

1. Champ en un point M du plan médiateur.

Le plan contenant le segment chargé AB et le point M est un plan de symétrie de la distribution des charges. Il en va de même pour le plan contenant le segment OM et qui est perpendiculaire à Oz .

Le champ électrostatique au point M doit simultanément appartenir à ces deux plans, il a donc pour direction l'intersection de ces deux plans. D'où :

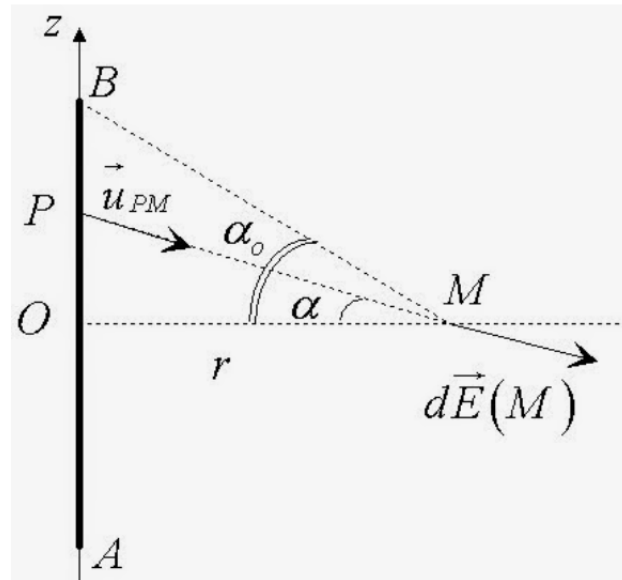
$$\vec{E}(M) = E_r(r, \theta, 0) \vec{u}_r$$

Par ailleurs, il y a invariance par rotation autour de l'axe Oz .

$$\vec{E}(M) = E_r(r, z=0) \vec{u}_r$$

Soit $d\vec{E}(M)$ le champ créé en M par un élément de longueur dl du segment AB :

$$d\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{PM^2} \vec{u}_{PM}$$



Seule la composante suivant \vec{u}_r donnera une contribution non nulle au champ total en M :

$$dE_r = d\vec{E}(M) \cdot \vec{u}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{PM^2} \cos \alpha$$

On exprime les différentes variables en fonction de la variable α :

$$\tan \alpha = \frac{z}{r} \rightarrow dz = dl = r \frac{1}{\cos^2 \alpha} d\alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{r}{PM} \rightarrow \frac{1}{PM^2} = \frac{\cos^2 \alpha}{r^2}$$

d'où :

$$dE_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} \cos \alpha d\alpha$$

L'angle α varie entre $-\alpha_0$ et $+\alpha_0$ lorsque le segment est balayé du point A au point B . L'intégration entre ces deux valeurs angulaires permet de déterminer l'expression du champ électrostatique au point M :

$$E_r = \int_{-\alpha_0}^{+\alpha_0} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} \cos \alpha d\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} (\sin \alpha_0 - \sin(-\alpha_0))$$

$$E_r = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} \sin \alpha_0 \text{ or } \sin \alpha_0 = \frac{l}{\sqrt{r^2 + l^2}}$$

$$E_r = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} \frac{l}{\sqrt{r^2 + l^2}}$$

$$\boxed{\vec{E}(M) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} \frac{l}{\sqrt{r^2 + l^2}} \vec{u}_r \text{ pour } z=0}$$

2. Cas où l tend vers l'infini.

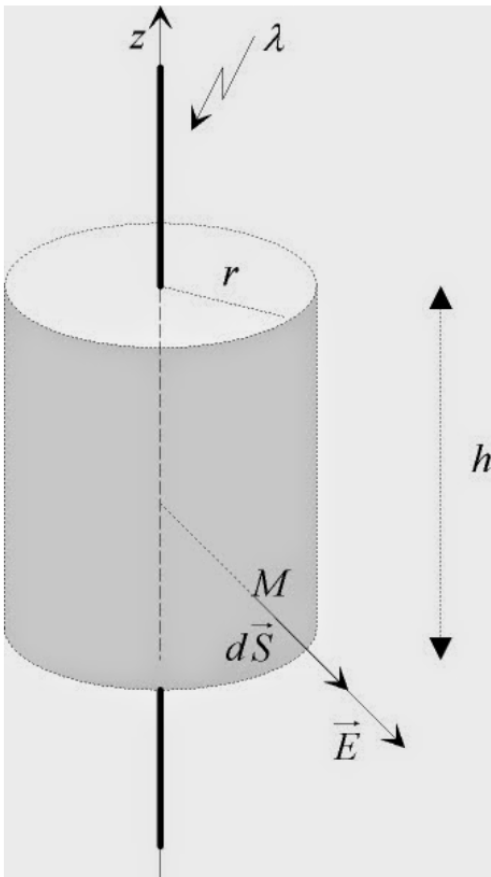
comme $\lim_{l \rightarrow \infty} \sqrt{r^2 + l^2} = l$ pour r fixé, le champ s'exprime alors sous la forme :

