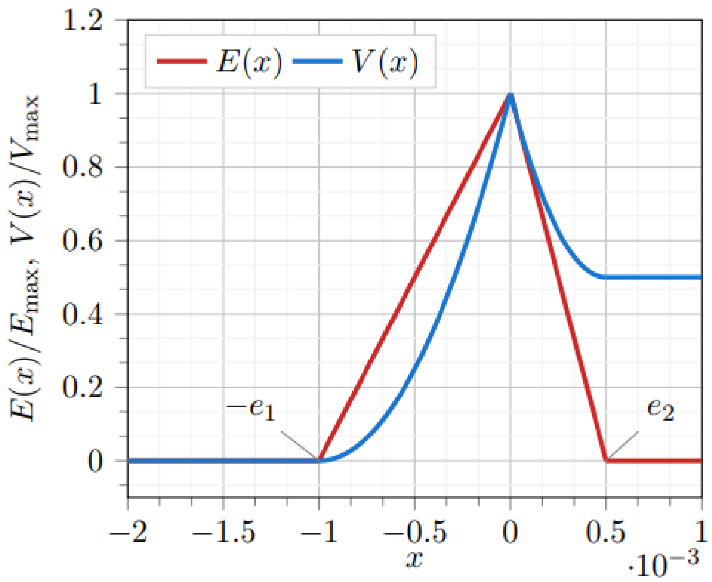
14.3.1 Corrigé - Jonction P-N

1. Par définition $Q = \iiint_V \rho \mathrm{d}V = 0$, avec les symétries proposées, on a $Se_1\rho_1 + Se_2\rho_2 = 0$ dont on déduit
$$\boxed{\rho_2 = -\frac{e_1}{e_2}\rho_1 = -2 \times 10^{-6}\,\mathrm{C m^{-3}}}$$

2. On s'intéresse à chaque partie de la distribution prise séparément :
   - La base de projection adaptée est la base cartésienne,
   - Les plans passant par M et perpendiculaires à yOz sont des plans de symétrie Π^+ et $\vec{E} \in \Pi^+$, on en en déduit $\vec{E} = E(M)\overrightarrow{u_x}$,
   - Toute translation parallèle au plan yOz laisse la distribution de source invariante et $\vec{E} = E(x)\overrightarrow{u_x}$.

   Puis, pour gagner du temps, on utilise la relation de MAXWELL-GAUSS qui dit que $\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}$. Dans la partie gauche, la relation devient $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x} = \frac{\rho_1}{\varepsilon_0}$, soit $E(x) = \frac{\rho_1}{\varepsilon_0}x + \text{cste}$. Or $\vec{E}(x = -e_1) = 0$ par continuité du champ et
$$\boxed{\vec{E}(-e_1 < x < 0) = \frac{\rho_1}{\varepsilon_0}(x + e_1)\overrightarrow{u_x}}$$
   De même, dans la partie droite, la relation devient $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x} = \frac{\rho_2}{\varepsilon_0}$, soit $E(x) = -\frac{e_1}{e_2}\frac{\rho_1}{\varepsilon_0}x + \text{cste}$. Or $\vec{E}(x = e_2) = 0$ par continuité du champ et
$$\boxed{\vec{E}(0 < x < e_2) = -\frac{e_1}{e_2}\frac{\rho_1}{\varepsilon_0}(x - e_2)\overrightarrow{u_x}}$$

3. La relation $\vec{E} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,V = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\overrightarrow{u_x}$ permet de déduire le champ potentiel. On a donc $V(-e_1 < x < 0) = \frac{\rho_1}{2\varepsilon_0}(x + e_1)^2 + \text{cste}_1$ et de même $V(0 < x < e_2) = -\frac{e_1}{e_2}\frac{\rho_1}{2\varepsilon_0}(x - e_2)^2 + \text{cste}_2$. Le potentiel est choisi nul en $x = -e_1$ et $\text{cste}_1 = 0$ L'unicité des potentiels en $x = 0$, permet alors d'écrire $\frac{\rho_1}{2\varepsilon_0}(e_1)^2 = -\frac{e_1}{e_2}\frac{\rho_1}{2\varepsilon_0}(e_2)^2 + \text{cste}_2$, soit $\text{cste}_2 = \frac{\rho_1}{2\varepsilon_0}(e_1 - e_2)\,e_1$. On en déduit
$$\boxed{\begin{cases} V(-e_1 < x < 0) = \frac{\rho_1}{2\varepsilon_0}(x + e_1)^2 \\ V(0 < x < e_2) = -\frac{e_1}{e_2}\frac{\rho_1}{2\varepsilon_0}(x - e_2)^2 + \frac{\rho_1}{2\varepsilon_0}(e_1 - e_2)\,e_1 \end{cases}}$$
   Le tracé des fonctions est donné ci-dessous :



La méthode utilisée est similaire à celle utilisée pour le dipôle électrostatique.

