Irene Turco

Análisis Matemático I
Parcial 1

20/12/20
1/11

1.
Dominio:
es el conjunto de números que cumplen la sustitución (tabulación) de una regla de correspondencia $f(x)=y$ este conjunto llamado dominio está ubicado en el eje "x" (ordenadas)

Expresión: Domf o Df.

$$Domf = \{x \in \mathbb{R} / \exists\, y = f(x) \in \mathbb{R}\}.$$

Se llama dominio de f al subconjunto de $\mathbb{R}$ donde la función está definida

Rango:
Es el conjunto de números que depende de la sustitución (tabulación) de los valores que puede tomar "x", es decir del dominio. Este número es llamado "rango" y está ubicado en el eje "y" (absisas.

Expresión: Ranf o R_f.

Regla de Correspondencia:
al definir una función matemática, lo que se hace es establecer el medio por el cual se deben realizar las correspondencias entre dos conjuntos, la función en sí misma, por lo tanto, actúa como regla de correspondencias.
En la función, formado por los pares ordenados (x,y), para cada valor de "x" sólo puede corresponder un valor en "y".

Expresión: $f(x)=y$
$x \rightarrow$ variable independiente
$y \rightarrow$ variable dependiente.

20/12/20
2/ M

2.

a) $f(x) = \frac{1}{x-10}$ Dominio $(-\infty ; 10) \cup (10 ; \infty^+)$

$x - 10 = 0$

$\boxed{x = 10}$

b) $f(t) = \sqrt{16 - t^2}$ Dominio $[-4, 4]$.

$16 - t^2 = 0$

$-t^2 = 16$

$t = \sqrt{16}$

$t = \pm 4$

c) $f(x) = \frac{x-3}{2}$ Dominio $= \mathbb{R}$ $(-\infty ; \infty^+)$

d) $g(x) = \sqrt{x}$ Dominio $= +\mathbb{R}$ $[0, \infty+)$

e) Evalue

$(f + g)(x) =$

$f(x) + g(x)$

$(f+g)(x) = \frac{x-3}{2} + \sqrt{x}$

$(f+g)(x) = \frac{x - 3 + 2\sqrt{x}}{2}$

$(f+g)(x) = \frac{x + 2\sqrt{x} - 3}{2}$ Dominio $[0, \infty+)$

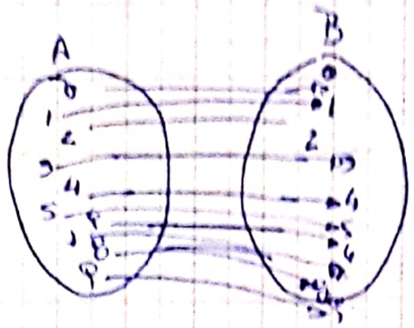
2)
a)

Dominio

A: {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

Imagen

B: {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}



Si, es una función

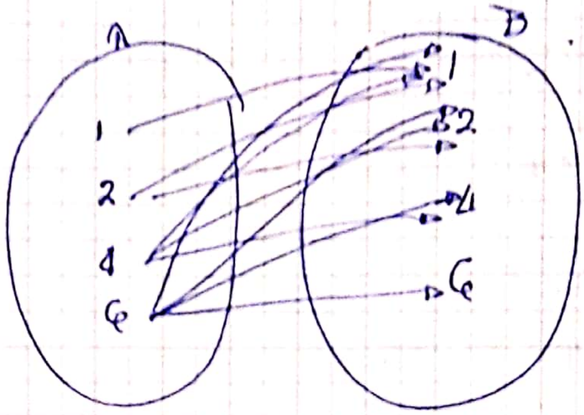
b)

Dominio:

A: {1, 2, 2, 4, 4, 4, 6, 6, 6, 6}

Imagen:

B: {1, 1, 2, 1, 2, 4, 1, 2, 4, 6}



No es una función, es una relación.

