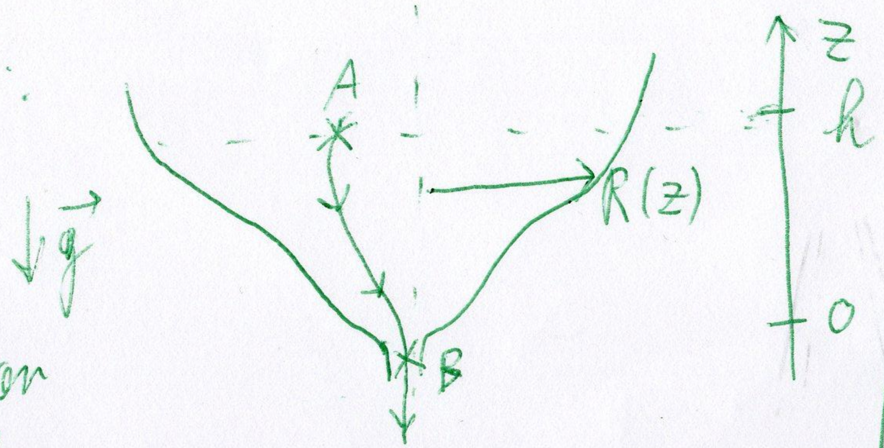
1. Clepsydre

Clepsydre :



Solide de révolution tel que lors de la vidange : $\dot h(t) = cste$?

Torricelli // Bernoulli faible :

Le long d'une ligne de courant

$$\frac{u^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gz = cste$$

$\Rightarrow$ Entre A et B : $\dfrac{v_B^2}{2} + \dfrac{P_0}{\rho} = \dfrac{\dot h^2}{2} + \dfrac{P_0}{\rho} + gh$

ie $\dot h^2 + 2gh - v_B^2 = 0$ (1)

Et $Q = v_B S_B = \pi R(h)^2 \dot h \Rightarrow v_B^2 = \dfrac{\pi^2 R^4}{S_B^2} \dot h^2$

Surface du trou en B

Donc (1) devient : $\dot h^2 + 2gh - \dfrac{\pi^2 \dot h^2}{S_B^2} R^4 = 0$

$\Rightarrow \dot h^2 \left(1 - \dfrac{\pi^2}{S_B^2} R^4\right) + 2gh = 0$. (2)

$\dot{h}'^2$

$$\frac{d(2)}{dt} \Rightarrow -\frac{4\pi^2 \dot{h}'^2}{S_B^2}\dot{R}R^3 + 2g\dot{h}_{=0} \ (\text{car } \dot{h}' = 0)$$

Donc $\dfrac{dR}{dt} = + \dfrac{g S_B^2}{2\pi^2 \dot{h}' R^3}$

Donc $R^3 dR = + \dfrac{g S_B^2}{2\pi^2 \dot{h}'} dt$

Avec $dz = \dot{h}\, dt$:

$$R^3 dR = + \frac{g S_B^2}{2\pi^2 \dot{h}'^2} dz$$

On a considéré $\dot{h} = \text{cste}$ ⚠ $\Rightarrow$ On peut intégrer :

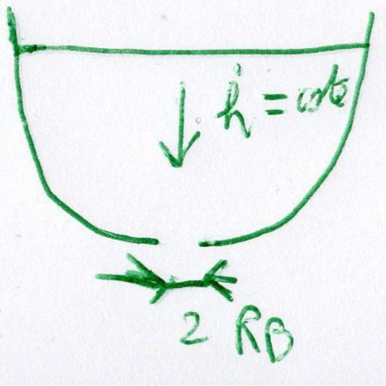
$$\int_{R_B}^{R(z)} R^3 dR = \int_0^z + \frac{g S_B^2}{2\pi^2 \dot{h}'^2} dz$$

($\pi R_B^2 = S_B$)

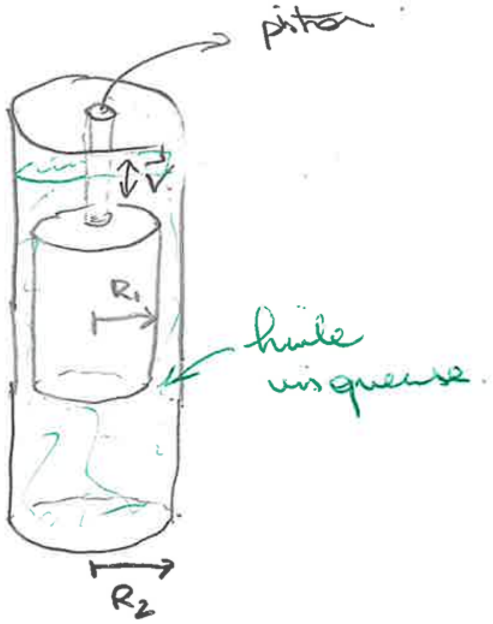
$$\Rightarrow R(z) = \left(R_B^4 + \frac{g S_B^2 z}{2\pi^2 \dot{h}'^2}\right)^{1/4}$$

