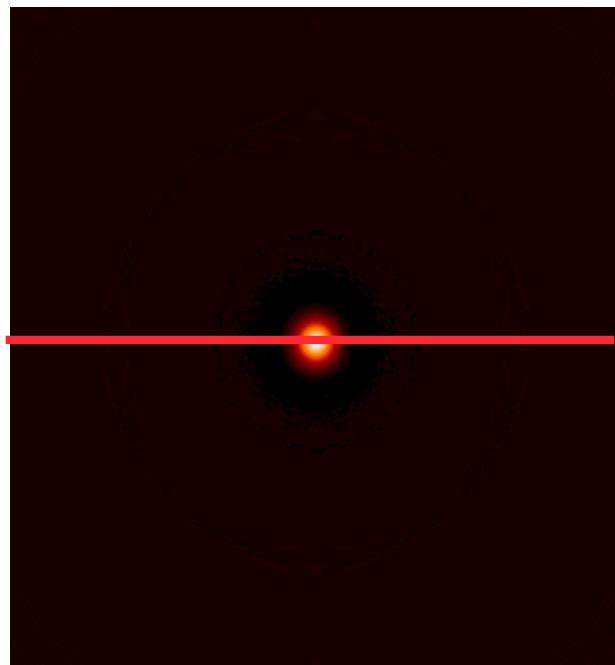


# Compris ?

---

Tomographie d'émission :

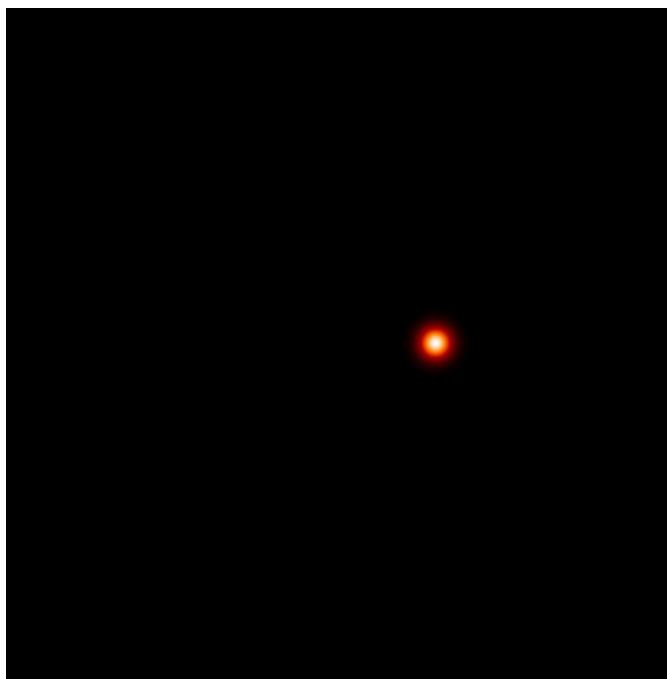
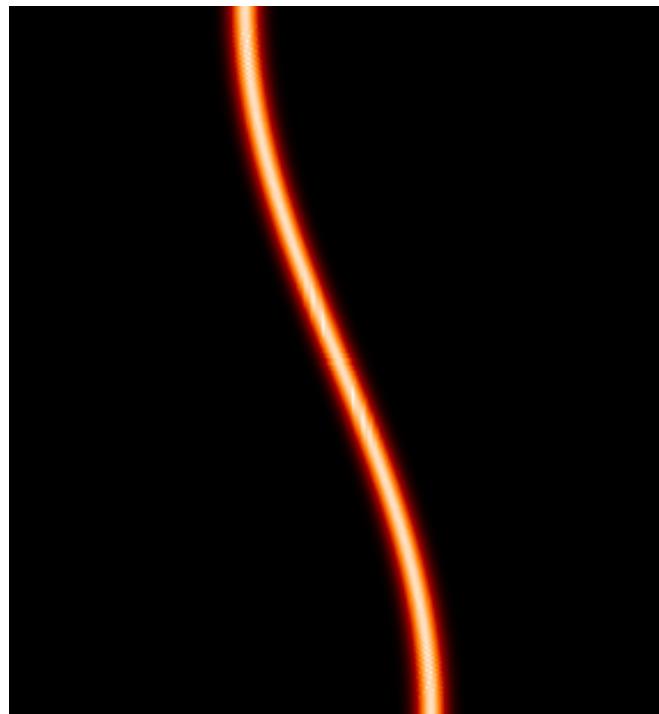
Si toutes les projections sont identiques à celles-ci, quel est le sinogramme correspondant à la coupe indiquée ?



# Compris ?

---

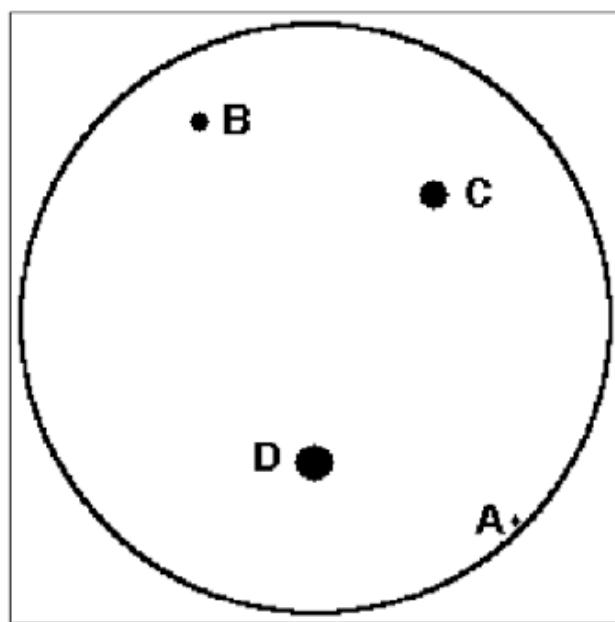
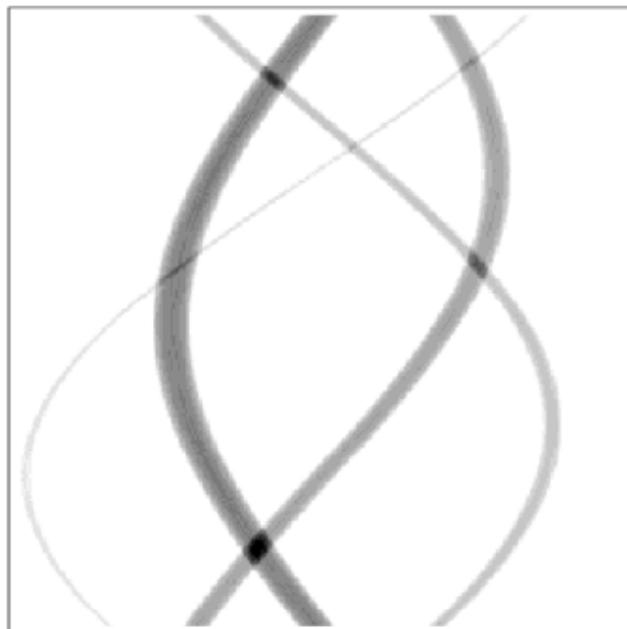
Tomographie d'émission :  
A quoi correspond ce sinogramme ?



# Compris ?

---

Tomographie d'émission :  
A quoi correspond ce sinogramme ?



# Résumé

---

- Introduction
  - La tomographie
  - Tomographie en transmission
  - Tomographie en émission
  - Spécificité du problème de reconstruction tomographique
- Notions de base
  - Projection
  - Transformée de Radon
  - Sinogramme
- La tomographie consiste à estimer des images de coupes à partir de projections
- Pour faire de la tomographie, il est indispensable de disposer de projections correspondant à différents angles de vue
- Un élément de projection est l'intégrale du signal suivant une ligne, une projection est l'ensemble des éléments de projection suivant un angle de vue, l'ensemble des projections est la transformée de Radon de l'objet
- Dans une projection, les signaux émanant de l'objet sont superposés
- La reconstruction tomographique consiste à estimer l'objet qui a donné lieu aux projections mesurées, et ce par un algorithme mathématique



# Deux approches à la reconstruction tomographique

---

- Les méthodes analytiques

$$R[f(x,y)] = \int_0^{\pi} p(u,\theta) d\theta$$

- Les méthodes discrètes (ou itératives)

$$p = R f$$

# Les méthodes analytiques : introduction

---

- Inversion analytique de la transformée de Radon = résolution d'équations intégrales
- Expression continue du problème de reconstruction tomographique
- Méthode la plus courante : rétroprojection filtrée

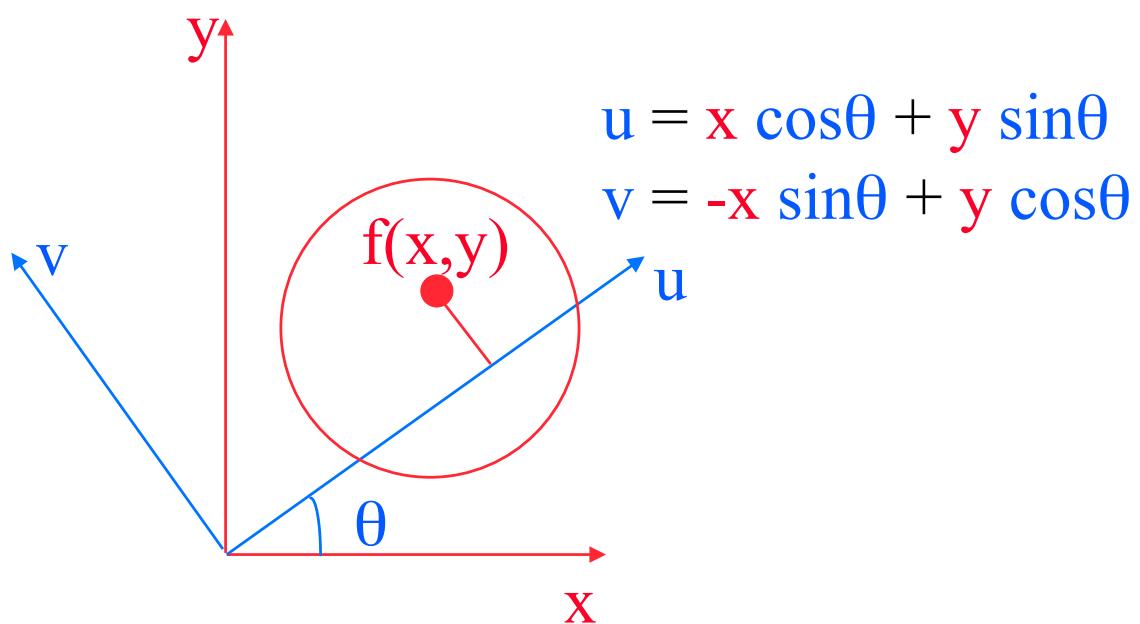
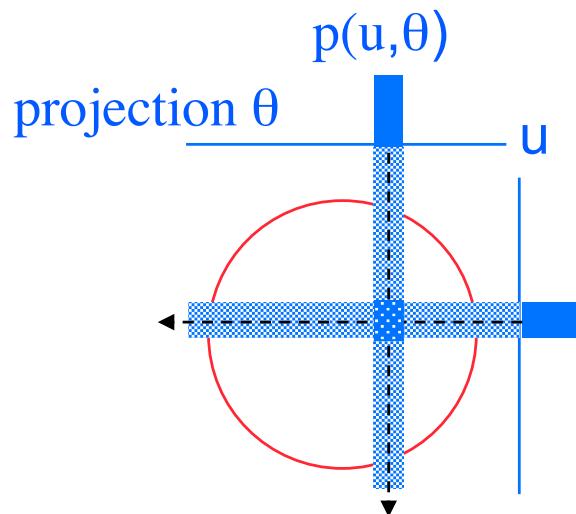
## FBP : Filtered BackProjection

- Méthodes rapides



- Méthodes disponibles sur tous les dispositifs d'acquisition commercialisés (scanner X, SPECT, PET)

# Opération de rétroprojection : expression continue

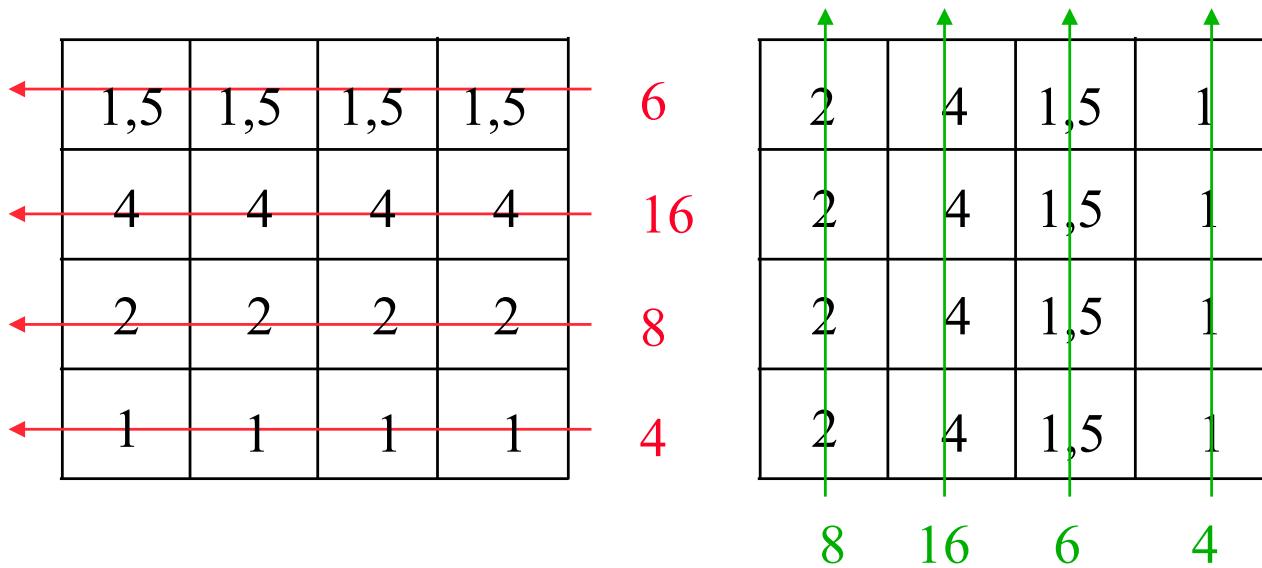
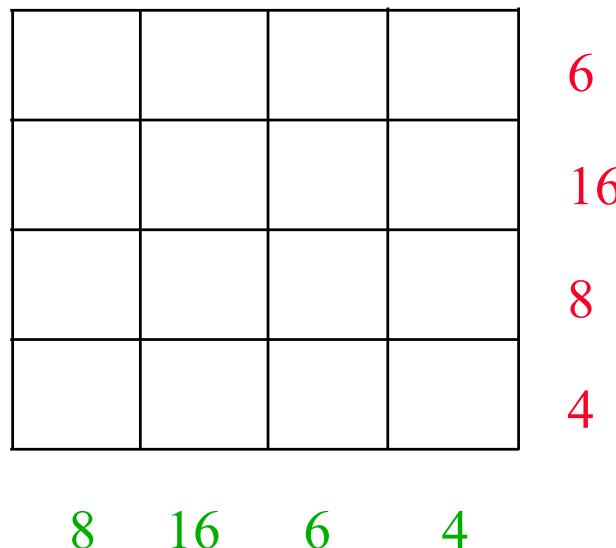


$$f^*(x, y) = \int_0^\pi p(u, \theta) d\theta$$

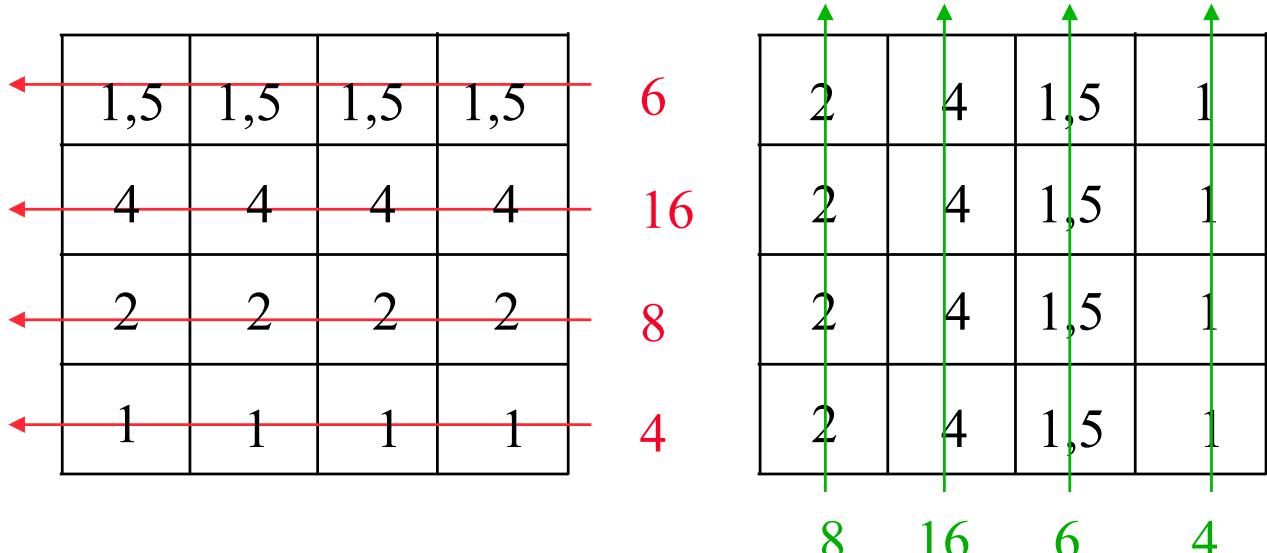
Attention : la rétroprojection n'est pas l'inverse de la transformée de Radon

# Formulation discrète de l'opération de rétroprojection

- Calculer la rétroprojection des projections mesurées



# Formulation discrète de l'opération de rétroprojection



Moyenne :

Rapport tumeur / fond  
 $= 4 / 1,5 = 2,6$

1,75	2,75	1,5	1,25
3	4	2,75	2,5
2	3	1,75	1,5
1,5	2,5	1,25	1

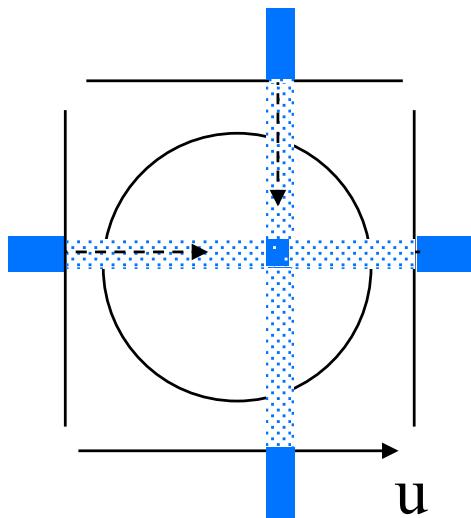
Image originale :

Rapport tumeur / fond  
 $= 10 / 1 = 10$

2	2	2	0
2	10	2	2
3	2	2	1
1	2	0	1

La rétroprojection n'est pas l'inverse de la transformée de Radon !

# Limites de la rétroprojection simple



$$f^*(x,y) = \int_0^\pi p(u,\theta) d\theta$$

rétroprojection simple

- artefacts d'épandage en étoile du fait du nombre limité de projections

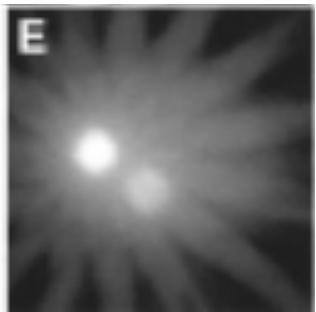
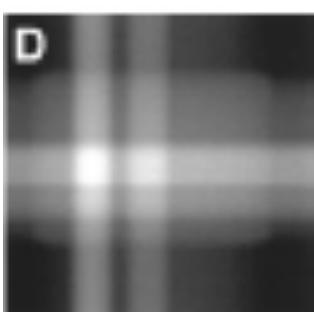
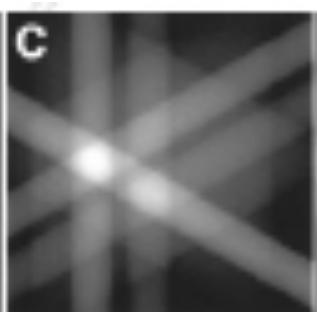
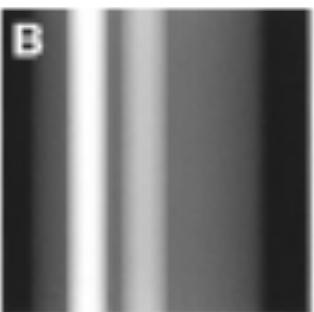
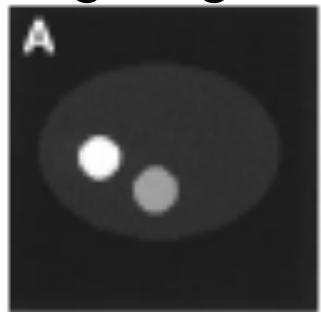
nombre de projections

image originale

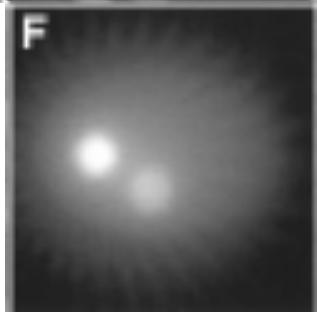
1

3

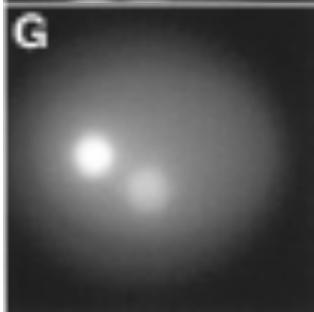
4



16



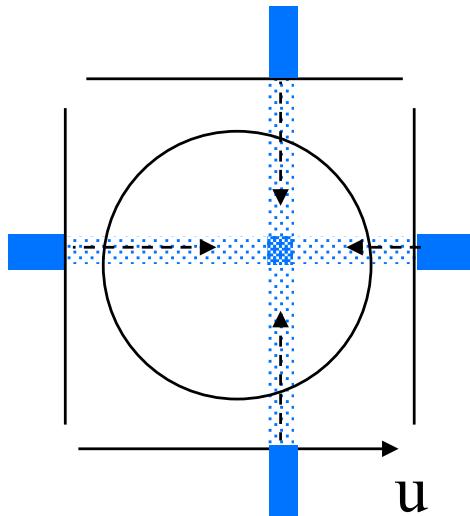
32



64

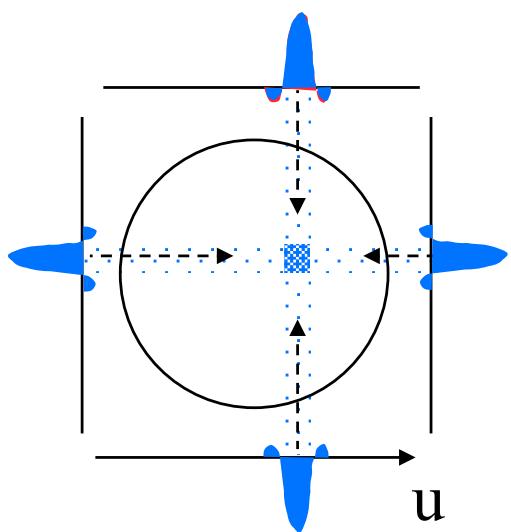
La rétroprojection n'inverse pas la transformée de Radon

# Rétroprojection filtrée : principe



$$f^*(x,y) = \int_0^\pi p(u,\theta) d\theta$$

rétroprojection simple



$$f^*(x,y) = \int_0^\pi p(u,\theta) d\theta$$

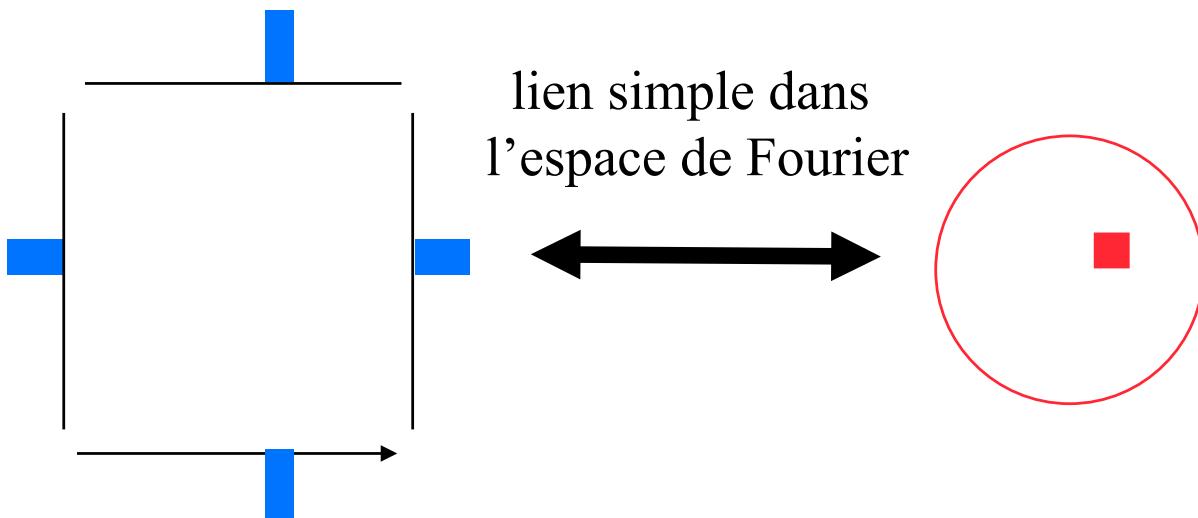
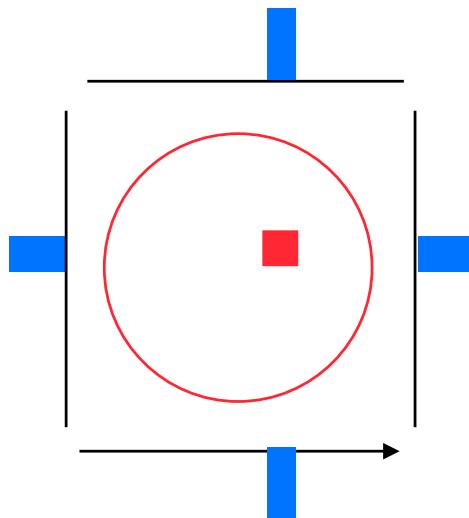
↑  
projection filtrée

rétroprojection filtrée :  
réduction des artefacts  
inversion exacte de la transformée de Radon

# Quel filtrage ?

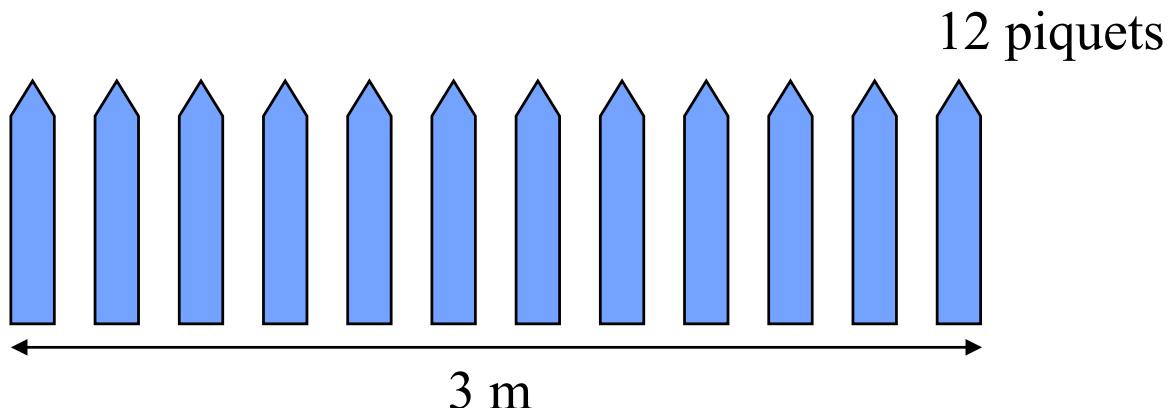
Le filtre qui permet d'inverser exactement la transformée de Radon peut être dérivé théoriquement, en vertu du théorème de la coupe centrale

