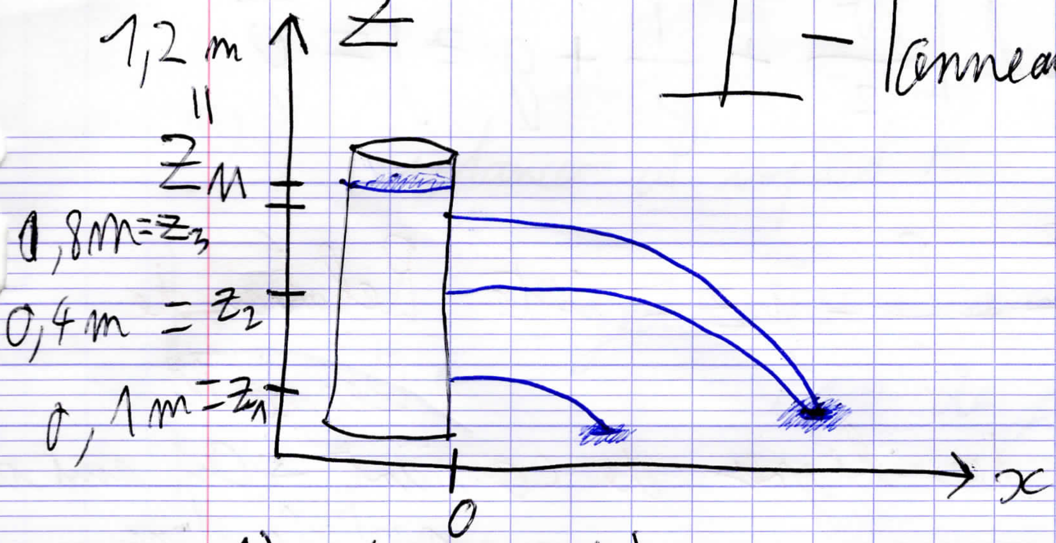
I - Tonneau percé



1) Vitesse d'éjection aux trous ?

Hypothèses : eau : fluide incompressible

+ écoulement fluide parfait (η faible)

N-S : $\cancel{\nu \Delta \vec{v}}$

+ écoulement irrotationnel (symétries, pas de rotation, ... etc.)

↳ $\overrightarrow{rot}(\vec{v}) = \vec{0}$

+ écoulement stationnaire

$$\text{N-S} : \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} = \frac{-\overrightarrow{grad}(P)}{\rho} + \vec{g} \cancel{+ \nu \Delta \vec{v}}$$

$$(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} = \overrightarrow{grad}\left(\frac{v^2}{2}\right) - \underbrace{\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}(\vec{v}))}_{=\vec{0}} \quad (= \overrightarrow{rot}(\vec{0}))$$

accélération convective

$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$: stationnaire

$$\rightarrow \overrightarrow{grad}\left(\frac{v^2}{2}\right) = -\overrightarrow{grad}\left(\frac{P}{\rho}\right) + \overrightarrow{grad}(-gz).$$

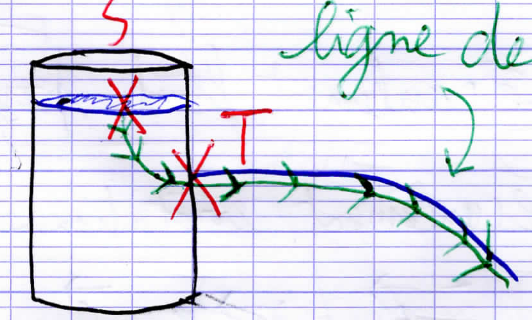
$= -\frac{1}{\rho}\overrightarrow{grad}(P)$: incompressibilité : ρ = cste

$$\Rightarrow \overrightarrow{grad}\left(\frac{v^2}{2}+\frac{P}{\rho}+gz\right)=\vec{0}$$

$$\rightarrow \frac{v^2}{2}+\frac{P}{\rho}+gz = \text{cste}$$ Relation de Bernoulli

le long des lignes de courant → On suit une particule dans l'écoulement : N-S = PFD sur particules de fluide.

Ici :



ligne de courant : le niveau de l'eau baisse : les particules viennent de la surface.

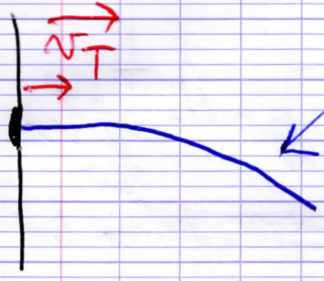
S : $P = P_0$, $v = 0$, $z = z_M$

T : $P = P_0$, $v = v_T$, $z = z_T$

Bernoulli $\Rightarrow$ $v_T = \sqrt{2 \cdot g(z_M - z_T)}$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_1 = 0{,}10\text{ m} \rightarrow v_1 \approx 4{,}6\text{ m/s} \\ z_2 = 0{,}40\text{ m} \rightarrow v_2 \approx 3{,}9\text{ m/s} \\ z_3 = 0{,}80\text{ m} \rightarrow v_3 \approx 2{,}8\text{ m/s} \end{cases}$$

2) Distance d'impact ?



trajectoire $\simeq$ parabolique (pas de frottements)