$\Rightarrow$ Il faut un rayon

$$R(z) = \left(R_B^4 + \frac{g S_B^2}{2\pi^2 \dot{h}'^2} z\right)^{1/4} :$$



4.2 Amortisseur à effet visqueux.

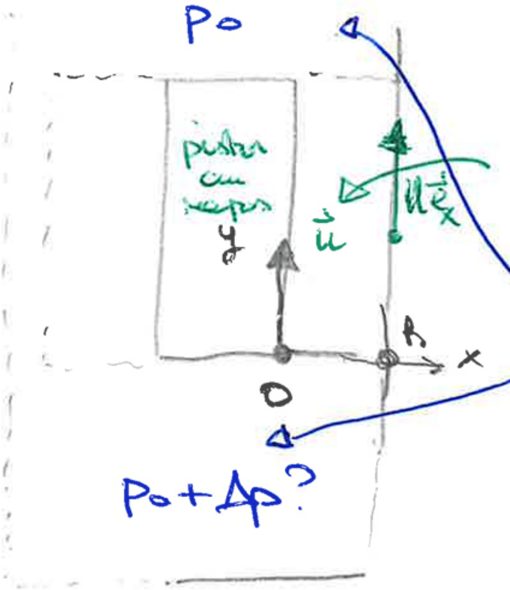


La vitesse $\vec V$ du piston est ralentie par une force de friction

$$\vec F = -\underbrace{\alpha}_{\text{que vaut ce } \alpha .} \vec V$$

Q : α dû aux contraintes visqueuses ? ou dû à la pression ?

On se place ds le référentiel du piston et on suppose l'entrefer $R_2 - R_1 = h << R_1$ ou R_2. Cela permet d'ignorer les effets de courbure (cylindrique). On utilise un système de coordonnées locales, attaché sur le bord du piston



on est intéressé par l'écoulement ici. En $x = h$, on a une paroi qui se déplace $u\vec e_x$. En $x = 0$, piston au repos

ici on veut seulement connaître la pression. En haut on suppose $p = p_0$ d'ailleurs

$$\underbrace{\Delta p}_{} ?$$

1. $\rho(\partial_t u_x + u_x \partial_x u_x + u_y \partial_y u_x) = -\partial_x p + \eta(\partial^2_{xx} + \partial^2_{yy}) u_x$

Dans l'entrefer on a en bonne approx.

$\vec{u} \simeq u_y(x)\, \vec{e_y}$

Ainsi il reste

$0 \simeq -\partial_x p \Rightarrow p = p(y)$

La pression ne varie que selon y.

2. Selon y

$\rho(\underbrace{\cancel{\partial_t u_y}}_{\text{stat.}} + \underbrace{u_x \cancel{\partial_x u_y}}_{\substack{\text{invar selon}\\ u_x=0}} + \underbrace{u_y \cancel{\partial_y u_y}}_{\substack{\text{invar selon}\\ y}}) = \cancel{-\partial_y p}$ eh non on doit le garder (stylo)!! $+ \eta(\partial^2_{xx} + \underbrace{\cancel{\partial^2_{yy}}}_{\text{invar.}}) u_y$

On doit bien garder $-\partial_y p$! Mes excuses.

$$0 \simeq -\partial_y p + \eta \partial^2_{xx} u_y \qquad (*)$$

Les CL pour u_y sont.

$u_y|_{x=0} = 0$

$u_y|_{x=h} = U$

(Δ réf. piston)

3. Comme $\partial_y p$ ne dépend pas de x, on peut intégrer $(*)$ selon x.

$$u_y = \frac{(\partial_y p)}{\eta} \frac{x^2}{2} + Ax + B$$

Avec la CL en $x=0$, $u_y|_{x=0}=0$ on a

$B = 0$

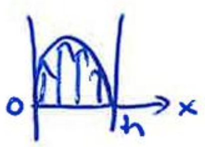
Avec la CL en $x=h$, $u_y|_{x=h} = U$

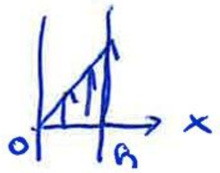
$$U = \frac{(\partial_y p)}{2\eta} h^2 + A h$$

$$\Leftrightarrow \quad A = -\frac{(\partial_y p)}{2\eta} h + \frac{U}{h}$$

Ainsi

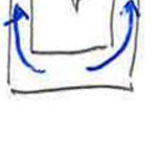
$$u_y = \underbrace{\frac{\partial_y p}{2\eta} x(x-h)}_{\text{Poiseuille}} + \underbrace{\frac{U}{h} x}_{\text{Couette (plan)}}$$





⚠ On ne connaît pas encore $\partial_y p$. L'écoulement n'est donc pas encore parfaitement connu.