Ce théorème donne le lien entre les projections et l'objet dans l'espace de Fourier

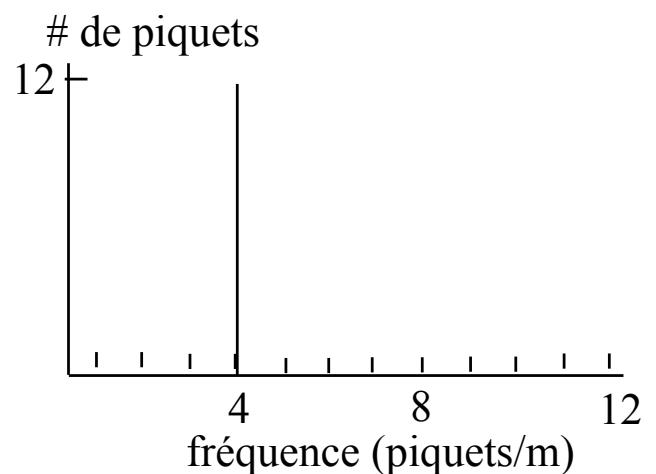
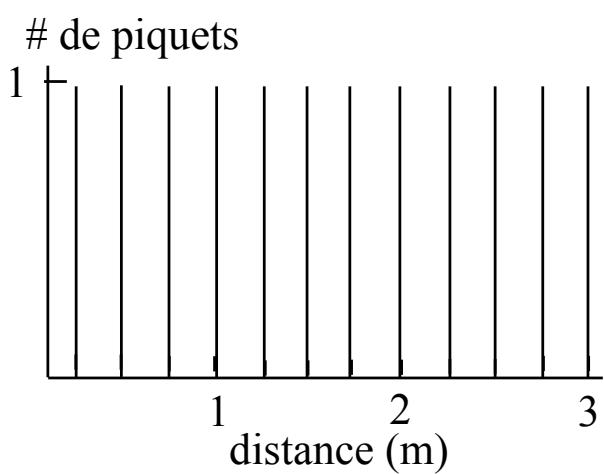


# Espace de Fourier : rappels

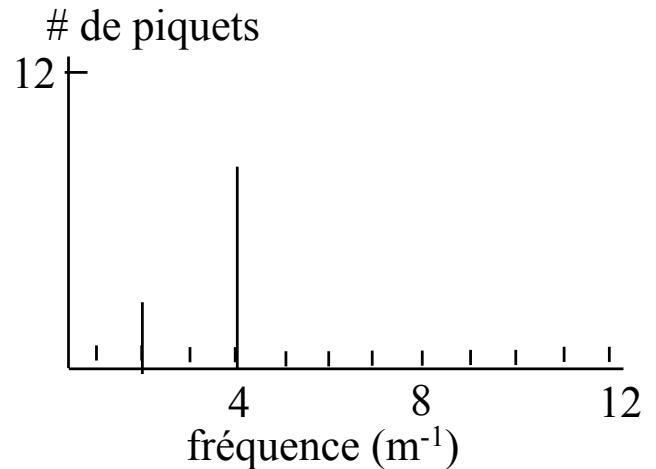
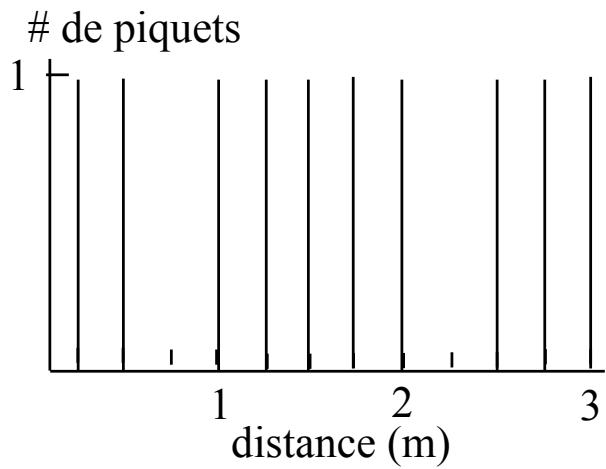
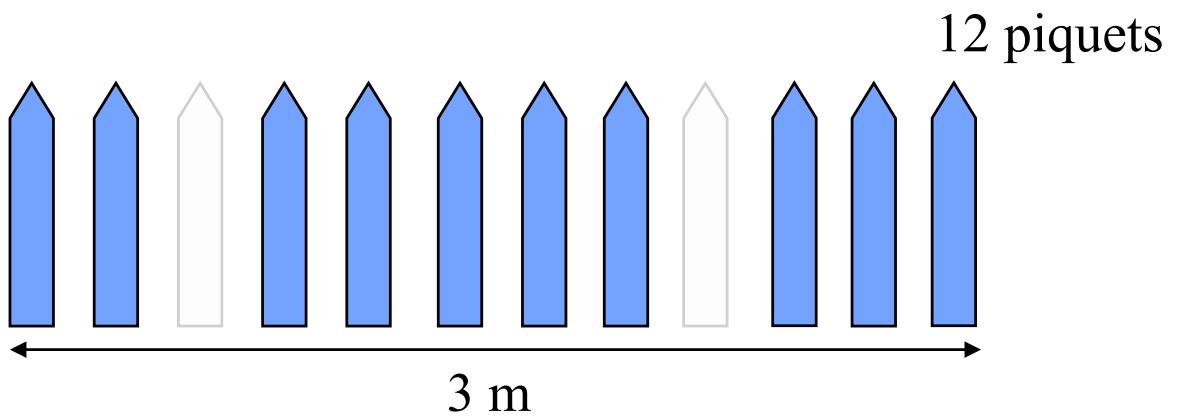
Tout signal a une représentation fréquentielle dans l'espace de Fourier



12 piquets sur 3 m  
ou 4 piquets par mètre



# Espace de Fourier : rappels

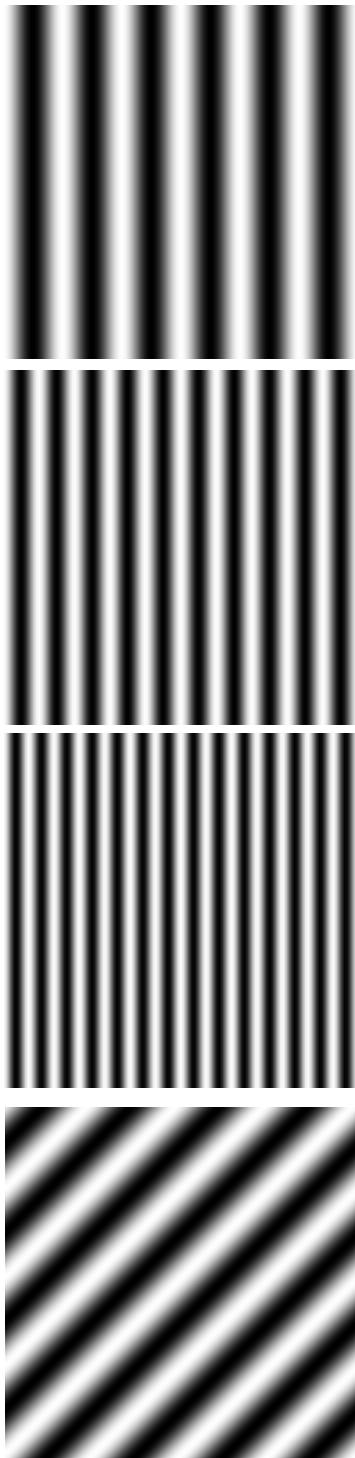


L'utilisation de cette représentation fréquentielle facilite souvent la manipulation du signal (filtrage, compression, etc)

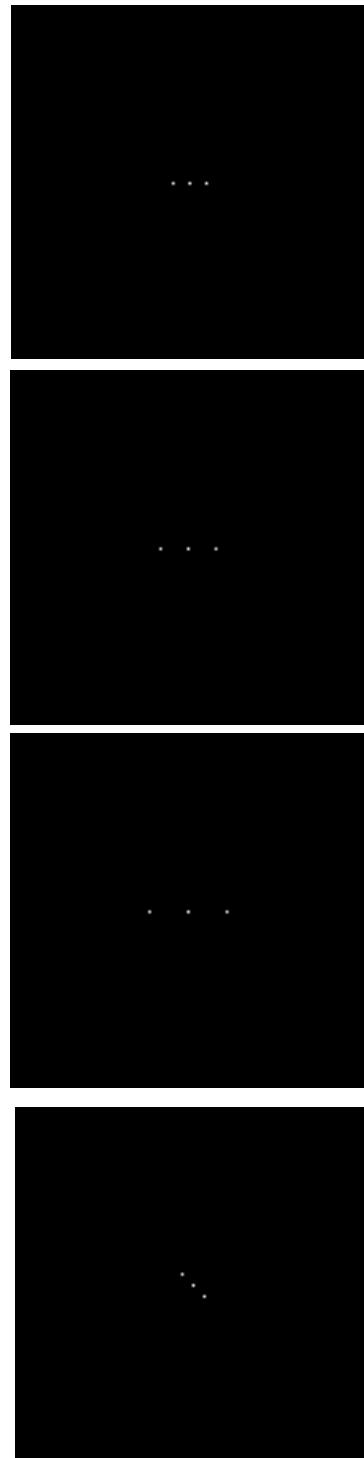
# Espace de Fourier : représentation synthétique

---

image



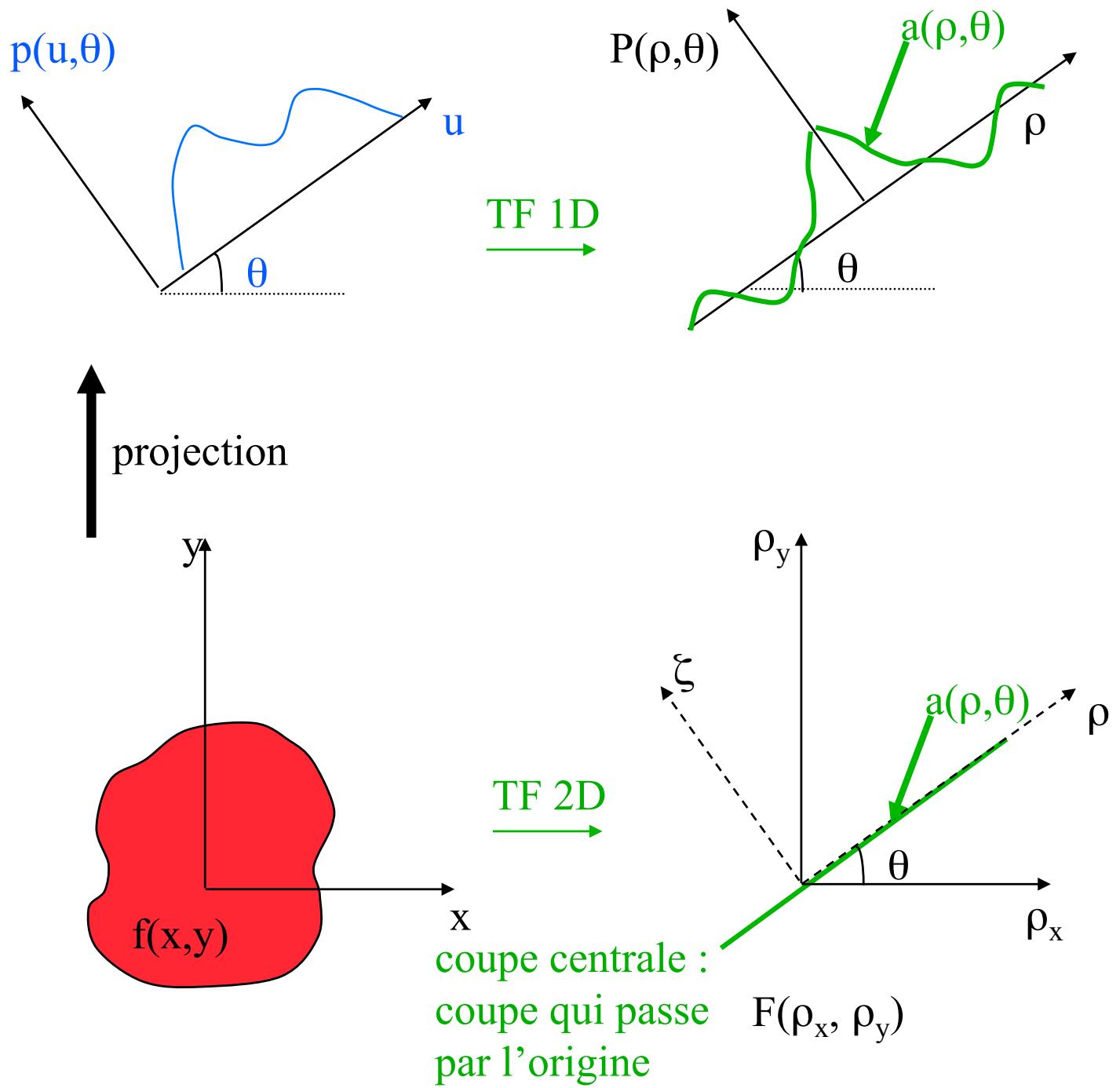
représentation de l'image  
dans l'espace de Fourier



# Théorème de la coupe centrale (TCC)

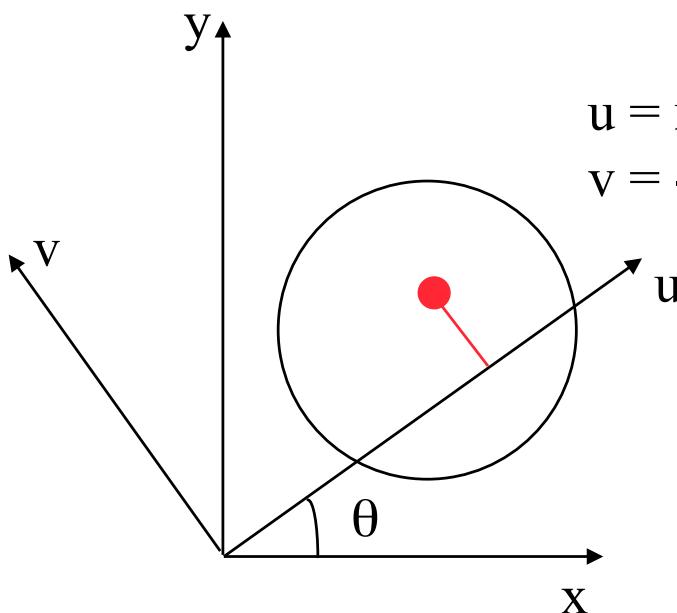
TF monodimensionnelle d'une projection par rapport à  $u$   
 $=$   
 TF bidimensionnelle de la distribution à reconstruire

$$P(\rho, \theta) = F(\rho_x, \rho_y) \Big|_{\xi=0}$$



# Théorème de la coupe centrale : démonstration

$$p(u, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dv \xrightarrow{\text{transformée de Fourier (TF)}} P(\rho, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(u, \theta) e^{-i2\pi\rho u} du$$



$$\begin{aligned}\rho_x &= \rho \cos \theta \\ \rho_y &= \rho \sin \theta \\ du \cdot dv &= dx \cdot dy\end{aligned}$$

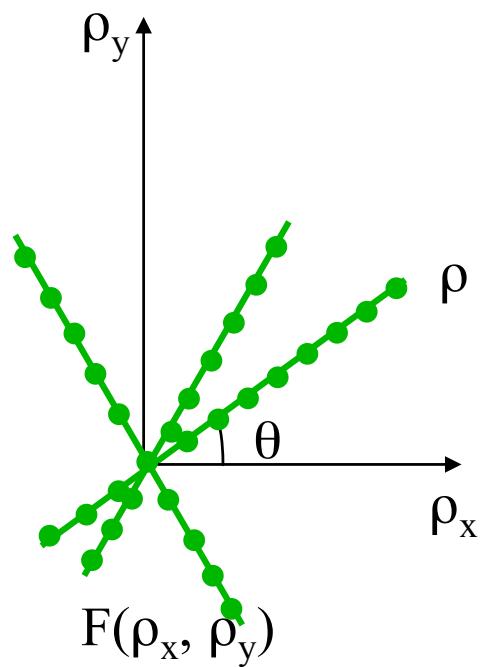
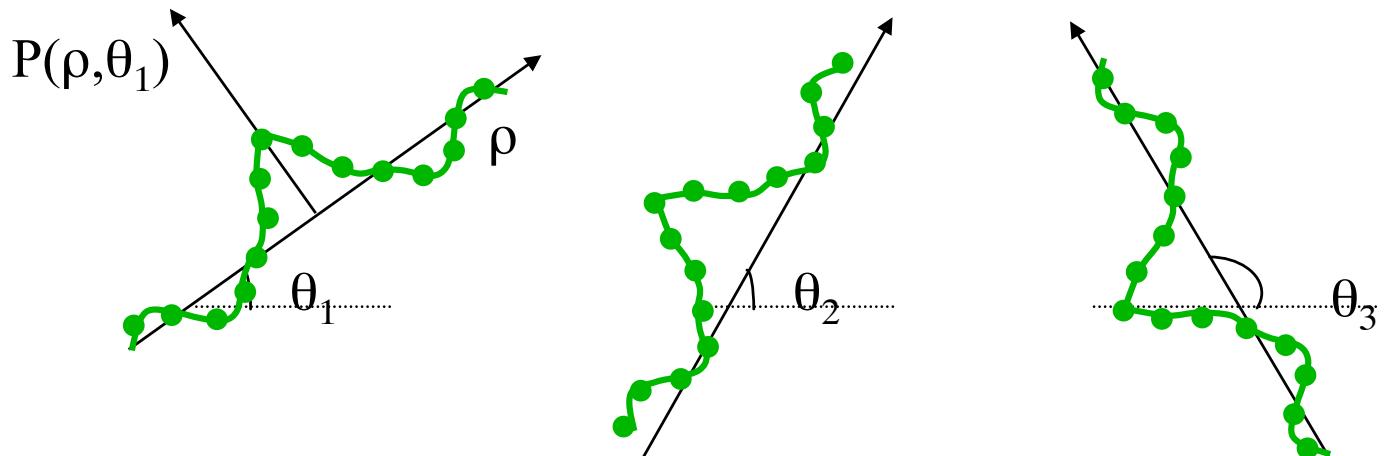
changement de variable :  $(u, v) \rightarrow (x, y)$

$$P(\rho, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-i2\pi\rho u} du dv \xrightarrow{\downarrow} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-i2\pi(x\rho_x + y\rho_y)} dx dy$$

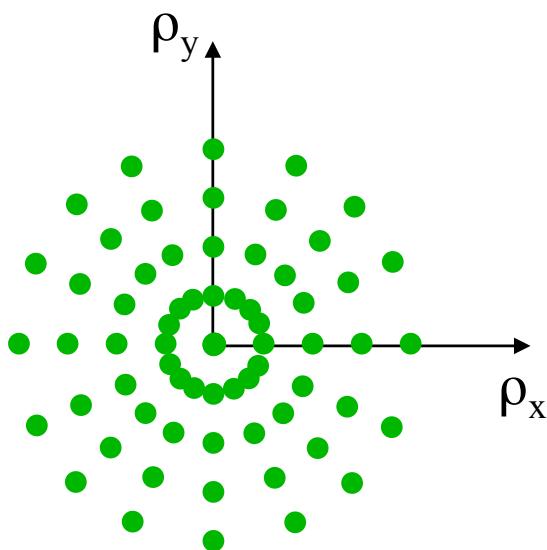
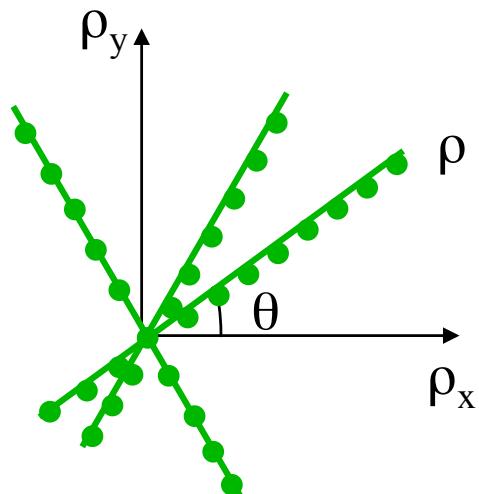
TF monodimensionnelle d'une projection par rapport à $u$  $=$ TF bidimensionnelle de la distribution à reconstruire
--

# Rétroprojection filtrée : principe

Si on a  $P(\rho, \theta)$  pour tous les angles  $\theta$  entre 0 et  $\pi$ , on peut reconstruire la transformée de Fourier de l'objet, et donc l'objet



## Rétroprojection filtrée : origine du filtre



L'échantillonnage dans l'espace de Fourier est irrégulier : la densité de points est proportionnelle à  $1/|\rho|$ : trop de poids est donné aux basses fréquences : c'est ce qui introduit le flou dans les images issues de rétroprojection simple.

Il faut normaliser (filtrer) en conséquence.

# Rétroprojection filtrée : démonstration

$$P(\rho, \theta) = F(\rho_x, \rho_y)$$

$\downarrow \text{TF}^{-1}$

$$f(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\rho_x, \rho_y) e^{i2\pi(x\rho_x + y\rho_y)} d\rho_x d\rho_y$$

$\downarrow \text{TCC}$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P(\rho, \theta) e^{i2\pi(x\rho_x + y\rho_y)} d\rho_x d\rho_y$$

changement de variable :  $(\rho_x, \rho_y) \rightarrow (\rho, \theta)$

$\downarrow$

$$= \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} P(\rho, \theta) |\rho| e^{i2\pi\rho u} d\rho d\theta$$

$\rho_x = \rho \cos \theta$   
 $\rho_y = \rho \sin \theta$   
 $\rho = (\rho_x^2 + \rho_y^2)^{1/2}$   
 $d\rho_x \cdot d\rho_y = \rho \cdot d\rho \cdot d\theta$   
 $u = x \cos \theta + y \sin \theta$

$$= \int_0^{\pi} p'(u, \theta) d\theta \quad \text{avec } p'(u, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(\rho, \theta) |\rho| e^{i2\pi\rho u} d\rho$$

$\uparrow$                            $\uparrow$                            $\uparrow$   
 projections filtrées            filtre rampe

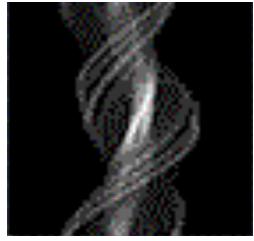
objet  $f(x,y)$  à reconstruire

=

rétroprojection des projections filtrées

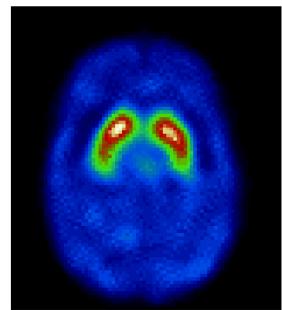
# Algorithme de rétroprojection filtrée

$$f(x,y) = \int_0^\pi p'(u,\theta) d\theta \quad \text{avec} \quad p'(u,\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(\rho,\theta) |\rho| e^{i2\pi\rho u} d\rho$$



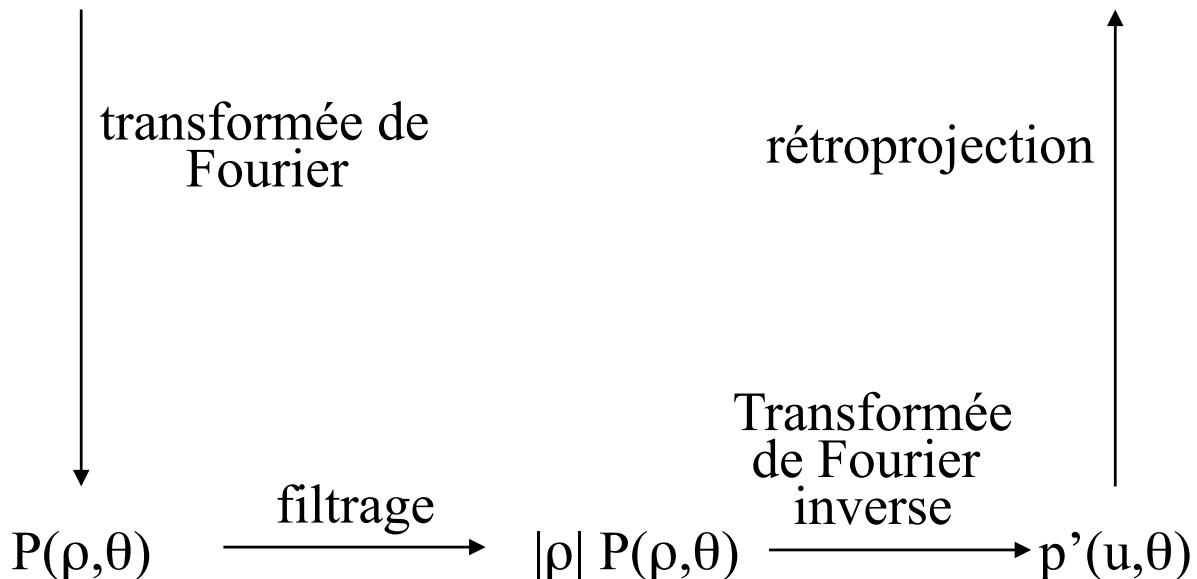
sinogramme

$$p(u,\theta)$$



coupe reconstruite

$$f(x,y)$$



# Résumé

---



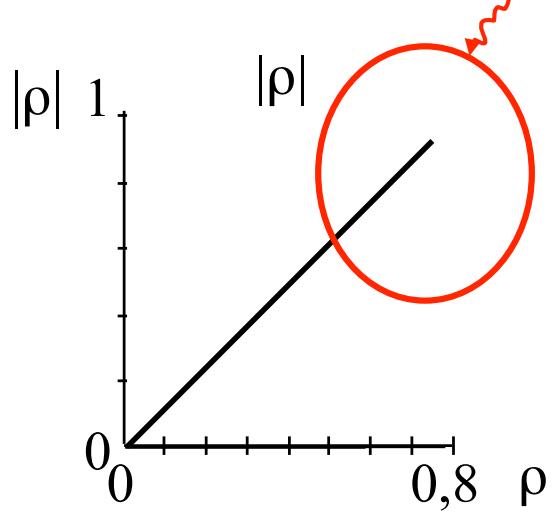
- Méthodes de reconstruction analytique
  - Principe
  - Théorème de la coupe centrale
  - Rétroprojection filtrée
  - Filtres (à venir)
- La rétroprojection fait l'essentiel du travail de reconstruction tomographique : elle redistribue le signal détecté dans les projections en une image. Cependant, elle conduit à des artefacts basses fréquences
- L'analyse de l'opération de rétroprojection dans l'espace de Fourier montre ces artefacts sont dus à un poids trop important donné aux basses fréquences (accumulation de points près de l'origine de l'espace de Fourier 2D)
- Une compensation exacte est possible, supprimant théoriquement les artefacts basses fréquences

