

Evaluation en imagerie médicale

Irène Buvat
IMNC - UMR 8165 CNRS
Orsay

buvat@imnc.in2p3.fr
<http://www.guillemet.org/irene>

Novembre 2009

Objectifs pédagogiques

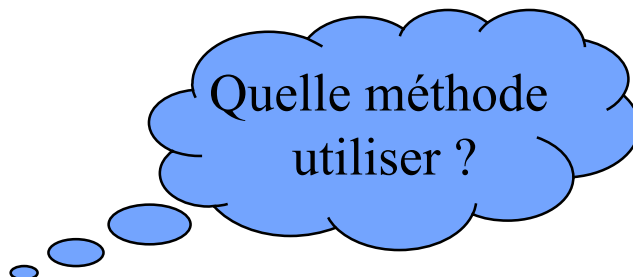
- Comprendre le contexte de l'évaluation en imagerie médicale



- Savoir concevoir une étude d'évaluation



- Comprendre la distinction entre les 2 problématiques d'évaluation auxquelles on peut être confronté
- Connaître les méthodes d'évaluation appropriées pour évaluer des méthodes de classification
- Connaître les méthodes d'évaluation appropriées pour évaluer des méthodes d'estimation



Plan du cours

- L'évaluation en imagerie médicale
- Notions de base
 - population, échantillon et inférence statistique
 - distribution et caractérisation d'une population
 - intervalles de confiance
 - hypothèses H_0 , H_1 , tests unilatéral et bilatéral
 - valeur de p ($p < 0,05$), niveau de significativité
 - degrés de liberté
 - tests d'hypothèse
- Evaluation pour des tâches de classification
 - Définitions classiques
 - Insuffisance des indices classiques
 - Approche ROC
- Evaluation pour des tâches d'estimation
 - Définitions classiques
 - Régression linéaire
 - Approche de Bland Altman
 - Evaluation sans gold standard
- Annexes et compléments

Contexte de l'évaluation

Déterminer si la méthode X
conduit à des informations pertinentes
concernant (la présence d') une pathologie
chez un groupe de sujets Y

Quoi évaluer ?

Dans quel but ?

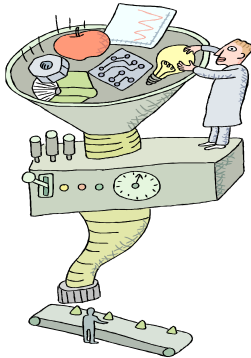
Sur quelles données ?

Exemples

- Y a-t-il une corrélation entre la valeur d'un indice extrait d'une image et la présence de l'anomalie ?
- Le volume segmenté délimite t-il bien le volume réel de la structure ?
- L'indice 1 est-il meilleur ou moins "bon" que l'indice 2 pour différencier deux pathologies ?
- L'image filtrée par le filtre A contient-elle une information plus riche que celle filtrée par le filtre B ?



Conception d'une étude



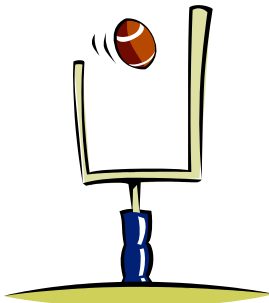
données



ce qu'on cherche à évaluer
système



comment est effectuée la tâche
observateur



finalité du système
tâche

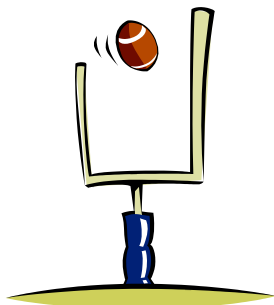
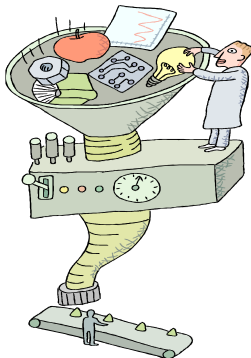


référence
ground truth
gold standard



question posée
figure de mérite
test d'hypothèse

Choix de l'outil d'évaluation



Quel type de tâche ?

Classification
ou
estimation ?

Effectuer des tests statistiques

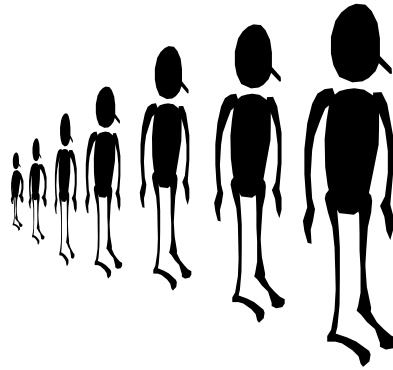
- Procédure permettant de déterminer si une hypothèse est acceptée ou rejetée, de façon statistiquement significative
- Utilisé quasiment systématiquement pour présenter des résultats de façon objective
- Repose sur un certain nombre de notions :
 - population, échantillon et inférence statistique
 - distribution d'une population
 - moyenne, écart-type
 - intervalles de confiance
 - hypothèse H_0
 - tests unilatéral et bilatéral
 - valeur de p ($p < 0,05$)
 - erreurs de type I et II, α et β

Notions de base

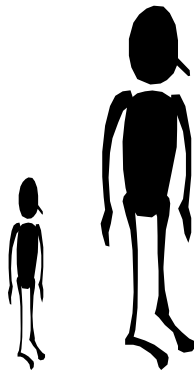


Population, échantillons et inférence statistique

- Population : grand ensemble de valeurs, d'observations, d'objets, trop grand en pratique pour pouvoir faire l'objet de mesures exactes pour le caractériser



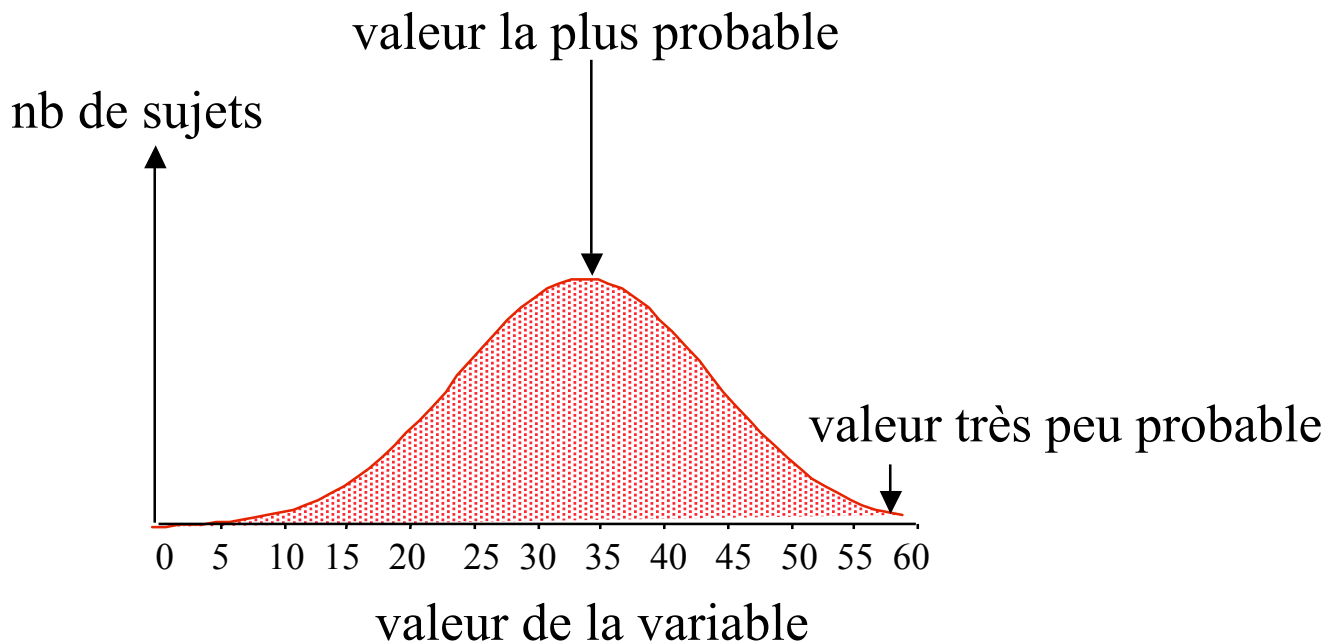
- Echantillon : petite partie d'une population qu'il est possible d'observer et sur laquelle il est possible de faire des mesures



- Inférence statistique : tirer des enseignements sur la population à partir des observations faites sur l'échantillon
- Exemple : estimer la moyenne d'une population à partir de la moyenne d'un échantillon

Distribution d'une population

- Diagramme représentant la fréquence des différentes valeurs prises par la population



- Il existe différentes formes de distributions, la plus fréquente étant la distribution normale

Caractérisation d'une population : moyenne, écart-type

7, 6, 3, 11, 5, 7, 7, 9, 6, 5

- Moyenne : somme de toutes les observations x_i divisée par le nombre d'observation N

$$\begin{aligned}\text{moyenne} &= x_{\text{moyen}} = \sum_i x_i / N \\ &= (7 + 6 + 3 + 11 + 5 + 7 + 7 + 9 + 6 + 5) / 10 \\ &= 66 / 10 = 6,6\end{aligned}$$

Caractérise la « position » de la distribution

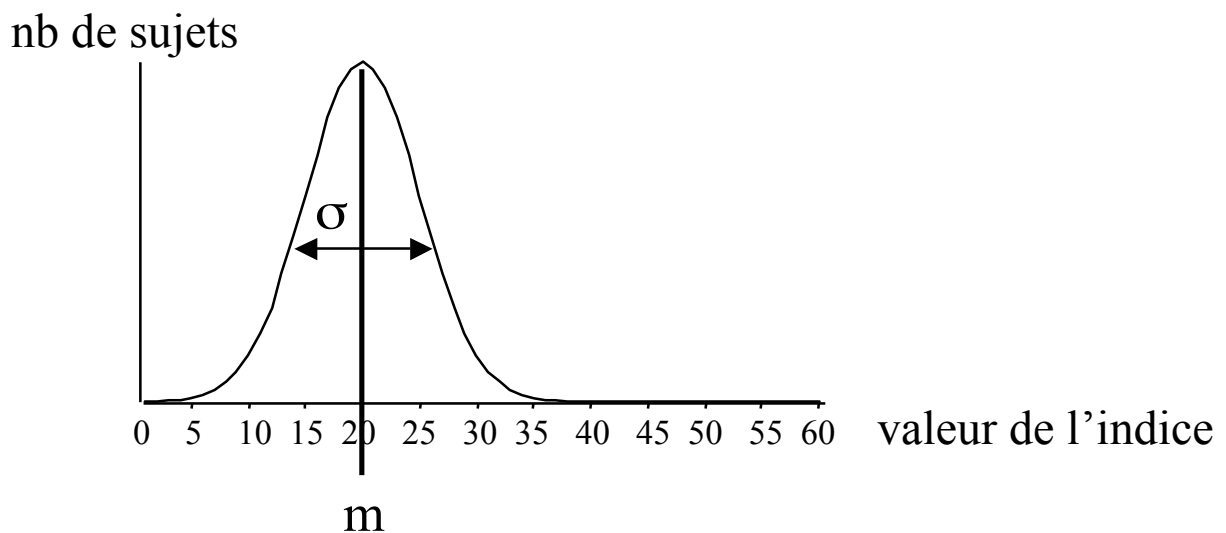
- Ecart-type (racine carré de la variance) caractérise la dispersion (l'étalement) de la distribution

$$\begin{aligned}\text{Écart-type} &= \sigma = \left\{ \sum_i (x_i - x_{\text{moyen}})^2 / (N-1) \right\}^{1/2} \\ &= \left\{ [\sum_i x_i^2 - (\sum_i x_i)^2 / N] / (N-1) \right\}^{1/2} \\ &= 2,2\end{aligned}$$

- Coefficient de variation = $100 * \text{écart-type} / \text{moyenne}$

La loi normale (ou gaussienne)

- Loi symétrique, en forme de cloche, décrivant bien la distribution statistique de nombreux indices « naturels » (tension artérielle, taille, etc).
- Entièrement caractérisée par 2 paramètres : moyenne m et écart-type σ



$$y = \frac{1}{\sqrt{2 \pi \sigma^2}} \exp \frac{-(x - m)^2}{2 \sigma^2}$$

Calcul d'écart-types

- Ecart-type de la moyenne d'un échantillon de taille N (à ne pas confondre avec l'écart-type de l'échantillon)

$$ET = \text{écart-type de l'échantillon} / N^{1/2}$$

- Ecart-type de la différence entre les 2 moyennes m_1 et m_2 d'échantillons de tailles N_1 et N_2 et d'écart-type σ_1 et σ_2

$$ET = [(\sigma_1^2/N_1 + \sigma_2^2/N_2)]^{1/2}$$



En pratique, une valeur résultat devrait toujours être accompagnée de son écart-type, qui donne une indication sur la confiance qu'on peut accorder à la valeur

Intervalles de confiance

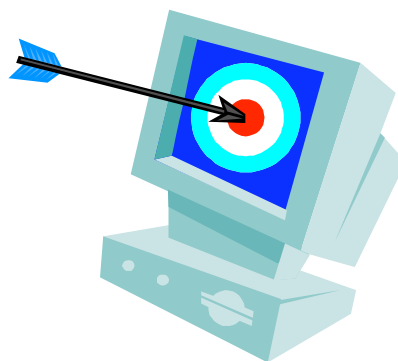
- Intervalle dans lequel la probabilité P pour que la valeur du paramètre k recherché se trouve est de X%
- Pour une population suivant une loi normale, cet intervalle est donné par

$$[k_{\text{moyen}} - 1,96 \text{ ET} ; k_{\text{moyen}} + 1,96 \text{ ET}]$$

où k_{moyen} est la moyenne sur l'échantillon observé
ET représente l'écart-type de k_{moyen}
et P = 95% (N>30)

$$[k_{\text{moyen}} - 1,64 \text{ ET} ; k_{\text{moyen}} + 1,64 \text{ ET}] \text{ pour } P = 90\%$$

$$[k_{\text{moyen}} - 2,576 \text{ ET} ; k_{\text{moyen}} + 2,576 \text{ ET}] \text{ pour } P = 99\%$$



Comment répondre objectivement à une question ?



Effectuer des tests statistiques

Notion d'hypothèse H_0

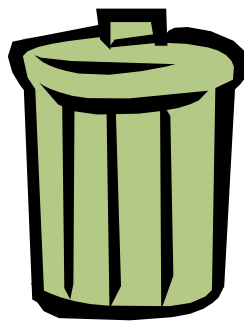
- H_0 : hypothèse nulle correspondant à l'hypothèse que l'on souhaite tester

e.g. :

$H_0 : A = B$: il n'y a pas de différence entre les valeurs de fraction d'éjection mesurées à partir des images de type A et celles mesurées à partir des images de type B

H_0 : les observations proviennent d'une distribution de Poisson

L'hypothèse nulle est généralement formulée de façon à être rejetée (sauf dans le cas d'ajustement de courbes)



Pourquoi ?

Car il y a en général plusieurs hypothèses alternatives possibles, et qu'il est plus facile de formuler l'hypothèse à rejeter que toutes les alternatives possibles

Notion d'hypothèse alternative

- H_1 : hypothèse à opposer à H_0

e.g. :

$H_0 : A = B$: il n'y a pas de différence entre les valeurs de fraction d'éjection mesurées à partir des images de type A et celles mesurées à partir des images de type B

$H_1 : A \neq B$: les valeurs de fraction d'éjection mesurées à partir des images de type A sont différentes de celles mesurées à partir des images de type B



- 2 types d'hypothèses alternatives :

- bilatérale (2-tailed)

$H_1 : A \neq B$: les valeurs sont différentes

- unilatérale (1-tailed)

$H_1 : A > B$

ou

$H_1 : A < B$

Valeurs de p

- $p < 0,05$

Valeur de p associée à un test = probabilité d'observer la valeur obtenue si l'hypothèse H_0 est vraie

Exemple :

- les patients ayant reçu la thérapie X (groupe I) ont eu moins d'accidents cardiaques que les patients sous placebo (groupe II) ($p < 0,05$)

Signifie que la survenue d'accidents cardiaques telles qu'elle a été observée dans les 2 groupes s'observerait dans moins de 5% des cas (moins de 1 cas sur 20) si la thérapie n'avait pas d'effet.

Autrement dit, la la probabilité d'observer ce qu'on observe en termes de survenue d'accident cardiaques dans les 2 groupes « par hasard » (sans relation avec la thérapie) est de moins d'1 chance sur 20.

Significativité statistique, niveau de significativité

- Fixer un niveau de significativité α , c'est choisir avec quelle probabilité on accepte de rejeter H_0 alors que H_0 est vraie
- Rejeter H_0 alors que H_0 est vraie = erreur de type I, habituellement notée α ($\alpha = 0,05 = 5\%$) : observer une différence alors qu'il n'y en a pas.
- Erreur de type II = accepter H_0 alors qu'elle est fausse, habituellement notée β : ne pas observer de différence alors qu'il y en a une.
- Puissance du test = probabilité de rejeter H_0 à juste titre = $1 - \beta$
- α et β ne sont pas indépendants : si α augmente, β diminue et réciproquement



Degrés de liberté

- Nombre d'observations variant indépendamment après que certaines contraintes aient été placées sur ces observations
- Le plus souvent, $ddl = N-1$
- Exemple : choisir dans une boîte de N chocolats

Pour chaque chocolat, on a le choix, jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'un chocolat dans la boîte, où là, on n'a plus le choix. On a donc $N-1$ choix.



Généralités sur les tests d'hypothèse

- La procédure implique le calcul d'une variable, qu'on appelle la statistique de test
- Le test peut être paramétrique (faisant des hypothèses sur la distribution de la population impliquée dans le test) ou non paramétrique
- Il existe un grand ensemble de tests statistiques, chacun étant approprié pour tester certains types d'hypothèse H_0
- e.g.,
 - Pour un appareil de comptage :
 H_0 : il n'y a pas de différence entre les nombres de coups prédits par une théorie et ceux mesurés
Test approprié : test du Chi-2
 - Pour l'étude de l'effet d'une substance :
 H_0 : la tension artérielle mesurée après traitement est identique à celle mesurée avant traitement
Test approprié : test t apparié

Nécessité d'avoir un bon ouvrage de référence pour
faire les bons choix

Principe d'un test d'hypothèse statistique

- Formuler clairement le problème à étudier
- Formuler l'hypothèse H_0 correspondante
- Déterminer le test d'hypothèse approprié pour tester H_0 :
e.g. :
test t de Student, test z, test du Chi-2
- Choisir un degré de significativité α , i.e., la probabilité d'erreur de type I : probabilité de rejeter H_0 alors que H_0 est vraie (erreur de type I, habituellement, $\alpha = 0,05 = 5\%$)
- Calculer la statistique de test s
e.g. : valeur du t de Student, valeur de z , valeur du Chi-2
- Consulter la table appropriée indiquant la probabilité p d'observer la valeur de la statistique s si H_0 est vraie
- Si $p < \alpha$, rejeter H_0 , sinon, accepter H_0

Exemple : le test t de Student

- Test paramétrique qui suppose que :
 - la distribution statistique des populations desquelles sont issus les échantillons observés suivent des lois normales
 - les échantillons sont indépendants
 - les populations normales ont la même variance
 - les variables caractérisant les populations sont continues
- Test robuste, c'est-à-dire restant valide pour de faibles écarts aux conditions ci-dessus
- Test approprié pour de petits échantillons ($N < 30$)
- Statistique de test :

$$t = \frac{\text{moyenne1} - \text{moyenne2}}{\text{écart-type}_{(\text{moyenne1} - \text{moyenne2})}}$$

Exemple : test t appliqué à un échantillon

- On dispose d'un échantillon de N mesures, de moyenne m et d'écart-type σ
- On veut savoir si la moyenne M de la population dont est issu l'échantillon est significativement différente de la moyenne connue μ d'une population donnée
- Statistique de test :

$$t = \frac{m - \mu}{\sigma/N^{1/2}}$$

- Comparer la valeur de t à la valeur dans la table en considérant N-1 ddl

Table des valeurs de t

TABLE A-2

Critical values

<i>n</i>	p=0,1 p=0,2	p=0,05 p=0,1	p=0,025 p=0,05	p=0,01 p=0,02	p=0,005 (unilatéral) p=0,01 (bilatéral)	ddl
2	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	1
3	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	2
4	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	3
5	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	4
6	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5
7	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	6
8	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	7
9	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	8
10	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	9
11	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	10
12	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	11
13	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	12
14	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	13
15	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	14
16	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	15
17	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	16
18	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	17
19	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	18
20	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	19
21	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	20
22	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	21
23	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	22
24	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	23
25	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	24
26	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	25
27	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	26
28	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	27
29	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	28
30	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	29
inf.	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	inf.

