

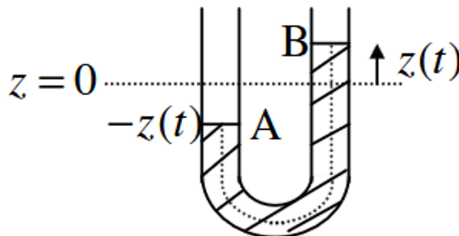
1 Question de cours

Notion d'écoulement parfait et de couche limite. Conséquences sur les conditions aux limites.

2 Oscillations d'un liquide dans un tube en U

On considère un liquide, supposé incompressible et parfait, de masse volumique ρ , contenu dans les deux branches d'un tube en U. On note L la longueur moyenne du liquide dans le tube (suivant les pointillés). À l'équilibre les deux surfaces libres du liquide dans les deux branches sont à la même altitude $z = 0$.

On provoque une dénivellation entre les deux surfaces libres et on laisse évoluer librement le système, on observe alors des oscillations de période T , notre inconnue. On note z et $-z$ les cotes des deux surfaces libres.



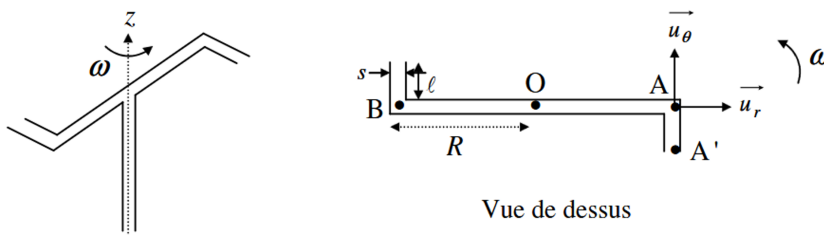
1. Montrer que l'équation d'Euler peut s'écrire sous la forme :

$$\vec{\text{grad}} \left(P + \rho g z + \rho \frac{v^2}{2} \right) + \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}.$$

2. Montrer que $z(t)$ vérifie une équation différentielle de la forme $\ddot{z} + \omega_0^2 z = 0$, on exprimera ω_0 en fonction de L et g l'accélération de pesanteur.
3. En déduire la période des oscillations.
4. Commenter vos résultats.

3 Tourniquet hydraulique

Considérons un tourniquet hydraulique destiné à l'arrosage des jardins. L'eau, de masse volumique ρ , est amenée suivant l'axe vertical Oz ascendant, puis s'écoule par deux bras horizontaux identiques, de longueur R , munis de deux becs d'éjection, de section s , perpendiculaires aux bras et de longueur ℓ négligeable devant R .

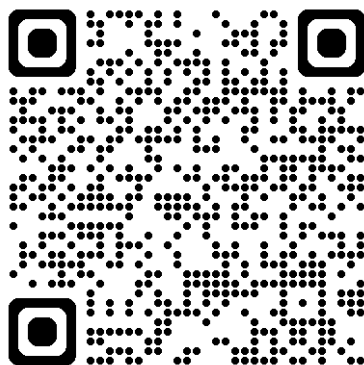


Ce tourniquet est alimenté en eau avec un débit volumique D_v constant, on se place en régime stationnaire et on note ω la vitesse angulaire de rotation du tourniquet autour de Oz . ω est constante en régime stationnaire.

On suppose que le tourniquet est soumis à des actions de contact de la part de son support de moment Γ par rapport à Oz .

On cherche à exprimer ω en fonction de D_v .

1. Montrer que la vitesse d'éjection de l'eau en A s'écrit : $\vec{v}_A = \left(R\omega - \frac{D_v}{2s} \right) \vec{u}_\theta$.
2. Effectuer un bilan de moment cinétique et montrer que $\frac{D\sigma_z}{Dt} = \rho D_v R \left(R\omega - \frac{D_v}{2s} \right)$ où σ_z est le moment cinétique de l'ensemble {tourniquet+eau dans le tourniquet} par rapport à l'axe Oz .
3. Appliquer le théorème du moment cinétique en déduire l'expression de ω en fonction de D_v , R , s et Γ .
4. Commenter l'expression obtenue en l'absence de frottement ($\Gamma = 0$). Qui tourne le plus vite : un petit ou un grand tourniquet ? Quel est l'intérêt d'augmenter ω ?



Correction