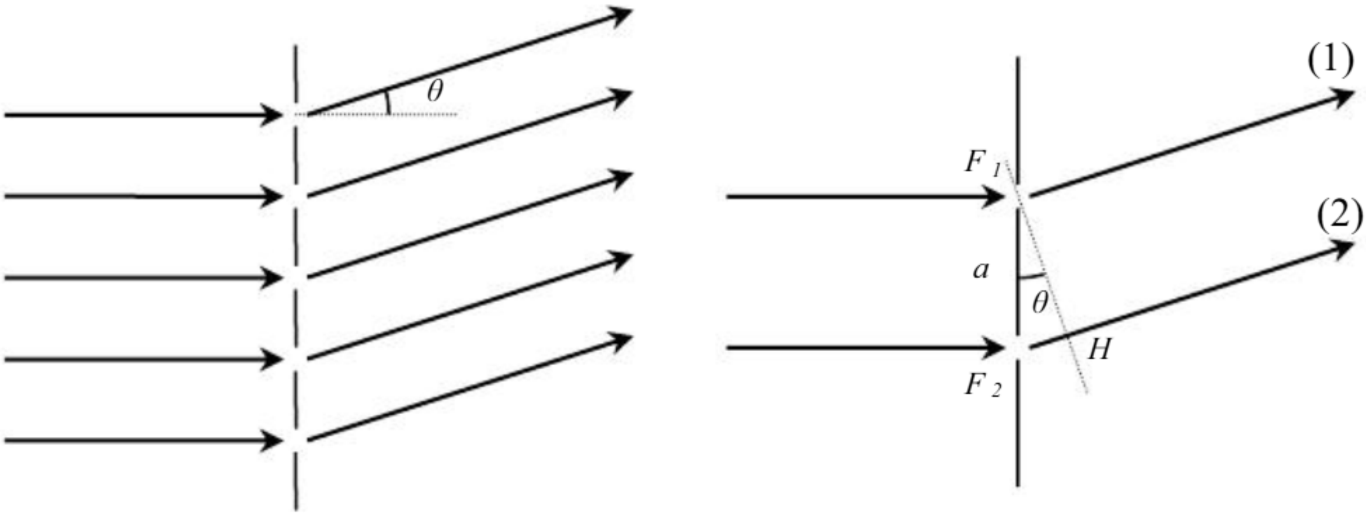
1) On détermine la différence de marche entre deux ondes successives sortant du réseau dans la direction $\theta$.




Pour les ondes (1) et (2), entre la source $S$ et le point $M$ d'observation :

$$\delta = (SM)_2 - (SM)_1 = (F_2H) + (HM) - (F_1M) = (F_2H) = a \sin\theta$$

Lorsque les ondes (1) et (2) sont en phase, il y a en fait interférences constructives entre toutes les ondes. La condition d'interférences constructives s'écrit :

$\delta = p\,\lambda$ avec $p$ entier (relatif), c'est-à-dire : $\boxed{a\sin\theta_p = p\lambda}$ avec $p$ entier relatif

Cette relation impose $\left|\sin\theta_p\right| = |p|\dfrac{\lambda}{a} \leq 1$, c'est-à-dire : $|p| \leq \dfrac{a}{\lambda} = 2{,}02$.

Les valeurs possibles pour $p$ sont donc : $-2, -1, 0, 1$ et $2$. En pratique, les ordres $-2$ et $2$ ne seront pas visibles compte tenu de la valeur très élevée de l'angle $\theta_2$ (proche de 90°).

2) Le déphasage entre les ondes venant de la $i$-ème fente et la $(i + N/2)$-ème fente vaut $\dfrac{N}{2}\Delta\varphi = 2\pi\dfrac{Np}{2} \pm \pi$. Puisque $\dfrac{Np}{2}$ est un entier relatif, cela signifie que les deux ondes en question sont en opposition de phase. En considérant qu'elles ont la même amplitude (justifié par le fait que la lumière incidente est uniforme et que toutes les fentes sont identiques), cela entraîne que la somme des deux champs associés à ces ondes est constamment nulle. Le raisonnement précédent ne dépendant pas de la valeur de $i$ entre 1 et $N/2$, cela implique que les $N$ ondes vont s'annuler deux à deux : $\boxed{\text{l'intensité résultante est donc nulle}}$.

3) Les maxima d'intensité en sortie sont les directions $\theta_p$ telles que $\Delta\varphi = 2\pi p$ (interférences constructives entre toutes les ondes). D'après la question précédente, il existe de part et d'autre une direction où l'intensité tombe à zéro (pour la première fois), les deux directions vérifiant $\Delta\varphi = 2\pi p \pm \dfrac{2\pi}{N}$, c'est-à-dire $\delta = p\lambda \pm \dfrac{\lambda}{N}$.