# Insuffisance du filtre rampe

$$f(x,y) = \int_0^\pi p'(u,\theta) d\theta \quad \text{avec} \quad p'(u,\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(\rho,\theta) |\rho| e^{i2\pi\rho u} d\rho$$

↑  
filtre rampe

amplification des hautes fréquences



filtre rampe

hautes fréquences = détails dans les images (haute résolution spatiale)  
mais aussi ... bruit parasite



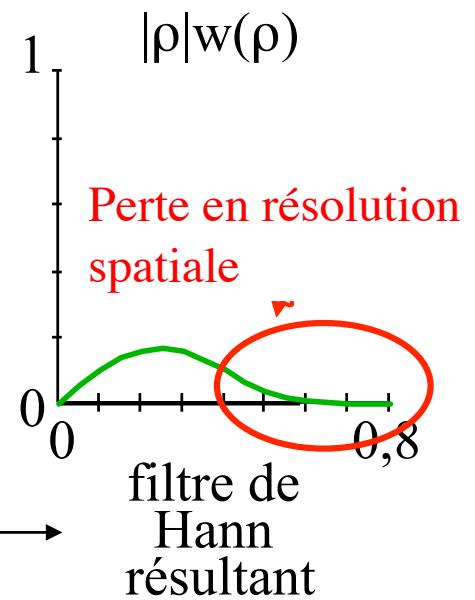
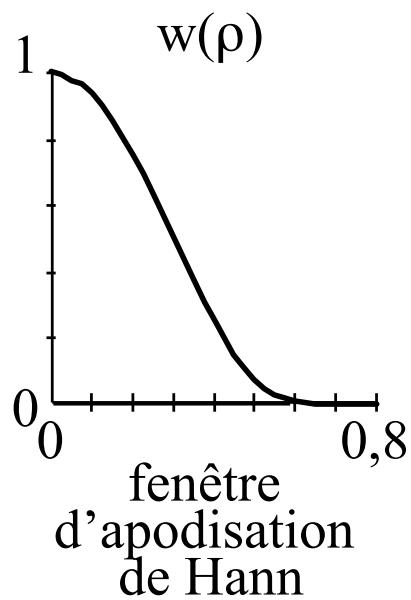
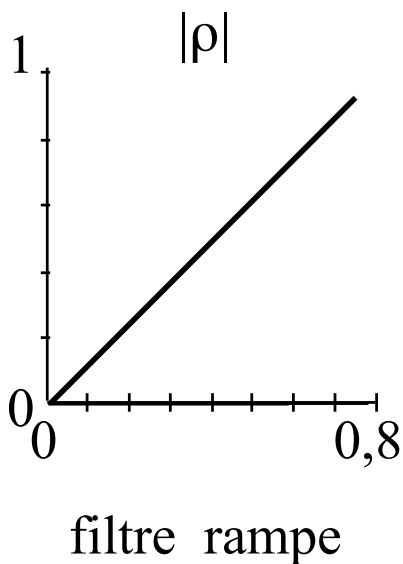
# Insuffisance du filtre rampe

$$f(x,y) = \int_0^\pi p'(u,\theta) d\theta \quad \text{avec} \quad p'(u,\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(\rho,\theta) |\rho| e^{i2\pi\rho u} d\rho$$

↑  
filtre rampe

$$|\rho| \longrightarrow |\rho|w(\rho)$$

↑  
fenêtre d'apodisation

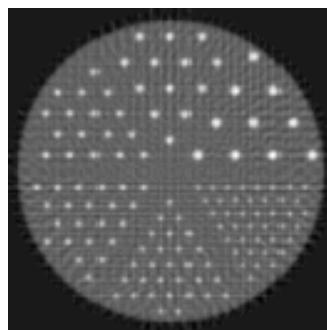


$$w(\rho) = \begin{cases} 0.5 \cdot (1 + \cos \pi \rho / \rho_c) & \text{si } \rho < \rho_c \\ 0 & \text{si } \rho \geq \rho_c \end{cases}$$

domaine fréquentiel

# Filtres classiques : filtre de Hann

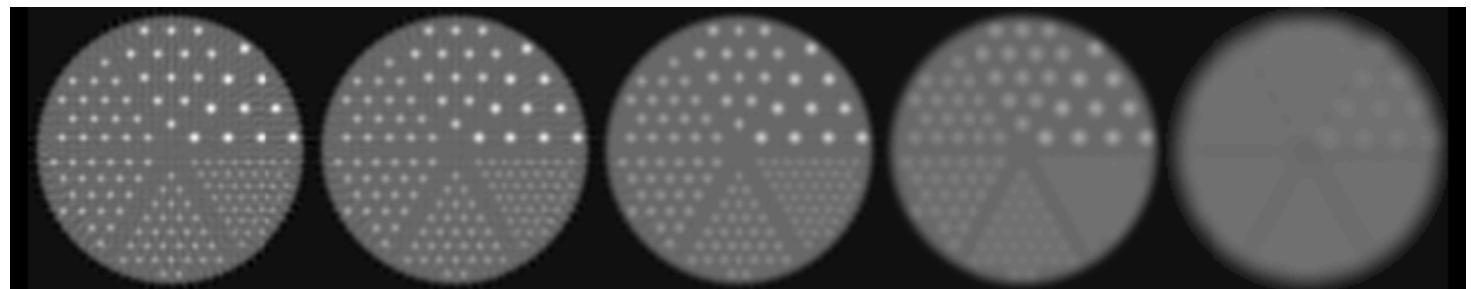
- Filtre rampe
  - meilleure résolution spatiale mais forte amplification du bruit haute fréquence



- Filtre de Hann

$$w(\rho) = \begin{cases} 0,5 \cdot (1 + \cos \pi \rho / \rho_c) & \text{si } \rho < \rho_c \\ 0 & \text{si } \rho \geq \rho_c \end{cases}$$

→ modifie les moyennes fréquences



0,5

0,4

0,3

0,2

0,1

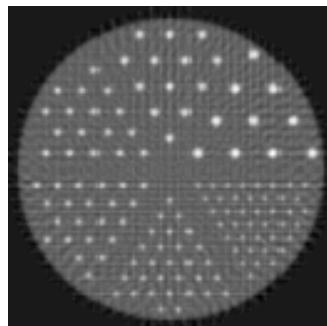
fréquence de coupure  $\rho_c$



→ plus faible est la fréquence de coupure, moins on préserve les détails “haute fréquence”, i.e., plus fort est le lissage

# Filtres classiques : filtre de Butterworth

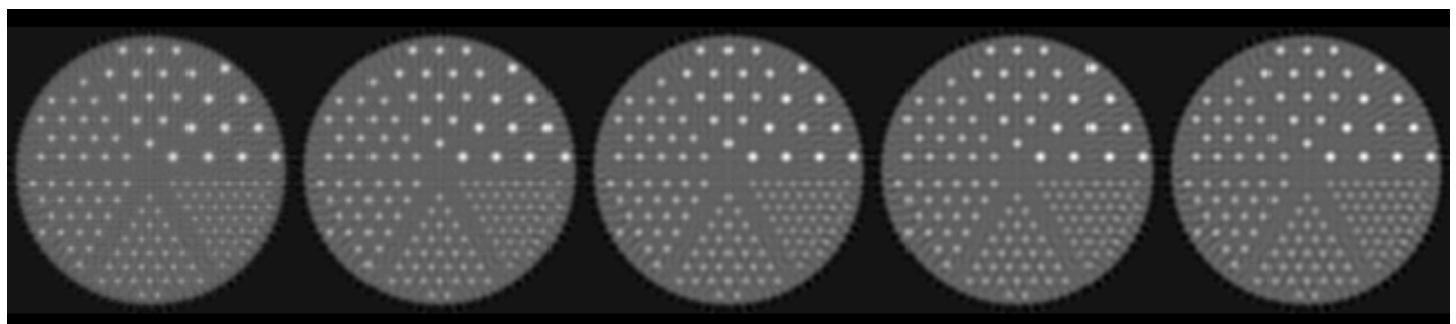
- Filtre rampe



- Filtre de Butterworth

$$w(\rho) = 1/[1+(\rho/\rho_c)^{2n}] \quad \text{si } \rho < \rho_c$$

→ 2 paramètres : fréquence de coupure  $\rho_c$  et ordre n



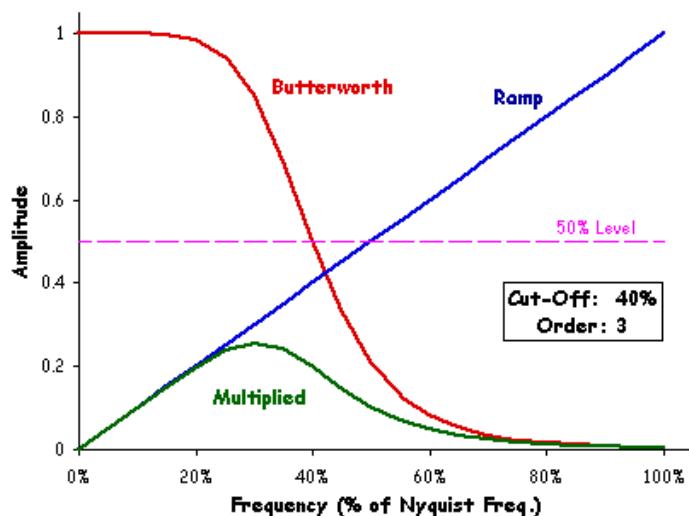
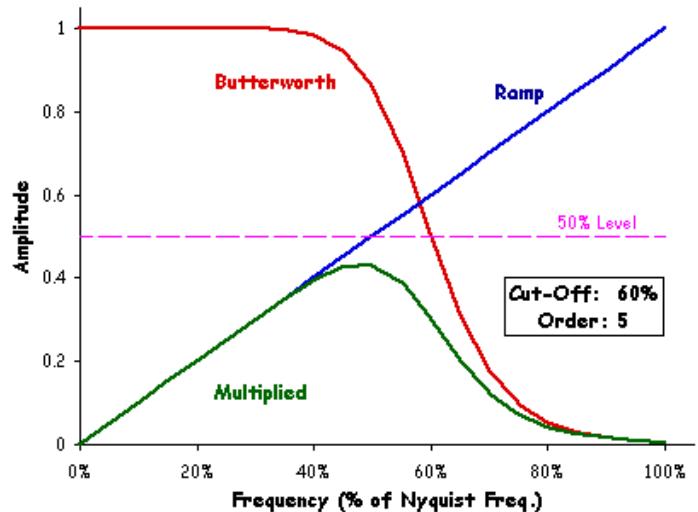
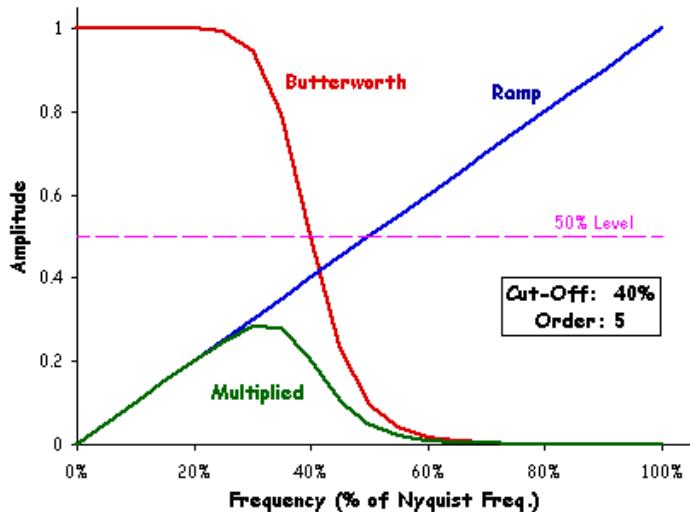
10                    8                    6                    4                    2

ordre n,  $\rho_c=0,25$



→ plus fort est l'ordre  
moins on préserve les détails “haute fréquence”, i.e.,  
plus fort est le lissage

# Filtres classiques : filtre de Butterworth



# Filtrage : différentes approches possibles

---

- Filtrage dans l'espace de Fourier



Propriété importante :

La multiplication dans le domaine de Fourier correspond à une convolution dans l'espace réel

$$P(\rho, \theta) \cdot W'(\rho)$$



$$p(u, \theta) \otimes w'(u)$$

# Filtrage : différentes approches possibles

- Filtrage dans l'espace de Fourier

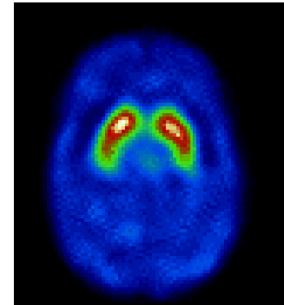


Propriété importante :

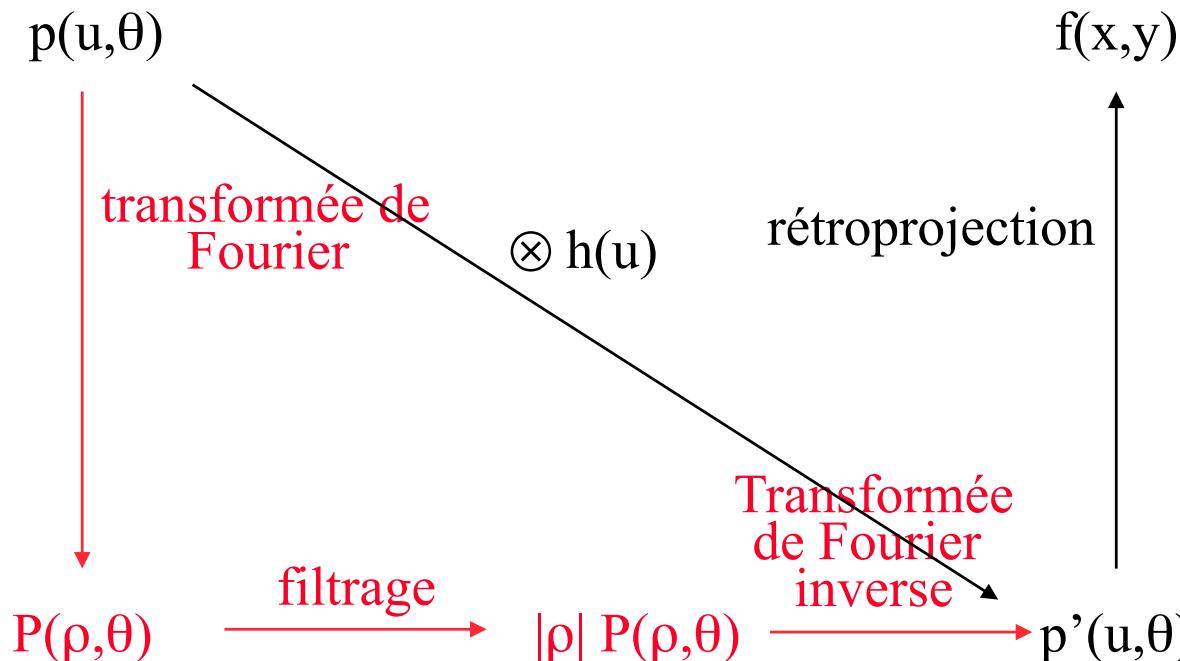
La multiplication dans le domaine de Fourier correspond à une convolution dans l'espace réel



sinogramme



coupe reconstruite

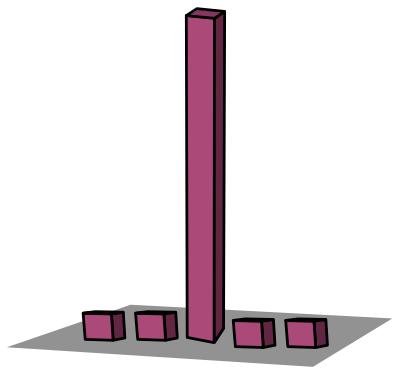


- Filtrage spatial

# Principe d'un filtre spatial en 1D

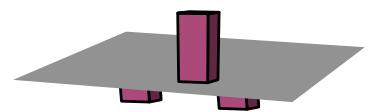
Projection originale

1	1	10	1	1
---	---	----	---	---



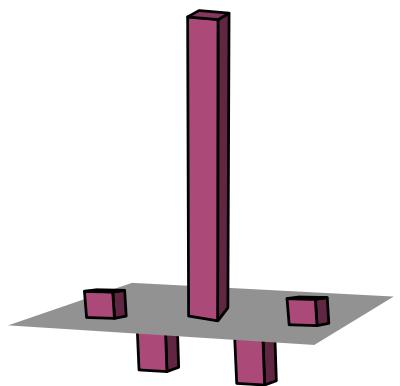
Filtre

-0,5	2	-0,5
------	---	------



Projection filtrée

1	-3,5	19	-3,5	1
---	------	----	------	---



# Exemple de filtrage dans l'espace des projections



- Calculer la rétropénétration filtrée ( $-0,5 ; 2 ; -0,5$ ) des projections mesurées (dupliquer les valeurs au bord)


8    16    6    4

6  
16  
8  
4


4    25    2    3

1  
25  
6  
2

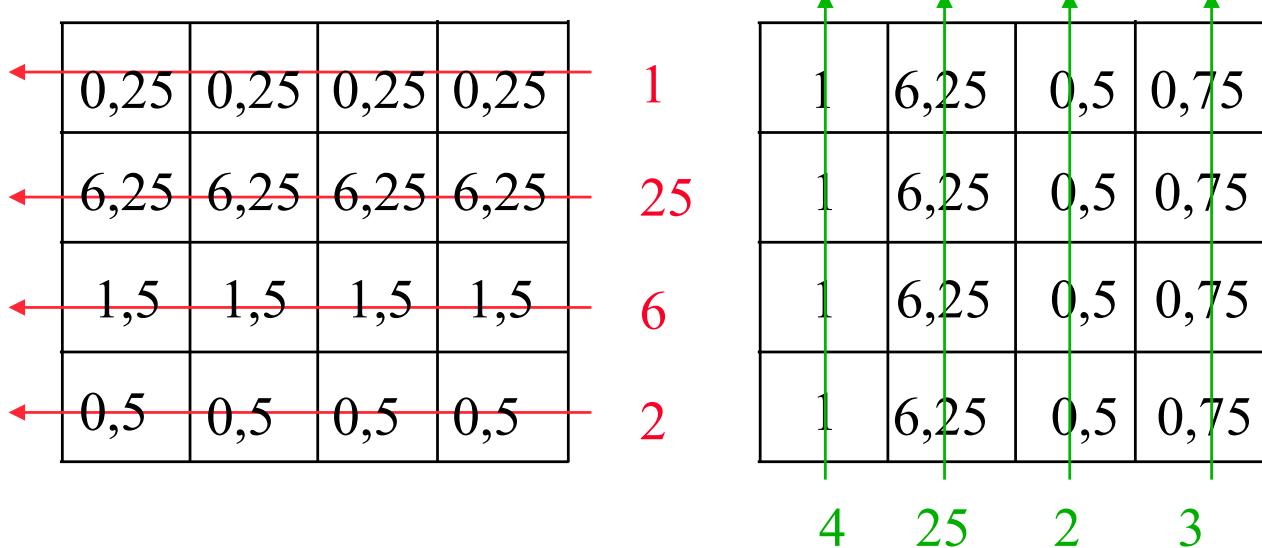
0,25	0,25	0,25	0,25
6,25	6,25	6,25	6,25
1,5	1,5	1,5	1,5
0,5	0,5	0,5	0,5

1  
25  
6  
2

1	6,25	0,5	0,75
1	6,25	0,5	0,75
1	6,25	0,5	0,75
1	6,25	0,5	0,75

4    25    2    3

# Formulation discrète de l'opération de rétroprojection



Moyenne :

$$\begin{aligned} \text{Rapport tumeur / fond} \\ = 6,25 / 1,4 = 4,5 \end{aligned}$$

0,62	3,25	0,4	0,5
3,6	6,25	3,37	3,5
1,25	3,87	1	1,1
0,75	3,37	0,5	0,62

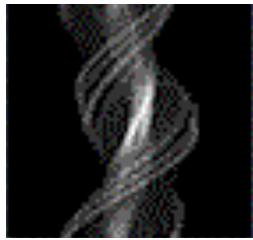
Image originale :

$$\begin{aligned} \text{Rapport tumeur / fond} \\ = 10 / 1 = 10 \end{aligned}$$

2	2	2	0
2	10	2	2
3	2	2	1
1	2	0	1

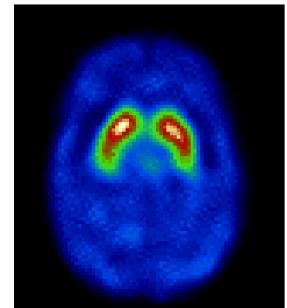
# Filtrage spatial 2D

- Filtrage des images reconstruites



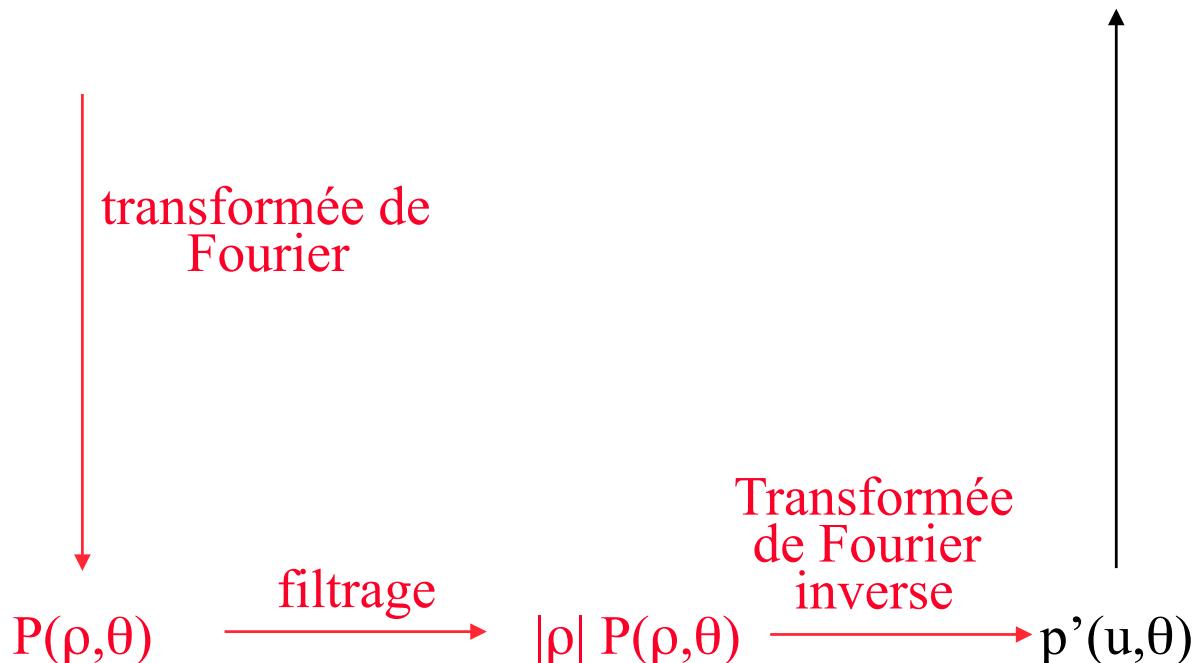
sinogramme

$$p(u, \theta)$$



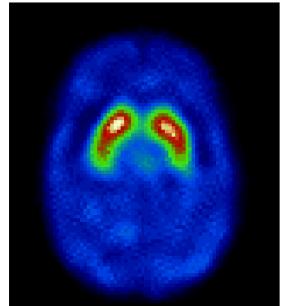
coupe reconstruite

$$f(x, y)$$



# Filtrage spatial 2D

- Filtrage des images reconstruites



sinogramme

coupe reconstruite

$p(u, \theta)$

$f(x, y)$

rétroprojection

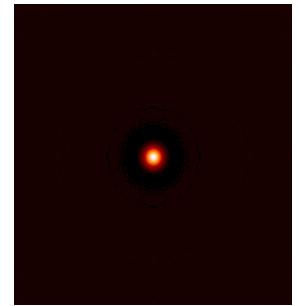
filtrage spatial  
 $\otimes g(x, y)$

$f'(x, y)$

# Principe d'un filtre spatial 2D

Image originale

0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	10	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0



Filtre

1/6

0	1	0
1	2	1
0	1	0

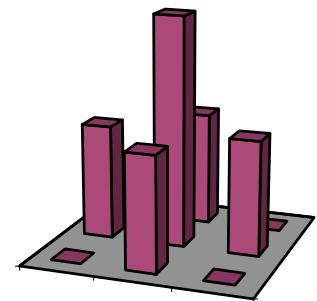
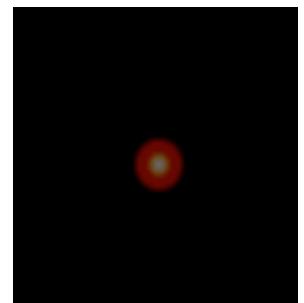


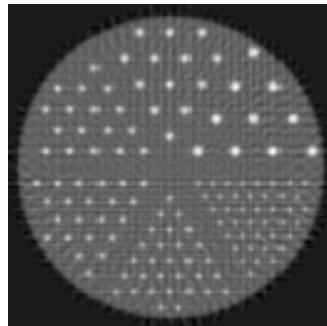
Image filtrée

0	0	0	0	0
0	0	1,7	0	0
0	1,7	3,3	1,7	0
0	0	1,7	0	0
0	0	0	0	0



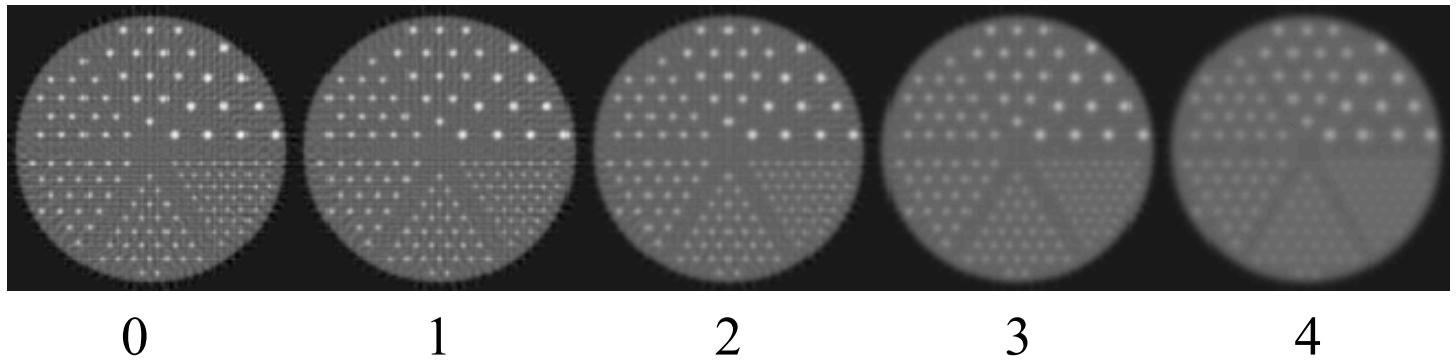
# Filtres classiques : filtre gaussien

- Filtre rampe



- Filtre gaussien (domaine spatial)

$$c(x) = \frac{1}{\sigma} \sqrt{2\pi} \cdot \exp[-(x-x_0)^2/2\sigma^2]$$



$$\text{FWHM} = 2\sqrt{2\ln 2} \sigma \text{ (pixel)}$$

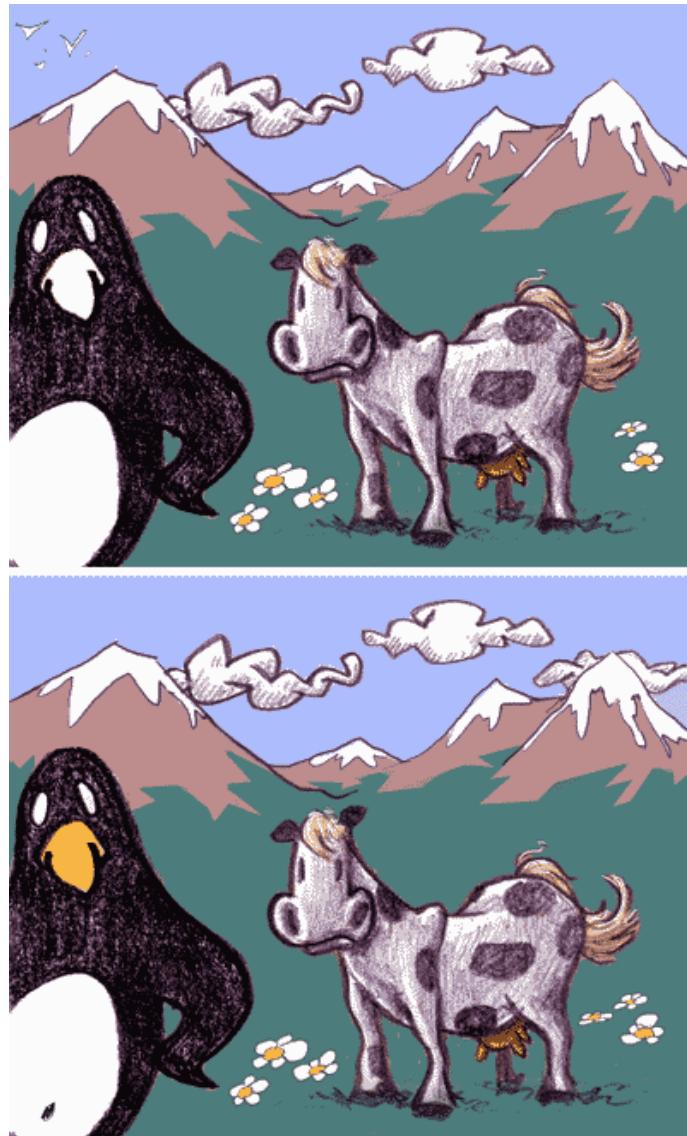
↑  
Caractérise l'étendue spatiale du filtre

