2. Modèle d'une tornade

1. Le vecteur tourbillon est défini tel que $\overrightarrow{rot}\,\vec{v} = 2.\vec{\Omega}$. D'autre part l'écoulement est supposé incompressible, donc $div\,\vec{v} = 0$.

On peut identifier ces relations au cas du champ magnétique crée par une distribution de courant : $\left|\begin{array}{l} \overrightarrow{rot}\,\vec{B} = \mu_0\,\vec{j} \\ div\,\vec{B} = 0 \end{array}\right.$ et

$\oint \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_0 \iint \vec{j}\cdot\vec{dS}$

On a donc de même $\oint \vec{v}\cdot\vec{dl} = 2.\iint \vec{\Omega}\cdot\vec{dS}$, applicable sous réserve de conditions de symétrie et d'invariance que l'on doit étudier.

On observe bien une invariance par rotation d'angle θ ce qui permet d'en déduire que

$$\left|\begin{array}{l} r \leqslant a:\ 2.\pi.r.v(r) = 2.\Omega_0.\pi.r^2 \\ r > a:\ 2.\pi.r.v(r) = 2.\Omega_0.\pi.a^2 \end{array}\right.$$

On en déduit le champ des vitesses : $\vec{v} = \left|\begin{array}{l} r \leqslant a:\ \Omega_0.r \\ r > a:\ \dfrac{\Omega_0.a^2}{r} \end{array}\right.$

2. On a alors dans ce cas $r \geq a \forall r \neq 0$, et par conséquent $v(r) = \dfrac{\Omega_0.a^2}{r} = \dfrac{\Gamma}{2.\pi.r}$.

On peut remarque que $\Phi = \dfrac{\Gamma.\theta}{2.\pi} + C^{te}$ constitue bien un potentiel des vitesses.

Ce potentiel n'a de signification que localement car on remarque que $\Phi(2.\pi) \neq \Phi(0)$ alors qu'il s'agit du potentiel pour un même point...

1. Perte de charge

1. Si on néglige les effets de la pesanteur : symétrie du problème $\vec{v} = v(r,z).\vec{u_z}$.

2. Or le fluide est incompressible donc $div\,\vec{v} = 0$ soit $\dfrac{\partial v}{\partial z} = 0$ donc $\vec{v} = v(r).\vec{u_z}$.

3. $\vec{a} = \dfrac{D\vec{v}}{dt} = (\vec{v}\bullet\overrightarrow{grad})\vec{v} + \dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{1}{2}.\overrightarrow{grad}(v^2) - \vec{v}\wedge\overrightarrow{rot}\,\vec{v} + \dfrac{\partial v}{\partial t} = v(r).\dfrac{\partial}{\partial z}.v(r).\vec{u_z} + \dfrac{\partial v}{\partial t} = 0$

4. $\overrightarrow{grad}(p) \equiv \eta\Delta\vec{v}$ ce qui donne $\dfrac{dp}{dz} = \eta\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\left(r.\dfrac{dv}{dr}\right) = Cte = A$ car c'est du type $f(z) = g(r)$.

$$p(M) = p_1 - \frac{p_1 - p_2}{L}.z$$

5. $\dfrac{dv}{dr} = -\dfrac{p_1 - p_2}{2.\eta.L}.r + \dfrac{A}{r}$ d'après la relation précédente. Donc $v(r) = -\dfrac{p_1 - p_2}{2.\eta.L}.r^2 + A.Lnr + C^{te}$

Comme $\begin{cases} v(r=0) \neq \propto \longrightarrow A = 0 \\ v(R) = 0 \longrightarrow v(r) = -\dfrac{(p_1 - p_2).R^2}{2.\eta.L}.\left(1 - \dfrac{r^2}{R^2}\right) \end{cases}$

6. $Q = \iint \vec{v}.\vec{dS} = K.\dfrac{\pi.R^4}{8.\eta}$ Poiseuille

7. $R = \dfrac{\Delta p}{Q} \equiv \dfrac{\Delta V}{I}$ d'où $R_H = \dfrac{8.\eta.L}{\pi R^4}$