Математический анализ

Видео 1. Предел числовой последовательности

Числовая послед-ть — функция натурального аргумента

$a_1, a_2, \dots a_n$

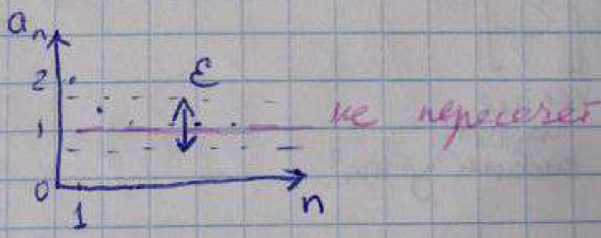
арифм. прогрессия

$a_n = a_{n-1} + d$ рекуррентное соотношение

(d — разность прогрессии)

n-й член послед-ти выражается через предыдущие члены

$a_n = \dfrac{n+1}{n}$



$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$

Определение предела

если для любого числа ε существует (найдется) ( ) который зависит от ε, такой что

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon):$

$$|a_n - a| < \varepsilon, \ n > N(\varepsilon)$$

Пределом последовательности a_n наз-ся число a, если для любого числа ε положительности найдется такой номер N, который зависит от ε, такой что начиная с этого члена все члены последовательности лежат внутри этого коридора (модуль $|a_n - a| < \varepsilon$)

Все члены послед-ти удовлетвор. этому соотношению, начиная с номера $\geq N(\varepsilon)$

$$\left|\underbrace{\frac{n+1}{n}}_{=a_n} - \underbrace{1}_{\text{подразумеваемый предел}}\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow$$

При — выполняется, т.к $n > 0$

$$n > \frac{1}{\varepsilon}$$ как $N(\varepsilon)$

$$N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$$

целая часть?! сколько угодно?

Докажем, что при $a = \frac{2}{3}$ — предел $\Rightarrow$

$$a_n = \frac{2n}{3n+1}, \quad a = \frac{2}{3}$$

$$\left|\frac{2n}{3n+1} - \frac{2}{3}\right| = \left|\frac{6n - 6n - 2}{(3n+1)\cdot 3}\right| = \frac{2}{(3n+1)\cdot 3} < \varepsilon \Rightarrow$$

$3n+1$

выбираем $N(\varepsilon)$

Если ... вер...

$n > N$

Какой ...

пред...

$\lim\limits_{n \to \infty}$

$\lim\limits_{n \to \infty}$

$$3n+1 > \frac{2}{3\varepsilon} \Rightarrow n > \left(\frac{2}{3\varepsilon} - 1\right)\cdot\frac{1}{3}$$

выбираем

$$N(\varepsilon) = \left[\left(\frac{2}{3\varepsilon} - 1\right)\cdot\frac{1}{3}\right] + 1$$

почему целая часть и пот. добавили 1?

Если ↓ верно

$n > N(\varepsilon)$, мы видим, что $N(\varepsilon) > n$

Какого это доказывает, что $\frac{2}{3}$ - это предел?

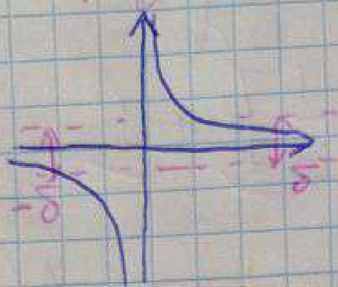
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

0 когда в n ∞

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n-8}{3n+4} \overset{/n}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{5-\frac{8}{n}}{3+\underbrace{\frac{4}{n}}_{0}} = \frac{5}{3}$$

Видео 2. Предел функции

$y = \frac{1}{x}$



Предел д/ $+\infty$

1) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A \Longleftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 :$

$|f(x) - A| < \varepsilon, \ x > \delta(\varepsilon)$

2) Предел д/ $-\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A \Longleftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0$

$|f(x) - A| < \varepsilon, \ x < -\delta(\varepsilon)$

Проверим, что 0 – предел $\Rightarrow$

Должно быть не бол-во, а допущение

должно быть < чем ε

$\left|\frac{1}{x} - 0\right| = \left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{x} < \varepsilon \Rightarrow x > \frac{1}{\varepsilon} = \delta(\varepsilon)$