• Exemple :

Echantillon de 20 sujets dont la tension artérielle diastolique vaut en moyenne $m = 98$ ($\sigma=6,2$).

H0 : cet échantillon est issu d'une population dont la tension artérielle diastolique moyenne est $\mu=93$

H1 : cet échantillon est issu d'une population dont la tension artérielle diastolique moyenne est supérieure à 93

$$t = (98-93)/(6,2/20^{1/2}) = 3,61$$

$$p < 0,005$$

Exemple : test t entre 2 échantillons indépendants

- On dispose de 2 échantillons de N_1 et N_2 mesures chacun, de moyennes m_1 et m_2 et d'écart-type σ_1 et σ_2
- H_0 : il n'y a pas de différence entre la valeur du paramètre entre les 2 populations dont sont issus les 2 échantillons
- Statistique de test :

$$t = \frac{m_1 - m_2}{\text{écart-type}_{(m_1-m_2)}}$$

- $\text{écart-type}_{(m_1-m_2)} = [s^2(1/N_1 + 1/N_2)]^{1/2}$

où $s^2 = [(N_1-1) \sigma_1^2 + (N_2-1) \sigma_2^2] / (N_1+N_2-2)$

$$\text{et ddl} = N_1 + N_2 - 2$$

Exemple :

Echantillon 1 : 2, 4, 3 et 5

Echantillon 2 : 3, 3, 1 et 2

H_1 : il y a une différence entre la valeur du paramètre entre les 2 populations

$$t = 1,56$$

$$\text{ddl} = 6$$

$0,1 < p < 0,2$: on ne peut pas rejeter H_0

Exemple : test z entre 2 échantillons indépendants

- On dispose de 2 échantillons de N_1 et N_2 mesures chacun ($N_1 > 30$ et $N_2 > 30$), de moyennes m_1 et m_2 et d'écart-type σ_1 et σ_2
- Les distributions des populations dont sont issus les 2 échantillons sont approximativement normales
- H_0 : il n'y a pas de différence entre la valeur du paramètre entre les 2 populations dont sont issus les 2 échantillons
- Statistique de test :

$$Z = \frac{m_1 - m_2}{\text{écart-type}_{(m_1-m_2)}}$$

- $\text{écart-type}_{(m_1-m_2)} = [(\sigma_1^2/N_1 + \sigma_2^2/N_2)]^{1/2}$
- Comparer à la valeur de z critique dans la table

Table des valeurs de probabilités pour une loi z

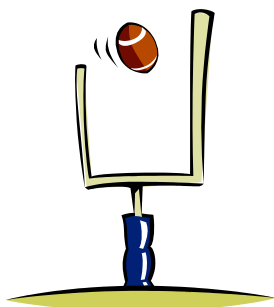
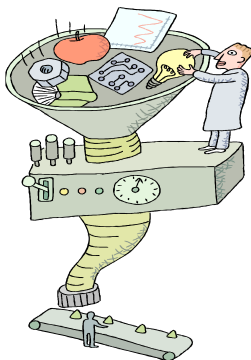
TABLE A-1

Probability table for the normal distribution

z	α	z	α	z	α	z	α	z	α	z	α	z	α	z	α
0.00	.5000	0.35	.3632	0.70	.2420	1.05	.1469	1.40	.0808	1.75	.0401	2.10	.0179	2.45	.0071
0.01	.4960	0.36	.3594	0.71	.2389	1.06	.1446	1.41	.0793	1.76	.0392	2.11	.0174	2.46	.0069
0.02	.4920	0.37	.3557	0.72	.2358	1.07	.1423	1.42	.0778	1.77	.0384	2.12	.0170	2.47	.0068
0.03	.4880	0.38	.3520	0.73	.2327	1.08	.1401	1.43	.0764	1.78	.0375	2.13	.0166	2.48	.0066
0.04	.4840	0.39	.3483	0.74	.2296	1.09	.1379	1.44	.0749	1.79	.0367	2.14	.0162	2.49	.0064
0.05	.4801	0.40	.3446	0.75	.2266	1.10	.1357	1.45	.0735	1.80	.0359	2.15	.0158	2.50	.0062
0.06	.4761	0.41	.3409	0.76	.2236	1.11	.1335	1.46	.0721	1.81	.0351	2.16	.0154	2.51	.0060
0.07	.4721	0.42	.3372	0.77	.2206	1.12	.1314	1.47	.0708	1.82	.0344	2.17	.0150	2.52	.0059
0.08	.4681	0.43	.3336	0.78	.2177	1.13	.1292	1.48	.0694	1.83	.0336	2.18	.0146	2.53	.0057
0.09	.4641	0.44	.3300	0.79	.2148	1.14	.1271	1.49	.0681	1.84	.0329	2.19	.0143	2.54	.0055
0.10	.4602	0.45	.3264	0.80	.2119	1.15	.1251	1.50	.0668	1.85	.0322	2.20	.0139	2.55	.0054
0.11	.4562	0.46	.3228	0.81	.2090	1.16	.1230	1.51	.0655	1.86	.0314	2.21	.0136	2.56	.0052
0.12	.4522	0.47	.3192	0.82	.2061	1.17	.1210	1.52	.0643	1.87	.0307	2.22	.0132	2.57	.0051
0.13	.4483	0.48	.3156	0.83	.2033	1.18	.1190	1.53	.0630	1.88	.0301	2.23	.0129	2.58	.0049
0.14	.4443	0.49	.3121	0.84	.2005	1.19	.1170	1.54	.0618	1.89	.0294	2.24	.0125	2.59	.0048
0.15	.4404	0.50	.3085	0.85	.1977	1.20	.1151	1.55	.0606	1.90	.0287	2.25	.0122	2.60	.0047
0.16	.4364	0.51	.3050	0.86	.1949	1.21	.1131	1.56	.0594	1.91	.0281	2.26	.0119	2.61	.0045
0.17	.4325	0.52	.3015	0.87	.1922	1.22	.1112	1.57	.0582	1.92	.0274	2.27	.0116	2.62	.0044
0.18	.4286	0.53	.2981	0.88	.1894	1.23	.1093	1.58	.0571	1.93	.0268	2.28	.0113	2.63	.0043
0.19	.4247	0.54	.2946	0.89	.1867	1.24	.1075	1.59	.0559	1.94	.0262	2.29	.0110	2.64	.0041
0.20	.4207	0.55	.2912	0.90	.1841	1.25	.1056	1.60	.0548	1.95	.0256	2.30	.0107	2.65	.0040
0.21	.4168	0.56	.2877	0.91	.1814	1.26	.1038	1.61	.0537	1.96	.0250	2.31	.0104	2.66	.0039
0.22	.4129	0.57	.2843	0.92	.1788	1.27	.1020	1.62	.0526	1.97	.0244	2.32	.0102	2.67	.0038
0.23	.4090	0.58	.2810	0.93	.1762	1.28	.1003	1.63	.0516	1.98	.0239	2.33	.0099	2.68	.0037
0.24	.4052	0.59	.2776	0.94	.1736	1.29	.0985	1.64	.0505	1.99	.0233	2.34	.0096	2.69	.0036
0.25	.4013	0.60	.2743	0.95	.1711	1.30	.0963	1.65	.0495	2.00	.0228	2.35	.0094	2.70	.0035
0.26	.3974	0.61	.2709	0.96	.1685	1.31	.0951	1.66	.0485	2.01	.0222	2.36	.0091	2.71	.0034
0.27	.3936	0.62	.2676	0.97	.1660	1.32	.0934	1.67	.0475	2.02	.0217	2.37	.0089	2.72	.0033
0.28	.3897	0.63	.2643	0.98	.1635	1.33	.0918	1.68	.0465	2.03	.0212	2.38	.0087	2.73	.0032
0.29	.3859	0.64	.2611	0.99	.1611	1.34	.0901	1.69	.0455	2.04	.0207	2.39	.0084	2.74	.0031
0.30	.3821	0.65	.2578	1.00	.1587	1.35	.0885	1.70	.0446	2.05	.0202	2.40	.0082	2.75	.0030
0.31	.3783	0.66	.2546	1.01	.1562	1.36	.0869	1.71	.0436	2.06	.0197	2.41	.0080	2.76	.0029
0.32	.3745	0.67	.2514	1.02	.1539	1.37	.0853	1.72	.0427	2.07	.0192	2.42	.0078	2.77	.0028
0.33	.3707	0.68	.2483	1.03	.1515	1.38	.0838	1.73	.0418	2.08	.0188	2.43	.0075	2.78	.0027
0.34	.3669	0.69	.2451	1.04	.1492	1.39	.0823	1.74	.0409	2.09	.0183	2.44	.0073	2.79	.0026

- Valeurs adaptées aux tests unilatéral
- Pour test bilatéral, multiplier la valeur de probabilité par 2

Choix de l'outil d'évaluation

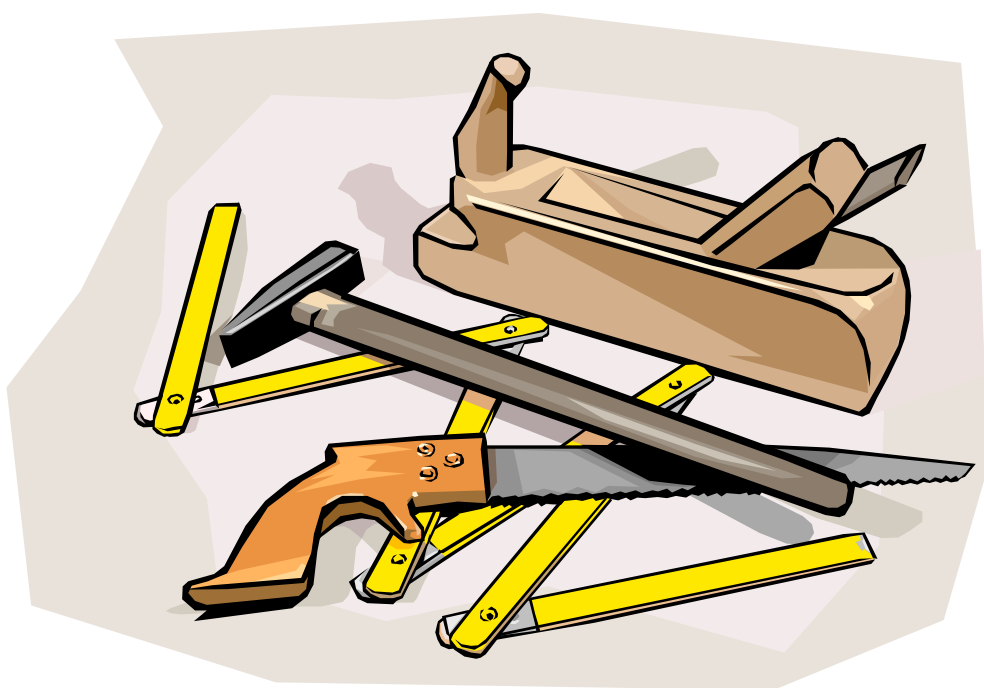


Quel type de tâche ?

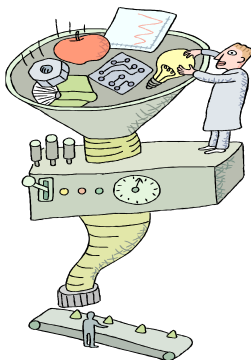
Classification
ou
estimation ?

Outils pour les tâches de classification

Sensibilité, spécificité, exactitude,
valeurs prédictives, rapports de
vraisemblance, approches ROC



Tâches de classification : contexte général

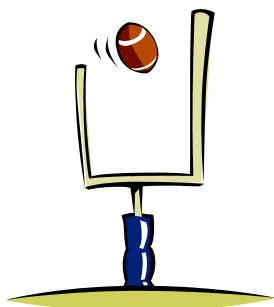


Données divisibles en 2 (ou +)
catégories

e.g., avec et sans anomalie

(positif ou négatif)

anomalie A versus anomalie B

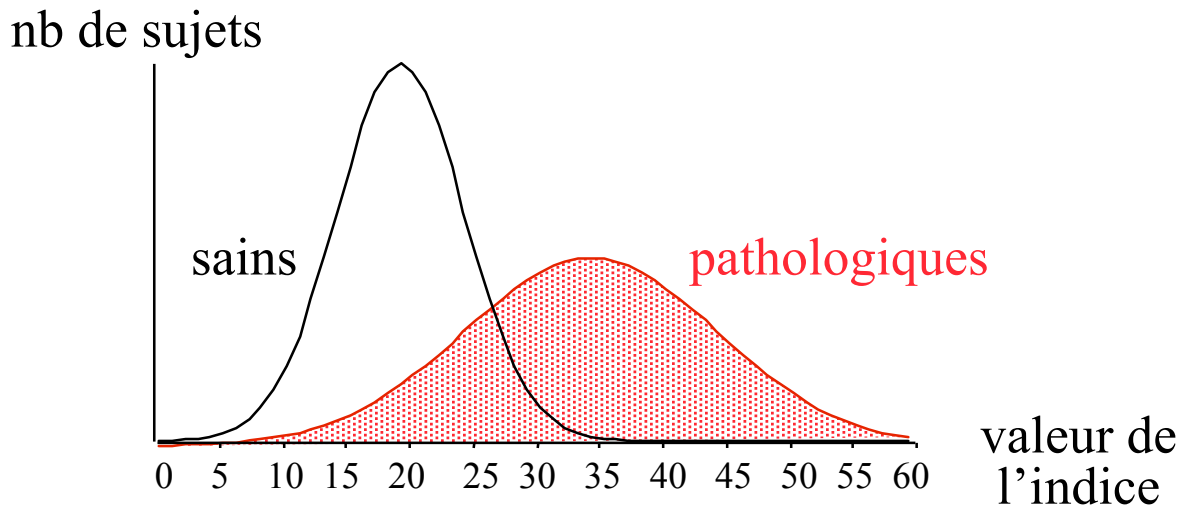


Tâche : déterminer la catégorie
à laquelle appartient chaque
élément du jeu de données



Situation concrète

- Recouvrement des valeurs de l'indice pour les populations avec et sans l'anomalie



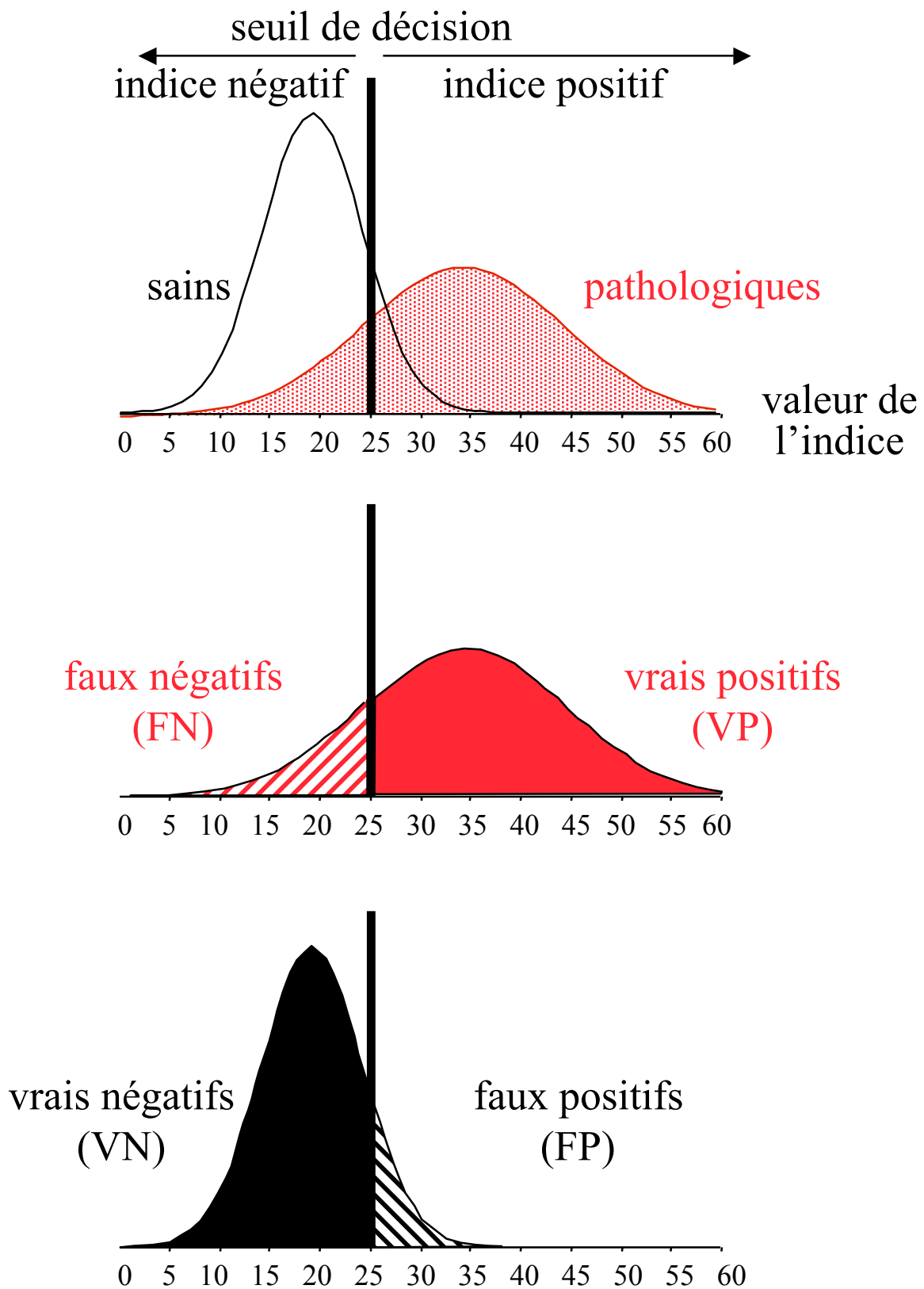
↑
valeur de l'indice = 20
sain ou pathologique ?




nécessité de choisir un seuil de décision

➡ les performances diagnostiques de l'indice dépendent du seuil de décision


Seuil de décision et classification des sujets



Définitions pour l'évaluation diagnostique



		PATHOLOGIE	
		absente	présente
INDICE	négatif	vrais négatifs VN	faux négatifs FN
	positif	faux positifs FP	vrais positifs VP



• Fraction de vrais positifs $FVP = \frac{VP}{VP + FN} = \text{sensibilité}$

• Fraction de vrais négatifs $FVN = \frac{VN}{VN + FP} = \text{spécificité}$

• Fraction de faux positifs $FFP = \frac{FP}{FP + VN} = 1 - FVN$

• Fraction de faux négatifs $FFN = \frac{FN}{FN + VP} = 1 - FVP$

• Valeur prédictive positive $VPP = \frac{VP}{VP + FP}$

• Valeur prédictive négative $VPN = \frac{VN}{VN + FN}$

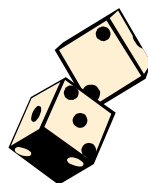
Equivalence avec les probabilités conditionnelles

P = statut réel de la pathologie

T = résultat issu de l'indice

quand
↓

- Fraction de vrais positifs FVP = $\frac{VP}{VP + FN}$ = Prob(T+ | P+)
- Fraction de vrais négatifs FVN = $\frac{VN}{VN + FP}$ = Prob(T- | P-)
- Fraction de faux positifs FFP = $\frac{FP}{FP + VN}$ = Prob(T+ | P-)
- Fraction de faux négatifs FFN = $\frac{FN}{FN + VP}$ = Prob(T- | P+)
- Valeur prédictive positive VPP = $\frac{VP}{VP + FP}$ = Prob(P+ | T+)
- Valeur prédictive négative VPN = $\frac{VN}{VN + FN}$ = Prob(P- | T-)
- Prévalence de la pathologie Prév = Prob(P+)



Exemple

Population de 1200 sujets

		PATHOLOGIE	
		absente	présente
INDICE	négatif	vrais négatifs 900	faux négatifs 60
	positif	faux positifs 100	vrais positifs 140

- sensibilité ?
- spécificité ?
- FFP ?
- FFN ?
- VPP ?
- VPN ?
- Prévalence ?

