Derivate partiale. Functii diferentiabile

Fie $f : D \to \mathbb{R}$ unde $D \subset \mathbb{R}^n$ este o multime deschisa si fie $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in D$. Functia f este derivabila partial in punctul a in raport cu x_k daca limita

$$\lim_{x_k \to a_k} \frac{f(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \ldots a_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n)}{x_k - a_k}$$

exista si este finita. Daca exista, valoarea acestei limite se numeste derivata partiala a functiei f in raport cu x_k in punctul a si se noteaza cu $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$.

Daca f este derivabila partial in raport cu x_k in orice punct din D, atunci se obtine o functie

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} : D \to \mathbb{R}, \quad \text{definita prin } a \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_k}(a), \quad a \in D.$$

Spunem ca f este diferentiabila (sau derivabila) in a daca exista o aplicatie liniara $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (i.e. $T(x + y) = T(x) + T(y)$ si $T(\alpha x) = \alpha T(x)$, pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$, si orice $x, y \in \mathbb{R}^n$) astfel ca

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - T(x - a)}{\|x - a\|} = 0$$

Daca T exista atunci este unica, se noteaza cu $Df(a)$ sau $f'(a)$ si se numeste diferentiala lui f in a. Se poate verifica (exercitiu) cu usurinta ca

Propozitie. Daca f este diferentiabila in a atunci este continua in a.

Propozitie. Daca f este diferntiabila in a atunci exista $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$ pentru orice $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ si

$$Df(a)(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)u_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)u_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)u_n.$$

Demonstratie. Fie e_k vectorul din $\mathbb{R}^n$ care are 1 pe pozitia k si zero in rest. Intrucat f este diferentiabila rezulta ca

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a + te_k) - f(a) - Df(a)(te_k)}{|t|} = 0$$

sau echivalent

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a + te_k) - f(a) - Df(a)(te_k)}{t} = 0,$$

ceea ce arata ca f are derivata partiala si

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + te_k) - f(a)}{t} = Df(a)(e_k)$$

Daca $u = (u_1, \ldots, u_n)$, $u = u_1 e_1 + u_2 e_2 + \cdots + u_n e_n$ si atunci

$$Df(a)(u_1, u_2, \ldots, u_n) = u_1 Df(e_1) + u_2 Df(e_2) + \cdots + u_n Df(e_n)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)u_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)u_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)u_n.$$

Se poate verifica imediat ca

Propozitie. Orice functie liniara $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ este diferentiabila in orice a si

$$Df(a) = f.$$

In particular, aplicatiile $\mathrm{pr}_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definite prin

$$\mathrm{pr}_i(u_1, u_2, \ldots, u_n) = u_i, \text{ pentru orice } (u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

sunt liniare, si deci

$$D\mathrm{pr}_i(a) = \mathrm{pr}_i, \quad \text{pentru orice } i = 1, 2, \ldots, n,$$

fapt care ne indreptateste sa introducem notatia

$$\mathrm{pr}_i = dx_i$$

Cu acesta notatie avem

$$Df(a)(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)u_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)u_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)u_n$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\mathrm{pr}_1(u_1, u_2, \ldots, u_n) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\mathrm{pr}_n(u_1, u_2, \ldots, u_n)$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)dx_1(u_1, u_2, \ldots, u_n) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)dx_n(u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

pentru orice $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ si deci

$$Df(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)dx_n.$$

Teorema (Conditie suficienta de diferentiabilitate)**.** Fie D o multime deschisa din $\mathbb{R}^n$, fie $f : D \to \mathbb{R}$ si $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in D$. Daca exista o vecinatatate V a lui a cu proprietatea ca exista toate derivatele partiale in orice punct din V si acestea sunt continue in a, atunci f este diferentiabila in a si

$$Df(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)dx_+ \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)dx_n.$$

Demonstratie. Fara a restrange generalitate, putem presupune ca vecinatatea V lui a este $B(a,r) = \{x \in D : \|x-a\| < r\}$ bila deschisa cu centrul in a si raza $r > 0$, pe care avand in vedere ca D este multime deschisa, o putem considera inclusa in D. Fie $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$. Definim functiile $g_1, g_2, \ldots, g_n$ astfel

$$\begin{aligned}
&g_1 : [a_1, x_1] \to \mathbb{R},\ g_1(t) = f(t, x_2, x_3 \ldots, x_n)\\
&g_2 : [a_2, x_2] \to \mathbb{R},\ g_2(t) = f(a_1, t, x_3, \ldots, x_n)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&g_n : [a_n, x_n] \to \mathbb{R},\ g_n(t) = f(a_1, a_2, a_3 \ldots, t)
\end{aligned}$$

Atunci

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} (g_i(x_i) - g_i(a_i))$$

Fiecare din functiile g_i satisface ipotezele teoremei lui Lagrange referitoare la o functie reala de variabila reala continua pe un compact si derivabila pe interiorul acelui interval. Prin urmare exista $\xi_i \in (x_i, a_i)$ astfel incat

$$g_i(x_i) - g_i(a_i) = (x_i - a_i) g_i'(\xi_i)$$

Atunci

$$\begin{aligned}
&g_1(x_1) - g_1(a_1) = (x_1 - a_1)\frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)\\
&g_2(x_2) - g_2(a_2) = (x_2 - a_2)\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, \xi_2, x_3, \ldots, x_n)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&g_n(x_n) - g_n(a_n) = (x_n - a_n)\frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1, a_2, a_3, \ldots, \xi_n)
\end{aligned}$$

Definim aplicatia liniara $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ prin

$$T(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) u_i.$$

Obtinem

$$\begin{aligned}
&\frac{f(x) - f(a) - T(x-a)}{\|x-a\|} =\\
&\frac{x_1 - a_1}{\|x_1 - a_1\|}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)\right) +\\
&\frac{x_2 - a_2}{\|x_2 - a_2\|}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, \xi_2, x_3, \ldots, x_n) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, a_2, x_3, \ldots, x_n)\right) +\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{x_n - a_n}{\|x_n - a_n\|}\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1, a_2, a_3, \ldots, \xi_n) - \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)\right)
\end{aligned}$$

Deoarece
$$\frac{|x_1 - a_1|}{\|x_1 - a_1\|} \leq 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$
deducem ca
$$\frac{|f(x) - f(a) - T(x-a)|}{\|x - a\|} \leq \tag{1}$$
$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)\right| +$$
$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, \xi_2, x_3, \ldots, x_n) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)\right| +$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1, a_2, a_3, \ldots, \xi_n) - \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)\right|$$
Deoarece derivatele partiale ale functiei f sunt continue in a, exista limita termenilor din membrul doi a inegalitatii (1) pentru $x \to a$ si aceasta este egala cu zero. Prin urmare
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - T(x-a)}{\|x - a\|} = 0$$
Asadar f este diferentiabila in a si
$$Df(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) dx_i$$

Exemplu. Fie $f(x, y, z) = xe^y + xyz + z^2$. Atunci
$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^y + yz, \; \frac{\partial f}{\partial y} = xe^y + xz, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = xy + 2z.$$
Deci
$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0, 2) = 1, \; \frac{\partial f}{\partial y}(1, 0, 2) = 3, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(1, 0, 2) = (4)$$
si atunci
$$df(1, 0, 2) = \frac{\partial f}{\partial x}(1, 0, 2)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 0, 2)dy + \frac{\partial f}{\partial z}(1, 0, 2)dz = dx + 3dy + 4dz$$
Pentru $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ avem $df(1, 0, 2)(a, b, c) = a + 3b + 4c$.

Fie $E \subset \mathbb{R}^n$, $F \subset \mathbb{R}^m$ si $u_1, \ldots, u_m : E \to \mathbb{R}$ astfel incat pentru orice $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E$
$$(u_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, u_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \in F.$$

Daca $\varphi : F \to \mathbb{R}$ admite derivate partiale continue pe D atunci functia $f : F \to \mathbb{R}$ definita prin

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varphi(u_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, u_m(x_1, x_2, \ldots, x_n))$$

admite derivate partiale continue si

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}\left(u_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, u_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right) \frac{\partial u_i}{\partial x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Vom scrie

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}, \; i = 1, 2, \ldots, n.$$

Exemplu. Daca $f(x, y, z) = \varphi(xyz, x^2 + y^2 + z^2, x + yz)$ atunci

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} yz + \frac{\partial \varphi}{\partial v} 2x + \frac{\partial \varphi}{\partial w}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} xz + \frac{\partial \varphi}{\partial v} 2y + \frac{\partial \varphi}{\partial w} z$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} xy + \frac{\partial \varphi}{\partial v} 2x + \frac{\partial \varphi}{\partial w} y$$

Derivate partiale si diferentiale de ordin superior

Fie D o multime deschisa din $\mathbb{R}^n$ si $f : D \to \mathbb{R}$ o functie care admite derivate partiale $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ pe D. La randul ei functia $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ poate avea derivata partiala in raport cu x_i notata

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \text{ adica } \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

si numita derivata partiala de ordinul al doilea a lui f.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \text{ cu } i \neq j \text{ se numesc derivate partiale mixte de ordinul 2}$$

In mod similar se definesc derivatele partiale de ordinul $n \geq 3$.