→ plus grande est la dispersion du filtre gaussien (FWHM ou  $\sigma$ ), moins on préserve les détails “haute fréquence”, i.e., plus fort est le lissage



# Implémentation du filtre

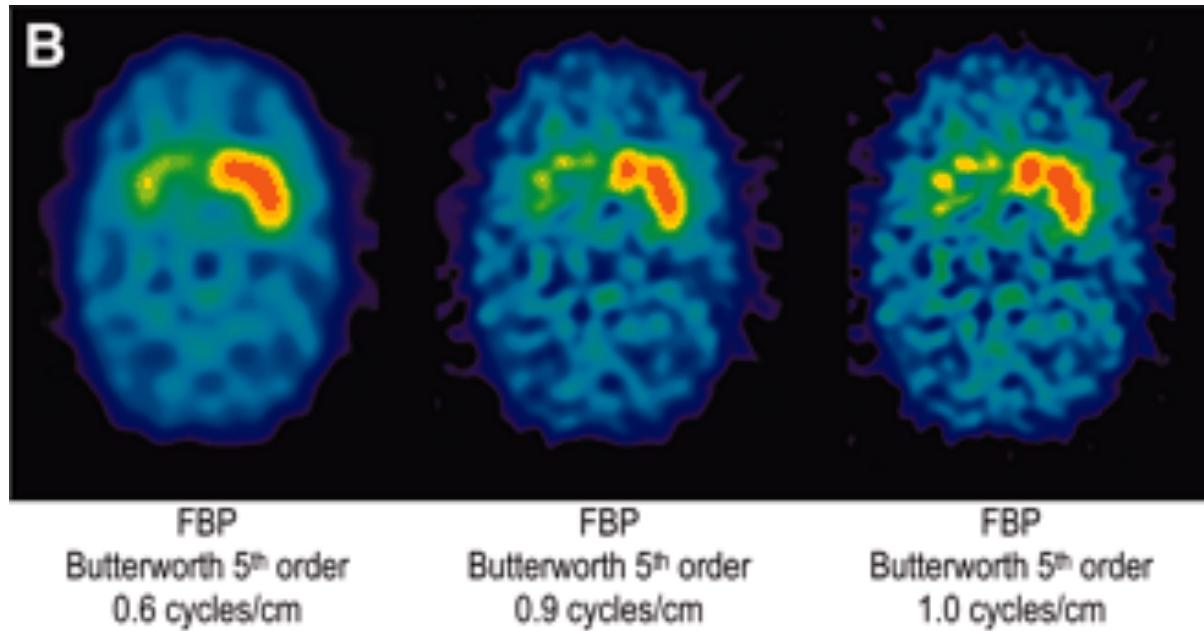
Il existe plusieurs façons d'implémenter un même filtre (e.g., espace spatial ou espace des fréquences) : l'usage d'un même filtre peut conduire à des résultats légèrement différents d'une console à l'autre



bec jaune, nombre pingouin, oiseaux, fleur, nuage, neige  
montagne... et oreille gauche de la jument

# Importance de l'optimisation du filtre

- Un même filtre n'est pas adapté à toutes les situations



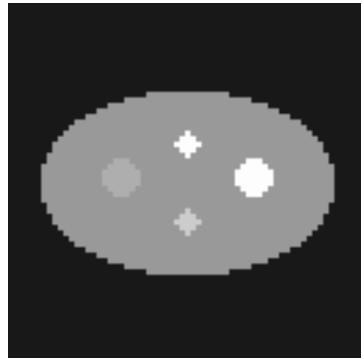
*Koch et al, J Nucl Med 2005*

Le filtre devrait être optimisé en fonction de la finalité des images (détection, quantification, ...), de la statistique de comptage, etc

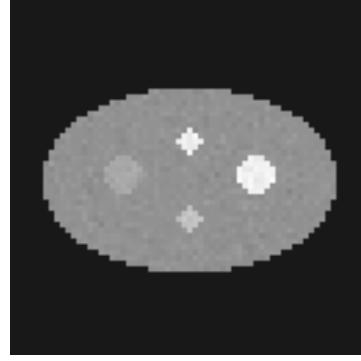


# Corrélation du bruit dans les images FBP

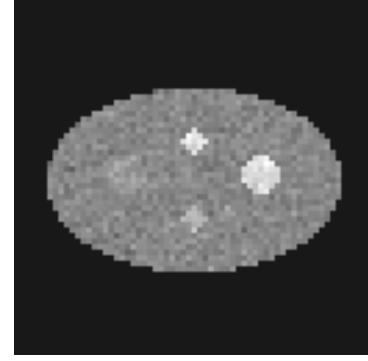
Le filtrage introduit une corrélation du bruit



coupe originale  
sans bruit

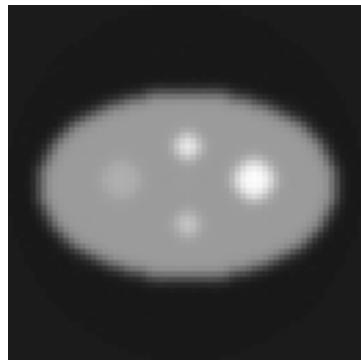


coupe originale  
bruit de Poisson  
(1 M de coups)

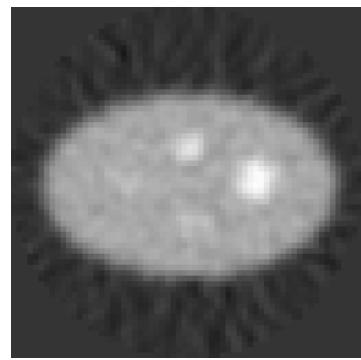


coupe originale  
bruit de Poisson  
(100 000 coups)

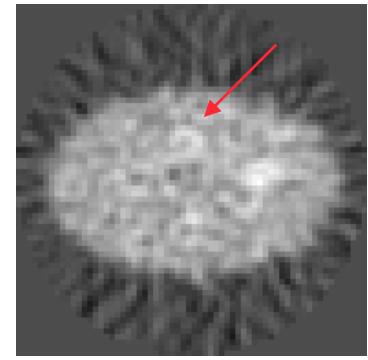
bruit non corrélé



coupe reconstruite  
FBP



coupe reconstruite  
FBP



coupe reconstruite  
FBP

bruit corrélé

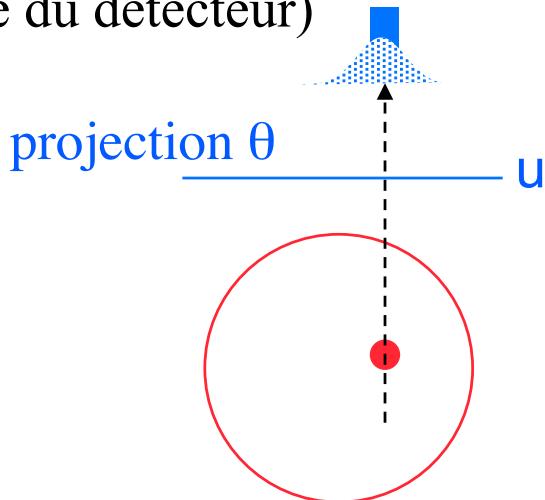
Ne pas confondre signal et bruit corrélé !

# Méthodes de reconstruction analytique : discussion

- Rapide, simple à implémenter



- Linéaire (fixation double, valeurs x 2 dans les images)
- Bruit / résolution spatiale réglables via le filtre
- Cependant, beaucoup d'approximations non vérifiées en pratique :
  - modèle de lignes intégrales (résolution spatiale parfaite du détecteur)



- pas de prise en compte des fluctuations statistiques
- pas de prise en compte des perturbations physiques (atténuation, diffusion)
- données bruitées et sous-échantillonnées

→ Approche alternative : la reconstruction discrète, ou itérative

# Deux approches à la reconstruction tomographique

---

- Les méthodes analytiques

$$R[f(x,y)] = \int_0^{\pi} p(u,\theta) d\theta$$

- Les méthodes discrètes (ou itératives)

$$p = R f$$

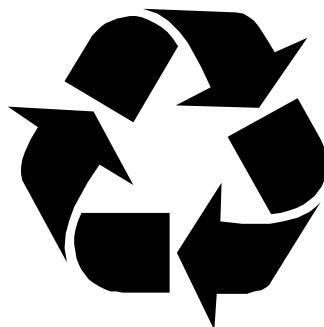
# Méthodes de reconstruction itératives : introduction

---

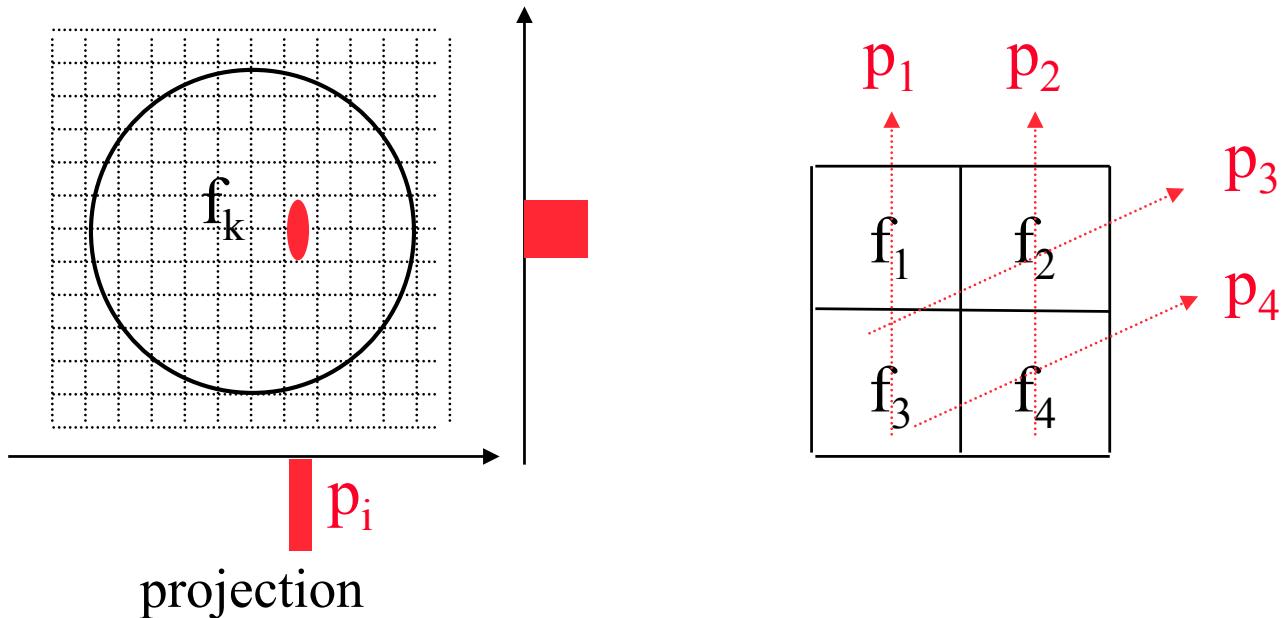
- Expression discrète et matricielle du problème de reconstruction tomographique  
Plus d'intégrales !

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & \cdots & \cdots & r_{14} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ r_{41} & \cdots & \cdots & r_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix}$$

- Inversion itérative du système d'équations



# Expression discrète du problème de reconstruction



$$\begin{aligned} p_1 &= r_{11} f_1 + r_{12} f_2 + r_{13} f_3 + r_{14} f_4 \\ p_2 &= r_{21} f_1 + r_{22} f_2 + r_{23} f_3 + r_{24} f_4 \\ p_3 &= r_{31} f_1 + r_{32} f_2 + r_{33} f_3 + r_{34} f_4 \\ p_4 &= r_{41} f_1 + r_{42} f_2 + r_{43} f_3 + r_{44} f_4 \end{aligned}$$

En pratique :  
système d'équations de grande taille  
128 projections 128 x 128

2 097 152 équations à autant d'inconnues

# Expression matricielle du problème de reconstruction

$$\begin{aligned} p_1 &= r_{11} f_1 + r_{12} f_2 + r_{13} f_3 + r_{14} f_4 \\ p_2 &= r_{21} f_1 + r_{22} f_2 + r_{23} f_3 + r_{24} f_4 \\ p_3 &= r_{31} f_1 + r_{32} f_2 + r_{33} f_3 + r_{34} f_4 \\ p_4 &= r_{41} f_1 + r_{42} f_2 + r_{43} f_3 + r_{44} f_4 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34} \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} & r_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix}$$

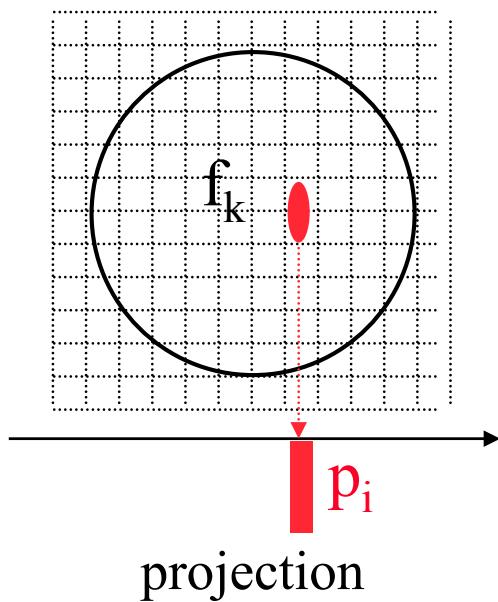
$$p = R f$$

↑                    ↑                    ↑  
projections      opérateur      objet à  
acquises        de projection    reconstruire

➡ Problème : déterminer  $f$  connaissant  $p$  et  $R$

# A quoi correspond R ?

$$p = R f$$

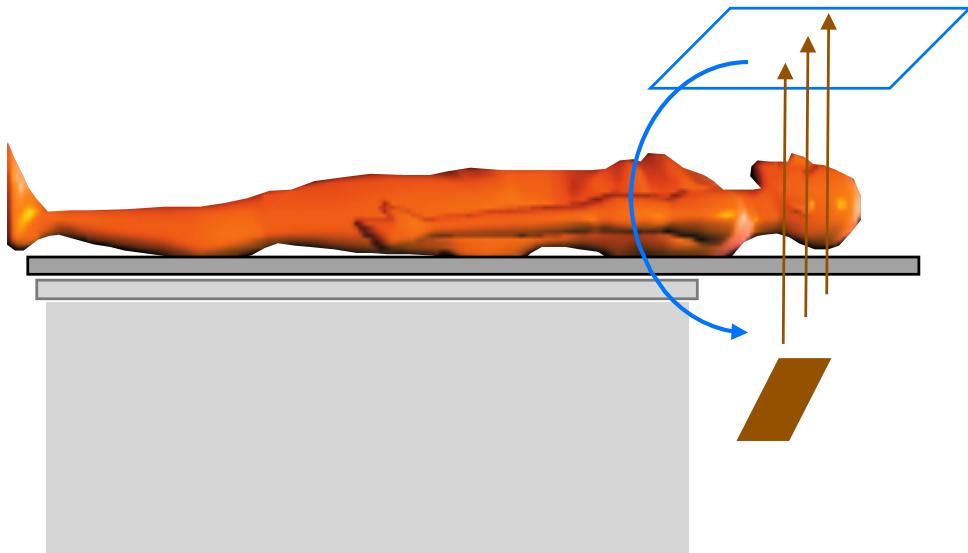


R décrit le processus de projection, i.e. le processus de formation des images : modélisation du modèle direct

$R_{ik}$  : probabilité qu'un événement émis dans le pixel  $k$  soit détecté dans le pixel de projection  $i$

$R$  = matrice système

# Dimension du problème



$$p = R f$$

projections acquires      opérateur de projection      objet à reconstruire

$$\begin{aligned}
 p_1 &= r_{11} f_1 + r_{12} f_2 + \dots + r_{1F} f_F \\
 p_2 &= r_{21} f_1 + r_{22} f_2 + \dots + r_{2F} f_F \\
 &\dots \\
 p_P &= r_{P1} f_1 + r_{P2} f_2 + \dots + r_{PF} f_F
 \end{aligned}$$

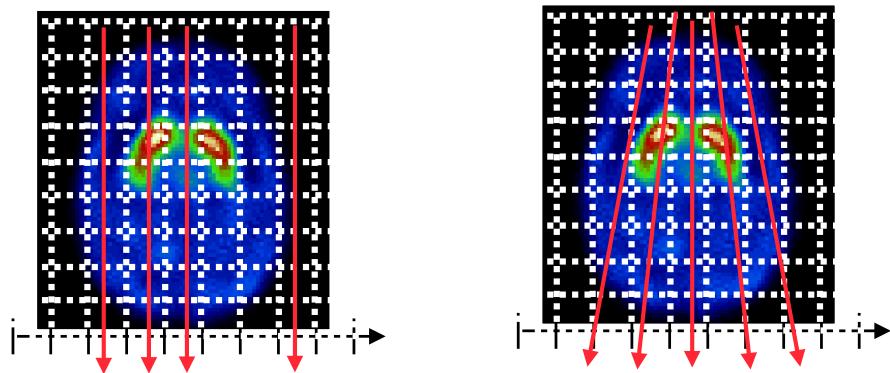
$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1F} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{P1} & \cdots & r_{PF} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_F \end{bmatrix}$$

- Exemple : 256 projections de 64 lignes (direction axiale) et 128 colonnes (bins de projection)
    - Pour reconstruire une coupe :
- 128 x 256 équations  
 128 x 128 inconnues  
 R est une matrice (128 x 256 ; 128 x 128)

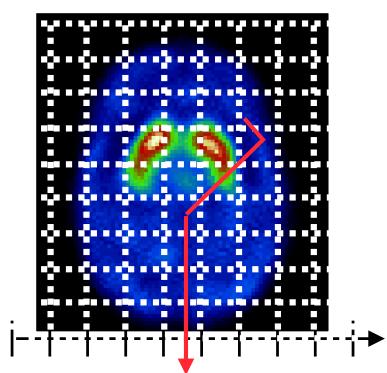
# Expression de l'opérateur de projection R

Deux aspects

- Modélisation de la géométrie de détection

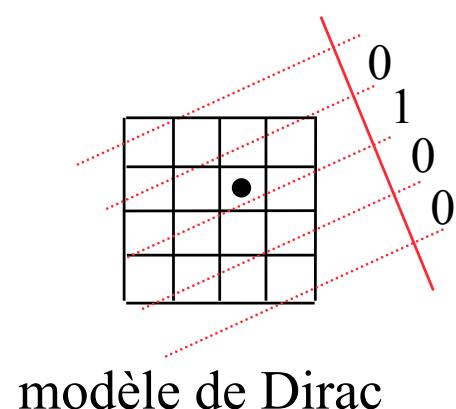
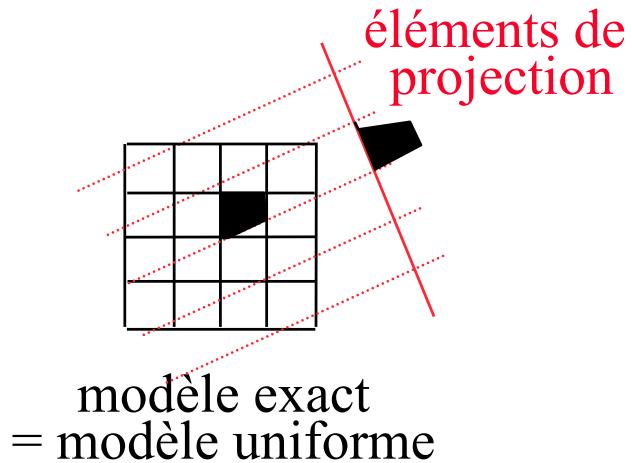


- Modélisation de la physique de détection

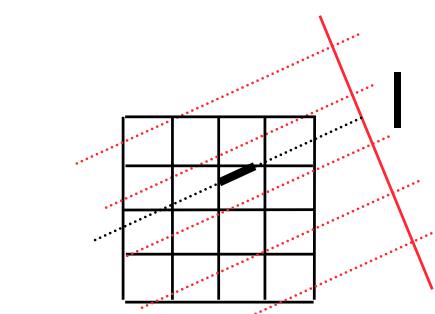


# Modélisation géométrique de l'opérateur R

- Modèle de distribution de l'intensité des pixels : détermination de la contribution de chaque pixel  $i$  à un élément de projection  $k$



modèle de Dirac

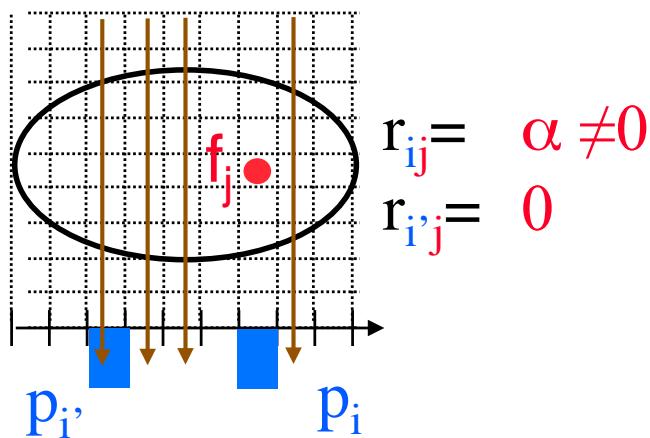


modèle de longueur  
de raies

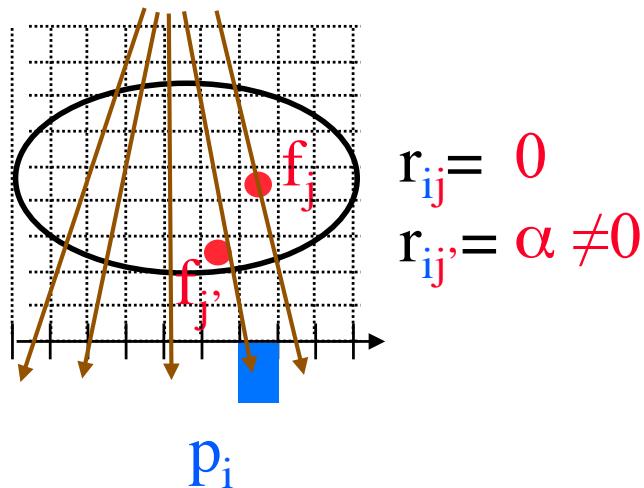
# Modélisation géométrique de l'opérateur R

- Modèle de la géométrie de détection (collimation)

géométrie parallèle

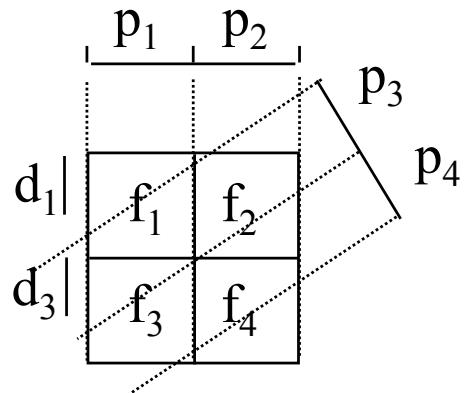


géométrie en éventail



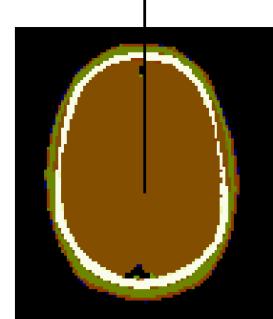
# Modélisation physique de l'opérateur R (1)

- Atténuation du signal (SPECT et PET)



contribution géométrique

$$p_1 = g_{11}f_1 \exp(-\mu_1 d_1) + g_{13}f_3 \exp(-\mu_3 d_3 - 2\mu_1 d_1)$$



carte des  $\mu$

Dans ce cas :

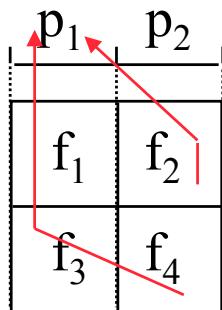
$$r_{11} = g_{11} \exp(-\mu_1 d_1)$$

$$r_{13} = g_{13} \exp(-\mu_3 d_3 - 2\mu_1 d_1)$$

## Modélisation physique de l'opérateur R (2)

---

- Diffusion (SPECT et PET)



sans modélisation de la diffusion :

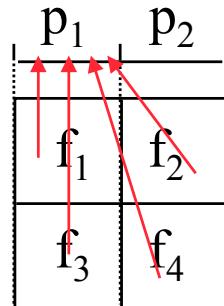
$$p_1 = r_{11} f_1 + r_{13} f_3$$

avec modélisation de la diffusion :

$$p_1 = r_{11} f_1 + r_{12} \textcolor{red}{f}_2 + r_{13} f_3 + r_{14} \textcolor{red}{f}_4$$

