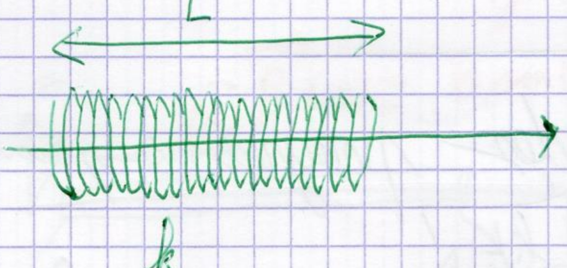
Ex 1 : Ondes sur un ressort (CCP)



1. $k_{dx} = ?$

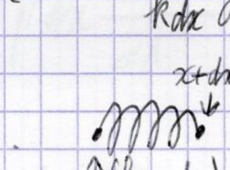
Ressorts en série : $k^{-1} = \sum \frac{1}{k_{dx}}$

On n'a pas de « nombre » de ressorts élémentaires k_{dx}
→ mais on connaît leur longueur, qu'on appelle dx.
On va intégrer sur x :

$$\frac{1}{k} = \int_0^L \underbrace{\left(\frac{1}{k_{dx}}/dx\right)} dx'$$

inverse de raideur linéique : « $k_{dx}^{-1} = O(dx)$ » 1er ordre

$$\frac{1}{k} = \frac{L}{k_{dx}\,dx} \Rightarrow k_{dx}^{-1} = \frac{k^{-1}}{L}\,dx \to k_{dx} = \frac{kL}{dx}$$

2. 

point x du ressort

longueur du ressort : $x + dx + \xi(x,t) + d\xi(x,t) - x + \xi(x,t)$

$= dx + d\xi(x,t)$.

$$T_{(x,t)} = \|\vec{F}_{ressort/point\ à\ x}\|(x,t) = k_{dx}\left((dx + d\xi(x,t)) - \underbrace{dx}_{\text{« } l_0 \text{ »}}\right)$$

$$= k_{dx}\, d\xi(x,t)$$

$$= kL\,\frac{\partial \xi}{\partial x}(x,t)$$

3. $dm\,\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}(x,t) = T(x,t) - T(x-dx,t)$ (2nde loi de Newton)

$\to \lambda\,dx\,\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}(x,t) = kL\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}(x,t) - \frac{\partial \xi}{\partial x}(x-dx,t)\right)$

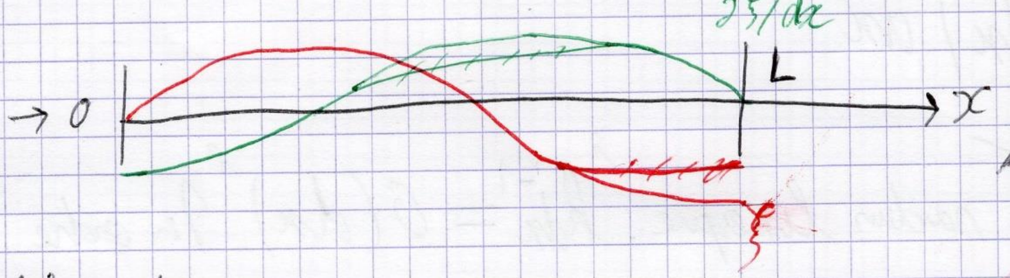
$$\rightarrow \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}(x,t) - \frac{kL}{\lambda} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}(x,t) = 0$$

→ D'Alembert ⟹ ondes progressives possibles, avec la célérité $c = \sqrt{\frac{kL}{\lambda}}$.

ondes de compression, pas transversales mais longitudinales ⟹ ondes acoustiques.

3. Extrémités $x=0$ fixe et $x=L$ libre :

$$\xi(x=0,t) = 0 \quad , \quad \frac{\partial \xi}{\partial x}(x=L,t) = 0.$$

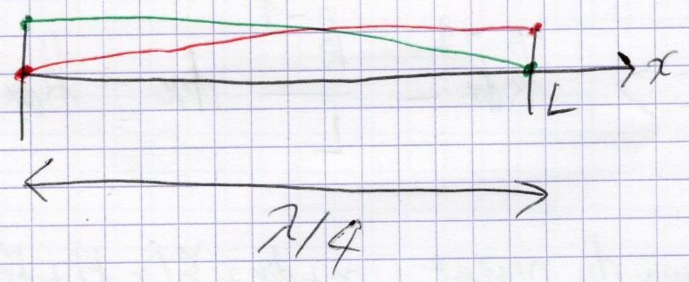


modes possibles :

$\left|\frac{\partial \xi}{\partial x}\right|$ max en 0, min en L

$|\xi|$ max en L, min en 0

1er mode :



$\rightarrow \lambda_{min}/4 = L : \lambda_{min} = 4L.$

$\rightarrow \lambda_n = 4nL, \quad \omega_n = \frac{\pi c}{2nL}.$