Teorema (Schwarz)**.** Fie $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si $a \in D$. Daca derivatele partiale mixte $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ exista intr-o vecinatate a lui a si acestea sunt continue in a, atunci

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

Fie $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ unde D este o multime deschisa. Daca f admite derivate partiale de ordinul doi continue pe o vecinatate a punctului $a \in D$, functia $D^2 f(a) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita prin

$$D^2 f(a)(u,v) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} u_i v_j$$

unde $u, v \in \mathbb{R}^n$, se numeste diferentiala de ordinul doi a lui f in a. Similar, daca f admite derivate partiale de ordinul 3 continue pe o vecinatate a punctului $a \in D$, functia $D^3 f(a) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita prin

$$D^3 f(a)(u,v,w) = \sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} u_i v_j w_k,$$

unde $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ se numeste diferentiala de ordinul doi a lui f in a. Similar se defineste diferentiala de ordinul k. Vom folosi notatia

$$\begin{aligned} &D^2 f(u,u) = D^2 f(u)^2 \\ &D^3 f(u,u) = D^2 f(u)^3 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &D^k f(u,\dots,u) = D^k f(u)^k \end{aligned}$$

Teorema (Formula lui Taylor cu restul lui Lagrange in cazul n dimensional)**.** Daca D este o multime deschisa si convexa din $\mathbb{R}^k$ si $f : D \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ este o functie care admite derivate partiale de ordinul $n+1$ continue pe multim D si atunci pentru orice $a \in D$ si orice $x \in D$ exista $\xi \in [a,x] = \{tx + (1-t)a, 0 \le t \le 1\}$ astfel incat

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{1!} D f(a)(x-a) + \frac{1}{2!} D^2 f(a)(x-a)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} D^n f(a)(x-a)^n +$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!} D^{n+1} f(\xi)(x-a)^{n+1}$$

Extreme locale pentru functii de mai multe variabile

Fie $f : A \to \mathbb{R}$, unde $A \subset \mathbb{R}^n$. Un punct $a \in A$ se numeste punct de maxim local (relativ) daca exista vecinatate U al lui a astfel incat $f(x) \le f(a)$ pntru orice $x \in U \cap A$ (adica daca exista $r > 0$ astfel incat $f(x) \le f(a)$ pntru orice $x \in B(a,r) \cap A$).

Un punct $a \in D$ se numeste punct de minim local (relativ) daca exista o vecinatate U al lui a astfel incat $f(x) \ge f(a)$ pntru orice $x \in U \cap A$, (adica daca exista $r > 0$ astfel incat $f(x) \ge f(a)$ pntru orice $x \in B(a,r) \cap A$). Punctele de maxim local si cele de minim local se numesc puncte de extrem local.

Fie $f : D \to \mathbb{R}$. Spunem ca $a \in D$ este punct critic (stationar) pentru f daca f este diferentiabila in a si $Df(a) = 0$.

Fie $D \subset \mathbb{R}^n$ o multime deschisa si $f : D \to \mathbb{R}$ o functie diferentiabila in $a \in D$. Matricea cu n linii si n coloane

$$H_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{1 \leq i,j \leq n}$$

se numeste matricea hessiana a functie f in punctul a.

Observam ca

$$D^2 f(a)(u,u) = u^t H_f(a) u, \text{ unde } u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad \text{si } u^t = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

.

Teorema (Fermat)**.** Fie $f : D \to \mathbb{R}$ o functie diferentiabila in $a \in D$. Daca f este diferentiabila in a atunci $Df(a) = 0$ (adica $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ pentru $i = 1, 2, \ldots, n$).

Fie $a = (a_1, a_2, \ldots)$ ca in enunt. Consideram $r > 0$ astfel incat $B(a,r) \subset D$ si $f(x) - f(a)$ are semn constant pentru orice $x \in B(a,r)$. Fie

$$\varphi : (-r, r) \to \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = f(a_1 + t, a_2, \ldots, a_n).$$

Atunci $\varphi(t) - \varphi(a)$ are semn constant pe $(-r, r)$. Cum φ este derivabila pe $(-r, r)$ aplicand Teorema lui Fermat pentru functii de o variabila reala rezulta ca $\varphi(0) = 0$. In consecinta, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$. Similar aratam ca $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$ pentru $i = 2, \ldots, n$.

Teorema (Criteriu de stabilire a punctelor de extrem pentru functii de mai multe variabile)**.** Fie $f : D \to \mathbb{R}$ o functie care admite derivate partiale de ordinul doi continue pe D si $a \in D$ un punct critic al sau.

(1) Daca $D^2 f(u,u) > 0$ pentru orice $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ atunci a este punct de minim local

(2) Daca $D^2 f(u,u) < 0$ pentru orice $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ atunci a este punct de maxim local

(3) Daca exista $u, \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ astfel incat $D^2 f(u,u) > 0$ si $D^2 f(u,u) < 0$ atunci a nu este punct de extrem local

Demonstratie. Fie $\alpha > 0$ astfel incat $D^2(a)(u,u) \geq \alpha$ pentru orice $u \in \mathbb{R}^n$ cu $\|u\| = 1$. Cum functia are derivate partiale de ordinul doi continue rezulta ca exista $\delta > 0$ astfel incat pentru orice $c \in \mathbb{R}^n$ cu $\|c - a\| < \delta$ si orice $u \in \mathbb{R}^n$ cu $\|u\| = 1$ sa avem

$$D^2(a)(u,u) \geq \frac{\alpha}{2}.$$

Conform formulei lui Taylor din cazul n-dimesnional rezulta ca exista b pe segmentul $[a, a+tu]$ astfel incat

$$f(a+tu) = f(a) + Df(a)(tu) + \frac{1}{2}D^2 f(b)(tu, tu)$$

In concluzie

$$f(a+tu) - f(a) = \frac{t^2}{2}D^2 f(b)(u, u) \geq 0$$

De aici rezulta ca a este punct de minim local al lui f.

Celelalte afirmatii se demonsteaza utilizand argumente similare (vezi pag 242-244 din carte !).

Corolar. Fie $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ functie care admite derivate partiale de ordinul doi continue pe D si $(x_0, y_0) \in D$ un punct critic al sau. Fie

$$H_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Notam $\Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$ si $\Delta_2 = \det H_f(x_0, y_0)$.

(1) Daca $\Delta_1 > 0$ si $\Delta_2 > 0$ atunci (x_0, y_0) este punct de minim local;

(2) Daca $\Delta_1 < 0$ si $\Delta_2 > 0$ atunci (x_0, y_0) este punct de maxim local;

(3) Daca $\Delta_2 < 0$ atunci (x_0, y_0) nu este punct de extrem local

Exemplu. Determinati punctele de extrem local ale functiei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$

Avem

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 15, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 6xy - 12$$

Obtinem punctele critice $(1, 2), (-1, -2), (2, 1), (-2. - 1)$. Matricea Hesiana este

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{pmatrix}$$

$$H_f(1, 2) = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}, \quad \Delta_2 < 0 \Rightarrow (1, 2) \text{ nu este punct de extrem local}$$

$$H_f(-1, -2) = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}, \quad \Delta_2 < 0 \Rightarrow (1, 2) \text{ nu este punct de extrem local}$$

$$H_f(2,1) = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}, \;\; \Delta_1 = 12 > 0, \; \Delta_2 = 108 > 0 \Rightarrow (1,2) \text{ este punct de minim local}$$

$$H_f(-2,-1) = \begin{pmatrix} -12 & -6 \\ -6 & -12 \end{pmatrix}, \;\; \Delta_1 = -12 < 0, \; \Delta_2 = 108 > 0 \Rightarrow (1,2) \text{ este pct de maxim local}$$

Corolar. Fie $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ functie care admite derivate partiale de ordinul doi continue pe D si $a \in D$ un punct critic. Fie

$$\Delta_1 = a_{11}, \;\; \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ldots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

unde $a_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$.

(1) Daca $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \ldots, \Delta_n > 0$ atunci a este punct de minim local

(3) Daca $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \ldots, (-1)^n \Delta_n > 0$ atunci a este punct de maxim local

(3) Daca $\Delta_1 \geq 0, \Delta_2 \geq 0, \ldots, \Delta_n \geq 0$ sau $\Delta_1 \leq 0, \Delta_2 \geq 0, \ldots, (-1)^n \Delta_n \geq 0$ dar exista j astfel incat $\Delta_j = 0$ atunci nu se poate trage nicio concluzie

(4) In celelate cazuri a nu este punct de extrem local al lui f.