# Modélisation physique de l'opérateur R (3)

- Réponse du détecteur

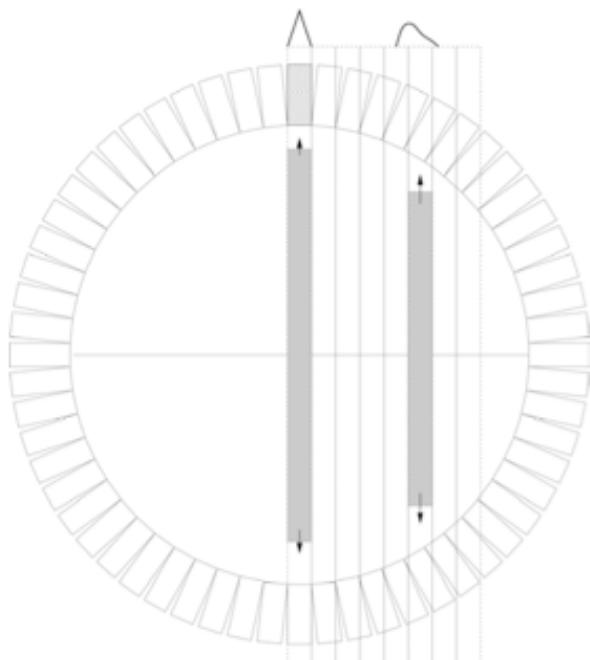


sans modélisation de la fonction de réponse du détecteur :

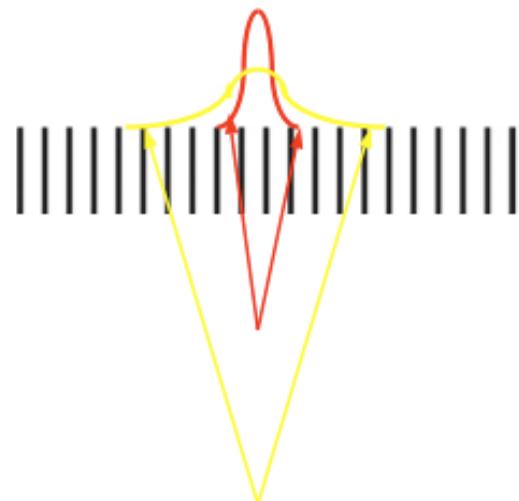
$$p_1 = r_{11} f_1 + r_{13} f_3$$

avec modélisation :

$$p_1 = r_{11} f_1 + r_{12} \textcolor{red}{f}_2 + r_{13} f_3 + r_{14} \textcolor{red}{f}_4$$



PET



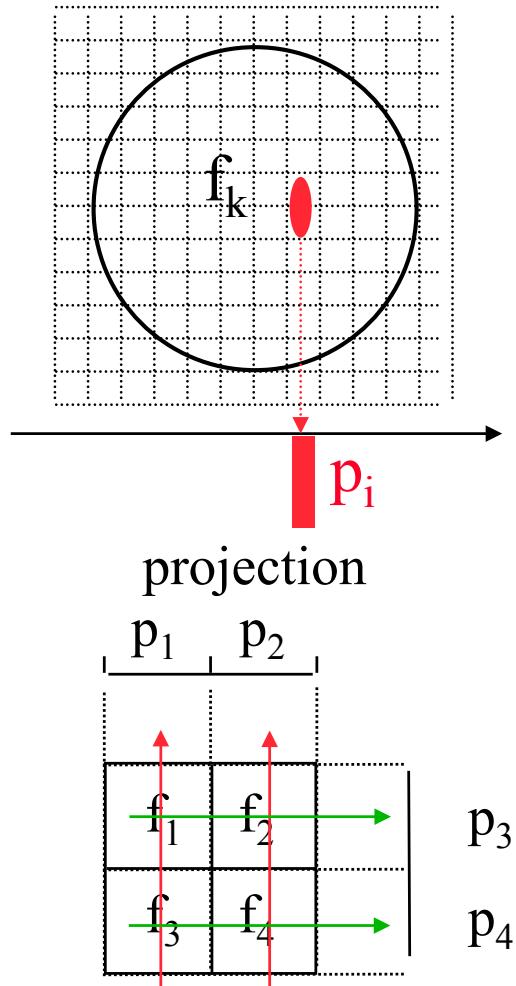
SPECT

# Modélisation physique de l'opérateur R (4)

---

- Modélisation avancée
  - modélisation du mouvement (respiratoire) en répercutant des déformations sur R (travaux de recherche)

# Opérateur de projection R discret



$$\begin{aligned} p_1 &= f_1 + f_3 \\ p_2 &= f_2 + f_4 \\ p_3 &= f_1 + f_2 \\ p_4 &= f_3 + f_4 \end{aligned}$$



$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

# Mise en oeuvre

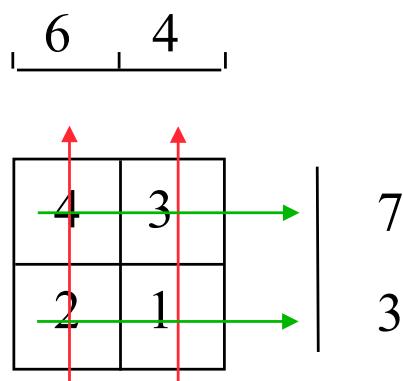
---

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

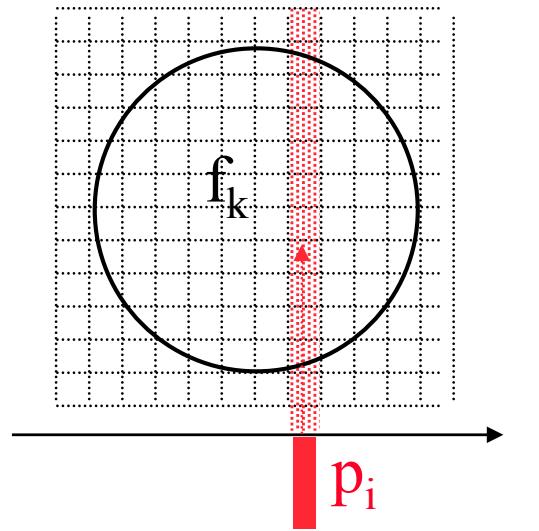
Calculer les projections de l'objet (4 3 2 1) :

$$\begin{array}{c} 6 \\ 4 \\ 7 \\ 3 \end{array} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \dots \\ p_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

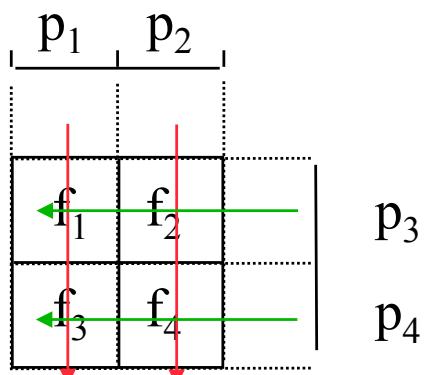
Représentation totalement équivalente :



# Opérateur de rétroprojection discret



rétroréprojection



$$f^*_1 = p_1 + p_3$$

$$f^*_2 = p_2 + p_3$$

$$f^*_3 = p_1 + p_4$$

$$f^*_4 = p_2 + p_4$$

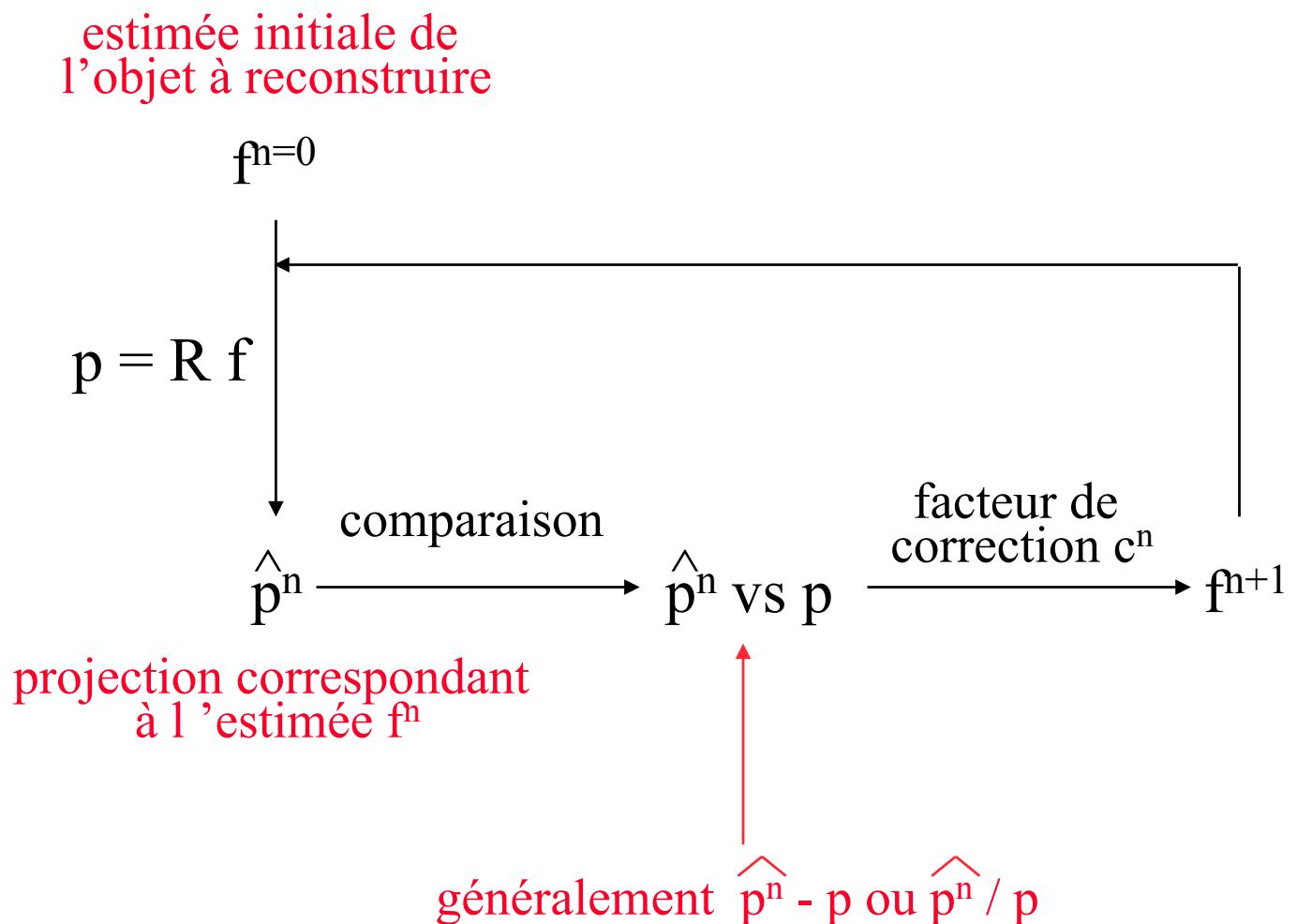


$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = R^t$$

# Résolution du problème inverse

$$p = R f$$

Recherche d'une solution  $f$  minimisant une distance  
 $d(p, Rf)$ ,  $p$  et  $R$  étant connus



# Deux classes de méthodes discrètes itératives

---

- Méthodes algébriques

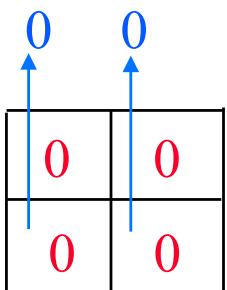
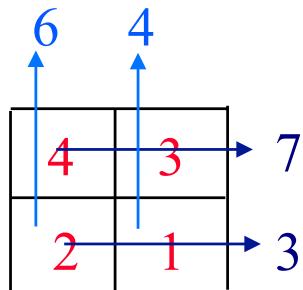
- méthodes itératives conventionnelles résolvant un système d'équations linéaires
  - minimisent  $\|p - R f\|^2$
  - ART, SIRT, ILST, gradient conjugué, etc

- Méthodes statistiques

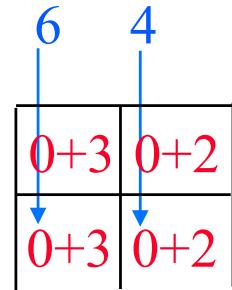
- estimation bayesienne
- prennent en compte le bruit dans les données
- maximisent une fonction de vraisemblance
- MLEM, OSEM, RAMLA, DRAMA

# Exemple de méthode algébrique : ART

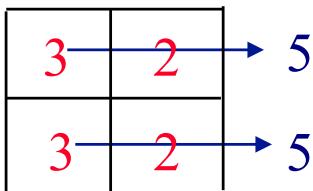
- Algebraic reconstruction technique



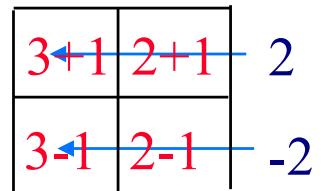
comparaison par soustraction



rétroprojection des différences

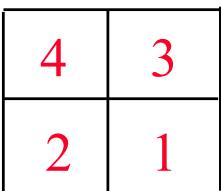


f1



comparaison par soustraction

rétroprojection des différences



f2

# A vous !

---



6      4


2  
8

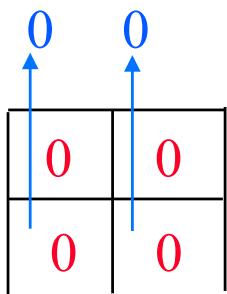
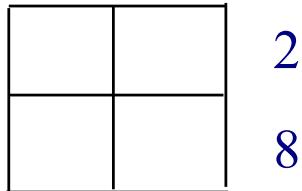
0	0
0	0

f0

# Solution par ART

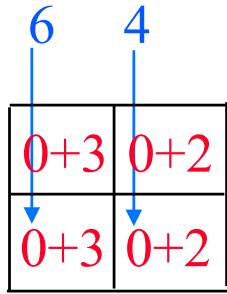
---

6      4

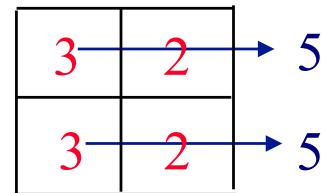


f0

comparaison par  
soustraction

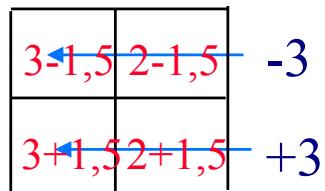


rétroprojection  
des différences



f1

comparaison par  
soustraction



rétroprojection  
des différences



f2

# Inconvénients des méthodes algébriques

---

- Les méthodes algébriques ignorent le bruit présent dans les données
- Elles consistent uniquement à résoudre un grand système d'équations linéaires

Les méthodes statistiques modélisent les propriétés statistiques :

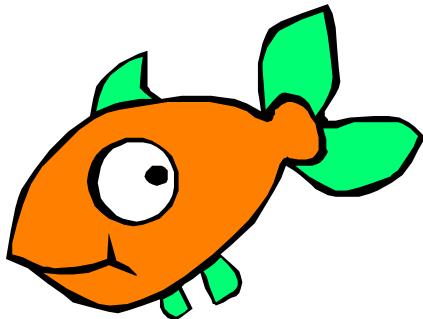
- des projections mesurées
- de l'objet à reconstruire (méthodes bayesiennes)



# Importance de modéliser le bruit des projections

---

- Bruit de Poisson (comptage)



- PET Gemini TF
  - 44 couronnes de 644 cristaux LSO (4 mm x 4 mm x 22 mm)
  - $\sim 4.10^8$  lignes de réponses joignant 2 cristaux

On injecte  $\sim 10$  mCi = 370 MBq  
Acquisition de 5 min

Nombre de désintégrations  $\beta^+$  =  $370.10^6 \times 5 \times 60 = 1,11.10^{11}$

Effet de l'atténuation :  $\exp(-0,097 \times 30) = 0,0544$   
soit  $6.10^9$  coincidences arrivant sur le détecteur

Effet de l'efficacité (2%)  
soit  $1,2.10^8$  coincidences détectées

Soit  $1,2.10^8 / 4.10^8 = 0,3$  coïncidence par LOR !

# Méthode statistique : MLEM

---

- MLEM = Maximum Likelihood Expectation Maximization
- Utilise une formulation probabiliste du problème de reconstruction : suppose que les données mesurées (sinogrammes ou projections) obéissent à une statistique de Poisson



1781-1840

Avantage : modélise explicitement le bruit dans les données



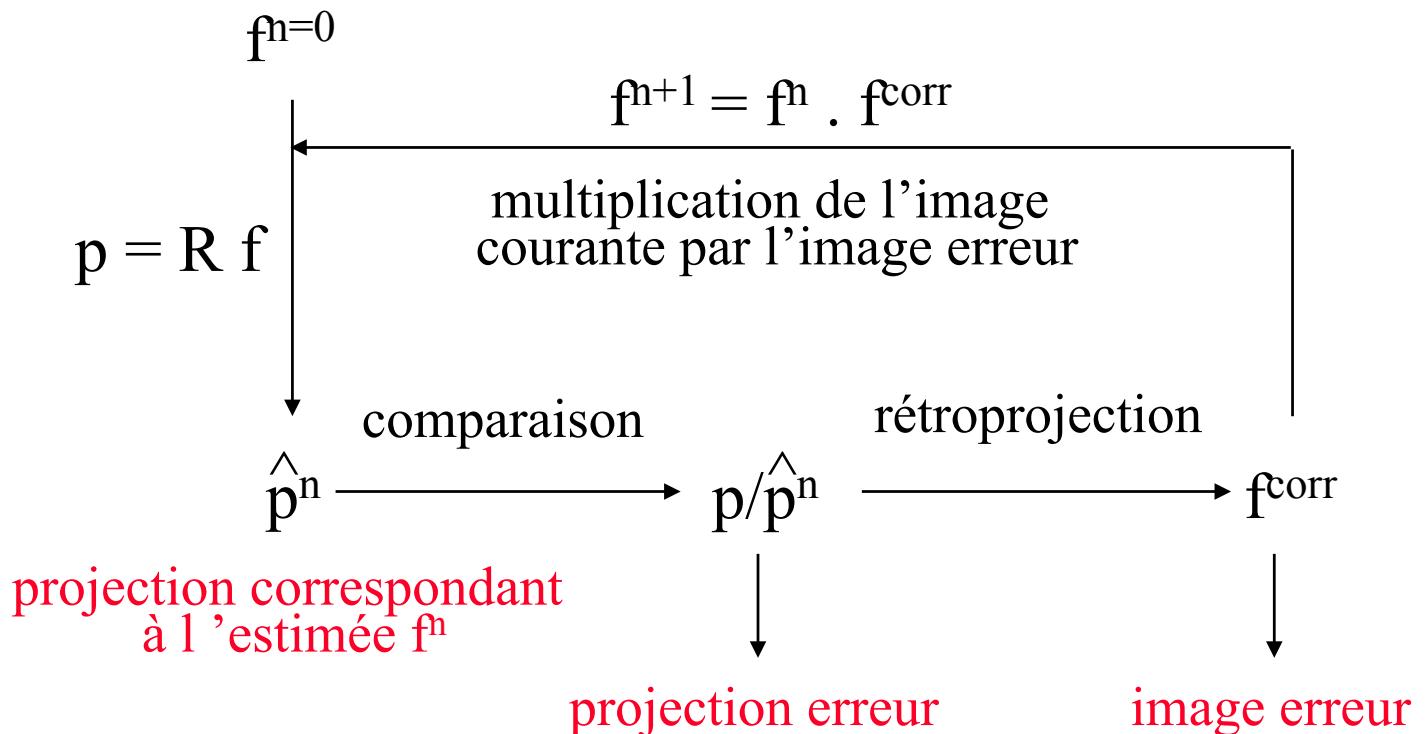
Ceci implique que si on modifie les projections avant la reconstruction, il se peut que MLEM ne soit plus adapté théoriquement

# Algorithme MLEM

- Formule de mise à jour :

$$f^{n+1} = f^n \cdot R^t [ p / p^n ]$$

estimée initiale de l'objet à reconstruire



- On part d'une estimée  $f^n$
- On calcule sa projection :  $p^n = R f^n$ .
- On fait le rapport avec les projections mesurées :  $p/p^n$
- On rétroprojette  $R^t[p/p^n]$
- On normalise ( $\times 1/s$ ) par la sensibilité  $s$  du scanner et on multiplie par l'estimée courante  $f^n$  de l'image :  $f^{n+1}$

# Algorithme MLEM

---



Propriétés de MLEM :

- \* solution toujours positive ou nulle
- \* convergence lente
- \* méthode itérative la plus utilisée en SPECT  
(dans sa version accélérée OSEM)
- \* non linéaire !

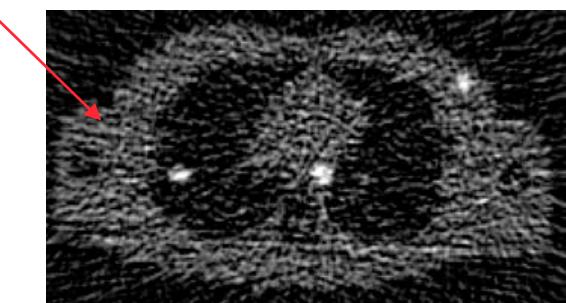
Par exemple, pour une acquisition TEP synchronisée à la respiration, l'image reconstruite à partir des données non synchronisées n'est pas identique à la somme des images synchronisées !

- \* biais (sur-estimation de l'activité) dans les régions à très faible signal

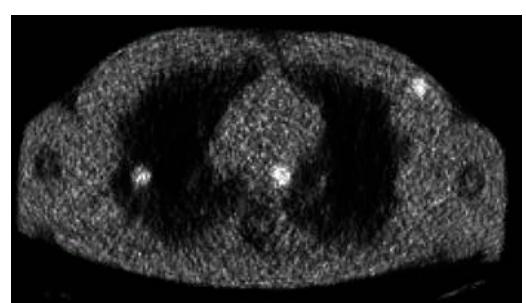
# Exemple

---

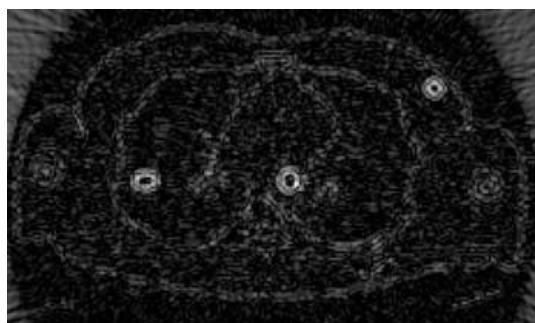
FBP (Hamming)



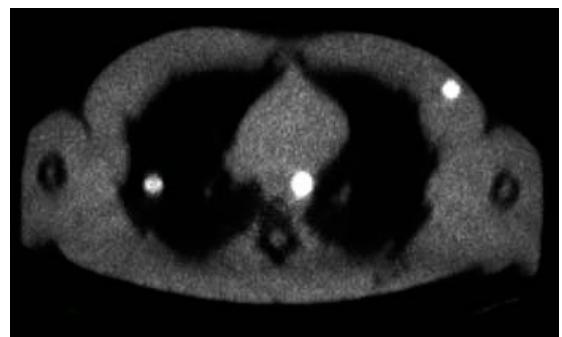
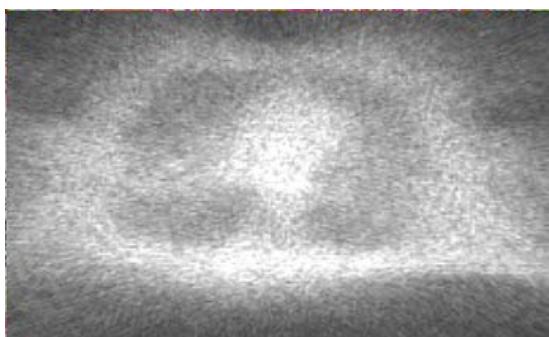
MLEM  
(32 itérations)



Images reconstruites



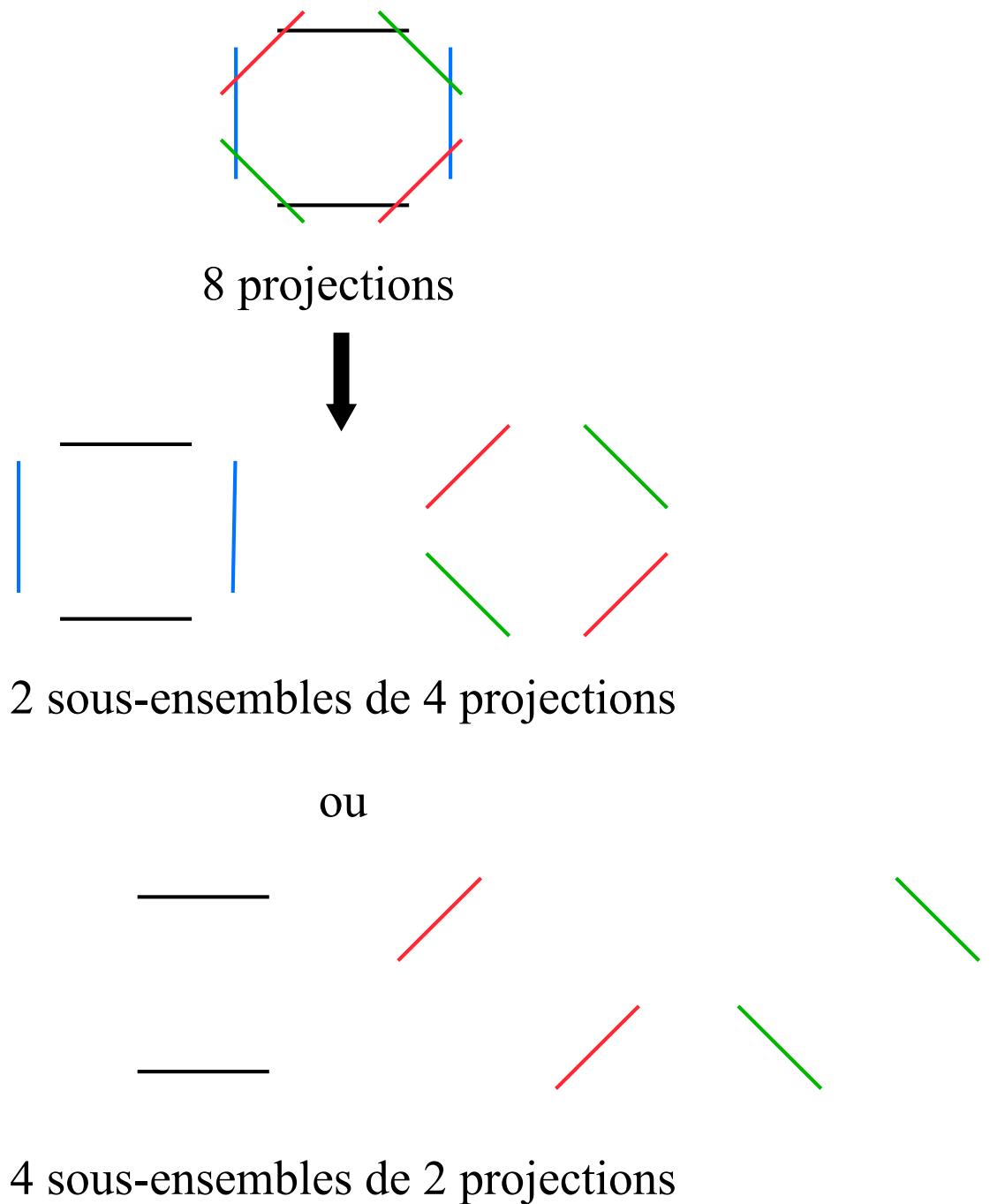
Biais ( $\hat{f} - f$ )



Variance

# Version accélérée de MLEM : OSEM

- OSEM = Ordered Subset Expectation Maximisation
  - Tri des  $P$  projections en sous-ensembles ordonnés
- Exemple :



# Version accélérée de MLEM : OSEM

---

- Application de MLEM sur les sous-ensembles :

- itération 1 :

estimation de  $f^1$  à partir de l'initialisation  $f^0$  et des projections  $p^1$  correspondant au sous-ensemble 1

$$f^1 = f^0 \cdot R^t [ p / p^1 ]$$

estimation de  $f'^1$  à partir de  $f^1$  et des projections  $p'^1$  correspondant au sous-ensemble 2

$$f'^1 = f^1 \cdot R^t [ p / p'^1 ]$$

- itération 2 :

estimation de  $f^2$  à partir de  $f'^1$  et des projections  $p^2$  correspondant au sous-ensemble 1

$$f^2 = f^1 \cdot R^t [ p / p^2 ]$$

estimation de  $f'^2$  à partir de  $f^2$  et des projections  $p'^2$  correspondant au sous-ensemble 2

$$f'^2 = f^2 \cdot R^t [ p / p'^2 ]$$

etc.