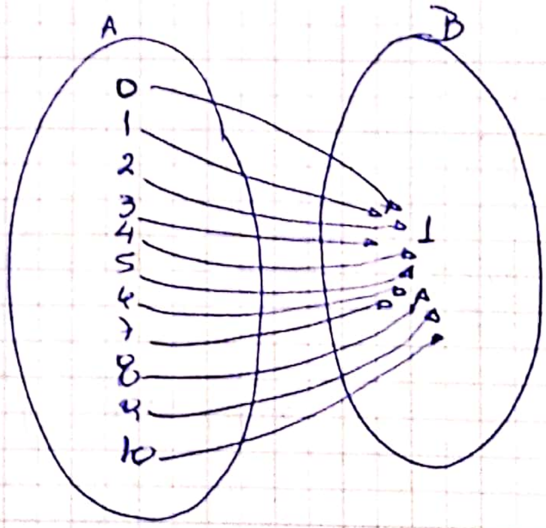
c)

Dominio

A: {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

Imagen

B: {1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1}



$\boxed{y = 1}$

R// x

Es una función

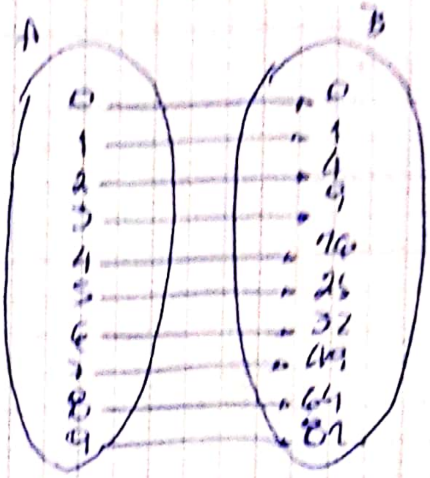
Escaneado con CamScanner

21/12/20
3/11

d)
Dominio
A {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}

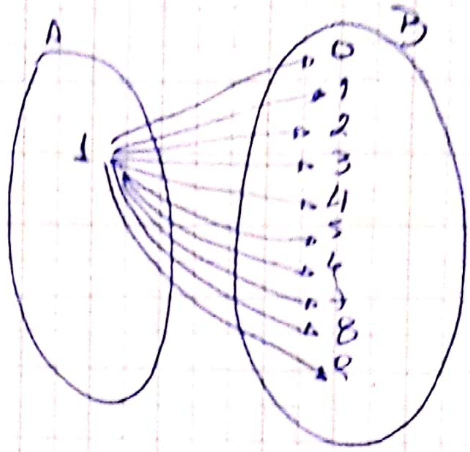
Imagen
B {0, 1, 4, 9, 16, 25, 32, 49, 64, 81}

Es una función



e)
Dominio
A: {1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1}
Imagen
B: {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

No es una función
$x = 1$
R // y es una relación.



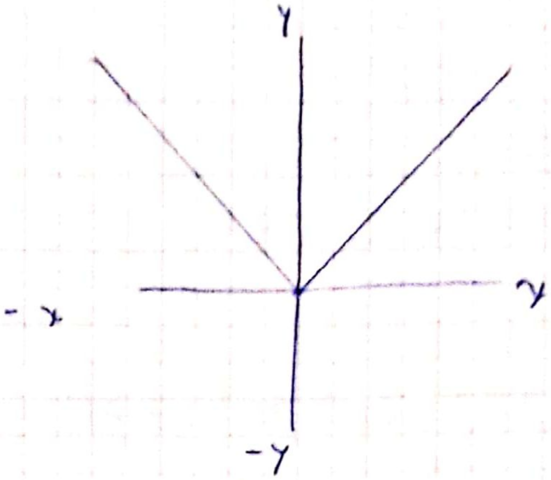
4.-
a) $f(x) = \frac{2\pi \; 3x^3 + 10x}{x-2}$ si es una función!

b) $2x + 3y^2 - \sqrt{x+10} = 21$ no es una función!