При $x > \delta(\varepsilon)$ выполняется п. 1 $\Rightarrow$ 0 -

предел действит-но

Предел точки

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : |f(x) - A| < \varepsilon,$$

$$|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$$

Решение

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$$

Если мы стремимся к 0 справа (+), то $+\infty$, а если стрем к 0 слева (−), то $-\infty$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2} = \left(\frac{0}{0}\right) - ?$$ Неопределённость

$X_n = \frac{1}{n}$ - ограниченная

1 - граница

$M = 1 > 0$

$|x_n| \le 1$, $n \in N$

Видео 3. Раскрытие неопределенностей

$\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$ Неопределенности

1. $\frac{0}{0}$ Избавиться от превращения в 0

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}(x-1)} = 4$$

$x_1 = 2$ $x_2 = 1$

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = q \\ x_1 + x_2 = -p \end{cases}$$ Теорема Виета при $x^2 + px + q = 0$

$D = b^2 - 4ac$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-7x+10}{x^3-8}=\lim_{x\to2}\frac{(x-5)\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)}=$$

$$=\frac{-3}{12}=-\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-5x+4}{(x-1)^2}=\lim_{x\to1}\frac{\cancel{(x-1)}(x-4)}{(x-1)^2}=$$

$$=\frac{x-4}{x-1}=\infty$$

! хотя $\frac{-3}{0}$, но это не 0, а стремление к 0

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{\sqrt{x+2}-2}$$

домножаем числитель и знаменатель на сопряженное числителе и знаменателе

(то же выражение, но с другим знаком + к −)

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{\sqrt{x+2}-2}\cdot\frac{\sqrt{x+2}+2}{\sqrt{x+2}+2}\cdot\frac{\sqrt{x+7}+3}{\sqrt{x+7}+3}=$$

$$=\cancel{\lim_{x\to2}\frac{(\sqrt{x+7}-3)(\sqrt{x+2}+2)}{x+2-4}}=$$

$$\lim_{x\to2}\frac{(x+7-9)(\sqrt{x+2}+2)}{(x+2-4)(\sqrt{x+7}+3)}=\lim_{x\to2}\frac{\cancel{(x-2)}(\sqrt{x+2}+2)}{\cancel{(x-2)}(\sqrt{x+7}+3)}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}+2}{\sqrt{x+7}+3}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

2. $\frac{\infty}{\infty}$

Делим на max степ X в знаменателе

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7-4x+5x^2}{1+2x+3x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{7}{x^2}-\frac{4}{x}+5}{\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{0}+\underbrace{\frac{2}{x}}_{0}+3}=\frac{5}{3}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-7x^2+6}{11x^3-28x^2+5x+1}=\frac{2}{11}$$

Если сверху и снизу одинаковая max степень X, то мы не смотрим на другие слагаемые, они все будут стремиться к 0. Поэтому оставляем переменные при max степ X и считаем

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2x^2+1}{\underbrace{x^2}_{max}+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-2+\frac{1}{x^2}}{1+\underbrace{\frac{2}{x^2}}_{0}}=\infty$$

NB на не на max степень x в знаменателе?

пол. max x^2?

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+5}{x^3-x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{5}{x^2}}{x-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=0$$

3. $\infty - \infty$ Привести к какой-либо дроби

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt{x^2+4}-x\right) \cdot \frac{\sqrt{x^2+4}+x}{\sqrt{x^2+4}+x} =$$

$$=\lim_{x\to\infty} \frac{x(x^2+4-x^2)}{\sqrt{x^2+4}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{4x}{\sqrt{x^2+4}+x} \begin{array}{l} |:x \\ |:x \end{array}$$

$$=\lim_{x\to\infty} \frac{4}{\dfrac{\sqrt{x^2+4}+x}{\sqrt{x^2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{4}{\sqrt{1+\underbrace{\frac{4}{x^2}}_{0}}+1} = 2$$

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^3}\right) = \lim_{x\to1} \frac{(\cancel{1}+x+x^2)-\cancel{1}}{\underbrace{(1-x)(1+x+x^2)}_{=(1^3-x^3)}} =$$

$$=\lim_{x\to1} \frac{x^2+x}{(1-x)(1+x+x^2)} = \frac{2}{0} = \infty$$

Видео 4. Замечательные пределы

$$\lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad и \quad \lim_{x\to0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \approx 2,718281828$$

2-й замечат. предел помогает раскрыть неопределенность вида 1^{∞}

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\overset{\text{1 замеч. пр.}}{\sin x}}{\cos x\cdot x}=1$$

