1°) $dU = \;đQ + đW = CdT + (b+M)d\theta$, $dS = \dfrac{đQ}{T} = C\dfrac{dT}{T} + \dfrac{b}{T}d\theta$.

2°) C est constant : $\left(\dfrac{\partial C}{\partial \theta}\right)_T = 0 = \dfrac{\partial}{\partial T}(b+M)\Big|_\theta$ et $\dfrac{\partial}{\partial \theta}(\dfrac{C}{T})\Big|_T = 0 = \dfrac{\partial}{\partial T}(\dfrac{b}{T})\Big|_\theta$

On en déduit :

$$\left(\frac{\partial b}{\partial T}\right)_\theta = -\left(\frac{\partial M}{\partial \theta}\right)_T, \quad \frac{1}{T}\left(\frac{\partial b}{\partial T}\right)_\theta = \frac{b}{T^2} = -\frac{1}{T}\left(\frac{\partial M}{\partial \theta}\right)_T, \quad \text{donc}$$

$$b = -T\theta\frac{dK}{dT}$$

3°) $b = \alpha\,\theta\,T$.

4°) $b + M = K_0\,\theta$ et $dU = CT + K_0\,\theta\,d\theta$, d'où

$$U = CT + \frac{K_0}{2}\,\theta^2 + U_0$$

puis $dS = C\dfrac{dT}{T} + \alpha\,\theta\,d\theta$, d'où

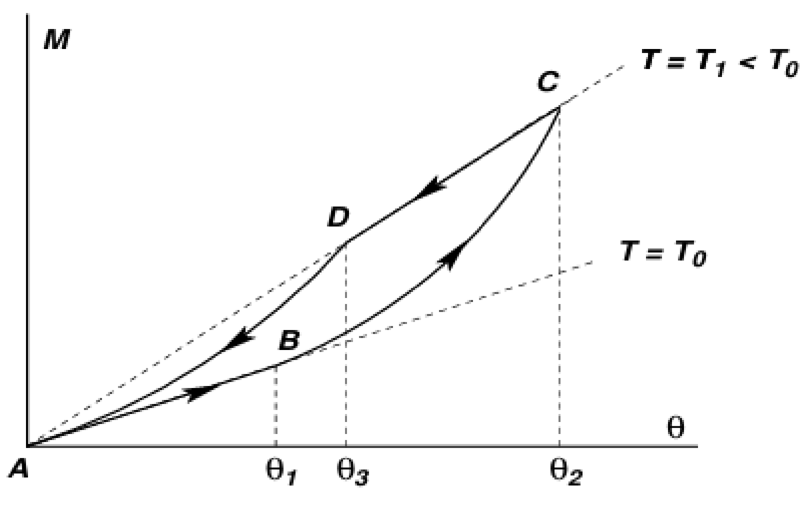
$$S = C\ln\frac{T}{T_0} + \frac{\alpha}{2}\,\theta^2 + S_0$$

U_0 et S_0 étant deux constantes.

5°) a) Si T est constant, $K(T)$ est constant et M est simplement proportionnel à θ.

b) Si $S - S_0$ reste constant $= C'$, on a $T = T_0\exp[\dfrac{C'}{C}]\exp[-\dfrac{\alpha}{2C}\theta^2)]$, d'où

$$M = \theta\left\{K_0 - \alpha T_0\exp[\frac{C'}{C}]\exp\left[-\frac{\alpha}{2C}\theta^2\right]\right\}$$



6°) a) Pour une isotherme, $M = K(T)\,\theta = \text{constante}\times\theta$, et cette relation de proportionnalité est représentée dans le plan (M,θ) par une droite passant par l'origine.

b) $\left(\frac{\partial M}{\partial \theta}\right)_T = K(T) > 0$; $\left(\frac{\partial M}{\partial \theta}\right)_S = K(T) + \theta\left(\frac{\partial K}{\partial \theta}\right)_S$; $\left(\frac{\partial K}{\partial \theta}\right)_S = -\alpha\left(\frac{\partial T}{\partial \theta}\right)_S = \alpha\frac{b}{C} = \frac{\alpha\theta T}{C}$. On en déduit

$$\left(\frac{\partial M}{\partial \theta}\right)_S > K(T) = \left(\frac{\partial M}{\partial \theta}\right)_T$$

et $\left(\frac{\partial M}{\partial \theta}\right)_S = \left(\frac{\partial M}{\partial \theta}\right)_T$ pour $\theta = 0$, T étant donnée (les conditions $\theta = 0$ et $M = 0$ n'impliquent pas que T soit fixée).

7°) i) $Q_{AB} = T_0\,\Delta_{AB}S = \alpha T_0\frac{\theta_1^2}{2} > 0$; $W_{AB} = \Delta_{AB}U - Q_{AB} = [K_0 - \alpha T_0]\,\frac{\theta_1^2}{2} = K(T_0)\frac{\theta_1^2}{2} > 0$.

ii) $Q_{BC} = 0$, $W_{BC} = \Delta_{BC}U = C(T_1 - T_0) + K_0\frac{\theta_2^2 - \theta_1^2}{2}$ avec $T_1 = T_0\exp\left[-\alpha\frac{\theta_2^2 - \theta_1^2}{2C}\right]$.

Note : $W_{BC} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta > 0$ car $M > 0$ et $\theta_2 > \theta_1$.

iii) Transformation <u>isotherme</u>, donc $Q_{CD} = T_1\,\Delta_{CD}S = \frac{\alpha T_1}{2}\left[\theta_3^2 - \theta_2^2\right] < 0$; $W_{CD} = \Delta_{CD}U - Q_{CD} = K(T_1)\frac{\theta_3^2 - \theta_2^2}{2} < 0$.

iv) $Q_{DA} = 0$, $W_{DA} = \Delta_{DA}U = C(T_0 - T_1) - K_0\frac{\theta_3^2}{2}$ et $W_{DA} = \int_{\theta_3}^{0} M\,d\theta < 0$.

8°) $\Delta_{BC}S = 0$ donne $C\ln\frac{T_1}{T_0} + \frac{\alpha}{2}\left[\theta_2^2 - \theta_1^2\right]$ et $\Delta_{DA}S = 0$ donne $C\ln\frac{T_0}{T_1} - \frac{\alpha}{2}\,\theta_3^2$. On en déduit :

$$\theta_3^2 = \theta_2^2 - \theta_1^2$$

9°) On trouve $W_{\text{tot}} = -\frac{\alpha}{2}\,\theta_1^2\,(T_0 - T_1) < 0$. C'est une quantité négative, ce qui était prévisible, au regard du sens de parcours du cycle dans le plan (M,θ).

10°) $|W_{\text{tot}}| = \frac{\alpha}{2}\,\theta_1^2\,(T_0 - T_1)$, $Q_{AB} = \frac{\alpha T_0}{2}\,\theta_1^2$. D'où

$$\frac{|W|}{Q_{AB}} = 1 - \frac{T_1}{T_0}$$

Ce rapport représente le rendement du cycle considéré. Or, ce dernier est en fait un cycle de Carnot (réversible). Il n'est donc pas étonnant de trouver que ledit rendement soit égal au rendement de Carnot $1 - \frac{T_1}{T_0}$.