Relatii binare. Functii.

Se numeste relatie binara de la multimea X la multimea Y o submultime $\mathcal{R} \subset X \times Y$. Daca $(x, y) \in \mathcal{R}$ scriem $x\mathcal{R}y$. O submultime a lui $X \times X$ se numeste relatie pe X.

O relatie f de la X la Y se numeste functie daca pentru orice $x \in X$ exista un unic $y \in Y$ astfel incat xfy. In acest caz unicul element asociat cu x se numeste valoarea lui f in x sau imaginea lui x prin f si s enoteaza cu $f(x)$. Daca f este o functie scriem

$$f : X \to Y \text{ sau } X \xrightarrow{f} Y$$

Daca $A \subset X$ si $f : X \to Y$ este o functie notam cu $f|_A$ functia de la A la Y definita prin $f|_A(x) = f(x)$ pentru orice $x \in A$. Functia $f|_A$ se numeste restrictia lui f la A.

Fie $f : X \to Y$. Spunem ca f este

1) injectiva daca pentru orice $x, y \in X, x \neq y$ avem $f(x) \neq f(y)$.

2) surjectiva daca $\forall y \in Y, \exists x \in X$ astfel injcat $f(x) = y$.

3) bijectiva daca este injectiva si surjectiva.

4) inversabila daca exista $g : Y \to X$ stfel incat $f \circ g = 1_Y$ si $g \circ f = 1_X$.

Propozitie. Fie $f : X \to Y$.

1) f este injectiva $\Leftrightarrow \exists g : Y \to X$ surjectiva astfel incat $g \circ f = 1_X$.

2) f este surjectiva $\Leftrightarrow \exists g : Y \to X$ injectiva astfel incat $f \circ g = 1_Y$.

3) f este bijectiva $\Leftrightarrow f$ este inversabila.

Definitie. O relatie $\mathcal{R} \subset X \times X$ se numeste

1) reflexiva daca $x\mathcal{R}x$ pentru orice $x \in X$

2) simetrica daca pentru orice $x, y \in X$, $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$

3) tranzitiva daca pt orice $x, y, z \in X$

$$x\mathcal{R}y \text{ si } y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$$

4) antisimetrica daca daca pt orice $x, y \in X$

$$x\mathcal{R}y \text{ si } y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y$$

Definitie. O relatie $\mathcal{R} \subset X \times X$ se numeste relatie de echivalenta daca este reflexiva, simetrica si tranzitiva.

Daca $\mathcal{R}$ este relatie de echivalenta pe X scriem adeseori $x \sim y$. Daca $x \in X$, multimea

$$\widehat{x} = \{y \in X : x\mathcal{R}y\}$$

se numeste clasa de echivalenta a lui x. Daca $x, y \in X$ atunci $\widehat{x} = \widehat{y}$ sau $\widehat{x} \cap \widehat{y} = \emptyset$. Multimea $\widehat{X} = X/\sim$ se numeste multimea cat sau factor a lui X generata de $\mathcal{R}$. Aplicatia $\pi : X \to \widehat{X},\ \ x \mapsto \widehat{x}$ se numeste surjectie canonica.

Definitie. O relatie $\mathcal{R} \subset X \times X$ se numeste relatie de ordine daca este reflexiva, antisimetrica si tranzitiva. Se noteaza cu $\leq$. Obiectul $(X, \leq)$ format din multimea X si relatia de ordine $\leq$ se numeste multime ordonata. O multime ordonata $(X, \leq)$ se numeste total ordonata daca pentru pentru orice $x, y \in X$ avem $x \leq y$ sau $y \leq x$.

Exercitiu. Fie A o multime si $(A_i)_{i\in I}$ o partitie a lui A. Sa se arate ca $x \sim y$ daca si numai daca exista $i \in I$ astfel incat $x, y \in A_i$ defineste o relatie de echivalenta pe A pentru care clasele de echivalenta coincid cu elementele partitiei considerate.

Exercitiu. Fie X o multime nevida si $\mathcal{P} = \{A|a \subseteq X\}$. Aratati ca relatia de incluziune $\subseteq$ este o relatie de ordine $\mathcal{P}$ care nu este totala daca X are cel putin doua elemente.

Fie $(X, \leq)$ o multime ordonata si $A \subseteq X,\ A \neq \emptyset$. Un element $x \in X$ se numeste majorant (resp. minorant) pentru A daca $a \leq x$ (resp. $a \geq x$) pentru orice $x \in A$. Daca A are un majorant (minorant) atunci A se numeste majorata (minorata). Daca A este majorata si minoranta, A se numeste marginita.

Daca x este un majorant al lui A si in acelasi timp $x \in A$ atunci x este unic determinat, se numeste cel mai mare element al lui A sau maximul lui A si se noteaza cu $\max A$.

Daca x este un minorant al lui A si in acelasi timp $x \in A$ atunci x este unic determinat, se numeste cel mai mic element al lui A sau mainimul lui A si se noteaza cu $\min A$.

Daca $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$ este majorata si daca multimea majorantilor lui A are un cel mai mic element, atunci acest element se numeste marginea superioara a lui A.

$$x = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq x, \forall a \in A \\ \text{daca } a \leq y, \forall a \in A \Rightarrow x \leq y. \end{cases}$$

Daca $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$ este minorata si daca multimea minorantilor lui A are un cel mai mare element, atunci acest element se numeste marginea inferioara a lui A.

$$x = \inf A \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq x, \forall a \in A \\ \text{daca } y \leq a, \forall a \in A \Rightarrow x \geq y. \end{cases}$$

O multime ordonata se numeste complet ordonata daca orice parte nevida si majorata are margine superioara.

Exercitiu. Daca $(X, \leq)$ este complet ordonata atunci orice parte mevida si minorata are margine inferioara.

Multimi finite, infinite, numarabile

Multimea numerelor naturale
$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$
Multimea numerelor intregi
$$\mathbb{Z} = \{\ldots, , -2 - 1, 0, 1, 2, \ldots\}$$
Multimea numerelor rationale
$$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$$

Doua multimi A si B se numesc echipotente si scriem $A \sim B$ daca exista o functie bijectiva $f : A \to B$. Se numeste cardinalul multimii A un simbol asociat multimii notat cu card A astfel incat card A=card $B \Leftrightarrow A \sim B$. Daca A si B sunt doua multimi vom scrie card $A \leq$card B, daca $A \sim A_1 \subset B$ si card $A <$card B daca daca $A \sim A_1 \subset B$ si $A \nsim B$. Cardinalul multimii vide se noteaza cu 0, cardinalul lui $\mathbb{N}$ se noteaza $\aleph_0$. O multime se numeste finita daca $A = \emptyset$ sau exista $n \in \mathbb{N}$ astfel ca $A \sim \{1, 2, \ldots, n\}$; A este infinita daca nu este finita; A este numarabila daca $A \sim \mathbb{N}$. Spunem ca A este cel mult numarabila daca A este finita sau numarabila. Daca A este numarabila exista $f : \mathbb{N} \to A$ si fie $a_n = f(n)$. atunci $A = \{a_0, a_1, \ldots\}$.

Propozitie. Orice submultime infinita a unei multimi numarabile este numarabila.

Fie $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ si $B \subseteq A$ infinita. Definim recursiv $f : \mathbb{N} \to B$ dupa cum urmeaza. $f(1) = a_{n_1}$ unde n_1 este cel mai mic element $n \in \mathbb{N}$ a.i. $a_n \in B$. Punem $f(2) = a_{n_2}$ unde n_2 este cel mai mic element $n \in \mathbb{N}$ a.i. $a_n \in B \setminus \{a_1, a_2, a_{n_1}\}$; $f(k+1) = a_{n_{k+1}}$ unde n_{k+1} este cel mai mic element $n \in \mathbb{N}$ a.i. $a_n \in B \setminus \{a_1, \ldots, a_{n_k}\}$. Cum f este bijectiva deducem $B \sim \mathbb{N}$.

Teorema. Multimea $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ este numarabila

Demonstratie. Consideram functia $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definita prin $f(m, n) = 2^{m-1}(2n - 1)$. se poate verifica cu usurinta ca f este bijectiva.

Teorema. Imaginea surjectiva a unei multimi numarabile este cel mult numarabila.

Demonstratie. Sa presupunem ca A este numarabila si $f : A \to B$ este o surjectie. Atunci exista $g : B \to A$ injectiva astfel incat $f \circ g = 1_B$.

Cum $g(B) \subseteq A$ si A este numarabila rezulta ca $B \sim g(B)$ este cel mult numarabila.

Propozitie. Fie $(A_n)_{n \geq 1}$ un sir de multimi numerabile. Atunci $A = \cup_{n \geq 1} A_n$ este numarabila.

Demonstratie. Pentru orice $n \geq 1$ avem

$$A_n = \{a_n^1, a_n^2, \ldots\}$$

Definim

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \quad f(m,n) = a_n^m.$$

Evident ca f este surjectiva si deci A este cel mult numarabila. Cum $A_n \subset A$ deducem ca A este infinita si deci numarabila.