$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1$ тоже замеч. предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg3x}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{tg3x\cdot 3x\cdot 2x}{3x\cdot \sin 2x\cdot 2x}=1,5$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{x\cdot\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 3x}{x\,\cancel{\sin 3x}}\Big|^{\cdot 3}_{\cdot 3}=$$

$1-\cos 6x = \cancel{\cos^2 3x-\sin^2 3x} = 1-2\sin^2 3x$

$$=\frac{6\sin 3x}{3x}=6$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(2(x-1))}{x^2-7x+6}=\lim_{x\to 1}\frac{\sin(2(x-1))}{(x-1)(x-6)}\Big|^{2}_{2}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2\sin(2(x-1))}{2(x-1)(x-6)}=\lim_{x\to 1}\frac{2}{x-6}=-0,4$$

Д/з 2-го замеч. предела 1^∞

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+\overset{-1+3}{2}}{3x-1}\right)^{4x-1} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{3x-1}\right)^{\frac{3x-1}{3}\cdot\frac{3}{3x-1}\cdot(4x-1)} = e^4$$

$\Rightarrow 1^\infty$

куда дели -3 и -1?

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+\overset{-1+2}{1}}{2x-1}\right)^{3x+1} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x-1}\right)^{\frac{2x-1}{2}\cdot\frac{2}{2x-1}\cdot(3x+1)} =$$

$\Rightarrow 1^\infty$

$$= \cancel{\lim_{x\to\infty}}\; e^3$$

опять преобразов. $+2$ и -1

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{2x+7}\right)^{x} =$$ Проверяем вида ли он 1^∞, нет $\left(\frac{1}{2}\right)^\infty \Rightarrow$ не 2-й замеч. предел $\Rightarrow$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{2x+7}\right)^{x} = \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases}$$

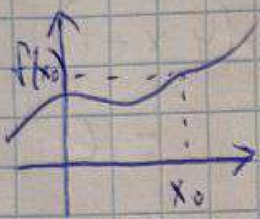
если $x\to+\infty$, то $\left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty}\to 0$

если $x\to-\infty$, то $\left(\frac{2}{1}\right)^{\infty}\to\infty$

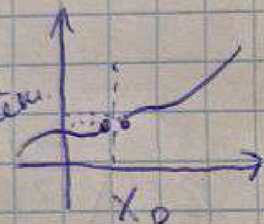
дробь перевернулась

Видео 5 Непрерывность функции

$y = f(x)$ - непрерывная в x_0



непрерыв.



прерывная

Если $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ левый предел $=$ $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ правый предел $= f(x_0)$

, то ф-ция непрерывная

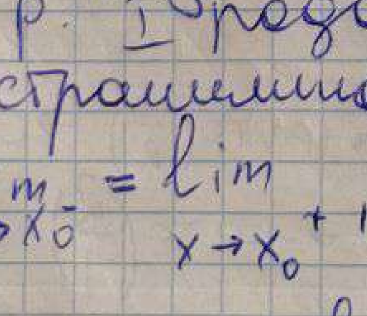
Точки разрыва

I рода | II рода

Т.р. I рода

1) Устранимые

$\lim\limits_{x \to x_0^-} = \lim\limits_{x \to x_0^+}$, f не определена в x_0

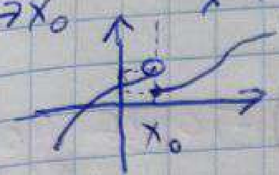


Т.р. II рода

lim не $\exists$, либо $= \infty$

2) Типа „скачок"

$$\lim_{x \to x_0^-} \neq \lim_{x \to x_0^+}$$



$$f(x) = \begin{cases} x+4, & x < -1 \\ x^2+2, & -1 \le x < 1 \\ 2x, & x \ge 1 \end{cases}$$

тут разрывы?