On pose $x = a/r$ et on utilise le développement limité de :

$$(1+x)^{-1/2} \approx 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2$$

Le potentiel créé en un point M est :

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{AM} - \frac{1}{BM}\right)$$

Avec :

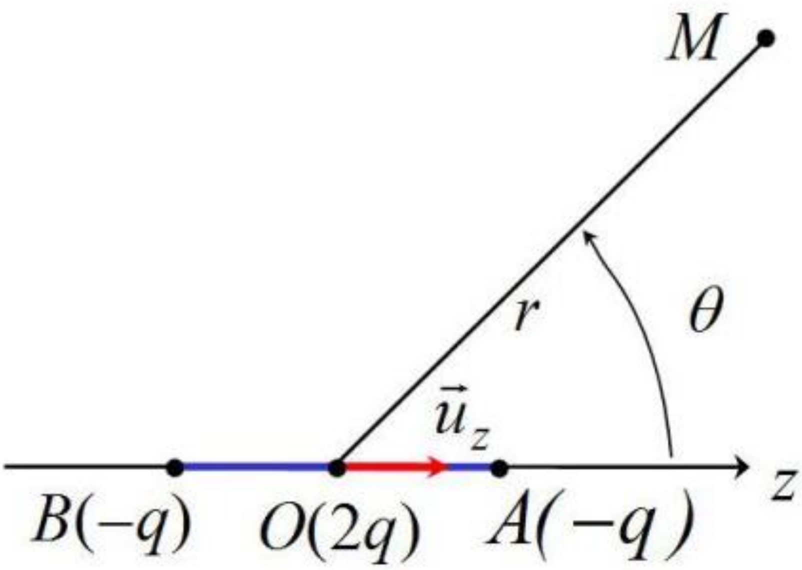
$$\frac{1}{AM} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{a}{r}\cos\theta + \frac{a^2}{r^2}\right)^{-1/2}$$

Et :

$$\frac{1}{BM} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{a}{r}\cos\theta + \frac{a^2}{r^2}\right)^{-1/2}$$

Un développement au 2nd ordre en a/r conduit à :

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a^2}{r^3}(1 - 3\cos^2\theta)$$

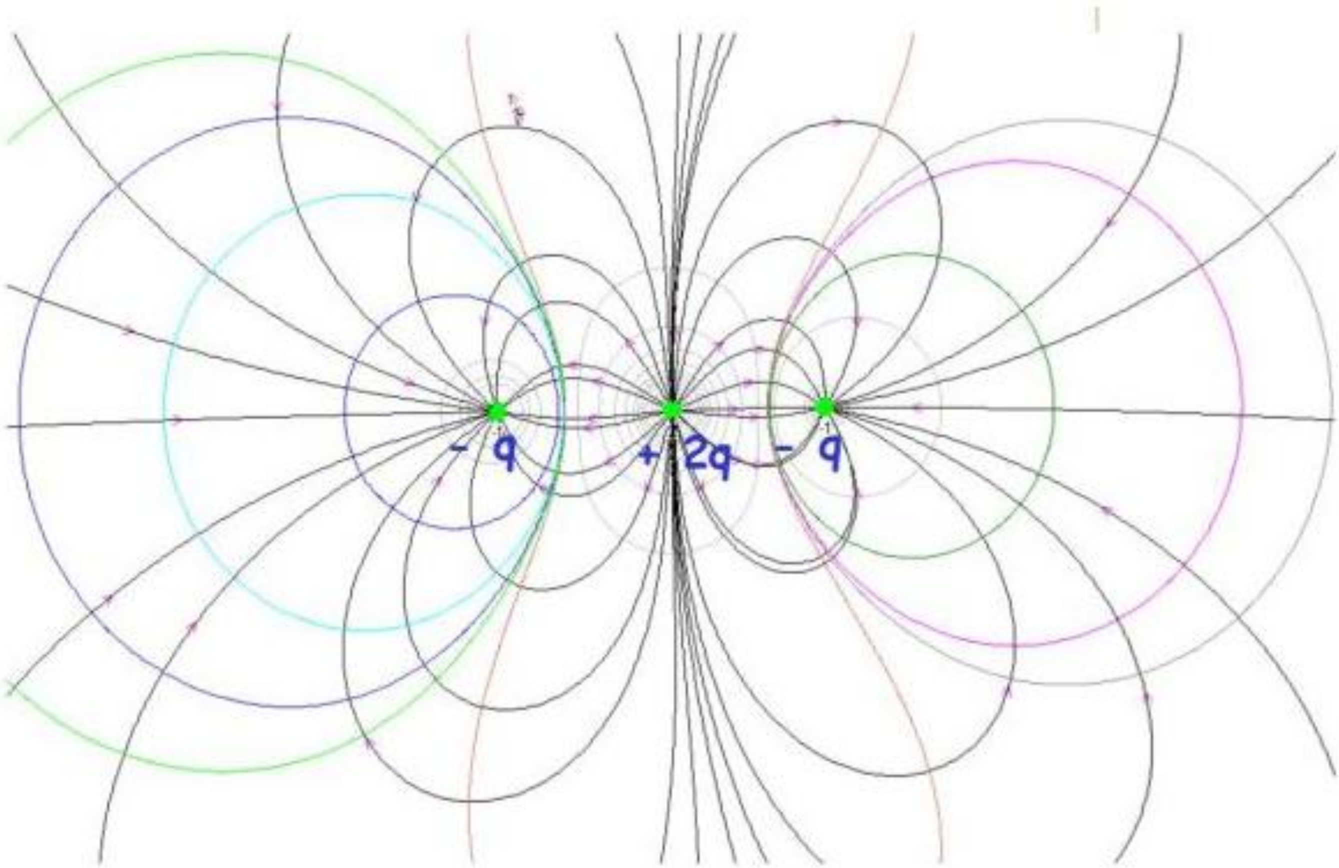


Quadripôle électrostatique

Le champ électrostatique se calcule à partir de :

$$\begin{cases} E_r(r,\theta) = -\dfrac{\partial V}{\partial r} \\ E_\theta(r,\theta) = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta} \end{cases}$$

La figure suivante donne la topographie du champ (lignes de champs et lignes équipotentielles) :



Topographie du champ d'un quadripôle