1. Navigation à voile

1. On cherche à déterminer la force $\vec{F}$ exercée par le fluide sur le tube coudé, il s'agit de la résultante des forces de pression sur la paroi intérieure du tube. La force exercée par le tube sur le fluide est donc $-\vec{F}$.

Considérons la surface de contrôle $C_1D_1B_2A_2$.

Soit S le système ouvert constitué de l'eau contenue dans la surface de contrôle à chaque instant.

Soit S* le système fermé constitué, à l'instant t, de l'eau contenue dans la surface de contrôle et de l'eau contenue dans $A_1B_1D_1C_1$, qui va entrer dans la surface de contrôle pendant dt.

S* est aussi le système fermé constitué, à l'instant $t+dt$, de l'eau contenue dans la surface de contrôle et de l'eau contenue dans $A_2B_2D_2C_2$, qui est sortie de la surface de contrôle pendant dt.

Soit $\vec{p}$ la quantité de mouvement du système S, et $\overrightarrow{p^*}$ la quantité de mouvement du système S*. On a alors :

$$\overrightarrow{Dp} = \overrightarrow{p^*}(t+dt) - \overrightarrow{p^*}(t) = \left(\vec{p}(t+dt) + dm\vec{v_2}\right) - \left(\vec{p}(t) + dm\vec{v_1}\right)$$
$$= \vec{p}(t+dt) - \vec{p}(t) + dm\left(\vec{v_2} - \vec{v_1}\right)$$

En régime permanent, la quantité de mouvement du système S ne dépend pas du temps, d'où $\vec{p}(t+dt) = \vec{p}(t)$, d'où $\overrightarrow{Dp} = \overrightarrow{p^*}(t+dt) - \overrightarrow{p^*}(t) = dm\left(\vec{v_2} - \vec{v_1}\right)$, ou bien : $\dfrac{\overrightarrow{Dp}}{dt} = \dfrac{dm}{dt}\left(\vec{v_2} - \vec{v_1}\right)$.

Le théorème de la résultante de la dynamique énonce $\dfrac{\overrightarrow{Dp}}{dt} = \vec{F}_{paroi \to fluide}$.

D'après le principe de l'action et de la réaction : $\vec{F}_{paroi \to fluide} = -\vec{F}_{fluide \to paroi}$, d'où $\boxed{\vec{F}_{fluide \to paroi} = \dfrac{dm}{dt}\left(\vec{v_1} - \vec{v_2}\right)}$.

Puisque l'écoulement est incompressible le débit massique se conserve.

Puisque la section est constante et que le fluide est parfait, la vitesse est constante dans toute section droite du tube, le débit massique s'écrit loin en amont $D_m = \rho S v_1$ et loin en aval $D_m = \rho S v_2$.

Avec $v = \left\|\vec{v_1}\right\| = \left\|\vec{v_2}\right\|$, on obtient : $\boxed{D_m = \rho S v}$.

On a alors $\vec{F} = \rho S v^2\left(\vec{u_1} - \vec{u_2}\right)$, où $\vec{u_1}$ est un vecteur directeur de l'écoulement en amont et $\vec{u_2}$ est un vecteur directeur de l'écoulement en aval.

Soit θ l'angle entre $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ alors $\left\|\vec{u_1} - \vec{u_2}\right\| = \sqrt{(1-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta} = \sqrt{2 - 2\cos\theta}$ ou bien $\left\|\vec{u_1} - \vec{u_2}\right\| = 2\sin\dfrac{\theta}{2}$.

Cette force est de norme $\boxed{F = 2\rho S v^2 \sin\dfrac{\theta}{2}}$, et elle est dirigée perpendiculairement au coude.

2. Le vecteur vitesse du vent apparent est $\vec{v} = \overrightarrow{v_0} - \overrightarrow{v_B}$ (loi de composition des vitesses), avec β l'angle entre $\overrightarrow{v_B}$ et $-\overrightarrow{v_0}$.

On a alors $\boxed{v = \sqrt{v_0^2 + v_B^2 + 2v_0 v_B \cos\beta}}$, soit $\boxed{v = 27{,}2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}}$.

Soit α l'angle que fait $\vec{v}$ avec l'axe Ox, ou avec $\overrightarrow{v_B}$, tel que $\cos\alpha = \dfrac{\vec{v} \cdot \overrightarrow{v_B}}{v v_B}$.

