Master RIA

Reconstruction tomographique

Irène Buvat
IMNC CNRS 8165
Orsay

buvat@imnc.in2p3.fr
http://www.guillemet.org/irene

Décembre 2009

Plan

- Introduction
  - La tomographie
  - Tomographie en transmission
  - Tomographie en émission
  - Spécificité du problème de reconstruction tomographique

- Notions de base
  - Projection
  - Transformée de Radon
  - Sinogramme

- Méthodes de reconstruction analytique
  - Principe
  - Théorème de la coupe centrale
  - Rétroprojection filtrée
  - Filtres

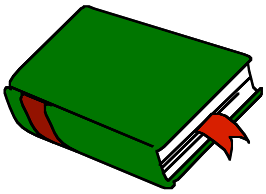
- Méthodes de reconstruction itérative
  - Principe et et méthodes
  - Opérateur de projection R
  - Méthodes, MLEM, OSEM, RAMLA
  - Régularisation

- Reconstruction « fully 3D »
  - Principe
  - Méthodes de rebinning

- Questions / Discussion

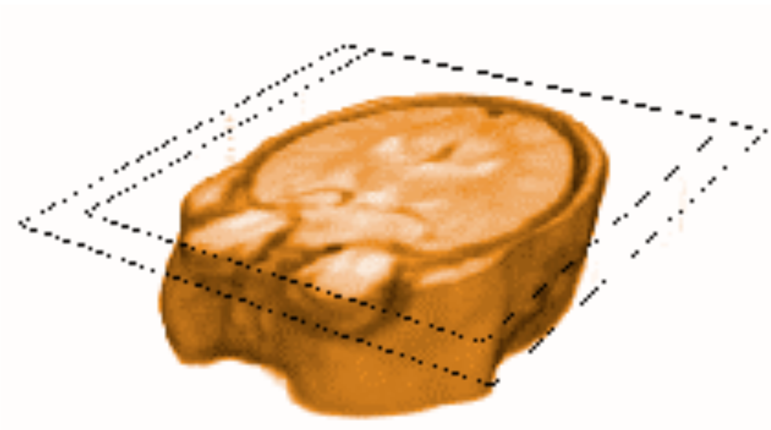
Avertissement

Introduction : la tomographie



• Tomos : coupe, section (grec)
• Graphia : écrire

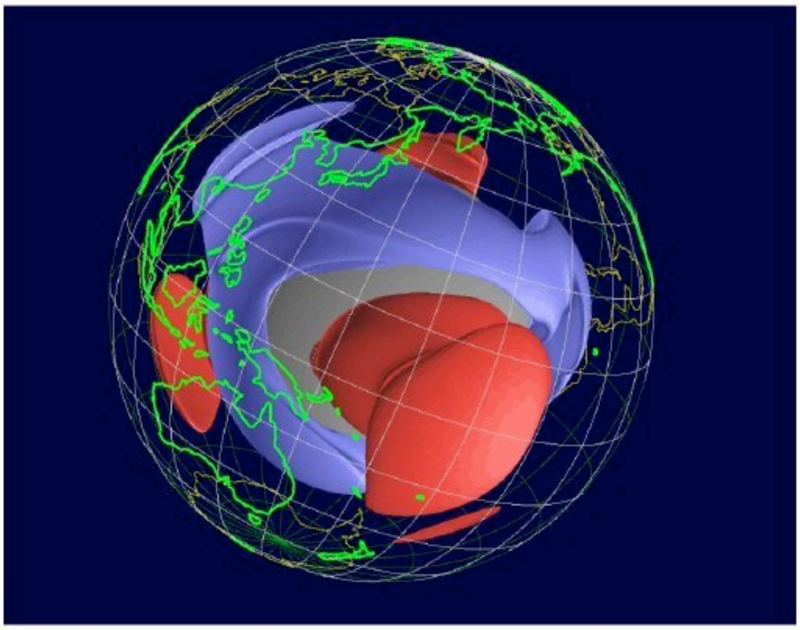
• Cartographie d'un paramètre interne à un objet, selon un ou plusieurs plans de coupes, à partir de mesures externes et de calculs



Introduction : la tomographie

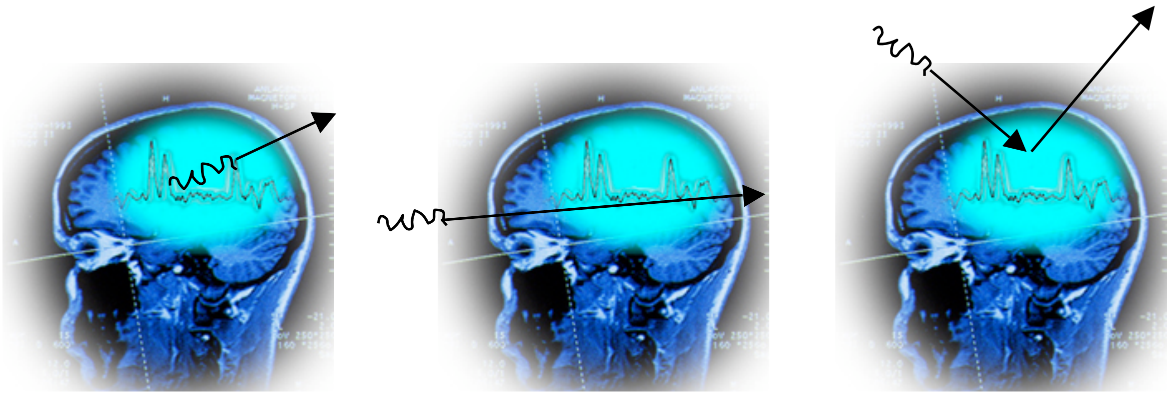
• Un moyen de sonder la matière, qui a de multiples domaines d'applications, e.g. :

- contrôle non destructif,
- géophysique (sondage des océans, des couches géologiques)
- astrophysique,
- imagerie médicale



La tomographie : principe

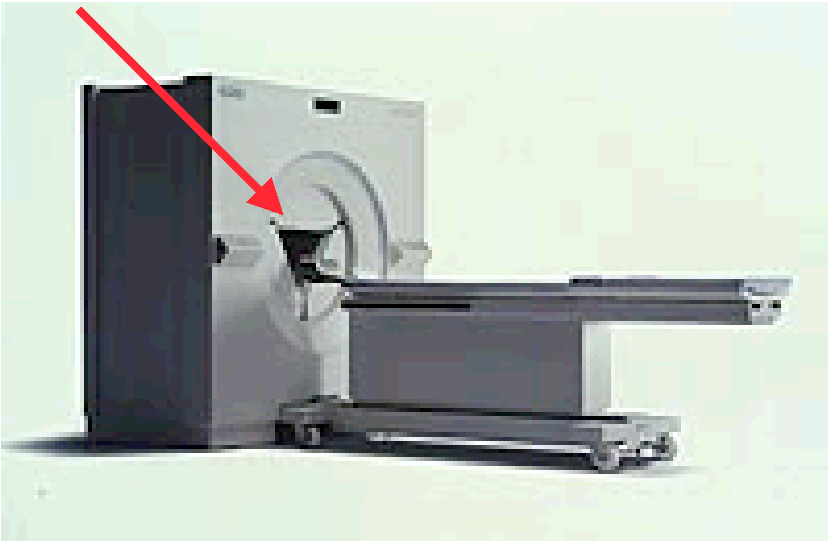
• Mesure de rayonnement émis, transmis ou réfléchi par la matière : mesure indirecte du paramètre relatif à l'objet d'intérêt



• Traitement de l'information détectée pour estimer le paramètre

La tomographie médicale

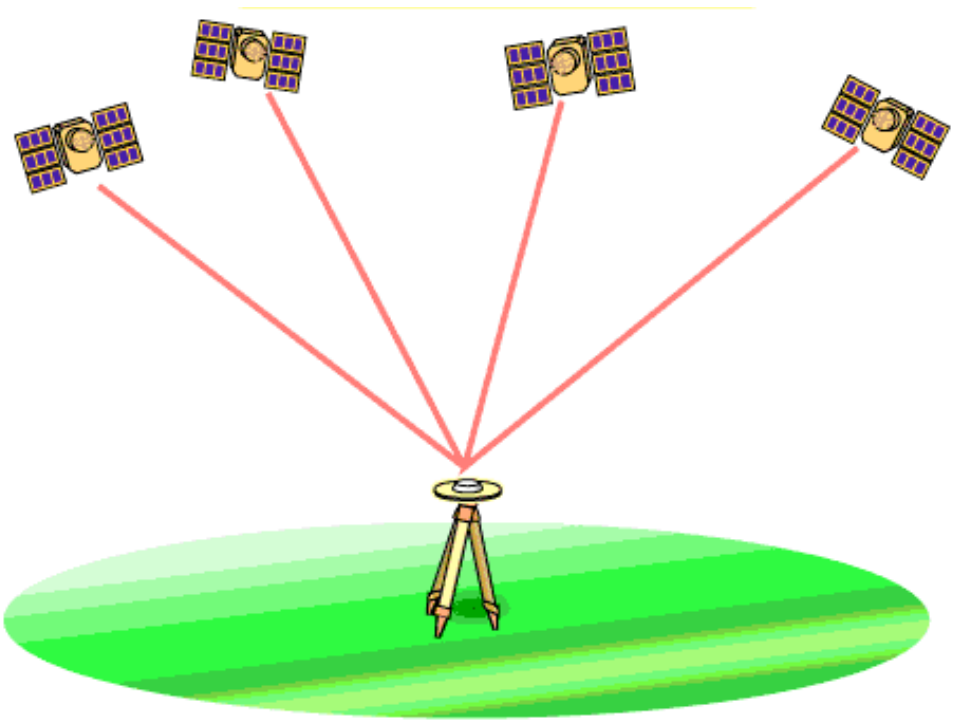
• Mesure de rayonnement émis ou transmis par des tomodensitomètres, gamma caméras ou tomographes à émission de positons



• Traitement de l'information détectée

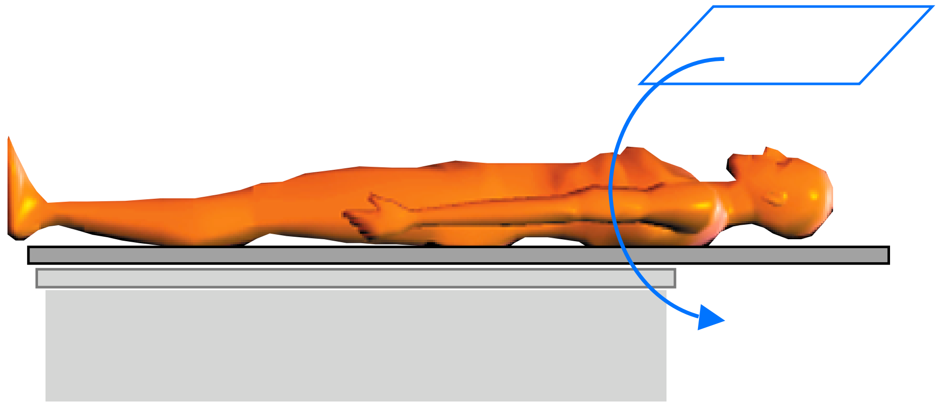
Le point clef

- Mesures sous différentes incidences angulaires



En imagerie médicale

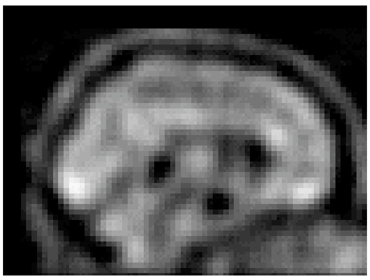
mesures = projection



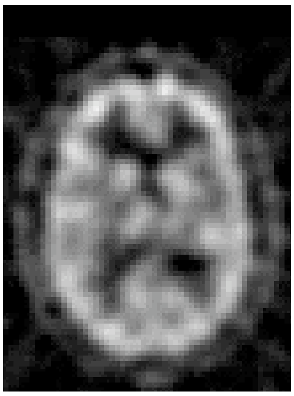
Mesures intégrales sous différentes incidences angulaires

projections

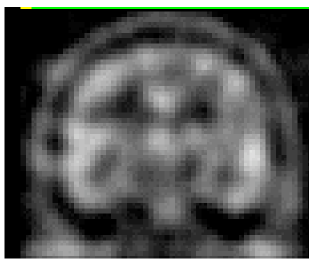
Traitement de l'information détectée



sagittale



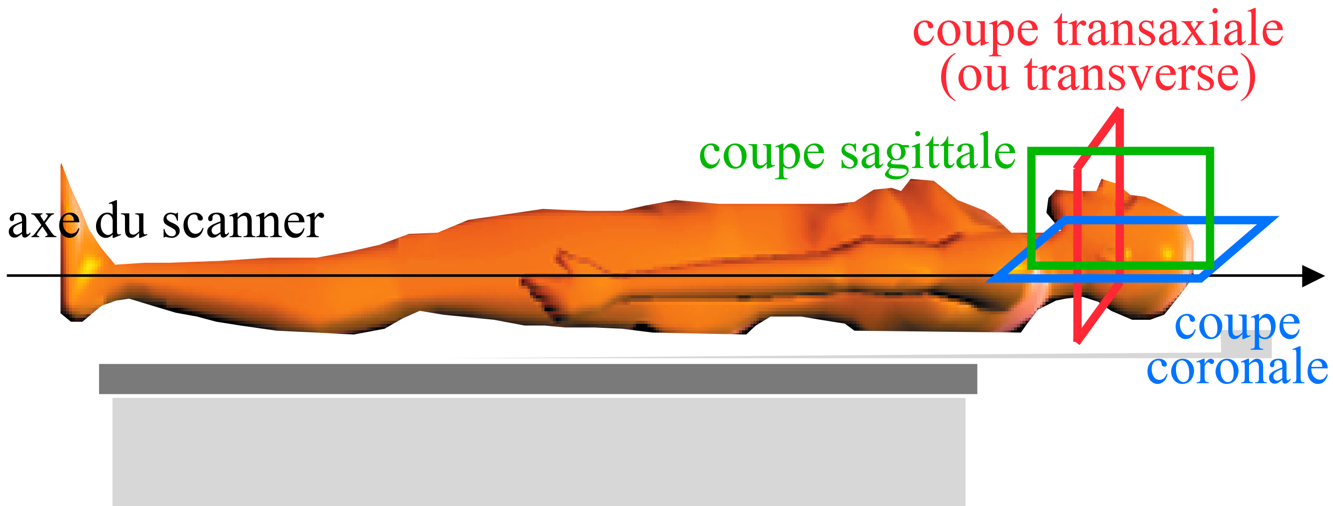
transverse

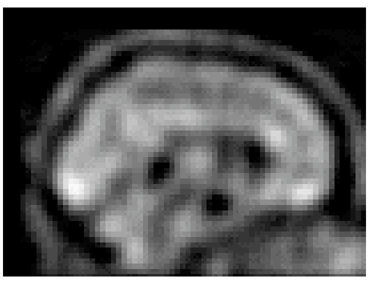


coronale

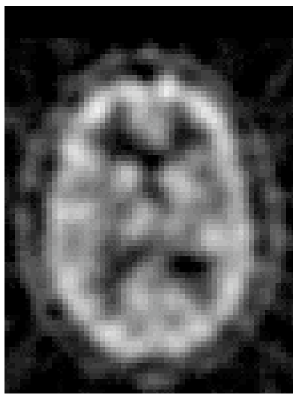
coupes d'orientation quelconque :
imagerie 3D

Coupes tomographiques

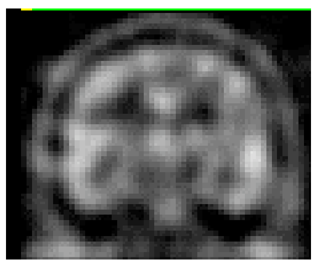




sagittale



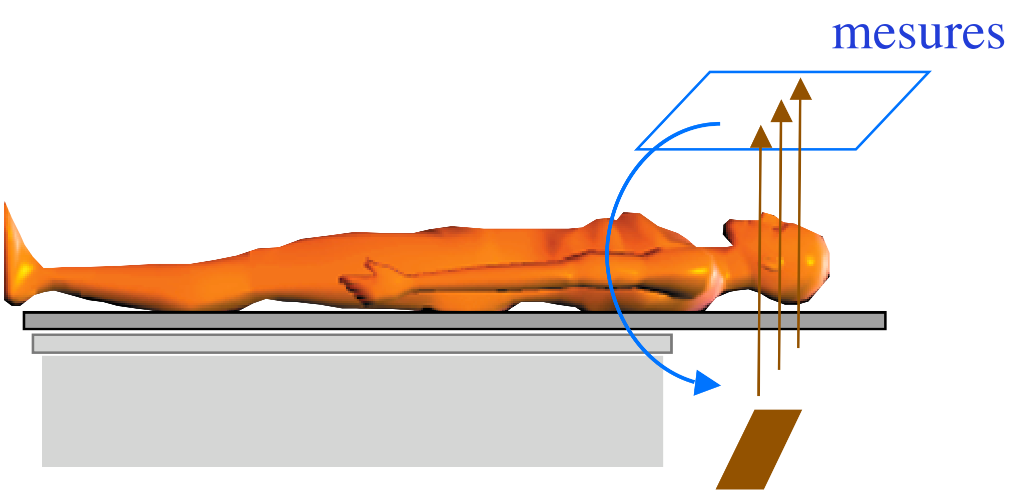
transverse



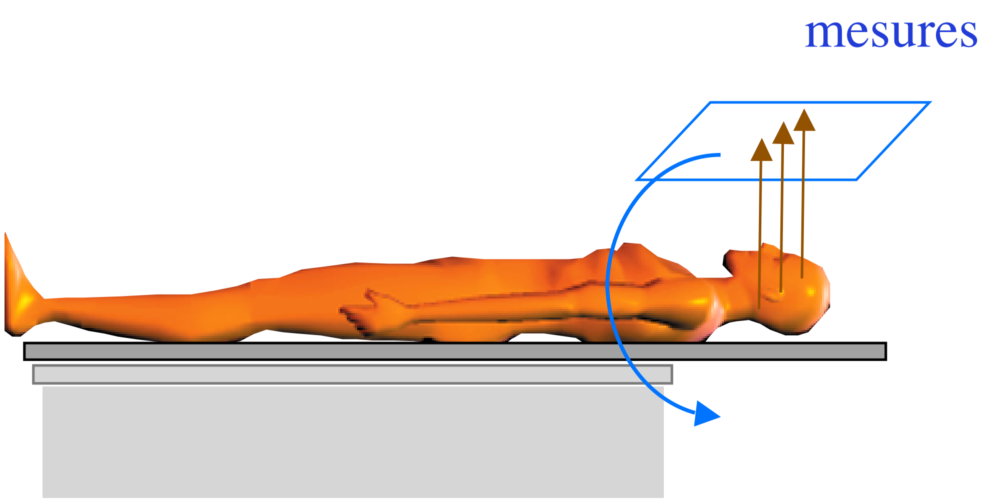
coronale

Deux types de mesure en imagerie médicale

- Tomographie de transmission

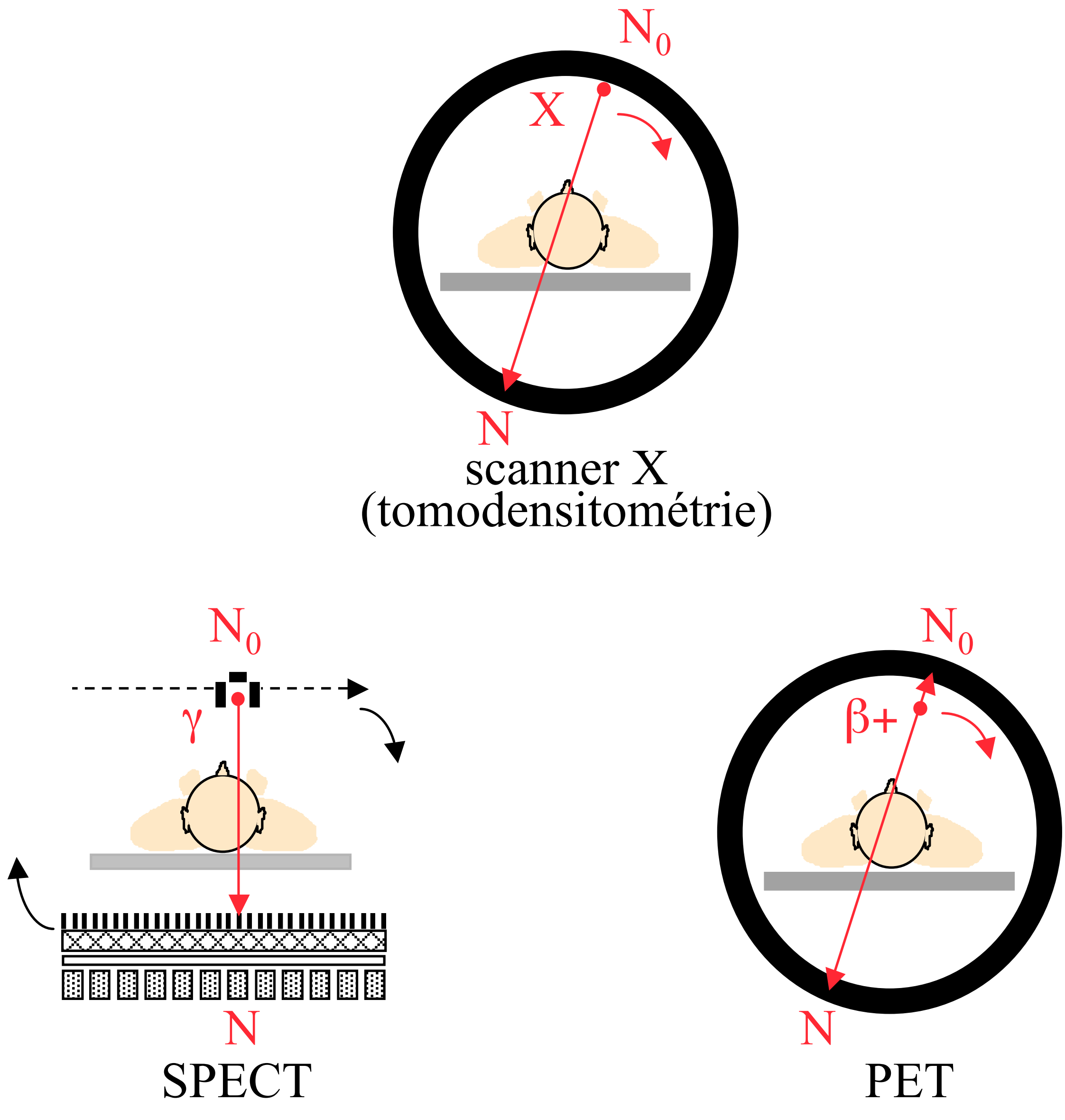


- Tomographie d'émission



Tomographie de transmission : dispositifs

- Source (X ou γ) externe au patient



Donne des informations sur l'atténuation induite pas les tissus, donc sur la densité des tissus

Tomographie de transmission : mesures

• Projection du rayonnement ayant traversé le patient

• Donne des informations sur la nature des tissus traversés

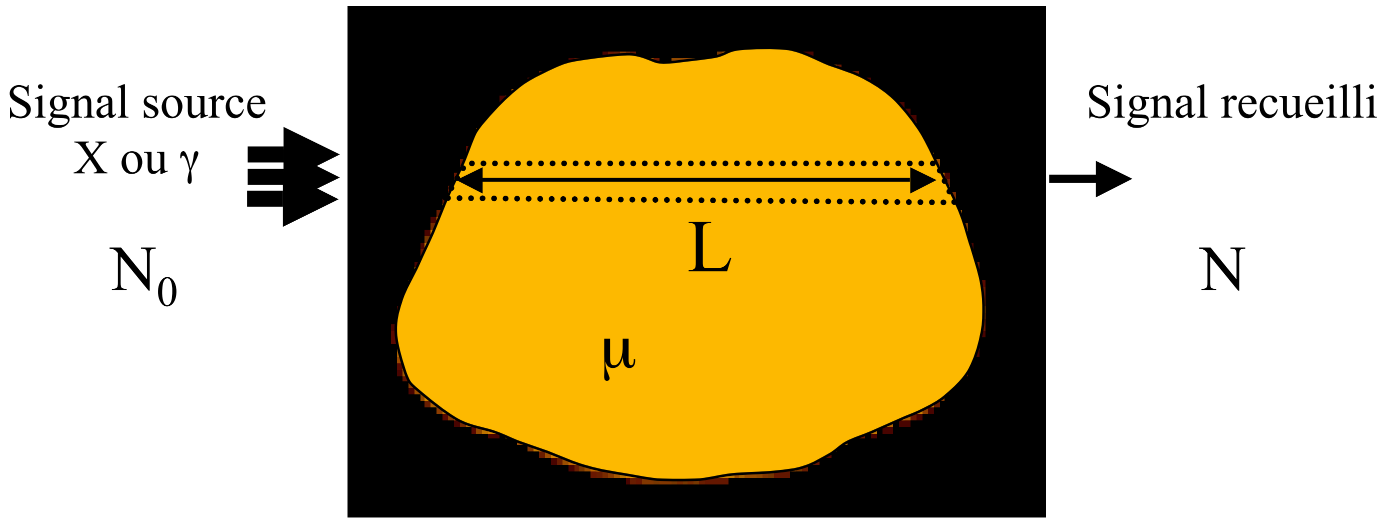
Si signal recueilli ~ signal source :
⇒ quasiment pas d'atténuation : poumons ?

Si signal recueilli <<< signal source :
⇒ beaucoup d'atténuation : os ?

Comment remonter à une information précise ?