Exercitii

1) Calculati derivatele partiale de ordinul I, derivatele partiale de ordinul II si $df(2,1)$ pentru urmatoarele functii:

(1) $f(x,y) = \frac{x+y}{2x-y}$

(2) $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$

2) Calculati derivatele partiale de ordinul I, derivatele partiale de ordinul II si $df(1,-1,1)$ pentru urmatoarele functii:

(1) $f(x,y,z) = xz + x^2 z + \sin(x + 2y + z)$

(2) $f(x,y,z) = z \ln(x + y^2) + e^{x+yz}$

3) Determinati punctele de extrem local ale functiilor

(1) $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^3 + y^3 - 6xy + 2$

(2) $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^3 + 8y^3 - 2xy - 1$

(3) $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $f(x,y) = 2x^2 - 2xy + y^2 + 4x + 2y$

(4) $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $f(x,y) = -x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 2y - 2$

(5) $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - y^2 - xy$

(6) $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $f(x,y) = 3xy^2 - x^3 - 15x - 36y$

(7) $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$

(8) $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^4 + y^4 + 4xy + z^4 - 4z$

(9) $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$, $f(x,y) = z^3 + 3zy^2 - 15z - 12y + x^2 - 2x$

Integrala Riemann pentru functii de o variabila reala

Fie $[a,b]$ un interval inchis si marginit din $\mathbb{R}$. Se numeste diviziune a intervalului $[a,b]$ un sistem de puncte

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

Vom nota cu $D[a,b]$ multimea diviziunilor intervalului $[a,b]$. Numarul

$$\|\Delta\| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - x_{i-1}|$$

se numeste norma diviziunii Δ. Spunem ca diviziunea Δ' este mai fina decat diviziunea Δ si notam $\Delta \prec \Delta'$ daca Δ' contine punctele diviziunii Δ. Un sistem de n puncte $\xi = \{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n\}$, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ se numeste sistem de puncte intermediare asociat diviziunii Δ. Suma

$$\sigma_\Delta(f, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

se numeste suma Riemann asociata diviziunii Δ si sistemului de puncte intermediare ξ.

Definitie. O functie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ se numeste integrabila Riemann daca exista un numar real I astfel incat pentru orice $\varepsilon > 0$ exista $\eta_\varepsilon > 0$ astfel incat

$$|\sigma_\Delta(f, \xi) - I| < \varepsilon$$

oricare ar fi diviziunea Δ cu $\|\Delta\| < \eta_\varepsilon$ si oricare ar fi sistemul de puncte intermediare ξ asociat lui Δ. Numarul I este unic determinat, se numeste integrala lui f pe $[a,b]$ si se noteaza $\int_a^b f(x)dx$.

Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o functie marginita si fie

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

o diviziune a intervalului $[a, b]$. Fie

$$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \quad M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

Definim

$$s_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \text{ suma Darboux inferioara}$$

$$S_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) \text{ suma Darboux superioara}$$

Lema. Daca $\Delta \prec \Delta'$ atunci $s_\Delta(f) \le s_{\Delta'}(f) \le S_{\Delta'}(f) \le S_\Delta(f)$

Lema. Pentu oricare diviziuni Δ si Δ' $s_\Delta(f) \le S_{\Delta'}(f)$

Fie $\underline{\int}_a^b f = \sup\limits_{\Delta} s_\Delta(f)$ si $\overline{\int}_a^b f = \inf\limits_{\Delta} S_\Delta(f)(f)$. Din lemele anterioare rezulta ca

$$\underline{\int}_a^b f \le \overline{\int}_a^b f$$

Teorema 1. Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o functie marginita. Atunci urmatoarele afirmatii sunt echivalente

(i) f este integrabila Riemann

(ii) $\underline{\int}_a^b f = \overline{\int}_a^b f$

(iii) pentru orice $\varepsilon > 0$ exista o diviziunea Δ a intervalului $[a, b]$ astfel incat $S_\Delta(f) - s_\Delta(f) < \varepsilon$.

(iv) pentru orice $\varepsilon > 0$ exista $\eta_\varepsilon > 0$ astfel incat oricare ar fi diviziunea Δ a intervalului $[a, b]$, cu $\|\Delta\| < \eta_\varepsilon$ sa avem $S_\Delta(f) - s_\Delta(f) < \varepsilon$.

Teorema. Daca $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este o functie monotona, atunci este integrabila Riemann.

Demonstratie. Sa presupunem ca f este crescatoare si nu este o functie constanta. Fie $\varepsilon > 0$ si fie

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

o diviziune a intervalului $[a,b]$ cu $\|\Delta\| < \eta_\varepsilon$ unde $\eta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$ Deoarece f este crescatoare, avem $m_i = f(x_{i-1})$ si $M_i = f(x_i)$. Atunci avem

$$S_\Delta(f) - s_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n}(f(x_i) - f(x_{i-1}))(x_i - x_{i-1}) \leq \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}(f(b) - f(a)) < \varepsilon.$$

Din Teorema 1, deducem ca f este integrabila.

Teorema. Daca $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ este o functie continua pe $[a,b]$, atunci este integrabila Riemann.

Demonstratie. Fie $\varepsilon > 0$. Functia f fiind continua pe $[a,b]$, este uniform continua pe $[a,b]$. Rezulta ca exista $\eta_\varepsilon > 0$ astfel incat oricare ar fi $x, y \in [a,b]$ cu $|x-y| < \eta_\varepsilon$ avem $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$.

Fie $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ o diviziune a intervalului $[a,b]$ cu $\|\Delta\| < \eta_\varepsilon$. Deoarece o functie continua pe un interval constanat este marginita si isi atinge marginile rezulta ca exista $\xi_i, \eta_i \in [x_{i-1}, x_i]$ astfel incat $m_i = f(\xi_i)$ si $M_i = f(\eta_i)$. Atunci

$$S_\Delta(f) - s_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n}(f(\eta_i) - f(\xi_i))(x_i - x_{i-1})$$

si deci

$$S_\Delta(f) - s_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n}(f(\eta_i) - f(\xi_i))(x_i - x_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon.$$

Aplicand Teorema 1 rezulta ca f este integrabila.

Definitie. Fie $f : I \to \mathbb{R}$, unde $I \subset \mathbb{R}$ este un interval. Functia $F \to \mathbb{R}$ se numeste primitiva a functiei f pe intervalul I, daca F este derivabila pe I si $F'(x) = f(x)\ \forall x \in I$.

Teorema. Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o functie continua si fie $F(x) = \int_a^x f(t)dy$, $x \in [a,b]$. Atunci F este o primitiva a lui f, adica F este derivabila pe $[a,b]$ si $F'(x) = f(x)\ \forall x \in [a,b]$.

Demonstratie. Fie $x_0 \in [a,b]$ si $\varepsilon > 0$. Deoarece f este continua in x_0, exista $\delta > 0$ astfel incat

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \text{ pentru orice } x \in U = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a,b]$$

Daca $x \in J$, $x < x_0$ atunci

$$\left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| = \left|\frac{\int_x^{x_0}(f(t) - f(x_0))}{x_0 - x}\right| < \varepsilon.$$

Similar se arata ca daca $x \in J$, $x < x_0$,

$$\left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| < \varepsilon.$$

Deci
$$\lim_{x\to x_0} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0) = f(x_0)$$
si atunci F este derivabila in x_0 si $F'(x_0) = f(x_0)$.

Teorema. Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o functie continua si fie F o primitiva a ei. Atunci
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Demonstratie. Fie
$$G(x) = \int_a^x f(t)dt.$$
Rezulta ca $G'(x) = f(x)$ si deci $(F-G)' = 0$. In consecinta F si G difera printr-o constanta C. Asadar $F(x) = G(x) + C$ pentru orice $x \in [a,b]$ Dar $G(a) = 0$ si deci $F(a) = C$ si atunci $F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt$.

Teorema. Fie $g : [a,b] \to J$ o functie derivabila si cu derivata continua pe $[a,b]$. Daca $f : J \to \mathbb{R}$ este continua atunci
$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx.$$

Demonstratie. Pentru $x \in J$, fie
$$F(x) = \int_{g(a)}^x f(u)du$$
Deoarece f este continua, rezulta ca F este derivabila si $F' = f$ pe J. Atunci $F \circ g$ este derivabila si
$$(F \circ g)' = f \circ g \cdot g'$$
Functia $f \circ g \cdot g'$ este integrabila (fiind continua) si avem
$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = F \circ g(b) - F \circ g(a) = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx.$$

Serii de puteri

Se numeste serie de puteri o serie de forma $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Numarul
$$R = \sup\left\{ r \geq 0 : \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n \text{ este convergenta } \right\}$$
se numeste raza de convergenta a seriei de puteri. Intervalul $(-R, R)$ se numeste intervalul de convergenta al seriei de puteri. Multimea A a punctelor in care seria de puteri este convergenta se numeste multimea de convergenta a seriei de puteri.