Multimea numerelor reale

Definitie. Se numeste corp ordonat un corp comutativ $(K, +, \cdot)$ inzestrat cu o relatie de ordine $\leq$ care satisface

1) $x \leq y \Rightarrow x + y \leq x + z \ \ \forall x, y, z \in K$

2) $x \leq y \Rightarrow x \cdot y \leq x \cdot z \ \ \forall x, y, z \in K$

3) $x, y \in K \Rightarrow x \leq y$ sau $y \leq x$

Doua corpuri ordonate K si F se numesc izomorfe daca exista o functie $\varphi : K \to F$ astfel incat $\forall x, y \in K$

1) $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$

2) $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$

3) $x \leq y \Rightarrow \varphi(x) \leq \varphi(y)$

Un corp ordonat K se numeste corp complet ordonat daca multimea ordonata $(K, \leq)$ este complet ordonata.

Teorema. Oricare doua corpuri complet ordonate sunt izomorfe.

Definitie. Se numeste taietura in $\mathbb{Q}$ o submultime T a lui $\mathbb{Q}$ cu urmatoarele proprietati:

1) $T \neq \emptyset$ si $T \neq \mathbb{Q}$

2) T nu are un cel mai mic element

3) daca $a \in T$ si $x > a$ atunci $x \in T$

Notam cu $\mathcal{T}$ multimea taieturilor in $\mathbb{Q}$. Daca $a \in \mathbb{Q}$, atunci $S_a = \{x \in \mathbb{Q} : x > a\}$ se numeste taietura rationala determinata de numarul rational a. Observam ca $\inf S_a = a$ si ca aplicatia

$$\mathbb{Q} \ni a \mapsto S_a \in \mathcal{T}$$

este injectiva.

Propozitie. Relatia $\leq$ definita prin

$$T_1 \leq T_2 \Rightarrow T_1 \subset T_2$$

este o relatie de ordine pe $\mathcal{T}$ cu proprietatile

1) Daca $T_1, T_2 \in \mathcal{T}$ atunci $T_1 \leq T_2$ sau $T_2 \leq T_1$.

2) orice parte nevida si majorata a lui $\mathcal{T}$ are supremum.

3) Daca $a, b \in \mathbb{Q}$ si $a \leq b$ atunci $S_a \leq S_b$.

Propozitie. Pentru orice $T_1, T_2 \in \mathcal{T}$ multimea

$$T_1 + T_2 = \{x + y : x \in T_1, y \in T_2\}$$

este o taietura a lui $\mathbb{Q}$ si asociarea

$$(T_1, T_2) \mapsto T_1 + T_2$$

este o lege de compozitie in raport cu care $\mathcal{T}$ este un grup abelian.

In plus daca $T_1, T_2 \in \mathcal{T}$ si $T_1 \leq T_2$ atunci

$$T_1 + T \leq T_2 + T, \quad \forall T \in \mathcal{T}.$$

Elementul neutru in raport cu adunarea "$+$" este taietura S_0 si pentru $T \in \mathcal{T}$ opusul lui T este taietura

$$-T = \{x \in \mathbb{Q} : x > -a, \ \forall a \in T\}$$

Pentru orice $T \in \mathcal{T}$ avem fie $S_0 \leq T$ fie $T \leq S_0$. Fie $\mathcal{T}_+ = \{T \in \mathcal{T} : T \geq S_0\}$.

Propozitie. Pentru orice $T_1, T_2 \in \mathcal{T}_+$ multimea

$$T_1 \circ T_2 = \{xy | x \in T_1, y \in T_2\}$$

este o taietura in $\mathbb{Q}$ si asocierea

$$(T_1, T_2) \mapsto T_1 \circ T_2$$

are proprietatiile

1) $(T_1 \circ T_2) \circ T_3 = T_1 \circ (T_2 \circ T_3)$

2) $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$

3) $T_1 \circ (T_2 + T_3) = T_1 \circ T_2 + T_1 \circ T_3$

4) $T_1 \leq T_2 \Rightarrow T_1 \circ T_3 \leq T_2 \circ T_3$

Pentru orice $T_1, T_2, T_3 \in \mathcal{T}_+$.

Elementul neutru in raport cu operatia " $\circ$ " este taietura S_1 si pentru $T \in \mathcal{T}_+$ exista o taietura $U \in \mathcal{T}_+$ a.i. $T \circ U = U \circ T = S_1$. Mai precis

$$U = \{x \in \mathbb{Q} : x > \frac{1}{a},\ \forall a \in \mathcal{T}\}.$$

Propozitie. Operatia " $\cdot$ " definita pe $\mathcal{T}$ prin

$$T_1 \cdot T_2 = \begin{cases} T_1 \circ T_2, & T_1, T_2 \in \mathcal{T}_+ \\ -(-T_1 \circ T_2), & T_1 \notin \mathcal{T}_+, T_2 \in \mathcal{T}_+ \\ -(T_1 \circ (-T_2)), & T_1 \in \mathcal{T}_+, T_2 \notin \mathcal{T}_+ \\ (-T_1) \circ (-T_2), & T_1, T_2 \notin \mathcal{T}_+ \end{cases}$$

are proprietatiile

1) $(T_1 \cdot T_2) \cdot T_3 = T_1 \cdot (T_2 \cdot T_3)$

2) $T_1 \cdot T_2 = T_2 \cdot T_1$

3) $T_1 \cdot (T_2 + T_3) = T_1 \cdot T_2 + T_1 \cdot T_3$

Teorema. Inzestrata cu operatiile " $+$ " si " $\cdot$ " si cu relatia de ordine " $\leq$ ", $\mathcal{T}$ este un corp complet ordonat.

Definition 1. Se numeste corp de numere reale si se noteaza cu $\mathbb{R}$ orice corp complet ordonat.

Teorema. Fie $A \subset \mathbb{R}$ nevida. Un element $a \in \mathbb{R}$ este margine superioara a lui A daca

1) $x \leq a, \ \forall x \in A$

2) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in A$ a.i. $a - \varepsilon < x \leq a$

Teorema. Fie $A \subset \mathbb{R}$ nevida. Un element $b \in \mathbb{R}$ este margine inferioara a lui A daca

1) $x \geq b, \ \forall x \in A$

2) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in A$ a.i. $b \leq x < b + \varepsilon$

Teorema (Proprietatea lui Arhimede)**.** Pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ cu $y > 0$ exista $n \in \mathbb{N}$ astfel incat $x \leq ny$.

Presupunem ca pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $x > ny$. Fie

$$A = \{y, 2y, \ldots, ny, \ldots\} \subset \mathbb{R}$$

Cum $ny < x$, multimea A este marginita si deci admite margine superioara $\sup A$. Asadar,

$$(n+1)y \leq \sup A, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Atunci

$$ny \leq \sup A - y, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

si deci $\sup A - y$ este un majorant al lui A. Asadar,

$$\sup A - y \geq \sup A$$

ceea ce reprezinta o contradictie, intrucat $y > 0$.

Propozitie. Pentru orice sir descrescator de intervale inchise $[a_n, b_n], \ n \in \mathbb{N}$ avem

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] = \emptyset.$$

Deoarece $[a_n, b_n], \ n \in \mathbb{N}$ este un sir descrescator de intervale avem

$$a_n \leq b_m, \ \forall m, n \in \mathbb{N}.$$

Fie

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b_m, \ \forall m \in \mathbb{N}\}$$

Evident ca $A \neq \emptyset$, intrucat $a_n \in A$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Cum A este marginita rezulta ca A are margine superioara. Fie $u = \sup A$. Avem

$$a_n \leq u \leq b_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

si deci

$$u \in [a_n, b_n], \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Elemente de toplogie

Fie $x \in \mathbb{R}^n$ si $r > 0$. Multimea

$$B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n | \|y - x\| < r\}$$

se numeste bila deschisa de centru x si raza r iar multimea

$$B[x,r] = \{y \in \mathbb{R}^n | \|y - x\| \leq r\}$$

se numeste bila inchisa de centru x si raza r.

Definitie. O multime $D \subset \mathbb{R}^n$ se numeste deschisa daca pentru orice $x \in D$ exista $r > 0$ astfel incat $B(x,r) \subset D$.

Exercitiu. Aratati ca $B(x,r)$ este o multime deschisa.

Propozitie. 1) $\emptyset$ si $\mathbb{R}^n$ sunt multimi deschise.

2) Reuniunea unei familii arbitrare de multimi deschise este deschisa.

3) Intersectia unei familii finite de multimi deschise este deschisa.

Observatie. Intersectia unei familii infinite de multii deschise nu este in general deschisa. De exemplu, daca $D_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}), n \geq 1$ atuncu $\cap_{n \geq 1} D_n = \{0\}$.

Definitie. O multime $F \subseteq \mathbb{R}^n$ se numeste inchisa daca complementara ei $\mathbb{R}^n \setminus F$ este o multime deschisa.

Propozitie. 1) $\emptyset$ si $\mathbb{R}^n$ sunt multimi inchise.

2) Intersectia unei familii arbitrare de multimi inchise este deschisa.

3) Reuniunea unei familii finite de multimi inchise este inchisa.

Definitie. Fie $x \in \mathbb{R}^n$. O multime $V \subseteq \mathbb{R}^n$ se numeste vecinatate a lui x daca exista D o multime deshisa din $\mathbb{R}^n$ astfel incat $x \in D \subseteq V$.