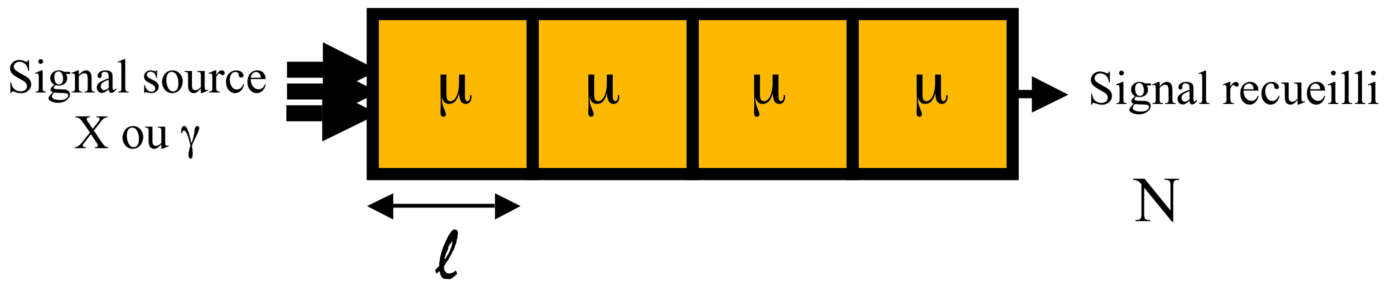
Modélisation des mesures

• Atténuation d'une source γ ou X dans un milieu homogène de coefficient d'atténuation μ (en cm^{-1})



$$N = N_0 \exp(-\mu L)$$

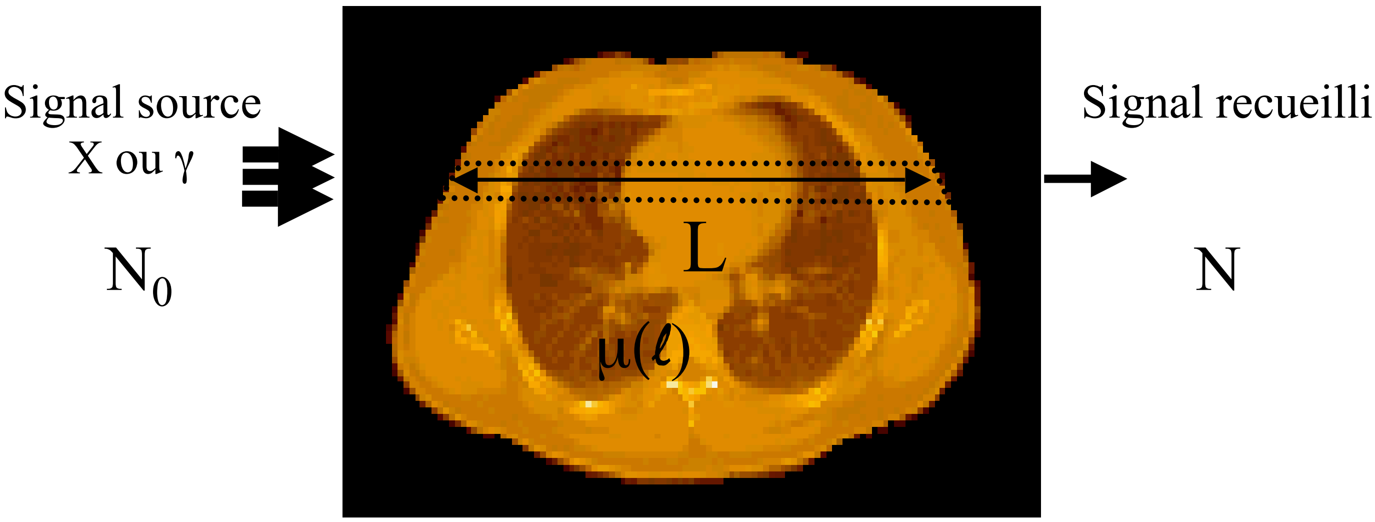
• Formulation discrète :



$$N = N_0 \exp(-\mu \ell) \exp(-\mu \ell) \exp(-\mu \ell) \exp(-\mu \ell)$$
$$= N_0 \exp(-\mu \ell - \mu \ell - \mu \ell - \mu \ell) = N_0 \exp(-4 \mu \ell)$$

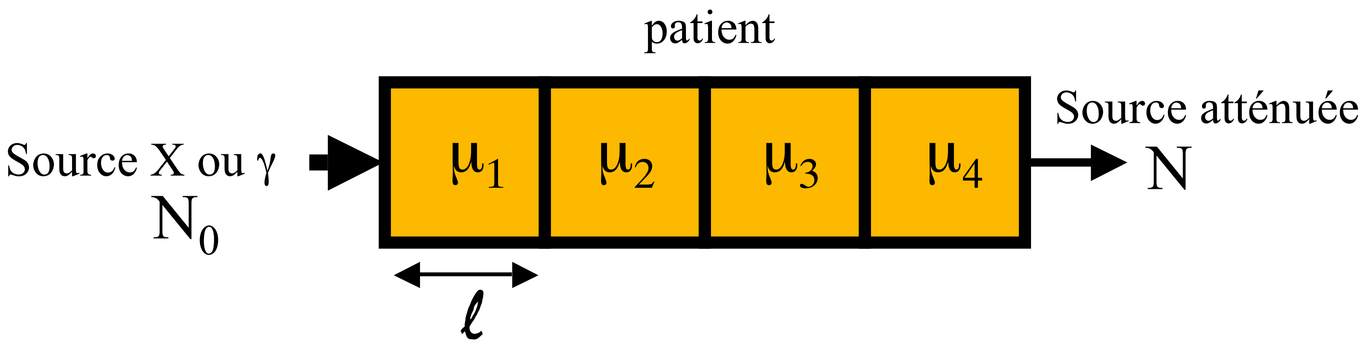
Modélisation des mesures

- Atténuation d'une source γ ou X dans un milieu de densité inhomogène



$$N = N_0 \exp\left(- \int_0^L \mu(\ell)\, d\ell\right)$$

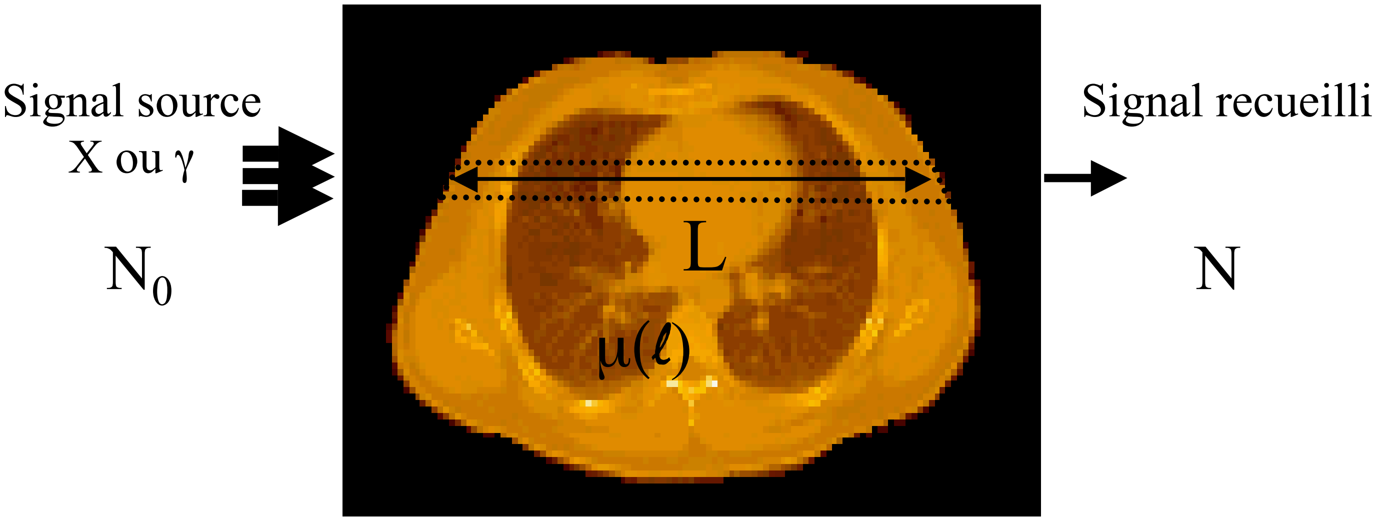
- Formulation discrète



$$N = N_0 \exp[-\mu_1 \ell - \mu_2 \ell - \mu_3 \ell - \mu_4 \ell)]$$
$$= N_0 \exp[-(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4)]\, \ell$$

Problème à résoudre

• Trouver $\mu(\ell)$, qui représente la cartographie du coefficient d'atténuation dans le milieu



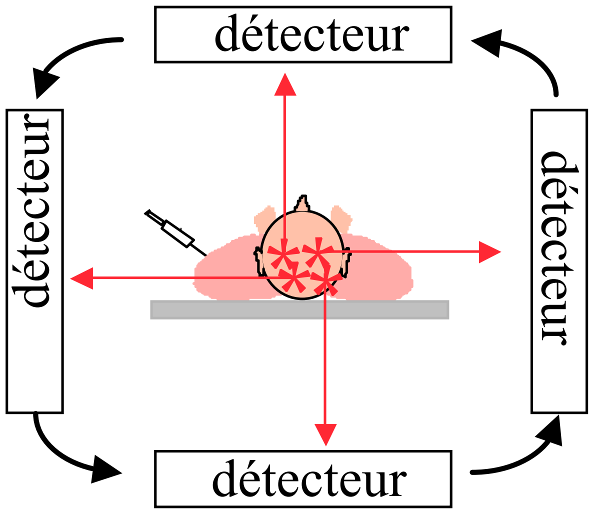
$$N = N_0 \exp\left(- \int_0^L \mu(\ell)\, d\ell\right)$$

$$\ln \frac{N_0}{N} = \int_0^L \mu(\ell)\, d\ell$$

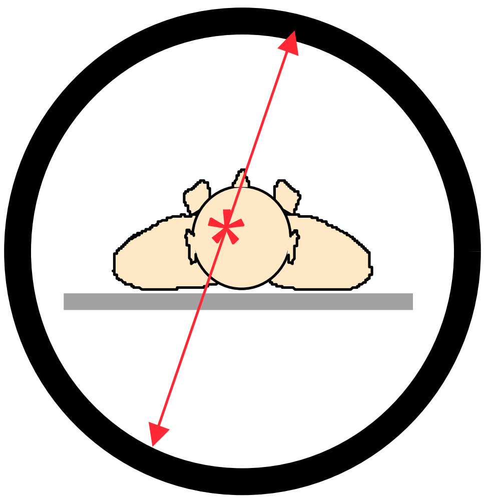
… à partir des mesures intégrales (i.e. des sommes mesurées)

Tomographie d’émission : dispositifs

- Source γ ou β+ interne au patient



SPECT

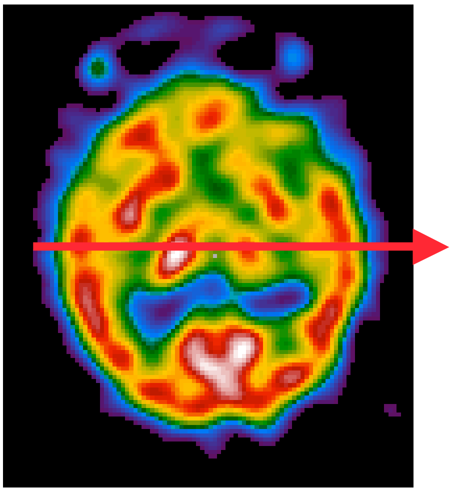


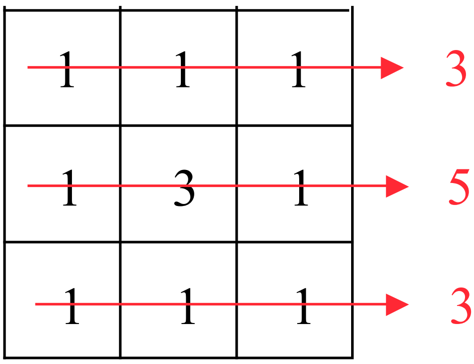
PET

Donne des informations sur la localisation de la source dans l’organisme

Tomographie d’émission : mesures

- Idéalement (sans atténuation) : somme (intégrale) de l’activité le long des raies de projections



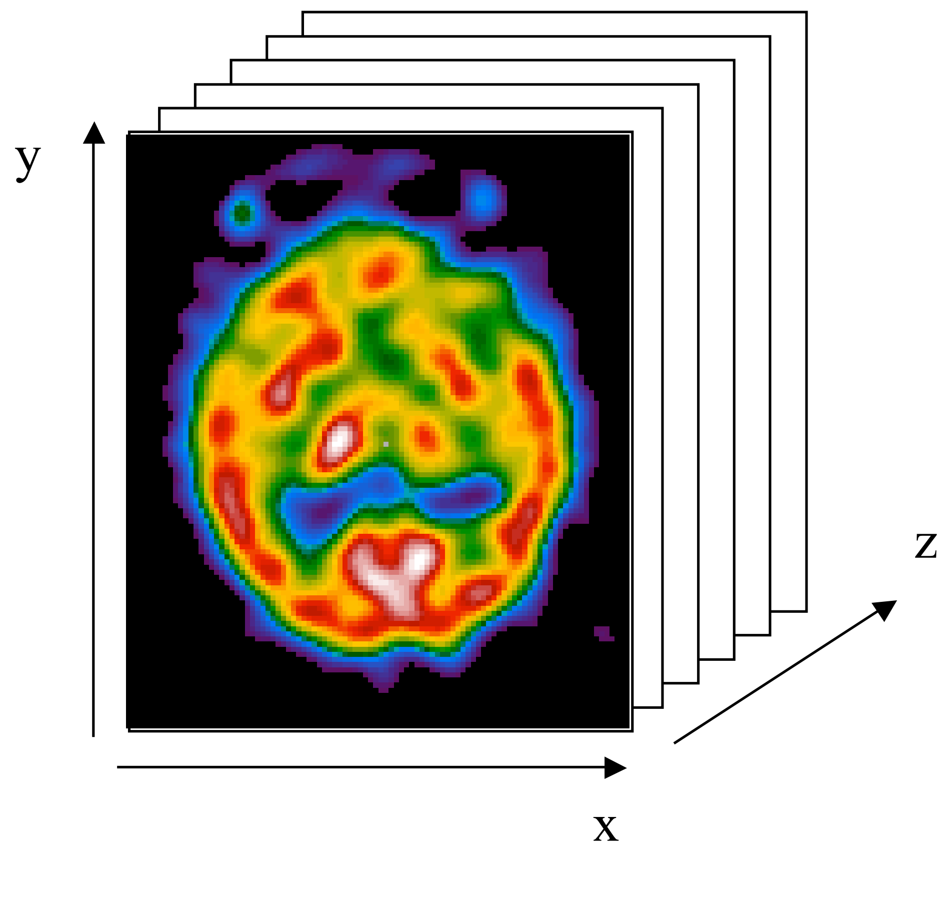


$$N = a_1 + a_2 + a_3$$

$$N = \int_0^D f(\ell)\, d\ell$$

Problème à résoudre

• Objet à reconstruire : cartographie 3D de la concentration du radiotraceur dans l'organisme



Traitement de l'information détectée

Estimer la distribution 3D du paramètre d'intérêt à partir des projections 2D mesurées

Reconstruction tomographique

- Tomographie de transmission
Paramètres d'intérêt = coefficient d'atténuation μ

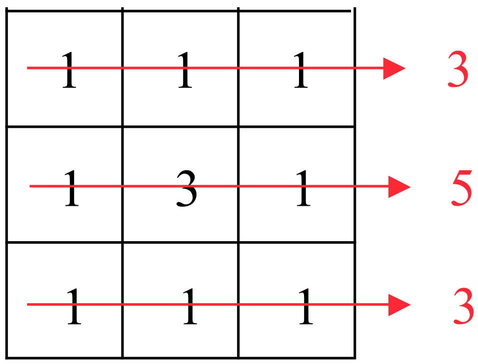
- Tomographie d'émission
Paramètres d'intérêt = carte d'activité

Pourquoi faire de la tomographie ?

• Accès à une information volumique

• Rehaussement de contraste par rapport aux données projetées

Exemple en tomographie d'émission :

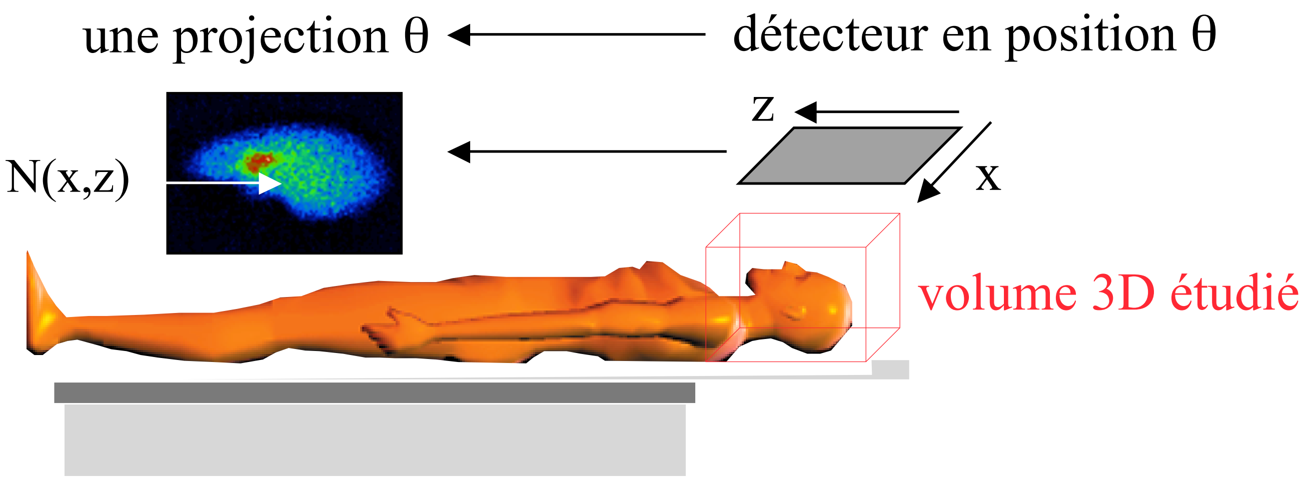


Contraste sur les projections : (5-3)/3 = 0,66

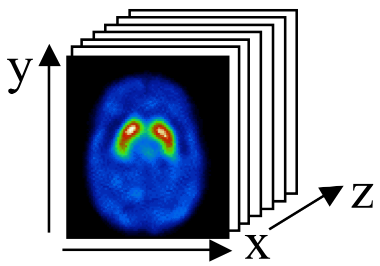
Contraste sur les coupes : (3-1)/1 = 2

Formulation du problème en 3D

• Un ensemble de projections 2D

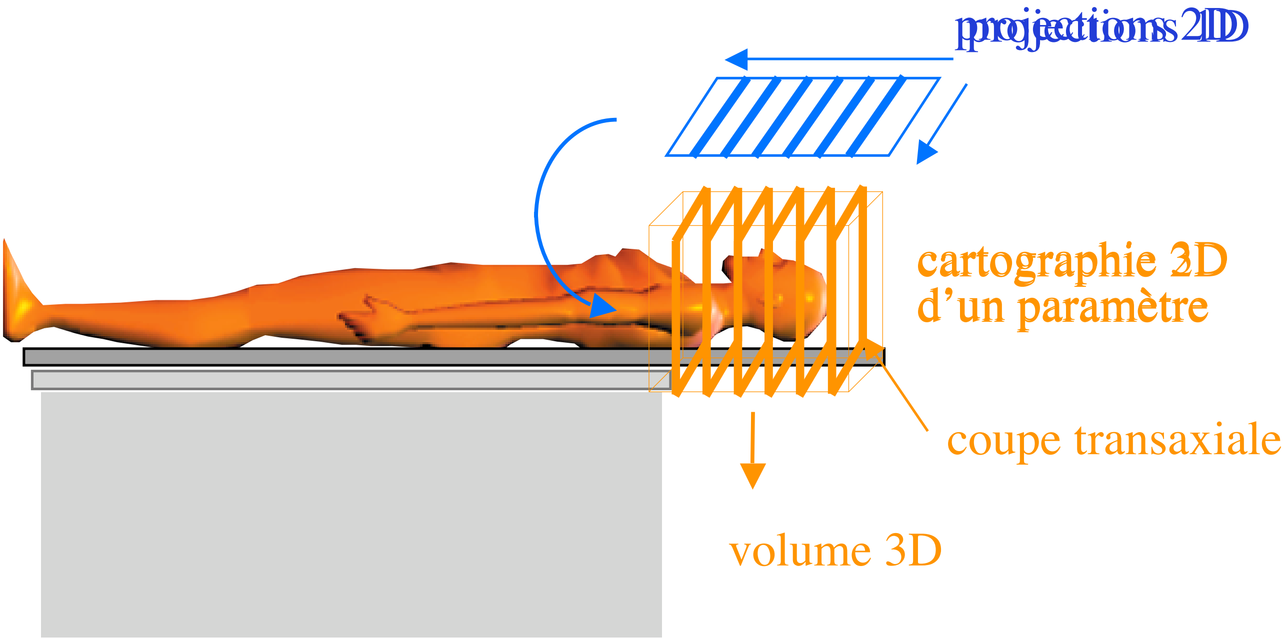


➡ reconstruction d'un objet 3D



Factorisation du problème de reconstruction

volume 3D à partir d'images 2D

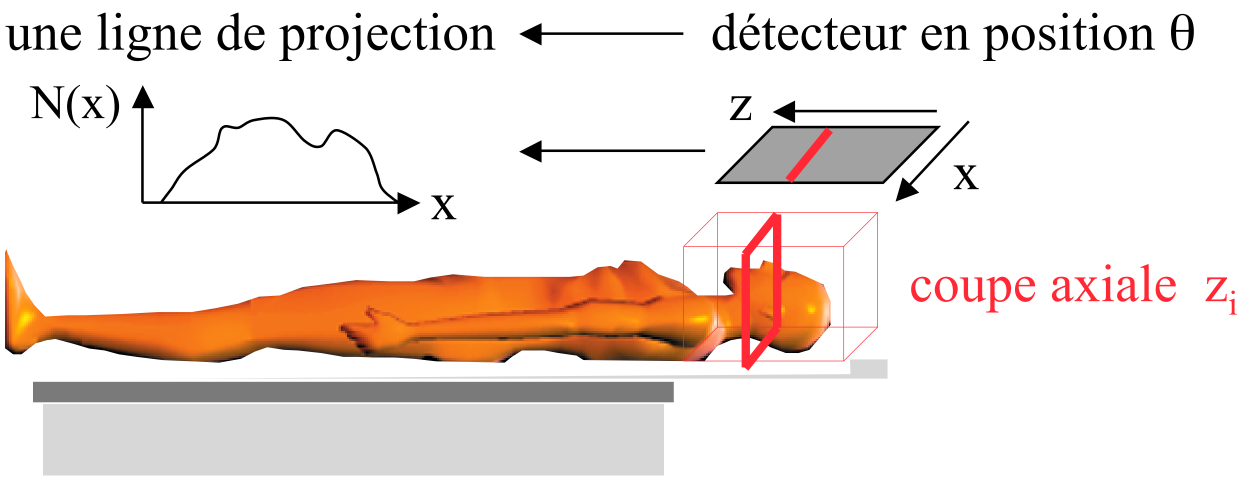


volume 3D reconstruit à partir de la
reconstruction d'un ensemble d'images 2D

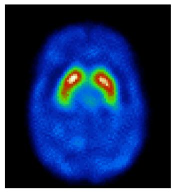
Dans un 1er temps, il suffit donc de
comprendre comment on reconstruit l'image
d'une coupe

Formulation du problème en 2D

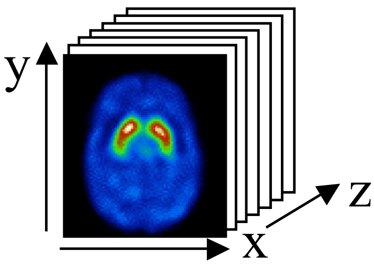
- Un ensemble de projections 1D



➡ reconstruction d'un objet 2D (coupe z_i)

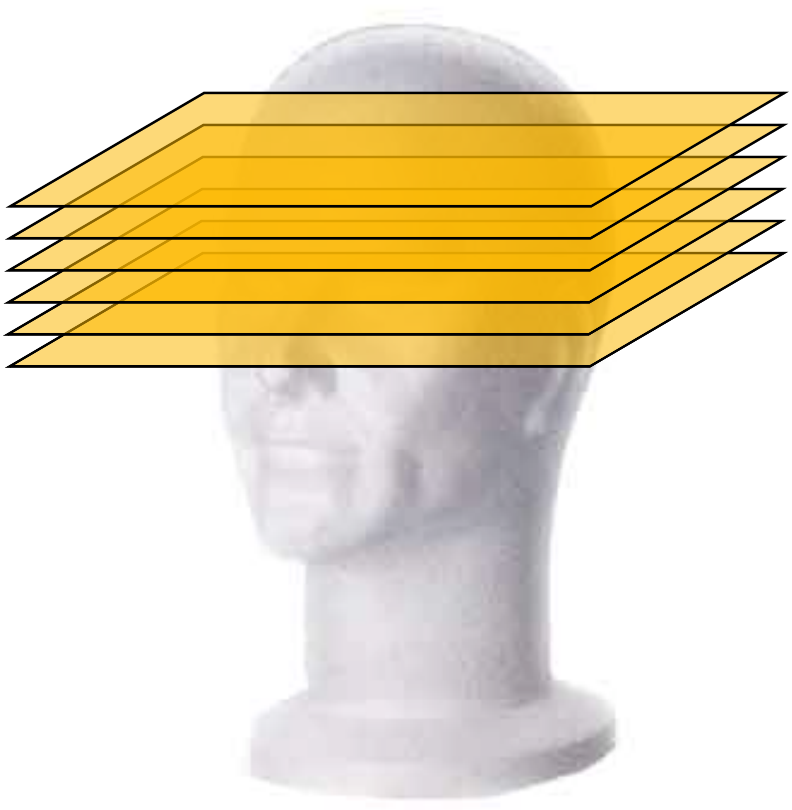


ensemble de coupes z_i = volume d'intérêt



La reconstruction tomographique en général

• Estimation d'un volume 3D en reconstruisant indépendamment un ensemble de coupes 2D



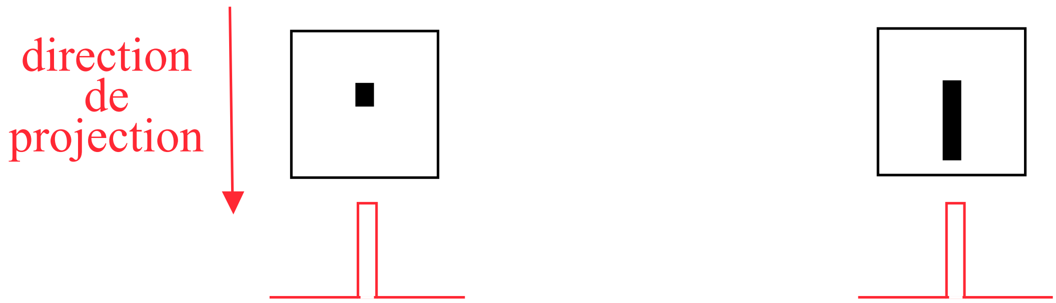
Pourquoi est-ce difficile ?