Teorema. Fie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o serie de puteri. Daca exista $\omega = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ atunci

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\omega} & \text{daca} \quad 0 < \omega < \infty \\ 0 & \text{daca} \quad \omega = \infty \\ \infty & \text{daca} \quad \omega = 0 \end{cases}$$

Daca exista $\omega = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ atunci

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\omega} & \text{daca} \quad 0 < \omega < \infty \\ 0 & \text{daca} \quad \omega = \infty \\ \infty & \text{daca} \quad \omega = 0 \end{cases}$$

Teorema (Teorema I a lui Abel)**.** Fie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ serie de puteri cu raza de convergenta R. Atunci

(i) pentru orice $x \in (-R, R)$ seria este absolut convergenta.

(ii) pentru orice $x \notin [-R, R]$ seria este divergenta.

Corolar. Cu notatiile de mai sus, daca $0 < R < \infty$, atunci $(-R, R) \subset A \subset [-R, R]$

Exercitiu. Determinati multimea de convergenta pentru urmatoarele serii de puteri

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n^2+1} x^n \quad (2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n^3} x^n \quad (3) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n^3} x^n \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} x^n$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+1} x^n \quad (6) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n x^n$$

Teorema. Fie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o serie de puteri cu raza de convergenta $R > 0$. Atunci functia $s : (-R, R) \to \mathbb{R}$ definita prin

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

este continua pe $(-R, R)$.

Teorema (Teorema a II-a a lui Abel)**.** Fie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o serie de puteri cu raza de convergenta $R > 0$ si multimea de convergenta A. Daca seria de puteri este convergenta in punctul R (respectiv $-R$) atunci suma s a seriei, adica functia $s : A \to \mathbb{R}$ definita prin

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

este o functie continua in R (respectiv $-R$).

Teorema. Fie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o serie de puteri cu raza de convergenta R si fie $s : (-R, R) \to \mathbb{R}$ suma seriei, adica

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Atunci seria de puteri $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$ are aceasi raza de convergenta R. Daca $R > 0$, atunci functia $s : (-R, R) \to \mathbb{R}$ este derivabila si pentru orice $x \in (-R, R)$

$$s'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n.$$

Teorema. Fie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o serie de puteri cu raza de convergenta R si fie $s : (-R, R) \to \mathbb{R}$ suma seriei. Atunci seria de puteri $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ obtinuta prin integrarea termen cu termen a seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ are aceasi raza de convergenta R si functia

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

este o primitiva a functiei s pe $(-R, R)$, adica $S'(x) = s(x)$ pentru orice $x \in (-R, R)$.

Fie I un interval deschis astfel incat $0 \in I$ si fie $f \in C^{\infty}(I)$. Seria

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!} x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{f^n(0)}{n!} x^n + \cdots$$

se numeste seria Taylor asociata functiei f in punctul 0. Cu aceste notatii avem

Teorema. Seria Taylor a functiei f in punctul 0 este convergenta in punctul $x \in I$ si suma ei este egala cu $f(x)$ daca si numai daca valorile in x ale resturilor R_n ale formulelor lui Taylor formeaza un sir $(R_n(x))_{n \geq 1}$ convergent catre 0.

Exemplu. Folosind teorema de mai sus sa se arate ca:

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \quad \forall x \in \mathbb{R} \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, \quad \forall x \in \mathbb{R} \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \quad \forall x \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Sa consideram $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$. Intrucat $f^{(n)}(0) = 1$ pentru orice $n \geq 1$, polinomul Taylor de grad n asociat lui f in punctul 0 este

$$T_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

iar seria Taylor corespunzatoare este

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots .$$

Fie $x \in \mathbb{R}$. Folosind Formula lui Taylor cu restul lui Lagrange, obtinem $0 < \theta_x < x$ astfel incat

$$f(x) = T_n(x) + e^{\theta_x} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

Deoarece $|\theta_x| < |x|$ avem $|e_x^{\theta}| \leq e^{|\theta_x|} < e^{|x|}$ si atunci

$$\lim_{n\to\infty} \left| e^{\theta_x} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leq \lim_{n\to\infty} e^{|x|} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

Asadar,pentru orice $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} |f(x) - T_n(x)| = 0$$

si in concluzie

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots , \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Pentru sin si cos se procedeaza similar (exercitiu !)

Exemplu. Este binecunoscut faptul ca pentru orice $x \in \mathbb{R}$,

$$1 + x + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

si in consecinta, daca $x \in (-1, 1)$, trecand la limita cu $n \to \infty$ rezulta ca

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}. \tag{1}$$

Inlocuind pe x cu $-x$ in relatia de mai sus, pentru $x \in (-1, 1)$ avem

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 \cdots + (-1)^n x^n + \cdots = \frac{1}{1+x}. \tag{2}$$

Exemplu. Sa se dezvolte in serie de puteri ale lui x functia $f(x) = \arctan x$ si sa se precizeze intervalul pe care dezvoltare este valabila.

Evident

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2},\ x \in \mathbb{R}.$$

Inlocuind pe x cu x^2 in relatia (2), rezulata ca

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 \cdots + (-1)^n x^{2n}, \quad x \in (-1,1) \tag{3}$$

De aici prin integrare termen cu termen obtinem

$$\arctan x = c + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in (-1,1)$$

Facand acum $x = 0$ rezulta ca $c = 0$ si deci

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in (-1,1)$$

Pentru $x = 1$ seria din membru stang devine

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \cdots .$$

Cu criteriul lui Leibniz deducem ca aceasta serie este convergenta si atunci din Teorema lui Abel pentru serii de puteri obtinem

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \arctan x = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \cdots .$$

In mod similar avem

$$-\frac{\pi}{4} = \lim_{\substack{x\to -11\\ x>1}} \arctan x = -1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{1}{2n+1} + \cdots .$$

Asadar

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in [-1,1].$$

Exercitiu. Sa se dezvolte in serie de puteri ale lui x functia $f(x) = \ln(1-x)$, $x > -1$ si sa se precizeze intervalul pe care dezvoltarea este valabila.

Procedand ca in exemplul anterior se obtine

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots, \forall x \in (-1,1]$$

Drumuri si curbe parametrizate

Definitie. Fie un interval compact $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Se numeste drum parametrizat in $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$) orice functie vectoriala $\gamma = (x,y) : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ (resp. $\gamma = (x,y,z) : [a,b] \to \mathbb{R}^3$). Punctele $\gamma(a) = (x(a), y(a), z(a))$ si $\gamma(b) = (x(b), y(b), z(b))$ se numesc extremitatile drumului iar multimea $\{(x(t), y(t).z(t))) : t \in [a,b]\}$ se nuemste suportul (traiectoria) drumului. Ecuatiile

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \ , \quad t \in [a,b] \\ z = z(t) \end{cases}$$

se numesc ecuatiile parametrice ale drumului.

Daca $\gamma(a) = \gamma(b)$, drumul se numeste inchis. Daca functia γ este injectiva, spunem ca drumul este simplu. Un drum inchis se numeste simplu daca $\gamma|_{[a,b)}$ este o functie injectiva. Drumul $\gamma^- : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ definit prin

$$\gamma^-(t) = \gamma(a+b-t), \ t \in [a,b]$$

se numeste opusul lui γ. Un drum $\gamma = (x,y,z) : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ se numeste neted daca functiile x, y, z sunt de clasa C^1 (derivabile si cu derivata continua) si $x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2 > 0$ pentru orice $t \in [a,b]$.

Doua drumuri $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to \mathbb{R}^3$ si $\gamma_2 : [a_2, b_2] \to \mathbb{R}^3$ sunt echivalente daca exista o functie (numita schimbare de parametru) $\varphi \ : [a_1, b_1] \to [a_2, b_2]$ continua, bijectiva strict monotona si astfel ncat $\gamma_1(t) = \gamma_2(\varphi(t))$ pentru orice $t \in [a_1, b_1]$.

Daca φ este strict crescatoare spunem ca drumurile sunt echivalente cu pastrarea orientarii. In caz contrar spunem ca drumurile sunt echivalente cu orienari opuse. Se observa cu usurinta ca doua drumuri echivalente au acelasi suport.

Example 2. Drumurile

$$\gamma_1(t) = (t, \sqrt{1-t^2}), \quad t \in [0,1]$$
$$\gamma_2(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

sunt echivalente si ambele au drept suport portiunea din cercul trigonometric din primul cadran. Intr-adevar, fie $\tau : [0, \frac{\pi}{2}] \to [0,1]$, cu $\tau(t) = \cos t$ pentru orice $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Atunci $\gamma_1(\tau(t)) = \gamma_2(t)$ pentru orice $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ si τ este o functie strict descrescatoare, continua, bijectiva si deci cele doua drumuri sunt echivalente si au orientari opuse.