Un element $x \in \mathbb{R}^n$ se numeste punct interior al multimii $A \subseteq \mathbb{R}^n$ daca aceasta este o vecinatate a lui x.

Un element $x \in \mathbb{R}^n$ se numeste punct de acumulare al multimii $A \subseteq \mathbb{R}^n$ daca orice vecinatate a lui x contine cel putin un element din A diferit de x.

Teorema. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Urmatoarele afirmatii sunt echivalente.

1) A este deschisa

2) orice $x \in A$ este punct interior al lui A.

3) A este o vecinatate pentru orice punct al ei.

Siruri

Definitie. Un sir de elemente dintr-o multime M este o functie $x : \mathbb{N} \to M$ (sau $x : \mathbb{N}_k \to M$ unde $\mathbb{N}_k = \{k, k+1, \ldots\}$). Un sir $x : \mathbb{N} \to M$ il vom nota cu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sau $(x_n)_{n\geq 1}$ unde $x_n = x(n)$ pentru $n \in \mathbb{N}$.

Definitie. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un sir de elemente din $\mathbb{R}^p$. Un element $x \in \mathbb{R}^p$ se numeste limita a sirului daca pentru orice vecinatate V a lui x exista $n_V \in \mathbb{N}$ astfel incat pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_V$ sa avem $x_n \in V$.

Spunem ca $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge la x sau ca $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are limita x. Vom scrie $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ sau $x_n \to x$.

Propozitie. Un sir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elemente din $\mathbb{R}^p$ este convergent la $x \in \mathbb{R}$ daca si numai daca oricare ar fi $\varepsilon > 0$ exista $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel incat pentru orice $n \geq n_\varepsilon$ sa avem $\|x_n - x\| < \varepsilon$.

Daca $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un sir de numere reale, adica $p = 1$ scriem $|x_n - x| < \varepsilon$.

Definitie. Un sir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elemente din $\mathbb{R}^p$ se numeste marginit daca exista $M > 0$ astfel incat $\|x_n\| < M$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Propozitie. Orice sir convergent de elemente din $\mathbb{R}^p$ este marginit.

Propozitie (Reducerea convergentei din $\mathbb{R}^p$ la convergenta in $\mathbb{R}$)**.** Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un sir de elemente din $\mathbb{R}^p$, $x_n = (x_n^!, x_n^2, \ldots, x_n^p)$. Sirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent si are limita $x = (x^1, x^2, \ldots, x^p)$ daca si numai daca pentru orice $k \in \{1, 2, \ldots, p\}$ sirul $(x_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent si $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n^k)_{n\in\mathbb{N}} = x^k$.

Definitie. Un sir de numere reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se numeste

(1) crescator (resp. descrescator) daca $x_n \leq x_{n+1}$ (resp. $x_n \geq x_{n+1}$) pentru orice $n \in \mathbb{N}$

(2) strict crescator (resp. strict descrescator) daca $x_n < x_{n+1}$ (resp. $x_n > x_{n+1}$) pentru orice $n \in \mathbb{N}$

(3) monoton daca este crescator sau descrescator.

Definitie. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un sir de numere reale si Spunem ca $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are limita $+\infty$ daca pentru orice $\varepsilon > 0$ exista $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel incat pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$ sa avem $x_n > \varepsilon$.

Spunem ca $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are limita $-\infty$ daca pentru orice $\varepsilon > 0$ exista $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel incat pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$ sa avem $x_n < -\varepsilon$.

Propozitie (Operatii cu siruri convergente)**.** Fie $x_n \to x$, $y_n \to y$ unde $x, y \in \mathbb{R}$. Atunci

(1) $x_n + y_n \to x + y$

(2) $x_n y_n \to xy$

(3) $ax_n \to ax$, pentru orice $a \in \mathbb{R}$

(4) $\frac{x_n}{y_n} \to \frac{x}{y}$ daca $y \neq 0$

Propozitie. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ siruri de numere reale

(1) Daca $x_n \to x$, $z_n \to x$ si exista $n_0 \in \mathbb{N}$ a.i. $x_n \leq y_n \leq z_n$ pentru orice $n \geq n_0$ atunci $y_n \to x$.

(2) $x_n \to 0$ daca si numai daca $|x_n| \to 0$.

(3) Daca $x_n \to x$ atunci $|x_n| \to |x|$.

(4) Daca $x_n \to 0$ si $(y_n)_{n\geq 1}$ este marginit atunci $x_n y_n \to 0$.

Definitie. Spunem ca $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^p$ este sir Cauchy (sau fundamental) daca pentru orice $\varepsilon > 0$ exista $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel incat pentru orice $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m \geq n_\varepsilon$ sa avem $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ (daca $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, adica $p = 1$ scriem $|x_n - x_m| < \varepsilon$).

Exemplu. Sirul $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$, $n \geq 1$ este divergent.

Intr-adevar, se observa ca

$$|x_{2n} - x_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}$$

pentru orice $n \geq 1$. De aici deducem cu usurinta ca $(x_n)_{n\geq 1}$ nu este fundamental si deci nu este convergent.

Teorema. Daca $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un sir crescator (resp. descrescator) si marginit de numere reale atunci el este convergent. In plus

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n \quad (\text{resp.} \lim_{n\to\infty} x_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} x_n)$$

Demonstratie. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un sir crescator si marginit de numere reale. Fie

$$a = \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n$$

Fie $\varepsilon > 0$. Cum $a-\varepsilon$ nu este un majorant al sirului, exista $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel incat

$$x_{n_\varepsilon} > a - \varepsilon.$$

Deoarece $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este crescator,

$$x_n \geq x_{n_\varepsilon} > a - \varepsilon, \ \forall n \geq n_\varepsilon.$$

Cum $x_n \leq a < a+\varepsilon$, $\forall n \in \mathbb{N}$ rezulta ca

$$a-\varepsilon < x_n < a+\varepsilon, \ \forall n \geq n_\varepsilon$$

adica

$$|x_n - a| < \varepsilon, \ \forall n \geq n_\varepsilon.$$

Deci $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent si $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Similar se trateaza cazul in care sirul este descrescator.

Limita inferioara si superioara

Definitie. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un sir marginit de numere reale. Fie

$$u_n = \sup\{x_i : i \geq n\}, \quad v_n = \inf\{x_i : i \geq n\}$$

Sirul $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este descrecator si sirul $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este crescator. Pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$ avem

$$v_n \leq u_m.$$

Numarul

$$v = \sup_n v_n$$

se numeste limita limita inferioara a sirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si se noteaza cu $\liminf x_n$. Numarul

$$u = \inf_n u_n$$

se numeste limita limita superioara a sirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si se noteaza cu $\limsup x_n$. Evident $\liminf x_n \leq \limsup x_n$.

Teorema. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un sir marginit de numere reale si $u = \liminf x_n$ si $v = \limsup x_n$. Atunci exista doua subsiruri convergente $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ si $(x_{l_n})_{n\in\mathbb{N}}$ astfel incat

$$x_{k_n} \to u \text{ si } x_{l_n} \to v$$

Demonstratie. Fie

$$u_n = \sup\{x_i : i \geq n\}.$$

Construim un sir strict crescator de numere naturale $(k_n)_{n\geq 1}$ astfel incat $k_1 = 1$ si a.i.

$$u_{k_n+1} < x_{k_{n+1}} + \frac{1}{n+1}, \quad n \geq 1.$$

Avem

$$u_{k_{n+1}} - \frac{1}{n+1} \leq u_{k_n+1} - \frac{1}{n+1} < x_{k_{n+1}} \leq u_{k_{n+1}}, \quad \forall n \geq 1.$$

Deoarece $u_{k_{n+1}} \to u$ si $\frac{1}{n+1} \to 0$ rezulta ca $x_{k_n} \to u$. Similar se arata ca exista $(x_{l_n})_{n\in\mathbb{N}}$ a.i. $x_{l_n} \to v$.

Corolar (Lema lui Cesaro)**.** Orice sir marginit din $\mathbb{R}$ contine un subsir convergent.

Teorema. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un sir marginit de numere reale. Atunci $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ daca si numai daca

$$\liminf x_n = \limsup x_n = a.$$

Demonstratie. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un sir marginit cu limita a. Exista doua subsiruri convergente $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ si $(x_{l_n})_{n\in\mathbb{N}}$ astfel incat

$$x_{k_n} \to \limsup x_n \text{ si } x_{l_n} \to \liminf x_n.$$

Intrucat

$$\lim_{n\to\infty} x_{k_n} = \lim_{n\to\infty} x_{l_n} = \lim_{n\to\infty} x_n = a$$

deducem ca

$$\liminf x_n = \limsup x_n$$

Reciproc, sa presupunem ca $\liminf x_n = \limsup x_n$. Ca mai sus fie

$$u_n = \sup\{x_i : i \geq n\}, \quad v_n = \inf\{x_i : i \geq n\}.$$

Deoarece

$$v_n \leq x_n \leq u_n, \forall n \in \mathbb{N}$$

si

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n = a$$

rezulta ca $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Lema. Orice sir Cauchy care are un subsir convergent este comvergent.