Solution

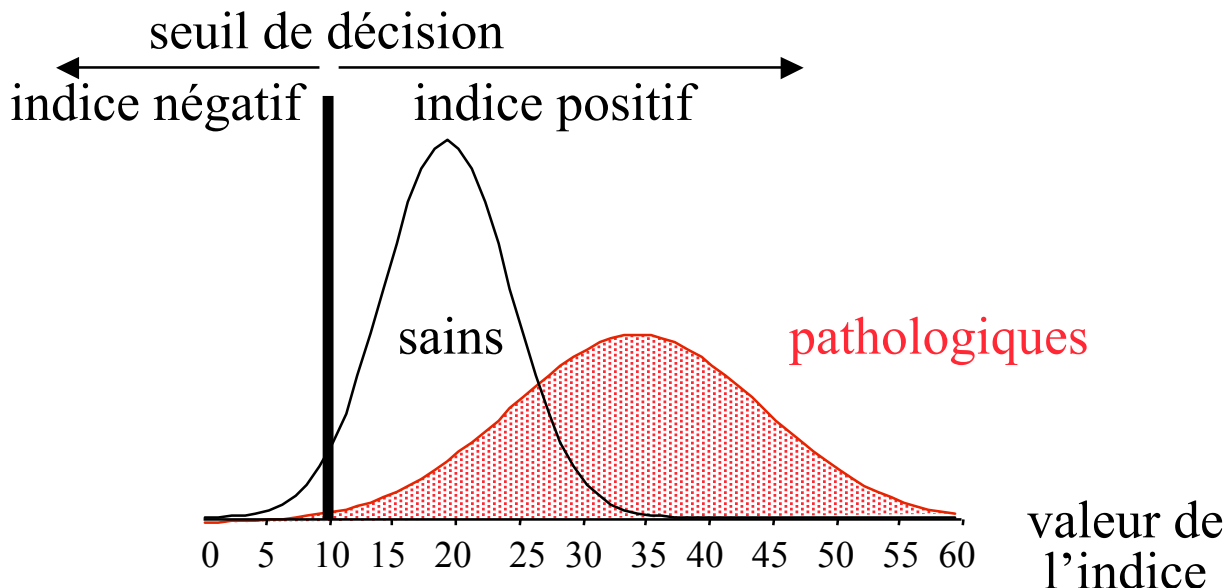
Population de 1200 sujets

	PATHOLOGIE	
	absente	présente
INDICE négatif	vrais négatifs 900	faux négatifs 60
positif	faux positifs 100	vrais positifs 140

- sensibilité = FVP = $140 / 200 = 0.70 = 70\%$
- spécificité = FVN = $900 / 1000 = 0.90 = 90\%$
- FFP = $100 / 1000 = 0.1 = 10\%$
- FFN = $60 / 200 = 0.3 = 30\%$
- VPP = $140 / 240 = 0.58 = 58\%$
- VPV = $900 / 960 = 0.94 = 94\%$
- Prévalence = $200 / 1200 = 0.17 = 17\%$

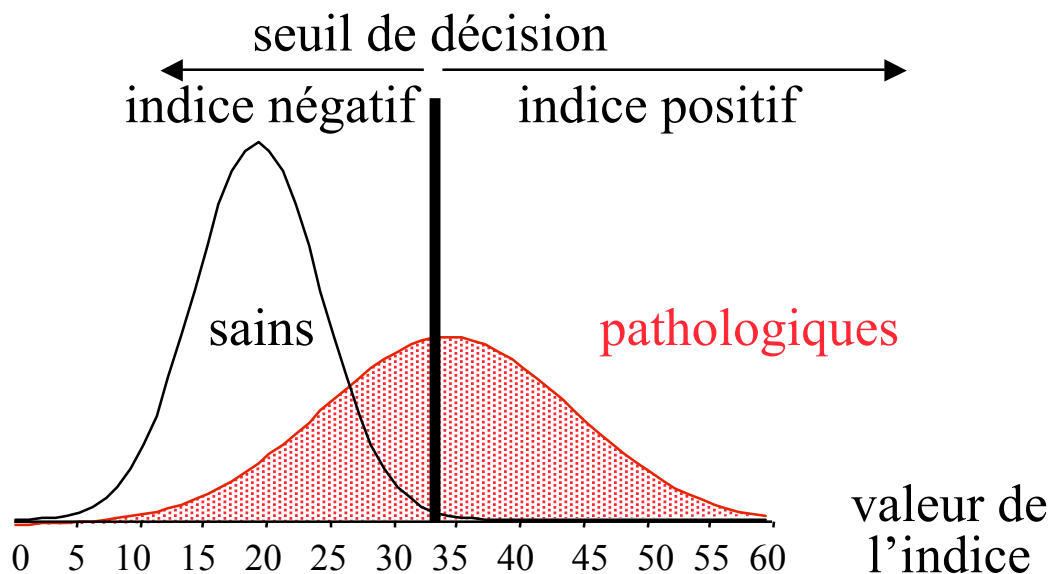
Sensibilité, spécificité et seuil de décision

- Comment choisir le seuil de décision pour maximiser la sensibilité d'un indice ?



➡ chute dramatique de la spécificité

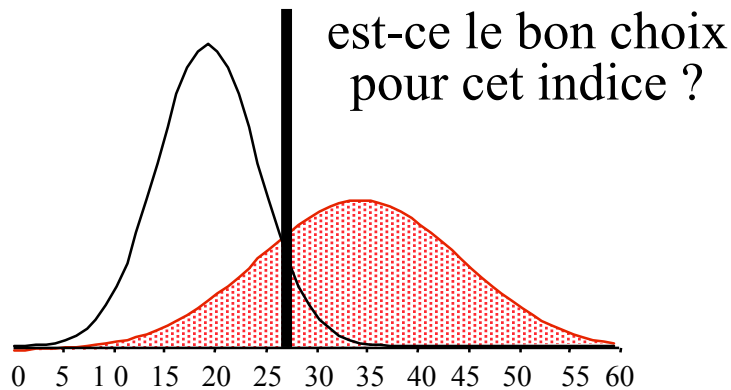
- Comment choisir le seuil de décision pour maximiser la spécificité d'un indice ?



➡ chute dramatique de la sensibilité

Insuffisance des sensibilités et spécificités

- Valeurs dépendant du choix du seuil de décision



- Comment comparer deux indices A et B ?

Le seuil de décision optimal pour un indice n'est pas nécessairement optimal pour l'autre

- Comment comparer deux indices A et B ?

indice A : sensibilité = 80% spécificité = 65%

indice B : sensibilité = 90% spécificité = 50%

Quel est le meilleur ?

- Contrôle du seuil de décision

indice = valeur numérique

➡ aisé

indice = diagnostic posé à partir d'une image

➡ seuil subjectif, difficilement contrôlable

Indice composite ?

- Combiner sensibilité et spécificité en un nouveau critère ?

$$\text{exactitude} = \frac{VP + VN}{VP + VN + FP + FN}$$

		PATHOLOGIE		
		absente	présente	
INDICE A	negatif	vrais négatifs 900	faux négatifs 60	sensibilité = 70% spécificité = 90% exactitude = 87%
	positif	faux positifs 100	vrais positifs 140	
INDICE B	negatif	vrais négatifs 960	faux négatifs 120	sensibilité = 40% spécificité = 96% exactitude = 87%
	positif	faux positifs 40	vrais positifs 80	

➡ même exactitude pour des performances différentes

- peu affectée par les valeurs de sensibilité dans certains cas (faible ou forte prévalence) :

e.g., si prévalence = 5% et tous les cas diagnostiqués négatifs

➡ exactitude = 95% !

Valeurs prédictives

- Valeur prédictive positive : $VP/(VP+FP)$
fraction de cas identifiés comme positifs qui sont effectivement positifs
- Valeur prédictive négative : $VN/(VN+FN)$
fraction de cas identifiés comme négatifs qui sont effectivement négatifs

Dépendent non seulement de la justesse du système,
mais aussi de la prévalence

Mesurent la valeur « clinique » du système

Rapports de vraisemblance

Rapport de vraisemblance positif (RV+) : VP/FP :

probabilité d'une observation positive chez les cas réellement positifs par rapport à la probabilité d'une observation positive chez les cas réellement négatifs

Rapport de vraisemblance négatif (RV-) : FN/VN :

probabilité d'une observation négative chez les cas réellement positifs par rapport à la probabilité d'une observation négative chez les cas réellement négatifs

Système idéal : $RV+ = +\infty$ et $RV- = 0$

Système non informatif : $RV+ = 1$ et $RV- = 1$

Mesurent le gain informatif apporté par le système sur la probabilité de présence de la pathologie (prédiction)

risque d'avoir la pathologie après le test =
risque d'avoir la pathologie avant le test \times RV+

... et ne dépendent pas de la prévalence



Domaines d'applications



Si le système produit un résultat binaire, les 3 approches présentées précédemment sont les seules possibles avec :

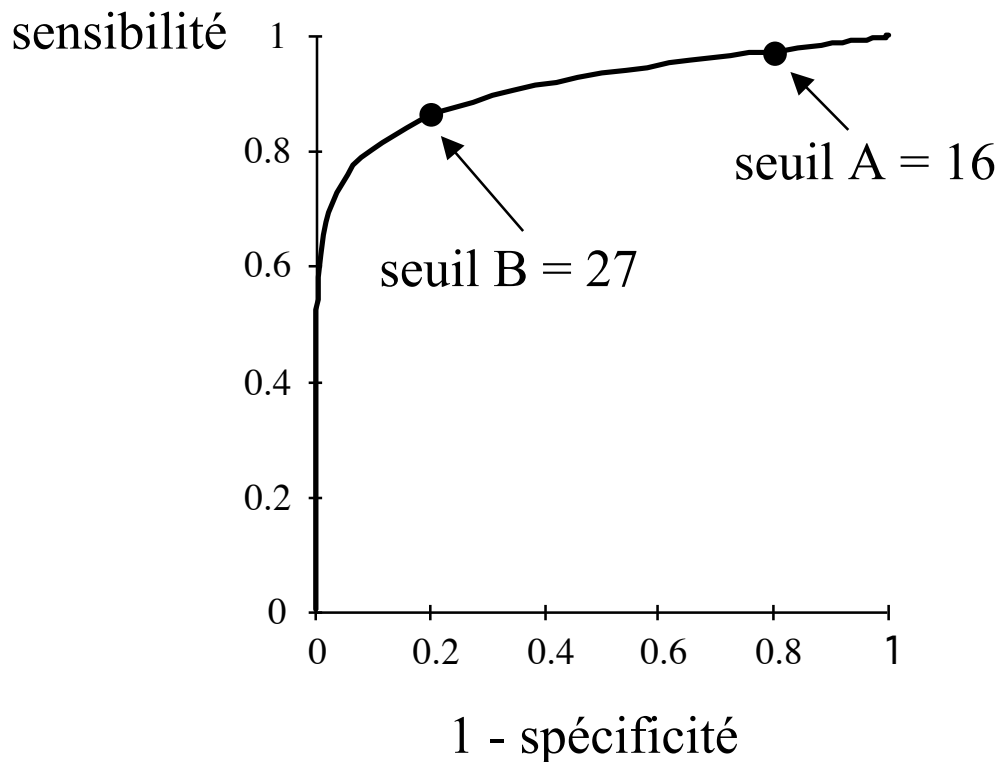
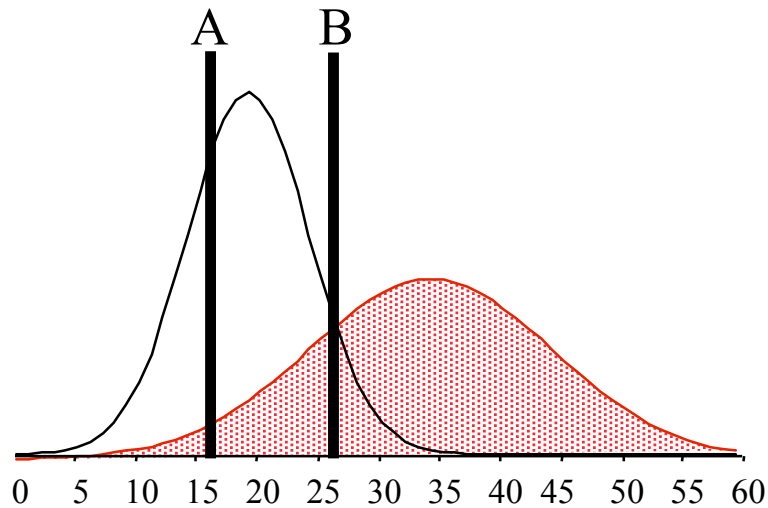


- 1) la possibilité de tester si les différences entre figures de mérite sont significatives
- 2) la possibilité d'étudier l'impact de certains facteurs externes sur les résultats (modélisation par régression)
- 3) la possibilité de combiner les résultats de plusieurs tests binaires et de caractériser la pertinence de la combinaison (e.g., régression logistique)

... mais souvent, l'affectation binaire est faite à partir d'une observable continue donnée par le système

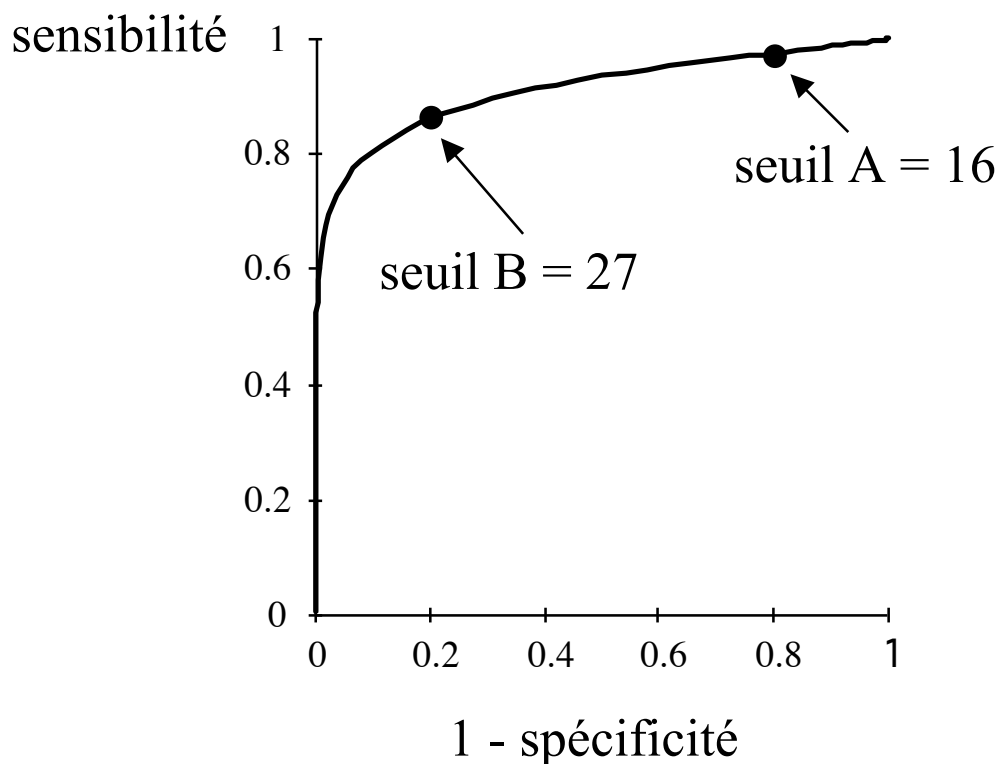
Quelle solution ? Courbes ROC

- Prend en compte la variabilité des performances de classification en fonction de la valeur du seuil de décision



Origine de la terminologie

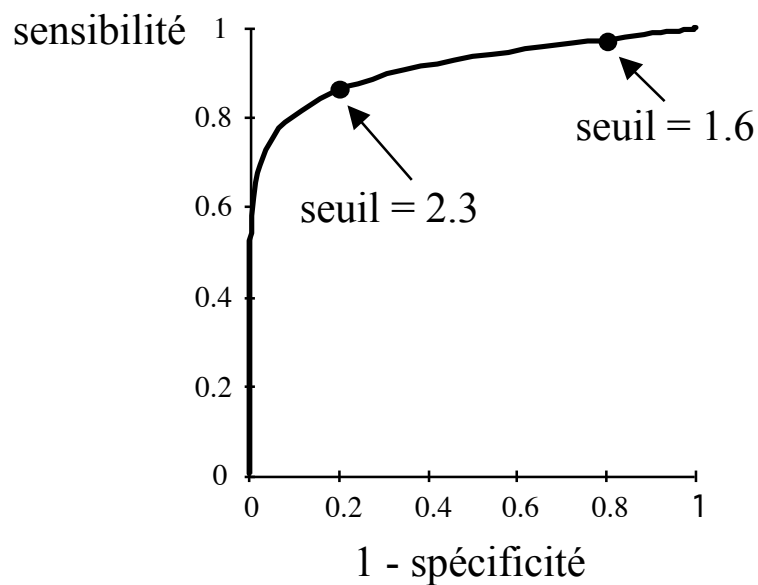
- Receiver : du récepteur (observateur)
- Operating : pour n'importe quel point d'opération
- Characteristic : caractéristiques de détection de l'indice



Construction d'une courbe ROC (1)

- Indice correspondant à des valeurs numériques

individu	1	2	3	4	5	N
nature de l'individu (S ou P)	S	P	S	S	P	P
valeur de l'indice	1.8	2.3	2.1	1.7	2.1		1.9



➡ variation quasi-continue du seuil de décision

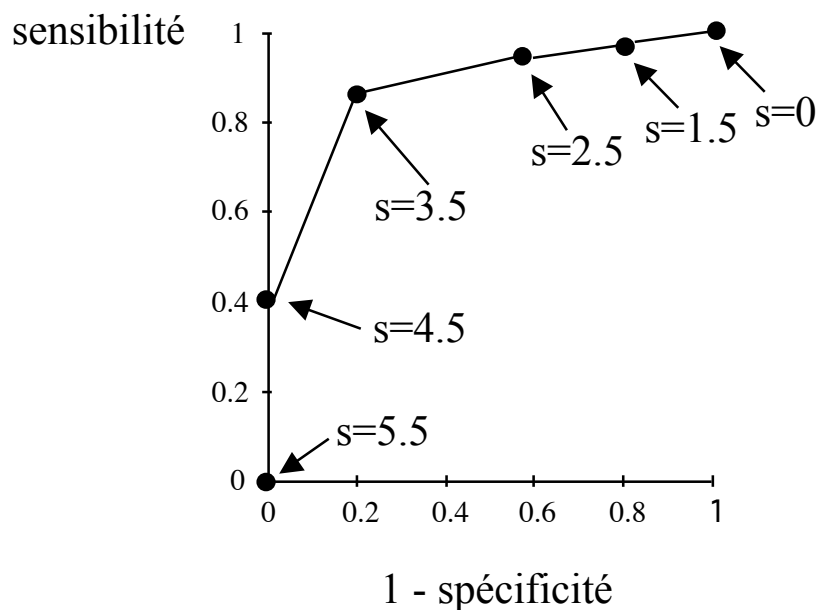
Construction d'une courbe ROC (2)

- Indice correspondant à une interprétation subjective

image	1	2	3	4	5	N
nature de l'image (S ou P)	S	P	S	S	P	P
score attribué par un observateur	3	4	2	1	3		2

échelle de scores :

- | | | |
|---------------------------------|--------|-----------|
| 1. lésion certainement absente |> | seuil 0 |
| 2. lésion probablement absente |> | seuil 1.5 |
| 3. lésion possiblement présente |> | seuil 2.5 |
| 4. lésion probablement présente |> | seuil 3.5 |
| 5. lésion certainement présente |> | seuil 4.5 |
| |> | seuil 5.5 |

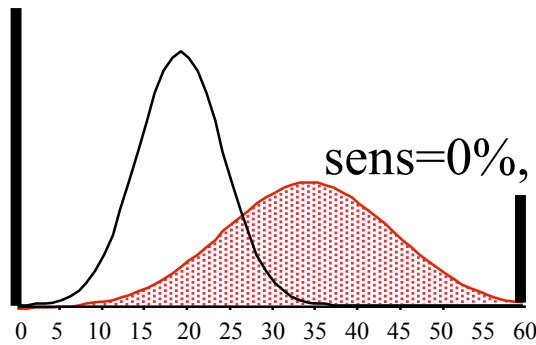


➡ variation discrète du seuil de décision

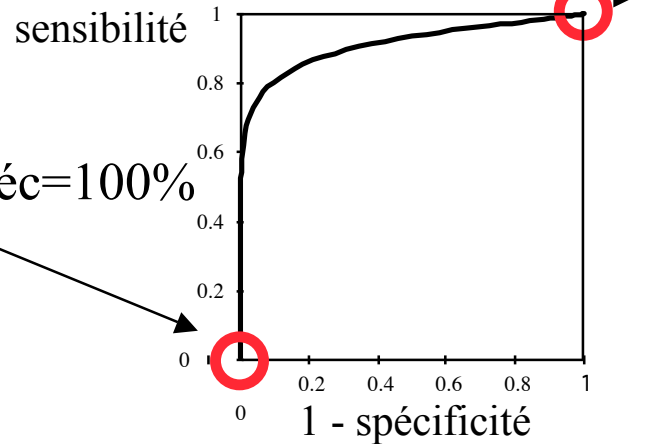
Caractéristiques d'une courbe ROC

- Passe par les points (0,0) et (1,1)