Definition 3. Se numeste curba parametrizata orice clasa de echivalenta de drumuri parametrizate echivalente.

O curba parametrizata este simpla (inchisa, neteda) daca drumul care o determina (si deci orice drum echivalent) este simplu (inchis, neted). Cand alegem un drum care determina o curba, alegem implicit si o orientare a curbei. Un drum cu orientare opusa determina o orientare opusa a curbei.

Fie $\gamma_1 : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ si $\gamma_2 : [b, c] \to \mathbb{R}^3$ doua drumuri parametrizate cu proprietatea ca $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$. Se numeste juxtapunerea drumurilor γ_1 si γ_2 si se noteaza cu $\gamma_1 \cup \gamma_2$ drumul

$$\gamma_1 \cup \gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) \text{ daca } t \in [a, b] \\ \gamma_2(t) \text{ daca } t \in [b, c] \end{cases}$$

Daca C_i este curba definita de drumul γ_i, $i = 1, 2$ atuncu $C_1 \cup C_2$ este curba definita de drumul $\gamma_1 \cup \gamma_2$; curba $C_1 \cup C_2$ se numeste juxtapunerea curbelor C_1 si C_2 . Un drum (curba) este neted pe portiuni daca este obtinut prin juxtapunerea unui numar finit de drumuri (curbe) netede.

Exemplu. 1) Cercul cu centru $(0, 0)$ si raza r

$$x^2 + y^2 = r^2$$

are parametrizarea

$$\begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

2) Cercul cu centru (a, b) si raza r

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

are parametrizarea

$$\begin{cases} x = a + r \cos t \\ y = b + r \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

3) elipsa

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

are parametrizarea

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

4) segmentul de dreapta din $\mathbb{R}^2$ cu capetele $A(x_A, y_A)$ si $B(x_B, y_B)$

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = t, \qquad \begin{cases} x = x_A + (x_B - x_A)t \\ y = y_A + (y_B - y_A)t \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

5) segmentul de dreapta din $\mathbb{R}^2$ cu capetele $A(x_A, y_A, z_A)$ si $B(x_B, y_B, z_B)$

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{z - z_A}{z_B - z_A} = t, \qquad \begin{cases} x = x_A + (x_B - x_A)t \\ y = y_A + (y_B - y_A)t \quad t \in [0,1] \\ z = z_A + (z_B - z_A)t \end{cases}$$

Lungimea curbelor

Fie C o curba neteda plana avand parametrizarea

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t \in [a, b]$$

Fie $\Delta = \{a = t_0 < t_1 < \cdots t_n = b\}$ o diviziune a intervalului $[a, b]$. Numarul

$$\|\Delta\| = \max_{1 \le i \le n} |t_i - t_{i-1}|$$

se numeste norma diviziunii Δ. Lungimea drumului γ poate fi aproximata cu lungimea liniei poligonale determinate de punctele $(x(t_i), y(t_i))$, une $i = 0, 1, \ldots n$ care este egala cu

$$l_\Delta = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i+1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i+1}))^2} \; = \; \sum_{i=1}^{n} \sqrt{x'(\eta_i)^2 + y'(\xi_i)^2} \cdot \Delta t_i.$$

unde $\eta_i, \xi_i \in (t_{i-1}, t_i)$ si $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ si deci lungimea curbei este

$$l = \lim_{\|\Delta\| \to 0} l_\Delta = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

In mod similar, daca γ este un drum neted in spatiu cu paramaterizarea

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \quad t \in [a, b],$$

lungimea lui este

$$l = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt.$$

Remarcam ca definitia lungimii unei curbe este corecta intrucat nu depinde de parametrizare.

Integrala curbilinie de prima speta

Fie C o curba neteda cu ecuatiile parametrice

$$C : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t \in [a, b]$$

si fie $f : D \to \mathbb{R}$ o functie continua unde V este un domeniu din $\mathbb{R}^3$ care include suportul curbei C.

Alegeme un sistem de puncte $A_i(x_i, y_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n$ care determina o diviziune Δ a curbei C in arce $(A_{i-1}A_i)$ de lungime Δs_i, unde $x_i = x(t_i)$ si $y_i = y(t_i)$. Consideram puncte arbitrare $(x_i^*, y_i^*) \in (A_{i-1}A_i)$ (adica $x_i^* = x(t_i^*)$, $y_i^* = y(t_i^*)$ cu $t_i^* \in [t_{i-1}, t_i]$) si definim suma

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\Delta s_i.$$

Fie

$$\|\Delta\| = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta s_i.$$

norma diviziunii Δ. Integrala curbilinie de tipul I este prin definitie

$$\int_C f(x, y) ds = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\Delta s_i.$$

Teorema 4. Cu notatiile anterioare

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t))\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

In cazul in care C este o curba neteda in spatiu cu ecuatiile parametrice

$$C : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \quad t \in [a, b] \tag{4}$$

Integrala curbulinie de prima speta se defineste similar si avem

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt.$$

In cazul in care curba C este neteda pe portiuni, adica se obtine prin juxtapunerea unor curbe netede

$$C = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_n$$

prin definitie

$$\int_C f ds = \int_{C_1} f ds + \cdots + \int_{C_n} f ds.$$

Example 5. Sa se calculeze

$$\int_C (x^2+y^2)zds,$$

unde C este o curba neteda cu parametrizarea

$$C: \begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \\ z = e^t \end{cases}, \quad t \in [0, \pi]$$

$$\int_C (x^2+y^2)zds = \int_0^\pi te^t \sqrt{e^{2t}\sin^{2t} + e^{2t}\cos^2 t + e^{2t}} = \int_0^\pi te^{3t}\sqrt{2}$$

Integrala curbilinie de speta a doua

Fie C o curba cu parametrizarea

$$C: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \quad t \in [a, b] \tag{5}$$

Fie $A(x(a), y(a), z(a))$ si $B(x(b), y(b), z(b))$ extremitatile curbei C. Cand t parcurge intervalul $[a, b]$ de la a la b, sensul de parcurgere al curbei C este de la A la B. Cand t parcurge intervalul $[a, b]$ de la b la a, curba C este parursa de la B la A. O curba impreuna cu unul din sensurile de parcurgere a ei se numeste curba orientata. Vom nota cu (A, B) curba C cu sensul de parcurgere de la A la B si cu (B, A) curba C parcursa de la B la A.

In cele ce urmeaza sensul de parcurgere al curbei C avand ecuatiile parametrice (5) este de la A la B.

Fie $\overline{F} = (P, Q, R) : V \to \mathbb{R}^3$ un camp vectorial continuu definit pe o multime V care contine curba C. In punctul $(x(t), y(t), z(t))$ versorul tangentei la curba C este

$$\overline{\tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}}(x'(t), y'(t), z'(t))$$

Integrala

$$\int_C \overline{F} \cdot \overline{\tau} ds$$

se numeste integrala curbilinie de speta a doua sau de tipul II. Se folosesc si notatiile

$$\int_C \overline{F} \cdot \overline{\tau} ds = \int_C P(x, y, x)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

sau

$$\int_C \overline{F} \cdot \overline{\tau} ds = \int_C \overline{F} \cdot d\overline{r}.$$

Atunci

$$\int_C P(x,y,x)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$
$$= \int_a^b P(x(t),y(t)),z(t)x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))z'(t).$$

Pentru a pune inevidemta sensul de parcurgere al curbei vom scrie

$$\int_{(A,B)} P(x,y,x)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz.$$

Daca se considera cealalalta orientare atunci vom folosi notatia.

$$\int_{(B,A)} P(x,y,x)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz.$$

Fie $\varphi : [a,b] \to [a,b]$,

$$\varphi(t) = a + b - t$$

Consideram paramaterizarea

$$\xi(t) = x(a+b-t), \eta(t) = y(a+b-t), \zeta(t) = z(a+b-t)$$

Versorul tangentei la curba C in punctul $(x(t),y(t),z(t))$ devine $-\overline{\tau}(t)$ si atunci

$$\int_{(B,A)} P(x,y,x)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \int_C \overline{F} \cdot (-\overline{\tau})ds =$$
$$- \int_{(A,B)} P(x,y,x)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz.$$

Asadar in cazul integralelor curbilinii de speta a doua, schimbarea sensului de parcurgere a curbei atrage dupa sine schimbarea semnului integralei.

In cazul in care curba C este juxtapunerea unor curbe netede

$$C = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_n$$

prin definitie

$$\int_C \overline{F} \cdot d\overline{r} = \int_{C_1} \overline{F} \cdot d\overline{r} + \cdots + \int_{C_n} \overline{F} \cdot d\overline{r}.$$

Observatie. Daca $\overline{F} : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ este un camp de forte si C este o curba parametrizata cu suportul inclus in D atunci $\int_C \overline{F} \cdot d\overline{r}$ reprezinta lucrul mecanic efectuat de forta $\overline{F}$ de-a lungul curbei C.