Demonstratie. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un sir Cauchy. Fie $\varepsilon > 0$. Atunci exista $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel incat

$$m, n \in \mathbb{N}, \quad m, n \geq n_\varepsilon \Rightarrow \|x_m - x_n\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Fie $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ un subsir convergent cu limita x. Exista $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$, $n_{k_\varepsilon} \geq n_\varepsilon$ astfel incat

$$\|x_{n_{k_\varepsilon}} - x\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Daca $n \geq n_\varepsilon$ avem

$$\|x - x_n\| \leq \|x_{n_{k_\varepsilon}} - x_n\| + \|x_{n_{k_\varepsilon}} - x\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

si deci $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent.
Din Lema anterioara si Lema lui Cesaro obtinem.

Teorema. Orice sir Cauchy din $\mathbb{R}^p$ este convergent.

Numarul e

Sirul

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

este convergent si are limita $e \in (2, 3)$

Observatie. 1) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$

2) Daca $x_n \to \infty$ atunci

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e \text{ si } \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = \frac{1}{e}$$

3) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$

Propozitie. 1) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0, \quad a > 1, \alpha > 0$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0, \quad a > 0$

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$

Serii de numere reale

Definitie. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un sir de numere reale si fie $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sirul definit prin

$$s_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$

Sirul $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se numeste sirul sumelor partiale. Perechea de siruri $((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (s_n)_{n\in\mathbb{N}})$ se numeste seria generata de sirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si se noteaza cu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ sau $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$. Spunem ca seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergenta daca sirul $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent; numarul $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ se numeste suma seriei si se noteaza cu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$. O serie care nu este convergenta se numeste divergenta.

Propozitie. Daca $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ este o serie convergenta atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Corolar. Daca $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq 0$ atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ este divergenta.

Exemplu. Studiati convergenta seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$ si in cazul in care este convergenta determinati suma ei.

Solutie. Avem

$$s_n = \frac{1}{1+1} + \frac{1}{2^2+2} + \cdots + \frac{1}{n^2+n} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 1$ si deci seria este convergenta si $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} = 1$.

Exemplu. Seria geometrica $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ este convergenta daca si numai daca $q \in (-1, 1)$.

Solutie. Intr-adevar, sa observam ca daca $q \neq 1$ atunci

$$s_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Deci seria este comvergenta daca $q \in (-1, 1)$ si divergenta in caz contrar. In plus, daca $q \in (-1, 1)$ atunci

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Exemplu. Seria armonica generalizata $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ este convergenta daca $\alpha > 1$ si divergenta daca $\alpha \leq 1$.

Propozitie. Daca seriile $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ sunt convergente si $c \in \mathbb{R}$, atunci seriile $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_n + y_n)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_n - y_n)$ si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} cx_n$ sunt convergente si au loc relatiile

$$\sum_{n=1}^{\infty}(x_n + y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + \sum_{n=1}^{\infty} y_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(x_n - y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n - \sum_{n=1}^{\infty} y_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} cx_n = c\sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

Teorema (Crieriul lui Cauchy)**.** Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergenta daca si numai daca pentru orice $\varepsilon > 0$ exista $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel incat pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$ si orice $m \in \mathbb{N}$ avem

$$|x_{n+1} - x_{n+1} + \cdots + x_{n+m}| < \varepsilon.$$

Teorema (Primul criteriu al comparatiei)**.** Fie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ serii cu termeni pozitivi. Daca exista $n_o \in \mathbb{N}$ astfel incat $x_n \leq y_n$ pentru orice $n \geq n_0$.

1) Daca seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ este convergenta atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergenta.

2) Daca seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ este divergenta atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ este divergenta.

Exemplu. Studiati convergenta seriei $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{2^n+3^n}$.

Solutie. Evident $\frac{1}{2^n+3^n} < \frac{1}{2^n}$. Cum seria $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{2^n}$ este convergenta deducem atunci din primul criteriu al comparatiei ca seria $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{2^n+3^n}$ este convergenta.

Teorema (Al doilea criteriu al comparatiei)**.** Fie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ serii cu termeni pozitivi astfel incat exista $\lim \frac{x_n}{y_n} = l$.

1) Daca $0 < l < \infty$ atunci cele doua serii au aceasi natura.

2) Daca $l = 0$ si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ este convergenta atunci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergenta.

3) Daca $l = \infty$ si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ este divergenta atunci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ este divergenta.

Exemplu. Studiati convergenta seriei $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{n+1}{2n^3+n}$.

Fie $x_n = \frac{n+1}{2n^3+n}$ si $y_n = \frac{1}{n^2}$, $n \geq 1$ Cum

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+n}{2n^3+n} = \frac{1}{2}$$

iar seria $\sum\limits_{n\geq 1} y_n = \sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ este convergenta deducem din al doilea criteriu al comparatiei ca seria $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{n+1}{2n^3+n}$ este convergenta.

Teorema (Criteriul raportului)**.** Fie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ o serie cu termeni pozitivi.

1) Daca exista $r < 1$ si $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel incat $\frac{x_{n+1}}{x_n} < r$, $\forall n \geq n_0$ atunci seria este convergenta

2) Daca exista $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel incat $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1$, $\forall n \geq n_0$ atunci seria este divergenta

Corolar. Fie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ o serie cu termeni pozitivi. Daca exista $l = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$, atunci

1) pentru $l < 1$, seria este convergenta

2) pentru $l > 1$, seria este divergenta

Exemplu. Studiati convergenta seriei $\sum_{n\geq 1} \frac{n}{3^n}$.

Fie $x_n = \frac{n}{3^n}$ termenul general al seriei. Avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{3^{n+1}} \frac{3^n}{n} = \frac{1}{3} < 1$$

si deci seria este convergenta

Teorema (Criteriul radacinii)**.** Fie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ o serie cu termeni pozitivi.

1) Daca exista $r < 1$ si $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel incat $\sqrt[n]{x_n} < r$, $\forall n \geq n_0$ atunci seria este convergenta

2) Daca exista $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel incat $\sqrt[n]{x_n} \geq 1$, $\forall n \geq n_0$ atunci seria este divergenta.

Corolar. Fie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ o serie cu termeni pozitivi. Daca exista $l = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$, atunci

1) pentru $l < 1$, seria este convergenta.

2) pentru $l > 1$, seria este divergenta.

Exemplu. Studiati convergenta seriei $\sum_{n\geq 1} (\sqrt{n^2+1} - n)^{n+1}$.

Solutie. Fie $x_n = (\sqrt{n^2+1} - n)^{n+1}$, $n \geq 1$. Cum

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+1} - n)^{\frac{n+1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{\sqrt{n^2+1}+n} \right)^{\frac{n+1}{n}} = \frac{1}{2} < 1$$

rezulta ca seria este convergenta.

Teorema (Criteriul Raabe-Duhamel)**.** Fie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ o serie cu termeni pozitiva.

1) Daca exista $r > 1$ si $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel incat $n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) > r$, $\forall n \geq n_0$ atunci seria este convergenta

2) Daca exista $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel incat $n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) \leq 1$, $\forall n \geq n_0$ atunci seria este divergenta.

Corolar. Fie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ o serie cu termeni pozitiva. Daca exista $l = \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right)$, atunci

1) pentru $l > 1$, seria este convergenta.

2) pentru $l < 1$, seria este divergenta.

Exemplu. Studiati convergenta seriei $\sum_{n\geq 1} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}$.

Solutie. Fie

$$x_n = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}.$$

Avem

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \frac{4^{n+1}((n+1)!)^2}{(2n+2)!} - 1\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2n+2}{2n+1} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1$$

si deci seria este divergenta.

Teorema (Criteriul condensarii)**.** Fie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ o serie cu termeni pozitivi astfel incat sirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este descrescator. Atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergemta daca si numai daca seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n x_{2^n}$ este convergenta

Fie

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k, \quad t_k = \sum_{k=0}^{n} 2^k x_{2^k}$$

Deoarece $(x_n)_{n\geq 1}$ este descrescator, avem

$$2^n x_{2^{n+1}} \leq \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} x_k \leq 2^n x_{2^n}$$

Prin urmare

$$s_{2^{n+1}} \leq t_n \text{ si } t_{n+1} \leq 2 s_{2^{n+1}}$$

de unde rezulta imediar ca cele doua serii au aceasi natura.

Corolar. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ este convergenta daca si numai daca $\alpha > 1$.

Intr-adevar, cu criteriul condensarii seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

are aceasi natura ca si seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^{n\alpha}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^n$$

care ste convergenta daca si numai daca $2^{\alpha-1} < 1$, adica daca $\alpha > 1$.

Teorema (Criteriul lui Dirichlet)**.** Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ si $(y_n)_{n\geq 1}$ doua siruri de numere reale cu proprietatea ca $(x_n)_{n\geq 1}$ este descrescator, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ si sirul $s_n = y_0 + y_1 + \cdots + y_n$ este marginit. Atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ este convergemta.

Corolar (Criteriul lui Leibniz)**.** Daca $(x_n)_{n\geq 1}$ este un sir descrescator de numere reale si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n x_n$ este convergemta.

Definitie. Daca $(x_n)_{n\geq 1}$ este un sir de numere reale, spunem ca seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ este absolut convergenta daca seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|$ este convergenta.

Folosind criteriul lui Cauchy, avem.