La leçon difficile, William Bouguereau (1825 - 1905)

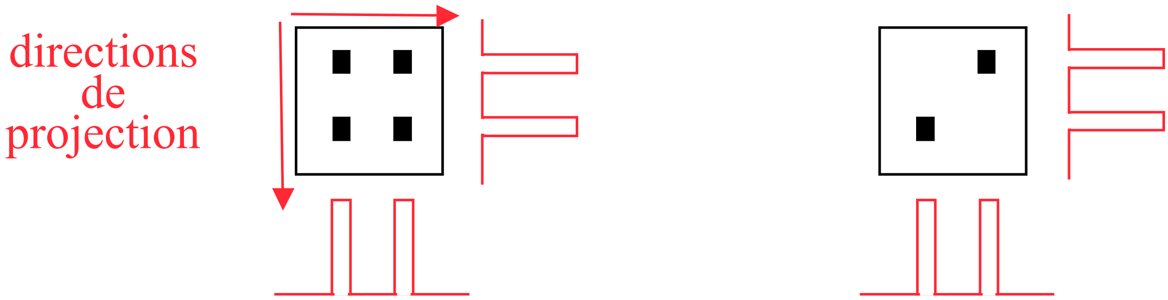
Non unicité de la solution

- Pas de solution unique : toujours plusieurs objets compatibles avec un ensemble fini de projections

1 projection : plusieurs solutions possibles



2 projections : plusieurs solutions possibles

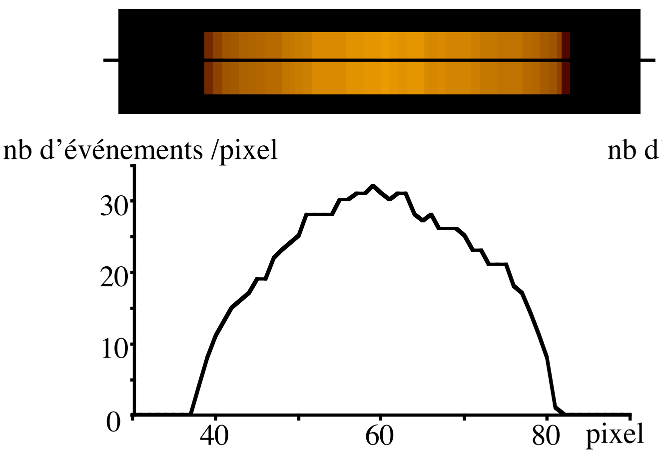


➡ Unicité de la solution pour une infinité de projections seulement

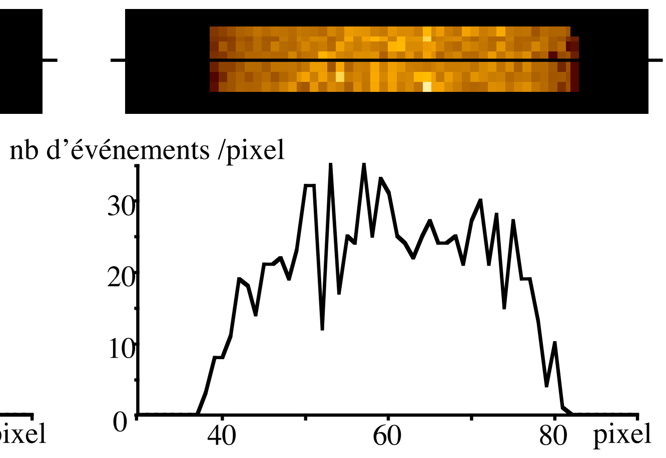
Bruit

- Pas de solution du fait du bruit entachant les données

				mesures imparfaites
10	11	9	30	32
10	32	10	52	50
11	8	10	29	27



projection idéale



projection bruitée

Problème inverse mal posé

• Problème inverse :
On dispose de mesures et il faut trouver ce qui a produit ces mesures

• Problème mal posé :
La solution est instable : une petite différence sur les projections peut conduire à des coupes reconstruites très différentes

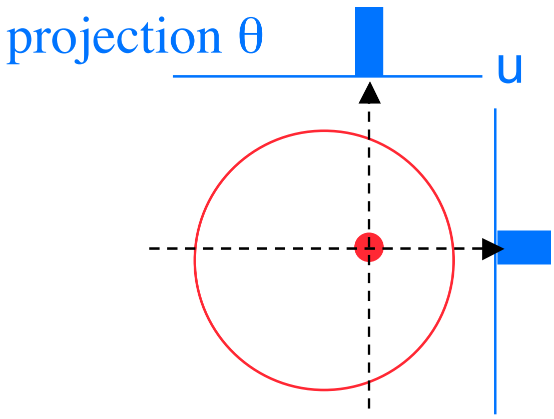
Notions de base

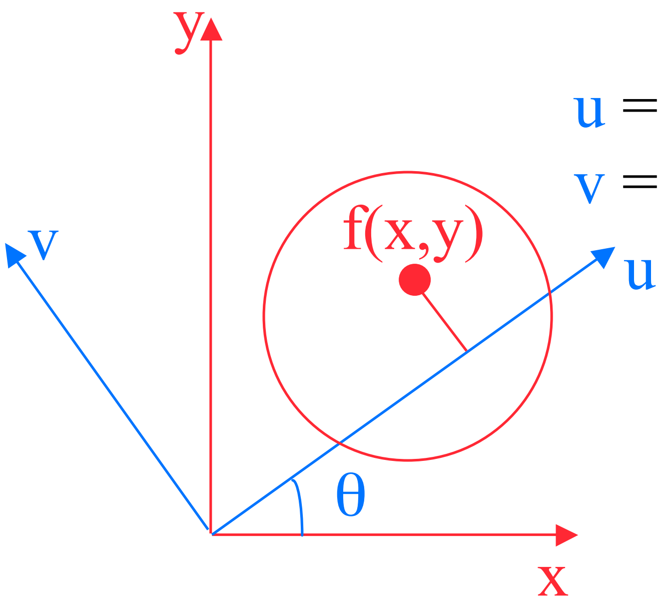
Travaux princeps

1887-1956

1917 : Johann Radon : “De la détermination des fonctions à partir de leurs intégrales selon certaines directions”, Math. Phys. Klass

Formulation continue de l'opération de projection





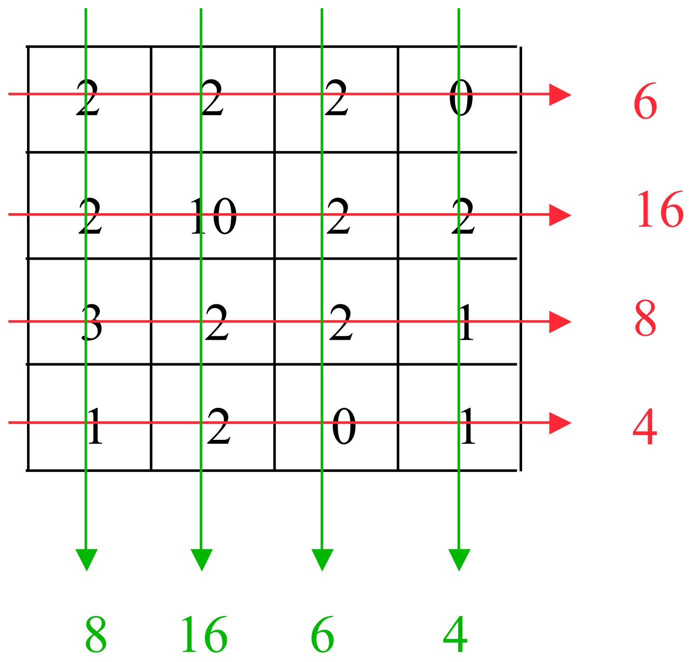
$$u = x \cos\theta + y \sin\theta$$

$$v = -x \sin\theta + y \cos\theta$$

$$p(u,\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, dv$$

Formulation discrète de l'opération de projection

• Calculer les 2 projections de la distribution d'activité représentée



Transformée de Radon

$$p(u,\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, dv$$

ensemble des projections pour $\theta = [0, \pi\,]$
= transformée de Radon de $f(x,y)$

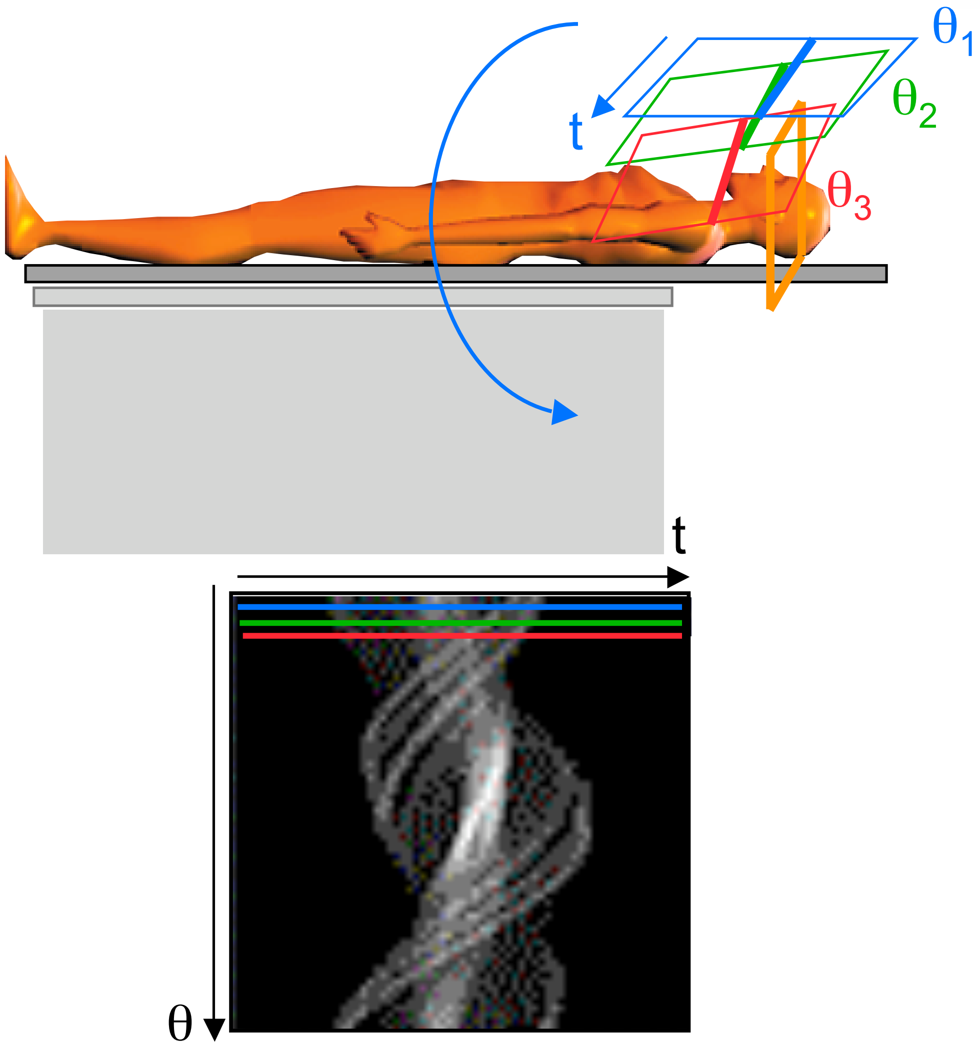
$$f(x,y) \longrightarrow p(u,\theta)$$

domaine spatial — espace de Radon

Problème de reconstruction tomographique :
inverser la transformée de Radon, i.e.,
estimer $f(x,y)$ à partir de $p(u,\theta)$

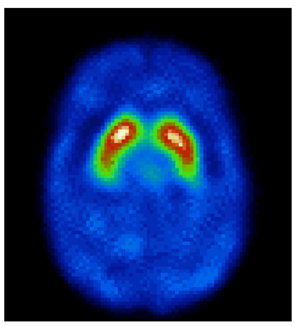
Sinogramme

Sinogramme = signal issu d'une coupe z_i vue sous différentes incidences θ



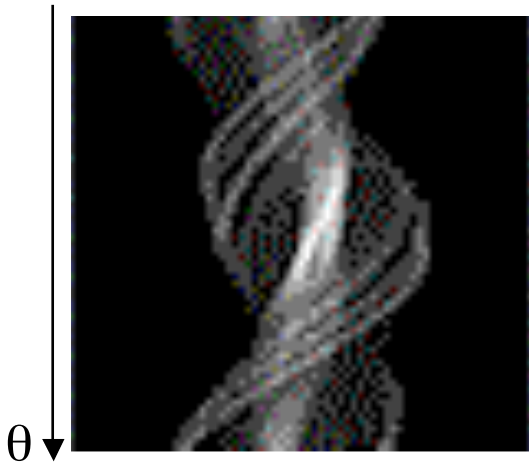
sinogramme correspondant à la coupe z_i

reconstruction tomographique → coupe z_i



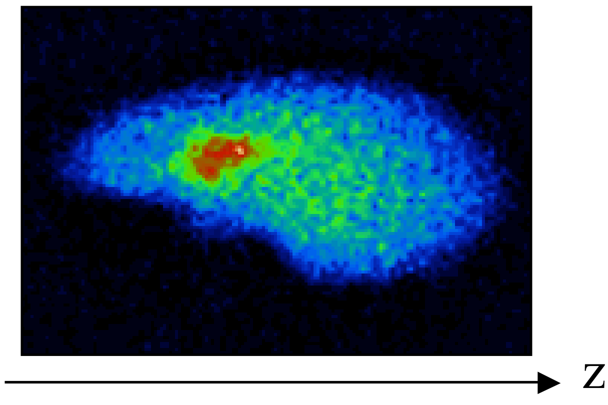
Sinogrammes et projections

Les sinogrammes et les projections contiennent les mêmes informations : ils ne diffèrent que par l'organisation avec laquelle les informations sont représentés.



sinogramme correspondant à la coupe z_i

Un sinogramme : toute l'information relative à une coupe, obtenue pour tous les angles de projection.



projection correspondant à l'angle θ

Une projection : l'information relative à toutes les coupes, mais pour une incidence angulaire unique.

Compris ?

On dispose de 64 projections de dimension 128 pixels (dans la direction axiale) x 256 pixels

• Combien de coupes transaxiales peut-on reconstruire sans interpolation ?

128

• Combien de sinogrammes peut-on former à partir de ces projections ?

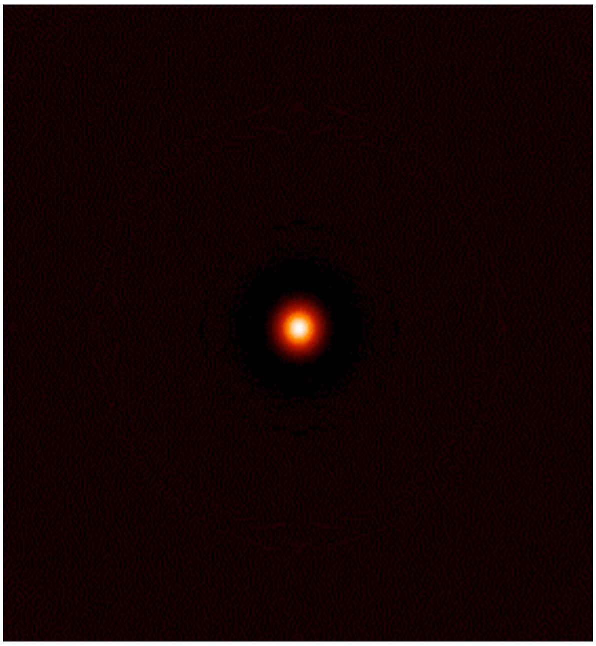
128

• Quelles sont les dimensions d'un sinogramme ?

64 lignes et 256 colonnes

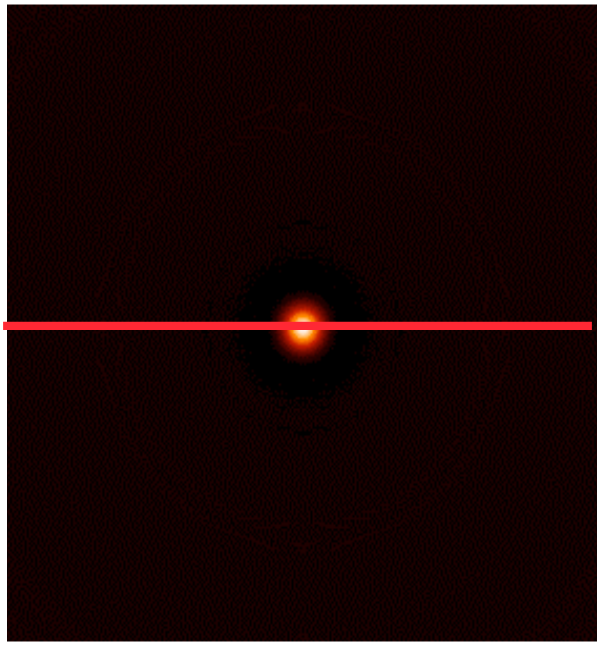
Compris ?

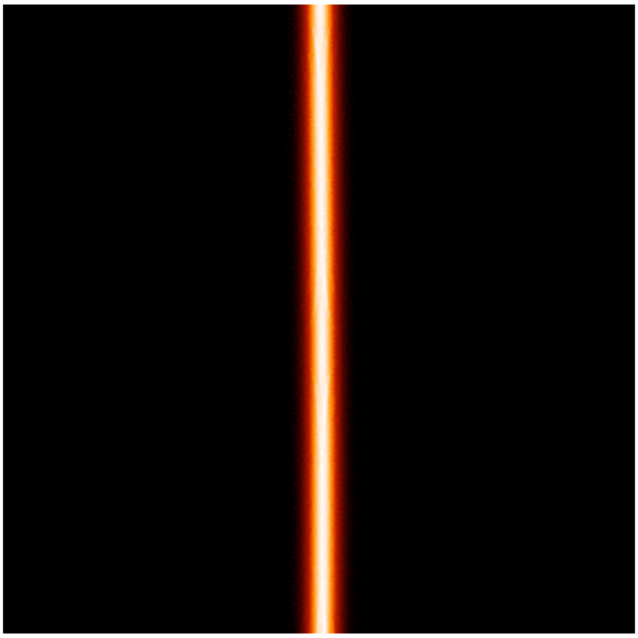
Tomographie d'émission :
Est-ce une projection ou un sinogramme ?



Compris ?

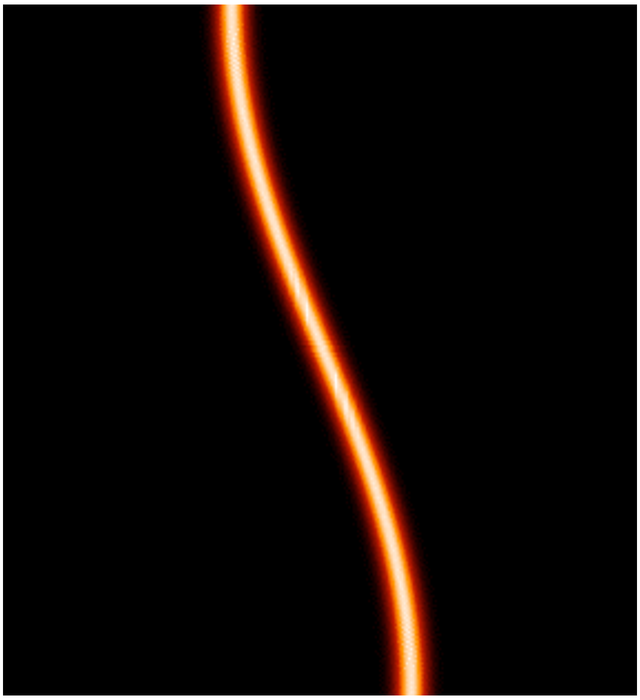
Tomographie d'émission :
Si toutes les projections sont identiques à celles-ci, quel est le sinogramme correspond à la coupe indiquée ?

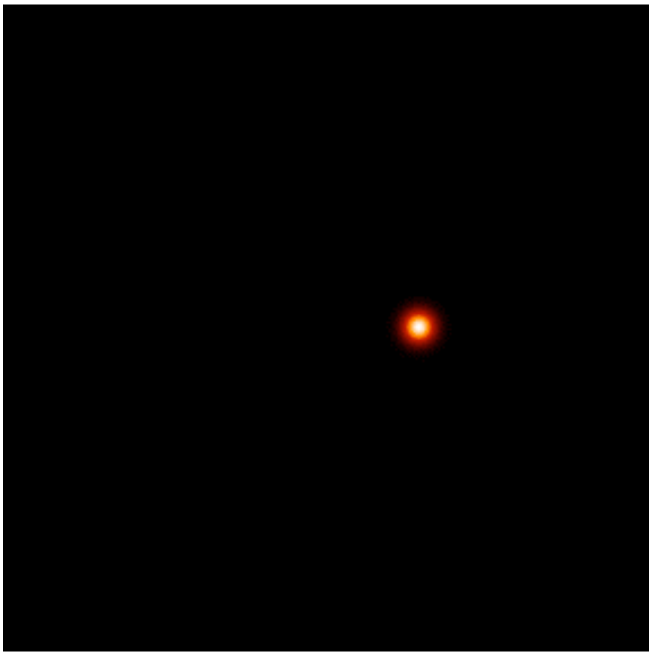




Compris ?

Tomographie d’émission :
A quoi correspond ce sinogramme ?