Exemplu. Calculati lucrul mecanic al fortei $\overline{F}(x,y,x) = x\overline{i} - z\overline{j} + y\overline{k}$ al carei punct de aplicatie descrie curba

$$C: \begin{cases} x = t \\ y = \cos t \\ z = \sin t \end{cases}, \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right].$$

$$L = \int_C \overline{F} \cdot d\overline{r} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (t + \sin t(-\sin t) + \cos t \cos t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (t + \sin^2 t + \cos^2 t) dt = \frac{\pi^2}{18} + \frac{\pi}{3}$$

Example 6. Sa se calculeze

$$\int_C y dx - x dy$$

unde C este cercul $x^2 + y^2 = 4$ parcurs in sens trigonometric.
Cum

$$C: \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}, \qquad t \in [0, 2\pi]$$

rezulta ca

$$\int_C -y dx + x dy = \int_0^{2\pi} (-2\sin t \cdot (-2\sin t) + 2\cos t \cdot 2\sin t) dt = \int_0^{2\pi} 4 dt = 8\pi$$

Integrale duble

Pe parcursul acestei sectiuni D va fi o multime din plan marginita de o curba inchisa si neteda pe portiuni.

Fie $f : D \to \mathbb{R}$ si fie $\Delta = \{D_i, i = 1, \ldots, n\}$ o acoperire a multimii D (adica $D \subset \cup_i D_i$) cu multimi de forma dreptunghiulara (sau mai general avand forma de paralelograme) astfel incat

$$\begin{cases} D \cap D_i \neq \varnothing \text{ pentru } i = 1, \ldots, n \\ \text{interior}(D_i) \cap \text{interior}(D_k) = \varnothing \text{ pentru } i \neq k \end{cases}$$

Fie

$$\text{diam}(D_i) = \sup\left\{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2} : (x,y), (x',y') \in D_i\right\}$$

diametrul multimii A si fie

$$\|\Delta\| = \max\{\text{diam}(D_i), i = 1, 2, \ldots, n\}$$

norma acoperirii. Daca $(x_i, y_i) \in D_i$ si definim suma Riemann

$$\sigma_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\text{aria}(D_{ij})$$

Integrala functiei f este prin definitie

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sigma_\Delta(f)$$

cu conditia ca limita sa existe si sa fie finita. In acest caz spunem ca f este integrabila pe D.

Clase de functii integrabile

1) Daca D este compacta si f este continua pe D atunci este integrabila pe D.
2) Daca functia f este marginita si are discontinuitati pe un numar finit de curbe netede atunci ea este integrabila.

Interpretare geometrica a integralei duble

1) Daca $f \geq 0$, atunci $\iint_D f(x,y)dxdy$ reprezinta volumul cuprins intre graficul functiei si planul XOY;
2) $\iint_D dxdy$ preprezinta aria multimii D.

Poprietati ale integralei duble

1) Daca f este integrabila pe D si $\alpha \in \mathbb{R}$, atunci αf este integrabila pe D si avem

$$\iint_D \alpha f(x,y)dxdy = \iint_D \alpha f(x,y)dxdy$$

2) Daca f si g sunt functii integrabile pe D si atunci $f+g$ este integrabila pe D si avem

$$\iint_D (f(x,y)+g(x,y))dxdy = \iint_D f(x,y)dxdy + \iint_D g(x,y,x)dxdy$$

3) Daca f este integrabile pe D si D' iar D si D' nu au puncte interioare comune atunci F este integrabile pe $D \cup D'$ si avem

$$\iint_{D\cup D'} f(x,y)dxdy = \iint_D f(x,y)dxdy + \iiint_{D'} f(x,y)dxdy.$$

4) Daca $f \geq 0$ este o functie integrabila pe D atunci

$$\iiint_D f(x,y)dxdy \geq 0.$$

Reducerea integralei duble la o integrala iterata

1) Fie $D = [a,b] \times [c,d]$ si $f : D \to \mathbb{R}$ o functie integrabila pe D. Atunci

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy$$

2) Fie $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$ unde $\alpha, \beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ sunt continue. O astfel de multime se numeste intergrafic proiectabil pe Ox. Daca $f : D \to \mathbb{R}$ o functie integrabila pe D, atunci

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)dy \right) dx$$

3) Fie $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq x \leq d, \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\}$ unde $\varphi, \psi : [c,d] \to \mathbb{R}$ sunt continue. O astfel de multime se numeste intergrafic proiectabil pe Oy. Daca $f : D \to \mathbb{R}$ o functie integrabila pe D, atunci

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)dx \right) dy$$

Exemplu. Sa se calculze integrala

$$\iint_D (2x+y)dxdy, \text{ unde } D = [0,1] \times [0,2]$$

$$\iint_D (2x+y)dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^2 (x+y)dy\right) dx = \int_0^1 \left(x^2+xy\right)|_0^2 \; dx = \int_0^1 (4+2x)dx = 5$$

Exemplu. Sa se calculze

$$\iint_D (3x+y)dx$$

unde D este multimea marginita de curbele $y = x^2+1 \quad y = -x^2 \quad x = 0 \quad x = 3.$

$$\iint_D (3x+2y)dx = \int_0^3 (3xy+y^2)|_{-x^2}^{x^2+1} dx = \int_0^3 (6x^3+3x+2x^2+1)dx$$

Schimbarea de Variabila in integrala dubla

Fie $T : \Omega \to D$, o aplicatie bijectiva de clasa C^1, definita prin

$$T : \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$$

astfel incat

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ pe } \Omega.$$

Cu aceste notatii,

Formula de schimbare de variabila

Fie f este o functie integrabila pe D, atunci

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_\Omega f(x(u,v), y(u,v) \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| dudv.$$

Fie $T_1(u,v)$, $T_2(u+\Delta u, v)$, $T_3(u+\Delta u, v+\Delta v)$, $T_4(u, v+\Delta v)$ un dreptunghi infinitezimal din Ω. Fie $P_1P_2P_3P_4$ imaginea dreptunghiului $T_1T_2T_3T_4$ prin transformarea T. Aria patrulateriu curbiliniu $P_1P_2P_3P_4$ poate fi aporximata cu aria paralelogramului $A_1A_2A_3A_4$, unde

$A_1(x(u,v), y(u,v))$,
$A_2(x(u,v) + \frac{\partial x}{\partial u}(u,v)\Delta u,\; y(u,v) + \frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\Delta u)$,
$A_4(x(u,v) + \frac{\partial x}{\partial v}(u,v)\Delta v,\; y(u,v) + \frac{\partial y}{\partial v}(u,v)\Delta v)$,
$A_3(x(u,v) + \frac{\partial x}{\partial u}(u,v)\Delta u + \frac{\partial x}{\partial v}(u,v)\Delta v,\; y(u,v) + \frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\Delta u + \frac{\partial y}{\partial v}(u,v)\Delta v)$

Aria triunghiului $A_1A_2A_4$ este egala cu

$$\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x(u,v) & y(u,v) & 1 \\ x(u,v)+\frac{\partial x}{\partial u}(u,v)\Delta u & y(u,v)+\frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\Delta u & 1 \\ x(u,v)+\frac{\partial x}{\partial v}(u,v)\Delta v & y(u,v)+\frac{\partial y}{\partial v}(u,v)\Delta v & 1 \end{vmatrix}$$

$$\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u,v)\Delta u & \frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\Delta u \\ \frac{\partial x}{\partial v}(u,v)\Delta v & \frac{\partial y}{\partial v}(u,v)\Delta v \end{vmatrix}$$

$$\pm\frac{1}{2}\left|\frac{\partial x}{\partial u}(u,v)\frac{\partial y}{\partial v}(u,v)-\frac{\partial x}{\partial v}(u,v)\frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\right|\Delta u\Delta v.$$

Cum aceasi arie o are si triunghiul $A_2A_3A_4$, rezulta ca

$$\text{aria}(A_1A_2A_3A_4)=\left|\frac{\partial x}{\partial u}(u,v)\frac{\partial y}{\partial v}(u,v)-\frac{\partial x}{\partial v}(u,v)\frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\right|\Delta u\Delta v.$$

Daca (t,s) este un punct din dreptunghiul $T_1T_2T_3T_4$, atunci

$$\text{aria}(P_1P_2P_3P_4)\approx\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}(s,t)\right|\text{aria}(T_1T_2T_3T_4).$$