Teorema. Orice serie absolut convergenta este convergenta.

Exemplu. Studiati convergenta seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Sirul cu termenul general $a_n = \frac{1}{n}$ este descrescator si are limita egala cu zero. Aplicand criteriul lui Leibniz deducem ca seria este convergenta.

Observam ca seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergenta si deci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ nu este absolut convergenta !

Observatie. Exemplul de mai sus arata ca nu orice serie convergenta este absolut convergenta.

Multimi compacte

O multime $A \subset \mathbb{R}^p$ se numeste compacta daca pentru orice familie $(D_i)_{i\in I}$ de multimi deschise din $\mathbb{R}^p$ cu proprietatea ca $A \subset \bigcup_{i\in I} D_i$ exista $J \subset I$ finita astfel incat $A \subset \bigcup_{i\in j} D_i$

Propozitie. Orice multime compacta $K \subset \mathbb{R}^p$ este inchisa.

Demonstratie. Fie $x \in \mathbb{R}^p \setminus K$ si fie

$$D_m = \{y \in \mathbb{R}^p : \|x - y\| > \frac{1}{m}\}$$

Evident

$$K \subset \bigcup_{m \in \mathbb{N}} D_m.$$

Cum K este compacta existra $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel incat

$$K \subset D_1 \cup D_2 \cup \cdots \cup D_{n_0} = D_{n_0}.$$

Prin urmare

$$CD_{n_0} = \mathbb{R}^p \setminus D_{n_0} \subseteq \mathbb{R}^p \setminus K$$

Asadar,

$$\{y \in \mathbb{R}^p : \|x - y\| < \frac{1}{n_0}\} \subset \mathbb{R}^p \setminus K$$

Atunci $\mathbb{R}^p \setminus K$ este deschisa si deci K este inchisa.

Teorema (Heine-Borel)**.** O multime $K \subset \mathbb{R}^p$ este compacta daca si numai daca este marginita si inchisa (demonstratie la pag 216)

Teorema. O multime $K \subset \mathbb{R}^p$ este compacta daca si numai daca orice sir de elemente din K contine un subsir convergent la un element din K.

Multimi conexe

O multime $A \subset \mathbb{R}^p$ se numeste neconexa daca exista doua multimi deschise D_1 si D_2 din $\mathbb{R}^p$ cu proprietatea ca

$$A \cap D_1 \neq \emptyset, \quad A \cap D_2 \neq \emptyset, \; A \cap D_1 \cap D_2 = \emptyset, \text{ si } A = (D_1 \cap A) \cup (D_1 \cap A)$$

O multime se numeste conexa daca nu este neconexa.

Teorema. O multime $A \subset \mathbb{R}$ este conexa daca si numai daca A este interval

" $\Rightarrow$ " Sa presupunem ca A este conexa. Aratam pentru inceput ca pentru orice $x, y \in A$, $[x, y] \subset A$. Sa presupunem ca exista $x, y \in A$ astfel incat intervalul $[x, y]$ sa nu fie continut in A. Atunci exista $z \in (x, y)$ astfel incat $z \notin A$. Atunci

$$((-\infty, z) \cap A) \cup ((z, \infty) \cap A) = A$$

si intrucat

$$(-\infty, z) \cap A \neq \emptyset, \quad (z, \infty) \cap A \neq \emptyset$$

rezulta ca A este neconexa. Contradictie !

Fie

$$p = \inf A, \quad q = \sup A.$$

Pentru a arata ca A este interval este suficient sa aratam ca $(p, q) \subset A$ adica este suficient sa demonstram ca daca $c \in A$ atunci $(p, c] \subset A$ si $[c, q] \subset A$.

Cazul I. $p = \infty$

Fie $x < c$. Cum $p = -\infty = \inf A$, exista $\alpha \in A$ astfel incat $\alpha < x$. Atunci

$$x \in [\alpha, c] \subset A$$

si deci $x \in A$ si cum x a fost ales arbitrar rezulta ca

$$(-\infty, c] \subset A.$$

Cazul II. $p \in \mathbb{R}$

Fie $x \in (p, c)$. Atunci exista $\alpha \in A$ astfel incat $p \leq \alpha < x$. Deci

$$\alpha < x < c \;\Rightarrow\; [\alpha, c] \subset A \Rightarrow\; x \in A$$

Asadar

$$(p, c] \subset A.$$

Similar se arata ca $[c, q) \subset A$.

" $\Leftarrow$ " Fie A un interval. Sa presupunem ca A este neconexa. Atunci exista doua multimi deschise D_1 si D_2 cu proprietatea ca

$$A \cap D_1 \neq \emptyset, \quad A \cap D_2 \neq \emptyset, \; A \cap D_1 \cap D_2 = \emptyset, \text{ si } A = (D_1 \cap A) \cup (D_1 \cap A)$$

Fie

$$x \in A \cap D_1, \quad y \in A \cap D_2.$$

si fie

$$z = \sup D_1 \cap [x, y]. \tag{1}$$

Daca $z \in D_1$ atunci $z < y$. Cum D_1 este deschisa, exista $h > 0$ astfel incat

$$[z, z + h) \subset D_1 \cap [x, y].$$

Acest fapt contrazie (1).

Daca $z \in D_2$ atunci $z > x$. Cum D_2 este deschisa exista $h > 0$ astfel incat

$$(z - h, z] \subset D_2 \cap [x, y]$$

Cum $z = \sup D_1 \cap [x, y]$ exista $t \in D_1 \cap [x, y]$ astfel incat $z - h < t \leq z$. Prin urmare $D_1 \cap D_2 \cap A \neq \emptyset$. Contradictie!

Teorema. Multimea $\mathbb{R}^p$ este conexa.

Demonstratie. Presupunem ca $\mathbb{R}^p$ este neconexa. atunci exista D_1, D_2 multimi deschise nevide astfel incat

$$D_1 \cap D_2 = \emptyset \text{ si } D_1 \cup D_2 = \mathbb{R}^p.$$

Fie $x \in D_1$ si $y \in D_2$. Defimim multimile

$$G_1 = \{t \in \mathbb{R} : x + t(y - x) \in D_1\}$$

$$G_2 = \{t \in \mathbb{R} : x + t(y - x) \in D_2\}$$

Atunci G_1 si G_2 sunt multimi deschise din $\mathbb{R}$ astfel incat

$$G_1 \cap [0, 1] \neq \emptyset, \quad G_1 \cap [0, 1] \neq \emptyset, G_1 \cap G_2 \cap [0, 1] = \emptyset,$$

$$[0, 1] = (G_1 \cap [0, 1]) \cap (G_2 \cap [0, 1]).$$

De aici rezulta ca $[0, 1]$ este neconexa ceea ce reprezinta o contradictie !

Functii continue

Definitie. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ si $a \in D$. Spunem ca f este continua in a daca pentru orice vecinatate V a lui $f(a)$, exista o vecinatate U a lui a (care depinde de V), astfel incat pentru orice $x \in U$ sa avem $f(x) \in V$.

Teorema. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ si $a \in D$. Urmatoarele afirmatii sunt echivalente.

(i) f este continua in a.

(ii) pentru orice $\varepsilon > 0$ exista $\delta_\varepsilon > 0$ astfel incat pentru orice $x \in D$, $\|x - a\| < \delta_\varepsilon$ sa avem $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$.

(iii) orice sir $(x_n)_{n\geq 1}$ de elemente din D, care converge la a, sirul $(f(x_n))_{n\geq 1}$ converge la $f(a)$.

$(i) \Rightarrow (ii)$. Multimea

$$B(f(a), \varepsilon) = \{y \in \mathbb{R}^q : \|y - f(a)\| < \varepsilon\}$$

este o vecinatate a lui $f(a)$. Din (i) rezulta ca exista U o vecinatate a lui a astfel incat

$$x \in U \cap D \Rightarrow f(x) \in B(f(a), \varepsilon).$$

Deoarece U este o vecinatate a lui a, exista $\delta_\varepsilon > 0$ astfel incat $B(a, \delta_\varepsilon) \subset U$. Atunci, daca $x \in D$ si $\|x - a\| < \delta_\varepsilon$ rezulta ca $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon_\varepsilon$.
$(ii) \Rightarrow (iii)$. Fie $(x_n)_{n \geq 1} \subset D$ cu $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$. Fie $\varepsilon > 0$. Din (ii), exista $\delta_\varepsilon > 0$ astfel incat

$$x \in D, \|x - a\| < \delta_\varepsilon \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$$

$(iii) \Rightarrow (i)$. Sa presupunem ca (i) este falsa. Atunci exista V_0 o vecinatate a lui $f(a)$ cu proprietatea ca pentru oroce vecinatate U a lui a exista $x_U \in U \cap D$ astfel incat $f(x_U) \notin V_0$. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ fie

$$U_n = B(a, 1/n) = \{x \in \mathbb{R}^p : \|x - a\| < \frac{1}{n}\}$$

Atunci pentru orice $n \in \mathbb{N}$ exista $x_n \in D$ astfel ca

$$f(x_n) \notin V_0$$

fapt ce contrazice (iii).

Teorema. $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ si $a \in D$. Atunci f este continua in a daca si numai daca pentru orice vecinatate V a lui $f(a)$, exista o vecinatate U a lui a, astfel incat $U \cap D = f^{-1}(V)$.