c) $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

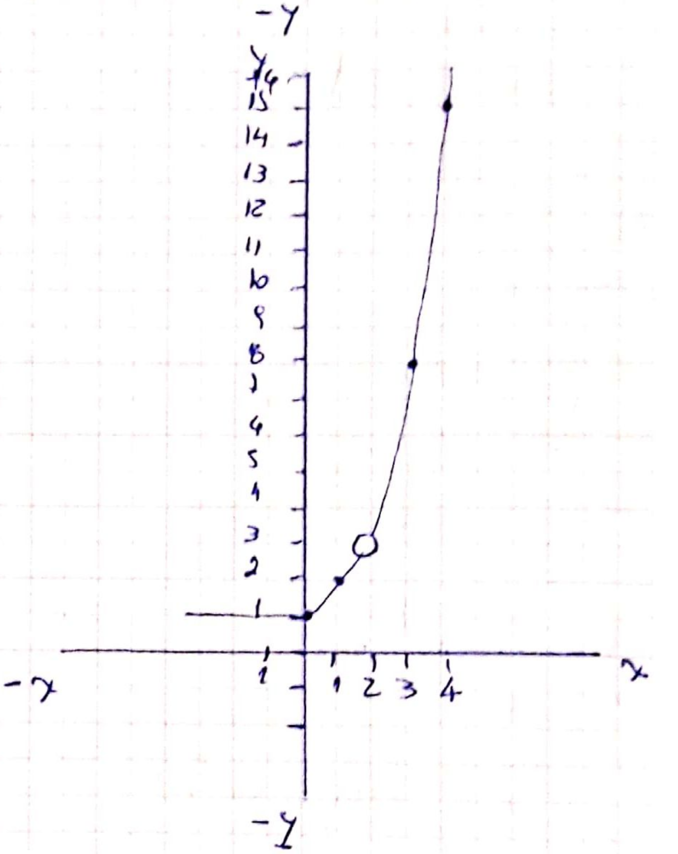
$y = |x|$

<u>Si</u> Es una función



d) $G(t) \begin{cases} 1 & \text{si } t \leq 0 \\ t+1 & \text{si } 0 < t < 2 \\ t^2 - 1 & \text{si } t > 2 \end{cases}$

<u>Si</u> es una función



5.-

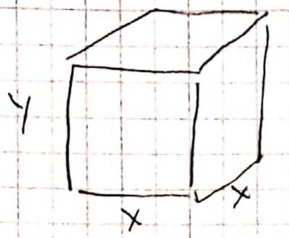
5 - Datos del Problema.

Volumen = 4 000 Litros

base - cuadrada

Área ?

Exp. matemática.



LADO DE Base = X

Altura = Y

5a) Volumen = $x^2 \cdot y = 4.000 L$

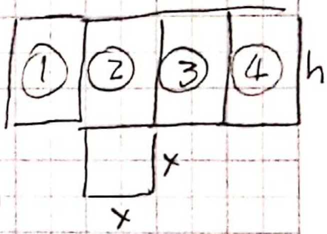
$y = \frac{4\,000}{x^2}$

$\boxed{\text{Altura} = \frac{4.000}{x^2}}$

5b) Área $= x^2 + 4xh$

$= 4xy + x^2$ Reemplazo el valor

$= 4x \cdot \frac{4.000}{x^2} + x^2$ [tengo una función] $f(x)$



Área $= \frac{16000}{x} + x^2$

Para encontrar el valor x de la función, se busca sus raíces, derivando, entonces:

reemplazo . . .

$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x)}{g(x)^2}$

$\frac{1600}{x} \cdot \frac{0 \cdot x - 16000 \cdot 1}{x^2}$

$\frac{1600}{x} = -\frac{16000}{x^2}$

$2x - \frac{16000}{x^2}$

$$= \frac{2x \cdot x^2 - 16.000}{x^2}$$

Der 1 $\boxed{Area' = \frac{2x^3 - 16000}{x2}}$ $F'(x)$ A la deriv. de 1°. del área la igualo a 0

Entonces =

$$\frac{2x^3 - 16000}{x2} = 0$$

$$2x^3 - 16000 = 0$$

$$2x^3 = 1600$$

$$x^3 = \frac{\cancel{1600}\ 8000}{\cancel{2}_1}$$

$$x^3 = 8000$$

$$x = \sqrt[3]{8000}$$

$$\boxed{x = 20}$$ Este valor es el lado de la base.

Debo saber si el valor corresponde a un máximo o a un mínimo

Aplico fórm. de derivada . . .

$y = x^n \quad y = n \cdot x^{n-1}$

$$Area'' = \frac{2x^3 - 16000}{x2}$$

$$= \frac{6x^2 \cdot x^2 - (2x^3 - 16000)\,2x}{(x^2)^2}$$

$$= \frac{6x^4 - 2x(2x^3 - 16000)}{x^4}$$

$$= \frac{\cancel{x}(6x^3 - 2(2x^3 - 16000))}{x^{4\,0}}$$

$$= \frac{6x^3 - 4x^3 + 32\,000}{x^3}$$

$$= \frac{2x^3 - 4x^3 + 32000}{x^3}$$

$$= \frac{2x^3 + 32\,000}{x^3}$$

$$= \frac{2x^3}{x^3} + \frac{32\,000}{x^3}$$

$$\boxed{Área' = 2 + \frac{32\,000}{x^3}}$$

2º Derivada . . .

