Exercice 1 : Barreau d'Uranium

1. - On considère le système cylindrique de rayon r et de longueur dz. En rgime stationnaire, son énergie interne est constante, indépendante du temps : $U(t+dt)-U(t)=0$
   - $\delta Q_e = \pi.r^2.j(z).dt$
   - $\delta Q_s = \pi.r^2.j(z+dz).dt$
   - L'énergie produite dans le milieu est $\delta Q_p = \mathcal{P}_v.\pi.r^2.dz.dt$
   - L'application du premier principe pour ce système fermé donne alors :
     $U(t+dt)-U(t) = \delta Q_e - \delta Q_s + \delta Q_p = \pi.r^2.dt.[j(z+dz)-j(z)+\mathcal{P}_v.dz]\ \dfrac{dj}{dz} = \mathcal{P}_v$
2. Par intégration : $j(z) = \mathcal{P}_v.z + C_1$

   On a de plus la loi de Fourier : $j(z) = -\lambda.\dfrac{dT}{dz}$, ce qui donne :

   $\dfrac{dT}{dz} = \dfrac{-\mathcal{P}_v}{\lambda}.z + B$

   $T(z) = \dfrac{-\mathcal{P}_v}{2.\lambda}.z^2 + B.z + C$, donc $A = \dfrac{-\mathcal{P}_v}{2.\lambda}$

   Les conditions aux limites donnent : $T(0) = T(L) = T_0 = C = A.L^2 + B.L + C$ soit $C = T_0$ et $B = -A.L$

   On en déduit que $\boxed{A = \dfrac{-\mathcal{P}_v}{2.\lambda}\ ;\ C = T_0 \text{ et } B = \dfrac{\mathcal{P}_v.L}{2.\lambda}}$
3. On recherche donc la valeur de z telle que $\dfrac{T(z)}{dz} = 0$, soit $z_M = \dfrac{-B}{2.A} = \dfrac{L}{2}$

   On aura alors $T_M = A.\dfrac{L^2}{4} + B.\dfrac{L}{2} + C3240.10^3\ K$

   Cette valeur semble bien sûr extrêmement élevé. En fait ce barreau va être en contact avec un fluide caloporteur non pas simplement au niveau de ses extrémités mais également au niveau de ses parois latérales, ce qui permettra de limiter les hausses de température.

Suite : Barreau plongé dans l'air

1. Bilan énergétique sur une tranche entre r et $r + dr$

Considérons une tranche cylindrique de longueur L et de rayons compris entre r et $r + dr$.

Puissance produite : La puissance volumique produite par la réaction nucléaire dans cette tranche est donnée par :

$$Q_{\text{produit}} = P_v \cdot (2\pi r\, dr \cdot L)\,.$$

Puissance échangée par conduction thermique : Le flux thermique sortant à r est $j(r) \cdot 2\pi r \cdot L$ et celui entrant à $r + dr$ est $j(r + dr) \cdot 2\pi(r + dr) \cdot L$. En notant $j(r)$ le flux thermique radial, la variation de flux est :

$$Q_{\text{échangé}} = -\frac{d}{dr}(2\pi r \cdot j(r) \cdot L)\, dr.$$

En régime stationnaire, la conservation de l'énergie impose :

$$Q_{\text{produit}} + Q_{\text{échangé}} = 0.$$

Substituons les expressions :

$$P_v \cdot (2\pi r\, dr \cdot L) - \frac{d}{dr}(2\pi r \cdot j(r) \cdot L)\, dr = 0.$$

En simplifiant par $2\pi L$ et réorganisant :

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r \cdot j(r)) = P_v.$$

2. Expression de $T(r)$

Le flux thermique est relié à la température par la loi de Fourier :

$$j(r) = -\lambda \frac{dT}{dr},$$

où λ est la conductivité thermique de l'uranium. Substituons cette relation dans l'équation obtenue :

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(-\lambda r \frac{dT}{dr}\right) = P_v.$$

En supposant que λ est constant :

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r \frac{dT}{dr}\right) = -\frac{P_v}{\lambda}.$$

Intégration : Intégrons une première fois :

$$r\frac{dT}{dr} = -\frac{P_v}{2\lambda} r^2 + C_1,$$

où C_1 est une constante d'intégration. Divisons par r et intégrons une seconde fois :

$$T(r) = -\frac{P_v}{4\lambda} r^2 + C_1 \ln(r) + C_2,$$

øù C_2 est une autre constante d'intégration.

3. Conditions aux limites et solution finale

Condition au bord : $T(R) = \theta_0$, avec R le rayon du barreau et θ_0 la température au bord. Cela donne :

$$\theta_0 = -\frac{P_v}{4\lambda} R^2 + C_1 \ln(R) + C_2.$$

Condition au centre : Au centre ($r \to 0$), $T(r)$ doit rester finie, donc $C_1 = 0$ (car $\ln(r)$ divergerait sinon).

Ainsi, l'expression de $T(r)$ devient :

$$T(r) = \theta_0 + \frac{P_v}{4\lambda}\left(R^2 - r^2\right).$$

4. Température maximale

La température maximale est atteinte au centre du barreau ($r = 0$) :

$$T_{\max} = \theta_0 + \frac{P_v}{4\lambda} R^2.$$

Calcul numérique :

$$\begin{aligned}
P_v &= 700\,\mathrm{MW\cdot m^{-3}} = 7\cdot 10^8\,\mathrm{W\cdot m^{-3}},\\
R &= 10\,\mathrm{mm} = 0{,}01\,\mathrm{m},\\
\lambda &= 27\,\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}},\\
\theta_0 &= 200\,^\circ\mathrm{C},
\end{aligned}$$

$$T_{\max} = 200\,^\circ\mathrm{C} + \frac{7\cdot 10^8\,\mathrm{W\cdot m^{-3}}}{4\cdot 27\,\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}}\cdot (0{,}01\,\mathrm{m})^2.$$

$$T_{\max} = 200\,^\circ\mathrm{C} + 648{,}1\,\mathrm{K} \approx 850\,^\circ\mathrm{C}.$$