Teorema (de continuitate globala)**.** Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$. Urmatoarele afirmatii sunt echivalente

(i) f este continua pe D;

(ii) pentru orice multime deschisa G din $\mathbb{R}^q$ exista o multime deschisa G_1 din $\mathbb{R}^p$ astfel incat $f^{-1}(G) = G_1 \cap D$;

(iii) pentru orice multime inchisa F din $\mathbb{R}^q$ exista o multime inchisa F_1 din $\mathbb{R}^p$ astfel incat $f^{-1}(F) = F_1 \cap D$.

Corolar. Fie $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$. Urmatoarele afirmatii sunt echivalente

(i) f este continua pe $\mathbb{R}^p$;

(ii) pentru orice multime deschisa G din $\mathbb{R}^q$, $f^{-1}(G)$ este deschisa in $\mathbb{R}^p$;

(iii) pentru orice multime inchisa F din $\mathbb{R}^q$, $f^{-1}(F)$ este inchisa in $\mathbb{R}^p$.

Observatie. In general, daca f este continua si $G \subset \mathbb{R}^p$ este o multime deschisa nu rezulta ca $f(G)$ este deschisa.

De exemplu daca

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{1+x^2},$$

atunci

$$f(-1,1) = \left(\frac{1}{2}, 1\right], \quad f(\mathbb{R}) = (0,1]$$

Operatii cu functii continue

Teorema. Fie $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, $a \in D$. Daca f, g si φ sunt continue in a atunci $f+g$, $f-g, fg$, φf si $\frac{f}{\varphi}$ (daca $\varphi(a) \neq 0$) sunt continue in a. Daca f este contiua in a atunci $\|f\|$ este continua in a.

Teorema. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to D' \subseteq \mathbb{R}^q$ si $g : D' \subseteq \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^p$ astfel incat f este continua in a si g este continua in $f(a)$. Atunci $g \circ f$ este continua in a.

Teorema. Fie $C \subset \mathbb{R}^p$ este conexa si $f : C \to \mathbb{R}^q$ continua. Atunci $f(C)$ este conexa.

Demonstratie. Presupunem ca $f(C)$ nu este conexa. Atunci exista $A, B \subseteq \mathbb{R}^p$ deschise astfel incat

$$A \cap f(C) \neq \emptyset,\ B \cap f(C) \neq \emptyset,\ A \cap B \cap f(C) = \emptyset \text{ si } f(C) \subseteq A \cup B.$$

Cum f este continua, exista A_1, B_1 multimi deschise din $\mathbb{R}^p$ astfel incat

$$A_1 \cap C = f^{-1}(A) \text{ si } B_1 \cap C = f^{-1}(B)$$

Atunci,

$$A_1 \cap C \neq \emptyset,\ B_1 \cap C \neq \emptyset,$$
$$A_1 \cap B_1 \cap C = f^{-1}(A \cap B) \neq \emptyset$$

si

$$C = f^{-1}(A \cup B) = (A_1 \cap C) \cup (B_1 \cap C)$$

Asadar C este neconexa, ceea ce este o contradictie !

Corolar. Fie $C \subset \mathbb{R}^p$ este conexa si $f : C \to \mathbb{R}$ continua. Atunci $f(C)$ este este un interval.

Teorema. Fie $K \subset \mathbb{R}^p$ este compacta si $f : K \to \mathbb{R}^q$ continua. Atunci $f(K)$ este compacta.

Demonstratie. Fie $(G_i)_{i\in I}$ o acoperire cu multimi deschise a lui $f(K)$. Cum f este continua pentru orice $i \in I$ exista o multime deschisa D_i astfel incat

$$f^{-1}(G_i) = D_i \cap K.$$

Deci $f(D_i \cap K) \subseteq G_i$ si cum $f(K) \subseteq \bigcup_{i\in I} G_i$ rezulta ca

$$K \subseteq \cup_{i\in I} f^{-1}(G_i) = \bigcup_{i\in I} D_i \cap K \subseteq \bigcup_{i\in I} D_i$$

Cum K este compacta, exista J o submultime finita a lui I astfel incat

$$K \subseteq \bigcup_{i\in J} D_i.$$

Deci

$$K = \bigcup_{i\in J}(D_i \cap K) = \bigcup_{i\in J} f^{-1}(G_i)$$

si atunci

$$f(K) \subseteq \bigcup_{i\in J} G_i.$$

In concluzie $f(K)$ este compacta.

Teorema. Fie $K \subset \mathbb{R}^p$ o multime compacta si $f : K \to \mathbb{R}^p$ o functie continua. Atunci exista x_* si x^* in K astfel incat

$$f(x^*) = \sup\{f(x) : x \in K\}, \quad f(x_*) = \inf\{f(x) : x \in K\}$$

Teorema. Fie $K \subseteq \mathbb{R}^p$ compacta si $f : K \to \mathbb{R}^q$ o functie continua si injectiva. Atunci $f^{-1} : f(K) \to K$ este continua.

Demonstratie. Fie $F \subseteq \mathbb{R}^q$ o multime inchisa. Atunci $F \cap K$ este compacta. Deoarece f este continua rezulta ca $f(F \cap K)$ este compacta si deci inchisa. Avem

$$(f^{-1})^{-1}(F) = (f^{-1})^{-1}(F \cap K) = f(F \cap K) \cap f(K)$$

Cum $f(F \cap K)$ este inchisa din teorema de continuitate gloabala rezulta ca f este continua.

Definitie. O aplicatie $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ se numeste liniara daca $f(x+y) = f(x) + f(y)$ si $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}^p$ si orice $\alpha \in \mathbb{R}$.

Teorema. Orice aplicatie liniara $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ este liniara.

Demonstratie. Vom presupune pentru simplitate ca $p = p = 2$. Fie

$$e_1 = (1, 0), \quad e_2 = (0, 1)$$

si

$$(c_{11}, c_{21}) = f(e_1), \quad (c_{12}, c_{22}) = f(e_2)$$

Definim

$$M = (\sum_{i,j=1}^{2} c_{ij})^{1/2}$$

daca $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, atunci

$$f(x) = x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) = (x_1 c_{11} + x_2 c_{12}, x_1 c_{21} + x_2 c_{22})$$

Atunci

$$\begin{aligned}\|f(x)\| &= |x_1 c_{11} + x_2 c_{12}|^2 + |x_1 c_{21} + x_2 c_{22}|^2 \\ &\leq (x_1^2 + x_2^2)(c_{11}^2 + c_{12}^2) + (x_1^2 + x_2^2)(c_{21}^2 + c_{22}^2) = M^2 \|x\|^2.\end{aligned}$$

Asadar,

$$\|f(x) - f(y)\| \leq M \|x - y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^2$$

de unde rezulta cu usurinta ca f este continua.

Definitie. Daca $f : D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$, un punct $x \in D$ se numeste punct fix al functiei f daca $f(x) = x$.

Teorema. Daca $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ este o contractie (adica exista $C \in (0, 1)$ astfel incat $\|f(x) - f(y)\| \leq C\|x - y\|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^p$) atunci f are un unic punct fix.

Demonstratie. Fie $x_1 \in \mathbb{R}^p$ si pentru $n \geq 2$ fie $x_{n+1} = f(x_n)$. Pentru orice $n \geq 1$ avem

$$\|x_{n+1} - x_n\| = \|f(x_n) - f(x_{n-1})\| \leq C\|x_n - x_{n-1}\| \leq \cdots \leq C^{n-1}\|x_2 - x_1\|.$$

Atunci, pentru $m \geq n$,

$$\begin{aligned}\|x_m - x_n\| \leq \|x_m - x_{m-1}\| + \cdots + \|x_{n+1} - x_n\| &\leq (C^{m-1} + C^{m-2} + \cdots + C^{n-1})\|x_2 - x_1\| \\ &< \frac{C^{n-1}}{1-C}\|x_2 - x_1\|.\end{aligned}$$

Deci $(x_n)_{n\geq 1}$ este sir Cauchy. Atunci exista $z = \lim_{n\to\infty} x_n$ si avem

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = z.$$

Daca v este un punct fix atunci $\|z - v\| = \|f(z) - f(v)\| \leq C\|z - v\|$ si deci $u = z$.

Functii uniform continue

Definitie. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$. Spunem ca f este uniform continua pe D daca pentru orice $\varepsilon > 0$ exista $\delta_\varepsilon > 0$ astfel incat pentru orice $x, y \in D$ cu $\|x - y\| < \delta_\varepsilon$ sa avem $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$.

Teorema. Fie $K \subset \mathbb{R}^p$ o multime compacta. Daca $f : K \to \mathbb{R}^q$ este o functie continua atunci f este uniform continua pe K.

