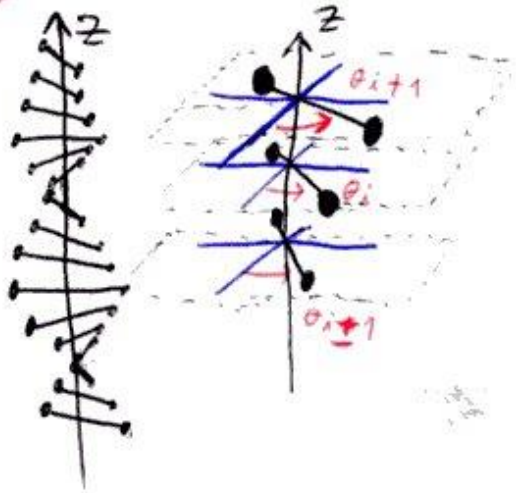
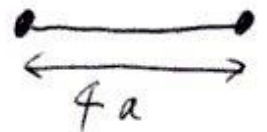


Oscillations sur une échelle de perroquet

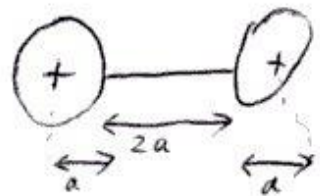


Moment d'inertie barre + 2 masses
autour de l'axe z:

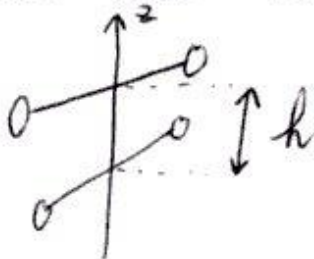
$$J_A = \frac{1604}{15} \text{ ma}^2$$



(distance entre les
centres de masse des
2 barres :

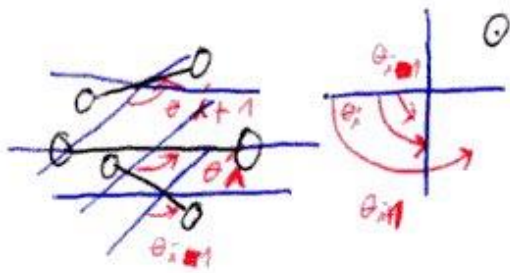


entre 2 modules: hauteur h:



1)

Le câble de torsion couple les modules de proche en
proche, avec un couple de rappel $\Gamma = \pm C|\alpha|$, $C > 0$.



↓ déterminé comme le
signe \pm ∇ pour la
ressort: dépend de
l'extrémité du câble considérée

θ_i voit θ_{i-1} et θ_{i+1} qui ^{essent} de l'amener à leur angle:

$$\theta_i \xrightarrow{\text{action de } |\theta_i - \theta_{i-1}|} \theta_{i-1} \quad \text{et} \quad \theta_i \xrightarrow{\text{action de } |\theta_{i+1} - \theta_i|} \theta_{i+1}$$

$\theta_i - \theta_{i+1} < 0 \Rightarrow \theta_i$ doit augmenter

~~pour~~ pour atteindre la valeur

fixée par $\theta_{i-1} \Rightarrow \Gamma > 0$

$$\Gamma = C(\theta_i - \theta_{i+1})$$

$\theta_{i-1} - \theta_i < 0$: θ_i doit ~~diminuer~~ pour

atteindre la valeur fixée par θ_{i-1}

$$\Rightarrow \Gamma < 0$$

$$\Gamma = -C(\theta_i - \theta_{i-1})$$

synthétise:

$$< 0 \Rightarrow \Gamma = -C(2\theta_i - \theta_{i+1} - \theta_{i-1}) > 0$$

On étudie un $\hat{m} \text{ mod } \hat{h}$ (barreau) numéroté i .

$$\sum M_{(Oz)} = C (-\theta_i + \theta_{i-1}) + C (-\theta_i + \theta_{i+1})$$

En effet, le seul moment subi est celui des 2 bouts de câble de torsion, associés aux modules $i-1$ et $i+1$.

$$\text{TMC: } J \ddot{\theta}_i = \sum M_{(Oz)} = C (-2\theta_i + \theta_{i-1} + \theta_{i+1})$$