Dans une direction $\theta_p + \delta\theta_p$ proche de la direction $\theta_p$ on peut écrire :

$$\delta = a\sin\left(\theta_p + \delta\theta_p\right) = a\left(\sin\theta_p \cos\delta\theta_p + \sin\delta\theta_p \cos\theta_p\right)$$

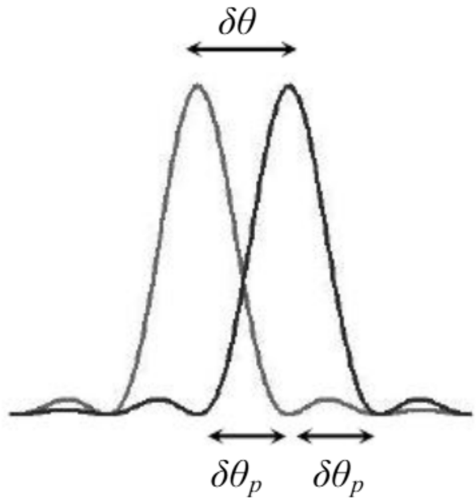
On développe à l'ordre 1 en $\delta\theta_p << 1$ (inégalité attendue puisque $N >> 1$) :

$$\delta = a\sin\theta_p + a\cos\theta_p\,\delta\theta_p = p\lambda + a\cos\theta_p\,\delta\theta_p$$

On en déduit que l'intensité devient nulle dans les directions $\theta = \theta_p \pm \delta\theta_p$ telles que $\delta\theta_p = \dfrac{\lambda}{Na\cos\theta_p}$, c'est-à-dire $\boxed{\delta\theta_p = \dfrac{\lambda}{L\cos\theta_p}}$.

4) A l'ordre $p = 1$ : $\sin\theta_c = \dfrac{\lambda_0}{a}$, soit numériquement : $\boxed{\theta_c = 29{,}6°}$.

5) Le passage d'une cellule photosensible à la suivante doit permettre d'observer deux signaux décalés en longueur d'onde de $\delta\lambda = 0{,}1$ nm.




Les deux pics, de demi-largeur angulaire $\delta\theta_p$, doivent tout d'abord être suffisamment fins pour ne pas se mélanger. En appelant $\delta\theta$ l'écart angulaire entre les deux signaux, il faut ainsi vérifier le critère (appelé *critère de Rayleigh*) :

$$\delta\theta > \delta\theta_p$$

D'autre part, les deux pics doivent être assez écartés au niveau du capteur pour éclairer deux cellules photosensibles voisines, c'est-à-dire : $f\,\delta\theta > b$.

Pour le pic de longueur d'onde $\lambda$ obtenu à l'ordre $p = 1$ dans la direction $\theta$ on a :

$$a\sin\theta = \lambda$$

Pour le pic de longueur d'onde $\lambda + \delta\lambda$ dans la direction $\theta + \delta\theta$ :

$$a\sin\left(\theta + \delta\theta\right) = \lambda + \delta\lambda$$

On soustrait ces deux relations et on développe à l'ordre 1 en $\delta\theta << 1$ pour obtenir :

$$\delta\theta = \frac{\delta\lambda}{a\cos\theta}$$

Les deux conditions précédentes, exprimées au voisinage de $\theta_c$ deviennent donc :

- $\dfrac{\delta\lambda}{a\cos\theta_c} > \dfrac{\lambda_0}{L\cos\theta_c}$ soit : $\boxed{L > L_{\min} = \dfrac{\lambda_0 a}{\delta\lambda} = 14{,}3 \text{ mm}}$
- $f\,\dfrac{\delta\lambda}{a\cos\theta_c} > b$ soit : $\boxed{f > f_{\min} = \dfrac{ab\cos\theta_c}{\delta\lambda} = 74 \text{ mm}}$

6) Le capteur a une longueur totale : $N_p\, b = 5{,}12$ mm, correspondant à un écart angulaire $\Delta\theta = \dfrac{N_p b}{f}$. En supposant $\Delta\theta << \theta_c$, on peut estimer la plage de longueurs d'onde en utilisant la relation obtenue à la question précédente $\Delta\theta = \dfrac{\Delta\lambda}{a\cos\theta_c}$.

On en déduit $\Delta\lambda = a \cos \theta_c \, \Delta\theta = 102$ nm (on prenant $f = f_{\text{min}}$) ce qui donne une plage de longueur d'onde $\left[ \lambda_0 - \dfrac{\Delta\lambda}{2}, \lambda_0 + \dfrac{\Delta\lambda}{2} \right] \approx \boxed{[789 \text{ nm}, 891 \text{ nm}]}$.