Fie $R=\{R_1,R_2,\ldots,R_n\}$ o acoperire a multimii Ω cu multtimi de forma dreptunghiulara. Notam cu P_i imaginea multimii $R_i\cup\Omega$ prin transformarea T. Fie $P=\{P_1,\ldots,P_n\}$. Observam ca $\|T\|\to 0$ daca si numai $\|P\|\to 0$. Atunci

$$\begin{aligned}\iint_D f(x,y)dxdy &= \lim_{\|P\|\to 0}\sum_i f(\xi_i,\eta_i)\text{aria}(P_i)\\ &= \lim_{\|T\|\to 0}\sum_i f(\xi(s_i,t_i),\eta(s_i,t_i)\text{aria}\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}(s_i,t_i)\right|\text{aria}(T_i)dudv\\ &= \iint_\Omega f(x(u,v),y(u,v)\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|dudv.\end{aligned}$$

Trecerea de la coordonate polare la coordonate carteziene

$$\begin{cases} x=r\cos\theta & r\in[0,\infty) \\ y=r\sin\theta & \theta\in[0,2\pi] \end{cases}$$

In acest caz, avem

$$\frac{D(x,y)}{D(r,\theta)}=r$$

Trecerea de la coordonate polare generalizate la coordonate carteziene

$$\begin{cases} x = ar\cos\theta & \qquad r \in [0,\infty) \\ y = br\sin\theta & \qquad \theta \in [0,2\pi] \end{cases}$$

In acest caz, avem

$$\frac{D(x,y)}{D(r,\theta)} = abr$$

Exemplu. 1) Calculati

$$\iint_D y dxdy, \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2+y^2 \leq 4, x,y \geq 0\}$$

Trecem la coordonate polare

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$$

si atunci domeniul D devine

$$r \in [0,2], \quad \theta \in [0,\frac{\pi}{2}]$$

Cum $dxdy = \frac{D(x,y)}{D(r,\theta)} = rdrd\theta$, avem

$$\iint_D y dxdy = \int_0^2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \sin\theta d\theta \right) dr = \int_0^2 (-r^2\cos\theta)|_0^{\frac{\pi}{2}} dr = \int_0^2 r^2 dr = \frac{8}{3}$$

2) Calculati

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{9}-\frac{x^2}{4}}} dxdy, \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \frac{x^2}{9}+\frac{x^2}{4} \leq 1\}$$

Trecem la coordonate polare generalizate

$$x = 2r\cos\theta, y = 3r\sin\theta$$

In coordonate polare generalizate domesniul D devine

$$r \in [0,1], \quad \theta \in [0,2\pi]$$

Avem

$$dxdy = \frac{D(x,y)}{D(r,\theta)} = 6rdrd\theta,$$

si atunci

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{9}-\frac{x^2}{4}}} dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \frac{6r}{\sqrt{1-r^2}} \right) dr = -12\pi\sqrt{1-r^2}|_0^1 = 12\pi.$$

Teorema 7 (Formula lui Green)**.** Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un compact a carui frontiera C este o reuniune finita de curbe inchise si netede pe portiuni si fie $P, Q : D \to \mathbb{R}$ functii de clasa C^1 pe un deschis care contine D. Atunci

$$\int_C Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

unde sensul de parcurgere este in asa fel ca un observator care se deplaseaza de-a lungul curbei C lasa la stanga domeniul D.

Teorema este demonstrata daca aratam ca

$$\int_C Pdx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)dxdy \tag{6}$$

$$\int_C Qdy = -\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)dxdy \tag{7}$$

Presupunem ca D poate fi descompus intr-o reuniune finita de intergrafice proiectabile pe Ox care au in comun cel mult puncte ale frontierelor si de asemenea ca D poate fi descompus intr-o reuniune finita de intergrafice proiectabile pe Oy. Avand in vedere acest lucru e suficient sa demonstram

$$\int_C Pdx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)dxdy$$

atunci cand D este un inetrgrafic proiectiabi pe axa Ox, adica exista $\alpha, \beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ astfel incat

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \alpha(x) \le y \le \beta(x), x \in [a,b]\}.$$

Observam ca

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)dy \right) dx = \int_a^b \left[P(x,\beta(x)) - P(x,\alpha(x)) \right] dx$$

Frontiera lui D este reuniunea a patru curbe cu urmatoarele parametrizari

$$C_1 : \begin{cases} x = t \\ y = \alpha(t) \end{cases}, \quad t \in [a,b]$$

$$C_2 : \begin{cases} x = t \\ y = \beta(t) \end{cases}, \quad t \in [b,a]$$

$$C_3 : \begin{cases} x = a \\ y = t \end{cases}, \quad t \in [\alpha(b), \beta(a)]$$

$$C_4 : \begin{cases} x = b \\ y = t \end{cases}, \quad t \in [\alpha(a), \beta(b)]$$

Atunci,

$$\int_C Pdx = \int_{C_1} Pdx + \int_{C_2} Pdx + \int_{C_3} Pdx + \int_{C_4} Pdxdy = \int_a^b P(x, \alpha(x)) - \int_a^b P(x, \beta(x))dx$$

Asadar,

$$\int_C Pdx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)dxdy$$

In mod similar, descopunand eventual D intr-o reuniune finita de intergrafice proiectabile pe Oy se arata ca

$$\int_C Qdy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)dxdy$$

Example 8. Sa se calculze cu formula lui Green integrala

$$\int_C y^2dx + x^2dy, \text{unde } C \text{ este frontiera domeniului } D = \{(x, y) |\ x^2 + y^2 \leq 1,\ y \geq 0\}$$

parcursa in sens trigonometric.

Functiile $P(x, y) = y^2$ si $Q(x, y) = x^2$ sunt de clasa C^1 si $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2x - 2y$. Avem,

$$\int_C y^2dx + x^2dy = \iint_D 2(x - y)\ dxdy = 2\int_0^1 \left(\int_0^\pi \rho^2(\cos\theta - \sin\theta)d\theta\right) d\rho$$

$$= 2\int_0^1 \rho^2 d\rho \int_0^\pi (\cos\theta - \sin\theta)d\theta = -4/3.$$

Integrale triple

In cele ce urmeaza multimea V va fi o multime din plan marginita de o suprafata inchisa si neteda pe portiuni.

Fie $f : V \to \mathbb{R}$ si fie $\Delta = \{V_i\}_{i=1,2,\ldots,n}$ o acoperire a multimii V (adica $V \subset \cup_i V_i$) cu multimi de forma paralelipipedica astfel incat

$$\begin{cases} V \cap V_i \neq \varnothing \\ \text{interior}(V_i) \cap \text{interior}(V_j) = \varnothing \text{ pentru } i \neq j \end{cases}$$

Fie

$$\text{diam}(V_i) = \max\left\{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (y-y')^2} : (x,y,z),(x',y',z') \in V_i\right\}$$

diametrul multimii A si fie

$$\|\Delta\| = \max\{\text{diam}(V_i), i = 1,2,\ldots,n\}$$

norma acoperirii. Daca $(x_i, y_i, z_i) \in V_i \cap V$ definim suma Riemann

$$\sigma_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\text{vol}(V_i)$$

Integrala functiei f pe domeniul V este prin definitie

$$\iiint_V f(x,y)dxdy = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sigma_\Delta(f)$$

cu conditia ca limita sa existe si sa fie finita. In acest caz spunem ca f este integrabila pe V.

Clase de functii integrabile

1) Daca V este compacta iar f este continua pe V atunci este integrabila pe V.
2) Daca functia f este marginita si are discontinuitati pe un numar finit de suprafete netede atunci ea este integrabila.

Interpretare geometrica a integralei triple

$\iint_V dxdydz$ preprezinta volumul multimii $V \subset \mathbb{R}^3$

Poprietati ale integralei triple

1) Daca f este integrabila pe V si $\alpha \in \mathbb{R}$, atunci αf este integrabila pe V si avem

$$\iiint_V \alpha f(x,y,z)dxdydz = \iiint_V \alpha f(x,y,z)dxdydz$$

2) Daca f si g sunt functii integrabile pe V si atunci $f+g$ este integrabila pe V si avem

$$\iiint_V (f(x,y,z)+g(x,y,z))dxdydz = \iiint_V f(x,y,z)dxdydz + \iiint_V g(x,y,z)dxdydz$$

3) Daca f este integrabile pe V si V' iar V si V' nu au puncte interioare comune atunci F este integrabile pe $V \cup V'$ si avem

$$\iiint_{V\cup V'} f(x,y,z)dxdydz = \iiint_V f(x,y,z)dxdydz + \iiint_{V'} f(x,y,z)dxdydz.$$

4) Daca $f \geq 0$ este o functie integrabila pe V atunci

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz \geq 0.$$

Metode de calcul

1) Daca $V = [a,b] \times [c,d] \times [k,p]$

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_k^p f(x,y,z)dz \right) dy \right) dx$$

2) Domeniul V este cuprins ntre planele $z=a$ si $z=b$. Notam cu V_{z_0} proiectia pe planul XOY a intersectiei lui V cu planul $z=z_0$ unde $a \leq z_0 \leq b$, adica

$$V_{z_0} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y,z_0) \in V\}.$$

Atunci,

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b \left(\iint_{V_z} f(x,y,z)dxdy \right) dz.$$