$$\boxed{\vec{E}(M) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} \vec{u}_r}$$

3. Théorème de Gauss.

Quand le fil est infini, on a en plus des propriétés décrites à la question 1, une invariance par translation parallèlement à l'axe Oz, donc :

$$\vec{E}(M) = E_r(r) \vec{u}_r$$



On applique le théorème de Gauss :

$$\oiint \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

On choisit alors comme surface de Gauss un cylindre fermé, d'axe Oz, de hauteur h et de rayon r. La surface latérale de ce cylindre passant par le point M où l'on désire déterminer le champ électrostatique.

$$\begin{aligned} \oiint \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} &= \iint_{\text{base du bas}} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} + \iint_{\text{base du haut}} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} + \iint_{\text{surface latérale}} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} \\ \oiint \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} &= \iint_{\text{bas}} E_r(r) \vec{u}_r \cdot (-dS \vec{u}_z) + \iint_{\text{haut}} E_r(r) \vec{u}_r \cdot dS \vec{u}_z + \iint_{\text{latérale}} E_r(r) \vec{u}_r \cdot dS \vec{u}_r \\ \oiint \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} &= \iint_{\text{latérale}} E_r(r) dS = E_r(r) \iint_{\text{latérale}} dS = E_r(r) 2\pi r h \end{aligned}$$

La charge électrique contenue dans cette surface fermée est :

$$Q_{\text{int}} = \lambda h$$

Le théorème de Gauss permet d'écrire que :

$$\begin{aligned} E_r(r) 2\pi r h &= \frac{\lambda h}{\epsilon_0} \\ E_r(r) &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} \end{aligned}$$

Remarque : Dans ce cas de géométrie de la distribution de charges, on peut appliquer le théorème de Gauss car on connaît en chaque point de la surface de Gauss choisie l'angle que fait le vecteur champ \vec{E} et le vecteur $d\vec{S}$. Cela n'est pas le cas de la première distribution où la direction du \vec{E} n'est connue que pour les points du plan perpendiculaire au segment et passant par son milieu. Cette restriction rend alors inutilisable le théorème de Gauss car on ne trouve pas de surface fermée où l'on connaisse en tous points la direction de ce champ électrostatique.

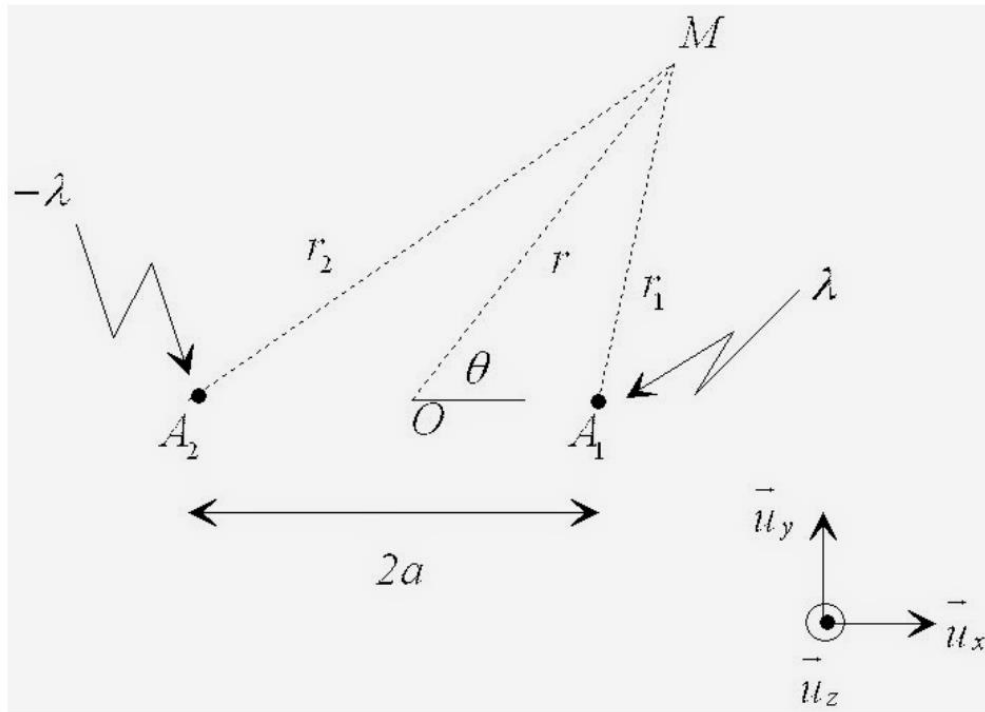
4. Potentiel.