Deux approches à la reconstruction tomographique

- Les méthodes analytiques

$$R[f(x,y)] = \int_0^{\pi} p(u,\theta)\, d\theta$$

- Les méthodes discrètes (ou itératives)

$$p = R\, f$$

Les méthodes analytiques : introduction

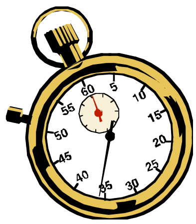
• Inversion analytique de la transformée de Radon = résolution d'équations intégrales

• Expression continue du problème de reconstruction tomographique

• Méthode la plus courante : rétroprojection filtrée

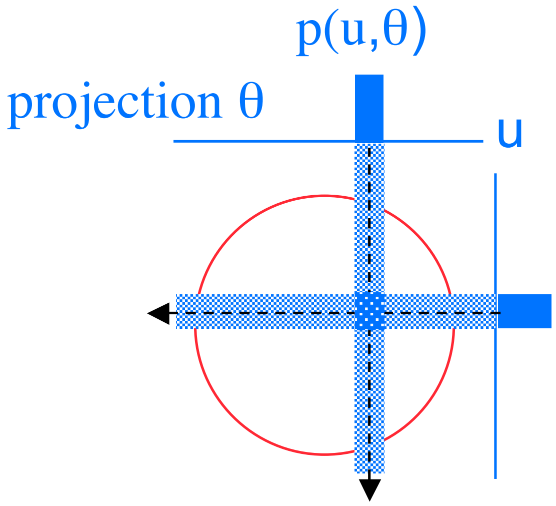
FBP : Filtered BackProjection

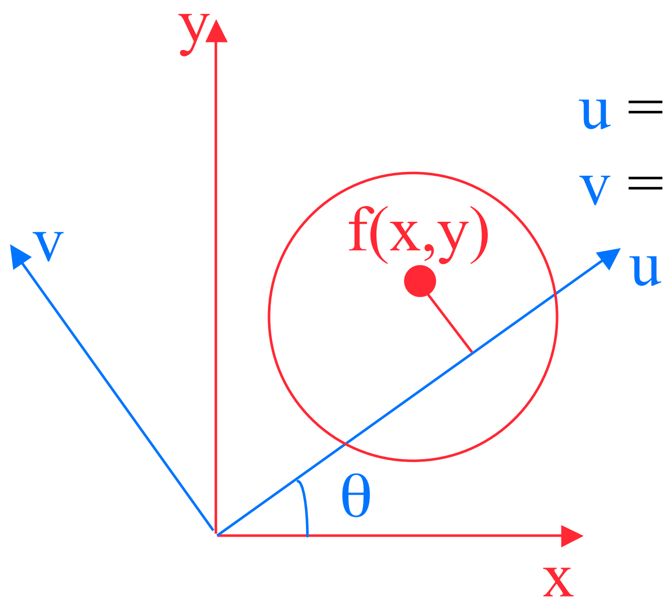
• Méthodes rapides



• Méthodes disponibles sur tous les dispositifs d'acquisition commercialisés (scanner X, SPECT, PET)

Opération de rétroprojection : expression conntinue





$u = x \cos\theta + y \sin\theta$

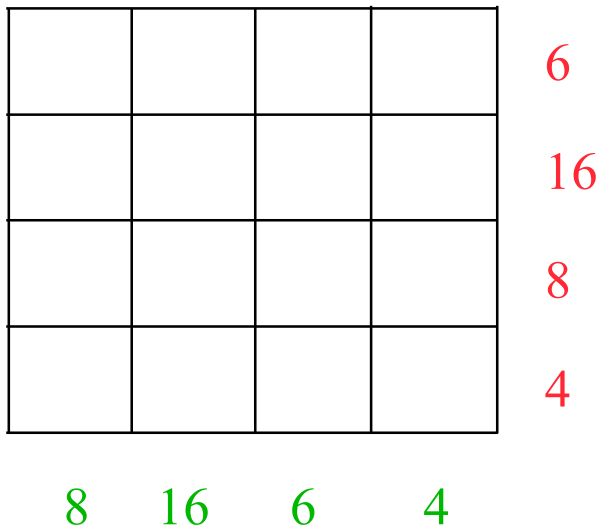
$v = -x \sin\theta + y \cos\theta$

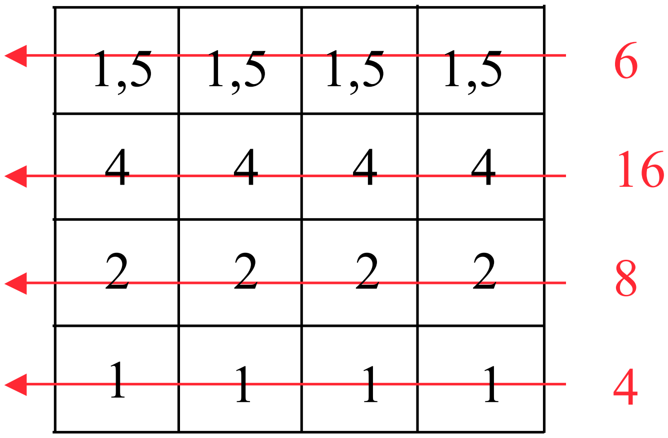
$$f^*(x,y) = \int_0^{\pi} p(u,\theta)\, d\theta$$

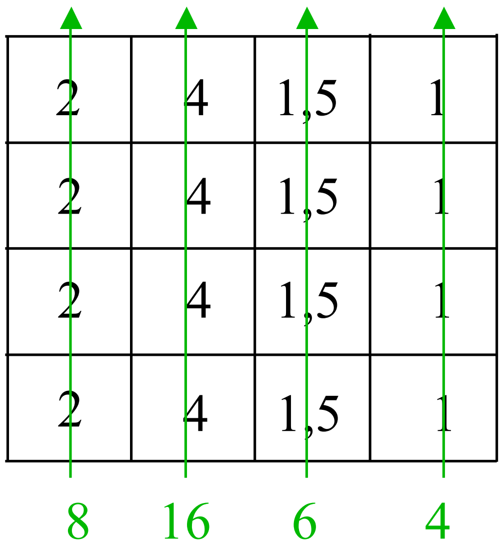
Attention : la rétroprojection n'est pas l'inverse de la transformée de Radon

Formulation discrète de l’opération de rétroprojection

- Calculer la rétroprojection des projections mesurées







Formulation discrète de l'opération de rétroprojection

1,5	1,5	1,5	1,5	6
4	4	4	4	16
2	2	2	2	8
1	1	1	1	4

2	4	1,5	1
2	4	1,5	1
2	4	1,5	1
2	4	1,5	1
8	16	6	4

Moyenne :

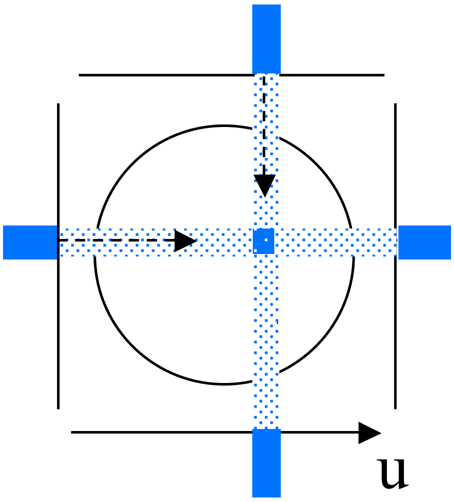
1,75	2,75	1,5	1,25
3	4	2,75	2,5
2	3	1,75	1,5
1,5	2,5	1,25	1

Image originale :

2	2	2	0
2	10	2	2
3	2	2	1
1	2	0	1

Attention : la rétroprojection n'est pas l'inverse de la transformée de Radon

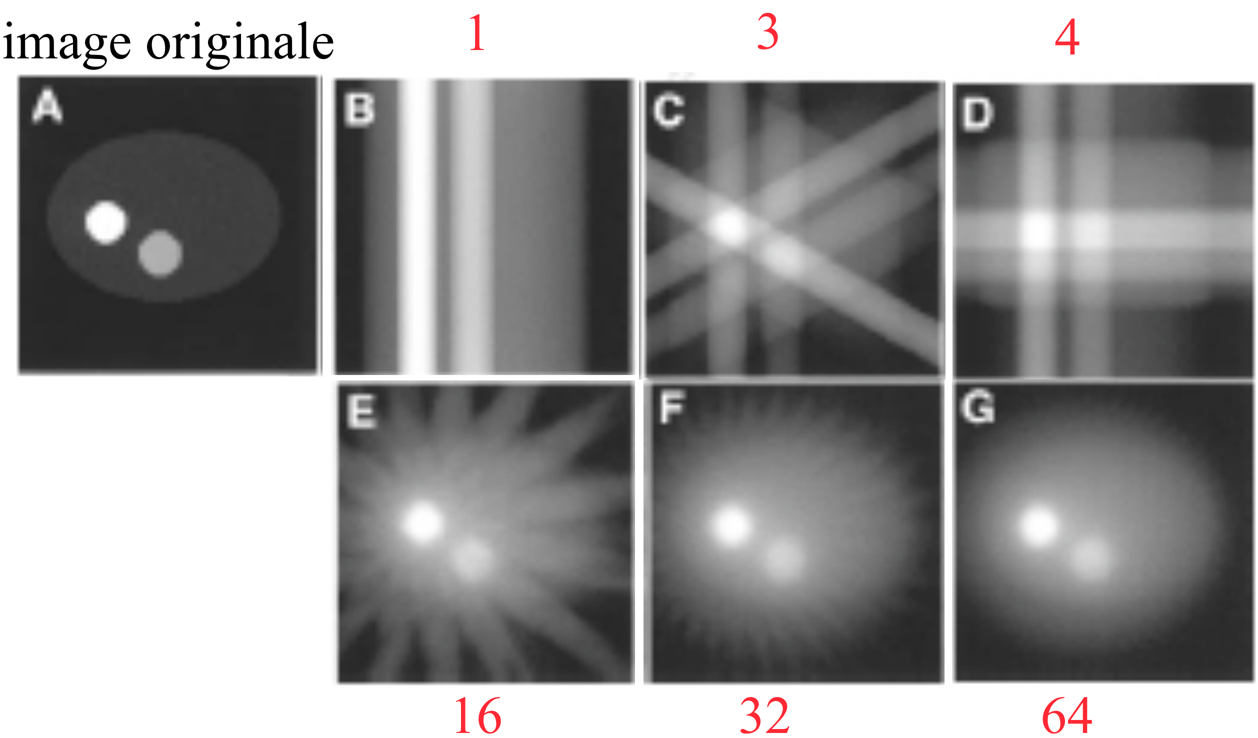
Limites de la rétroprojection simple



$$f^*(x,y) = \int_0^{\pi} p(u,\theta)\, d\theta$$

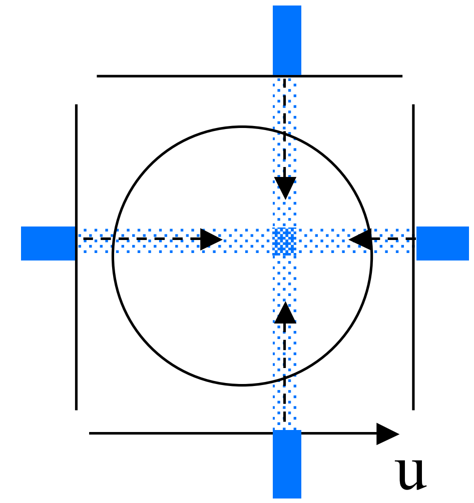
rétroprojection simple
➡ artefacts d'épandage en étoile

nombre de projections



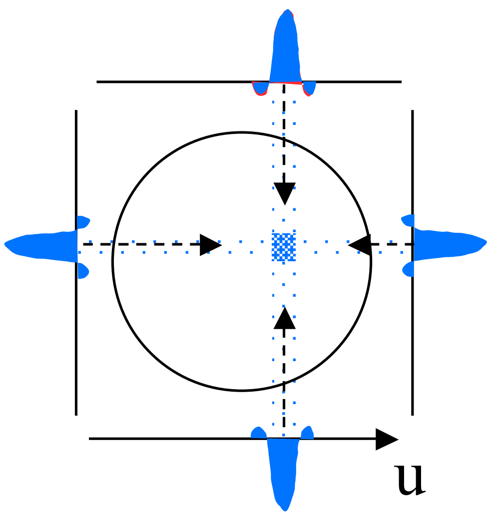
La rétroprojection n'inverse pas la transformée de Radon

Rétroprojection filtrée : principe



$$f^*(x,y) = \int_0^\pi p(u,\theta)\, d\theta$$

rétroprojection simple



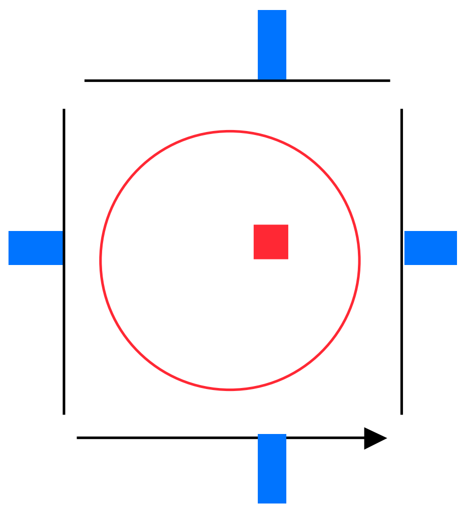
$$\mathit{f}^*(x,y) = \int_0^\pi \underbrace{\mathit{p}}_{\text{projection filtrée}}(u,\theta)\, d\theta$$

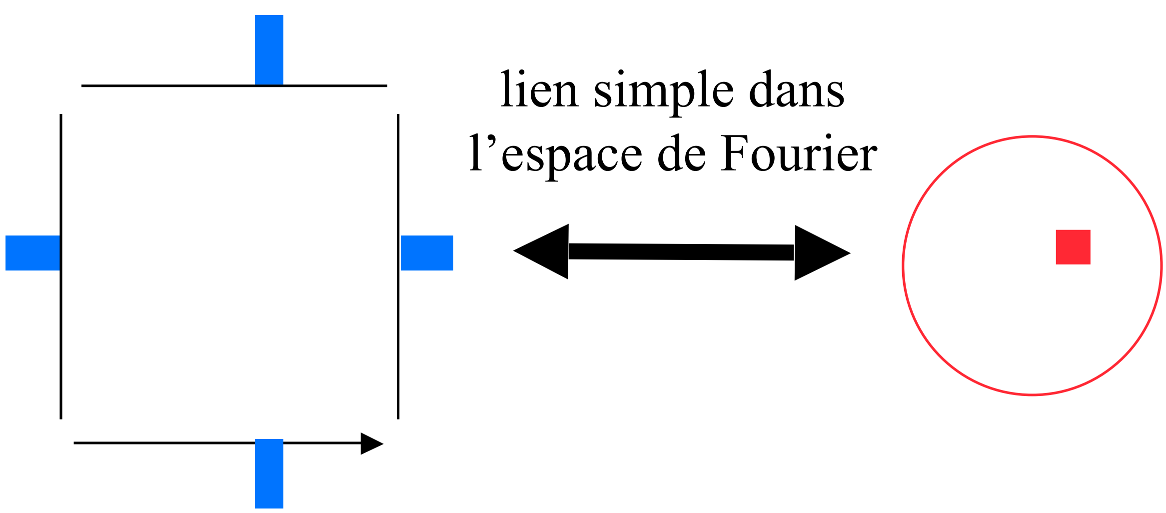
rétroprojection filtrée :
réduction des artefacts
inversion exacte de la transformée de Radon

Quel filtrage ?

Le filtre qui permet d'inverser exactement la transformée de Radon peut être dérivé théoriquement, en vertu du théorème de la coupe centrale

Ce théorème donne le lien entre les projections et l'objet dans l'espace de Fourier

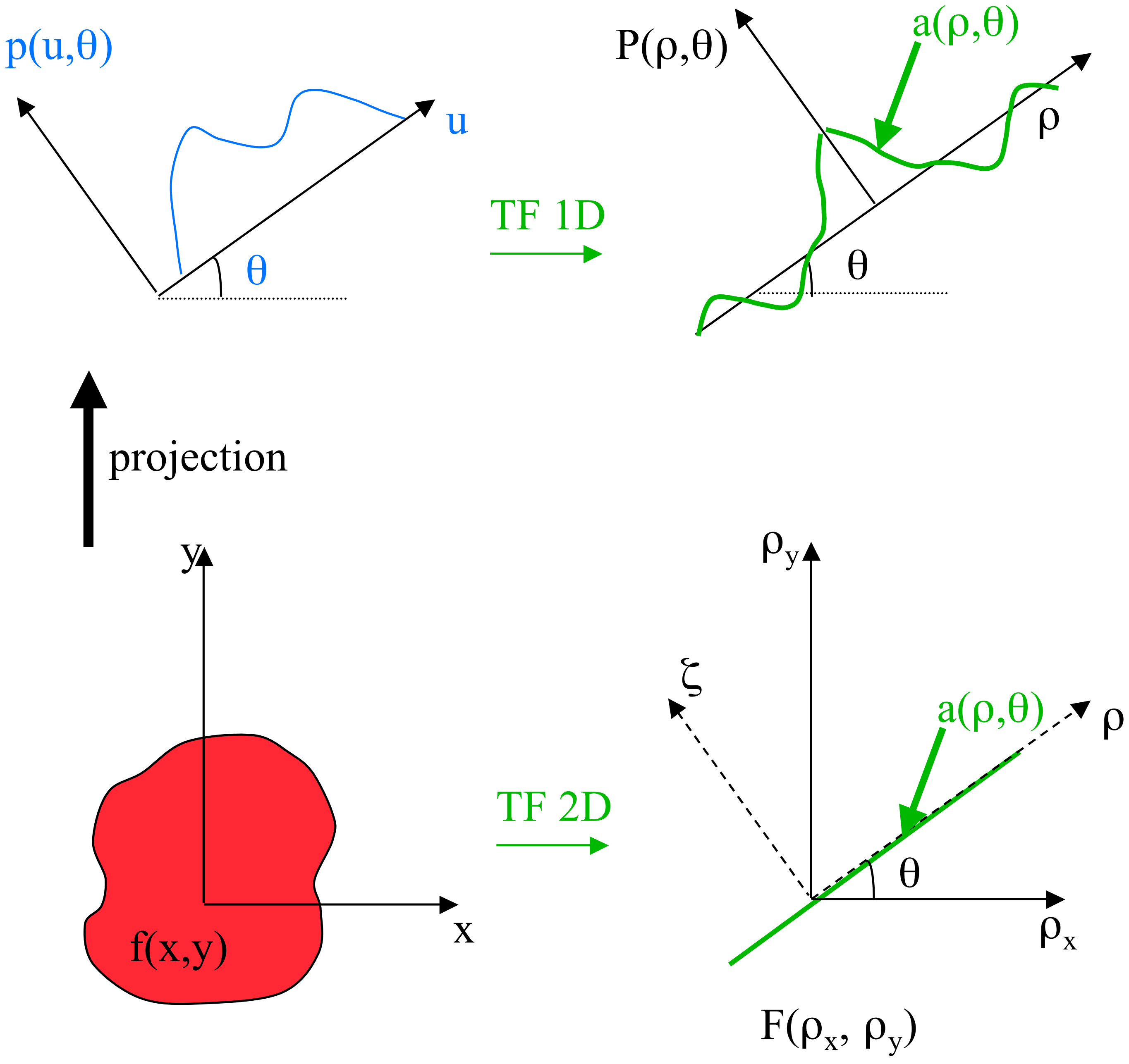




Théorème de la coupe centrale (TCC)

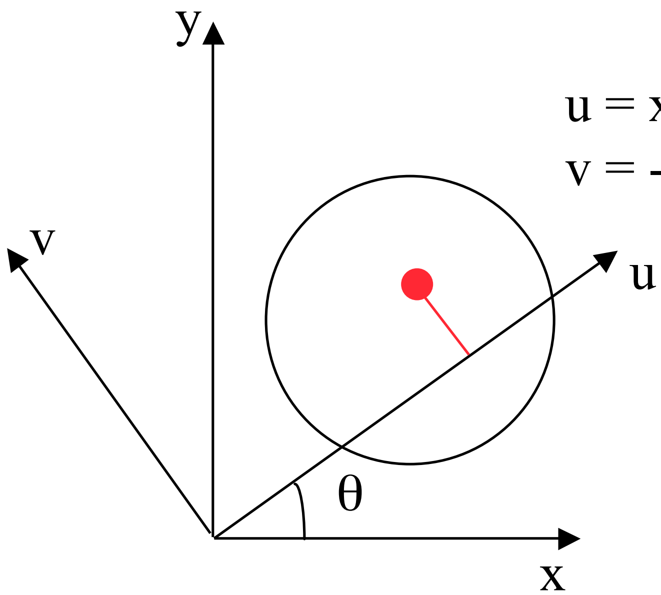
TF monodimensionnelle d'une projection par rapport à u
=
TF bidimensionnelle de la distribution à reconstruire

$$P(\rho,\theta) = F(\rho_x, \rho_y)\big|_{\zeta=0}$$



Théorème de la coupe centrale : démonstration

$$p(u,\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, dv \xrightarrow{\text{transformée de Fourier (TF)}} P(\rho,\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(u,\theta) e^{-i2\pi\rho u}\, du$$



$u = x \cos\theta + y \sin\theta$

$v = -x \sin\theta + y \cos\theta$

$\rho_x = \rho \cos \theta$

$\rho_y = \rho \sin \theta$

$du.dv = dx.dy$

changement de variable : $(u,v) \longrightarrow (x,y)$

$$P(\rho,\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) e^{-i2\pi\rho u}\, du\, dv = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) e^{-i2\pi(x\rho_x + y\rho_y)}\, dx\, dy$$

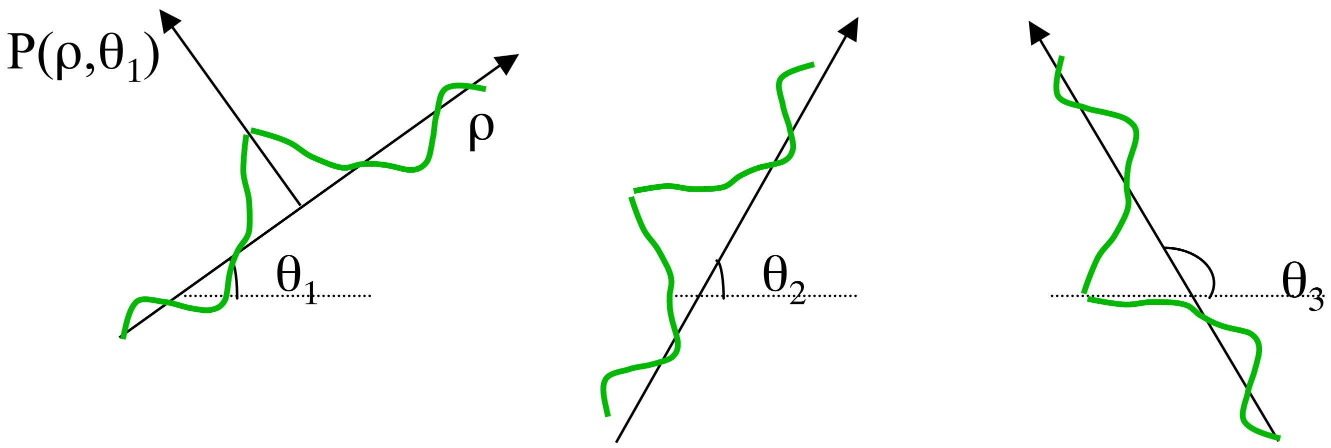
TF monodimensionnelle d'une projection par rapport à u

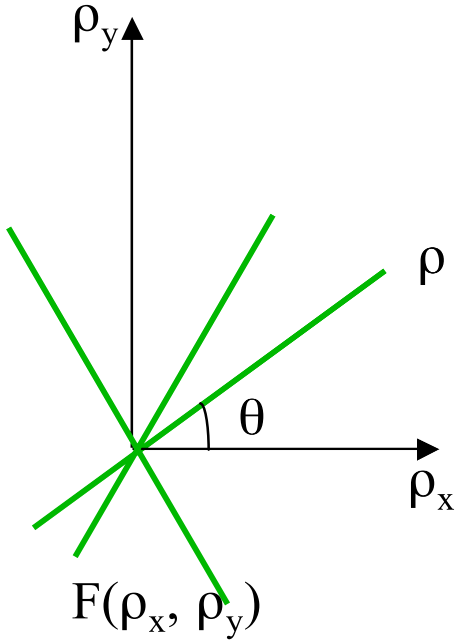
=

TF bidimensionnelle de la distribution à reconstruire

Rétroprojection filtrée : principe

Si on a $P(\rho,\theta)$ pour tous les angles θ entre 0 et π, on peut reconstruire la transformée de Fourier de l'objet, et donc l'objet





Rétroprojection filtrée : démonstration

$$\boxed{P(\rho,\theta) = F(\rho_x, \rho_y)}$$

$$f(x,y) \overset{TF^{-1}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\rho_x,\rho_y)e^{i2\pi(x\rho_x + y\rho_y)}\, d\rho_x\, d\rho_y$$

$$\overset{TCC}{=} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} P(\rho,\theta)e^{i2\pi(x\rho_x + y\rho_y)}\, d\rho_x\, d\rho_y$$

changement de variable : $(\rho_x, \rho_y) \rightarrow (\rho, \theta)$

$$= \int_{0}^{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} P(\rho,\theta)\, |\rho| e^{i2\pi\rho u}\, d\rho\, d\theta$$

$\rho_x = \rho \cos \theta$
$\rho_y = \rho \sin \theta$
$\rho = (\rho_x{}^2 + \rho_y{}^2)^{1/2}$
$d\rho_x . d\rho_y = \rho . d\rho . d\theta$
$u = x \cos\theta + y \sin\theta$

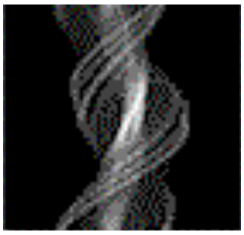
$$= \int_{0}^{\pi} p'(u,\theta)\, d\theta \quad \text{avec} \quad p'(u,\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(\rho,\theta)\, |\rho| e^{i2\pi\rho u}\, d\rho$$

projections filtrées — filtre rampe

objet f(x,y) à reconstruire
=
rétroprojection des projections filtrées

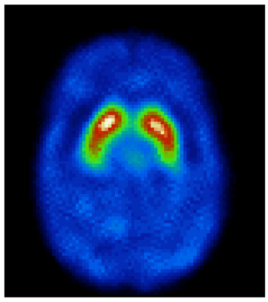
Algorithme de rétroprojection filtrée

$$f(x,y) = \int_0^{\pi} p'(u,\theta)\, d\theta \quad \text{avec} \quad p'(u,\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(\rho,\theta)\, |\rho| e^{i2\pi\rho u}\, d\rho$$



sinogramme

$p(u,\theta)$



coupe reconstruite

$f(x,y)$

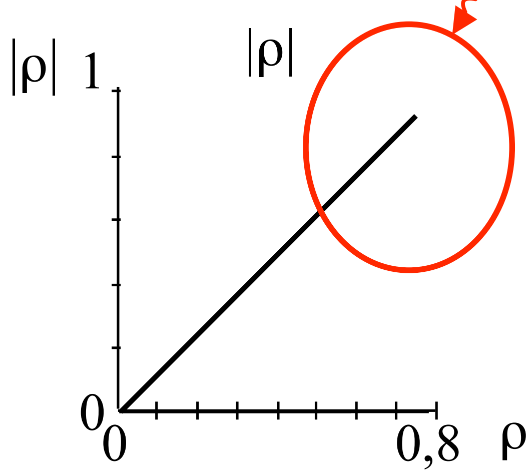
$$p(u,\theta) \xrightarrow{\text{transformée de Fourier}} P(\rho,\theta) \xrightarrow{\text{filtrage}} |\rho|\, P(\rho,\theta) \xrightarrow{\text{Transformée de Fourier inverse}} p'(u,\theta) \xrightarrow{\text{rétroprojection}} f(x,y)$$

Insuffisance du filtre rampe

$$f(x,y) = \int_0^{\pi} p'(u,\theta)\, d\theta \quad \text{avec} \quad p'(u,\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(\rho,\theta)\, |\rho| e^{i2\pi\rho u}\, d\rho$$

filtre rampe

amplification des hautes fréquences



filtre rampe

hautes fréquences = détails dans les images (haute résolution spatiale)
mais aussi … bruit parasite