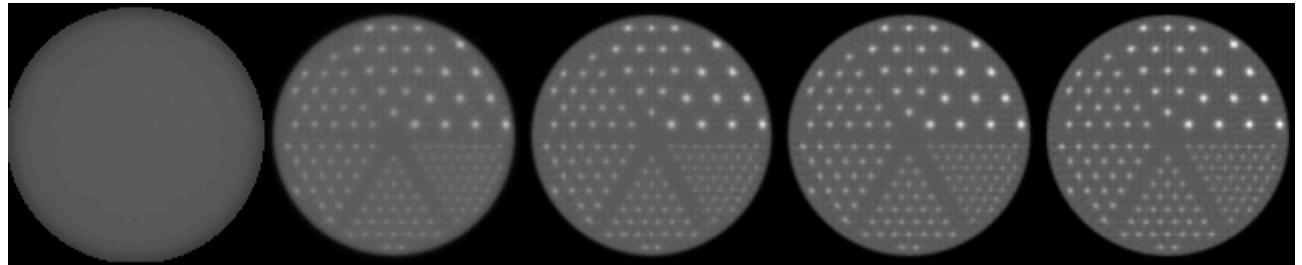
OSEM avec S sous-ensembles et I itérations  
↔ SI itérations de MLEM  
mais S fois plus rapide !!!

Attention : utiliser au moins 4 projections par sous-ensemble !

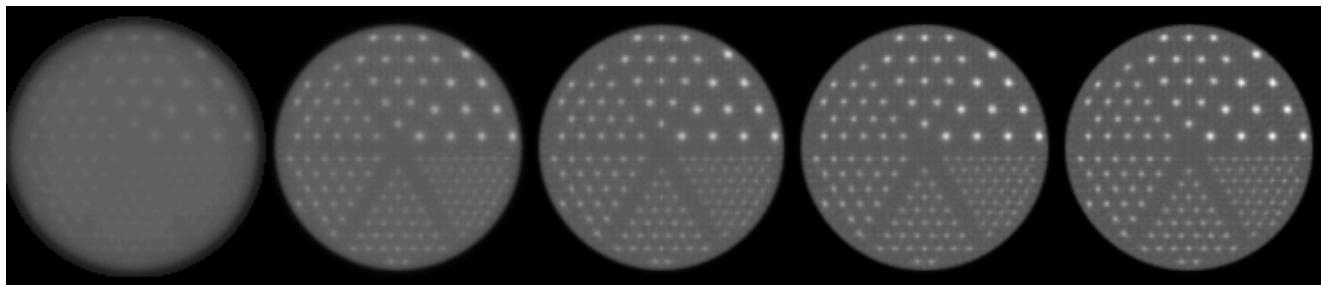
# Caractéristiques de OSEM



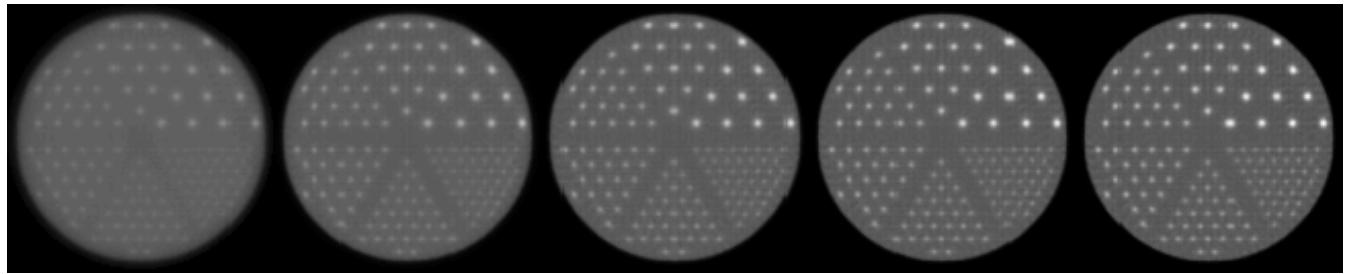
MLEM 1      16      24      32      40      itér.



OSEM 1  
4 ss-ens.      4      6      8      10      itér.



OSEM 1  
8 ss-ens.      2      3      4      5



Spécifier un nombre d'itérations OSEM sans nombre de sous-ensembles n'a pas de sens !

# Composantes génériques d'un algorithme itératif

---

5 composantes à définir :

- description de la « représentation » de la distribution d'activité
  - matrice de voxels
  - fonctions « blobs »
- matrice système R
  - décrit le lien entre objet et mesure
  - intègre les effets géométriques et physiques
- modèle associé aux données
  - données suivant une statistique de Poisson
  - données suivant une distribution gaussienne
- fonction objectif
  - log-vraisemblance
  - maximum a posteriori
  - moindres carrés pondérés
  - ...
- stratégie d'optimisation de la fonction objectif
  - maximisation de l'espérance
  - algorithme de descente
  - ...

Tous les algorithmes itératifs peuvent être décrits ainsi et varient par ces composantes

## Autres algorithmes itératifs

---



- RAMLA (row action maximum likelihood algorithm) est un cas particulier de OSEM :
  - le nombre de sous-ensembles est égal au nombre de projections
  - un paramètre de relaxation permet de contrôler le bruit
  - chez Philips, RAMLA est utilisé avec une base de fonctions « blobs », mais ceci n'est pas inhérent à RAMLA
- DRAMA, SAGE, SMART, Gradient Conjugué, ...

# Caractéristiques des méthodes itératives

- Plus élevé est le nombre d'itérations, meilleure est la restitution des hautes fréquences



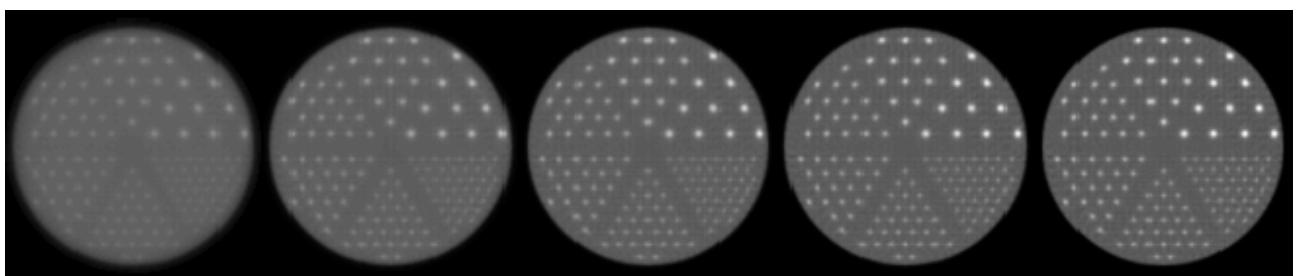
OSEM 1  
8 ss-ens.

2

3

4

5

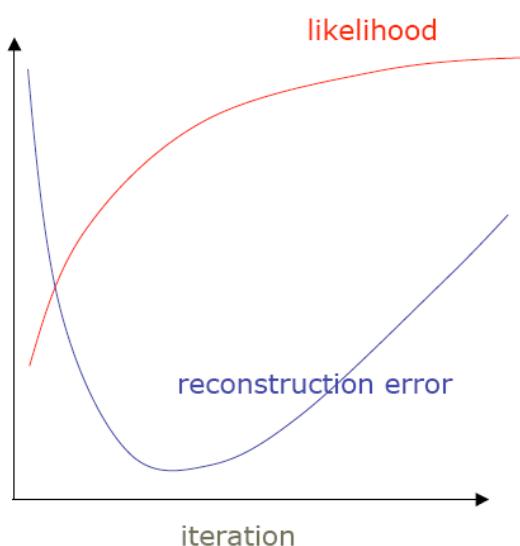
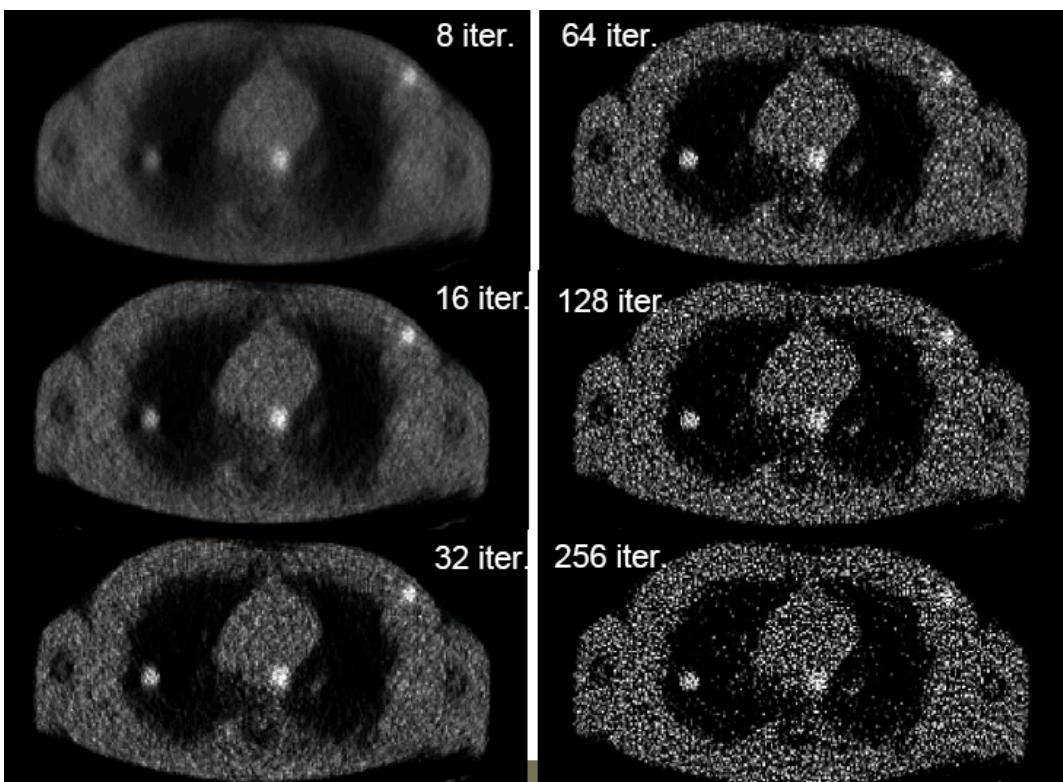


- Le choix du nombre d'itérations conditionne le compromis résolution spatiale vs bruit (comme le filtre en rétroposition filtrée)
- Le nombre d'itérations devrait être optimisé en fonction de la finalité des images (comme le filtre en rétroposition filtrée)

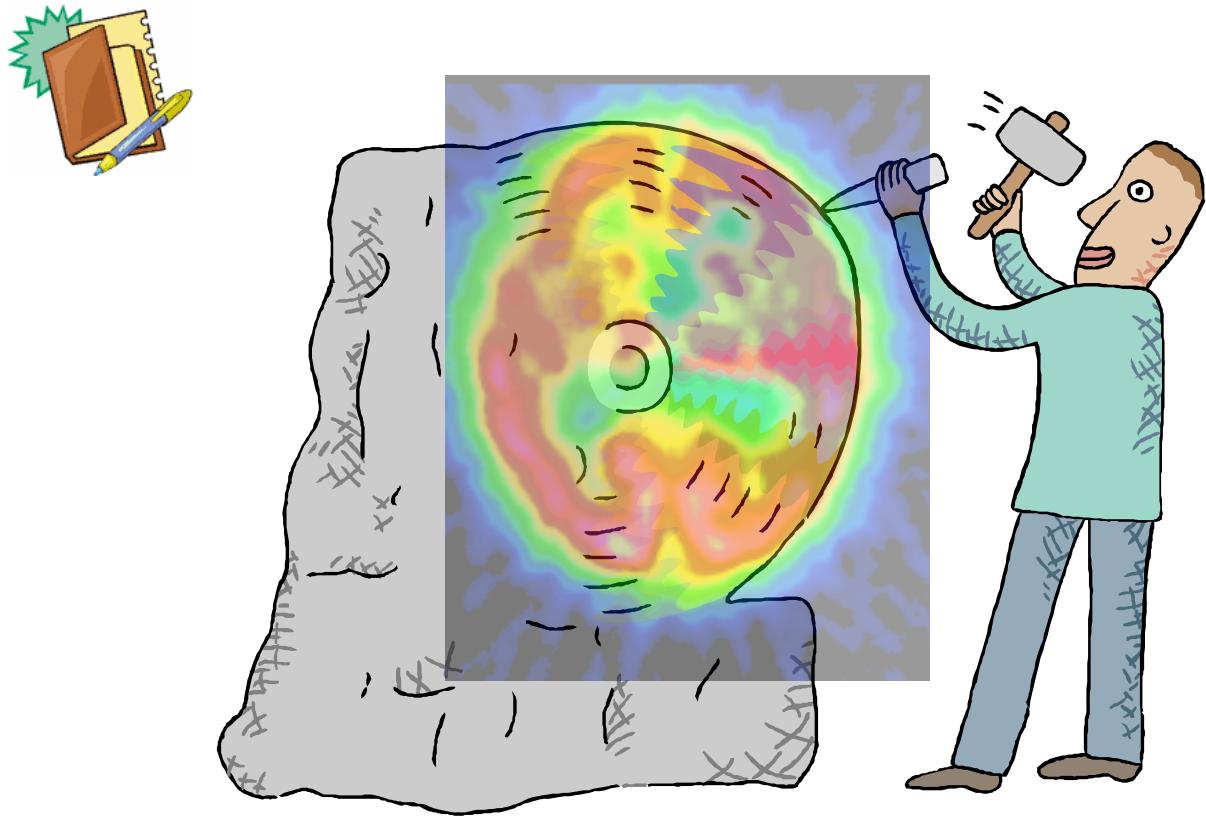
# Caractéristiques des méthodes itératives

- Problème du choix du nombre d’itérations

- convergence vers la solution puis divergence de la procédure lors de la reconstruction des très hautes fréquences du fait de la présence de bruit (haute fréquence)



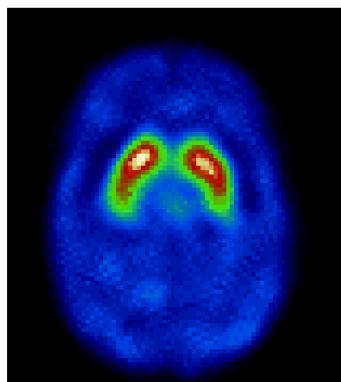
# Régularisation



Faire tendre la solution vers ce à quoi on s'attend



peu probable



probable

Pénaliser les solutions peu probables et favoriser les solutions compatibles avec des a priori

# Trois approches de régularisation

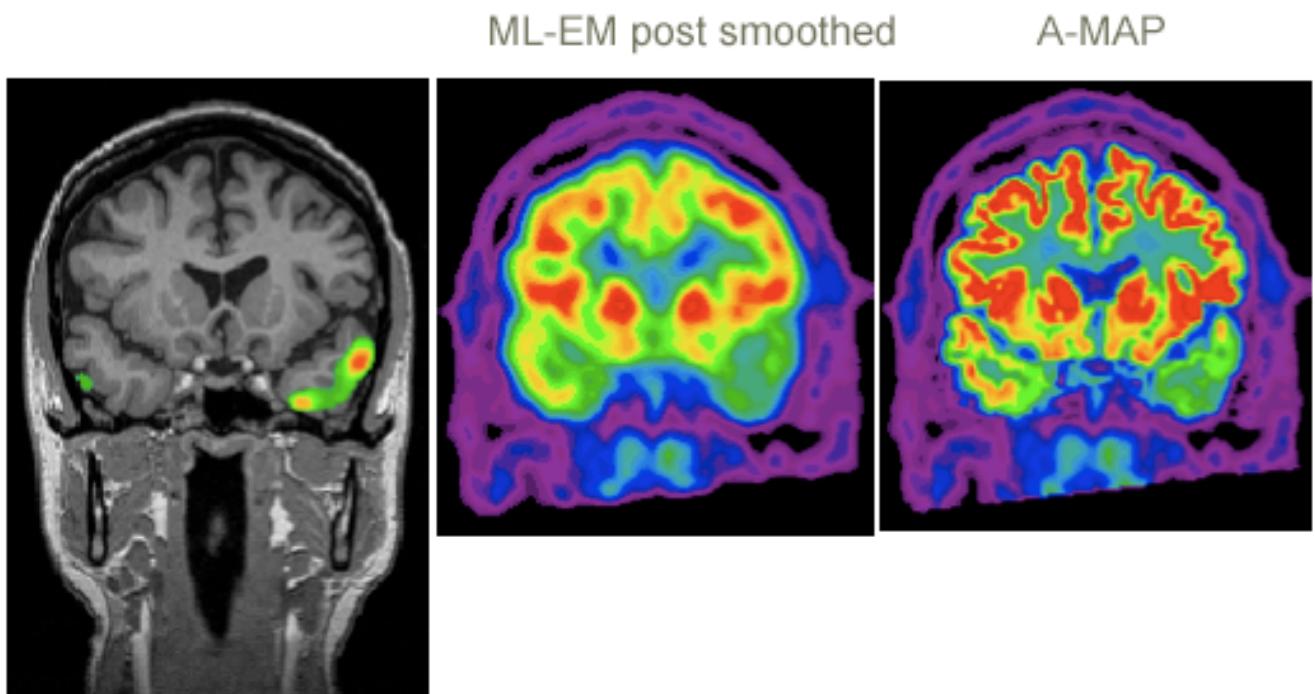
---

- Méthodes empiriques :
  - post-filtrage
  - arrêt précoce des itérations
  - filtrage entre les itérations
  - ...
  
- Régularisation variationnelle :
  - solution non régularisée :  
minimisation de  $d(p, Rf)$
  
  - solution régularisée :  
minimisation de  $d_1(p, Rf) + \lambda d_2(f, f_{\text{apriori}})$
  
- Réduire la dimension du problème :
  - base de fonctions spatiales : blobs
  - fonctions de base temporelles ...

# Exemple

---

- Introduire des a priori issus du scanner ou de l'IRM lors de la reconstruction des données

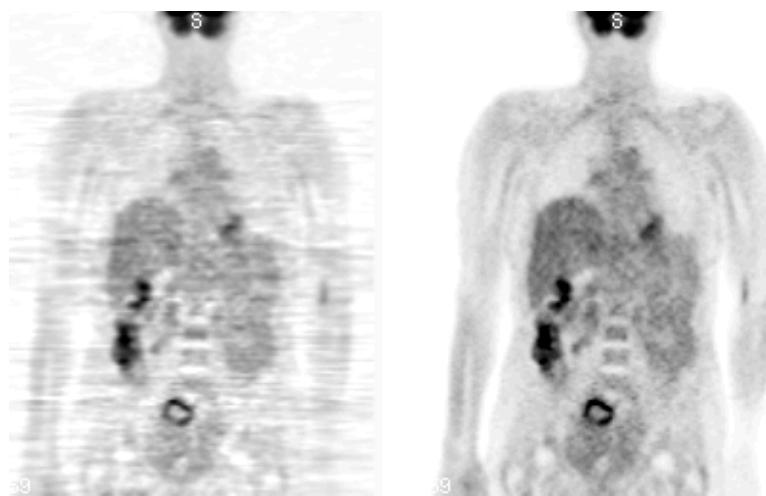
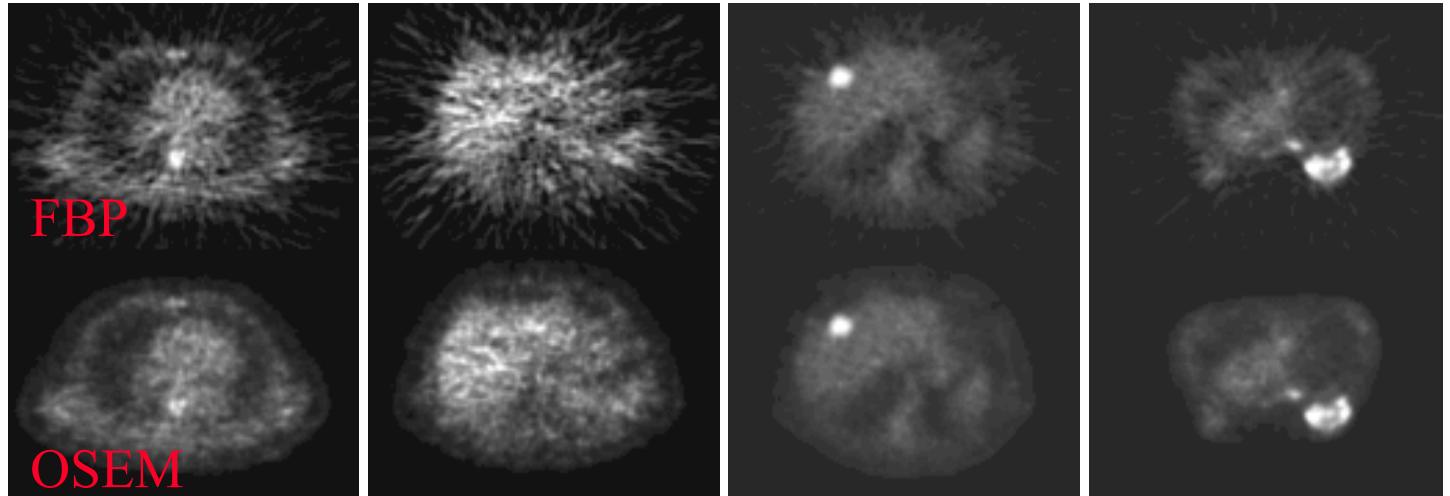


*Baete et al, IEEE Trans Med Imaging 2004*

Les méthodes de régularisation sont séduisantes en théorie, mais restent encore mal comprises, et peu utilisables en pratique

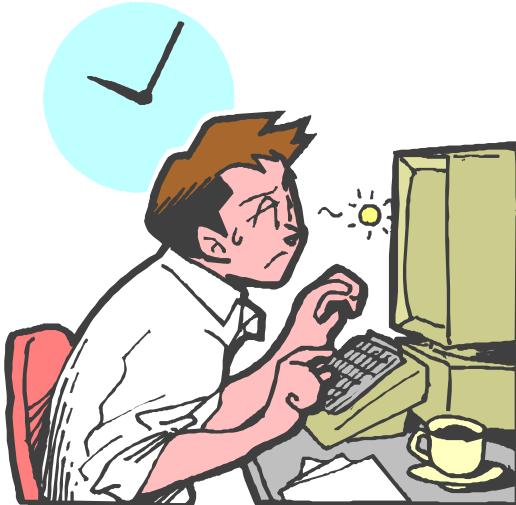
# Reconstruction analytique ou itérative ? (1)

## Tomographie d'émission PET



# Reconstruction analytique ou itérative ?

- Algorithmes itératifs par rapport à rétroprojection filtrée (FBP)
  - \* réduction des artefacts de raies
  - \* possible compensation des phénomènes parasites via une modélisation adéquate dans le projecteur R (diffusion, atténuation, fonction de réponse du détecteur)
  - \* gestion simple de géométries complexes
  - \* possible modélisation des caractéristiques statistiques des données
  - \* possible introduction d'a priori



- \* temps de calculs accrus
- \* non linéaires
- \* artefacts de raies remplacés par d'autres structures de bruit

# Reconstruction analytique ou itérative ?

---

- La tendance nous porte vers les méthodes itératives essentiellement du fait de :
  - \* la possibilité de compenser les phénomènes parasites via une modélisation adéquate dans le projecteur R (diffusion, atténuation, fonction de réponse du détecteur) (grande flexibilité) et de modéliser des géométries complexes
  - \* la puissance des calculateurs actuels



- \* améliorer la matrice système
- \* mieux comprendre la régularisation



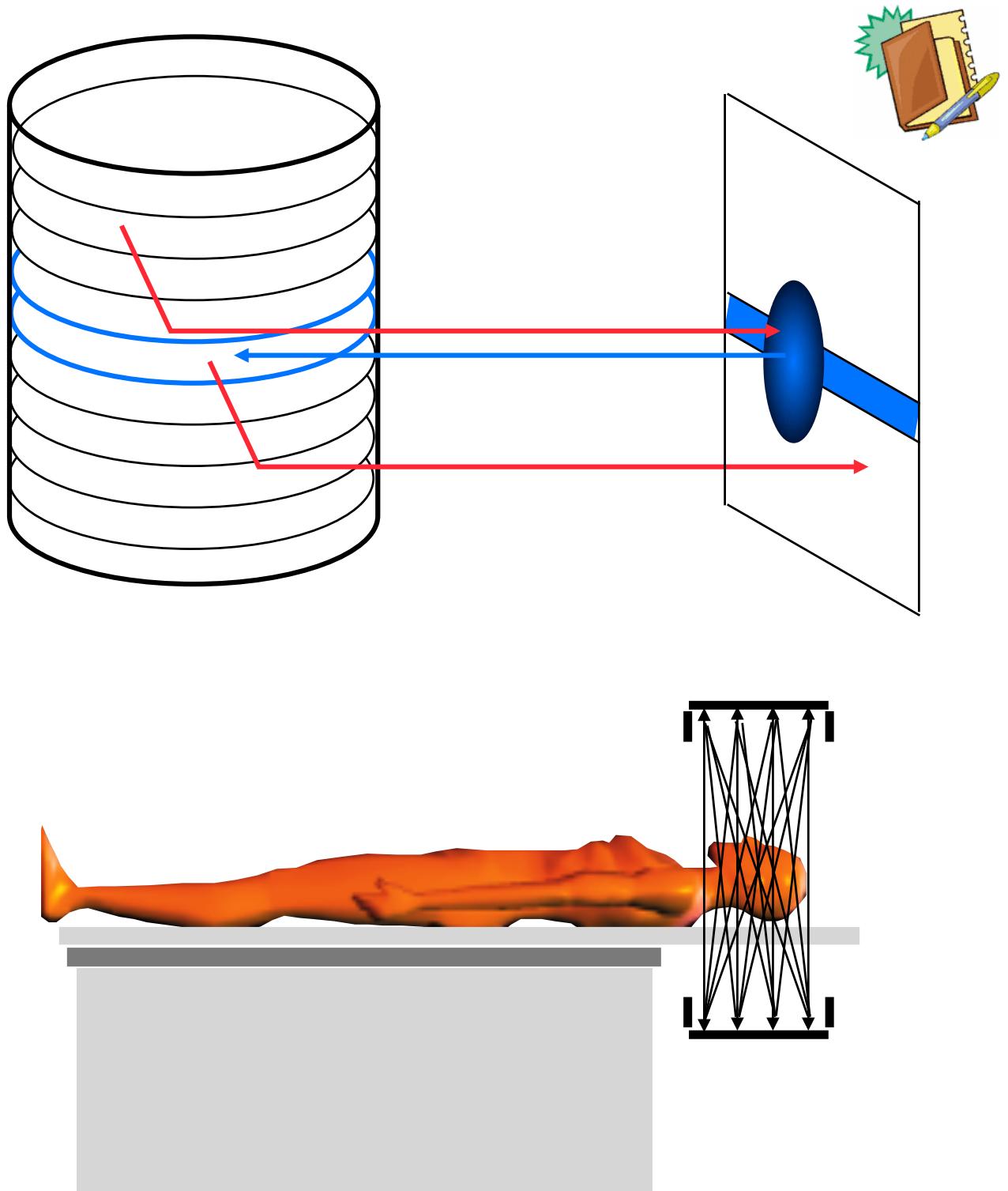
# Reconstruction itérative en TDM ?