A la 2º derivada, la evaluo para saber si tiene un máximo o un mínimo.

$$Área''(20) = \frac{2 + 32\,000}{x^3}$$

$$= \frac{2 + 32\,000}{20^3}$$

$$= \frac{2 + \cancel{32\,000}^{4}}{\cancel{8.000}}$$

$$= 2 + 4$$

$$\boxed{Área''(20) = 6}$$

El valor es positivo, entonces la función tiene un mínimo.

Obtengo la altura reemplazo 20 en la función

$$Y = \frac{4000}{20^{2}}$$

$$Y = \frac{4000}{400}$$

$$\boxed{Y = 10}$$

Tengo los valores para reemplazar en la fórmula del volumen

$x = 20$

$y = 10$

$$V = x^2 \cdot y$$

$$V = 20^2 \cdot y$$

$$\boxed{V = 4000\, lt}$$

VERIFICACIÓN

ES UNA ECUACIÓN

Limites

1

a) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{2x+1}{x-3}$

$$= \frac{2 \cdot 1 + 1}{1-3}$$

$$= \frac{2+1}{-2}$$

$$\boxed{-\frac{3}{2}}$$

b) Limite:

El limite de una función en un punto es el valor al que se va aproximando esa función cuando x tiende a un determinado punto, pero sin llegar a ese punto.

Expresión - $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$

20/12/20
6/11

2 - Continuidad de una función

Una función es continua en un punto $x = a$ si existe límite de la función en él y coincide con el valor que toma la función en dicho punto, es decir:

$$f \text{ es continua en } x = a \iff \lim_{x \to a} f(x) - f(a)$$

La continuidad de una función f en el punto $x = a$ implica que se cumplan las 3 condiciones:

1 - Existe el límite de la función $f(x)$ en $x = a$

2 - La función está definida en $x = a$, es decir existe $f(a)$.

3 - Los dos valores anteriores coinciden

Una función puede dejar de ser continua en un punto por no cumplir alguna de estas tres condiciones.

Expresión:

$$f \text{ es continua en } x = a \iff \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

3. $\lim_{x \to 4} 3x - 8 = 5$.

$3x - 8 = 3 \cdot 4 - 7$

$= 12 - 7$

$\boxed{=5}$ Verdadero.

4 - $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 + 7x + 10}{x + 2} =$

$$\frac{-2^2 + 7 \cdot (-2) + 10}{-2 + 2}$$

$$\frac{4-14+10}{0} =$$

$$\boxed{= \frac{0}{0}}$$

Es indeterminado

Levanto la indeterminación.

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4.a.c}}{2.a}$$

$$\frac{-8 \pm \sqrt{7^2-4.1.10}}{2.1}$$

$$\frac{-8 \pm \sqrt{49-40}}{2}$$

$$\frac{-8 \pm \sqrt{9}}{2} =$$

$$x_1 = \frac{-8+3}{2} = -\frac{4}{2} = \boxed{-2}$$

$$x_2 = \frac{-8-3}{2} = \frac{10}{2} = \boxed{-5}$$

$$x^2+8x+10 = (x+2).(x+5)$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2+8x+10}{x+2}$$

$$\frac{\cancel{(x+2)}.(x+5)}{\cancel{(x+2)}}$$

$$(x+5)$$

$$-2+5$$

$\boxed{3}$ Falso porque no es lo como dice el enunciado.