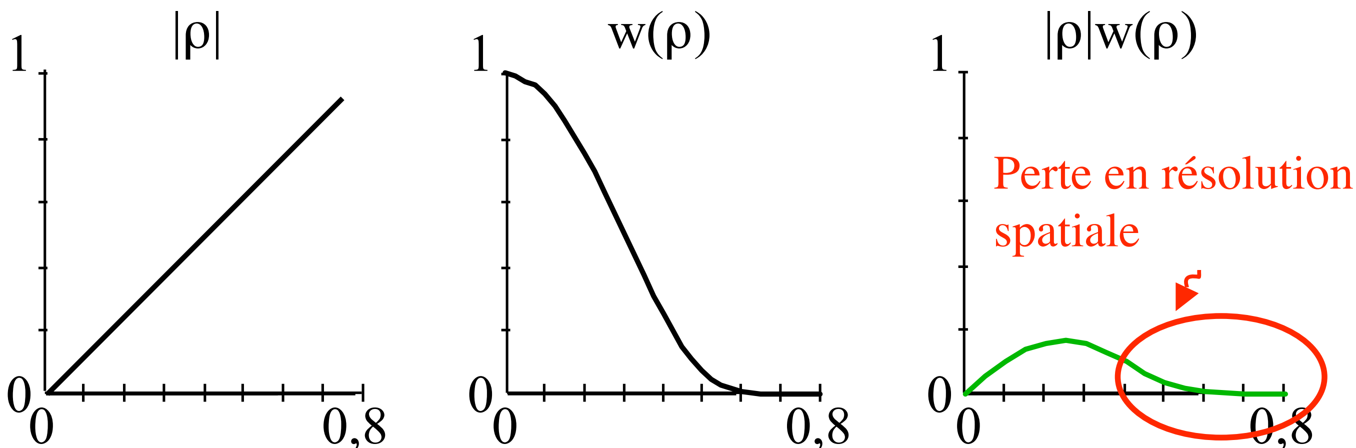
Insuffisance du filtre rampe

$$f(x,y) = \int_0^{\pi} p'(u,\theta)\, d\theta \quad \text{avec} \quad p'(u,\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(\rho,\theta)\, |\rho| e^{i2\pi\rho u}\, d\rho$$

filtre rampe

$$|\rho| \longrightarrow |\rho| w(\rho)$$

fenêtre d'apodisation



filtre rampe

fenêtre d'apodisation de Hann → filtre de Hann résultant

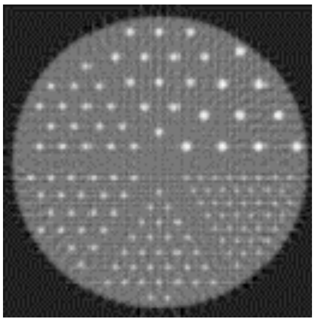
$$w(\rho) = 0{,}5.(1+\cos\pi\rho/\rho_c) \quad \text{si } \rho < \rho_c$$
$$= 0 \quad \text{si } \rho \geq \rho_c$$

domaine fréquentiel

Filtres classiques : filtre de Hann

- Filtre rampe

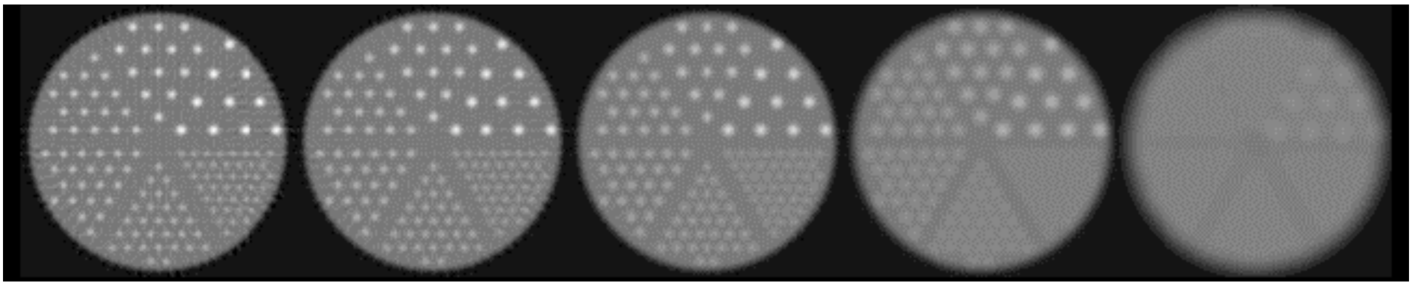
  ➡ meilleure résolution spatiale mais forte amplification du bruit haute fréquence



- Filtre de Hann

$$w(\rho) = 0{,}5.(1+\cos\pi\rho/\rho_c) \quad \text{si } \rho < \rho_c$$
$$= 0 \quad \text{si } \rho \geq \rho_c$$

  ➡ modifie les moyennes fréquences



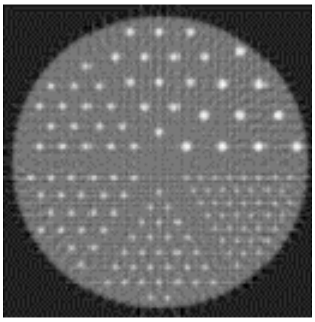
0,5 0,4 0,3 0,2 0,1

fréquence de coupure ρ_c

➡ plus faible est la fréquence de coupure, moins on préserve les détails "haute fréquence", i.e., plus fort est le lissage

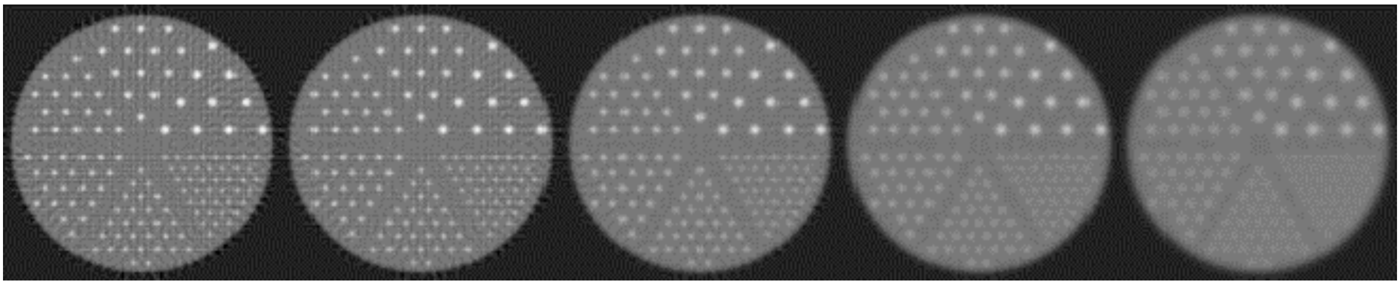
Filtres classiques : filtre gaussien

- Filtre rampe



- Filtre gaussien (domaine spatial)

$$c(x) = (1/\sigma\sqrt{2\pi}).\exp[-(x-x_0)^2/2\sigma^2]$$



0 1 2 3 4

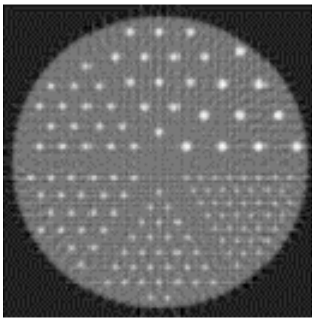
$$\text{FWHM} = 2\sqrt{2\ln 2}\,\sigma \text{ (pixel)}$$

Caractérise l’étendue spatiale du filtre

➡ plus grande est la dispersion du filtre gaussien (FWHM ou σ),
moins on préserve les détails “haute fréquence”, i.e., plus fort est le lissage

Filtres classiques : filtre de Butterworth

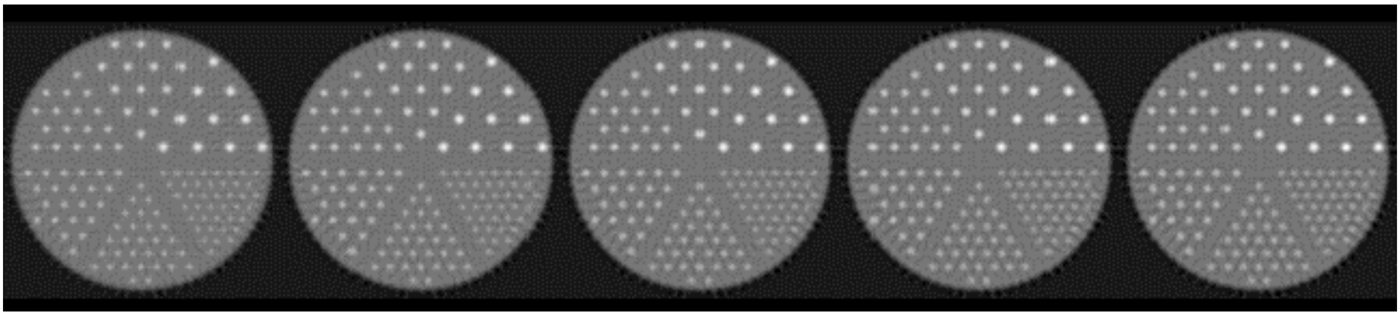
- Filtre rampe



- Filtre de Butterworth

$$w(\rho) = 1/[1+(\rho/\rho_c)^{2n}] \qquad \text{si } \rho < \rho_c$$

➡ 2 paramètres : fréquence de coupure ρ_c et ordre n

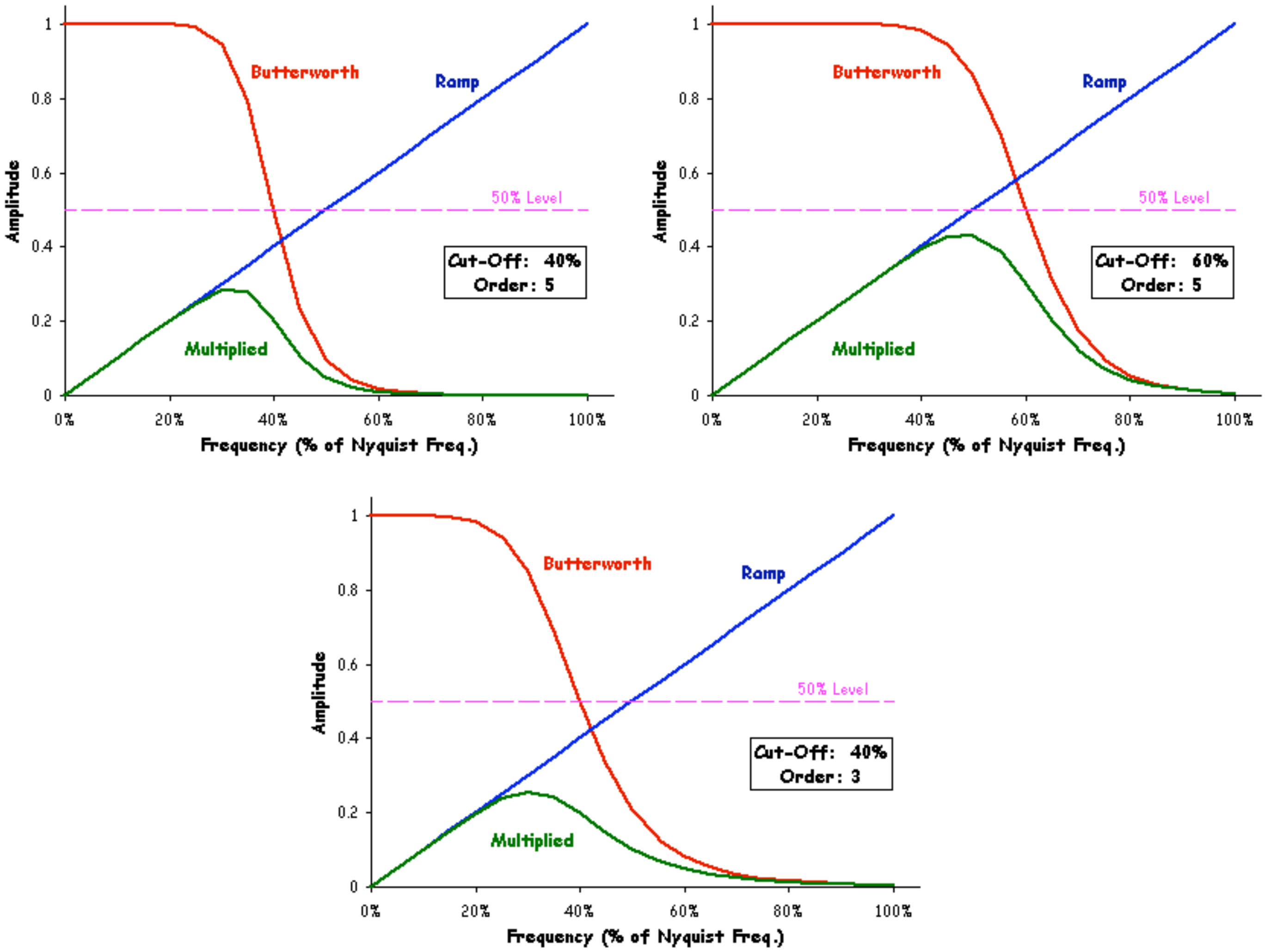


10 8 6 4 2

ordre n, ρ_c=0,25

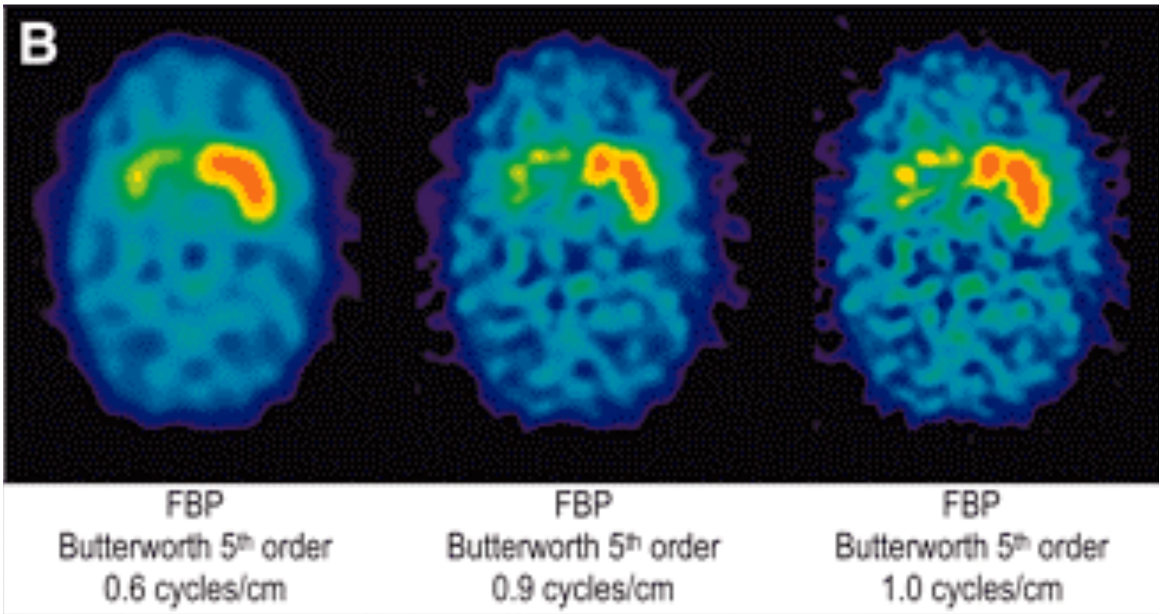
➡ plus fort est l'ordre
moins on préserve les détails "haute fréquence", i.e., plus fort est le lissage

Filtres classiques : filtre de Butterworth



Importance de l'optimisation du filtre

• Un même filtre n'est pas adapté à toutes les situations

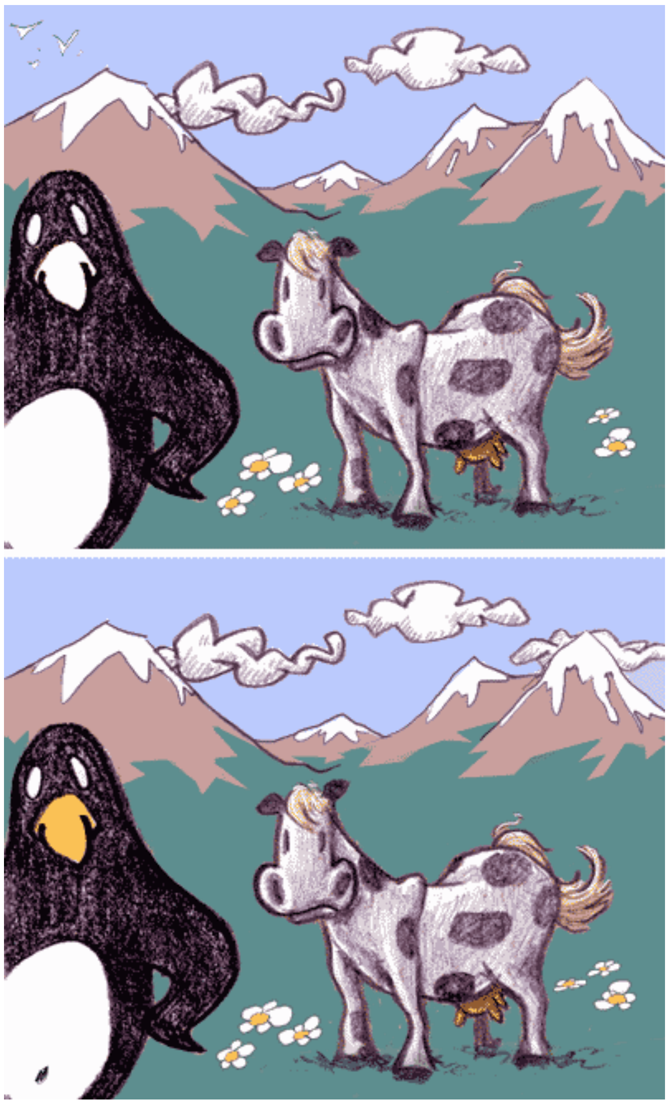


Koch et al, J Nucl Med 2005

Le filtre devrait être optimisé en fonction de la finalité des images (détection, quantification, …), de la statistique de comptage, etc

Implémentation du filtre

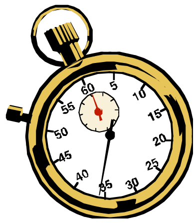
Il existe plusieurs façons d'implémenter un même filtre (e.g., espace spatial ou espace des fréquences) : l'usage d'un même filtre peut conduire à des résultats légèrement différents d'une console à l'autre



bec jaune, nombril pingouin, oiseaux, fleur, nuage, neige
montagne... et oreille gauche de la jument

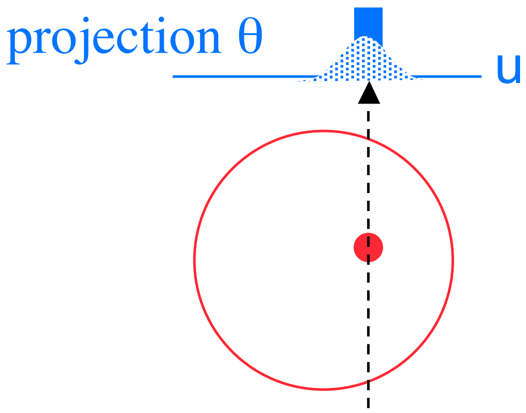
Méthodes de reconstruction analytique : discussion

• Rapide



• Cependant, beaucoup d'approximations non vérifiées en pratique :

- modèle de lignes intégrales (résolution spatiale parfaite du détecteur)



- pas de prise en compte des fluctuations statistiques
- pas de prise en compte des perturbations physiques (atténuation, diffusion)
- données bruitées et sous-échantillonnées

➡ Approche alternative : la reconstruction discrète, ou itérative

Deux approches à la reconstruction tomographique

- Les méthodes analytiques

$$R[f(x,y)] = \int_0^{\pi} p(u,\theta)\, d\theta$$

- Les méthodes discrètes (ou itératives)

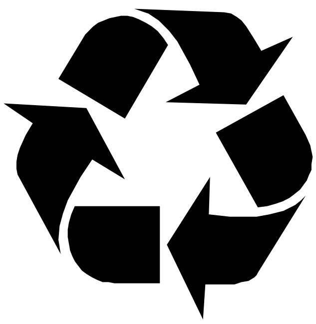
$$p = R\, f$$

Méthodes de reconstruction itératives : introduction

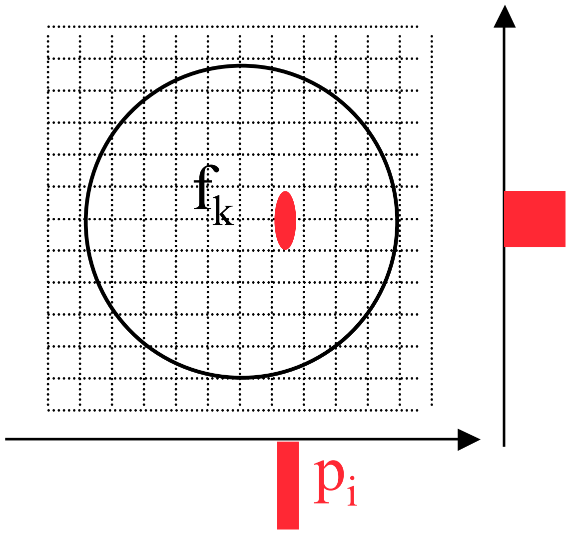
• Expression discrète et matricielle du problème de reconstruction tomographique
Plus d'intégrales !

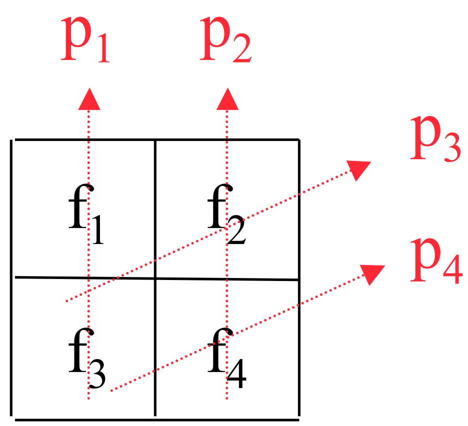
$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & \cdots & r_{14} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{41} & \cdots & r_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix}$$

• Inversion itérative du système d'équations



Expression discrète du problème de reconstruction





$$
\begin{aligned}
p_1 &= r_{11} f_1 + r_{12} f_2 + r_{13} f_3 + r_{14} f_4 \\
p_2 &= r_{21} f_1 + r_{22} f_2 + r_{23} f_3 + r_{24} f_4 \\
p_3 &= r_{31} f_1 + r_{32} f_2 + r_{33} f_3 + r_{34} f_4 \\
p_4 &= r_{41} f_1 + r_{42} f_2 + r_{43} f_3 + r_{44} f_4
\end{aligned}
$$

En pratique :
système d’équations de grande taille
128 projections 128 x 128

2 097 152 équations à autant d’inconnues

Expression matricielle du problème de reconstruction

$$
\begin{aligned}
p_1 &= r_{11}\, f_1 + r_{12}\, f_2 + r_{13}\, f_3 + r_{14}\, f_4 \\
p_2 &= r_{21}\, f_1 + r_{22}\, f_2 + r_{23}\, f_3 + r_{24}\, f_4 \\
p_3 &= r_{31}\, f_1 + r_{32}\, f_2 + r_{33}\, f_3 + r_{34}\, f_4 \\
p_4 &= r_{41}\, f_1 + r_{42}\, f_2 + r_{43}\, f_3 + r_{44}\, f_4
\end{aligned}
$$

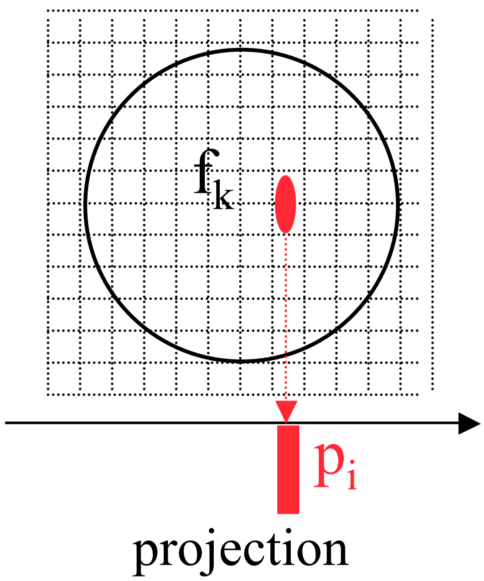
$$
\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & \cdots & r_{14} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{41} & \cdots & r_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix}
$$

$$
\underset{\text{projections acquises}}{p} = \underset{\text{opérateur de projection}}{R}\; \underset{\text{objet à reconstruire}}{f}
$$

➡ Problème : déterminer f connaissant p et R

A quoi correspond R ?