---

Pourquoi les constructeurs s'orientent-ils vers la reconstruction itérative en TDM ?



# Au delà de la reconstruction 2D...



Solution : « fully 3D reconstruction »

# Trois approches de reconstruction 3D complète

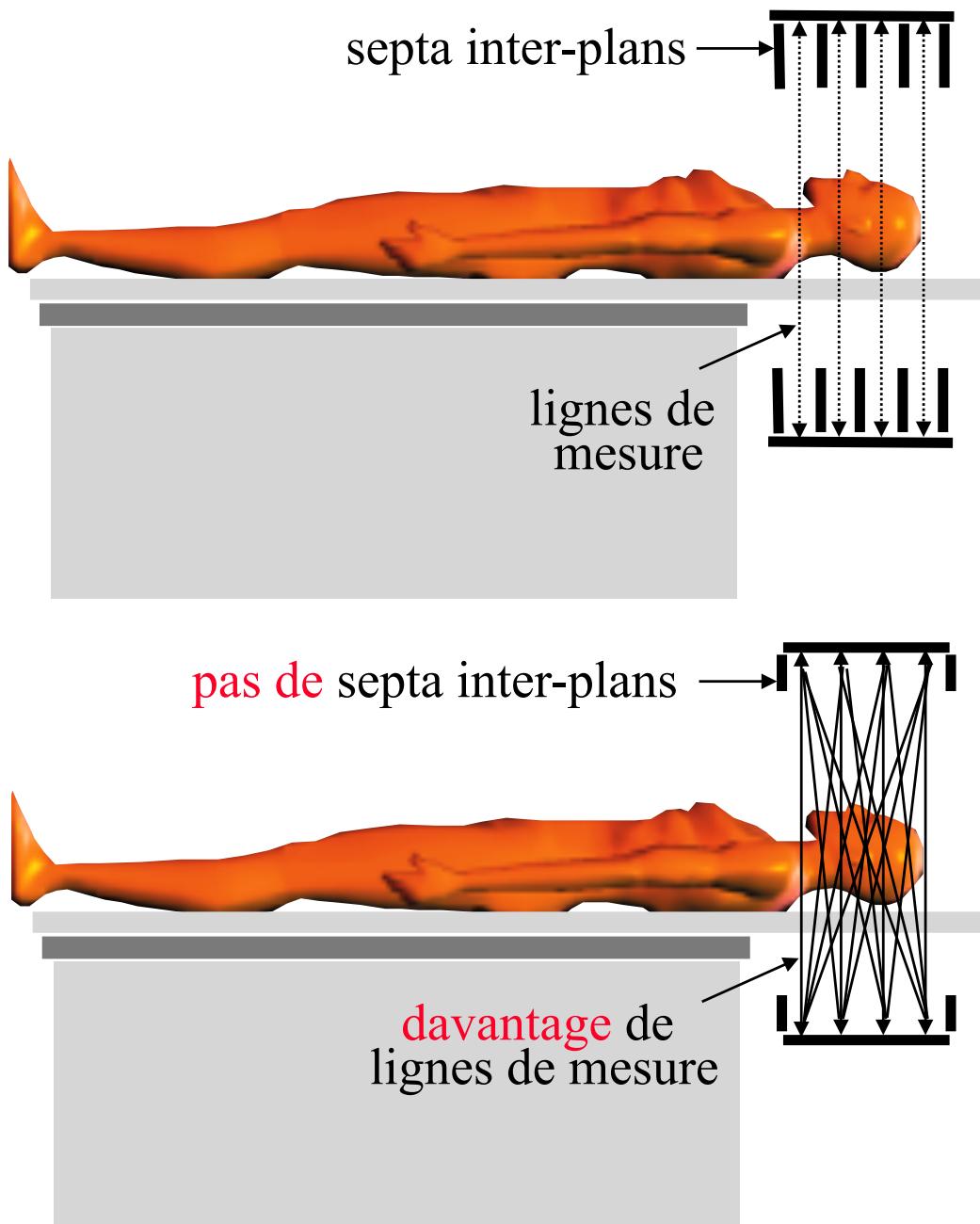
---



- Méthode analytique
  - 3D FBP : généralisation de la rétroprojection filtrée au 3D
- Méthodes de rebinning
  - réorganisation des données pour se ramener à la configuration de reconstruction 2D
- Méthodes discrètes itératives
  - estimation d'un projecteur 3D

# Méthodes analytiques de reconstruction 3D

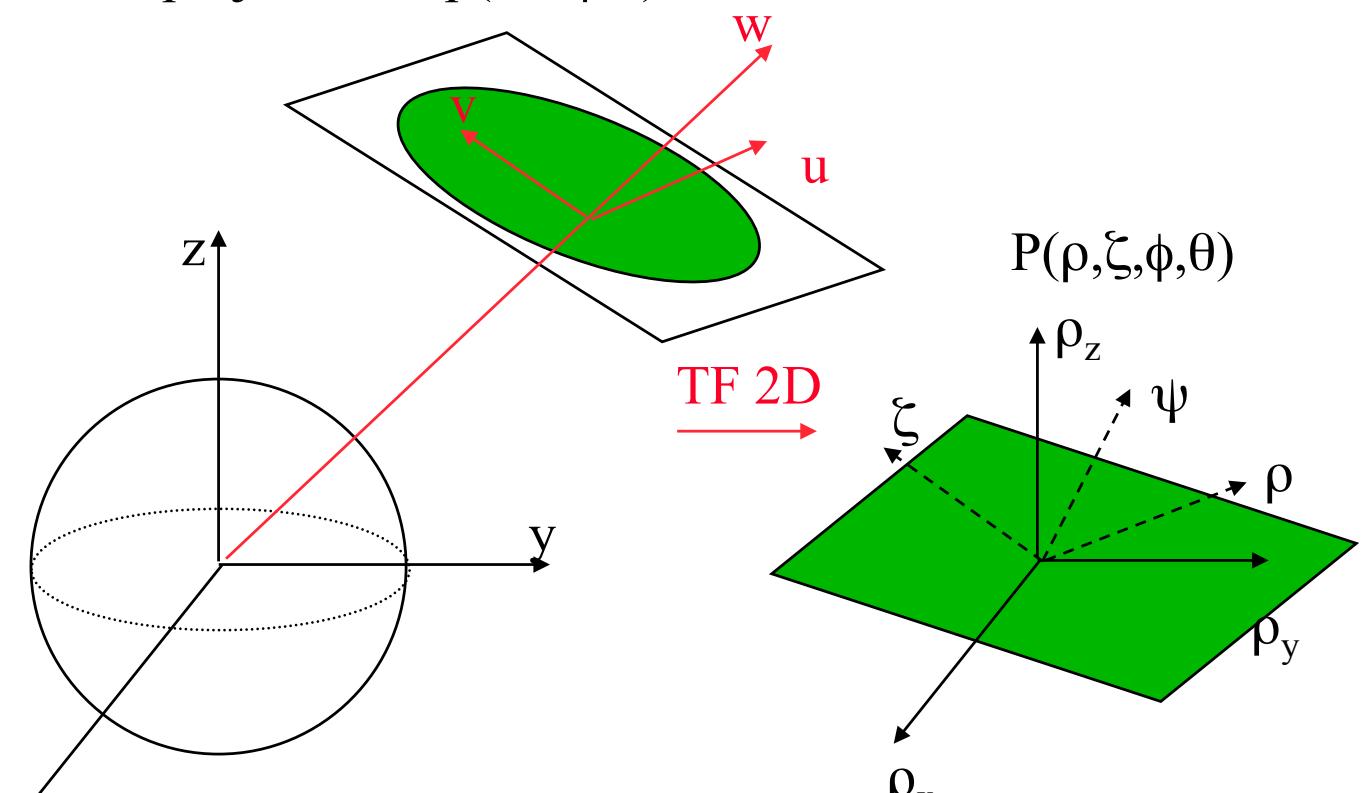
- 3D FBP : généralisation de la rétroposition filtrée au 3D :
  - prend en compte la redondance des données



# Théorème de la coupe centrale en 3D

Similaire à la version 2D

$$\text{projection} = p(u, v, \phi, \theta)$$



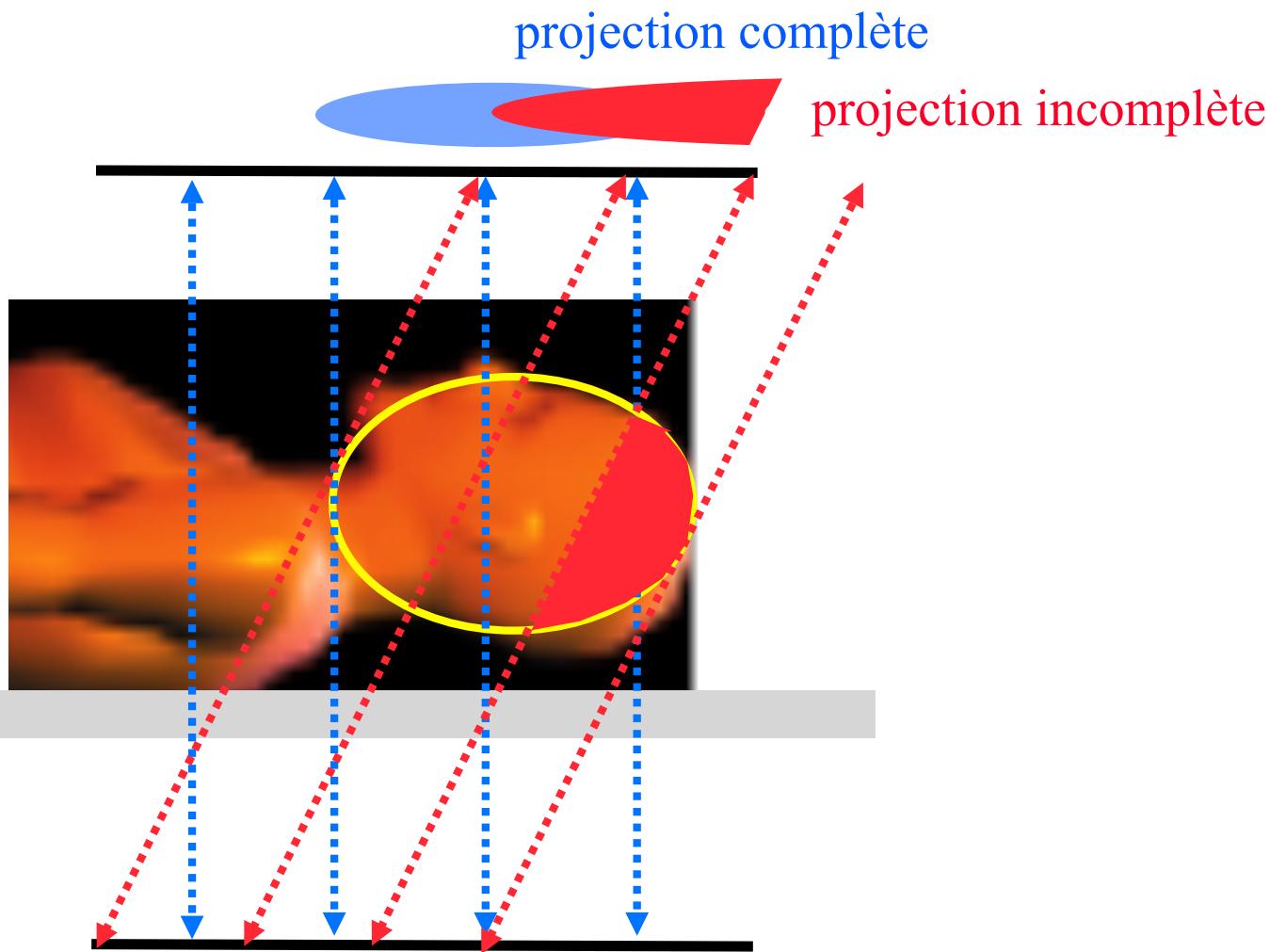
$$\text{objet} = f(x, y, z)$$

$$\xrightarrow{\text{TF 3D}}$$

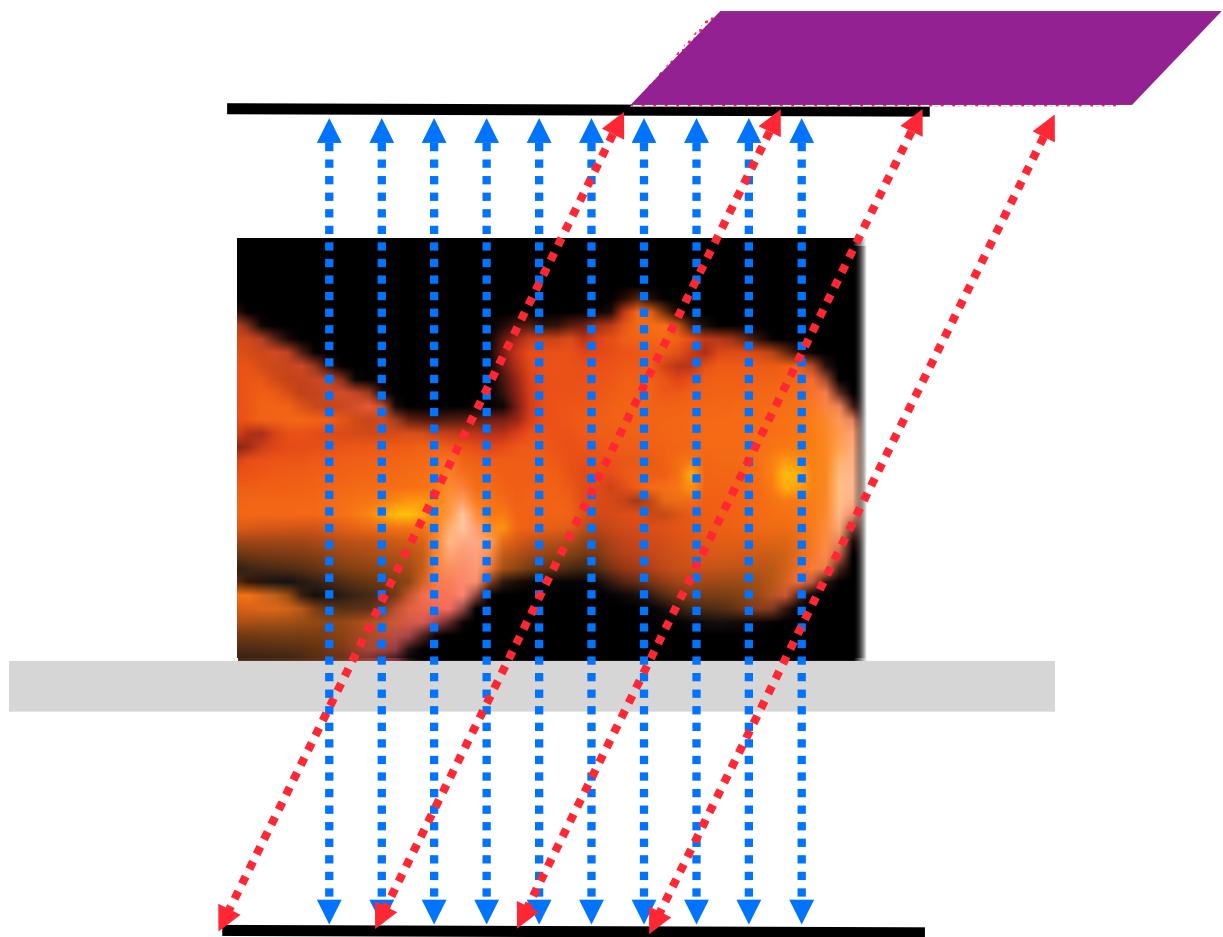
$$P(\rho, \theta) = F(\rho_x, \rho_y, \rho_z) \Big|_{\psi=0}$$

... mais 3D FBP requiert des données complètes

---



# Reprojection 3D traitant des données incomplètes



- Extraction des données 2D (non prise en compte des LOR obliques)
- Reconstruction d'une première estimée de l'objet par FBP 2D
- Estimation des données tronquées en reprojectant l'objet estimé
- Fusion des données estimées et des données mesurées
- Reconstruction par 3D FBP

# Reprojection 3D traitant des données incomplètes

- C'est la méthode devenue classique de **reprojection 3D** (3DRP, 3D reprojection method, Kinahan and Rogers, IEEE Trans Nucl Sci 1989)

964

IEEE Transactions on Nuclear Science, Vol. 36, No. 1, February 1989

## ANALYTIC 3D IMAGE RECONSTRUCTION USING ALL DETECTED EVENTS

P.E. Kinahan\* and J.G. Rogers

TRIUMF, 4004 Wesbrook Mall, Vancouver, B.C., Canada V6T 2A3

### Abstract

We present the results of testing a previously presented algorithm for three-dimensional image reconstruction that uses all gamma-ray coincidence events detected by a PET volumetric-imaging scanner. By using two iterations of an analytic filter-backprojection method, the algorithm is not constrained by the requirement of a spatially invariant detector point spread function, which limits normal analytic techniques. Removing this constraint allows the incorporation of all detected events, regardless of orientation, which improves the statistical quality of the final reconstructed image.

### Introduction

In a previous paper<sup>1</sup> we outlined an algorithm for direct three-dimensional image reconstruction that uses all detected events from a positron volumetric imaging (PVI)<sup>2</sup> scanner. A PVI scanner, unlike conventional ring tomographs, does not have interslice septa to prevent the detection of cross-plane events, which greatly increases the sensitivity of the scanner. This paper presents the results of testing the algorithm with Monte Carlo generated data and does not consider the effect of attenuation or increased scatter fraction.<sup>2</sup>

In direct three-dimensional image reconstruction, projection data that has been acquired in three dimensions is used to reconstruct a three-dimensional picture of an object. Such direct reconstruction contrasts with the more common indirect method of using a stacked set of parallel two-dimensional reconstructed images to build up a three-dimensional picture.

Over the last decade, several algorithms for direct three-dimensional image reconstruction have been developed. These algorithms can be divided into three categories: analytic, iterative, and series methods. The latter two methods have the advantage of being able to incorporate *a priori* knowledge or take advantage of symmetries in the object being reconstructed. The major drawback of these methods is the relatively large amount of computing power needed to perform direct reconstruction.

It is possible to further divide analytic direct three-dimensional image reconstruction methods into two classes: normal direct methods, which are subject to the constraints of shift-invariance as described below, and extended direct methods, which are not. Normal direct methods, such as those developed by Orlov,<sup>3</sup> Pelc,<sup>4</sup> Colsher,<sup>5</sup> Schorr *et al.*,<sup>6</sup> and our earlier work,<sup>7,8</sup> are based on extensions to three dimensions of the well-understood case of analytic two-dimensional image reconstruction.<sup>9</sup> The main difference between two-dimensional and three-dimensional analytic image reconstruction is that the complete set of projections needed to reconstruct a two-dimensional image is also two dimensional, whereas a complete set of projections for a three-dimensional object is four-dimensional, and thus can contain redundant information. This type of four-dimensional projection is characteristic of volumetric-imaging scanners.

A PVI scanner can be formed by either removing the interslice septa from a conventional multi-ring tomograph,<sup>10</sup> or

\*Present address : Dept. of Bioengineering, Univ. of Pennsylvania, Philadelphia, PA 19104-6392

by using large area position sensitive detectors.<sup>11-15</sup> Either method results in a scanner that can detect cross-plane gamma-ray events, which are often treated as redundant data. The advantage to using as much of the redundant data as possible is that the signal-to-noise ratio depends on event statistics, and the accuracy of the reconstructed image improves with the number of events incorporated into the projections. Normal direct methods take advantage of the extra information and use some of the cross-plane events to improve the signal-to-noise ratio. None of these earlier methods, however, can use all of the data measured by a PVI scanner because of the requirements of shift-invariance.

### The Shift-Invariance Constraint

A common thread among the direct analytic three-dimensional algorithms cited above is the use of the Fourier-convolution theorem to invert the following linear equation,

$$g(\mathbf{x}) = \int \int \int f(\mathbf{x}') h(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d\mathbf{x}',$$

where  $f(\mathbf{x})$  is the original three-dimensional density function that is to be recovered,  $g(\mathbf{x})$  is the three-dimensional backprojection of the measured projections, and  $h(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  is the point spread function (PSF) of the detector system. The function  $h(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  is the response of the detector at  $\mathbf{x}$  to a point source located at  $\mathbf{x}'$ . If  $h(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  has the form  $h(|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|)$ , then the response of the detector system is said to be spatially shift-invariant, that is the detectors response, at  $\mathbf{x}$ , only depends on the distance from the source at  $\mathbf{x}'$ , and not on the spatial location of  $\mathbf{x}$ .

Figure 1 shows a cross section of a detector in the shape of a hollow sphere of radius  $R_D$  that is truncated at the top and bottom. Also shown is a spherical object of radius  $R_O$  that contains the density function  $f(\mathbf{x})$  such that  $f(\mathbf{x}) = 0$  for  $|\mathbf{x}| > R_O$ . A point source located at the centre of the object will have more detected coincidence events than a point source located at the top of the object because of the difference in subtended detector solid angle. Consequently, the apparent brightness of a point source depends on its position, thus making the detector response spatially variant.

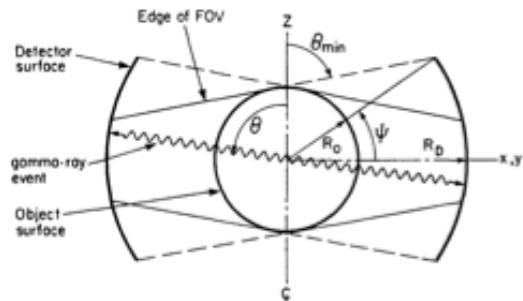
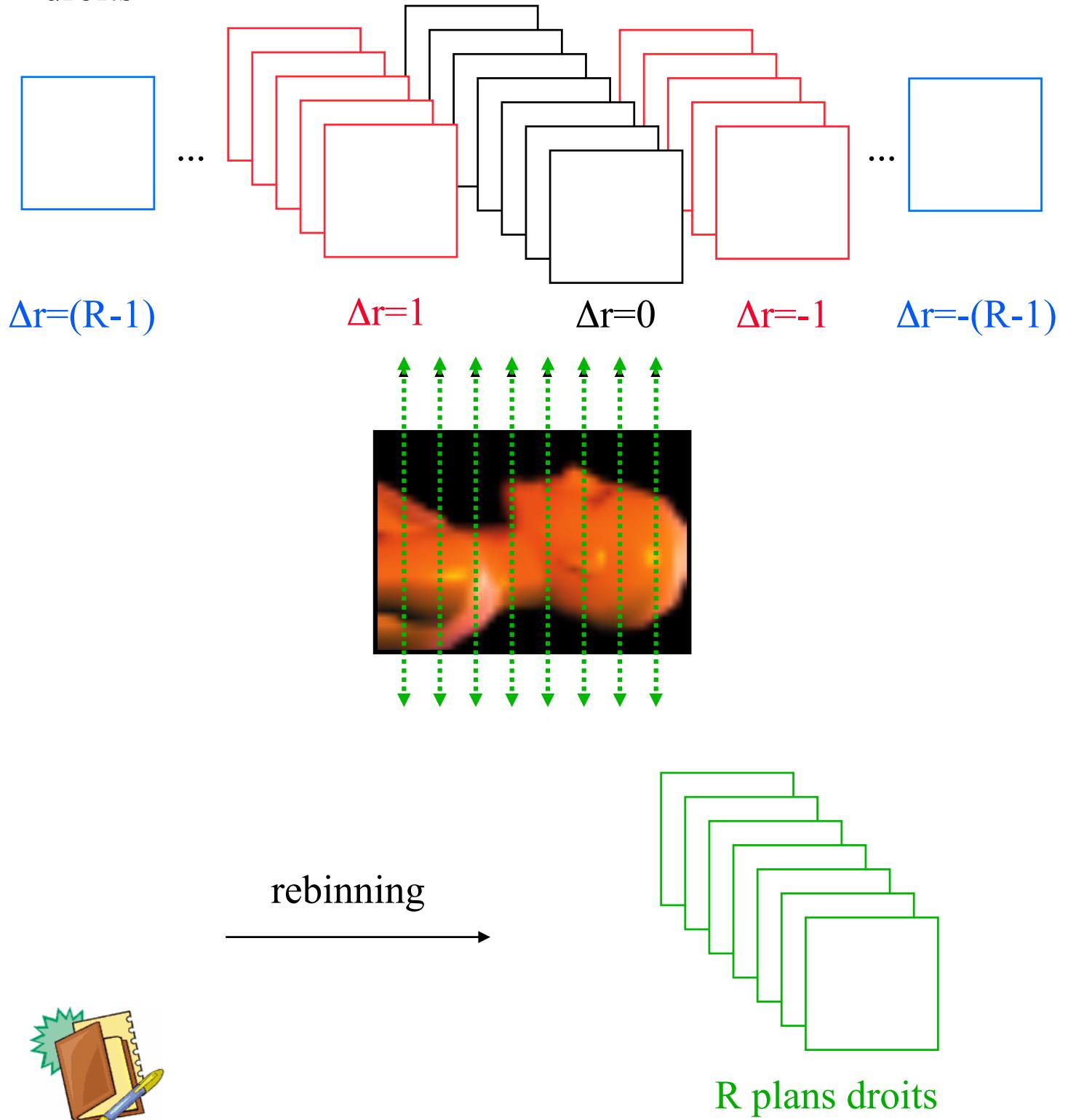


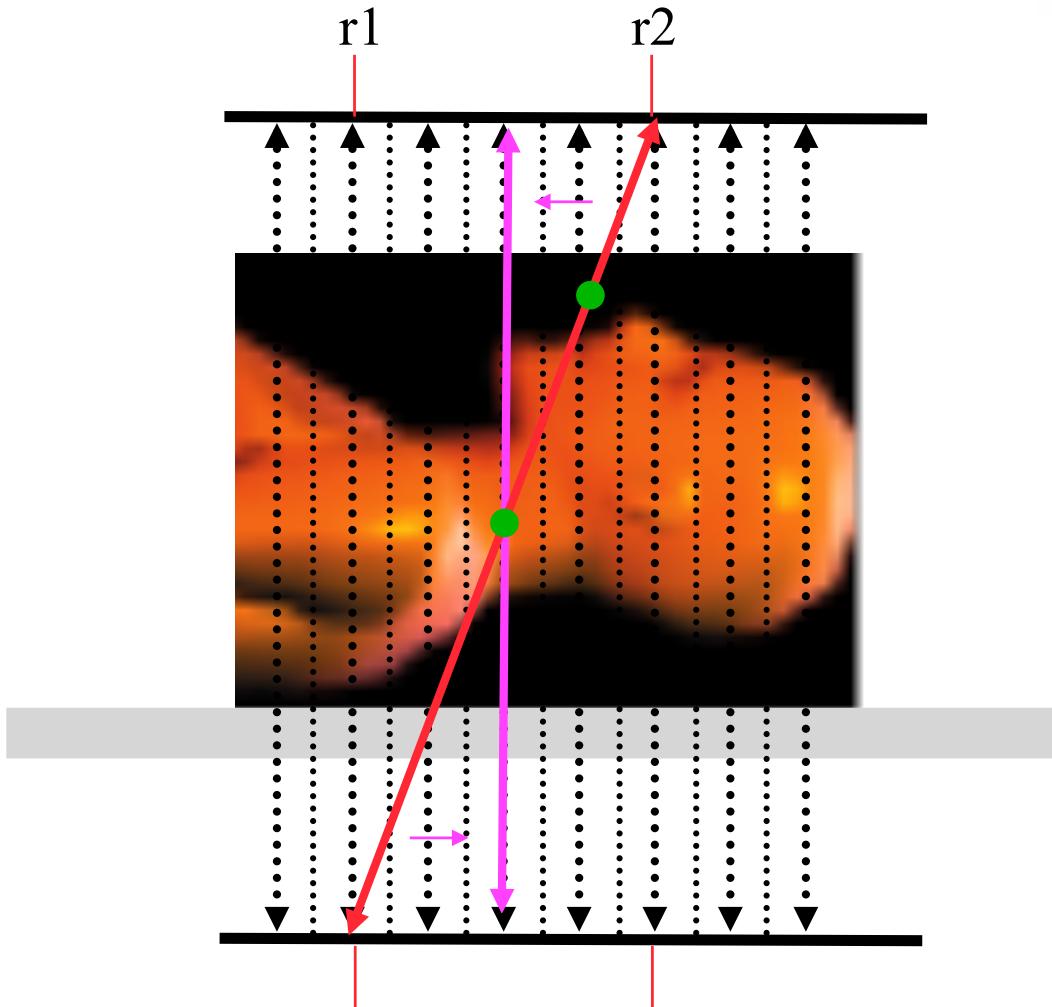
Fig. 1. Cross section of a detector and an object being scanned, showing the polar angle  $\theta$  of a gamma-ray event and the FOV defined by  $R_D$ ,  $R_O$ , and  $\psi$ .

