1. Tube en U

Solution

1. L'écoulement étant incompressible, irrotationnel et non stationnaire l'équation d'Euler prend la forme $\rho\left(\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{v^2}{2}\right)+\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\right)=-\overrightarrow{\text{grad}}P+\rho\vec{g}$, et avec $\rho\vec{g}=-\overrightarrow{\text{grad}}(\rho g z)$, on peut écrire :

$\boxed{\overrightarrow{\text{grad}}\left(P+\rho g z+\rho\frac{v^2}{2}\right)+\rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}=\vec{0}}$.

2. Intégrons cette relation le long de la ligne de courant qui passe par le milieu du tube (longueur L) entre A et B :

$\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}\overrightarrow{\text{grad}}\left(P+\rho g z+\rho\frac{v^2}{2}\right)\cdot\overrightarrow{d\ell}+\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}\rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\cdot\overrightarrow{d\ell}=0$, ou bien : $\left[P+\rho g z+\rho\frac{v^2}{2}\right]_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}+\rho\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\cdot\overrightarrow{d\ell}=0$.

Le liquide étant incompressible, chaque du point du liquide a même vitesse $v=\frac{dz}{dt}=v_{\mathrm{B}}$, et de plus : $z=z_{\mathrm{B}}=-z_{\mathrm{A}}$ et $L=cte$.

Le premier terme s'écrit : $\left[P+\rho g z+\rho\frac{v^2}{2}\right]_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}=P_B-P_A+\rho g\left(z_B-z_A\right)+\rho\frac{v_B^2-v_A^2}{2}=2\rho g z$ car $P_A=P_B=P_0$ (la pression atmosphérique locale) et $v_A=v_B$ car chaque du point du liquide a même vitesse.

Le deuxième terme s'écrit : $\rho\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\cdot\overrightarrow{d\ell}=\rho\frac{d}{dt}\left(\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}\vec{v}\cdot\overrightarrow{d\ell}\right)=\rho\frac{dv}{dt}\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}d\ell=\rho\frac{dv}{dt}L=\rho\ddot{z}L$.

Finalement : $2\rho g z+\rho\ddot{z}L=0$, ou bien $\boxed{\ddot{z}+\frac{2g}{L}z=0}$. On en déduit $\boxed{\omega_0=\sqrt{\frac{2g}{L}}}$.

3. On obtient l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique, chaque surface libre possède un mouvement oscillatoire sinusoïdal de période $\boxed{T=2\pi\sqrt{\frac{L}{2g}}}$.

4. Commentaires :

- si L augmente alors T augmente : plus le volume de liquide est important et plus les oscillations sont lentes ;
- T est indépendante de la masse volumique ρ, donc de la nature du fluide. En réalité le liquide est visqueux et on observe un amortissement avant de revenir à la position d'équilibre, les oscillations sont pseudo-périodiques.

Solution

1. La vitesse de l'eau en A (dans le référentiel terrestre fixe) s'écrit, en négligeant la longueur des becs devant celle des bras, via la loi de composition des vitesses : $\overrightarrow{v_A} = \overrightarrow{v_e} + \overrightarrow{v_r}$. La vitesse d'entrainement est celle du tourniquet : $\overrightarrow{v_e} = R\omega\overrightarrow{u_\theta}$.
La vitesse relative de l'eau dans le référentiel tournant lié au tourniquet : $\overrightarrow{v_r} = -v_r\overrightarrow{u_\theta}$ avec $v_r > 0$ telle que $\dfrac{D_v}{2} = sv_r$.
On a donc $\overrightarrow{v_A} = (R\omega - v_r)\overrightarrow{u_\theta}$, soit $\boxed{\overrightarrow{v_A} = \left(R\omega - \dfrac{D_v}{2s}\right)\overrightarrow{u_\theta}}$.
2. Soit S le système ouvert constitué à chaque instant de l'eau contenue dans le tourniquet (l'axe, les 2 bras et les 2 becs), soit σ_z son moment cinétique par rapport à Oz, σ_z est indépendant du temps car le régime est stationnaire.

Soit S* le système fermé constitué à l'instant t du système S et de la masse dm d'eau qui entre à la base du tourniquet pendant une durée dt. A l'instant $t+dt$, S* est constitué de S et des masses dm_A et dm_B qui ont été éjectées en A et B entre les instants t et $t+dt$.
Par définition $D_v = \dfrac{dV}{dt}$ et $m = \rho V$, soit $D_v = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{dm}{dt}$ et $dm = \rho D_v dt$.
La conservation de la masse s'écrit $dm = dm_A + dm_B$.
Le système est symétrique : $dm_A = dm_B$. On a alors $dm_A = dm_B = \dfrac{dm}{2}$.
Considérons la variation de moment cinétique de S* pendant dt : $D\sigma = \sigma_z^*(t+dt) - \sigma_z^*(t)$.
Le moment cinétique de la masse dm d'eau qui entre dans le tourniquet est nul car sa vitesse est parallèle à Oz.
Le poids du tourniquet est de moment nul par rapport à Oz et ne contribue pas à la mise en rotation du tourniquet.
La contribution de la masse dm_A d'eau au moment cinétique à l'instant $t+dt$ est alors :

$$dm_A\left(\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{v_A}\right)\cdot\overrightarrow{u_z} = \frac{1}{2}\rho D_v dt\left(R\overrightarrow{u_r} \wedge \left(R\omega - \frac{D_v}{2s}\right)\overrightarrow{u_\theta}\right)\cdot\overrightarrow{u_z} = \frac{1}{2}\rho D_v R\left(R\omega - \frac{D_v}{2s}\right)dt$$

On a la même contribution en B, d'où $\sigma_z^*(t+dt) - \sigma_z^*(t) = \rho D_v R\left(R\omega - \dfrac{D_v}{2s}\right)dt$.

Or $\sigma_z^*(t+dt) - \sigma_z^*(t) = \dfrac{D\sigma_z^*}{Dt}dt$, et finalement $\boxed{\dfrac{D\sigma_z^*}{Dt} = \rho D_v R\left(R\omega - \dfrac{D_v}{2s}\right)}$.

3. En appliquant le théorème du moment cinétique au tourniquet on obtient $\Gamma = \rho D_v R\left(R\omega - \frac{D_v}{2s}\right)$, soit $\boxed{\omega = \frac{D_v}{2sR} + \frac{\Gamma}{\rho D_v R^2}}$.

4. En l'absence de frottement : $\omega = \frac{D_v}{2sR}$ proportionnelle au débit volumique D_v et inversement proportionnelle à R et s.

$\omega_{\text{exp}} < \frac{D_v}{2sR}$, les frottements ne sont pas négligeables (en particulier les frottements solides au niveau de l'axe de rotation) et $\Gamma < 0$.

ω est proportionnelle à $\frac{1}{R}$: un petit tourniquet tourne plus vite qu'un grand (à débit et section égaux).

L'intérêt d'augmenter ω est d'augmenter v_A et de couvrir une surface arrosée plus importante.