$x_0 = -1$ – точка непрерывности, т.к левый предел = 3, правый предел = 3 и в точке самой $f = 3$

$$\lim_{x \to -1-0} f(x) = \lim_{x \to -1-0} (x+4) = 3$$ (точка чуть левее, чем -1) левый предел

$$\lim_{x \to -1+0} f(x) = \lim_{x \to -1+0} (x^2+2) = 3$$ (точка чуть правее чем -1) правый предел

$$f(-1) = x^2+2 = 3$$

подставляем туда, куда входит -1

$x_0 = 1$ – точка разрыва I рода (скачок)

$$\lim_{x \to 1-0} (x^2+2) = 3$$ левый предел

$$\lim_{x \to 1+0} 2x = 2$$ правый предел

$f(1) = 2$ - конечная ф-ция в точке

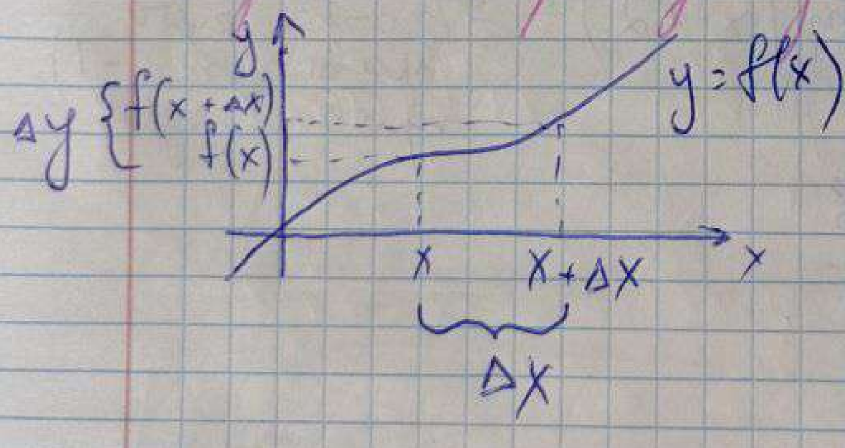
$$f(x) = 2^{\frac{1}{x-3}}$$

$x_0 = 3$ (т.к. она плохая) - точка разрыва II рода!

$$\lim_{x \to 3-0} 2^{\frac{1}{x-3}} = 0 \quad \Big| \quad 2^{\overset{-\infty}{\frac{1}{-0}}} = 2^{-1\cdot\infty} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\infty} = 0$$

$$\lim_{x \to 3+0} 2^{\frac{1}{x-3}} = +\infty \quad \Big| \quad 2^{\frac{1}{+0}} = 2^{\infty} = +\infty$$

Видео 6. Производные



Δx - приращение аргумента

$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ - приращение функции

$\Delta x \to 0$

$\cancel{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$

$$y' \cancel{\frac{dy}{dx}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) = y'$$

$$\boxed{f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$$

<u>Производная ф-ции</u> – это предел отношения приращения ф-ции и приращению аргумента, когда это приращение стремится к 0.

$$f(x) = x^2$$

$$f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^2$$

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^2 - x^2 =$$

$$= \Delta x(2x + \Delta x)$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}(2x+\Delta x)}{\cancel{\Delta x}} = 2x$$

именно Δx

1) $y = C$

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = C - C = 0$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0 \Rightarrow C' = 0$$

2) $y = \sin x$, $f(x+\Delta x) = \sin(x+\Delta x)$

$$f(x+\Delta x) - f(x) = \sin(x+\Delta x) - \sin x =$$

$$= 2\sin\frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\frac{2x+\Delta x}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

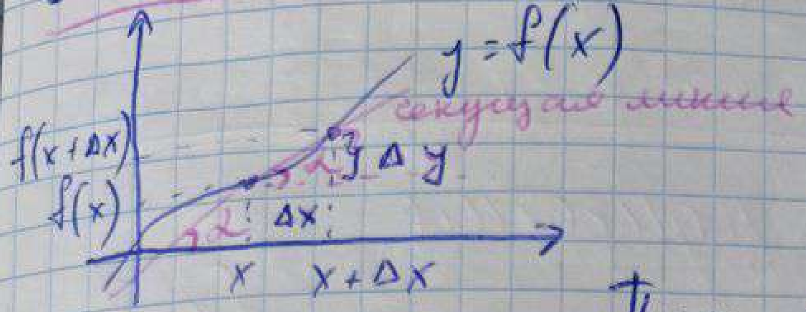
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{2}\sin\frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(\frac{2x+\Delta x}{2}\right)}{\cancel{2} \cdot \frac{\Delta x}{2}} = \cos x$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

Физический смысл производной

$S'(t) = v(t)$ – скорость изменения той или иной ф-ции

Геометрический смысл производной



$$tg\,\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

При стремлении $x+\Delta x$ к x, то есть $\Delta x \to 0$ секущая линия становит касательной в 1 точке

$f'(x) = tg\,\alpha = K$ - угол наклона касательной, проведенной к этой точке

тангенс угла наклона