1. Vortex

1. Le vecteur tourbillon est défini tel que $\overrightarrow{rot}\,\vec{v} = 2.\vec{\Omega}$. D'autre part l'écoulement est supposé incompressible, donc $div\,\vec{v} = 0$.

On peut identifier ces relations au cas du champ magnétique crée par une distribution de courant : $\left|\begin{array}{l}\overrightarrow{rot}\,\vec{B} = \mu_0\,\vec{j} \\ div\,\vec{B} = 0\end{array}\right.$ et

$\oint \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_0 \iint \vec{j}\cdot\vec{dS}$

On a donc de même $\oint \vec{v}\cdot\vec{dl} = 2.\iint \vec{\Omega}\cdot\vec{dS}$, applicable sous réserve de conditions de symétrie et d'invariance que l'on doit étudier.

On observe bien une invariance par rotation d'angle θ ce qui permet d'en déduire que

$$\left|\begin{array}{l} r \leqslant a:\ 2.\pi.r.v(r) = 2.\Omega_0.\pi.r^2 \\ r > a:\ 2.\pi.r.v(r) = 2.\Omega_0.\pi.a^2 \end{array}\right.$$

On en déduit le champ des vitesses : $\vec{v} = \left|\begin{array}{l} r \leqslant a:\ \Omega_0.r \\ r > a:\ \dfrac{\Omega_0.a^2}{r} \end{array}\right.$

2. On a alors dans ce cas $r \geq a \forall r \neq 0$, et par conséquent $v(r) = \dfrac{\Omega_0.a^2}{r} = \dfrac{\Gamma}{2.\pi.r}$.

On peut remarque que $\Phi = \dfrac{\Gamma.\theta}{2.\pi} + C^{te}$ constitue bien un potentiel des vitesses.

Ce potentiel n'a de signification que localement car on remarque que $\Phi(2.\pi) \neq \Phi(0)$ alors qu'il s'agit du potentiel pour un même point...

2. Expérience de Fizeau

1. L'écran E doit être placé à la distance f_2 de la lentille L_2 afin que les rayons issus des deux trous interfèrent dans le même plan (plan focal) (sinon, la figure d'interférences est floue lorsqu'on s'éloigne de l'axe optique).

2. On trace deux rayons issus de la source S passant par les deux trous de la plaque et convergeant en un point M de l'écran. Ces rayons sont réfractés par la lentille L_2 pour interférer en M. Noter que les rayons paralèlles avant les trous, sont comme émis par une source ponctuelle à chaque trou (diffraction)

3. La différence de chemin optique entre les deux rayons est donnée par $\delta = \delta_1 - \delta_2 = -\frac{xa}{f_2}$. L'interfrange i s'obtient par $i = \frac{\lambda f_2}{a}$.

4. En appliquant la loi classique de composition des vitesses, on trouve les temps de parcours $t_2 = \frac{\ell}{\frac{c}{n}+u}$ et $t_1 = \frac{\ell}{\frac{c}{n}-u}$. La différence de temps est alors :
$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{2n^2 u\ell}{c^2}.$$

5. La différence de chemin optique en O est donnée par :
$$\delta_O = \frac{2n^2 u\ell}{c}.$$

6. Les franges se déplacent vers le haut. Le déplacement x_0 de la frange d'ordre 0 est donné par :

$$\delta_O - \frac{x_0 a}{f_2} = 0.$$

Donc,

$$x_0 = \frac{f_2 \delta_O}{a} = \frac{2n^2 u \ell f_2}{ac}.$$

7. L'expérience a montré un déplacement inférieur à x_0, ce qui indique que la loi classique de composition des vitesses n'est pas exacte et que la lumière n'est pas totalement entraînée par le fluide. Cela confirme la nécessité d'une correction relativiste.

8. En utilisant la loi d'entraînement de Fresnel,

$$c' = \frac{c}{n} + u\left(1 - \frac{1}{n^2}\right),$$

on doit vérifier que $c' < c$. Or,

$$\frac{c}{n} + u\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) < c$$

revient à montrer que $\frac{1}{n} + \frac{u}{c} - \frac{u}{cn^2} < 1$, ce qui est toujours vérifié pour des valeurs physiques de $u < c$.