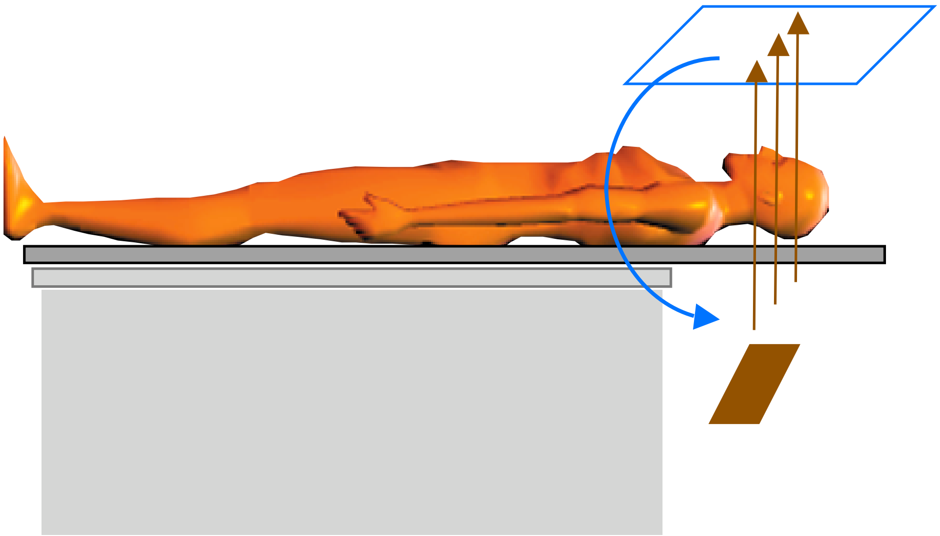
$$p = R\, f$$



R décrit le processus de projection, i.e. le processus de formation des images : modélisation du modèle direct

R_{ik} : probabilité qu'un événement émis dans le pixel k soit détecté dans le pixel de projection i

Dimension du problème



$$p = R\,f$$

projections acquises — opérateur de projection — objet à reconstruire

$$\begin{aligned}
p_1 &= r_{11}\,f_1 + r_{12}f_2 + \ldots + r_{1F}\,f_F \\
p_2 &= r_{21}\,f_1 + r_{22}f_2 + \ldots + r_{2F}\,f_F \\
&\ldots \\
p_P &= r_{P1}\,f_1 + r_{P2}f_2 + \ldots + r_{PF}\,f_F
\end{aligned}$$

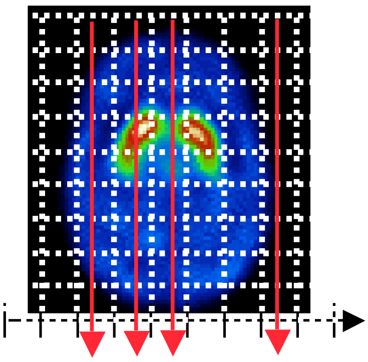
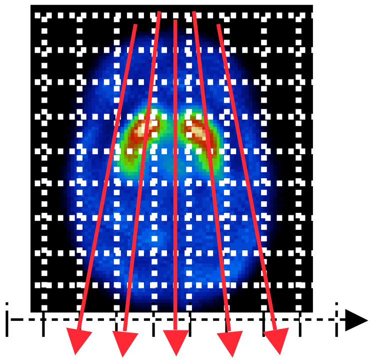
$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \ldots \\ p_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1F} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{P1} & \cdots & r_{PF} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \ldots \\ f_F \end{bmatrix}$$

- Exemple : 120 projections de 64 lignes (direction axiale) et 128 colonnes (bins de projection)
  - Pour reconstruire une coupe :
    - 128 x 120 équations
    - 128 x 128 inconnues
    - R est une matrice (128 x 120 ; 128 x 128)

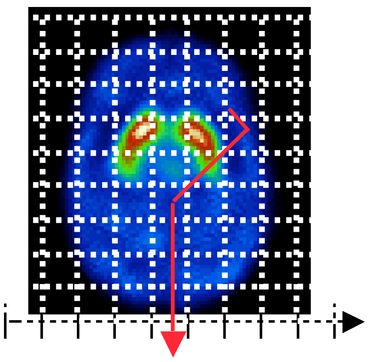
Calcul de l'opérateur de projection R

Deux aspects

• Modélisation de la géométrie de détection

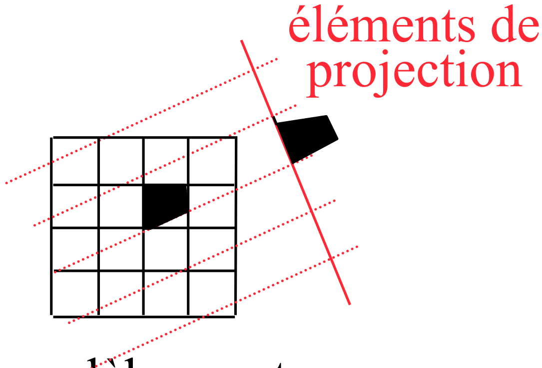



• Modélisation de la physique de détection

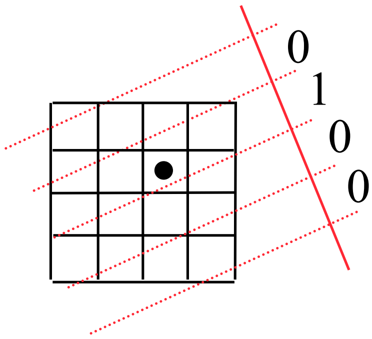


Modélisation géométrique de l'opérateur R

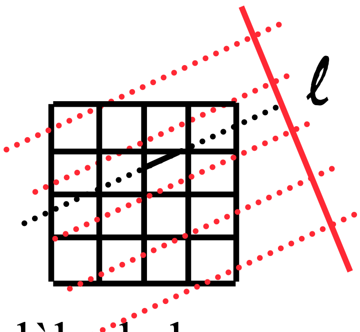
• Modèle de distribution de l'intensité des pixels : détermination de la contribution de chaque pixel i à un élément de projection k



modèle exact
= modèle uniforme



modèle de Dirac

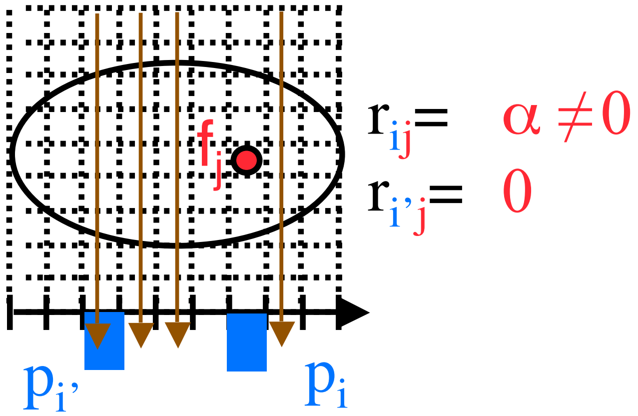


modèle de longueur
de raies

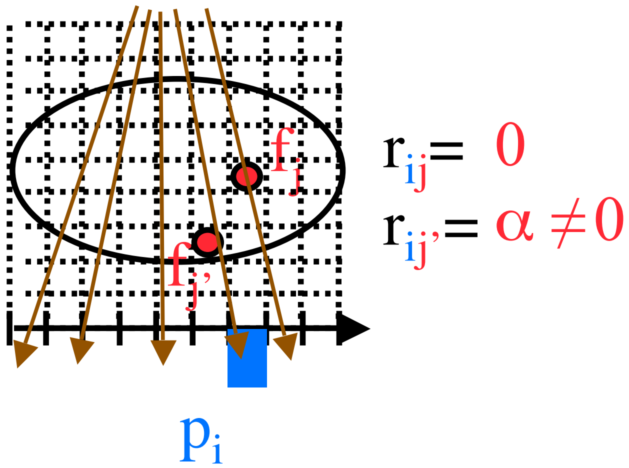
Modélisation géométrique de l'opérateur R

• Modèle de la géométrie de détection (collimation)

géométrie parallèle

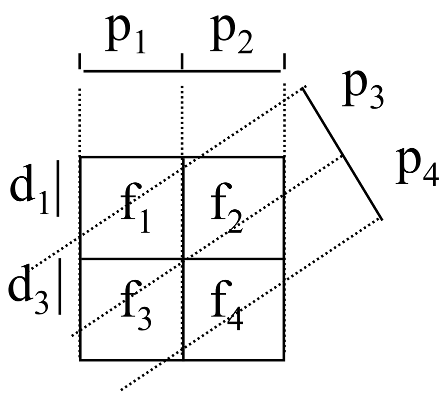


géométrie en éventail



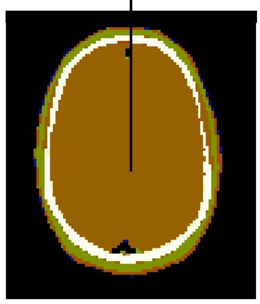
Modélisation physique de l'opérateur R (1)

- Atténuation du signal (SPECT et PET)



contribution géométrique

$$p_1 = g_{11} f_1 \exp(-\mu_1 d_1) + g_{13} f_3 \exp(-\mu_3 d_3 - 2\mu_1 d_1)$$



carte des μ

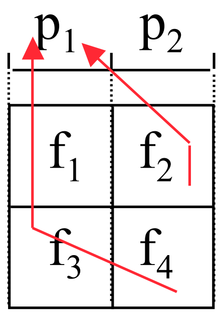
Dans ce cas :

$r_{11} = g_{11} \exp(-\mu_1 d_1)$

$r_{13} = g_{13} \exp(-\mu_3 d_3 - 2\mu_1 d_1)$

Modélisation physique de l'opérateur R (2)

- Diffusion (SPECT et PET)



sans modélisation de la diffusion :

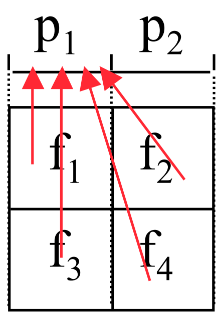
$$p_1 = r_{11}\, f_1 + r_{13}\, f_3$$

avec modélisation de la diffusion :

$$p_1 = r_{11}\, f_1 + r_{12}\, f_2 + r_{13}\, f_3 + r_{14}\, f_4$$

Modélisation physique de l'opérateur R (3)

- Réponse du détecteur



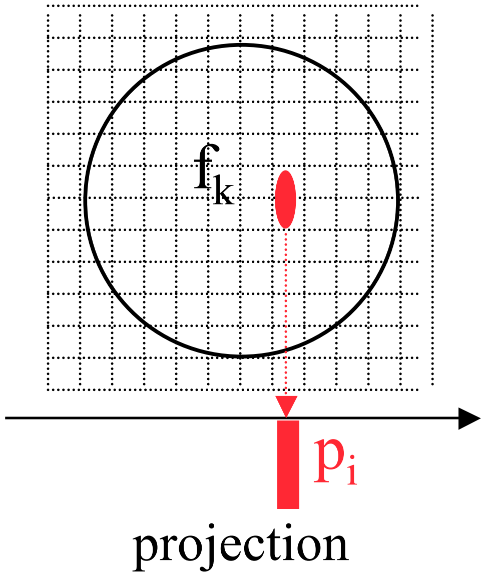
sans modélisation de la fonction de réponse du détecteur :

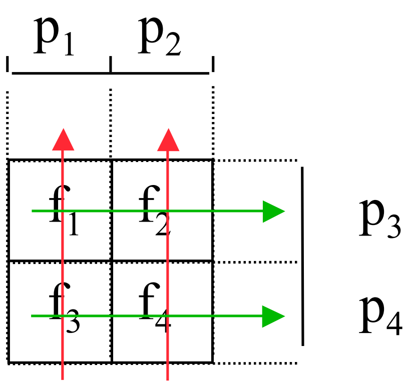
$$p_1 = r_{11}\, f_1 + r_{13}\, f_3$$

avec modélisation :

$$p_1 = r_{11}\, f_1 + r_{12}\, f_2 + r_{13}\, f_3 + r_{14}\, f_4$$

Opérateur de projection R discret





$$p_1 = f_1 + f_3$$
$$p_2 = f_2 + f_4$$
$$p_3 = f_1 + f_2$$
$$p_4 = f_3 + f_4$$

$$\Downarrow$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

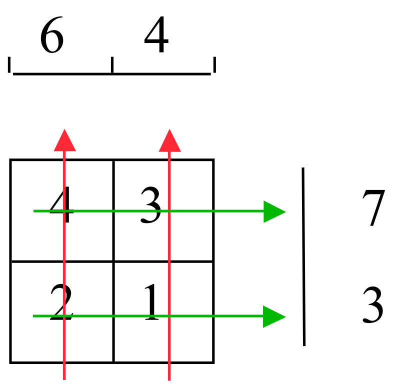
Mise en oeuvre

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

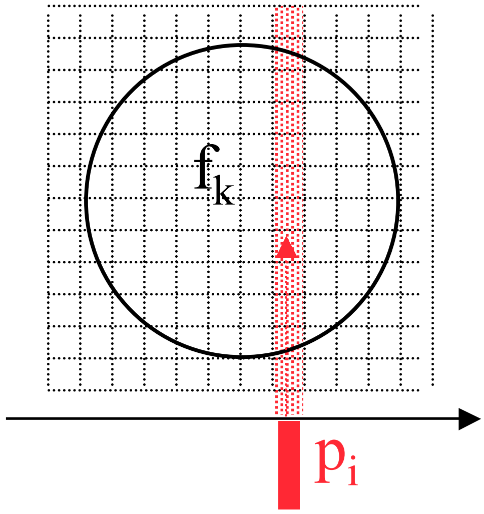
Calculer les projections de l'objet (4 3 2 1) :

$$\begin{array}{c} 6 \\ 4 \\ 7 \\ 3 \end{array} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \dots \\ p_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

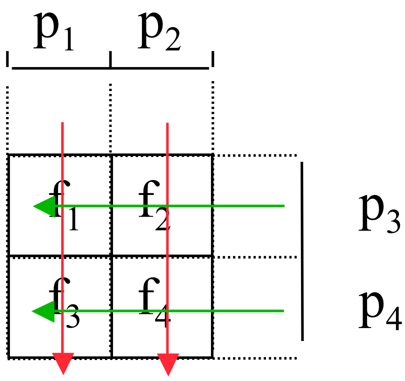
Représentation totalement équivalente :



Opérateur de rétroprojection discret



rétroprojection



$$f^*_1 = p_1 + p_3$$
$$f^*_2 = p_2 + p_3$$
$$f^*_3 = p_1 + p_4$$
$$f^*_4 = p_2 + p_4$$

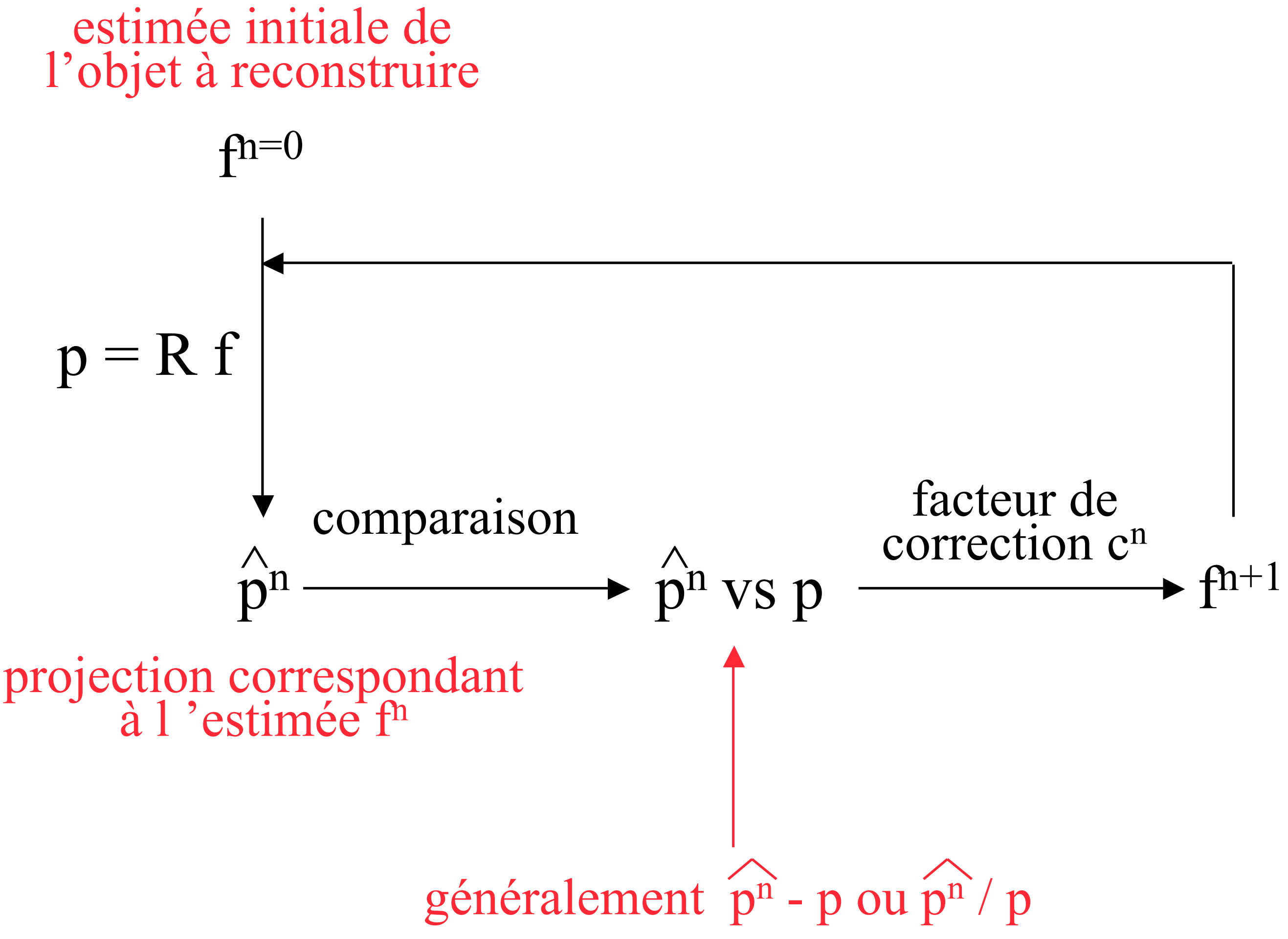
$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = R^t$$

Résolution du problème inverse

$$p = R\,f$$

Recherche d'une solution f minimisant une distance d(p,Rf), p et R étant connus



Deux classes de méthodes discrètes itératives

• Méthodes algébriques

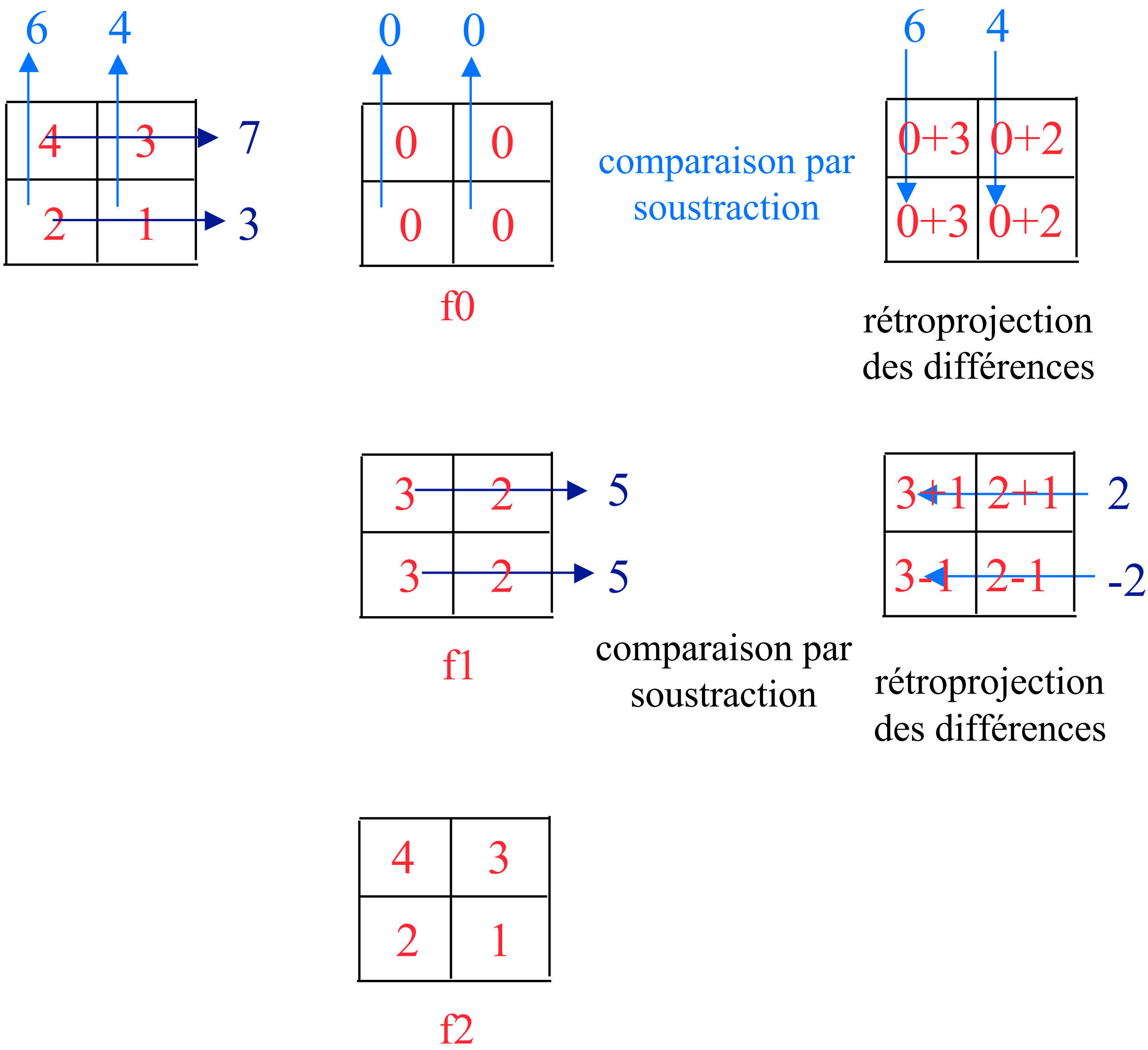
- méthodes itératives conventionnelles résolvant un système d'équations linéaires
- minimisent $||p - R f||^2$
- ART, SIRT, ILST, gradient conjugué, etc

• Méthodes statistiques

- estimation bayesienne
- prennent en compte le bruit dans les données
- maximisent une fonction de vraisemblance
- MLEM, OSEM, RAMLA, DRAMA

Exemple de méthode algébrique : ART

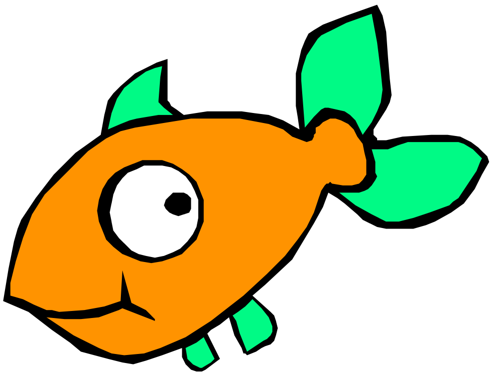
- Algebraic reconstruction technique



Méthode statistique : MLEM

• MLEM = Maximum Likelihood Expectation Maximization

• Utilise une formulation probabiliste du problème de reconstruction : suppose que les données mesurées (sinogrammes ou projections) obéissent à une statistique de Poisson



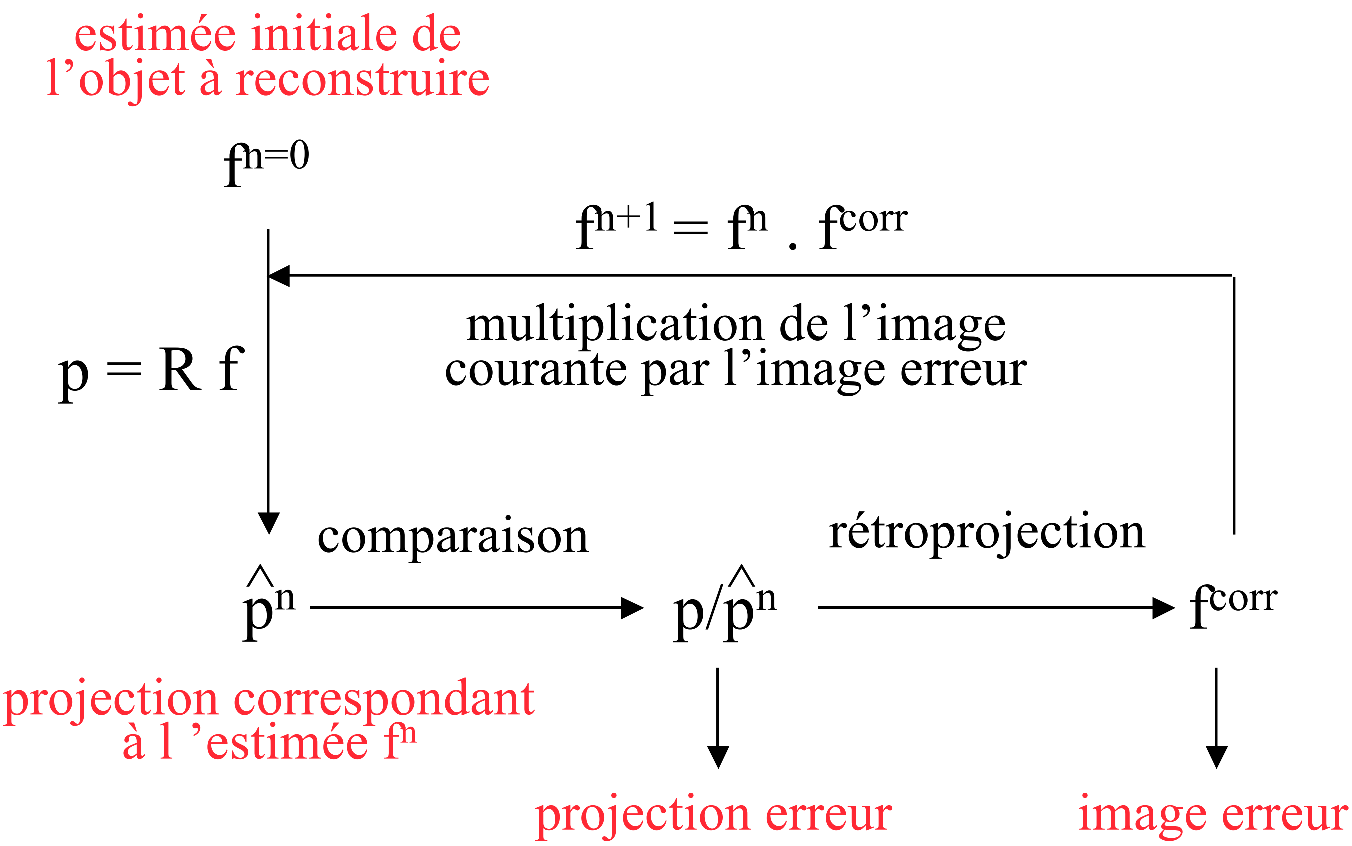
Avantage : modélise explicitement le bruit dans les données

Ceci implique que si on modifie les projections avant la reconstruction, il se peut que MLEM ne soit plus adapté théoriquement

Algorithme MLEM

- Formule de mise à jour :

$$f^{n+1} = f^{n} \,.\, R^{t} \,[\, p \,/\, p^{n} \,]$$

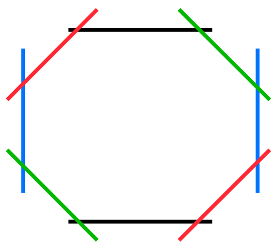


* solution toujours positive ou nulle
* convergence lente
* méthode itérative la plus utilisée en SPECT (dans sa version accélérée OSEM)

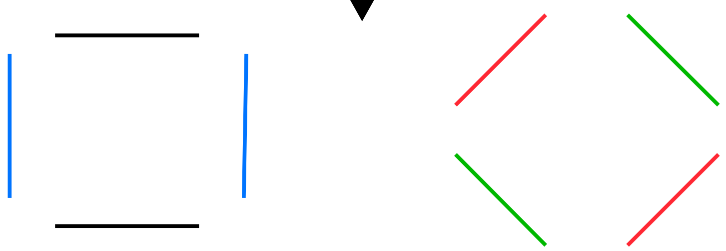
Version accélérée de MLEM : OSEM

• OSEM = Ordered Subset Expectation Maximisation

• Tri des P projections en sous-ensembles ordonnés
Exemple :

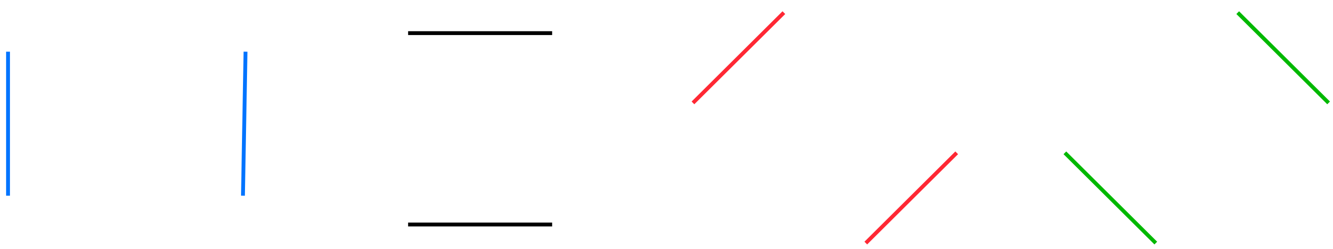


8 projections



2 sous-ensembles de 4 projections

ou



4 sous-ensembles de 2 projections

Version accélérée de MLEM : OSEM

• Application de MLEM sur les sous-ensembles :

- itération 1 :

estimation de f^1 à partir de l'initialisation f^0 et des projections p^1 correspondant au sous-ensemble 1

$$f^1 = f^0 \,.\, R^t\,[\,p\,/\,p^1\,]$$

estimation de f'^1 à partir de f^1 et des projections p'^1 correspondant au sous-ensemble 2

$$f'^1 = f^1 \,.\, R^t\,[\,p\,/\,p'^1\,]$$

- itération 2 :

estimation de f^2 à partir de f'^1 et des projections p^2 correspondant au sous-ensemble 1

$$f^2 = f'^1 \,.\, R^t\,[\,p\,/\,p^2\,]$$

estimation de f'^2 à partir de f^2 et des projections p'^2 correspondant au sous-ensemble 2

$$f'^2 = f^2 \,.\, R^t\,[\,p\,/\,p'^2\,]$$

etc.