# Méthodes de rebinning

- A partir des  $R^2$  sinogrammes ( $R$  nombre de couronnes), estimation de  $2R-1$  sinogrammes correspondant aux plans droits



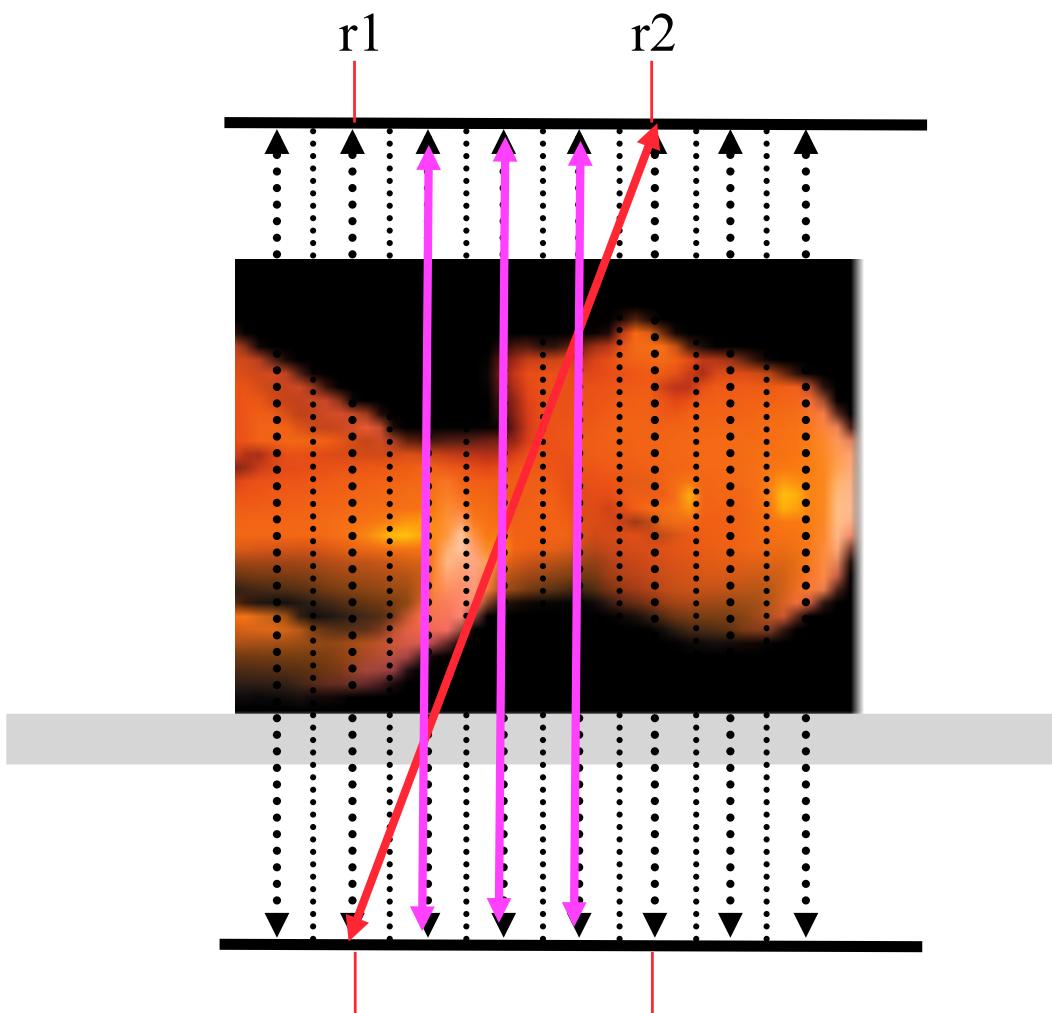
# Single slice rebinning



$$r_{\text{rebin}} = (r_1 + r_2)/2$$

# Multi slice rebinning

---



# FORE

---

## FOurier REbinning (1995)



Les sinogrammes obliques sont rééchantillonnés dans l'espace de Fourier 2D des sinogrammes

Tous les événements détectés sur les lignes de réponse obliques sont affectés à des sinogrammes droits.

## Après rebinning

On effectue une reconstruction 2D coupe par coupe classique

# Rebining

---

- Pourquoi les méthodes de reconstruction avec rebinning sont-elles aussi appelées reconstruction 2,5 D ?



# Méthodes discrètes itératives

---

- Aucune différence conceptuelle avec l'approche 2D

$$p = R f$$

↑  
opérateur de projection

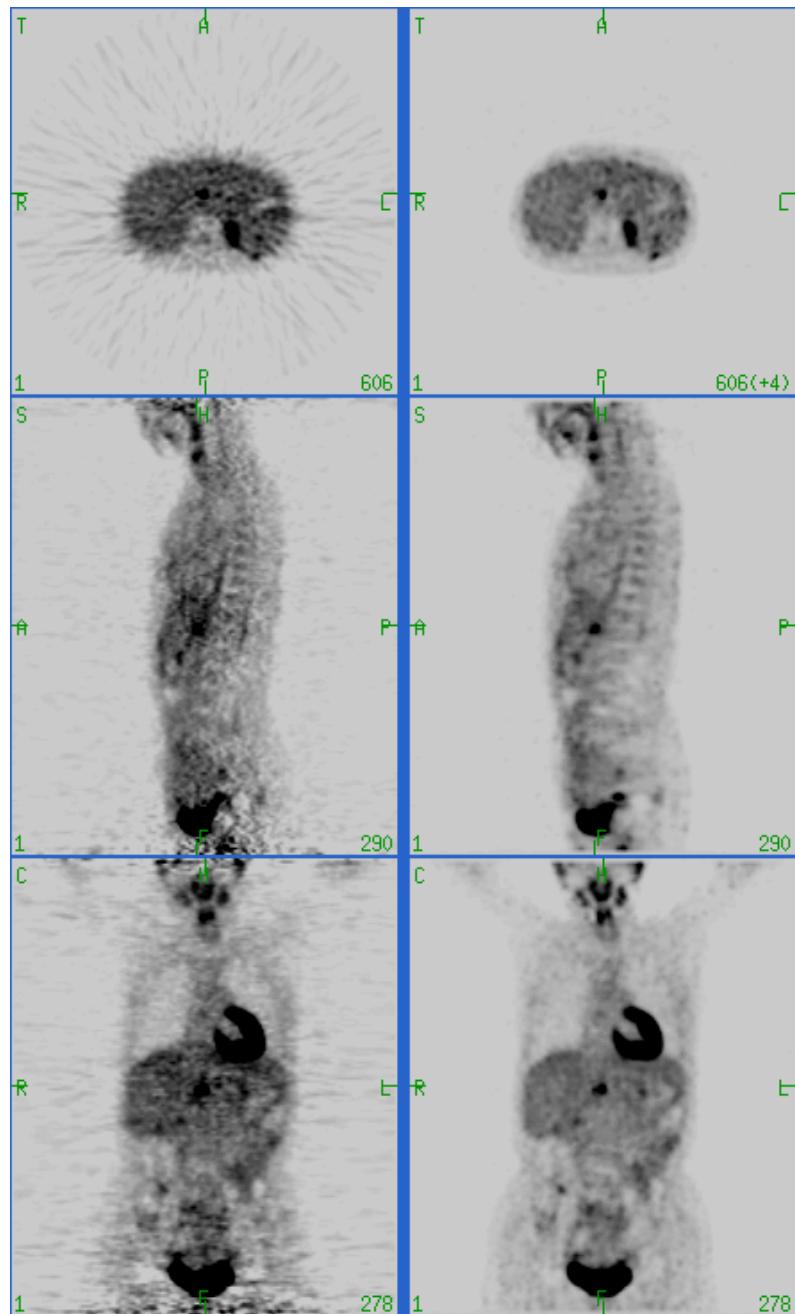
↗ projections acquises      ↘ objet à reconstruire

- Challenges :

- taille du projecteur (ou matrice de transition) (plus de 10 millions de LOR en PET 3D)
- estimation du projecteur pour rendre compte correctement des phénomènes 3D affectant les données mesurées (diffusion, réponse du détecteur, sensibilité variable du détecteur dans la direction axiale).

# Intérêt de l'approche « fully 3D »

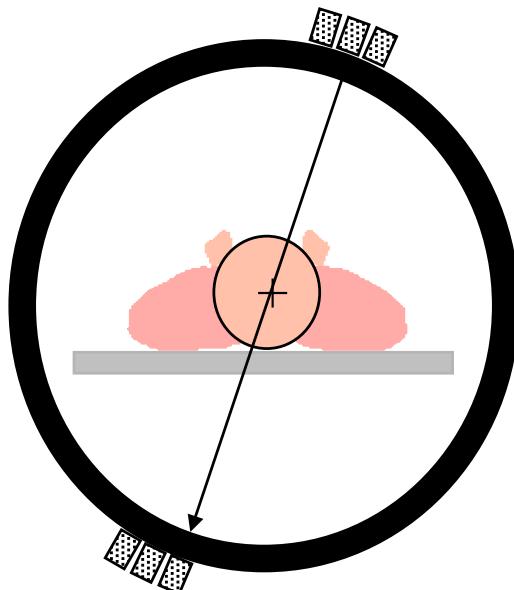
FORE-FBP    3D Ramla



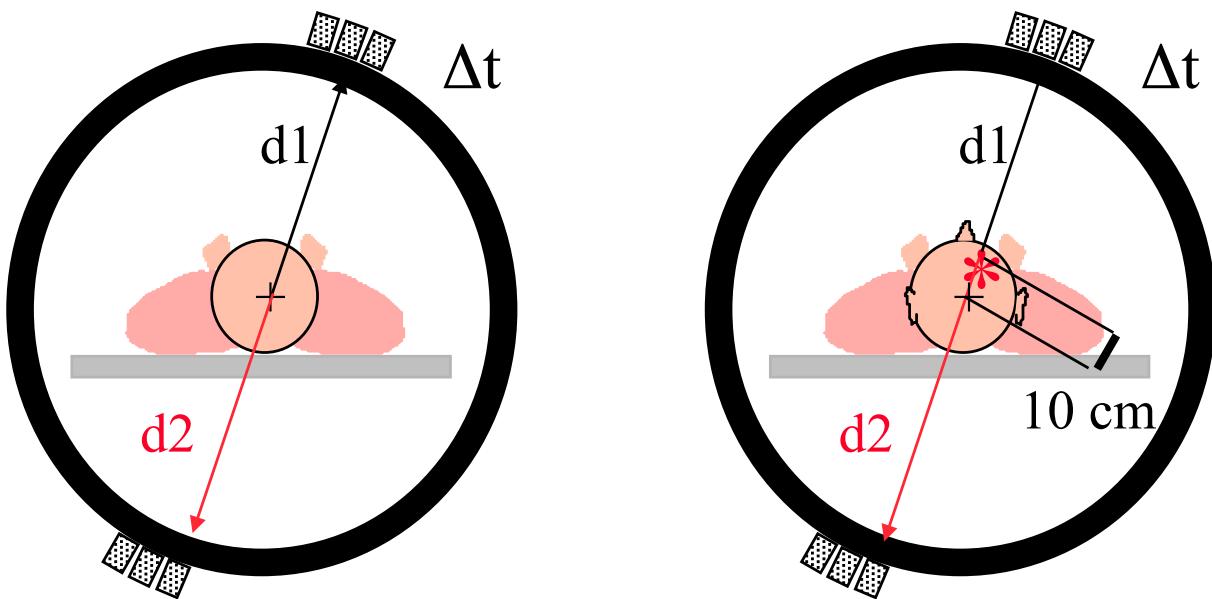
*Joel Karp, University of Pennsylvania*

# Reconstruction en PET temps de vol

Qu'est-ce qui change ?



Aucune information concernant la position de l'annihilation sur la LOR



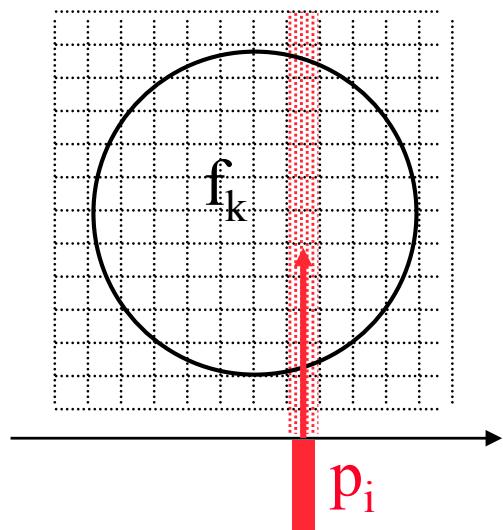
Si  $\Delta t = 0$ ,  $d_1 = d_2$ , l'annihilation a eu lieu au milieu de la LOR

Si  $\Delta t = 667 \text{ ps}$ ,  $d_1 - d_2 = 20\text{cm}$ , donc l'annihilation a eu lieu à 10 cm du centre de la LOR

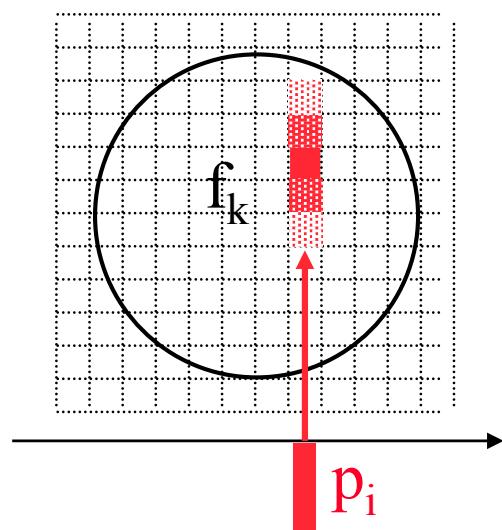
**En pratique, la précision sur la mesure de  $\Delta t$ , donc de  $d_1-d_2$ , est limitée**

# Reconstruction en PET temps de vol

A priori sur la position de l'annihilation sur la LOR modélisable dans la rétroprojection intervenant en reconstruction itérative



Rétroprojection sans a priori

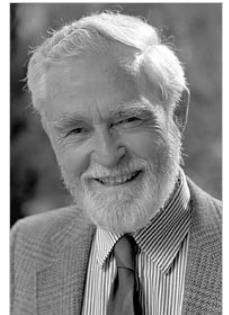


Rétroprojection avec a priori

Le signal va donc se concentrer dans les régions les plus plausibles compte tenu des informations temporelles : gain en rapport signal-sur-bruit

# Historique

- 1917 : Johann Radon : “De la détermination des fonctions à partir de leurs intégrales selon certaines directions”  
⇒ travaux confinés au cercle des mathématiciens



- 1956 : Bracewell : démonstration des relations entre transformée de Fourier et transformée de Radon

- 1963 : premières applications de la tomographie médicale

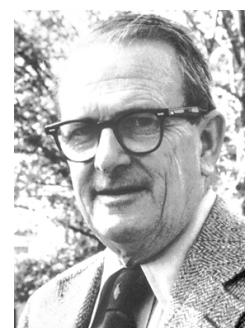
- Kuhl, prof de radiologie : premières images tomographiques par rétroprojection simple
- Cormack, physicien : application des travaux de Radon aux acquisitions par rayons X



- 1970 : publication de la première image de tomodensitométrie X

- 1970-73 : mise au point du premier scanner X par Cormack et Hounsfield

- 1979 : Attribution du prix Nobel de Médecine à Cormack et Hounsfield



1924-1998



1919-2004

# Quelle méthode pour quelle application ?

---

- Scanner X
  - \* rétroprojection filtrée car excellent rapport signal-sur-bruit
  - \* mais recherche concernant la reconstruction itérative statistique pour les scanners « low dose »
  
- Tomographie d'émission monophotonique
  - \* routine clinique : longtemps rétroprojection filtrée seulement
  - \* de plus en plus fréquemment : algorithmes itératifs, en particulier OSEM, du fait de :
    - la réduction des artefacts de raies
    - les plus grandes possibilités en terme de quantification
    - le traitement plus efficace de données présentant une faible statistique (10 000 moins d'événements qu'en scanner X)
    - l'augmentation de la puissance des calculateurs qui rend la mise en œuvre d'algorithmes itératifs compatible avec une utilisation clinique
  
- Tomographie d'émission de positons
  - \* rétroprojection filtrée, OSEM, RAMLA

# Bilan - ce qu'il faut retenir

---

- Généralités sur la tomographie :
  - différences entre tomographie d'émission et tomographie de transmission
  - en quoi le problème de reconstruction tomographique se pose de manière similaire en scanner X et en médecine nucléaire (TEMP et TEP)
  - la variable reconstruite en scanner X
  - la variable reconstruite en TEMP et TEP
  - ce qu'apporte la TEMP par rapport à la scintigraphie planaire, et le scanner par rapport à la radiologie conventionnelle
  - pourquoi le problème de reconstruction tomographique n'est pas trivial à résoudre
  - les 2 grandes familles de méthodes de reconstruction tomographique, et leurs différences principales
  - la différence entre reconstruction tomographique conventionnelle et « fully 3D reconstruction »

# Bilan - ce qu'il faut retenir

---

- Techniques de reconstruction :
  - différences entre projections et sinogrammes \*
  - le principe de la rétroprojection filtrée
  - le rôle du filtre dans la rétroprojection filtrée
  - la raison pour laquelle le seul filtre rampe ne suffit pas en rétroprojection filtrée
  - les paramètres conditionnant l'effet du filtre en FBP, et l'effet de ces paramètres \*
  - le principe de la reconstruction itérative
  - les paramètres sur lesquels on peut jouer pour un algorithme de reconstruction itérative, et comment ils affectent la qualité des images \*
  - ce qu'est la matrice système
  - le principe de OSEM / MLEM \*
  - les propriétés de MLEM et OSEM \*
  - les 3 types de reconstruction fully 3D
  - ce qu'est le rebinning en TEP

# Vos questions sur la reconstruction ...

---



# Exemple de contrôle des connaissances

---

On réalise une acquisition SPECT de perfusion myocardique en utilisant 256 projections, chaque projection ayant 128 lignes et 64 colonnes (dans la direction axiale).

1. Quelle est la taille du sinogramme (nombre de lignes et nombre de colonnes) nécessaire à la reconstruction d'une coupe de dimensions 128 x 128 ?
2. Quelle est la taille de l'opérateur de projection impliqué dans une reconstruction tomographique 2D ?
3. On reconstruit une coupe avec l'algorithme MLEM et 200 itérations en 2 secondes. Quelle est la durée nécessaire à la reconstruction de toutes les coupes, en arrivant au même point de convergence, en utilisant l'algorithme OSEM et 4 sous-ensembles ?

# Contrôle des connaissances

---

On réalise une acquisition SPECT de perfusion myocardique en utilisant 256 projections, chaque projection ayant 128 lignes et 64 colonnes (dans la direction axiale).

1. Quelle est la taille du sinogramme (nombre de lignes et nombre de colonnes) nécessaire à la reconstruction d'une coupe de dimensions 128 x 128 ?

256 lignes et 128 colonnes

2. Quelle est la taille de l'opérateur de projection impliqué dans une reconstruction tomographique 2D ?

256x128 lignes et 128x128 colonnes

3. On reconstruit une coupe avec l'algorithme MLEM et 200 itérations en 2 secondes. Quelle est la durée nécessaire à la reconstruction de toutes les coupes, en arrivant au même point de convergence, en utilisant l'algorithme OSEM et 4 sous-ensembles ?

64 coupes

$2/4=0,5$  s par coupe

32 secondes pour reconstruire ttes les coupes

# Contrôle des connaissances

---

On réalise une acquisition SPECT comportant 256 projections 128 x 128.

- 1) Combien de coupes transaxiales peut-on reconstruire sans interpolation ?
- 2) Combien de sinogrammes peut-on former à partir de cet examen ?
- 3) Quelles sont les dimensions (nombre de lignes, nombre de colonnes) d'un sinogramme ?
- 4) On reconstruit d'abord les images par rétroposition filtrée, en utilisant un filtre de Hann, de fréquence de coupure  $0,5 \text{ pixel}^{-1}$ . Les images résultantes apparaissent trop bruitées. Que doit-on faire ?
- 5) On reconstruit ensuite les images par la méthode MLEM avec 20 itérations. Les images sont floues, et manquent de détails. Que doit-on faire ?
- 6) On reconstruit les images par la méthode OSEM, avec 4 sous ensembles et 8 itérations. Les images seront-elles plus ou moins bruitées que les images reconstruites par l'approche MLEM avec 20 itérations ?
- 7) La reconstruction MLEM avec 20 itérations dure 20 s. Quelle est la durée de la reconstruction avec OSEM, 4 sous-ensembles et 8 itérations ?

# Contrôle des connaissances

---

On réalise une acquisition SPECT comportant 256 projections 128 x 128.

- 1) Combien de coupes transaxiales peut-on reconstruire sans interpolation ? **128**
- 2) Combien de sinogrammes peut-on former à partir de cet examen ? **128**
- 3) Quelles sont les dimensions (nombre de lignes, nombre de colonnes) d'un sinogramme ?  
**128 colonnes et 256 lignes**
- 4) On reconstruit d'abord les images par rétroprojection filtrée, en utilisant un filtre de Hann, de fréquence de coupure  $0,5 \text{ pixel}^{-1}$ . Les images résultantes apparaissent trop bruitées. Que doit-on faire ?  
**Diminuer la fréquence de coupure du filtre**
- 6) On reconstruit ensuite les images par la méthode MLEM avec 20 itérations. Les images sont floues, et manquent de détails. Que doit-on faire ?  
**Augmenter le nombre d'itérations**

# Contrôle des connaissances

---

- 6) On reconstruit les images par la méthode OSEM, avec 4 sous ensembles et 8 itérations. Les images seront-elles plus ou moins bruitées que les images reconstruites par l'approche MLEM avec 20 itérations ?

plus bruitées, car OSEM 4 ss-ensembles et 8 itérations correspond à 32 itérations MLEM

- 7) La reconstruction MLEM avec 20 itérations dure 20 s. Quelle est la durée de la reconstruction avec OSEM, 4 sous-ensembles et 8 itérations ?

1 itération MLEM dure 1 seconde

OSEM 4 ss-ensembles et 8 itérations correspond à 32 itérations MLEM. La reconstruction MLEM durerait 32 s. Avec OSEM 4 ss-ensembles, elle dure 4 fois moins, soit 8 secondes.

# Pour en savoir plus ...

---

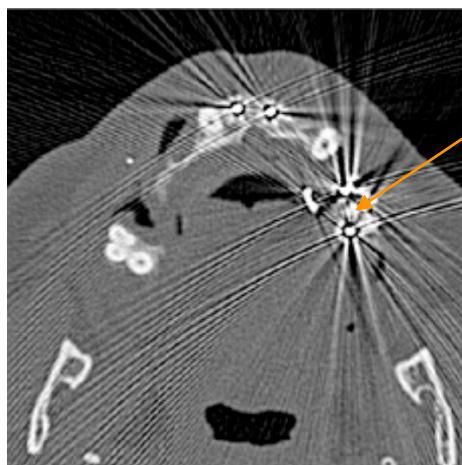
## Articles courts

- Analytic and iterative reconstruction algorithms in SPECT. Journal of Nuclear Medicine 2002, 43:1343-1358
- J. Qi and R. Leahy, Iterative reconstruction techniques in emission tomography, Topical review, Phys. Med. Biol. , vol. 51 (2006), R541-R578
- Rétroprojection filtrée et reconstruction itérative : rappels théoriques et propriétés des deux approches sur :  
<http://www.guillemet.org/irene>
- Articles didactiques téléchargeables sur:  
<http://www.guillemet.org/irene/equipe4/cours.html>

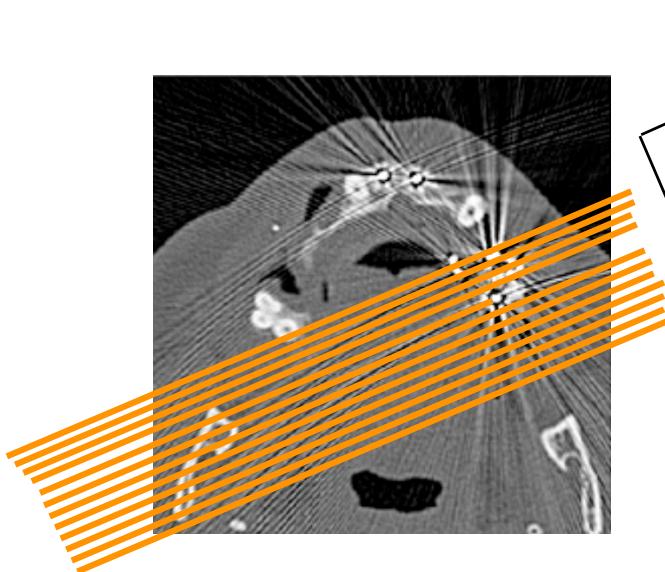
## Ouvrage

- Kinahan PE, Defrise M, and Clackdoyle R. Analytic image reconstruction methods. In: Emission Academic Press, 2004

# Artefact de raies en CT (streak artefacts)

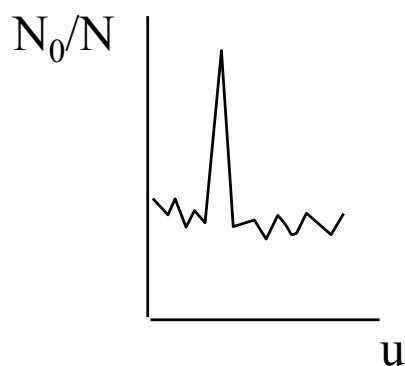


plombage



$p(u, \theta)$

$u$



Discontinuité créant des artefacts de rétroposition

Solution possible : prétraitement des sinogrammes (interpolation à partir des valeurs voisines pour supprimer les valeurs de  $N_0/N$  aberrantes), reconstruction itérative, etc...