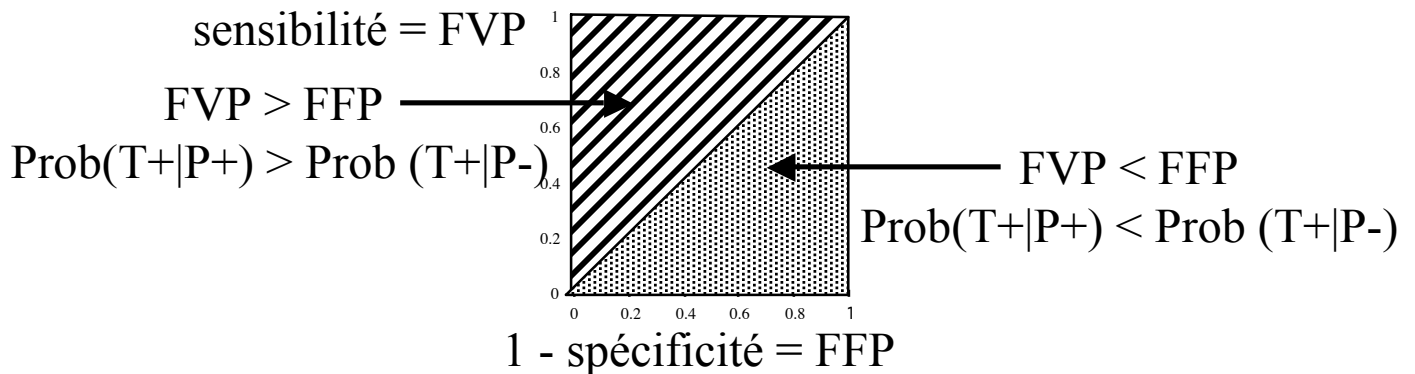
sens=100%, spéc=0%



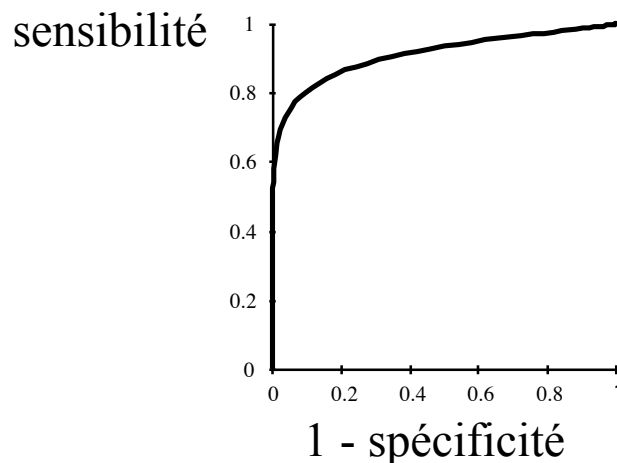
sens=0%, spéc=100%



- Courbe ROC au dessus de la diagonale

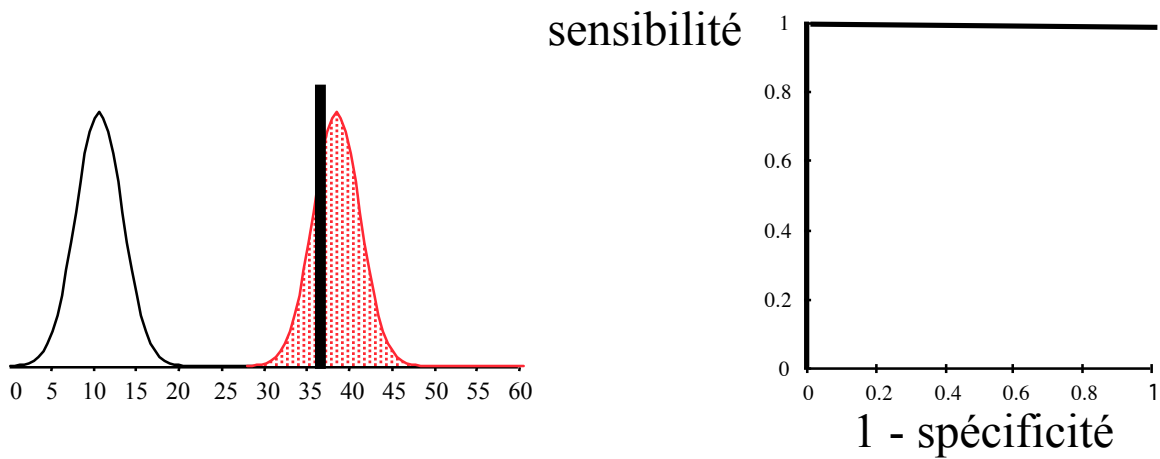


- Pente décroissante de (0,0) à (1,1)

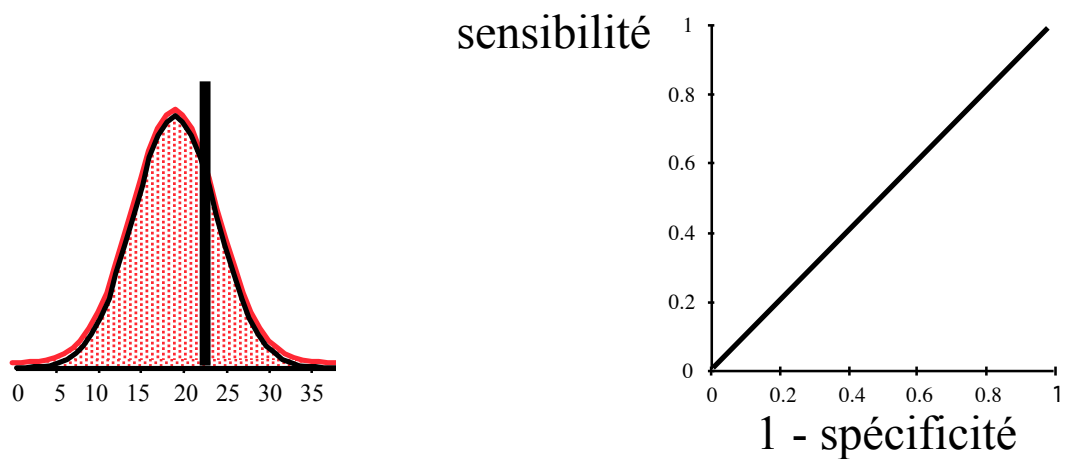


Interprétation d'une courbe ROC

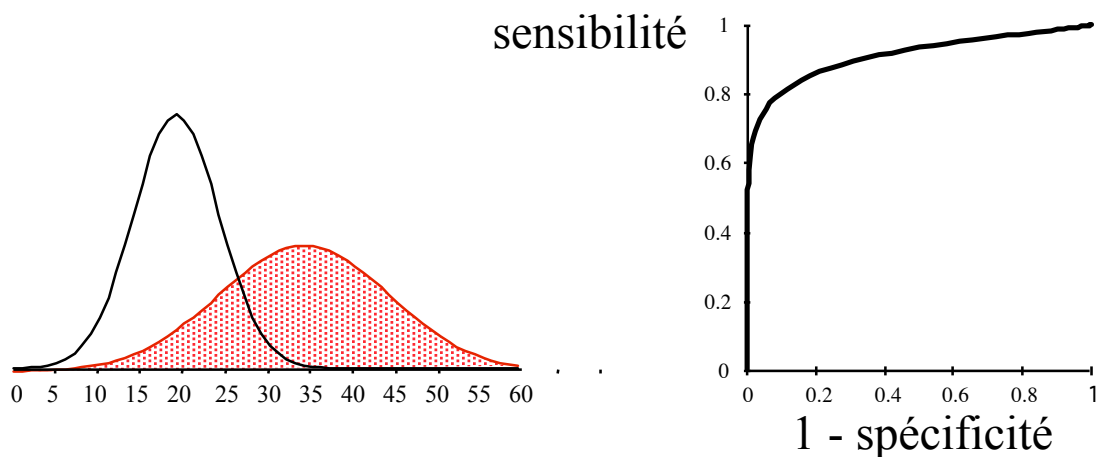
- Indice idéal



- Indice non informatif

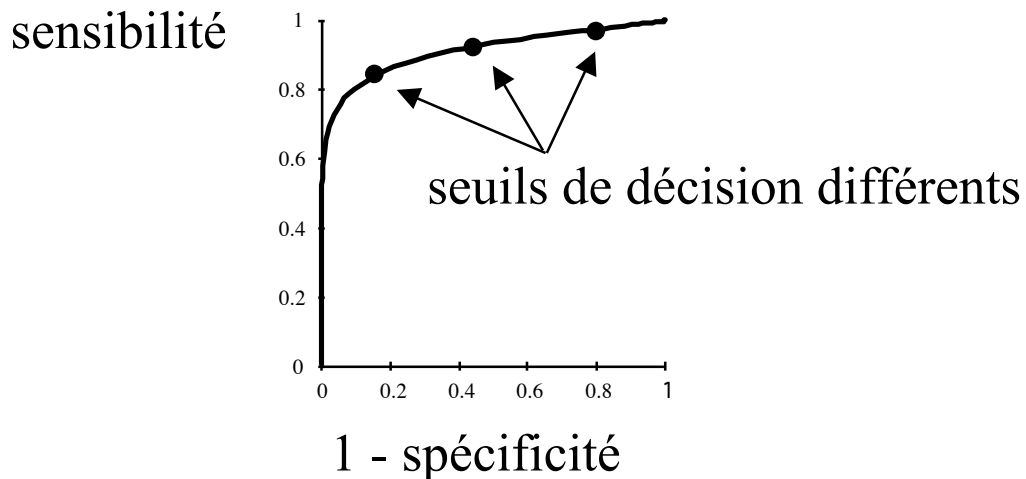


- Indice courant



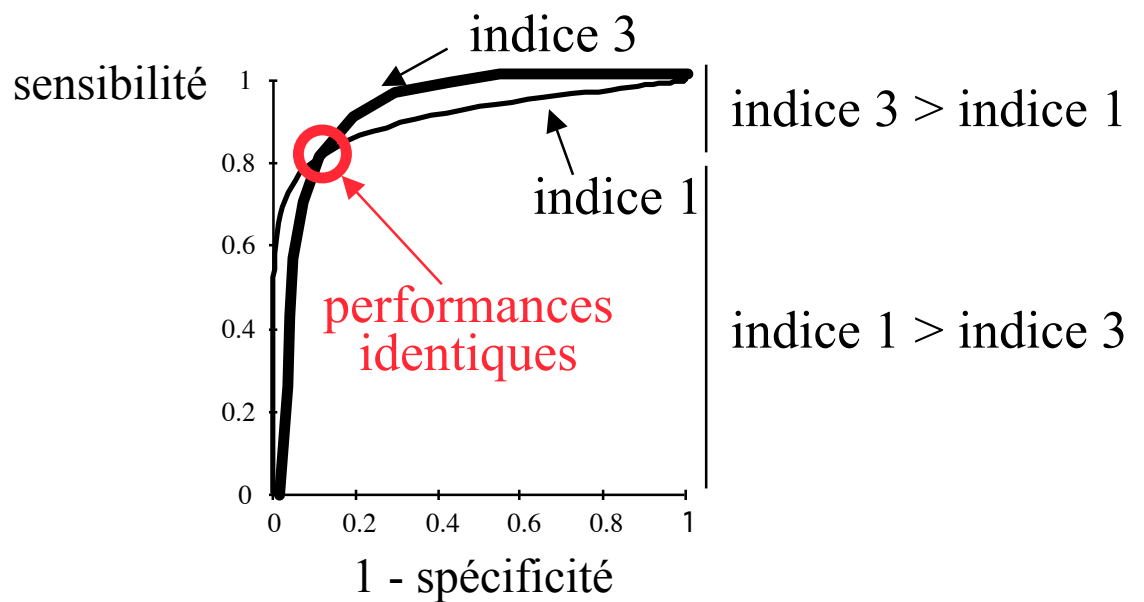
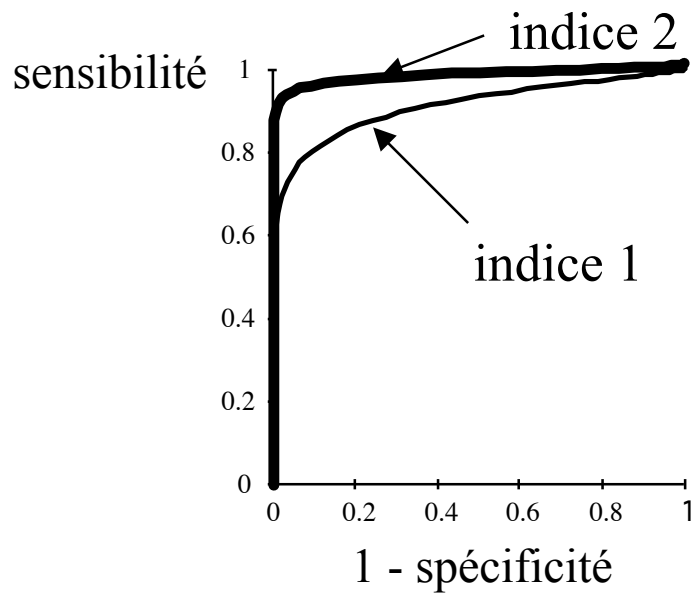
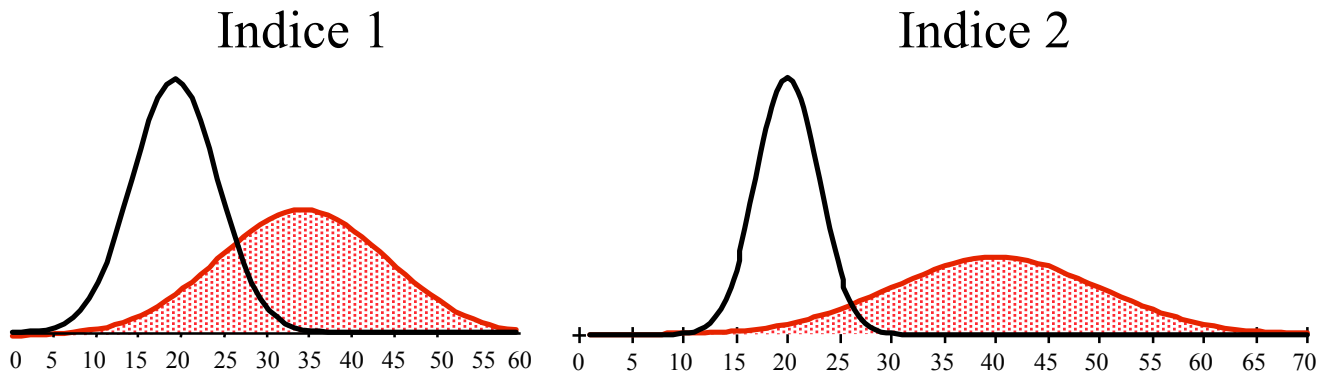
Propriétés d'une courbe ROC

- Ne dépend pas de la valeur du seuil de décision



- Ne dépend pas de la prévalence
- Pour un indice quantitatif :
caractérise les performances de l'indice
- Pour un diagnostic posé à partir de l'observation d'une image :
caractérise la combinaison (image ; observateur)
➡ intérêt des observateurs multiples

Comparaison subjective de deux courbes ROC

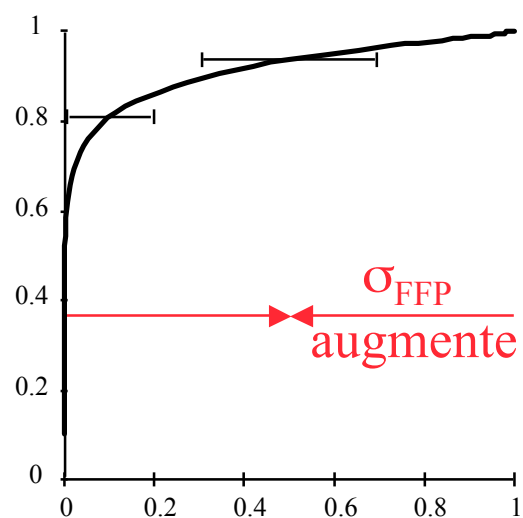
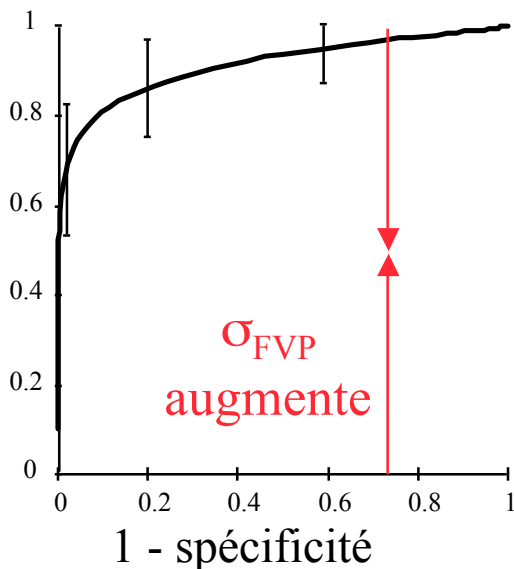


Fiabilité d'une courbe ROC

$$\sigma_{FVP} = \sqrt{\frac{FVP (1 - FVP)}{n_{p+} - 1}}$$

$$\sigma_{FFP} = \sqrt{\frac{FFP (1 - FFP)}{n_{p-} - 1}}$$

sensibilité



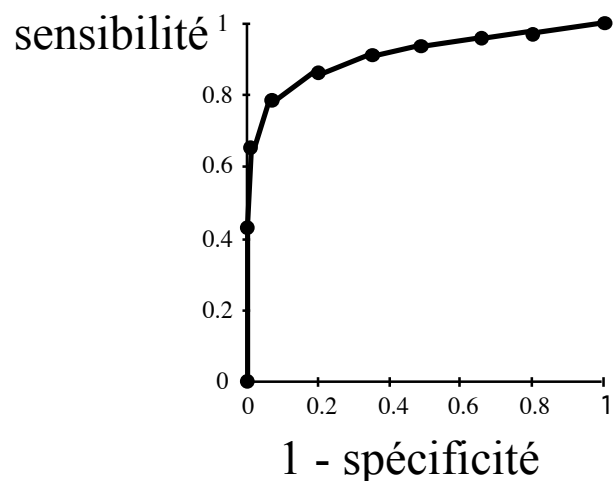
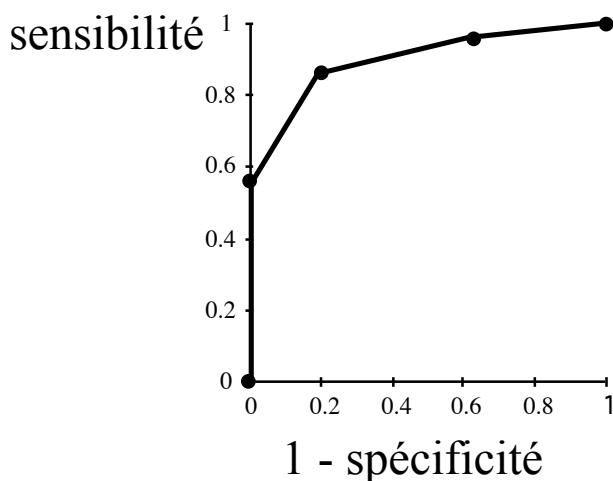
- σ_{FVP} augmente quand on se rapproche de $FVP = 0.5$
- σ_{FFP} augmente quand on se rapproche de $FFP = 0.5$
- σ_{FVP} varie inversement avec le nombre de sujets pathologiques (n_{p+})
- σ_{FFP} varie inversement avec le nombre de sujets sains (n_{p-})
➡ choisir plutôt $n_{p+} \sim n_{p-}$