(On reconnaît le même type d'équation qu'avec une chaîne de ressorts avec $m \rightarrow J$, $k \rightarrow C$ et $\xi \rightarrow \theta$.)

$$2. \text{ Avec } \theta_i = \theta(z): \theta_{i-1} = \theta(z-h) \text{ et } \theta_{i+1} = \theta(z+h)$$

$$\text{Donc: } \ddot{\theta}(z) + \frac{C}{J} (2\theta(z) - \theta(z-h) - \theta(z+h)) = 0.$$

$$3. \theta_i(x_i, t) = A \cos(\omega t - k x_i) \quad \left(\begin{array}{l} \text{base d'ondes progressives} \\ \text{monochromatiques} \end{array} \right)$$

$$\ddot{\theta}_i(x_i, t) = -\omega^2 \theta_i(x_i, t)$$

$$\text{On note } \underline{\theta}_i = A e^{i(\omega t - k x_i)} \text{ tq } \theta_i = \text{Re}(\underline{\theta}_i).$$

$$\text{Alors } \underline{\theta}_{i+1} = A e^{i(\omega t - k x_i - k h)} = \underline{\theta}_i e^{-i k h}$$

$$\text{et } \underline{\theta}_{i-1} = \underline{\theta}_i e^{i k h}.$$

$$\text{Le TMC donne: } -\omega^2 \underline{\theta}_i = \frac{C}{J} (e^{i k h} + e^{-i k h} - 2) \underline{\theta}_i$$

$$\text{Donc } -\omega^2 = 2 \frac{C}{J} (\cos(kh) - 1) = -4 \frac{C}{J} \sin^2\left(\frac{k h}{2}\right)$$

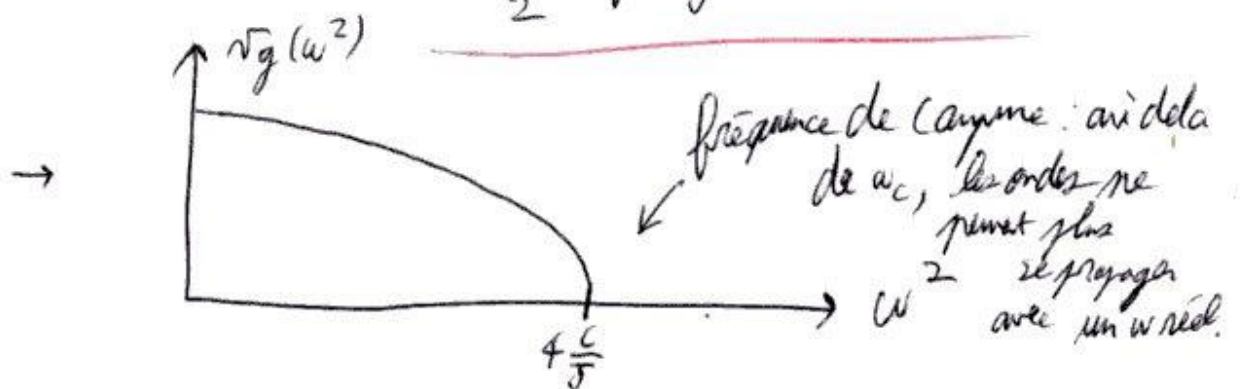
$$4. \text{ milieu non dispersif } \Leftrightarrow v \text{ ne dépend pas de la fréquence i.e. } \omega \Leftrightarrow \omega^2 \sim k^2$$

Or, $\omega^2 \sim \sin^2\left(\frac{\hbar}{2}k\right)$, donc, mis à part pour $\frac{\hbar k}{2} \ll 1$, le milieu est dispersif.