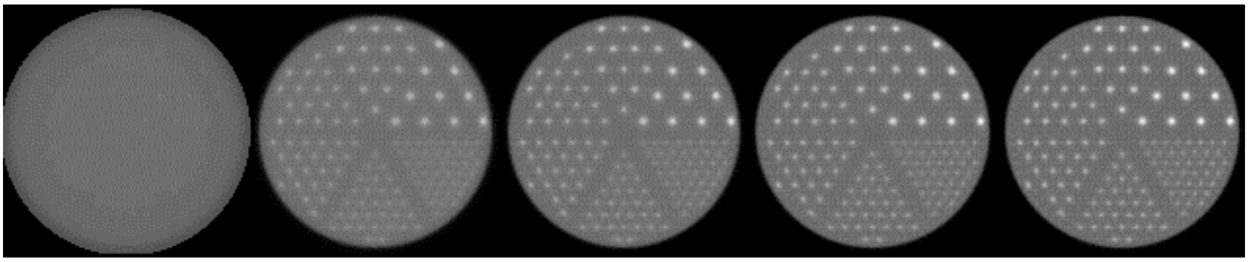
OSEM avec S sous-ensembles et I iterations

⇔ SI itérations de MLEM

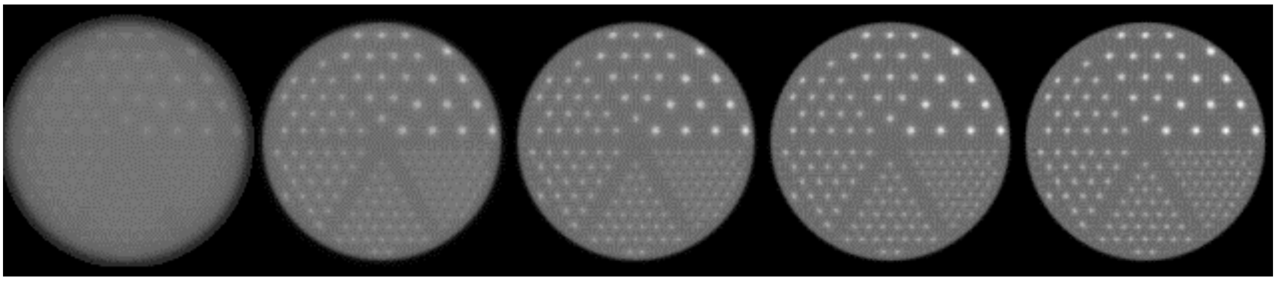
mais S fois plus rapide !!!

Caractéristiques de OSEM

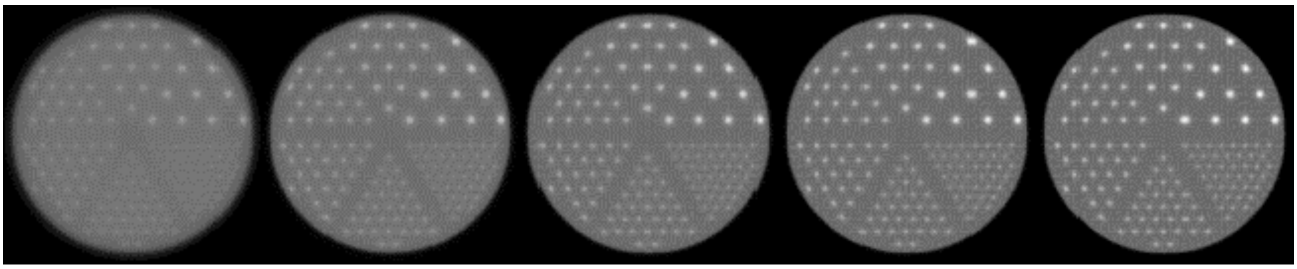
MLEM 1 16 24 32 40 itér.



OSEM 1 4 6 8 10 itér.
4 ss-ens.



OSEM 1 2 3 4 5
8 ss-ens.



Spécifier un nombre d'itérations OSEM sans nombre de sous-ensembles n'a pas de sens !

Autres algorithmes itératifs

• RAMLA (row action maximum likelihood algorithm) est un cas particulier de OSEM dans lequel le nombre de sous-ensemble est égal au nombre de projections

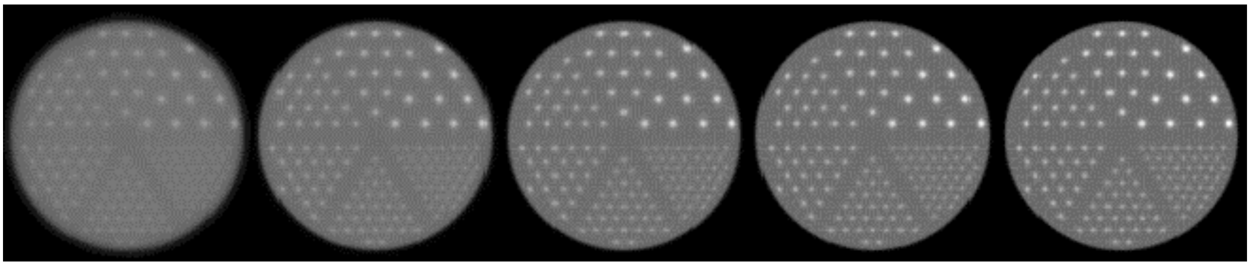
• RAMLA nécessite un paramètre de régularisation (relaxation) pour le contrôle du bruit

• DRAMA, SAGE, SMART, Gradient Conjugué, …

Caractéristiques des méthodes itératives

• Plus élevé est le nombre d'itérations, meilleure est la restitution des hautes fréquences

OSEM 1 2 3 4 5
8 ss-ens.



• Problème du choix du nombre d'itérations
- convergence vers la solution puis divergence de la procédure lors de la reconstruction des très hautes fréquences du fait de la présence de bruit (haute fréquence)

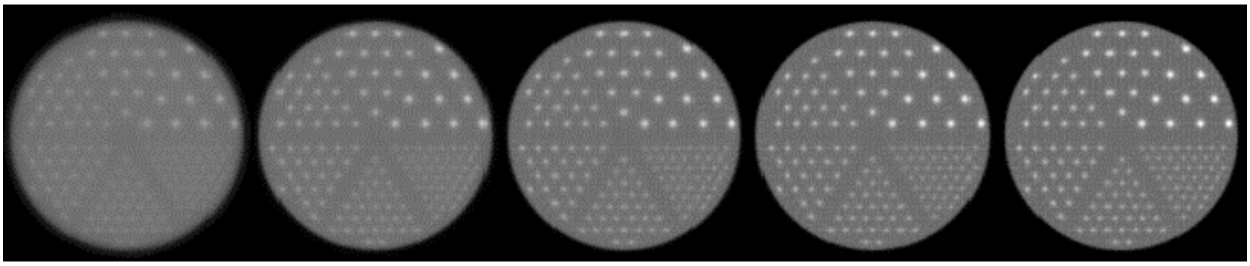
➡ nécessité de « régulariser »

• La vitesse de convergence dépend de l'objet reconstruit (différente pour un patient maigre et obèse)

Caractéristiques des méthodes itératives

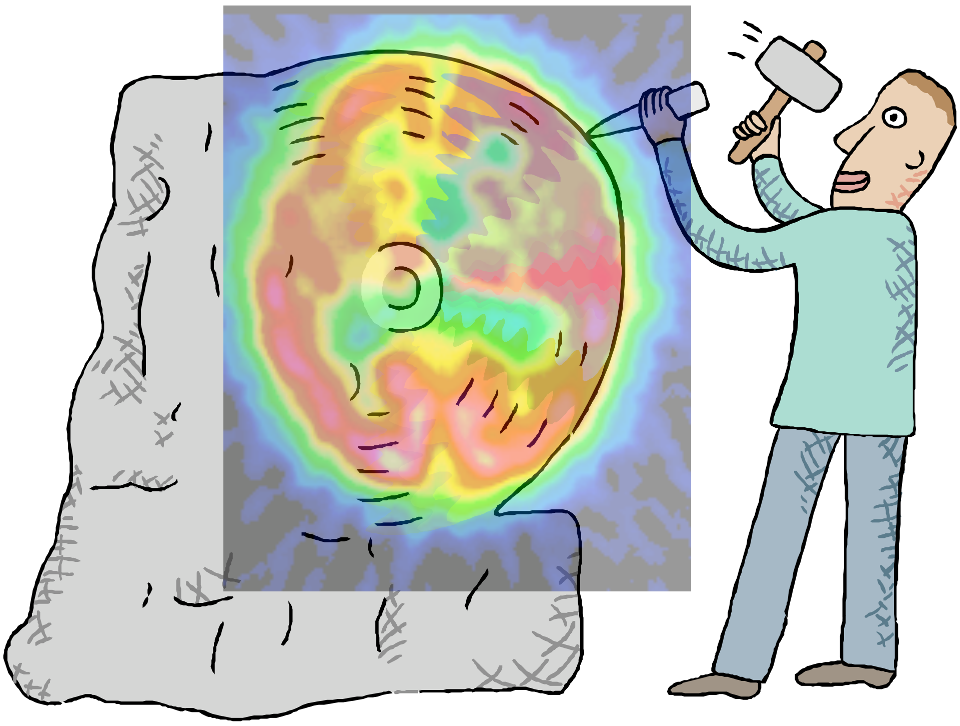
• Le choix du nombre d'itérations conditionne le compromis résolution spatiale vs bruit

OSEM 1 2 3 4 5
8 ss-ens.



• Le nombre d'itérations devrait être optimisé en fonction de la finalité des images (comme le filtre en reconstruction analytique)

Régularisation



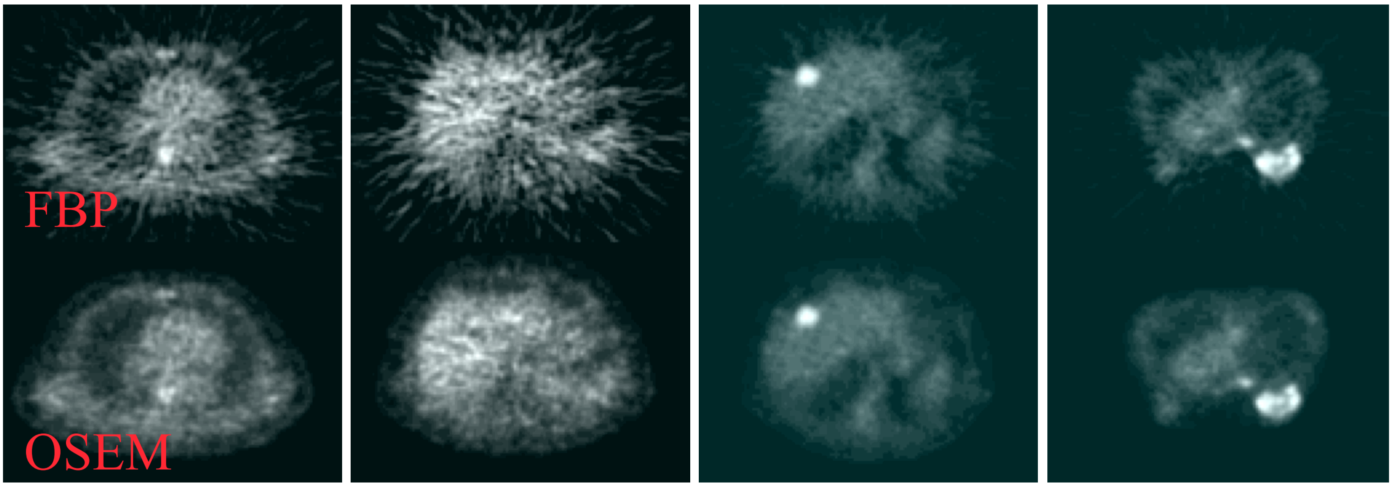
Faire tendre la solution vers ce à quoi on s'attend

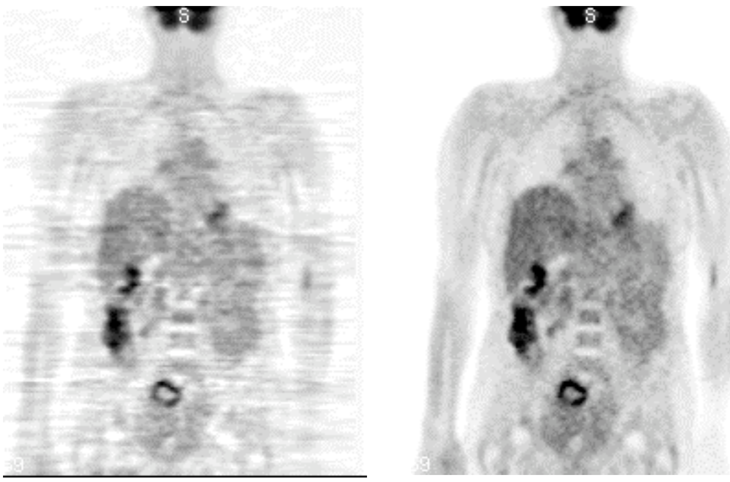
- solution non régularisée :
  minimisation de d(p,Rf)

- solution régularisée :
  minimisation de $d_1(p,Rf) + \lambda d_2(f,f_{aprori})$

Reconstruction analytique ou itérative ? (1)

Tomographie d'émission PET





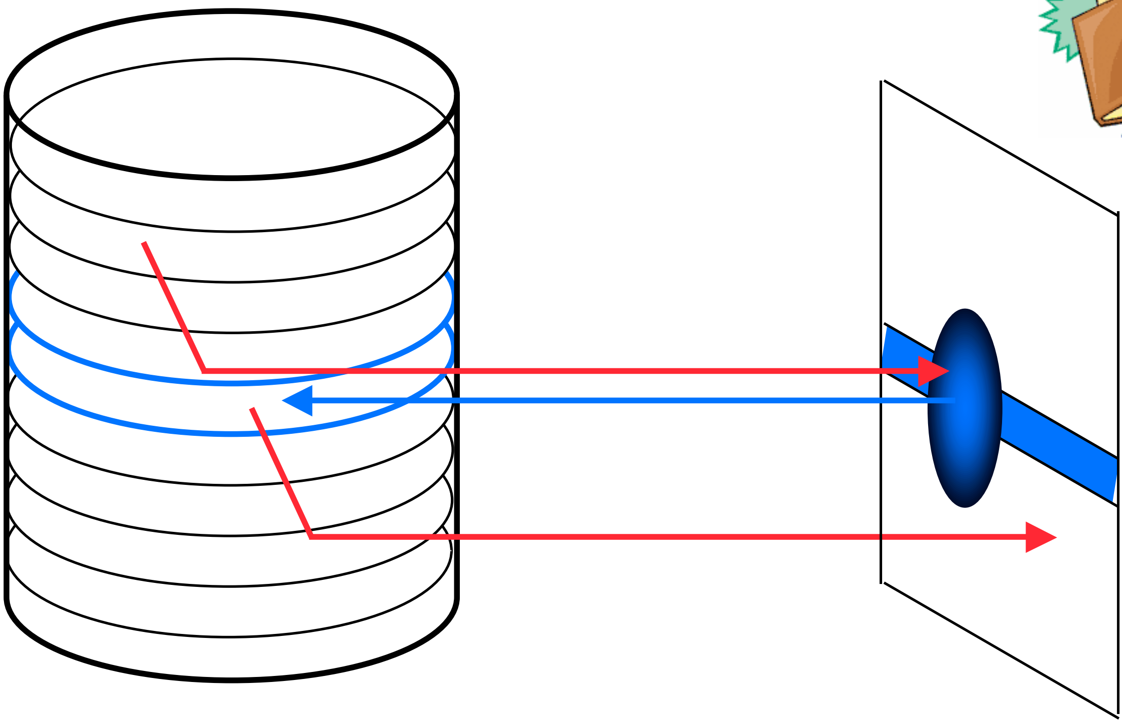
Reconstruction analytique ou itérative ?

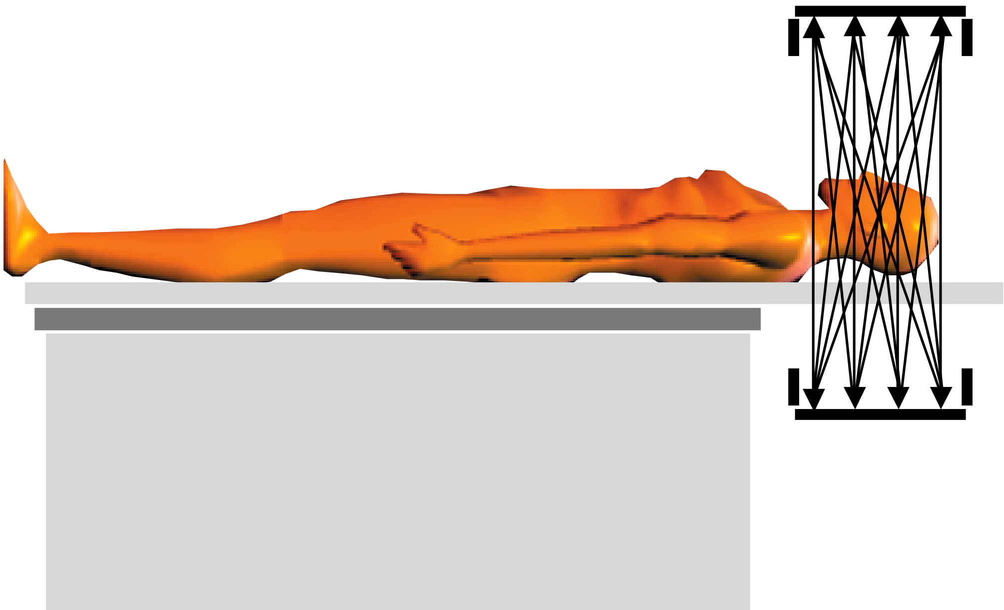
• Algorithmes itératifs par rapport à rétroprojection filtrée (FBP)

* réduction des artefacts de raies
* possible compensation des phénomènes parasites via une modélisation adéquate dans le projecteur R (diffusion, atténuation, fonction de réponse du détecteur)
* possible modélisation des caractéristiques statistiques des données

* temps de calculs accrus

Au delà de la reconstruction 2D…





Solution : « fully 3D reconstruction »

Trois approches de reconstruction 3D complète

- Méthode analytique

  3D FBP : généralisation de la rétroprojection filtrée au 3D

- Méthodes de rebinning

  réorganisation des données pour se ramener à la configuration de reconstruction 2D

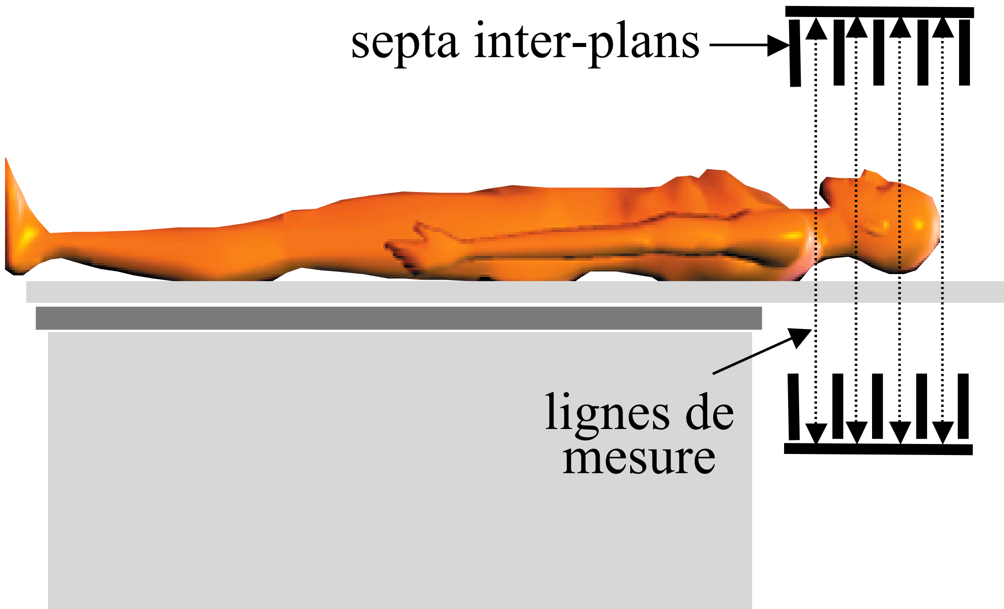
- Méthodes discrètes itératives

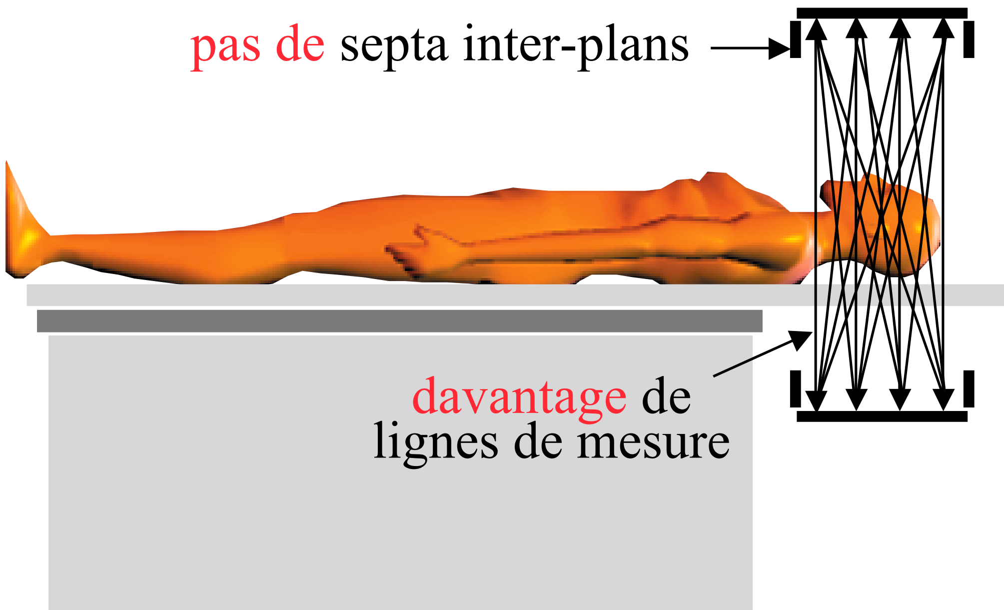
  estimation d'un projecteur 3D

Méthodes analytiques de reconstruction 3D

• 3D FBP : généralisation de la rétroprojection filtrée au 3D :