Tracé d'une courbe ROC : approche non paramétrique

- Approche ne reposant pas sur un modèle statistique sous-jacent

ligne brisée reliant les points de mesure

➡ aucun modèle sous-jacent



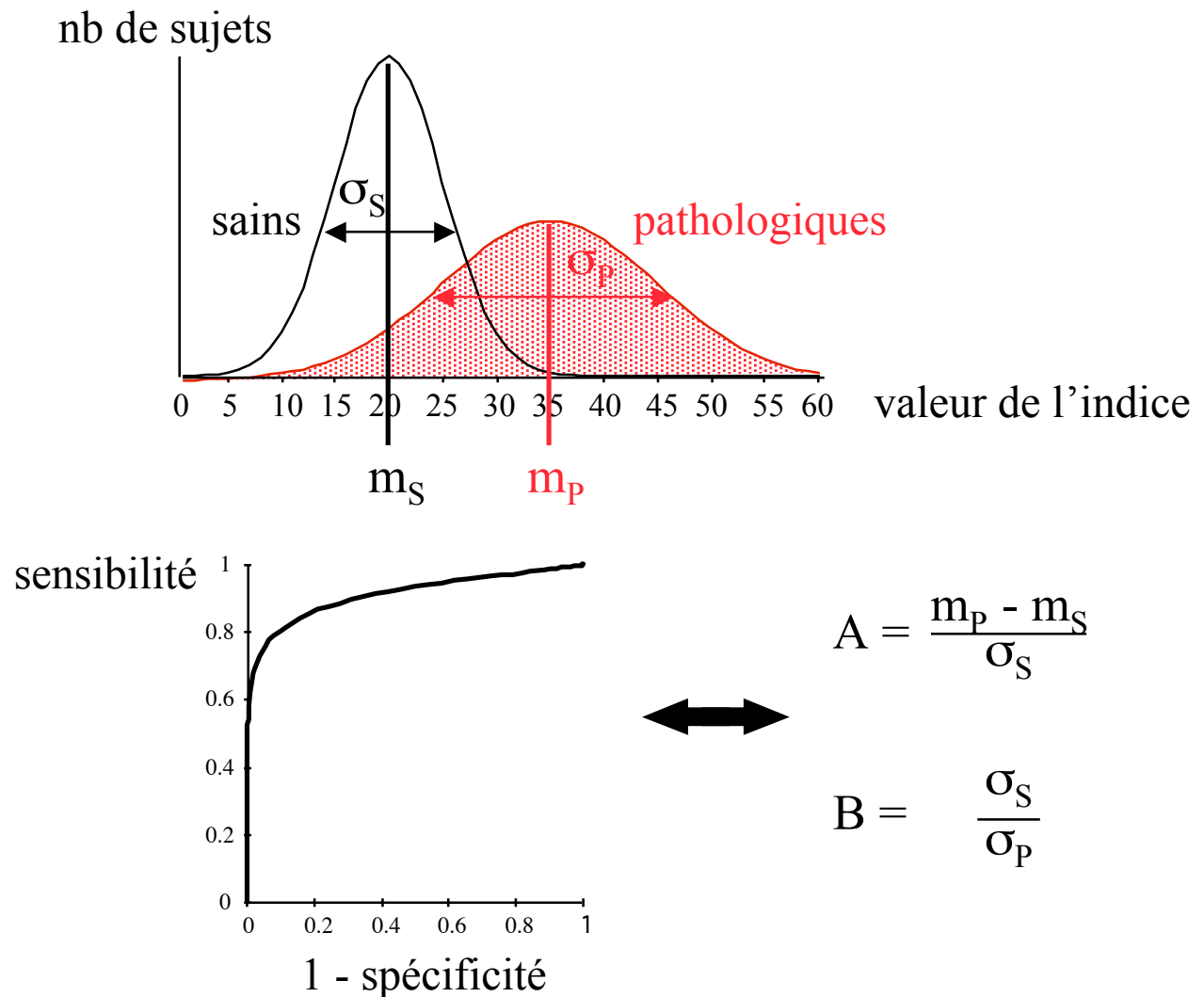
➡ courbe d'autant plus lisse que le nombre de points de mesure est élevé

➡ courbe caractérisée par l'ensemble des triplets (seuil, 1-spécificité, sensibilité)

Tracé d'une courbe : approche paramétrique (2)

- Modèle binormal sous-jacent

Hypothèse : chaque population suit une loi normale



➡ détermination des paramètres A et B à partir des triplets (seuil, 1- spécificité, sensibilité) par ajustement maximisant la vraisemblance (i.e., la probabilité que les observations soient expliquées par le modèle)
e.g., programme ROCKIT

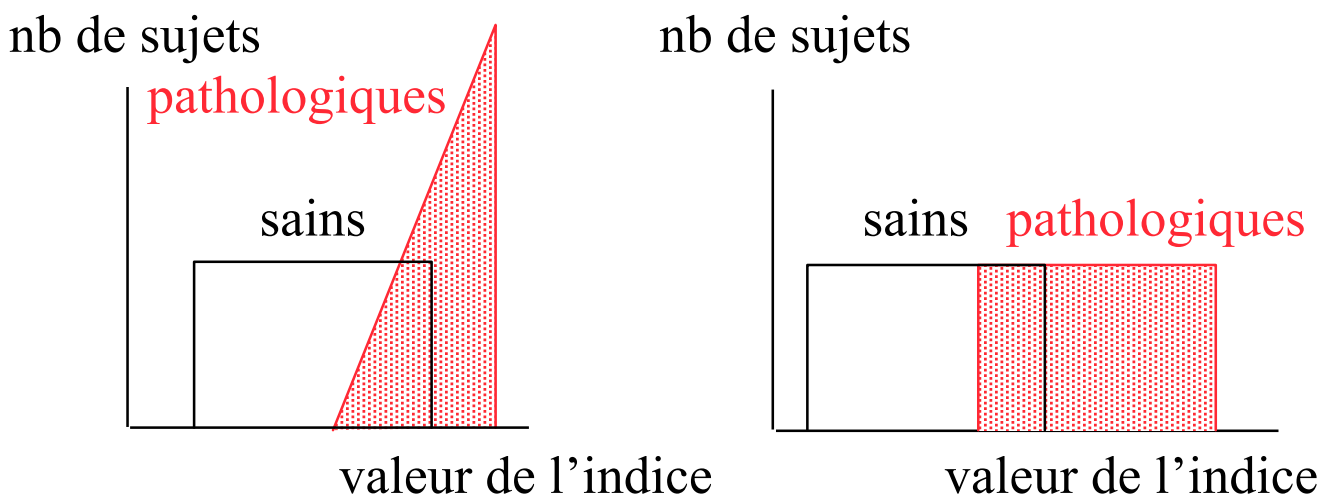
Justification du modèle binormal (1)

- Modèle bien adapté lors de jugements subjectifs par un observateur exprimés sur une échelle comportant un petit nombre de catégories, même pour :

- distributions binomiales
- distributions de Poisson
- distributions du Chi-2
- distributions gamma

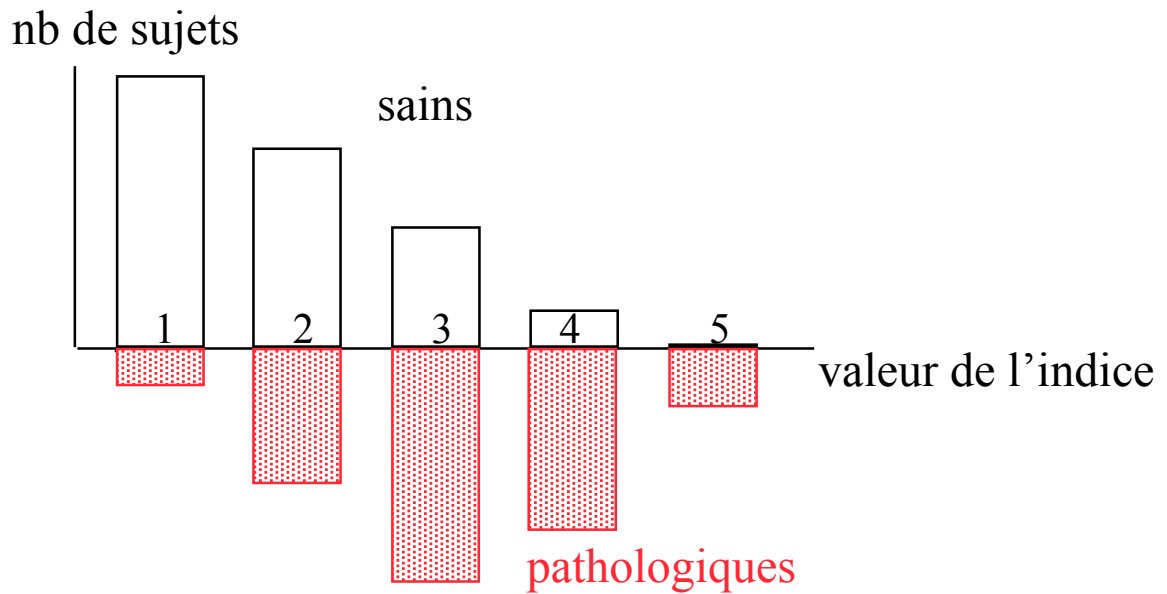
- Problèmes possibles avec :

- distributions puissance : $FVP = FFP^k$
- distributions triangulaire ou rectangulaire

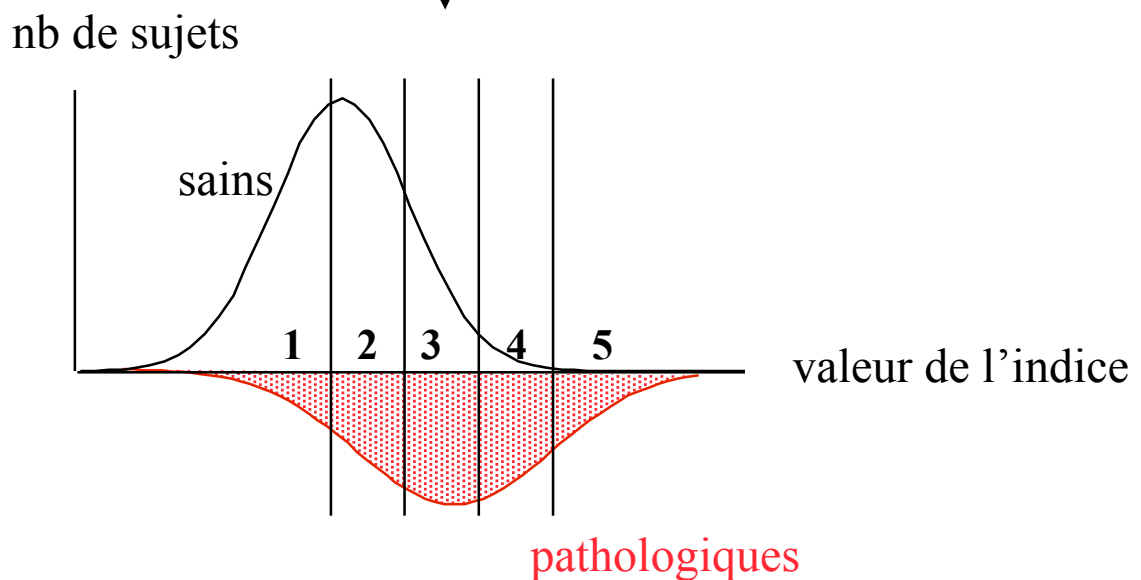


Justification du modèle binormal (2)

- Faible nombre de catégories dans l'échelle des scores

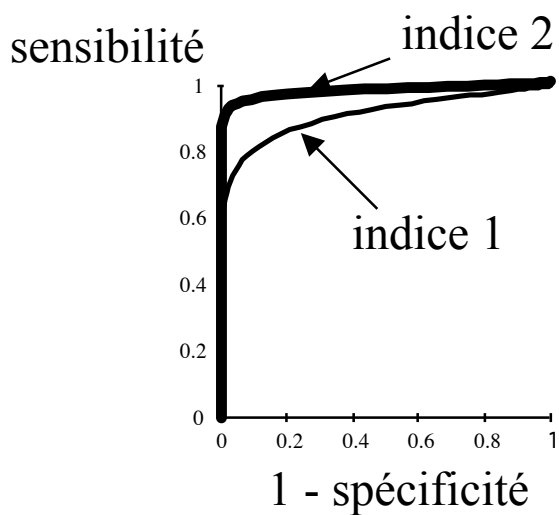


ajustement par deux lois normales

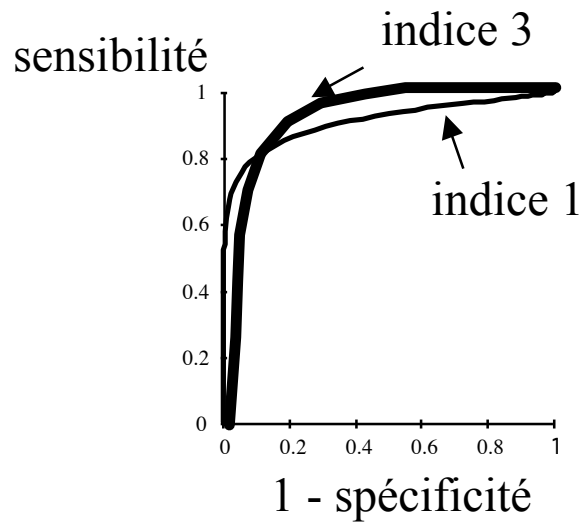


Comparaison de 2 courbes ROC

- Comparaison subjective (visuelle)



indice 2 > indice 1

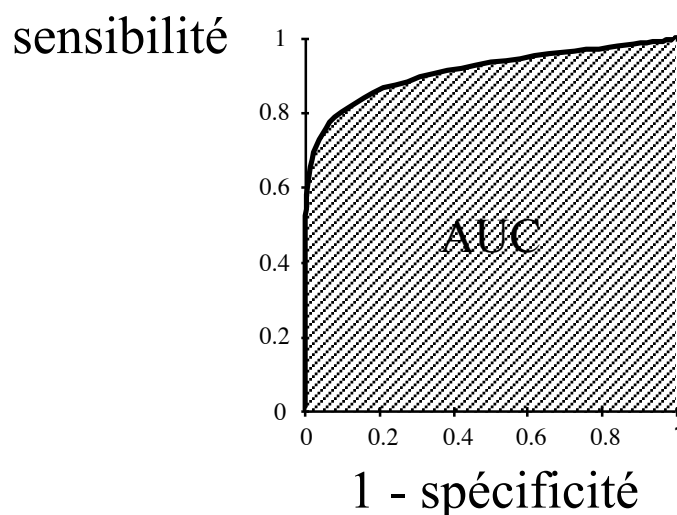


**indice 3 > indice 1
ou indice 3 \leq indice**

- Comparaison objective : réalisation d'un test d'hypothèse

H0 : même FVP quelle que soit FFP

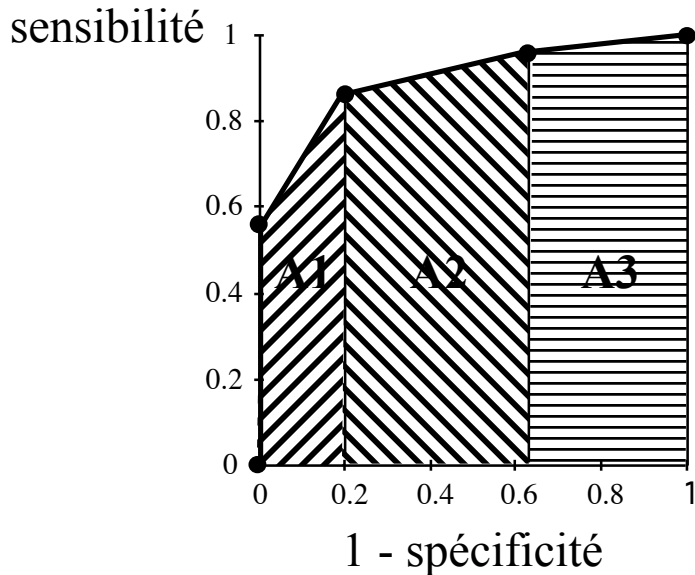
- Caractérisation de chaque courbe par son aire AUC
- Comparaison statistique des AUC



AUC = probabilité d'identifier correctement l'image avec anomalie quand une image avec et une image sans anomalie sont présentées simultanément à un observateur

Estimation de AUC : approche non paramétrique

- Approche trapézoïdale



$$W = \widehat{AUC} = A1 + A2 + A3$$

- $W = \text{statistique de Wilcoxon} = \frac{1}{n_{p+} \cdot n_{p-}} \sum_{i=1}^{n_{p+}} \sum_{j=1}^{n_{p-}} S(t_{p+}, t_{p-})$

$$\text{avec } S(t_{p+}, t_{p-}) = \begin{cases} 1 & \text{si } t_{p+} > t_{p-} \\ 0.5 & \text{si } t_{p+} = t_{p-} \\ 0 & \text{si } t_{p+} < t_{p-} \end{cases}$$

- $W = AUC$ si l'échelle de cotation présente un grain infini

$$\bullet \text{SE}(W) = \sqrt{\frac{W(1-W) + (n_{p+} - 1)(Q_1 - W^2) + (n_{p-} - 1)(Q_2 - W^2)}{n_{p+} \cdot n_{p-}}}$$

avec

$$Q_1 = \text{Prob}(t_{p+} > t_{p-} \text{ et } t'_{p+} > t_{p-})$$

$$Q_2 = \text{Prob}(t_{p+} > t_{p-} \text{ et } t_{p+} > t'_{p-})$$

Estimation de AUC : approche paramétrique

- Modèle binormal :

AUC = Az estimé à partir de l'ajustement des paramètres du modèle par maximisation de la vraisemblance

estimation conjointe de SE(Az)

Condition 1: rating

Total number of actually-negative cases = 58.

Total number of actually-positive cases = 51.

Data effectively collected in 5 categories.

Category 5 represents the strongest evidence of positivity.
(e.g., that the disease is present)

Response Data:

Category	1	2	3	4	5
Actually-Negative Cases	33	6	6	11	2
Actually-Positive Cases	3	2	2	11	33

[...]

```
=====
Final Estimates of the Binormal ROC Parameters
=====
```

Binormal Parameters and Area Under the Estimated ROC :

a = 1.6568

b = .7130

Area (Az) = .9113

Estimated Standard Errors of these Values:

Std. Err. (a) = .3121

Std. Err. (b) = .2162

Std. Err. (Az) = .0296

Approche non paramétrique vs paramétrique

Scores t attribués	1	2	3	4	5
P-	33	6	6	11	2
P+	3	2	2	11	33

- Approche non paramétrique

$$W = 0.893$$

$$SE(W) = 0.032$$

- Approche paramétrique

=====

Final Estimates of the Binormal ROC Parameters

=====

Area Under the Estimated ROC :

$$\text{Area (Az)} = .9113$$

Estimated Standard Error :

$$\text{Std. Err. (Az)} = .0296$$

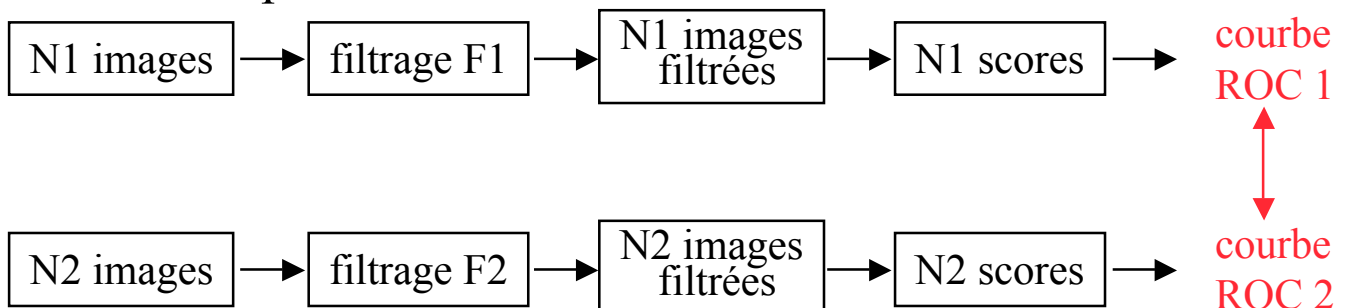
- $W < Az$ car échelle de cotation discrète
- $SE(W) > SE(Az)$, i.e. $SE(W)$ conservatif

Comparaison de 2 courbes ROC

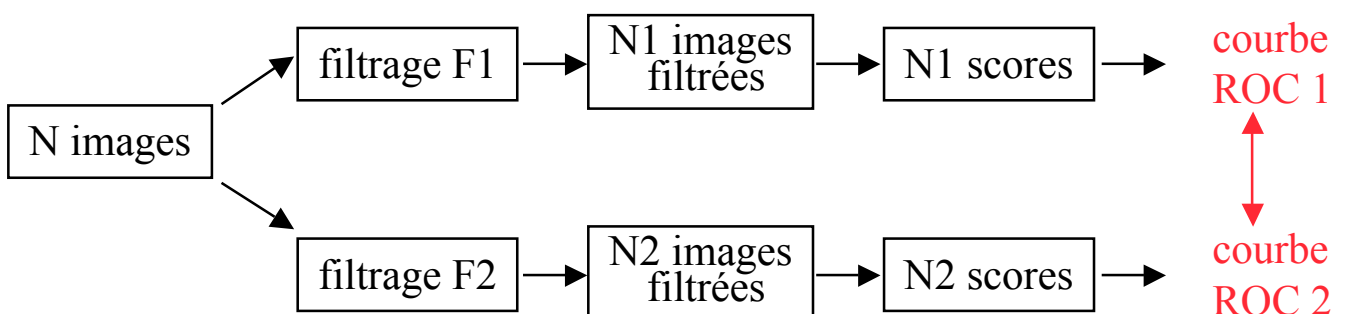
<u>COURBES ROC</u>	<u>APPROCHE</u>	
	non paramétrique	paramétrique
indépendantes	test z entre W_1 et W_2	test z entre Az_1 et Az_2
appariées	test z intégrant la corrélation entre W_1 et W_2	test z apparié entre Az_1 et Az_2