Chute libre $\curvearrowright$ $z(t) = -\frac{g}{2}t^2 + z_T$

$$x(t) = v_T t$$

$$\Rightarrow x(z) = v_T \cdot \sqrt{-2\frac{z - z_T}{g}}$$

$\curvearrowright$ $x_{impact} = \sqrt{2(z_T)} \cdot \sqrt{2(z_M - z_T)}$

$$= 2\sqrt{z_T(z_M - z_T)}.$$

$$\Rightarrow \left|\begin{array}{l} z_1 = 0{,}10\,m \rightarrow x_{1,impact} \simeq 0{,}66\,m \\ z_2 = 0{,}40\,m \rightarrow x_{2,impact} \simeq 1{,}1\,m \\ z_3 = 0{,}80\,m \rightarrow x_{3,impact} \simeq 1{,}1\,m \end{array}\right.$$

II - Neige artificielle

flux interieur $\rightarrow$ ext

Loi de Newton : $\phi = h\, S\, \Delta T$

h : coeff conducto-convectif

$$\phi = -\frac{dH}{dt} = -c_{eau}\frac{dT}{dt}.$$

$$\rightarrow \quad \frac{dT}{dt} = -c_{eau}\, hS\, T + c_{eau}\, hS\, T_{ext}$$

$T \nearrow \Rightarrow \frac{dT}{dt} \searrow$: goutte plus chaude

→ se refroidit plus vite

$T_{ext} \searrow \Rightarrow \frac{dT}{dt} \searrow$: air plus froid

→ se refroidit plus vite

2) Solution ?

$$T(t) = cste\, e^{-c_{eau} hS t} + T_{ext}$$

$$T(t=0) = T_i$$

$$\Rightarrow T(t) = (T_i - T_{ext})\, e^{-\frac{t}{\tau}} + T_{ext}$$

avec $\tau = (c_{eau}\, h\, S)^{-1}$

$[c_{eau}] = [J/K]$, $[hS] = [J/s/K] = [\phi/\Delta T]$

$\rightarrow [c_{eau}\, h\, S] = [s^{-1}]$

t_1 ? : $T(t_1) = 0 \Leftrightarrow e^{-\frac{t_1}{\tau}} = \frac{T_{ext}}{T_{ext} - T_i}$

$$\rightarrow t_1 = -\tau \ln\left(\frac{T_{ext}}{T_{ext} - T_i}\right)$$

$\tau = (c_{eau}\, h\, S)^{-1}$

inconnu : dépend de paramètres extérieurs

$= \left(\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_{eau} c_{m,eau} S\, h\right)$

3) Surfusion

i) Fonction d'état constante

adiabatique + isobare

$$\longrightarrow H : dH = \underbrace{T\,dS}_{=0 \,:\, \text{adiabatique}} + \underbrace{V\,dP}_{=0 \,:\, \text{isobare}}$$

ii) x ? : masse d'eau solidifiée ? (m_{sol})

↳ telle que ΔH apporté fait monter T de T_{ext} à $T = 0°C$:

$$\Delta H = -m_{sol} L_{fus} = C_{m,\text{eau, liquide}}\, m \left((T = 0°C) - T_{ext} \right)$$

$$\Rightarrow m_{sol} = -\frac{m C_{m,\text{eau, liquide}}}{L_{fus}} \left(\Delta T_{0-ext} = 15\,K \right)$$

$$\Rightarrow \frac{m_{sol}}{m} = -\frac{C_{m,\text{eau, liquide}}}{L_{fus}} \cdot (15\,K)$$

$$\frac{m_{sol}}{m} = 1 - x$$

$$\rightsquigarrow x = 1 + \frac{C_{m,\text{eau, liquide}}}{L_{fus}} \cdot (15\,K)$$

$$\simeq 1 - 0{,}19 \simeq 0{,}81$$

→ 19% d'eau solide.

81% d'eau liquide. → choix de C_m, eau, liquide justifié

4) t_2 pour solidification ? :

$$\frac{dH}{dt} = -\phi = -hS(T - T_{ext})$$

Solidification : $\Delta H = -L_{fus}\, m.$

$$\Rightarrow \int_0^{t_2} \frac{dH}{dt}\, dt = -L_{fus}\, m$$

$$\parallel$$

$$\int_0^{t_2} -hS(T_i - T_{ext})\, e^{-\frac{t}{\tau}}\, dt + \int_0^{t_2} (hST_{ext} - hST_{ext})\, dt$$

$$= -hS(T_i - T_{ext}) \left[-\tau\, e^{-\frac{t}{\tau}}\right]_0^{t_2}$$

$$\rightarrow hS(T_i - T_{ext})\, \tau \left(e^{-\frac{t_2}{\tau}} - 1\right) = -L_{fus}\, m$$

$$\rightarrow e^{-\frac{t_2}{\tau}} = 1 - \frac{L_{fus}\, m}{hS(T_i - T_{ext})\tau}$$

$[L_{fus}\, m] = [M][L]^2[T]^{-2}$

$[hS\Delta T \tau] = [\phi \tau] = [J]$

$$\Rightarrow t_2 = -\tau \ln\left(1 - \frac{L_{fus}\, m}{hS(T_i - T_{ext})\tau}\right)$$