5. Ejemplos de discontinuidad.

- Discontinuidad Evitable.

$$\boxed{f(x) \begin{cases} x^2 & si \quad x < 2 \\ 4 & si \quad x > 2 \end{cases}}$$

La función puede existir o no
$\exists f(a)$ o $\nexists f(a)$

Existe el limite de la función
$$\exists \lim_{x \to a} f(x)$$

El valor de la función si existe no coincide con el valor de los limites laterales
$$f(a) \neq \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

- De salto Infinito

La función puede existir o no
$\exists f(a)$ o $\exists f(a)$

$$f(x) \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{2}{x-2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

la función es discontinua en $x = 2$ de salto infinito

Los limites laterales son distintos
$$\lim_{x \to a^-} f(x) \neq \lim_{x \to a^+} f(x)$$

Derivadas

1- Existe una relación entre continuidad y derivabilidad de una función, Si una función es derivable en un punto entonces es continua en el.
Sin embargo, una función puede ser continua en un punto pero no derivable en el.

a) Falso
b) Verdadero

2- Dada una función $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se dice que es derivable en $a \in \mathbb{R}$ si existe y es Finito el siguiente límite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \left(\text{Equivalente a } \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)$$

El valor de este límite se denomina derivada de $f(x)$ en a.

Notación: $f'(a)$ ó $\dfrac{df}{dx}(a)$

3.

x - aumento en pesos

helado = 50$ x c/u

Venta 1/2 = 200 helados x día.

$(50+x)$ Es el precio de un helado + El aumento en pesos

$(200-2x)$ Es la cantidad de ventas Diarias - los helados perdidos x CADA PESO QUE AUMENTA.

$$\boxed{f(x) = (50+x)\cdot(200-2x)} \quad x = \text{precio}$$

$\underbrace{g(x) = 200-2x \cdot 40}$ El costo por unidad es de 40. El costo diario con aumento es

El beneficio es $f(x) - g(x)$ (lo que vendo - el costo)

Beneficio $B(x) = f(x) - g(x)$

$(50+x)\cdot(200-2x)-(200-2x)\cdot 40$

$(200-2x)\cdot(50+x-40)$

$(200-2x)\cdot(x+10)$

$200x+2000-2x^2-20x$

$B(x) = \boxed{-2x^2+180x+2000}$

Escaneado con CamScanner

Derivo la primera a la función.

$$\boxed{B(x)' = -4x+180}$$

Igualo a 0 la primera derivada.

$B'(x) = 0$

$B'(x) = -4x+180 = 0$

$4x = 180$

$x = \frac{180}{4}$

$\boxed{x = 45}$ 2° Derivada.

Una vez que obtengo la 2° derivada, puedo saber si la función tiene un máximo o mínimo.

$B''(x) = -4$

$-4<0$, por lo tanto, la función tiene un máximo

$\boxed{x=45}$

En la función original, para obtener el beneficio, reemplazo por el valor $x=45$.

$B(x) = -2x^2+180x+2000$

$B(45) = -2\,45^2+180.45+2000$

$B(45) = -4050+10100$

$\boxed{B(45) = 6050}$

El precio máximo por helado es de $50+45 = \boxed{95}$

El beneficio con ese precio es de $= \boxed{6050}$

4.

$$\frac{b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2 \cdot a}$$

$$\frac{-4 \pm \sqrt{4^2-4 \cdot -1 \cdot 0}}{2 \cdot -1}$$

$$\frac{-4 \pm \sqrt{16}}{-2}$$

$$x_1 = \frac{-4+4}{-2} = \boxed{0}$$

$$x_2 = \frac{-4-4}{-2} = \frac{-\cancel{8}4}{-\cancel{2}} = \boxed{4}$$

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2 \cdot 1} \cdot \frac{-\cancel{4}2}{-\cancel{2}} = \boxed{2}$$