$$5. \quad v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk} \left(2\sqrt{\frac{c}{J}} \sin\left(\frac{\hbar k}{2}\right) \right) = \hbar \sqrt{\frac{c}{J}} \cos\left(\frac{\hbar k}{2}\right)$$

$$= \hbar \sqrt{\frac{c}{J}} \cdot \sqrt{1 - \sin^2\left(\frac{\hbar k}{2}\right)} = \hbar \sqrt{\frac{c}{J}} \cdot \sqrt{1 - \frac{J}{4c} \omega^2}$$

$$= \frac{\hbar}{2} \sqrt{4\frac{c}{J} - \omega^2}$$



6. $\hbar \ll a \Rightarrow$ D'après 4, le milieu est non dispersif \Rightarrow passage à la limite continue:

$$\ddot{\theta} - \frac{c\hbar^2}{J} \theta'' = 0 : \text{D'Alembert.}$$

7. On ajoute un ressort $\vec{F}_{\text{ressort}} = -b \dot{\theta} \hat{e}_\theta$

$$\Rightarrow \Gamma_{\text{ressorts}(0,2)} = -2(2a) \cdot b \dot{\theta} : \text{le signe est correct: } \dot{\theta} > 0$$

les 2 bras de chaque module \nwarrow bras de levier par la force de frottement exercée sur 1 masse.

$$= -4ab \dot{\theta}$$

$\Gamma_{\text{ressort}} < 0$

Nouveau TMC: $J \ddot{\theta}_i = c(\theta_{i-1} + \theta_{i+1} - 2\theta_i) - 4ab \dot{\theta}_i$

Hypothèse pour le passage à la limite continue : $h \ll a$.

$$\rightarrow \ddot{\theta} - \frac{ch^2}{J} \theta'' = -\frac{4ab}{J} \dot{\theta}$$

Pseudo d'Alembert (terme de ~~droite~~ droite non nul).

8. On injecte une solution d'OPM (base d'ondes quelconques)

$$\rightarrow -\omega^2 + \frac{ch^2}{J} k^2 = -i \frac{4ab\omega}{J}$$

9. Relation de dispersion classique avec terme complexe en plus:

... (calculs dans le cours) (pas nécessaire à l'échelle)

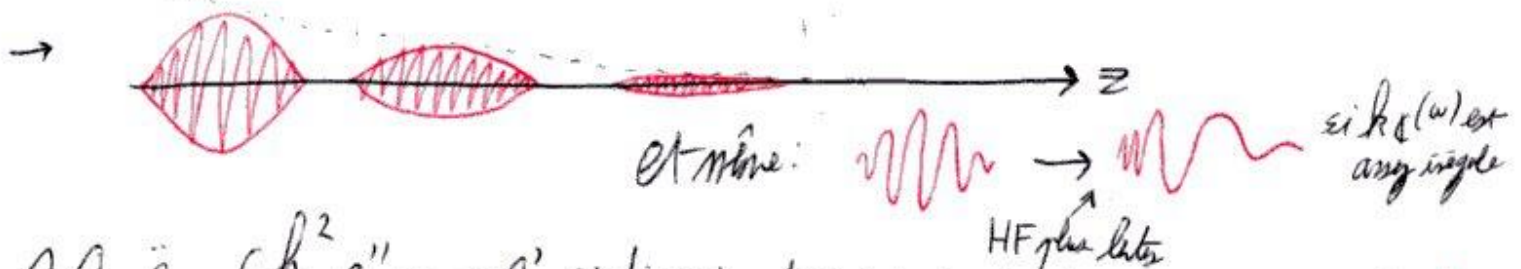
$$k(\omega) = k_{IR}(\omega) + i k_c(\omega)$$

$$\rightarrow e^{i(\omega t - k z)} = e^{i(\omega t - k_{IR} z)} \cdot e^{k_c z}$$

\nwarrow exponentielle décroissante
 $(k_c < 0)$
 onde évanescente

→ Le paquet d'onde disparaît en se propageant.

• $k_c(\omega)$ dépend de ω : le paquet d'onde, combinaison de plein d'ondes à ω différentes, s'étale.



10. $\ddot{\theta} - \frac{ch^2}{J} \theta'' = \sim \theta'$ → dispersion dépendant de la distance parcourue et pas du temps écoulé. Origine: échauffement local de la torsion.

Matériau fluide: $\sim \dot{\theta}^2$ → phénomène non linéaire: vitesse fonction de l'amplitude, ... compliqué.