Le mouvement du piston injecte de la matière dans l'entrefer



$\Rightarrow$ Débit dans entrefer corrélé à U

4. On utilise la formule approximative pour calculer Q_v.

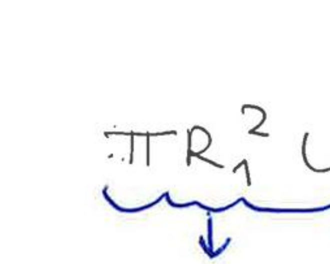
$$Q_v = 2\pi \underbrace{R_1}_{\text{ou } R_2} \int_0^h u_y(x)\,dx.$$

$$= 2\pi R_1 \int_0^h \left[\left(\frac{\partial_y p}{2\eta}\right)\left(x^2 - hx\right) + \frac{U}{h}x\right] dx.$$

$$= 2\pi R_1 \left[\left(\frac{\partial_y p}{2\eta}\right)\underbrace{\left(\frac{h^3}{3} - \frac{h^3}{2}\right)}_{-\frac{h^3}{6}} + \frac{Uh}{2}\right]$$

$$= 2\pi R_1 \left[-\left(\frac{\partial_y p}{12\eta}\right)h^3 + \frac{Uh}{2}\right]$$

5.



le debit injecté dans l'entrefer

$$\underbrace{\pi R_1^2 U}_{\substack{\text{debit crée} \\ \text{par le deplacement} \\ \text{du piston} \\ \text{à vitesse} \\ U}} = Q_v$$

Ici R_1 ou R_2.

$$\cancel{\pi} R_1^{\cancel{2}} U = \cancel{2\pi} \cancel{R_1} \left[-\frac{\partial_y p}{12\eta} h^3 + \frac{Uh}{2} \right]$$

$$\Leftrightarrow \quad \partial_y p = \underbrace{- \frac{6\eta U R_1}{h^3}} + \frac{6\eta U}{h^2}$$

terme dominant car $\frac{R_1}{h^3} >> \frac{1}{h^2}$

sous les hypothèses que nous nous sommes données.

En bonne approx, on a donc.

$$\partial_y p \simeq - \frac{6\eta U R_1}{h^3}$$

6. Intégration

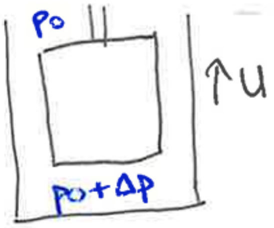
$$p(y) \simeq - \frac{6\eta U R_1}{h^3} y + C$$

Avec $p(\ell) = p_0$ et $p(0) = p_0 + \Delta p$ on a

$$p(y) \simeq p_0 + \frac{6\eta U R_1}{h^3} (\ell - y).$$

Le mouvement crée une surpression

$$\Delta p \simeq \frac{6\eta U R_1 \ell}{h^3} \quad \text{dans le bas.}$$



Signe ok : le fluide du bas est comprimé si $U > 0$

$\Rightarrow \Delta p > 0$

7. Cette surpression crée une force vers le haut

$$F_p = \Delta p \, \pi R_1^2$$

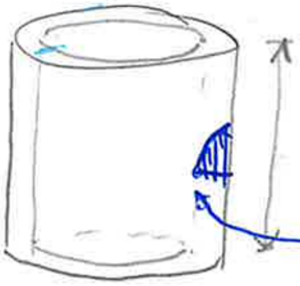
$$= 6\pi \eta U \ell \frac{R_1^3}{h^3} = \alpha U$$

forte dépendance avec $\frac{h}{R_1}$

Cette force a le bon signe car si la paroi se déplace à vitesse $+U$ alors le piston à vitesse $V = -U$ ds le référentiel de l'amortisseur

$$\Rightarrow F_p = -\alpha V$$

8. Les contraintes visqueuses peuvent contribuer aussi à la force.



Force sur piston

visqueuse

contrainte ici

$$\sigma_{yx}^{(v)}\Big|_{x=0} = \eta \, \partial_x u_y \Big|_{x=0}.$$

$$= \eta \left(\frac{\partial_y p}{2\eta} (-h) + \frac{U}{h} \right)$$

La force visqueuse supplémentaire sera donc

$$F_v = \sigma_{yx}^{(v)}\Big|_{x=0} \underbrace{2\pi R_1 e}_{\text{surface du piston}}$$

$$= \left(-h \frac{\partial_y P}{2} + \eta \frac{U}{h}\right) 2\pi R_1 e$$

$$= \left(3\eta \frac{U R_1}{h^2} + \eta \frac{U}{h}\right) 2\pi R_1 e$$

$$= \underbrace{6\pi \eta U e \frac{R_1^2}{h^2}}_{\text{terme dominant si } h \ll R_1} + 2\pi \eta U e \frac{R_1}{h}$$

$$\simeq 6\pi \eta U e \frac{R_1^2}{h^2}$$

Si on compare cette force visqueuse à la force de pression

$$\frac{F_v}{F_p} \simeq \frac{6\pi\eta U e \frac{R_1^2}{h^2}}{6\pi\eta U e \frac{R_1^3}{h^3}} \simeq \frac{h}{R_1} \ll 1$$

$\Rightarrow$ La force visqueuse est négligeable devant la force de pression