Comparaison de deux méthodes de filtrage F1 et F2

Indépendance



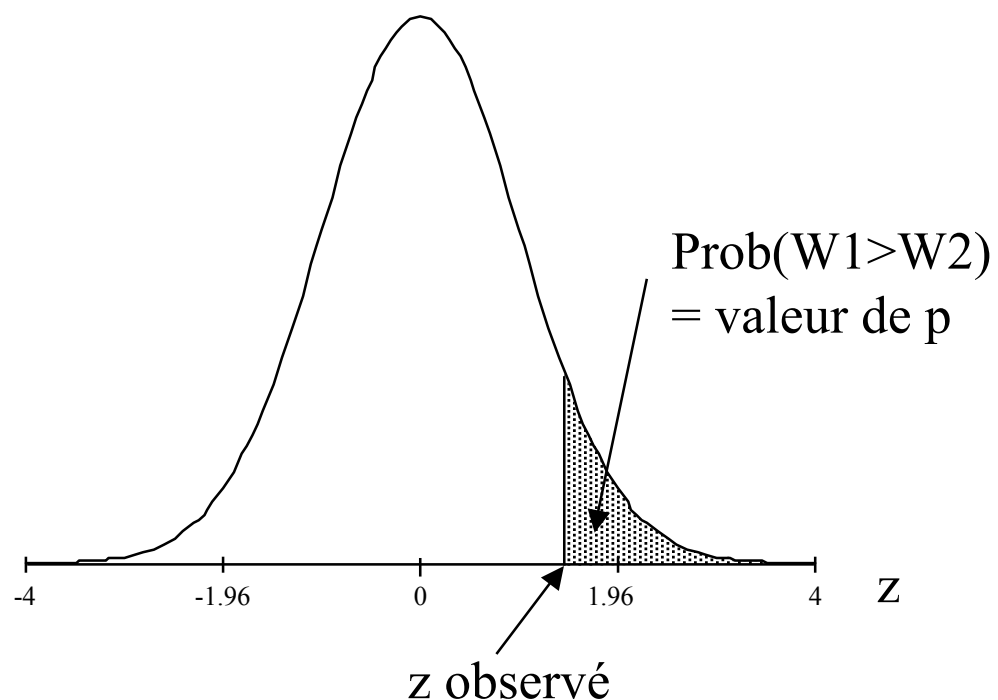
Appariement



Cas indépendant - non paramétrique

$$Z = \frac{W1 - W2}{\sqrt{SE(W1)^2 + SE(W2)^2}}$$

puis référence à une table de loi normale :



p correspond à la probabilité que l'on ait observé les données que l'on a (au travers de la valeur de z calculée) si H0 est vraie

Cas apparié - non paramétrique

$$Z = \frac{W1 - W2}{\sqrt{SE(W1)^2 + SE(W2)^2 - 2r SE(W1)SE(W2)}}$$

avec r = corrélation entre $W1$ et $W2$

- $r = f(r_+, r_-)$ avec

r_+ : corrélation des scores correspondant aux cas P+

r_- : corrélation des scores correspondant aux cas P-

- r_+ et r_- calculés par :

- coefficient de corrélation de Pearson

si les indices t_{p+} et t_{p-} sont des valeurs quantitatives variant continument

- coefficient tau de Kendall

si les indices t_{p+} et t_{p-} sont des scores

- r donné par la table (annexe 1) :

	$(W1+W2)/2$		
$(r_+ + r_-)/2$	0.700	...	0.975
0.02			
⋮			
0.90			

Cas indépendant - paramétrique

$$z = \frac{Az1 - Az2}{\sqrt{SE(Az1)^2 + SE(Az2)^2}}$$

Hypothèses :

- Sujets choisis aléatoirement parmi la population d'intérêt
- Sujets assignés aléatoirement à l'estimation d'un seul des deux indices t1 ou t2
- Indices 1 et 2 interprétés indépendamment
- Lois binormales sous-jacentes pour chaque indice
 - Maximisation d'une fonction de vraisemblance
 - Estimation de Az1, Az2, SE(Az1) et SE(Az2)
 - Test z

Cas apparié - paramétrique

$$Z = \frac{Az1 - Az2}{\sqrt{SE(Az1)^2 + SE(Az2)^2 - 2 \text{Covar}(Az1, Az2)}}$$

Hypothèses :

- Sujets choisis aléatoirement parmi la population d'intérêt
- Indices t1 et t2 calculés systématiquement pour tous les sujets
- Indices 1 et 2 interprétés indépendamment
- lois binormales sous-jacentes pour chaque indice
 - Maximisation d'une fonction de vraisemblance
 - Estimation de Az1, Az2, SE(Az1), SE(Az2), Covar(Az1, Az2)
 - Test z intégrant la corrélation entre les deux ensembles de scores

Impact de la technique de comparaison

Sujets sains

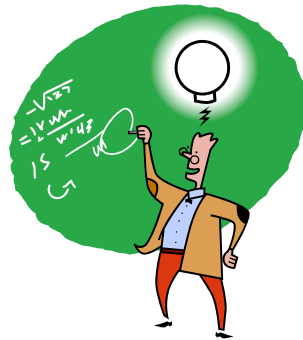
Scores t avec la modalité 1	Scores t avec la modalité 2					
	1	2	3	4	5	6
1	9	3	-	-	-	-
2	17	9	2	-	-	-
3	3	4	1	-	-	-
4	1	2	2	1	-	-
5	1	1	-	2	-	-
6	-	-	-	-	-	-

Sujets pathologiques

Scores t avec la modalité 1	Scores t avec la modalité 2					
	1	2	3	4	5	6
1	-	-	1	-	-	-
2	1	-	2	-	-	-
3	1	1	1	3	-	-
4	1	1	1	9	1	-
5	-	-	-	7	10	5
6	-	-	-	-	4	5

Test	AUC1	AUC2	r	z
NP, Ind	.883±.033	.932±.026	0	1.181
NP, App	.883±.033	.932±.026	.531	1.550
P, Ind	.895±.030	.941±.025	0	1.165
P, App	.897±.030	.940±.027	.537	1.571

Potentialités de l'approche ROC



- Peut traiter des cas partiellement appariés
- Possibilité de comparer plus de 2 courbes ROC (plus de deux indices, et/ou plus de 2 observateurs, et/ou plus d'une lecture par observateur) : voir annexe
- Mesures multiples du même paramètre par échantillon : approche Dorfman-Berbaum-Metz (1992)
- Absence de gold standard : travaux de Henkelman (1990) et Beiden (2000)
- Caractérisation ROC des performances de la combinaison de plusieurs paramètres (régression logistique)

Variantes de l'approche ROC

- LROC : Localized Response Operating Characteristic
 - 1 anomalie par image
 - détecter ET localiser l'anomalie dans une image
 - ordonnée : FVP (bien détectés et localisés),
abscisse : FFP (pour les images sans anomalie)
- FROC : Free Response Operating Characteristic
 - plusieurs anomalies possibles par image
 - ordonnée : FVP (bien détectés et localisés)
abscisse : FFP (nb moyen de FP par image)
 - potentiellement plus puissant que ROC ou LROC pour quantifier des performances de détection
- AFROC : Alternative FROC
 - plusieurs anomalies possibles par image
 - ordonnée : FVP (bien détectés et localisés) =
ordonnée de FROC
abscisse : fraction d'images contenant au moins
un FP = abscisse de ROC

Limite majeure :

Modèles complexes pour ajuster les observations
➡ pas de test statistique adapté à la comparaison
de deux courbes LROC ou de deux courbes FROC

Réf : Swensson RG, 1996

Considérations pratiques

- Nombre de cas à inclure
- Sélection des cas
- Ordre de lecture
- Gold standard imparfait
- Echelle de cotation
- Paramétrique ou non paramétrique ?
- Lectures multiples

Considérations pratiques ROC : nb de cas à inclure

Combien de cas nécessaire pour mettre en évidence une différence significative entre AUC1 et AUC2 ?

Hypothèses

- Connaissance approximative de AUC1 et AUC2
- Optionnellement, connaissance approximative du rapport des écarts types σ_s et σ_p entre les deux lois normales sous-jacentes

➡ si indice continu :
SE(AUC) donnée par Hanley et McNeil, 1992

➡ si indice = score sur échelle discrète :
SE(Az) donnée par Obuchowski, 1994



déduction de n_{p+} et n_p
pour un niveau de signification α donné

Considérations pratiques ROC : sélection des cas

- Le plus souvent : comparaison des performances des deux indices

➡ pour maximiser la puissance des tests, choisir des cas de difficulté intermédiaire :

$$AUC \sim 0,75 - 0,80$$

➡ conduire éventuellement une étude pilote pour identifier les cas de difficulté intermédiaire



Si les cas sont « trop faciles » : les 2 méthodes vont toujours conduire à la bonne classification

Si les cas sont « trop difficiles », les 2 méthodes vont aussi toujours conduire à une classification erronée ou hasardeuse

Considérations pratiques ROC : ordre de lecture

- Image indice 1 présentée systématiquement avant image indice 2

➡ biais potentiel

- Deux alternatives

➡ 1 avant 2 pour la moitié des observateurs
2 avant 1 pour l'autre moitié

➡ pour chaque observateur :
- 1 avant 2 pour la moitié des images
- 2 avant 1 pour l'autre moitié
- éloignement maximal des images

correspondant aux mêmes cas vues par les 2 indices
- ordre différent pour chaque observateur

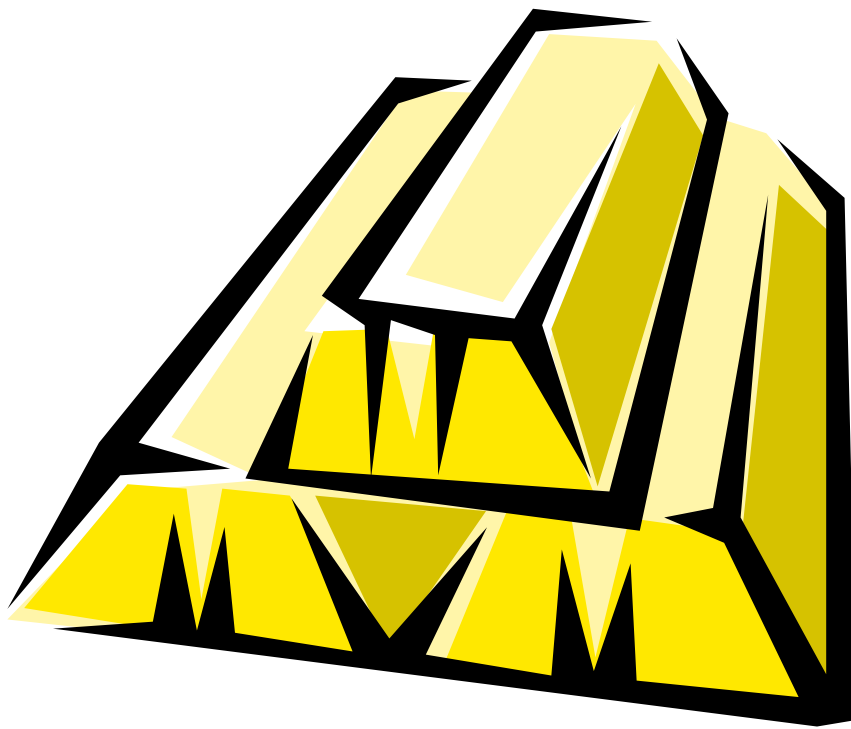
Exemple : 2 indices 1 et 2, 4 observateurs

➡ diviser les images en deux sous-groupes A et B de même effectif

➡ assigner un ordre pour chaque observateur :
(A1, B2, A2, B1)
(A2, B1, A1, B2)
(B1, A2, B2, A1)
(B2, A1, B1, A2)

Considérations pratiques ROC : gold standard

- Gold standard :
 - la bonne réponse
 - référence
 - ground truth
 - vérité terrain



Considérations pratiques ROC : gold std imparfait

- Deux cas
 - erreur gold standard non corrélée à l'erreur indice
 - erreur gold standard corrélée à l'erreur indice
- Non corrélation des erreurs :
 - ➡ courbe ROC comprimée vers la diagonale
 - ➡ AUC sous-estimée
 - ➡ sensibilité et spécificité systématiquement sous-estimées
- Corrélation des erreurs :
 - ➡ courbe ROC optimiste
 - ➡ AUC surestimée
 - ➡ sensibilité et spécificité systématiquement surestimées
- Que faire ?
 - ➡ utiliser une définition très stricte pour estimer la sensibilité
 - ➡ utiliser une définition moins rigoureuse pour estimer la spécificité
 - ➡ considérer des populations différentes pour estimer la sensibilité (forte prévalence) et la spécificité (faible prévalence)
 - ➡ possible correction des biais a posteriori si on sait si les erreurs gold standard - indice sont corrélées

Considérations pratiques ROC : échelle de cotation

- Nombre de catégories ?
 - ➡ précision accrue lorsqu'on passe de 5 à 10
 - ➡ au delà de 10, plus de gain substantiel
 - Format de cotation si plusieurs (A) types d'anomalies ?
 - format général : 1 score par image
absence ou présence d'une anomalie (avec degré de confiance associé) quelle qu'elle soit
exemple : anomalie 1 ou 2 ou 3 est :
 1. très certainement absente
 2. probablement absente
 3. possiblement absente
 4. probablement présente
 5. très certainement présente
 - format spécifique :
pour chaque type d'anomalie, absence ou présence cotée sur l'échelle de 1 à 5, d'où A scores par image
score le plus élevé retenu, d'où 1 score par image
- ➡ pas de différence significative entre les 2 formats si on s'intéresse seulement à la présence d'une anomalie, et pas à sa nature.
- ➡ si on limite l'analyse ROC aux images présentant un type d'anomalie, influence du format plus ambiguë

Réf : Rockette et al, 1990

Considérations pratiques ROC : paramétrique ou non ?

REGLES

- indice résultant de jugements d'observateurs et exprimé sur une échelle de cotation discrète
 - ➡ modèle binormal bien adapté
- indice continu
 - ➡ approche non paramétrique plus générale si les distributions sous-jacentes sont inconnues
- approche non paramétrique moins puissante que l'approche paramétrique

EN PRATIQUE

- données effectivement binormales
 - ➡ Az et SE pratiquement non biaisées que l'approche soit paramétrique ou non
 - données non binormales
 - ➡ estimées très fiables des AUC par les 2 approches (biais < 1% en NP, <2.5% en P)
 - ➡ tendance à surestimer SE avec les deux approches
- ➡ **CHOISIR LE PLUS PRATIQUE !**

Réf : Hajian-Tilaki et al, 1997

Considérations pratiques ROC : lectures multiples

REGLES POUR AMELIORER L'ESTIMATION ROC

- Si les observateurs présentent des performances voisines, plusieurs observateurs préférables à plusieurs lectures par un même observateur
- Réduction des variabilités d'autant plus importantes que les résultats issus des différents observateurs ou observations sont peu corrélés.
- Combinaison des scores puis estimation ROC

Exemple :

obs 1 :	scores	1	2	3	4	5				
obs 2 :	scores	1	2	3	4	5				
obs "1 et 2" :	scores	2	3	4	5	6	7	8	9	10

analyse ROC à partir des scores combinés

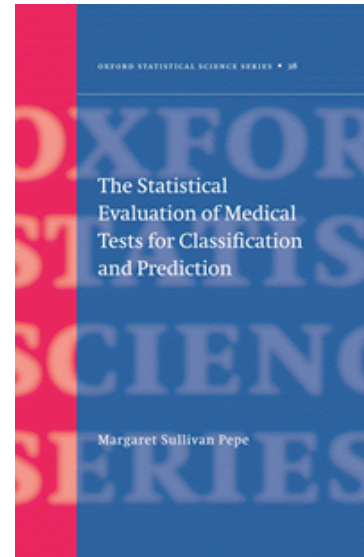
Gains à espérer :

1 obs : $Az = 0.836$

obs "1 et 2" : $Az = 0.860$

Réf : Metz et Shen, 1992

Pour en savoir plus



Nombreux programmes disponibles en ligne :

<http://www.bio.riccf.org/Research/ROC/>

http://xray.bsd.uchicago.edu/krl/roc_soft.htm

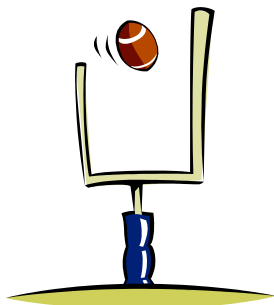
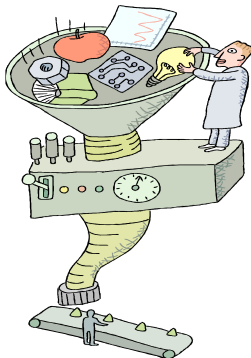
<http://www.mips.ws/>

Bibliographie :

<http://www.guillemet.org/irene/equipe4/ressources.html>

*The statistical evaluation of medical tests for
classification and prediction, MS Pepe, Oxford
University Press*

Choix de l'outil d'évaluation

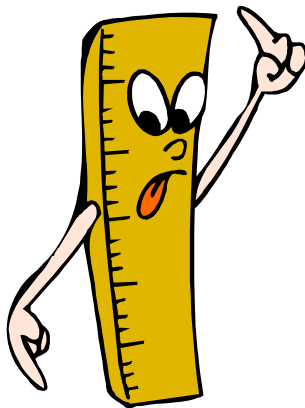


Quel type de tâche ?

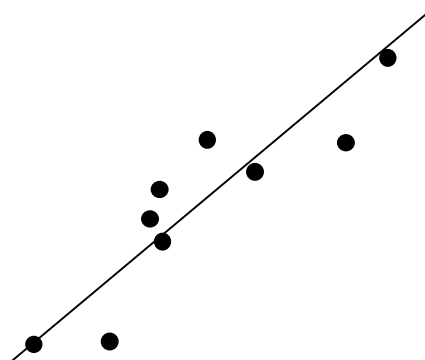
Classification
ou
estimation ?