$y_v = 4 \cdot 2 - (2)^2$

$y_v = 8-4$

$y_v = 4$

$y = -x^2+4x$

$\boxed{y = -2x+4}$

$y - y_0 = m(x-x_0)$

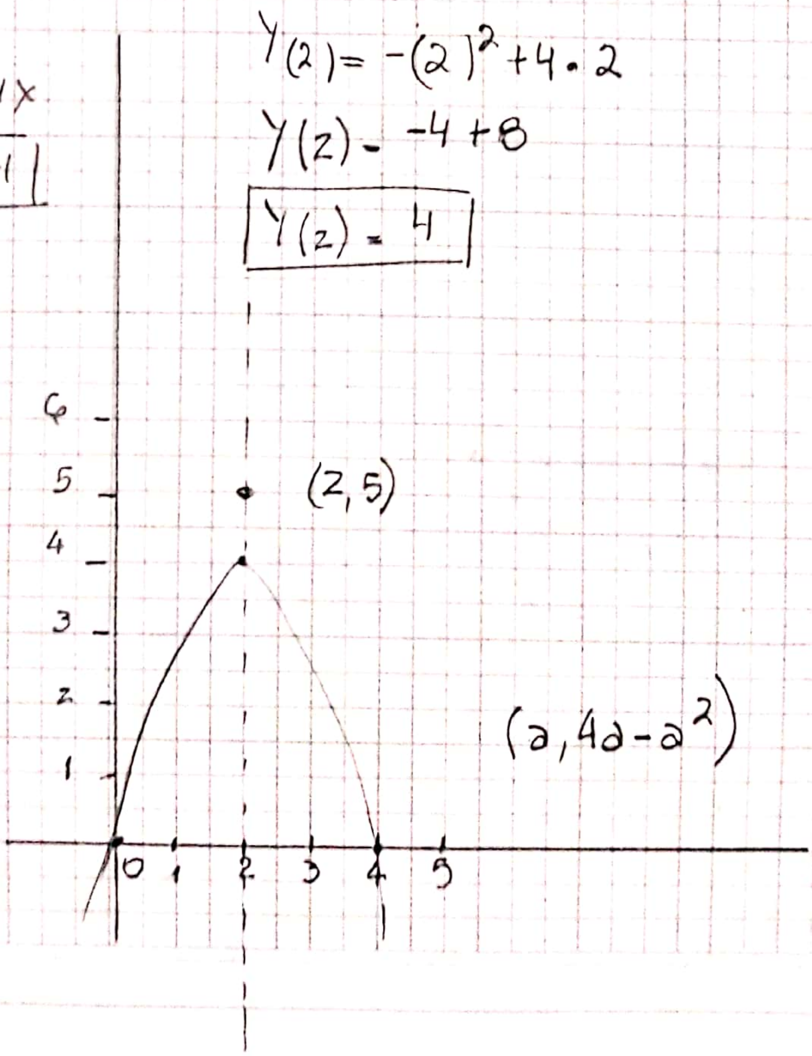
$y = 5(x_0) = 5(x_0) \cdot (x \cdot x_0)$

$y(2) = -(2)^2 + 4 \cdot 2$

$y(2) = -4+8$

$\boxed{y(2) = 4}$

El punto (2,5) no pertenece a la función.



20/12/20
9/11

Punto de la tangente $\quad x^2 \quad y^2$

$(a, \quad (-a^2+4a)$

Punto $\quad x_1 \quad y_1$

$(2, \quad 5)$

Para tener la pendiente derivo

$y = -x^2+4x$

$\boxed{y' = -2x+4}$

Reemplazo x por la pendiente

$y'(a) = -2 \cdot a+4$

$\boxed{y'(a) = -2a+4}$ m

La ecuación $y - y_0 = m(x-x_0)$

$m = \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ Con los puntos hallo la pendiente que pasa por los 2 puntos

$m = \dfrac{(-a^2+4a)-5}{}$

$m = \dfrac{-a^2+4a-5}{a-2}$

Igualamos las pendientes

$-2a+4 = \dfrac{-a^2+4a-5}{a-2}$

$(-2a+4) \cdot (a-2) = -a^2+4a-5$

$-2a^2+4a+4a-8 = -a^2+4a-5$

$-2a^2+8a-8 = -a^2+4a-5$

Escaneado con CamScanner

$-2a^2+a^2+8a-4a-8+5=0$

$\boxed{-a^2+4a-3=0}$ Función cuadrática

De la pendiente obtengo las raíces.

$$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2.a}=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4.-1.-3}}{2.-1}$$

$$=\frac{-4\pm\sqrt{16-12}}{-2}$$

$$=\frac{-4\mp\sqrt{4}}{-2}$$

$a_1=\frac{-4+2}{-2}=\frac{+2}{+2}=\boxed{1}$

$a_2=\frac{-4-2}{-2}=\frac{+6}{+2}=\boxed{+3}$

con $a=1$

$P_1=(a;(-a^2+4a)) \Rightarrow$

$(1;-(1)^2+4.1))$

$(1;-1+4)$

$\boxed{P_1 \quad (1;3)}$

$m=-2a+4$

$m=-2\cdot 1+4$

$m=-2+4$

$\boxed{m=2}$

Pendiente de la recta.

Ecuación de la recta tangente: (con los datos obtenidos).

