♦ **1.a)** Nous ne reprenons pas cette question traitée précédemment : puisque la glace a une capacité thermique négligeable, elle ne peut s'échauffer et le flux de diffusion se conserve.

$$K\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=\mu\, c_P\frac{\partial T}{\partial t}=0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial T}{\partial x}=\text{constante}.$$

On trouve donc la loi affine ; à l'instant t fixé :

$$\boxed{T_{(x,t)}=T_{0(t)}+[T_e-T_{0(t)}]\frac{x}{\ell_{(t)}}}$$

b) D'après la loi de Fourier : $\vec{j}_Q=-K\,\overrightarrow{\text{grad}}\,T=-K\dfrac{\partial T}{\partial x}\vec{u}_x$,

d'où : $\boxed{\vec{j}_Q=K\dfrac{[T_{0(t)}-T_e]}{\ell_{(t)}}\vec{u}_x}$ (selon $-\vec{u}_x$ car $T_{0(t)}<T_e$).

2.a) L'énergie thermique libérée par unité de surface correspond à l'énergie thermique perdue par la glace lors de la solidification (au signe près).

$\delta Q=L\,\mathrm{d}m$, avec $\mathrm{d}m$ masse de glace formée par unité de surface pendant $\mathrm{d}t$.

$$\mathrm{d}m=\mu\underbrace{s}_{1}\mathrm{d}\ell_{(t)} \;\Rightarrow\; \boxed{\delta Q=L\,\mu\,\mathrm{d}\ell_{(t)}}$$

b) Cette énergie thermique est évacuée par conduction vers l'air (selon $-\vec{u}_x$), ce qui définit :

$$\vec{j}_Q=\frac{\delta Q}{\mathrm{d}t}(-\vec{u}_x)=L\,\mu\frac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}t}(-\vec{u}_x).$$

L'égalité des deux expressions de $\vec{j}_Q$ donne :

$$-L\,\mu\frac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}t}=K\frac{T_{0(t)}-T_e}{\ell},$$

$$\boxed{\ell_{(t)}\,\mathrm{d}\ell_{(t)}=-\frac{K}{L\,\mu}[T_{0(t)}-T_e]\,\mathrm{d}t}$$

c) La continuité du flux à l'interface glace-air donne :

$$\vec{j}_Q=\frac{\mathscr{P}_{th}}{S}(-\vec{u}_x)=\alpha[T_{0(t)}-T_a](-\vec{u}_x)=K\frac{[T_{0(t)}-T_e]}{\ell_{(t)}}\vec{u}_x.$$

On en déduit : $T_{0(t)}\left[1+\dfrac{\alpha\,\ell_{(t)}}{K}\right]=T_e+\dfrac{\alpha\,\ell_{(t)}}{K}T_a$,

soit : $$\boxed{T_{0(t)}=\frac{T_e+\dfrac{\alpha\,\ell_{(t)}}{K}T_a}{1+\dfrac{\alpha\,\ell_{(t)}}{K}}}$$

d) Il suffit d'éliminer $T_{0(t)}$ entre les relations du **b)** et **c)** :

$$T_{0(t)} - T_e = \frac{\dfrac{\alpha\,\ell_{(t)}}{K}(T_a - T_e)}{1 + \dfrac{\alpha\,\ell_{(t)}}{K}} \Rightarrow \left[1 + \frac{\alpha\,\ell}{K}\right]\ell\,\mathrm{d}\ell = -\frac{K}{L\mu}\frac{\alpha\,\ell}{K}(T_a - T_e)\,\mathrm{d}t.$$

En intégrant entre $t = 0$, $\ell_{(0)} = 0$, et t, $\ell_{(t)}$, il vient :

$$\int_0^\ell \left(1 + \frac{\alpha\,\ell}{K}\right)\mathrm{d}\ell = -\frac{\alpha}{L\mu}(T_a - T_e)\int_0^t \mathrm{d}t,$$

$$\ell + \frac{\alpha}{2K}\ell^2 = -\frac{\alpha}{L\mu}(T_a - T_e)\,t,$$

$$\ell^2 + \frac{2K}{\alpha}\ell = \frac{2K}{L\mu}(T_e - T_a)\,t.$$

On déduit l'expression de $\ell_{(t)}$:

$$\left(\ell + \frac{K}{\alpha}\right)^2 = \frac{K^2}{\alpha^2} + \frac{2K}{L\mu}(T_e - T_a)\,t,$$

$$\ell_{(t)} = \sqrt{\frac{K^2}{\alpha^2} + \frac{2K}{L\mu}(T_e - T_a)\,t} - \frac{K}{\alpha},$$

$$\boxed{\ell_{(t)} = \frac{K}{\alpha}\left[\sqrt{1 + \frac{2\,\alpha^2}{KL\mu}(T_e - T_a)\,t} - 1\right]}$$

D'après les notations de l'énoncé :

$$\boxed{\ell_{(t)} = \ell_0\left[\sqrt{1 + \frac{t}{\tau}} - 1\right]}$$

3. L'application numérique donne :

$$\ell_0 = 5\;10^{-2}\ \mathrm{m} = 5\ \mathrm{cm} \qquad \text{et} \qquad \tau = 1{,}8\;10^4\ \mathrm{s} \simeq 5\ \mathrm{h}.$$

$$\ell_{(t)} = 5\left[\sqrt{1 + \frac{t}{5}} - 1\right].$$

Lorsque $t \ll \tau$: $$\ell_{(t)} = \ell_0\left[\left(1 + \frac{t}{\tau}\right)^{+\frac{1}{2}} - 1\right] \simeq \frac{\ell_0}{2\,\tau}\,t.$$

Pour $t \to +\infty$:
$$\ell_{(t)} \simeq \ell_0 \sqrt{\frac{t}{\tau}} \to +\infty \quad \text{et} \quad \frac{\ell_{(t)}}{t} \to 0 .$$

D'où le graphe (Fig. 15).