Outils pour les tâches d'estimation

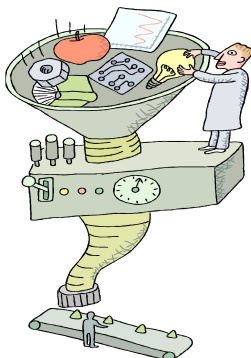
Biais et variabilité



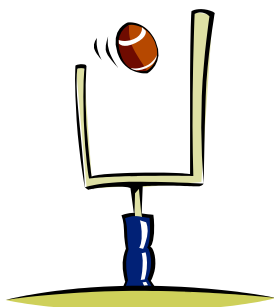
Corrélation



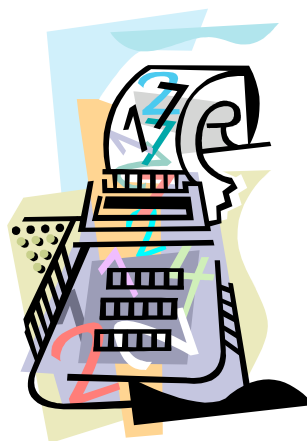
Tâches de classification : contexte général



Données quelconques

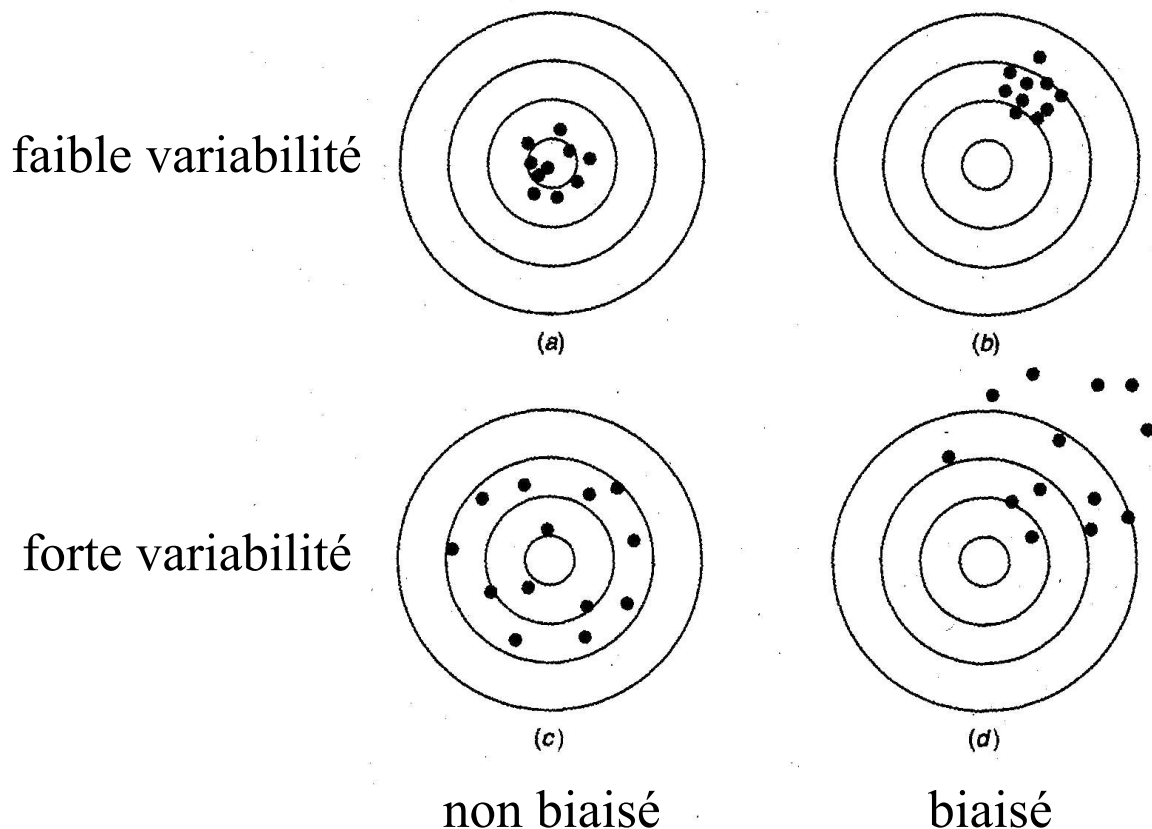


Tâche : extraire une valeur à partir d'un échantillon



Evaluation de la qualité d'une mesure

- Contexte : on cherche à caractériser les performances d'une méthode pour estimer un paramètre x
- Ces performances doivent être décrites par 2 grandeurs : le biais d'estimation, et la variabilité
- Biais : caractérise la distance moyenne entre la valeur estimée du paramètre et sa vraie valeur
- Variabilité : caractérise la dispersion des valeurs estimées pour une même valeur vraie



Tâches d'estimation : biais



Requièrent la connaissance de la vraie valeur du paramètre
Applicables seulement à des données parfaitement caractérisées



Figure de mérite : biais \pm écart-type
Tests d'hypothèse possibles

Plusieurs mesures du biais possibles :

$$\% \text{ erreur} = 1/N [\sum_{\text{observations}_i} (p_{i_estimé} - p_i) / p_i]$$

$$\% \text{ erreur absolue} = 1/N [\sum_{\text{observations}_i} |p_{i_estimé} - p_i| / p_i]$$

$$\text{erreur quadratique moyenne} = 1/N [\sum_{\text{observations}_i} (p_{i_estimé} - p_i)^2 / p_i^2]$$

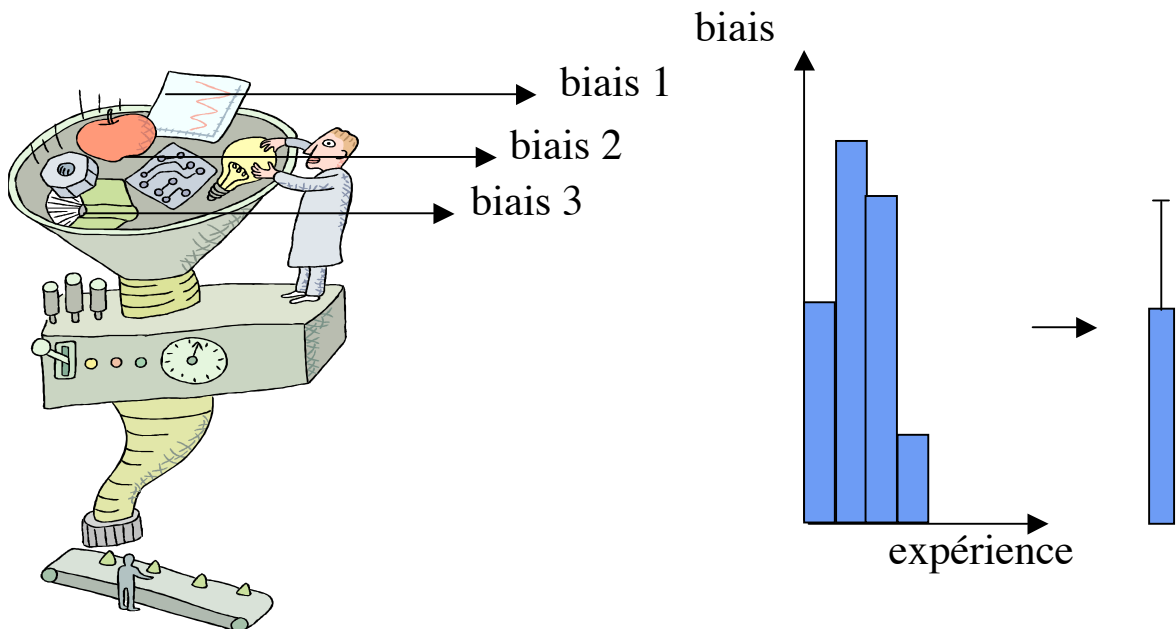
à choisir en fonction du contexte

Tâches d'estimation : variabilité



Tout résultat en terme de biais doit être accompagné d'une estimation de la variabilité du biais pour être interprétable

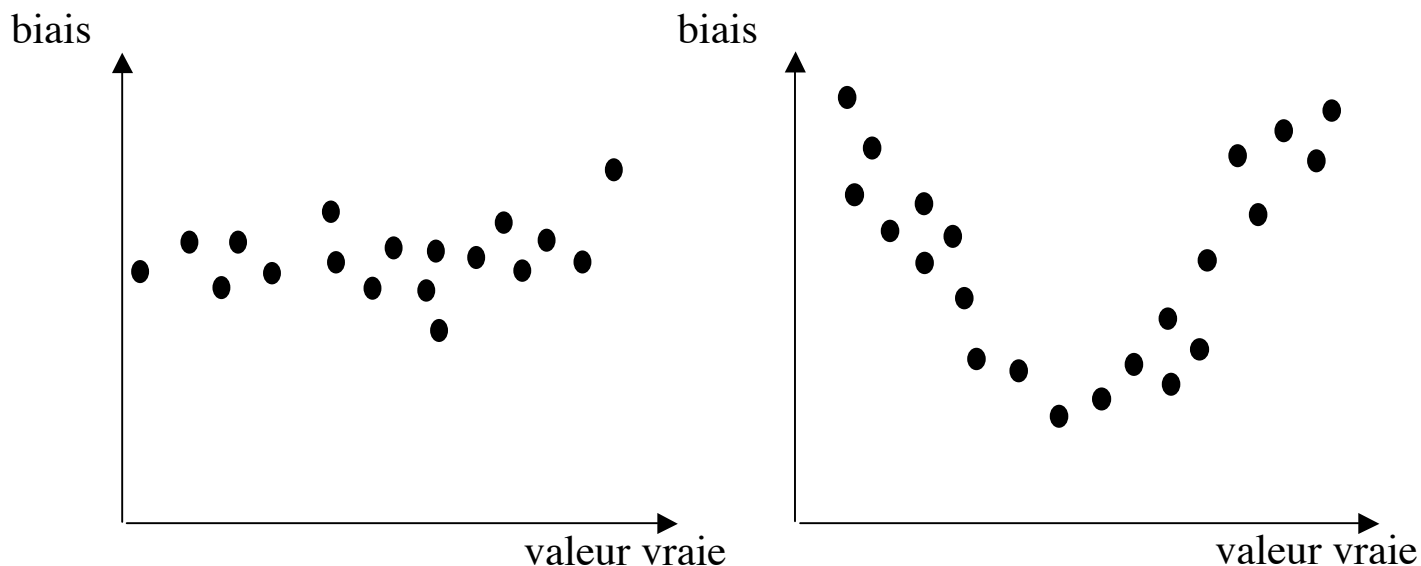
Attention, la variabilité doit être calculée à partir d'un grand nombre d'expériences :



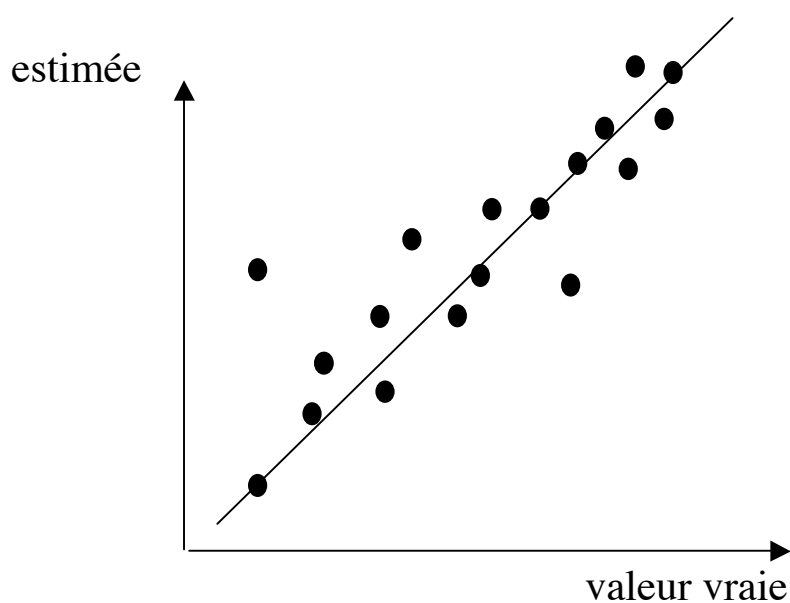
Si loi normale réaliste : écart-type des mesures

Sinon : bootstrap (*Efron et Tibshirani, An introduction to the bootstrap, Chapman and Hall*)

Insuffisance des mesures de biais et variabilité



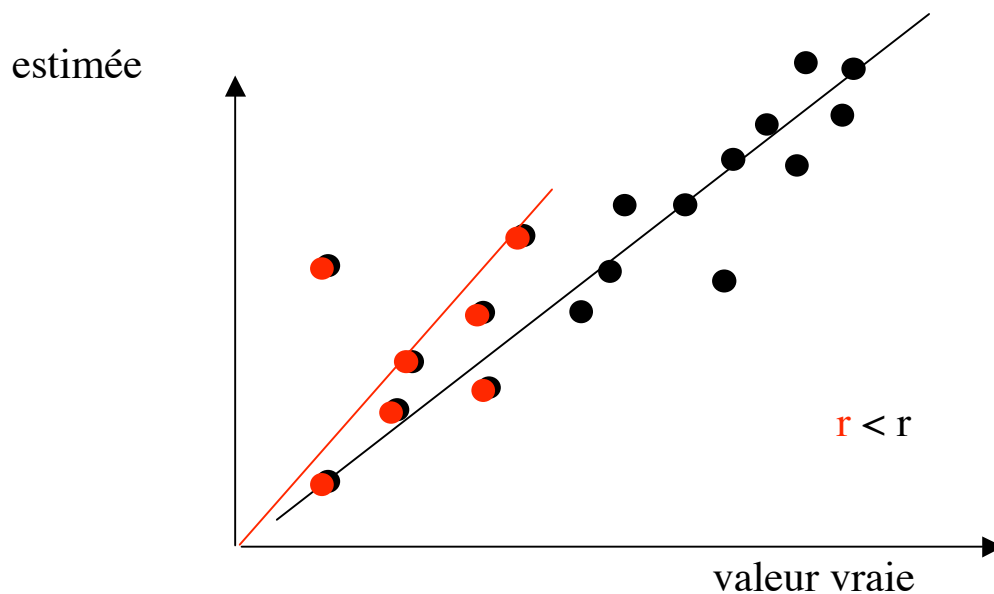
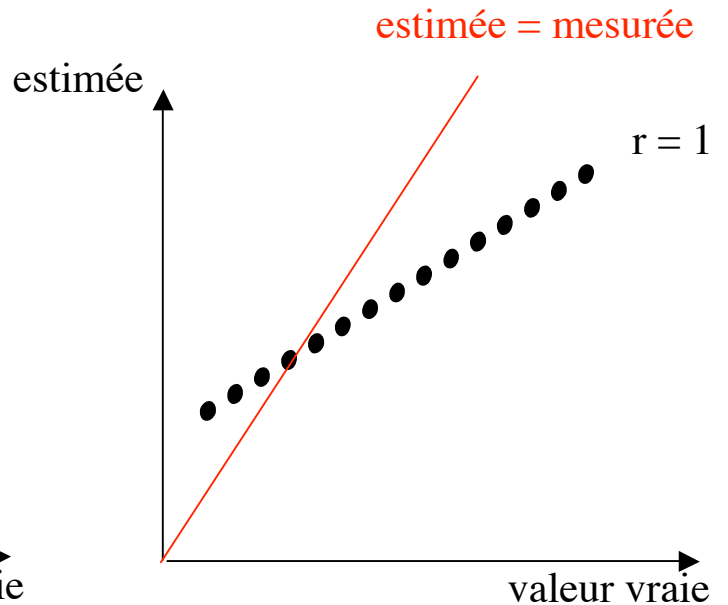
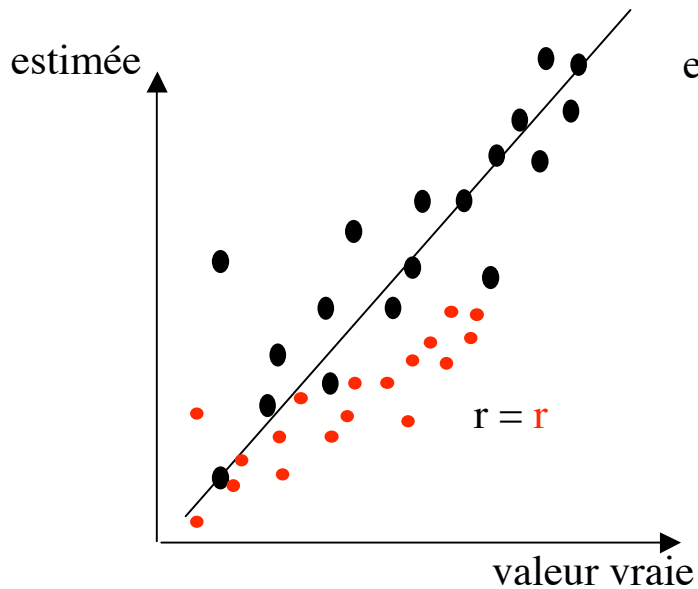
Evaluation plus complète :
la régression linéaire ?



Attention !

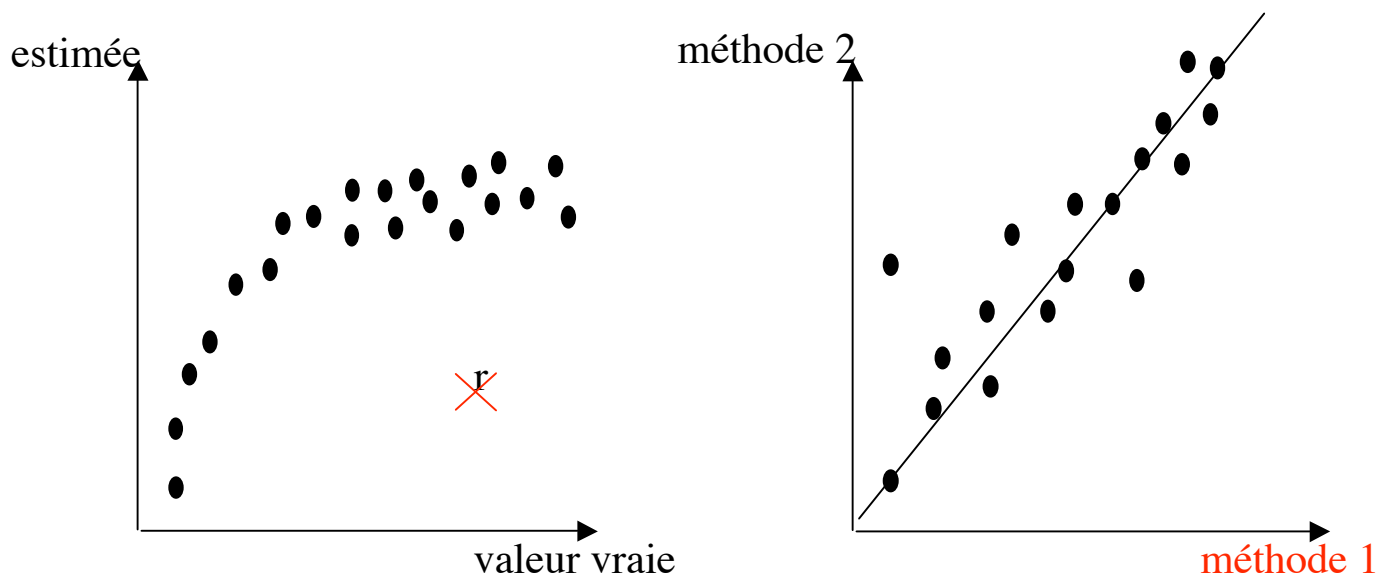
Limites de la régression linéaire (1)

r : coefficient de corrélation

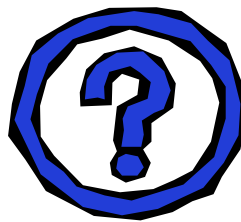


significativité ($p < 0.00\dots$) de r n'est pas pertinente !

Limites de la régression linéaire (2)



- * étude de la corrélation entre les deux méthodes, indépendamment du biais !
- * peu sensible



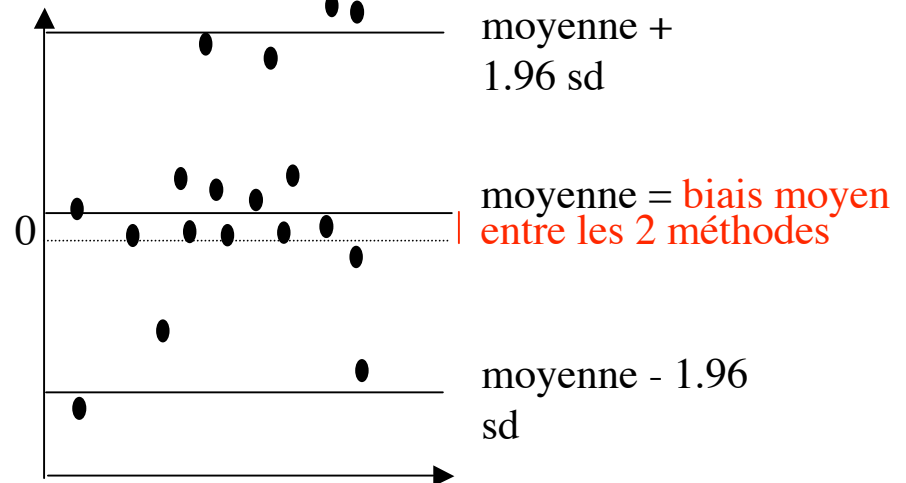
L'analyse de la corrélation linéaire entre estimée et valeur vraie est utile pour une interprétation correcte du biais moyen et de sa variabilité.

La caractérisation des performances d'une méthode ou la comparaison des performances de deux méthodes via le coefficient de corrélation est hasardeuse...

Absence de gold standard : Bland-Altman (1)

Évaluation de l'accord entre deux méthodes

(estimée m1 - estimée m2)



(estimée m1 + estimée m2)/2
meilleure estimée de la vraie valeur disponible

Réf : Bland and Altman. *Lancet*, 307-10, 1986.

