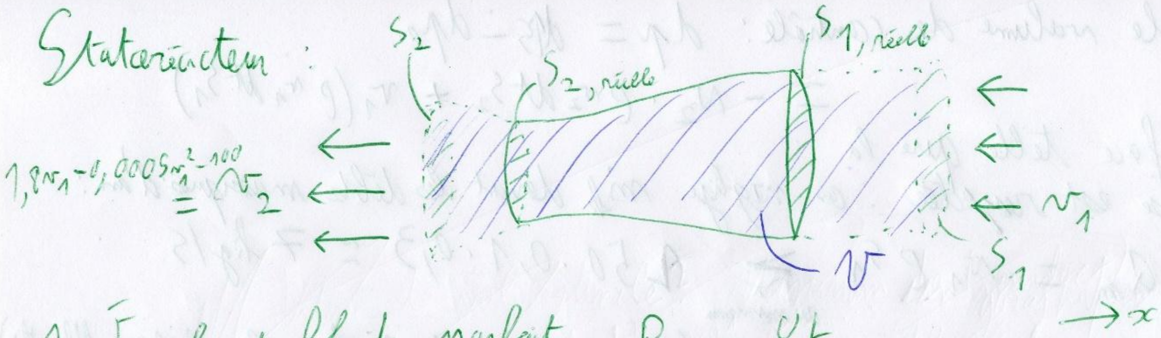
1. Statoréacteur

Statoréacteur :



1. Écoulement fluide parfait : $Re = \frac{UL}{\frac{\eta}{\rho}}$

On prend des valeurs les moins contraignantes, pour pouvoir généraliser
(U minimale, L minimal, ρ minimale)

$U \sim 500 - 1000\ km/h$ (vol subsonique)
$L \sim 1\,m - 10\,m$
$\rho \sim 0,1\ kg/m^3 - 1\ kg/m^3$

$\rightarrow Re_{,minimal} \simeq \dfrac{(140\,m/s)\cdot 1\,m}{\frac{2\cdot 10^{-5}\,Pa\cdot s}{0,1\,kg/s}} \simeq 10^6$

$\rightarrow$ écoulement parfait raisonnable.

2. (Correction dans 3.)

3. Poussée ? Elle vient de la différence de quantité de mouvement air entrant vs air sortant : On réalise un bilan de quantité de mouvement sur le volume de contrôle V.

Pour l'air dans le volume de contrôle : $dp = dp_S - dp_e$
$= -v_2 \cdot \rho v_2 dt S_2 + v_1(\rho v_1 dt S_1)$

On a besoin de S_2 : Surface telle que la conservation de la masse est respectée : on néglige $\dot{m}_k$ devant les débits massiques d'air :
$\dot{m}_k = 0,8\ kg/s$, $Q_m = v_1 \rho S_1 \underset{\text{au minimum}}{\gtrsim} 250 \cdot 0,1 \cdot 0,3 \simeq 7\ kg/s$.

On peut raisonnablement considérer $\dot{m}_k \ll Q_m$ (on pourrait quand même faire le calcul sans l'hypothèse)

$\Rightarrow v_1 \rho S_1 = v_2 \rho S_2 = Q_m$

Donc $dp = (v_1 - v_2)\, Q_m\, dt = (+0,0005 v_1^2 - 0,8 v_1 + 100) Q_m\, dt$

$\rightarrow F_{poussée} = -\frac{dp}{dt} = (-0,0005 v_1^2 + 0,8 v_1 - 100) Q_m$ (action − réaction = signe ⊖)

A.N. : $v_1 = 400\ m/s$, $Q_m = v_1 \rho S_1$

$\rho(10\,km) = ?$: GP : $\rho = \frac{PM}{RT}$, $P(10\,km) = P_0\, e^{-\frac{10\,km}{\delta}} \simeq 3,2\cdot 10^4\ Pa$

$\rightarrow \rho(10\,km) \simeq 0,4\ kg/m^3$

$\Rightarrow Q_m \simeq 45\ kg/s \longrightarrow F_{poussée} \simeq 6,3\ kN$ (c'est relativement peu : avions à réaction subsoniques $\sim 50\ kN$)

4 Vitesse optimale ? : maximum de $F_{poussée}$: $\frac{dF_{poussée}}{dv_1} \sim -0{,}001 v_1 + 0{,}8$

$\to v_{1,max} = 800$ m/s : 2 fois plus que 400 m/s

$\hookrightarrow$ mach $\simeq 2{,}2$ ($c_{son} \simeq 340$ m/s)

$\to$ écoulement supersonique : on perd l'adiabaticité et l'incompressibilité, mais on peut toujours négliger la viscosité dans une certaine mesure.

(et à 800 m/s, $F_{poussée} \simeq 20$ kN : c'est mieux)

Vortex

Solution

1. La tornade possède l'invariance par rotation autour de l'axe Oz donc v ne dépend pas de θ. La trajectoire d'une particule fluide est située dans un plan horizontal $(z = cte)$ donc v ne dépend pas de z. Finalement $\boxed{\vec{v} = v(r)\overrightarrow{u_\theta}}$.

2. Le vecteur tourbillon et le champ des vitesses sont liés via $\boxed{\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}}$.

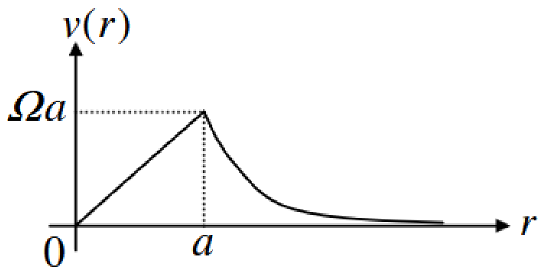
La circulation du champ des vitesses sur une trajectoire de particule fluide s'écrit, d'après le théorème de Stokes : $\oint_\Gamma \vec{v}\cdot\overrightarrow{d\ell} = \iint_\Sigma \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}\,\overrightarrow{dS}$, donc $\oint_\Gamma \vec{v}\cdot\overrightarrow{d\ell} = 2\iint_\Sigma \vec{\Omega}\,\overrightarrow{dS}$.

On choisit pour Γ un cercle de centre O et de rayon r, on a alors $\oint_\Gamma \vec{v}\cdot\overrightarrow{d\ell} = 2\pi r v(r)$.

On choisit pour Σ un disque de centre O et de rayon r et deux cas se présentent :

- $r < a$: $\iint_\Sigma \vec{\Omega}\,\overrightarrow{dS} = \Omega\cdot\pi r^2$, d'où $2\pi r v(r) = 2\Omega\cdot\pi r^2$, soit $v(r) = \Omega\cdot r$;
- $r > a$: $\iint_\Sigma \vec{\Omega}\,\overrightarrow{dS} = \Omega\cdot\pi a^2$, d'où $2\pi r v(r) = 2\Omega\cdot\pi a^2$, soit $v(r) = \frac{\Omega\cdot a^2}{r}$.

3. L'allure de la courbe $v(r)$ est la suivante :



4. Commentaires de quelques valeurs particulières :
   - au centre de la tornade : $v(0) = 0$, c'est une zone de calme (l'œil) ;
   - en $r = a$ la vitesse est maximum, c'est une zone de grand vent (le mur) ;
   - $v \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$: pas d'effet loin de la tornade.