Or $\vec{v} \cdot \overrightarrow{v_B} = \left(\overrightarrow{v_0} - \overrightarrow{v_B}\right) \cdot \overrightarrow{v_B} = \overrightarrow{v_0} \cdot \overrightarrow{v_B} - v_B^2 = -v_0 v_B \cos\beta - v_B^2 = -v_B\left(v_0 \cos\beta + v_B\right)$

D'où $\cos\alpha = \dfrac{-v_B\left(v_0\cos\beta + v_B\right)}{\sqrt{v_0^2 + v_B^2 + 2v_0 v_B \cos\beta}}$ et $\boxed{\alpha = \mathrm{Arccos}\left(\dfrac{-v_B\left(v_0\cos\beta + v_B\right)}{\sqrt{v_0^2 + v_B^2 + 2v_0 v_B \cos\beta}}\right)}$, soit $\boxed{\alpha = 127{,}3°}$. Ce vent apparent est dirigé vers l'arrière du voilier.

3. La force $\vec{F}$ exercée par le vent est perpendiculaire à la voile, dirigée vers l'avant du voilier, elle fait un angle $\alpha - \varphi$ avec l'axe Ox, sa composante s'écrit donc $F_x = F\sin\left(\alpha - \varphi\right)$.

Or on a vu au 1 que $F = 2\rho S v^2 \sin\dfrac{\theta}{2}$, avec θ l'angle du coude.

Ici $\theta = 2\varphi$ puisque le vent est dévié de φ à l'entrée de la voile et est dévié de φ à la sortie de la voile.

De plus $S = \Sigma\sin\varphi$, d'où $\boxed{F_x = 2\rho\Sigma v^2 \sin^2\varphi \sin\left(\alpha - \varphi\right)}$.

On a bien une expression de la forme : $F_x = \rho\Sigma v^2 X\left(\alpha, \varphi\right)$, avec $\boxed{X\left(\alpha, \varphi\right) = 2\sin^2\varphi \sin\left(\alpha - \varphi\right)}$.

4. On étudie la fonction $X\left(\alpha, \varphi\right) = 2\sin^2\varphi \sin\left(\alpha - \varphi\right)$.

A α fixé, $\varphi \in \left[0, \alpha\right]$. Or $X\left(\alpha, 0\right) = X\left(\alpha, \alpha\right) = 0$, et puisque $X(\varphi) > 0$ sur $\left[0, \alpha\right]$, on déduit du théorème de Rolle que $X(\varphi)$ passe par un maximum sur $\left[0, \alpha\right]$.

On en déduit qu'à cap fixé et qu'à vent apparent fixé il existe un réglage optimal de la position de la voile qui rend la force propulsive maximale.

Soit φ_0 tel que $\left(\dfrac{dX}{d\varphi}\right)_\alpha (\varphi_0) = 0$.

Or $X\left(\alpha, \varphi\right) = 2\sin^2\varphi \sin\left(\alpha - \varphi\right) = 2\sin\alpha \sin^2\varphi \cos\varphi - 2\cos\alpha \sin^3\varphi$.

$$\frac{dX}{d\varphi} = 2\sin\alpha\left(2\sin\varphi\cos^2\varphi - \sin^3\varphi\right) - 2\cos\alpha \cdot 3\sin^2\varphi\cos\varphi$$

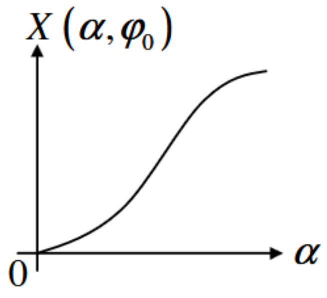
$$= 2\sin\varphi\left(2\sin\alpha\cos^2\varphi - \sin\alpha\sin^2\varphi - 3\cos\alpha\sin\varphi\cos\varphi\right)$$

$$= -\frac{2\sin\varphi\cos^2\varphi}{\sin\alpha}\left(\tan^2\varphi + \frac{3}{\tan\alpha}\tan\varphi - 2\right)$$

On en déduit que φ_0 vérifie l'équation du second degré : $\tan^2\varphi_0 + \dfrac{3}{\tan\alpha}\tan\varphi_0 - 2 = 0$;

On obtient finalement $\boxed{\varphi_0 = \mathrm{Arctan}\left(-\dfrac{3}{2\tan\alpha} + \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{9}{\tan^2\alpha} - 8}\right)}$.

La courbe $X(\alpha,\varphi_0)$ en fonction de α peut être tracée avec un ordinateur et a l'allure suivante :



5. Si $\alpha = 90°$ alors $\dfrac{1}{\tan\alpha} = 0$, on a donc $\varphi_0 = \text{Arctan}\left(\sqrt{2}\right) = 54,7°$ et $X = 0,77$.

On en déduit $\boxed{F_{xM} = 1800\ \text{N}}$.