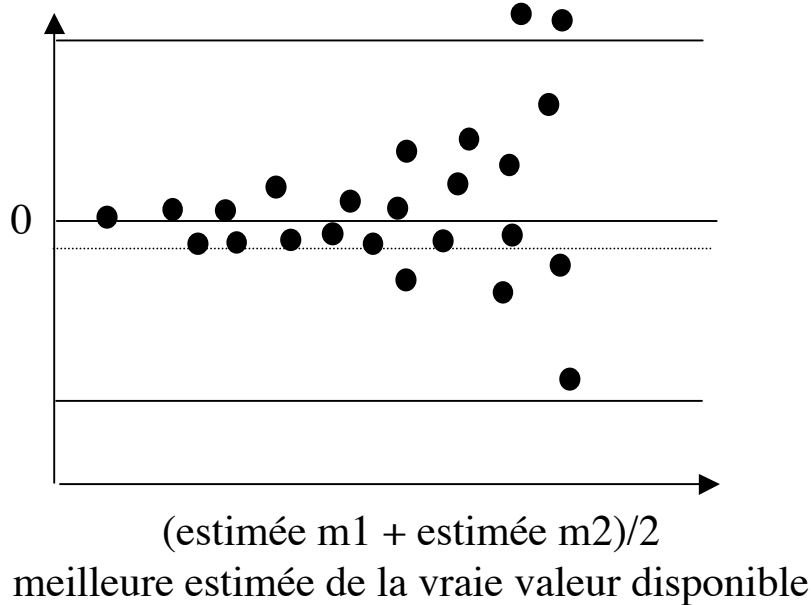


95% des différences sont comprises dans l'intervalle [moyenne - 1.96 sd ; moyenne + 1.96 sd]

L'étendue de cet intervalle doit permettre de conclure à l'interchangeabilité des méthodes ou non, **mais PAS au fait que l'une est moins biaisée que l'autre !**

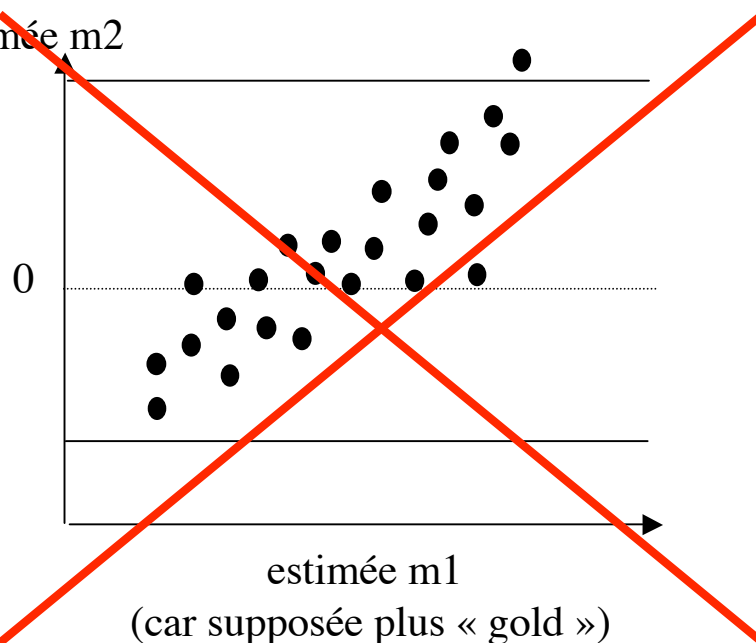
Absence de gold standard : Bland-Altman (2)

estimée m1 - estimée m2



Permet de détecter des différences systématiques entre les méthodes

estimée m1 - estimée m2



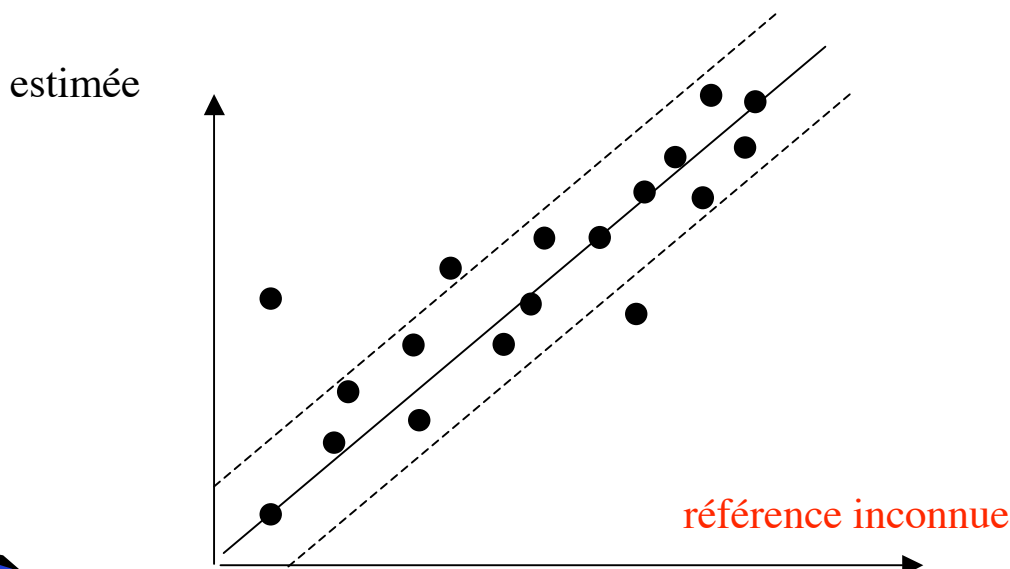
Réf : Bland and Altman. *Lancet*, 346: 1085-7, 1995.

Régression sans gold standard

- Hypothèses :
- * évaluation de la justesse des estimées résultant de la méthode m
 - * $p_{mi} = a_m p_i + b_m + \varepsilon_{mi}$ avec i indiquant le cas
 - * p_i inconnus
 - * ε_m suit une loi normale centrée (écart-type σ_m)
 - * p_i suit une loi de probabilité de forme connue (sans que les paramètres r de cette loi soient eux même connus, e.g., loi normale)

Méthode : Détermination des paramètres du modèle qui maximisent la vraisemblance des observables : a_m, b_m, σ_m, r

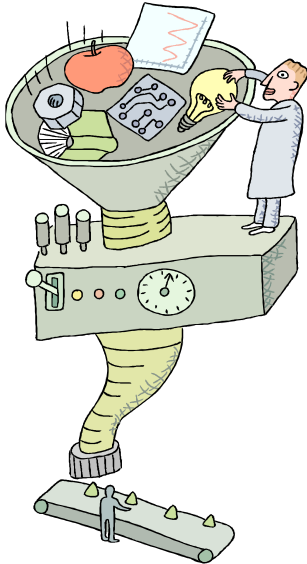
Figure de mérite : σ_m / a_m (le plus faible possible)



Permet de déterminer la méthode la plus fiable quantitativement en l'absence de gold standard

Régression sans gold standard

Caractéristiques de l'approche :



- * 2 méthodes sont suffisantes
- * robuste même lorsque l'hypothèse sur la distribution des \mathbf{p}_i est approximative
- * 25 cas au moins sont nécessaires

Généralisation de l'approche \$:

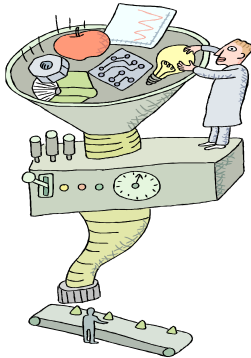
- * généralisation à une dépendance quadratique
- * nouvelle figure de mérite Q plus performante
- * intervalle de confiance bootstrap autour de Q

Réf: Kupinski et al. *Academic Radiology*, 9: 290-297, 2002

Hoppin et al. *IEEE Trans Med Imaging*, 21: 441-449, 2002

\$ manuscrit en préparation

Conclusion



Deux type de travaux d'évaluation :

- tâche de classification
- tâche d'estimation



Pour chaque type, méthodes d'évaluation rigoureuse :

- approches type ROC
- biais, variabilité



Même en l'absence de gold standard (cas le plus fréquent en évaluation clinique), possibilité d'effectuer une évaluation rigoureuse



Annexe 1 : table des coefficients r entre W1 et W2

Corrélation moyenne	AUC moyenne											
	.700	.725	.750	.775	.800	.825	.850	.875	.900	.925	.950	.975
.02	.02	.02	.02	.02	.02	.02	.02	.01	.01	.01	.01	.01
.04	.04	.04	.03	.03	.03	.03	.03	.03	.03	.02	.02	.02
.06	.05	.05	.05	.05	.05	.05	.05	.04	.04	.04	.03	.02
.08	.07	.07	.07	.07	.07	.06	.06	.06	.06	.05	.04	.03
.10	.09	.09	.09	.09	.08	.08	.08	.07	.07	.06	.06	.04
.12	.11	.11	.11	.10	.10	.10	.09	.09	.08	.08	.07	.05
.14	.13	.12	.12	.12	.12	.11	.11	.11	.10	.09	.08	.06
.16	.14	.14	.14	.14	.13	.13	.13	.12	.11	.11	.09	.07
.18	.16	.16	.16	.16	.15	.15	.14	.14	.13	.12	.11	.09
.20	.18	.18	.18	.17	.17	.17	.16	.15	.15	.14	.12	.10
.22	.20	.20	.19	.19	.19	.18	.18	.17	.16	.15	.14	.11
.24	.22	.22	.21	.21	.21	.20	.19	.19	.18	.17	.15	.12
.26	.24	.23	.23	.23	.22	.22	.21	.20	.19	.18	.16	.13
.28	.26	.25	.25	.25	.24	.24	.23	.22	.21	.20	.18	.15
.30	.27	.27	.27	.26	.26	.25	.25	.24	.23	.21	.19	.16
.32	.29	.29	.29	.28	.28	.27	.26	.26	.24	.23	.21	.18
.34	.31	.31	.31	.30	.30	.29	.28	.27	.26	.25	.23	.19
.36	.33	.33	.32	.32	.31	.31	.30	.29	.28	.26	.24	.21
.38	.35	.35	.34	.34	.33	.33	.32	.31	.30	.28	.26	.22
.40	.37	.37	.36	.36	.35	.35	.34	.33	.32	.30	.28	.24
.42	.39	.39	.38	.38	.37	.36	.36	.35	.33	.32	.29	.25
.44	.41	.40	.40	.40	.39	.38	.38	.37	.35	.34	.31	.27
.46	.43	.42	.42	.42	.41	.40	.39	.38	.37	.35	.33	.29
.48	.45	.44	.44	.43	.43	.42	.41	.40	.39	.37	.35	.30
.50	.47	.46	.46	.45	.45	.44	.43	.42	.41	.39	.37	.32
.52	.49	.48	.48	.47	.47	.46	.45	.44	.43	.41	.39	.34
.54	.51	.50	.50	.49	.49	.48	.47	.46	.45	.43	.41	.36
.56	.53	.52	.52	.51	.51	.50	.49	.48	.47	.45	.43	.38
.58	.55	.54	.54	.53	.53	.52	.51	.50	.49	.47	.45	.40
.60	.57	.56	.56	.55	.55	.54	.53	.52	.51	.49	.47	.42
.62	.59	.58	.58	.57	.57	.56	.55	.54	.53	.51	.49	.45
.64	.61	.60	.60	.59	.59	.58	.58	.57	.55	.54	.51	.47
.66	.63	.62	.62	.62	.61	.60	.60	.59	.57	.56	.53	.49
.68	.65	.64	.64	.64	.63	.62	.62	.61	.60	.58	.56	.51
.70	.67	.66	.66	.66	.65	.65	.64	.63	.62	.60	.58	.54
.72	.69	.69	.68	.68	.67	.67	.66	.65	.64	.63	.60	.56
.74	.71	.71	.70	.70	.69	.69	.68	.67	.66	.65	.63	.59
.76	.73	.73	.72	.72	.72	.71	.71	.70	.69	.67	.65	.61
.78	.75	.75	.75	.74	.74	.73	.73	.72	.71	.70	.68	.64
.80	.77	.77	.77	.76	.76	.76	.75	.74	.73	.72	.70	.67
.82	.79	.79	.79	.79	.78	.78	.77	.77	.76	.75	.73	.70
.84	.82	.81	.81	.81	.81	.80	.80	.79	.78	.77	.76	.73
.86	.84	.84	.83	.83	.83	.82	.82	.81	.81	.80	.78	.75
.88	.86	.86	.86	.85	.85	.85	.84	.84	.83	.82	.81	.79
.90	.88	.88	.88	.88	.87	.87	.87	.86	.86	.85	.84	.82

Annexe 2 : références bibliographiques

- Berbaum KS, Dorfman DD, Franken EA. Measuring observer performance by ROC analysis: indications and complications. *Invest Radiol*, 1989; 24: 228-233
- DeLong ER, DeLong DM, Clarke-Pearson DL. Comparing the areas under two or more correlated Receiver Operating Characteristic curves: a nonparametric approach. *Biometrics*, 1988; 44: 837-845
- de Vries DJ, King MA, Soares EJ, Tsui BMW, Metz CE. Effects of scatter subtraction on detection and quantitation in hepatic SPECT. *J Nucl Med*, 1999; 40: 1011-1023
- Gifford HC, King MA, de Vries DJ, Soares EJ. Channelized Hotelling and human observer correlation for lesion detection in hepatic SPECT imaging. *J Nucl Med*, 2000; 41: 514-521
- Gilland DR, Tsui BMW, Metz CE, Jaszczak RJ, Perry JR. An evaluation of maximum likelihood-expectation maximization reconstruction for SPECT by ROC analysis. *J Nucl Med*, 1992; 33: 451-457
- Gur D, King JL, Rockette HE, Britton CA, Thaete FL, Hoy RJ. Practical issues of experimental ROC analysis: selection of controls. *Invest Radiol*, 1990; 25: 583-586
- Hajian-Tilaki KO, Hanley JA, Joseph L, Collet JP. A comparison of parametric and nonparametric approaches to ROC analysis of quantitative diagnostic tests. *Med Decis Making*, 1997; 17: 94-102
- Hanley JA. The robustness of the “binormal” assumptions used in fitting ROC curves. *Med Decis Making*, 1988; 8: 197-203
- Hanley JA, McNeil BJ. The meaning and use of the area under a Receiver Operating Characteristic (ROC) curve. *Radiology*, 1982; 143: 29-36
- Hanley JA, McNeil BJ. A method of comparing the areas under Receiver Operating Characteristic curves derived from the same cases. *Radiology*, 1983; 148: 839-843
- Henkelman RM, Kay I, Bronskill MJ. Receiver Operating Characteristic (ROC) analysis without truth. *Med Decis Making*, 1990; 10: 24-29
- LaCroix KJ, Tsui BMW, Frey EC, Jaszczak RJ. Receiver Operating Characteristic evaluation of iterative reconstruction with attenuation correction in 99mTc-sestamibi myocardial SPECT images. *J Nucl Med*, 2000; 41: 502-513
- Metz CE. Some practical issues of experimental design and data analysis in radiological ROC studies. *Invest Radiol*, 1989; 24: 234-245
- Metz CE, Herman BA, Roe CA. Statistical comparison of two ROC-curve estimates obtained from partially paired datasets. *Med Decis Making*, 1998; 18: 110-121
- Metz CE, Shen JH. Gains in accuracy from replicated readings of diagnostic images: prediction and assessment in terms of ROC analysis. *Med Decis Making*, 1992; 12: 60-75
- Obuchowski NA. Computing sample size for Receiver Operating Characteristic studies. *Invest Radiol*, 1994; 29: 238-243
- Rockette HE, Gur D, Cooperstein LA, Obuchowski NA, King JL, Fuhrman CR, Tabor EK, Metz CE. Effect of two rating formats in multi-disease ROC study of chest images. *Invest Radiol*, 1990; 25: 225-229
- Swenson RG. Unified measurement of observer performance in detecting and localizing target objects on images. *Med Phys*, 1996; 23: 1709-1725
- Thibodeau LA. Evaluating diagnostic tests. *Biometrics*, 1981; 37: 801-804
- logiciel rokit : site www-radiology.uchicago.edu/sections/roc

Comparaison courbes ROC : appariement partiel

Sujets 1 à n_1	indice t_1 seulement
Sujets (n_1+1) à n_2	indice t_2 seulement
Sujets (n_2+1) à N	indices t_1 et t_2

Alternatives :

- considérer uniquement les sujets (n_2+1) à N
 - ➡ gaspillage et perte de puissance
- considérer tous les sujets mais ignorer

l'appariement

➡ perte de puissance

- utiliser un test gérant les données partiellement appariées

➡ test paramétrique seulement

Hypothèses :

- Echantillons appariés et non appariés issus de la même population
- Echantillons appariés et non appariés indépendants
- Indices 1 et 2 interprétés indépendamment
- lois binormales sous-jacentes pour chaque indice
 - ➡ maximisation d'une fonction de vraisemblance
 - ➡ estimation de Az_1 , Az_2 , $SE(Az_1)$, $SE(Az_2)$, covariance
 - ➡ test z intégrant la corrélation entre les données corrélées

Comparaison de plus de 2 courbes ROC

Situations possibles :

Nb d'indices à comparer	Nb d'observateurs	Nb de lectures par observateur
2	1	>1
2	>1	1
2	>1	>1
>2	1	1
>2	>1	1
>2	1	>1
>2	>1	>1

➡ A chaque situation, une procédure de test !

➡ Pas de consensus sur les procédures les plus appropriées

2 indices, plusieurs observateurs, 1 lecture (1)

Nb d'indices à comparer	Nb d'observateurs	Nb de lectures par observateur
2	$K > 1$	1

- Pour chaque observateur k :
calculer $Az1_k$ et $Az2_k$ (ou $W1_k$ et $W2_k$)
- Pour chaque observateur k :
calculer $\Delta_k = Az1_k - Az2_k$ (ou $\Delta_k = W1_k - W2_k$)
- Réaliser un test t de Student testant :
 $H_0 : \text{moyenne}(\Delta_k) = 0$

➡ Beaucoup de lecteurs nécessaires pour atteindre une puissance statistique correcte (test t)

➡ La conclusion est valable pour l'échantillon étudié seulement, donc s'assurer de la représentativité de l'échantillon : attention aux petits échantillons !

➡ Une courbe ROC moyenne pour chaque méthode peut être obtenue en moyennant (sur les observateurs) les valeurs $A1_k$ et $B1_k$ estimées par le modèle binormal :

$$A1 = \sum_k A1_k / K, \quad B1 = \sum_k B1_k / K,$$
$$A2 = \sum_k A2_k / K, \quad B2 = \sum_k B2_k / K,$$

Réf : Metz, 1989, exemple dans La Croix et al, 2000

2 indices, plusieurs observateurs, 1 lecture (2)

Nb d'indices à comparer	Nb d'observateurs	Nb de lectures par observateur
2	$K > 1$	1

- Pour chaque observateur k :
 ➡ calculer $Az1_k$ et $Az2_k$ (ou $W1_k$ et $W2_k$)
 - Pour chaque observateur k :
 tester $H0 : Az1_k = Az2_k$ (ou $H0 : W1_k - W2_k$)
 ➡ valeur de p pour chaque observateur k
 - Conclure :
 - Avec K observateurs, la différence moyenne entre $Az1$ et $Az2$ vaut ...
 - L'indice 1 s'est avéré significativement meilleur que l'indice 2 avec $p < 0.05$ pour ... observateurs sur K
- ➡ Pas de conclusion générale

Réf : Metz, 1989, exemple dans La Croix et al, 2000

M indices, 1 observateur, 1 lecture

Nb d'indices à comparer	Nb d'observateurs	Nb de lectures par observateur
M	1	1

- Utilisation de la statistique de Wilcoxon pour calculer W_1, W_2, \dots, W_M

- Calcul analytique de la matrice variance-covariance $(M \times M)$ \mathbf{S} du vecteur $\mathbf{W} = (W_1, \dots, W_M)$

- Expression d'une matrice \mathbf{L} de contraste linéaire correspondant à l'hypothèse à tester

exemples :

- indice 1 meilleur que la moyenne des indices 2 et 3 ?

$$\mathbf{L} = (1 \quad -0.5 \quad -0.5)$$

- indice 1 meilleur que indice 2 ou meilleur que indice 3 ?

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Calcul d'une statistique du $\chi^2 = f(\mathbf{L}, \mathbf{S})$ et comparaison à la valeur critique

➡ approche non paramétrique, test apparié

Réf et exemple : De Long et al, 1988

M indices, K observateurs, 1 lecture (1)

Nb d'indices à comparer	Nb d'observateurs	Nb de lectures par observateur
M	K	1

- pour chaque observateur k :
calculer les Az_{m_k} (ou W_{m_k})
- pour chaque observateur k :
tester $H_0 : Az_{m_k} = Az_{m'_k}$ (ou $H_0 : W_{m_k} - W_{m'_k}$) pour
les couples de méthodes m et m' d'intérêt
➡ valeur de p pour chaque observateur k et chaque
couple (m, m')

OU

- pour chaque observateur k :
calculer les Az_{m_k} (ou W_{m_k})
- pour chaque observateur k :
calculer $\Delta_{mm',k} = Az_{m_k} - Az_{m'_k}$ (ou $\Delta_k = W_{m_k} - W_{m'_k}$)
- réaliser des tests t de Student testant :
 $H_0 : \text{moyenne}(\Delta_{mm',k}) = 0$

Réf et exemple : Gilland et al, 1992

M indices, K observateurs, 1 lecture (2)

Nb d'indices à comparer	Nb d'observateurs	Nb de lectures par observateur
M	K	1

- pour chaque observateur k :
calculer les Az_{m_k} (ou W_{m_k})
- analyse de variance à 2 critères de classification (2-way ANOVA) pour tester H_0 :
tous les Az_m sont équivalentes (H_1 : les indices diffèrent entre eux)
- si H_0 est rejeté :
test de Scheffé de comparaisons multiples appariées

Réf et exemples : de Vries et al, 1999, Gifford et al, 2000