

Laborator 2: Ecuatii diferențiale. Probleme Cauchy

1. Să se determine soluția generală și să reprezinte grafic câteva soluții pentru ecuațiile:

(a) $y' = 2x(1 + y^2)$

(b) $(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0$

(c) $2x^2y' = x^2 + y^2$

(d) $y' = -\frac{x+y}{y}$

(e) $y'' + y = \sin x + \cos x$

(f) $y'' - y = e^{2x}$

(g) $y'' - y' = \frac{1}{1 + e^x}$

2. Rezolvați următoarele probleme Cauchy și reprezentați grafic soluția corespunzătoare::

(a) $y' = 1 + y^2, y(0) = 1$

(b) $y' = \frac{1}{1-x^2}y + 1 + x, y(2) = 0$

(c) $y' - 2y = -x^2, y(0) = \frac{1}{4}$

(d) $y'' - 5y' + 4y = 0, y(0) = 5, y'(0) = 8;$

(e) $y'' - 4y' + 5y = 2x^2e^x, y(0) = 2, y'(0) = 3;$

(f) $y'' + 4y = 4(\sin 2x + \cos 2x), y(\pi) = y'(\pi) = 2\pi;$

3. Se consideră următoarea ecuație diferențială

$$y'(x) + \frac{k}{x}y(x) = x^3,$$

cu $k \in \mathbb{R}$.

(a) Determinați soluția generală.

(b) Pentru $k = 1$ reprezentați grafic câteva soluții.

(c) Pentru $k = 1$ determinați soluția problemei Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) + \frac{k}{x}y(x) = x^3 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

și reprezentați-o grafic.

(d) Utilizând comanda **animate** vizualizați dependența soluției problemei Cauchy de la punctul (c) față de parametrul k .

4. Determinați parametrii a și b știind că soluția problemei Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = ay(x) + b \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

trece prin punctele de coordonate $(2, 2e^2 - 1)$ și $(3, 2e^3 - 1)$. Reprezentați grafic soluția corespunzătoare.

5. Determinați soluția problemei Cauchy

$$\begin{cases} y'' - y' - 2y = 0 \\ y(0) = a \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

și valoarea lui a astfel încât $y(x) \rightarrow 0$ pentru $x \rightarrow +\infty$.