- prend en compte la redondance des données

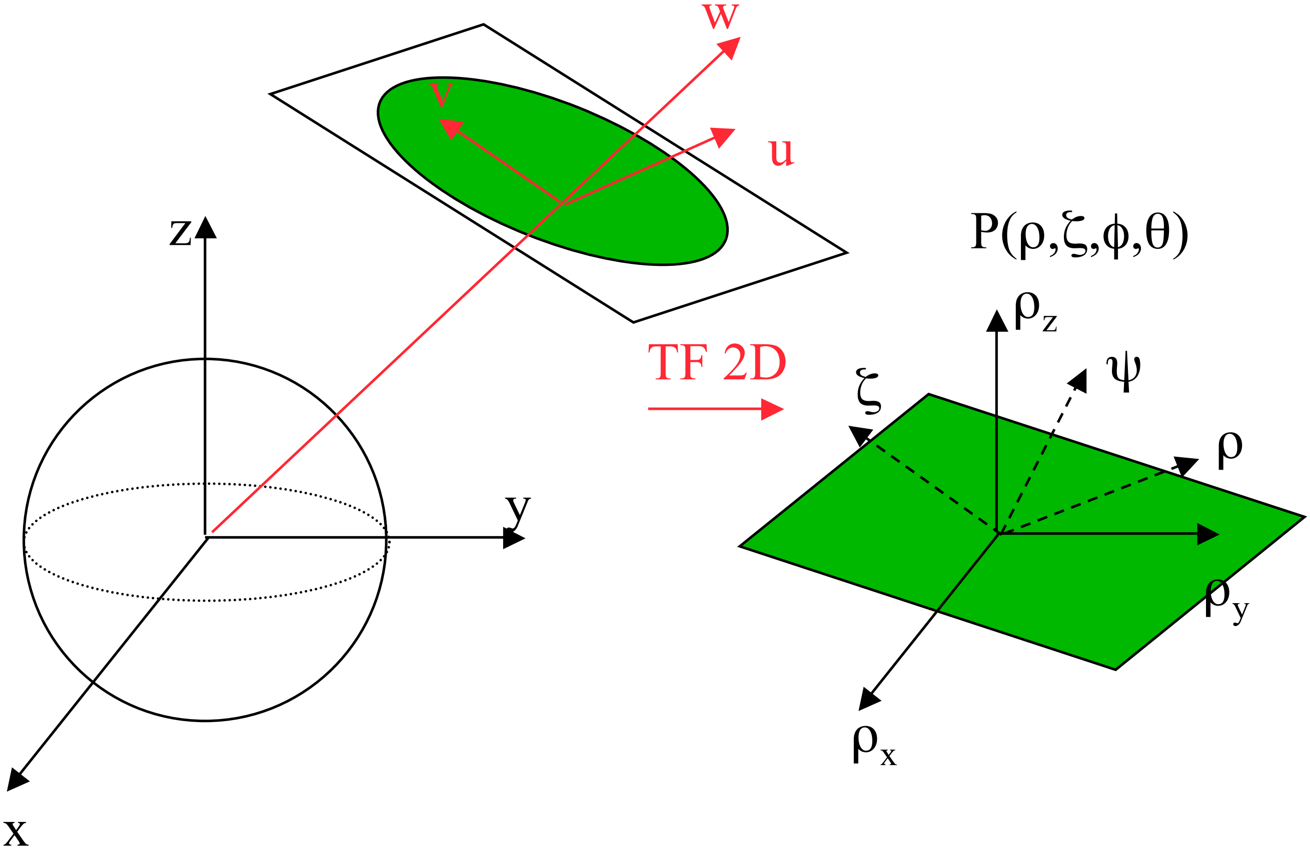




Théorème de la coupe centrale en 3D

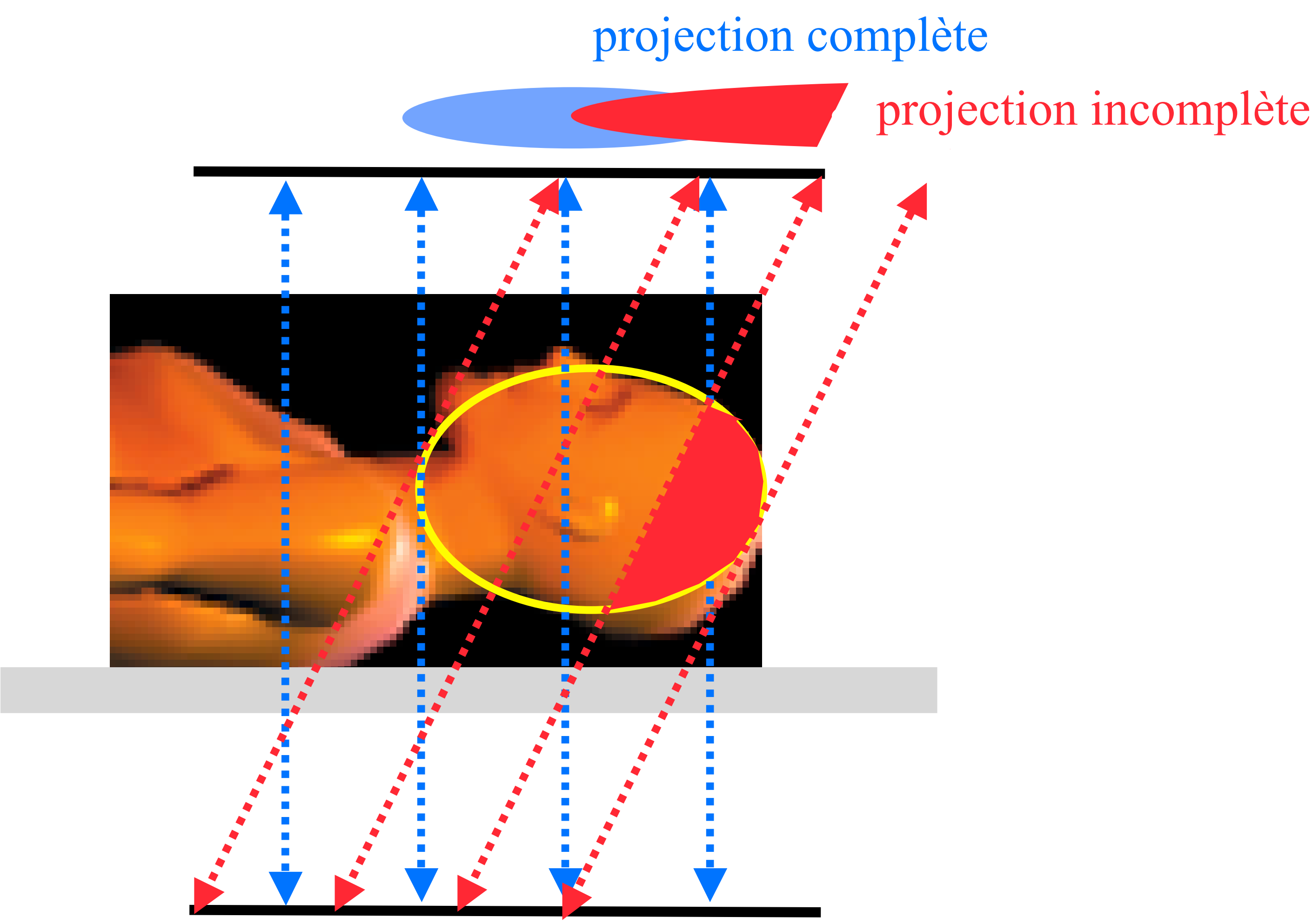
Similaire à la version 2D

projection = $p(u,v,\phi,\theta)$

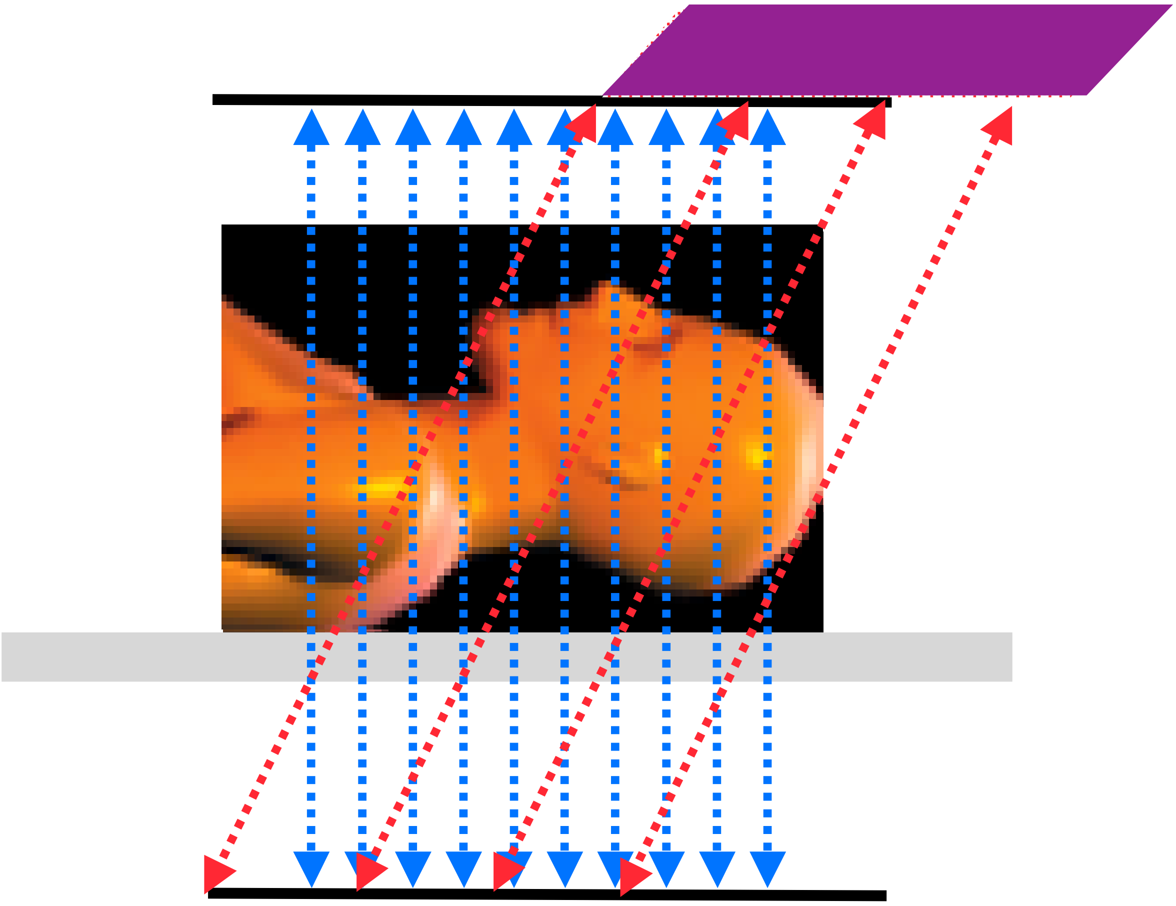


objet = $f(x,y,z)$ $\xrightarrow{\text{TF 3D}}$ $P(\rho,\theta) = F(\rho_x, \rho_y, \rho_z)\Big|_{\psi=0}$

3D FBP requiert des données complètes



Reprojection 3D traitant des données incomplètes



• Extraction des données 2D (non prise en compte des LOR obliques)

• Reconstruction d'une première estimée de l'objet par FBP 2D

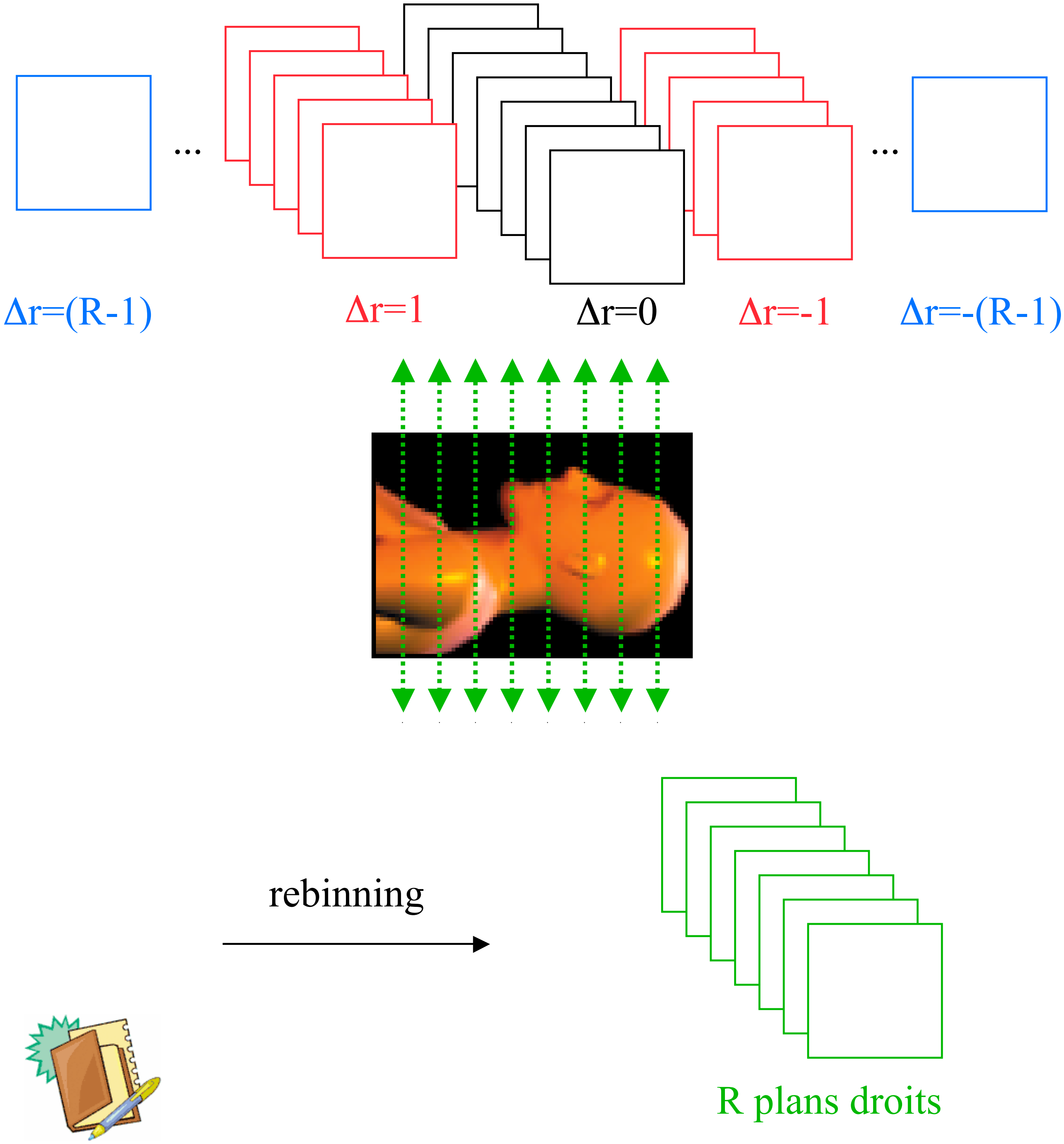
• Estimation des données tronquées en reprojetant l'objet estimé

• Fusion des données estimées et des données mesurées

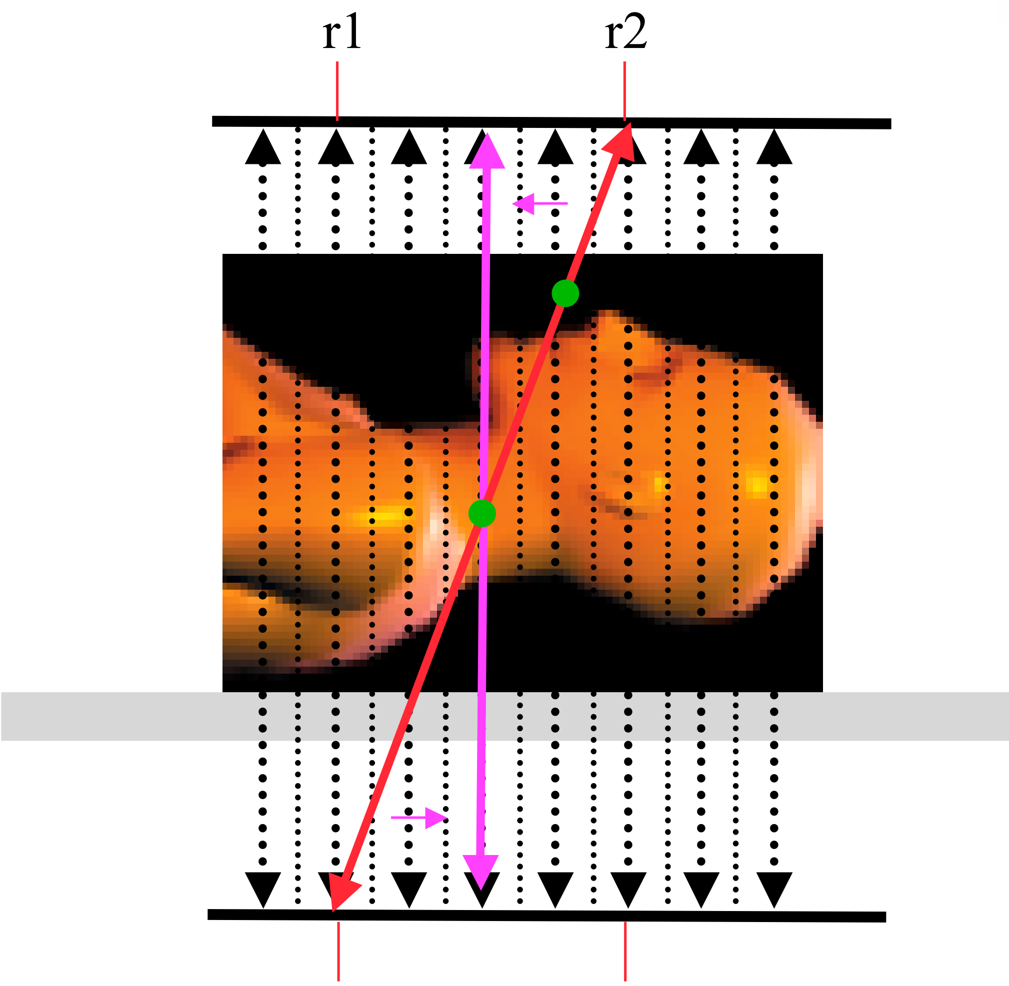
• Reconstruction par 3D FBP

Méthodes de rebinning

• A partir des R^2 sinogrammes (R nombre de couronnes), estimation de 2R-1 sinogrammes correspondant aux plans droits

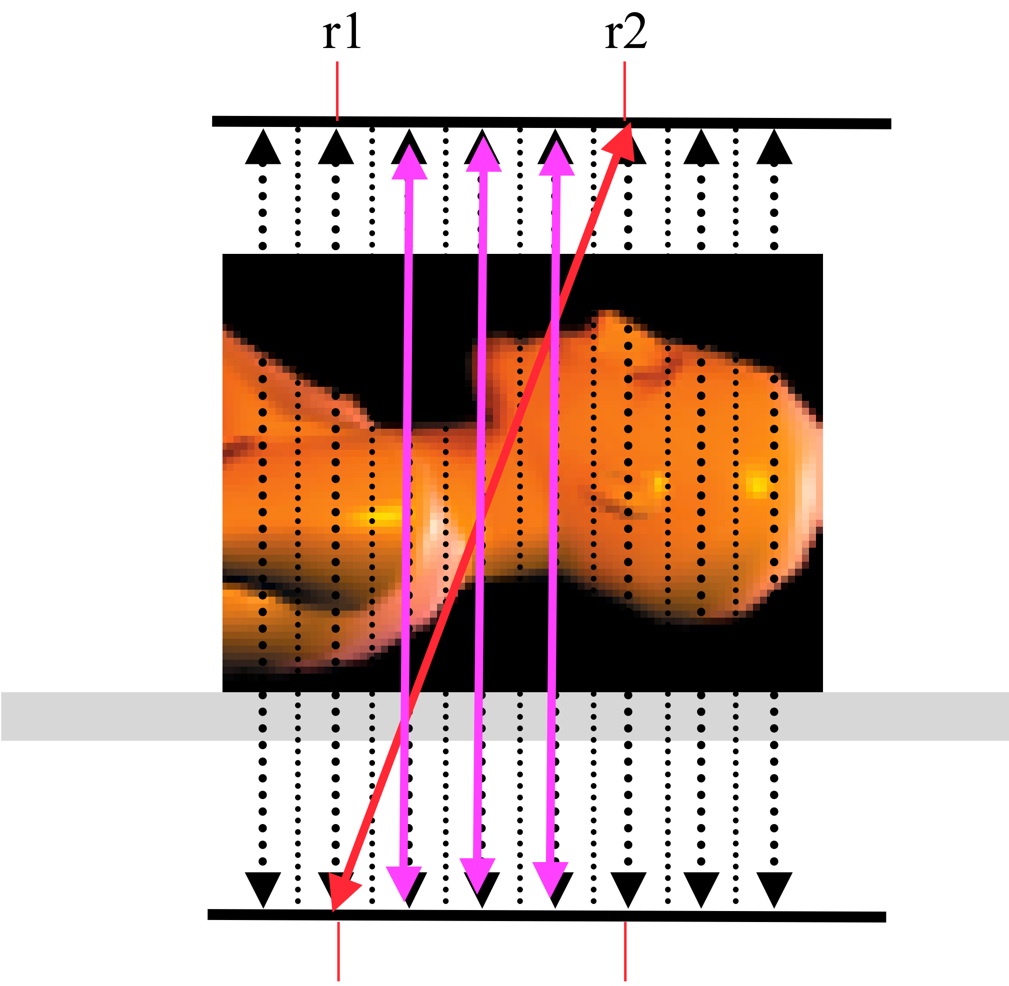


Single slice rebinning



r_rebin = (r1+r2)/2

Multi slice rebinning



FORE

FOurier REbinning (1995)

Les sinogrammes obliques sont rééchantillonnés dans l'espace de Fourier 2D des sinogrammes

Tous les événements détectés sur les lignes de réponse obliques sont affectés à des sinogrammes droits.

Après rebinning

On effectue une reconstruction coupe par coupe classique

Méthodes discrètes itératives

• Aucune différence conceptuelle avec l'approche 2D

$$p = R\ f$$

projections acquises — opérateur de projection — objet à reconstruire

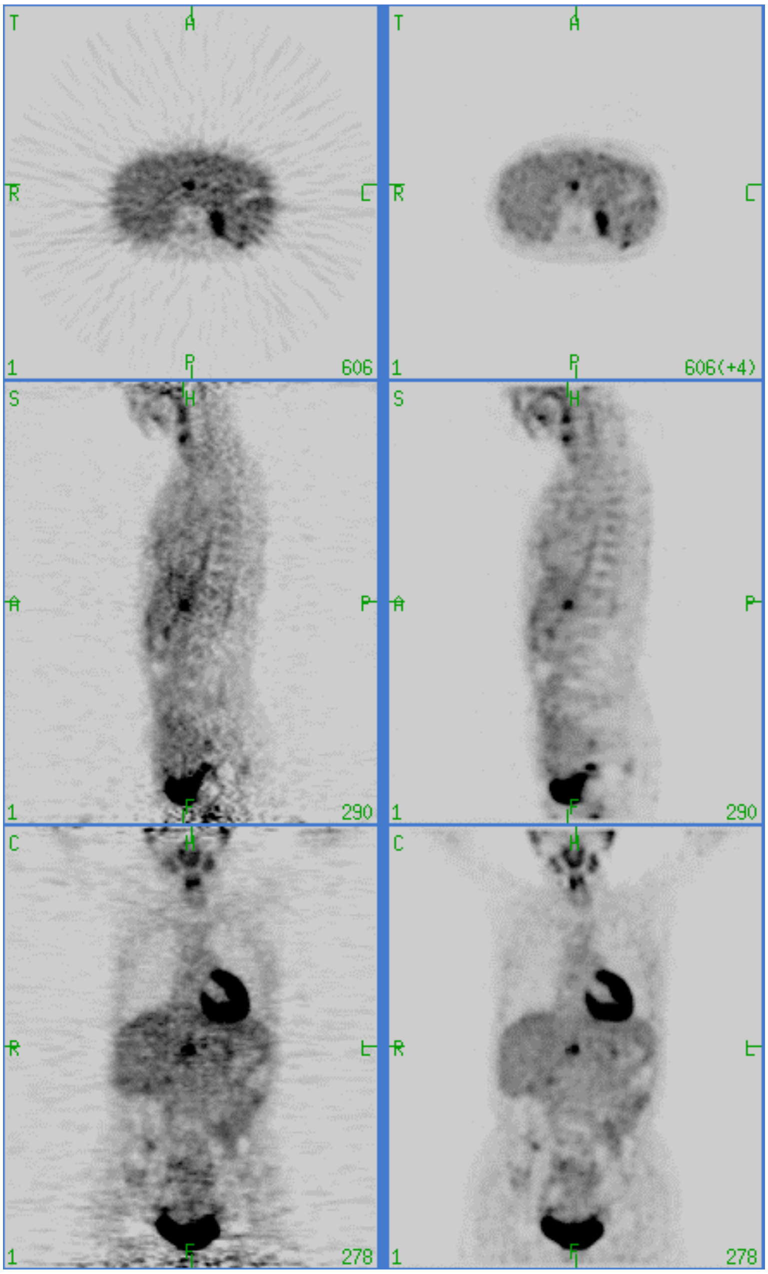
• Challenges :

- taille du projecteur (ou matrice de transition) (plus de 10 millions de LOR en PET 3D)

- estimation du projecteur pour rendre compte correctement des phénomènes 3D affectant les données mesurées (diffusion, réponse du détecteur, sensibilité variable du détecteur dans la direction axiale).

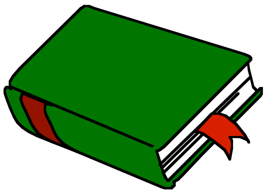
Intérêt de l'approche « fully 3D »

FORE-FBP 3D Ramla



Joel Karp, University of Pennsylvanie

Historique



• 1917 : Johann Radon : “De la détermination des fonctions à partir de leurs intégrales selon certaines directions”
➩ travaux confinés au cercle des mathématiciens

• 1956 : Bracewell : démonstration des relations entre transformée de Fourier et transformée de Radon

• 1963 : premières applications de la tomographie médicale
- Kuhl, prof de radiologie : premières images tomographiques par rétroprojection simple
- Cormack, physicien : application des travaux de Radon aux acquisitions par rayons X

• 1970 : publication de la première image de tomodensitométrie X

• 1970-73 : mise au point du premier scanner X par Cormack et Hounsfield

• 1979 : Attribution du prix Nobel de Médecine à Cormack et Hounsfield

Quelle méthode pour quelle application ?

• Scanner X
 * rétroprojection filtrée car excellent rapport signal-sur-bruit

• Tomographie d'émission monophotonique
* routine clinique : longtemps rétroprojection filtrée seulement
* de plus en plus fréquemment : algorithmes itératifs, en particulier OSEM, du fait de :
- la réduction des artefacts de raies
- les plus grandes possibilités en terme de quantification
- le traitement plus efficace de données présentant une faible statistique (10 000 moins d'événements qu'en scanner X)
- l'augmentation de la puissance des calculateurs qui rend la mise en œuvre d'algorithmes itératifs compatible avec une utilisation clinique

• Tomographie d'émission de positons
* rétroprojection filtrée, OSEM, RAMLA

Pour en savoir plus ...

• Analytic and iterative reconstruction algorithms in SPECT. Journal of Nuclear Medicine 2002, 43:1343-1358

• Rétroprojection filtrée et reconstruction itérative : rappels théoriques et propriétés des deux approches sur :
http://www.guillemet.org/irene

• Articles didactiques téléchargeables sur:
http://www.guillemet.org/irene/equipe4/cours.html