Pour déterminer le potentiel électrostatique, on utilise le fait que le champ électrostatique dérive d'un potentiel.

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\text{grad} V \rightarrow E_r = -\frac{dV}{dr} \\ dV &= -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r} \\ V &= -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r + Cte \end{aligned}$$

Remarque : Le calcul direct du potentiel avec l'expression $V = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dz}{PM}$ ne peut s'effectuer dans ce cas car la distribution étudiée est d'extension spatiale non finie ce qui conduit à la divergence du résultat.

5. Potentiel en M.



On applique le principe de superposition :

$$V(M) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r_1 - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r_2 + C$$

$$V(M) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1} + C$$

En O : $r_1 = r_2 \rightarrow V(O) = C = 0$ par hypothèse. On obtient :

$$\boxed{V(M) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}}$$

6. Potentiel créé par la ligne dipolaire.

On se place dans le plan $z = 0$ et on recherche les distances A_1M et A_2M

$$\overrightarrow{A_1M} = \overrightarrow{A_1O} + \overrightarrow{OM}$$

$$r_1^2 = A_1M^2 = A_1O^2 + OM^2 + 2\overrightarrow{A_1O} \cdot \overrightarrow{OM}$$

$$r_1^2 = a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta$$

$$r_1 = (a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta)^{\frac{1}{2}}$$

de même :

$$\overrightarrow{A_2M} = \overrightarrow{A_2O} + \overrightarrow{OM}$$

$$r_2^2 = A_2M^2 = A_2O^2 + OM^2 + 2\overrightarrow{A_2O} \cdot \overrightarrow{OM}$$

$$r_2^2 = a^2 + r^2 + 2ar \cos \theta$$

$$r_2 = (a^2 + r^2 + 2ar \cos \theta)^{\frac{1}{2}}$$

Pour $r \gg a$:

$$r_1 = r \left(1 - 2\frac{a}{r} \cos \theta + \frac{a^2}{r^2} \right)^{\frac{1}{2}} \approx r \left(1 - \frac{a}{r} \cos \theta \right)$$

$$r_2 = r \left(1 + 2\frac{a}{r} \cos \theta + \frac{a^2}{r^2} \right)^{\frac{1}{2}} \approx r \left(1 + \frac{a}{r} \cos \theta \right)$$

Le potentiel s'écrit alors :

$$V(M) \approx \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1 + \frac{a}{r} \cos \theta}{1 - \frac{a}{r} \cos \theta} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left(\ln \left(1 + \frac{a}{r} \cos \theta \right) - \ln \left(1 - \frac{a}{r} \cos \theta \right) \right)$$

$$V(M) \approx \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{a}{r} \cos \theta + \frac{a}{r} \cos \theta \right) = \frac{\lambda a \cos \theta}{\pi\epsilon_0 r}$$

$$\boxed{V(M) = K \frac{\cos \theta}{r}}$$

7. Composantes du champ.

$$E_r = -\frac{dV}{dr} \rightarrow E_r = K \frac{\cos \theta}{r^2}$$
$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{dV}{d\theta} \rightarrow E_\theta = K \frac{\sin \theta}{r^2}$$