Demonstratie. Presupunem ca f nu este uniform continua pe K. Prin urmare exista $\varepsilon_0 > 0$ astfel incat pentru orice $\delta > 0$, exista $x, y \in K$ astfel incat

$$\|x - y\| < \delta \text{ si } \|f(x) - f(y)\| > \varepsilon_0.$$

Fie $\delta_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$. Asadar, exista $x_n, y_n \in K$ astfel incat

$$\|x_n - y_n\| < \frac{1}{n} \text{ si } \|f(x_n) - f(y_n)\| > \varepsilon_0$$

Deoarece K este compacta exista $(x_{n_k})_{k \geq 1}$ un subsir convergent al lui $(x_n)_{n \geq 1}$. Fie

$$a = \lim_{k \to \infty} x_{n_k}$$

Intrucat

$$\lim_{k \to \infty} \|x_{n_k} - y_{n_k}\| = 0.$$

rezulta ca

$$a = \lim_{k \to \infty} y_{n_k}$$

Prin urmare

$$\lim_{k \to \infty} \|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})\| = 0$$

ceea ce este o contradictie. (o demonstratie diferita se gaseste la pag. 226)

Exercitiu. Aratati ca functia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 2$ este uniform continua pe $\mathbb{R}$.

Rezolvare. Fie $\varepsilon > 0$. Fie $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$. Sa consideram acum $x, y \in \mathbb{R}$ cu $|x - y| < \delta$. Atunci

$$|f(x) - f(y)| = |(3x + 2) - (3y + 2)| = 3|x - y| < 3\delta = \varepsilon.$$

Exercitiu. Aratati ca functia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ nu este uniform continua pe $(0, \infty)$.

Rezolvare. Pentru a demonstra ca f nu este uniform continua vom arata ca

$$\exists \varepsilon > 0 \ \ \forall \delta > 0 \ \ \exists x, y \in (0, \infty) \text{ a.i. } |x-y| < \delta \text{ si } |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$$

Fie $\varepsilon = 1$. Sa consideram $\delta > 0$. Fie $x = \frac{1}{\delta}$ si $y = \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}$. Asadar

$$|x - y| = \frac{\delta}{2} < \delta$$

si

$$|f(x) - f(y)| = \left| \left(\frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2} \right) - \left(\frac{1}{\delta} \right)^2 \right| = 1 + \frac{\delta^2}{4} > 1 = \varepsilon.$$

Functii derivabile

Definitie. Fie $f : I \to \mathbb{R}$, unde $I \subset \mathbb{R}$ este un interval si $a \in I$. Spunem ca f are derivata in a daca exista (in $\overline{\mathbb{R}}$) limita

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \text{ notata } f'(a).$$

Daca derivata $f'(a)$ exista si este finita se spune ca f este derivabila in a.

Daca functia $f : I \to \mathbb{R}$ este derivabila in orice punct al unei submultimi $A \subset I$ atunci spunem ca f este derivabila pe A. In acest caz functia

$$x \ni A \mapsto f'(x)$$

se numeste derivata lui f pe A si se noteaza cu f'.

Teorema. Orice functie derivabila intr-un punct este continua in acel punct.

Demonstratie. Sa prsupunem ca $f : D \to \mathbb{R}$ este derivabila in $a \in D$. Din relatia

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a), \ x \neq a.$$

rezulta ca

$$\lim_{x \to a} (f(x) - f(a)) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \to a} (x - a) = 0.$$

Deci

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

si deci f este continua in a.

Propozitie. Daca $f, g : I \to \mathbb{R}$, doua functii derivavile pe intervalul I. Atunci:

(i) functia $f+g$ este derivabila pe I si

$$(f+g)=f'+g'$$

(ii) functia λf este derivabila pe I si

$$(\lambda f)'=\lambda f'.$$

(iii) functia fg este derivabila in pe I si

$$(fg)'=f'g+fg'.$$

(iv) daca in plus $g(x)\neq 0$ pentru orioe $x\in I$ functia $\frac{f}{g}$ este derivabila pe I si

$$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}$$

Teorema. Daca $f:I\to J$ este derivabila pe I si $g:J\to\mathbb{R}$ este derivabila pe J atunci functia $g\circ f$ este derivabila pe J si

$$(g\circ f)'=(g'\circ f)\cdot f'.$$

Teorema. Daca $f:I\to J$ o functie continua si bijectiva intre doua intervale. Daca f este derivabila pe I si $f'(x)\neq 0$ pentru orice $x\in I$ atunci functia inversa f^{-1} este derivabila pe J si in plus

$$(f^{-1})'=\frac{1}{f'\circ f^{-1}}$$

Fie $f:A\to\mathbb{R}$, unde $A\subset\mathbb{R}$. Un punct $a\in A$ se numeste punct de maxim local (relativ) daca exista o vecinatate U al lui a astfel incat $f(x)\geq f(a)$ pentru orice $x\in U\cap A$.

Un punct $a\in D$ se numeste punct de minim local (relativ) daca exista o vecinatate U al lui a astfel incat $f(x)\leq f(a)$ pntru orice $x\in U\cap A$. Punctele de maxim local si cele de minim local se numesc puncte de extrem local.

Teorema (Fermat)**.** Fie I un interval deschis si $a\in I$ un punct de extrem local al unei functii $f:I\to\mathbb{R}$. Daca f este derivabila in a atunci $f'(a)=0$.

Demonstratie. Sa presupunem ca a este punct de minim local. Exista o vecinatate U a lui a (si putem presupune ca $U\subset I$) astfel incat pentru orice $x\in U\cap I$ sa avem $f(x)\geq f(a)$. Atunci

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\leq 0$$

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\geq 0$$

si deci $f'(a)=0$

Teorema (Rolle)**.** Fie $a < b$ si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continua pe $[a, b]$, derivabila pe (a, b) astfel ca $f(a) = f(b)$. Atunci exista un punct $c \in (a, b)$ astfel ncat $f'(c) = 0$

Demonstratie. Functia f fiind continua este marginita si si isi atinge marginile. Fie $m = \inf\limits_{x \in [a,b]} f(x)$ si $M = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$.

Daca $M > f(a)$ exista un punct $c \in [a, b]$ astfel incat $M = f(c)$. In plus $c \neq a$ si $c \neq b$ (in caz contrar, ar rezulta ca $M = f(a) = f(b)$, absurd). Asadar $c \in (a, b)$ si cum c este punct de extrem local din Teorema lui Fermat rezulta ca $f'(c) = 0$.

Similar se trateaza cazul $m < f(a)$. Daca $m = M$ atunci f este constanta si deci $f'(c) = 0$ pentru orice $c \in (a, b)$.

Teorema (Lagrange)**.** Fie $a < b$ si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continua pe $[a, b]$, derivabila pe (a, b). Atunci exista un punct $c \in (a, b)$ astfel incat

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c). \tag{2}$$

Demonstratie. Consideram functia $F(x) = f(x) + kx$, $x \in [a, b]$, unde k este o constanta pe care o determinam impunand conditia $F(a) = F(b)$. Asadar $k = \frac{f(b)-f(a)}{a-b}$. Cu acest k functia F verifica conditiile teoremei lui Rolle si atunci exista $c \in (a, b)$ astfel incat $f'(c) = 0$. Cum $F'(x) = f'(x) + k$ rezulta ca $f'(c)$ verifica relatia (2).

Teorema (Cauchy)**.** Fie $a < b$ si $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ doua functii continue pe $[a, b]$ si derivabile pe (a, b) astfel incat $g'(x) \neq 0$ pentru orice $x \in (a, b)$. Atunci exista un punct $c \in (a, b)$ astfel incat

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Propozitie. Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval si $f : I \to \mathbb{R}$, derivabila pe I.

(i) Daca $f'(x) = 0$ pentru orice $x \in I$ atunci f este constanta pe I.

(ii) Daca $f'(x) \geq 0$ pentru orice $x \in I$ atunci f este crescatoare pe I.

(ii) Daca $f'(x) \leq 0$ pentru orice $x \in I$ atunci f este descrescatoare pe I.

Teorema (l'Hospital)**.** Fie $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$ si I un interval din $\mathbb{R}$ astfel incat $(a, b) \subset I \subset [a, b]$ si $x_0 \in I$. Fie $f, g : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ cu proprietatile

(i) f si g sunt derivabile pe $I \setminus \{x_0\}$.

(ii) $g'(x) \neq 0$ pe $I \setminus \{x_0\}$.

(iii) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0.$

(iv) $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha \in \overline{\mathbb{R}}.$

Atunci exista $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha.$

Teorema anterioara se poate reformula, avand demonstratii foarte asemanatoare, punand in loc de (iii) una din ipotezele

$(iii)'$ $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty.$

$(iii)''$ $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty.$

Spunem ca functia $f : A \to \mathbb{R}$ este derivabila de doua ori in punctul $a \in A$ daca f este derivabila ntr-o vecinatate a punctului a si derivata f este derivabila in a. In acest caz, derivata lui f' in a se numeste derivata a doua a lui f in a si se noteaza cu $f''(a)$ sau $f^{(2)}(a)$. Daca f' este derivabila pe A atunci derivata lui f' se numeste derivata a doua a lui f si se noteaza cu f''. Similar se defineste derivata de ordin n.

Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval deschis si $f : D \to \mathbb{R}$. Spunem ca f este de clasa C^n daca f este de n ori derivabila pe D, iar derivata de ordin n, $f^{(n)}$ este continua pe I.

$$C^n(I) = \{f : I \to \mathbb{R} : f \text{ este de clasa } C^n \text{ pe} I\}.$$

Spunem ca f este de clasa C^∞ daca f este derivabila de orice ordin pe I.

$$C^\infty(I) = \{f : I \to \mathbb{R} : f \text{ este de clasa } C^\infty \text{ pe} I\}.$$

Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval deschis, $a \in I$ si $f : I \to \mathbb{R}$ o functie de derivabila de n ori pe I. Polinomul

$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

se numeste polinomul Taylor de grad n asociat functiei f in punctul a. Definim

$$R_n(x) - f(x) - T_n(x), \quad x \in I$$

Egalitatea

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x), \quad x \in I$$

poarta numele de formaula lui Taylor de ordin n coresp. functie f in punctul a. Functia R_n se numeste restul de ordin n al formulei lui Taylor.

Teorema (Formula lui Taylor cu restul lui Lagrange)**.** Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval deschis, $a \in I$ si $n \in \mathbb{N}$. Daca $f : I \to \mathbb{R}$ este o functie de $(n+1)$ ori derivabila pe I, atunci pentru orice $x \in I$, $x \neq a$ exista $c \in (x,a)$ sau $c \in (a,x)$ astfel incat

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

adica

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Convergenta simpla si uniforma

Definitie. Fie $(f_n)_{n\geq 1}$ un sir de functii $f_n : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ si $f : D \to \mathbb{R}^q$.

1) Spunem ca $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplu pe D la functia f si scriem

$$f_n \xrightarrow{s} f$$

daca pentru orice $x \in D$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

2) Spunem ca $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniform pe D la functia f si scriem

$$f_n \xrightarrow{u} f$$

daca pentru orice $\varepsilon > 0$, exista $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel incat pentru orice $n \geq n_\varepsilon$ si orice $x \in D$ sa avem

$$\|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon.$$

Observatie. 1) $f_n \xrightarrow{s} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{u} f$

2) Daca $f_n : D \to \mathbb{R}$ atunci

$$f_n \xrightarrow{u} f \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \text{ a. i. } \quad -\varepsilon < f(x) - f_n(x) < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_\varepsilon, \forall x \in D$$

Definitie. Daca $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ este o functie marginita definim

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in D} \|f(x)\|$$

Exercitiu. $\|\cdot\|_\infty$ defineste o norma pe multimea functiilor marginite definite pe D.

Propozitie. Daca $f, f_n : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ atunci

$$f_n \xrightarrow{u} f \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0.$$

Exercitiu. Pentru $n \geq 1$

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = x^n.$$

Sirul $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simlu dar nu converge uniform

Rezolvare. Observam ca

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 0 \text{ if } 0 \leq x < 1 \\ 1 \text{ if } x = 1 \end{cases}$$

Asadar $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplu la f. Cum,

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1)} |x^n| = 1$$

rezulta ca $(f_n)_{n\geq 1}$ nu converge uniform pe $[0,1]$.

Teorema. Fie $f, f_n : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$. Daca exista un sir $(a_n)_{n\geq 1}$ este un sir de numere pozitive convergent la 0 astfel incat

$$\|f_n(x) - f(x)\| \leq a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in D,$$

atunci $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniform la f pe D.

Demonstratie. Fie $\varepsilon > 0$. Cum $a_n \to 0$ rezulta ca exista n_ε astfel incat $a_n < \varepsilon$ pentru orice $n \geq n\varepsilon$. Dar atunci

$$\|f_n(x) - f(x)\| \leq a_n < \varepsilon \quad \forall n \geq n_\varepsilon,\ \forall x \in D$$

si deci $f_n \stackrel{c}{\to} f$ pe D.

Teorema. Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un sir de functii $f_n : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ un sir de functii continue pe D care converge uniform la fucntia $f : D \to \mathbb{R}^q$. Atunci f este continua pe D.

Demonstratie. Fie $\varepsilon > 0$. Cum $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniform la f, exista $n_\varepsilon > 0$ astfel incat pentru orice $n \geq n_\varepsilon$ si orice $x \in D$ avem

$$\|f_n(x) - f(x)\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Fie $a \in D$. Deoarece f_{n_ε} este continua in a, exista $\delta_{\varepsilon,a} > 0$ astfel incat daca $x \in D$ si $\|x - a\| < \delta_{\varepsilon,a}$ sa avem

$$\|f_{n_\varepsilon}(x) - f(x)\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Fie $x \in D$ astfel incat $\|x - a\| < \delta_{\varepsilon,a}$. Atunci avem

$$f(x) - f(a)\| \leq \|f(x) - f_{n_\varepsilon}(x)\| + \|f_{n_\varepsilon}(x) - f_{n_\varepsilon}(a)\| + \|f(a) - f_{n_\varepsilon}(a)\| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Deci f este continua in a si cum a a fost ales arbitrar, rezulta ca f este continua pe D.

Teorema (Dini)**.** Fie $K \subset \mathbb{R}^p$ o multime compacta. Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un sir de functii continue pe K astfel incat $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ pentru orice $x \in K$ si $f_n \xrightarrow{s} f$ unde $f : K \to \mathbb{R}$ este o functie continua. Atunci $f_n \xrightarrow{u} f$.

Demonstratie. Fie $\varepsilon > 0$. Pentru orice $x \in K$ exista $n_{x,\varepsilon} \in \mathbb{N}$ astfel incat daca $n \leq n_{x,\varepsilon}$ avem

$$0 \leq f(x) - f_{n_{x,\varepsilon}}(x) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Cum f si $f_{n_{x,\varepsilon}}$ sunt continue in x exista o vecinatate deschisa $U_{x,\varepsilon}$ a lui x astfel incat pentru orice $y \in K \cap U_{x,\varepsilon}$ avem

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ si } |f_{n_{x,\varepsilon}}(x) - f_{n_{x,\varepsilon}}(y)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Cum K este compacta, exista $x_1, x_2, \ldots, x_m$ astfel incat

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} U_{x_i,\varepsilon}$$

Fie

$$n_\varepsilon = \max\{n_{x_1,\varepsilon}, n_{x_2,\varepsilon}, \ldots, n_{x_m,\varepsilon}\}$$

Fie $y \in K$ si $n \geq n_\varepsilon$. Atunci exista i astfel incat $y \in U_{x_i,\varepsilon}$ si avem

$$f(y) - f_n(y) \leq f(y) - f_{n_{x_i,\varepsilon}}(y) \leq |f(y) - f(x)| + |f(x) - f_{n_{x_i,\varepsilon}}(x)| + |f_{n_{x_i,\varepsilon}}(x) - f_{n_{x_i,\varepsilon}}(y)|$$
$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

(o demonstratie diferita se gaseste la pag. 220)

Teorema. Fie $(f_n)_{n\geq 1}$ un sir de functii reale derivabile pe un interval marginit $I \subset \mathbb{R}$ astfel incat sirul derivatelor $(f_n')_{n\geq 1}$ converge unoform la o fucntie $g : I \to \mathbb{R}$ si exista $x_0 \in [a,b]$ astfel incat sirul $(f_n(x_0))_{n\geq 1}$ este convergent. Atunci sirul $(f_n)_{n\geq 1}$ este uniform convergent la o functie $f : I \to \mathbb{R}$ care ste derivabila si $f' = g$ adica

$$(\lim_{n\to\infty} f_n(x))' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$$

Demonstratia se gaseste la pag. 291.

Exercitiu. Sa se studieze convergenta simpla si uniforma a sirului de functii

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{x}{1 + nx^2}$$

Solutie. Intrucat $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ adica sirul converge simplu la functia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ pentru $x \in \mathbb{R}$.

Dar f_n eeste derivabila si $f_n'(x) = \frac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2}$. Observam ca $f_n'(x) = 0$ daca si numai daca $x = \pm\frac{1}{\sqrt{n}}$; punctul $x = \frac{1}{\sqrt{n}}$ este punt de maxim si $x = -\frac{1}{\sqrt{n}}$ este punct de minim al functiei f_n. Deoarece $\lim\limits_{n\to\pm\infty} f_n(x) = 0$, aceste puncte sunt puncte de extrem global. Cum $f_n\left(\pm\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \pm\frac{1}{2\sqrt{n}}$ rezulta ca

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = \lim_{n\to\infty}\left[\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)|\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\sup_{x\in\mathbb{R}} |\frac{x}{1+nx^2}|\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}} = 0.$$

si deci $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniform la functia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita prin $f(x) = 0$ pentru $x \in \mathbb{R}$.

Exercitiu. Sa se studieze convergenta simpla si uniforma a sirului de functii

$$f_n : (-1,1) \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{1-x^n}{1-x}$$

Solutie. $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{1}{1-x}$ pentru orice $x \in (-1,1)$. Asadar daca $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{1}{1-x}$ atunci $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplu la f.

$$\sup_{x\in(-1,1)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in(-1,1)} \left|\frac{1-x^n}{1-x} - \frac{1}{1-x}\right| = \sup_{x\in(-1,1)} \frac{|x^n|}{1-x} \geq \frac{(1-\frac{1}{n})^n}{1-(1-\frac{1}{n})} = n(1-\frac{1}{n})^n$$

si deci

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty \geq \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \infty.$$

Asadar $\|f_n - f\|_\infty \nrightarrow 0$ si deci $(f_n)_{n\geq 1}$ nu converge uniform.