3) Domeniul V este un intergrafic proiectabil pe planul xOy, adica este limitat de o

suprafata laterala cilindrica cu generatoarele paralele cu axa Oz si marginita de suprafetele $z=\varphi(x,y)$, $(x,y) \in D$ si $z=\psi(x,y)$, $(x,y) \in D$, unde $D \subset \mathbb{R}^2$. Asadar

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \varphi(x,y) \leq z \leq \psi(x,y), (x,y) \in D\}.$$

Atunci,

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iint_D \left(\int_{\varphi(x,y)}^{psix,y)} f(x,y,z)dz \right) dxdy.$$

Exemplu. Calculati

$$\iiint_V x dxdydz,\ V : x+y+z \leq 1,\ x,y,z \geq 0$$

Observam ca

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1-x-y,\quad (x,y) \in D\}$$

unde D, proiectia lui V pe planul xOy este

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2), x+y \leq 1,\ x,y \geq 0\}$$

Atunci

$$\begin{aligned}\iiint_V z dxdydz &= \iint_D \left(\int_0^{1-x-y} x dz\right) dxdy = \iint_D x(1-x-y)dxdy \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (x-x^2-xy)dy\right) dx = \int_0^1 \left(xy - x^2y - \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{1-x} dx \\ &= \int_0^1 \left[x(1-x) - x^2(1-x) - \frac{(1-x)^2}{2}\right] dx = \cdots\end{aligned}$$

Exemplu. Calculati

$$\iiint_V (x^2+y^2)dxdydz,\ V : x^2+y^2 \leq z^2,\ 0 \leq z \leq 3$$

Observam ca

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 3,\quad (x,y) \in D\}$$

unde unde D, proiectia lui V pe planul xOy este

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2 \leq 9\}$$

Deci,

$$\iiint_V z dxdydz = \iint_D \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^3 (x^2+y^2)dz\right) dxdy = \iint_D (x^2+y^2)(3-(x^2+y^2))dxdy$$

Trecand la coordonate polare

$$\begin{cases} x = rcos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

domeniul D devine

$$D' : \begin{cases} 0 \leq r \leq 3 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

Cum

$$dxdy = \frac{D(x,y)}{D(r,\theta)}\ dxdy = r\ drd\theta$$

avem

$$\iint_D (x^2+y^2)(3-(x^2+y^2))dxdy = iint_{D'} r^3(3-r)drd\theta = \int_0^3 \left(\int_0^{2\pi}(3r^3-r^4)d\theta\right)dr$$

$$= 2\pi\int_0^3 (3r^3-r^4)dr = \frac{243}{10}\pi.$$

Schimbarea de variabila in integrala tripla

Fie $T:\Omega\to V$, o aplicatie bijectiva de clasa C^1, definita prin

$$T:\begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases}$$

astfel incat

$$\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Cu aceste notatii,

Formula de schimbare de variabila

Daca f este o functie integrabila pe V, atunci

$$\iint_V f(x,yz)dxdydz = \iint_\Omega f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)\left|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\right|dudvdw.$$

Trecerea de la coordonate sferice la coordonate carteziene

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \qquad r\in[0,\infty),\ \theta\in[0,\pi],\ \varphi\in[0,2\pi]$$

In acest caz, avem

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ r\cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = r^2\sin\theta$$

Trecerea de la coordonate sferice generalizate la coordonate carteziene

$$\begin{cases} x = ar\sin\theta\cos\varphi \\ y = br\sin\theta\sin\varphi \\ z = cr\cos\theta \end{cases} \qquad r \in [0,\infty),\ \theta \in [0,\pi],\ \varphi \in [0,2\pi]$$

In acest caz, avem

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} a\sin\theta\cos\varphi & br\cos\theta\cos\varphi & -cr\sin\theta\sin\varphi \\ a\sin\theta\sin\varphi & br\cos\theta\sin\varphi & cr\sin\theta\cos\varphi \\ ar\cos\theta & -br\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = abcr^2\sin\theta$$

Calculati integrala

$$\iiint_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz, \quad V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 \leq 1, z \geq 0\}$$

$$\begin{cases} x = 2r\sin\theta\cos\varphi \\ y = 3r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \qquad r \in [0,1]\ \theta \in [0,\pi/2],\ \varphi \in [0,\pi]$$

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)} = 6r^2\sin\theta.$$

Prin aceasta transformare domeniul V define $V' = [0,1] \times [0,\pi/2] \times [0,\pi]$ Avem

$$\iiint_V zdxdydz = \iiint_{V'} r^2 \cdot 6r^2\sin\theta drd\theta d\varphi = \iiint_{V'} 6r^4\sin\theta \cdot drd\theta d\varphi$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{2\pi} 6r^4\sin\theta d\varphi\right)d\theta\right)dr = \int_0^1 2\pi \cdot 6r^4 dr = \int_0^1 12\pi r^3 dr = 12\pi/5$$

Exercitii

1) Calculati urmatoarele integrale curbilinii folosind definitia integralei curbilinii de speta a doua.

(1) $\int\limits_C (x+2y)dx + x^2ydy$ unde curba C este frontiera domeniului $D = \{(x,y) \in \mathbb{R} | x^2 + y^2 \leq 4, x \leq 0\}$, parcursa in sens invers acelor de ceasornic.

(2) $\int\limits_C xdx + (x+y)dy$ unde curba C este frontiera domeniului $D = \{(x,y) \in \mathbb{R} | x^2 + y^2 \leq 4, x \leq 0, y \geq 0\}$, parcursa in sens trigonometric.

(3) $\int\limits_C ydx + (2x-y)dy$ unde curba C este frontiera domeniului $D = \{(x,y) \in \mathbb{R} | x^2 + y^2 \leq 1, y \leq 0\}$, parcursa in sens trigonometric.

(4) $\int\limits_C (x+y)dx - xydy$ unde curba $C = [AB] \cup [BC] \cup [CA]$ unde $A(1,-1)$, $B(1,3)$ si $C(4,3)$.

(5) $\int\limits_C (2x+y)dx - 2xdy$ unde curba $C = [AB] \cup [BC] \cup [CA]$ unde $A(0,0)$, $B(3,0)$ si $C(0,6)$.

(6) $\int_C (2y+x)dx - xdy$ unde $C = [AB] \cup [BC] \cup [CA]$, unde $A(-3,-4)$, $B(2,1), C(-3,1)$

(7) $\int\limits_C (x+y)dx + x^2ydy$, unde C este frontiera domeniului $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 9,\ x,y \leq 0\}$ parcursa in sens trigonometric.

2) Calculati integralele de la exercitiul anterior folosinf formula lui Green.

3) Calculati integralele

(1) $\iint\limits_D (2xy + e^x)dxdy$ unde $D = [0,1] \times [0,4]$

(2) $\iint\limits_D (x + \sin(2y))dxdy$ unde D este marginit de curbele $y = x-1,\ y = -x+1, x = 0$

(3) $\iint\limits_D (3x^2y - 1)dxdy$ unde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R} | x^2+y^2 \leq 4, x \leq 0\}$

(4) $\iint\limits_D (2xy + x^2 - y^2)dxdy$ unde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R} | x^2+y^2 \leq 9, x-y \leq 0, x+y \geq 0\}$

(5) $\iiint\limits_V (y\sin^2 z + x\cos 2z)dxdydz$, unde $V = [2,4] \times [1,3] \times \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

(6) $\iiint\limits_V (x+z)dxdydz$, unde $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2+y^2+z^2 \leq 9, x,y \geq 0, z \leq 0\}$

(7) $\iiint\limits_V (xz+y)dxdydz$, unde $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 16, y,z \geq\ 0\}$.

(8) $\iint_D (x+xy)dxdy, \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 9,\ x \geq y\}$

(9) $\iint_D (x^2+y)dxdy, \quad D$ este limiat de curbele $y = x^2, x = y^2$

(10) $\iint_D \frac{1}{(y+x)^2}dxdy,\ D$ este limitat de dreptele $y-2x = 0, y+2x = 0, y = 1,\ y = 2$

11) $\iiint_V (xy+z)dxdydz, \quad V=[0,1]\times[0,2]\times[1,3]$

12) $\iiint_V (z+1)dxdydz, \quad V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 3x+y+z=6,\ x,y,z\geq 0\}$

13) $\iiint_V (x^2+y^2)dxdydz, \quad V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2\leq 2z,\ y\geq 0,\ 0\leq z\leq 2\}$

14) $\iiint_V xydxdydz, \quad V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2\leq 1, -1\leq z\leq 2\}$

15) $\iiint_V (x+y+xz^2)dxdydz, \quad V=[0,1]\times[1,3]\times[0,2]$