$y-y_0=m(x-x_0)$

$y-3=2(x-1)$

$y-3=2x-2$

$y=2x-2+3$

$\boxed{y=2x+1}$

Ecuación 1 recta tangente.

20/12/20

10/11

con $a : 3$ $\Rightarrow$ $m = -2a + 4$

$= -2 \cdot 3 + 4$

$= -6 + 4$

$\boxed{m = -2}$

$P_2 = (a ; (-a^2 + 4a))$

$(3 ; (-(3)^2 + 4(3))$

$(3 ; (-9 + 12))$

$(3 ; 3)$

Ecuación 2 de la recta tangente (con los datos obtenidos)

$y - y_0 = m\,(x - x_0)$

$y - 3 = -2\,(x - 3)$

$y - 3 = -2x + 6$

$y = -2x + 6 + 3$

$\boxed{y = -2x + 9}$

Ecuación 2 recta tangente

5.

a) $y = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$

$\boxed{y' = \frac{-2}{x^2} - \frac{2}{x^3}}$

b) $y = (x^2 + 17) \cdot (x^3 - 3x + 1)$

$x^2 + 17 = 2x$

$x^3 - 3x + 1 = 3x^2 - 3$

$y^2 \; 2x \cdot (x^3 - 3x + 1) + (x^2 + 17) \cdot (3x^2 - 3)$

$y \cdot 2x^4 - 6x^2 + 2x + 3x^4 - 3x^2 + 51x^2 - 51$

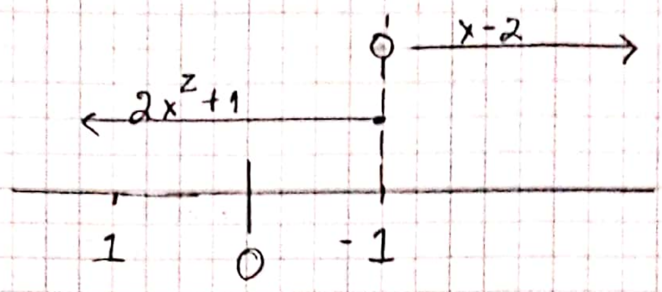
$\boxed{y = 5x^4 + 42x^2 + 2x - 51}$

c).

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2+1 & \text{si } x \leq 1 \\ x+2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Continuidad: (debo saber si es así) Aplico los 3 pasos

Paso 1



$\exists\ f(1) = 2 \cdot 1^2 + 1$

$= 2 \cdot 1 + 1$

$= 2+1$

$\boxed{f(1) = 3}$

Paso 2

$\exists \lim\limits_{x \to 1^-} 2x^2+1 = 2 \cdot 1^2 + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 2+1 = \boxed{3}$

$\lim\limits_{x \to 1^+} x+2 = 1+2 = \boxed{3}$

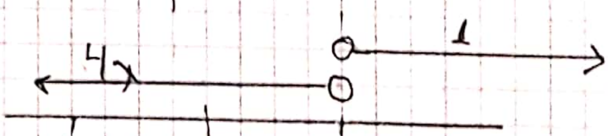
$\lim\limits_{x \to 1^-} = \lim\limits_{x \to 1^+} = \boxed{3}$

Paso 3

$\boxed{f(1) = \lim\limits_{x \to 1} = 3}$ Por lo tanto $f(x)$ es continua en $x=1$

Busco su derivada, al ser una ecuación continua.

$$f'(x) \begin{cases} 4x & \text{si } x \leq 1 \\ \nexists & \text{si } x = 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$



Se analiza la continuidad de la derivada.

Que pasa en $x = 1$

20/12/20
11/11

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to1^-} 4x = 4\cdot1 = \boxed{4} \\ \\ \lim\limits_{x\to} f'(x) = \lim\limits_{x\to1^+} 1 = \boxed{1}\end{array}\right\} \neq$$

$f'(x)$ No es derivada en $x=1$, es derivable en $\mathbb{R}-\{1\}$

d)

$y = x^2 \operatorname{sen} x$

$y' = 2x \cdot \operatorname{sen} x + x^2 \cdot + \cos x$

$\boxed{y' = 2x \operatorname{sen} x + {}^2 \cdot \cos x} \longrightarrow$

$\boxed{y' = x\left(2\operatorname{sen}(x) + x\cos(x)\right)}$