

# 1 Question de cours

Notion d'écoulement parfait et de couche limite. Conséquences sur les conditions aux limites.

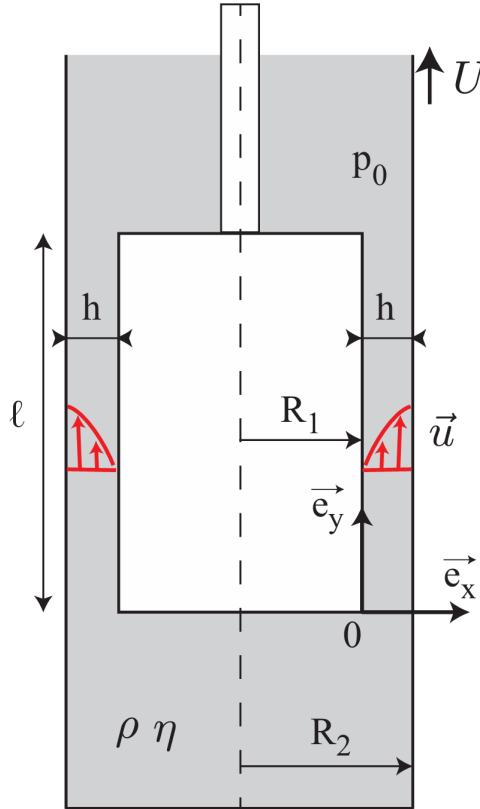
# 2 Clepsydre

Une clepsydre est un instrument de mesure du temps utilisant un liquide, contrairement à un sablier. On considère un modèle de clepsydre consistant en un récipient de symétrie cylindrique, percé d'un trou à sa base. On cherche à déterminer la forme d'un tel instrument permettant une vitesse de descente du niveau du liquide constante tout au long de la vidange.

*Proposez une solution au problème en faisant les hypothèses que vous considérez nécessaires. Faire appel à des résultats connus sans les démontrer en détails est autorisé, sous réserve de justifier leur pertinence et de brièvement expliquer leur origine.*

# 3 Amortisseur hydraulique à effet visqueux

Un amortisseur hydraulique est constitué d'un piston cylindrique de rayon  $R_1$  et de longueur  $\ell$  déplaçant un fluide incompressible, de viscosité dynamique  $\eta$  et de masse volumique  $\rho$ , dans un cylindre de rayon  $R_2$  tel que  $h = R_2 - R_1 \ll R_1$ . On appelle  $h$  l'entrefer entre les deux cylindres qui est donc suffisamment petit devant le rayon de courbure du piston pour que l'écoulement puisse être assimilé à l'écoulement entre deux plans. L'écoulement est unidirectionnel tel que  $\vec{u} = u_y(x, y)\vec{e}_y$ .



On suppose que loin du piston le fluide est au repos et que le piston se déplace à la vitesse  $U$ . On cherche la force nécessaire pour imposer ce mouvement. On suppose que les effets visqueux ne se manifestent qu'entre les deux cylindres, on se place dans le référentiel du piston de sorte que l'écoulement soit stationnaire. On néglige les effets de la gravité dans ce problème.

1. Écrire la composante selon  $x$  de l'équation de Navier-Stokes. Que peut-on déduire sur la pression ?
2. Écrire la composante selon  $y$  de l'équation de Navier-Stokes. Préciser les conditions aux limites sur les parois  $x = 0, h$ . Pour rappel, on se place dans le référentiel du piston.
3. Calculer  $u_y$ . Ce profil de vitesse correspond à la superposition de deux écoulements bien connus.
4. Exprimer le débit volumique  $Q_v$  en fonction de  $dp/dy$ ,  $R_1$ ,  $h$ ,  $\eta$  et  $U$ . On admettra, compte tenu que  $h \ll R_1$ , que le débit volumique dans la conduite est donné par

$$Q_v = 2\pi R_1 \int_0^h u_y(x) dx$$

5. En comparant ce débit au débit injecté dans l'entrefer par le déplacement du piston, calculer l'expression dominante du gradient de pression  $dp/dy$  comme une fonction de  $\eta$ ,  $U$ ,  $R_1$ ,  $h$ .
6. La pression au-dessus du cylindre est  $p_0$  (voir figure). Exprimer la variation de pression dans l'entrefer entre  $y = 0$  et  $y = \ell$ . En déduire l'expression de la pression au niveau de la surface de base du piston en  $y = \ell$ .
7. En déduire l'expression de la force de pression  $\vec{F}_p$  qui s'exerce sur le piston.
8. Exprimer la force  $\vec{F}_v$  exercée par la contrainte visqueuse sur la surface du piston dans l'entrefer. Comparer cette force à la force de pression.

