

Relatii binare. Functii.

Se numeste relatie binara de la multimea X la multimea Y o submultime $\mathcal{R} \subset X \times Y$. Daca $(x, y) \in \mathcal{R}$ scriem $x\mathcal{R}y$. O submultime a lui $X \times X$ se numeste relatie pe X .

O relatie f de la X la Y se numeste functie daca pentru orice $x \in X$ exista un unic $y \in Y$ astfel incat $x\mathcal{R}y$. In acest caz unicul element asociat cu x se numeste valoarea lui f in x sau imaginea lui x prin f si se noteaza cu $f(x)$. Daca f este o functie scriem

$$f : X \rightarrow Y \text{ sau } X \xrightarrow{f} Y$$

Daca $A \subset X$ si $f : X \rightarrow Y$ este o functie notam cu $f|_A$ functia de la A la Y definita prin $f|_A(x) = f(x)$ pentru orice $x \in A$. Functia $f|_A$ se numeste restrictia lui f la A .

Fie $f : X \rightarrow Y$. Spunem ca f este

- 1) injectiva daca pentru orice $x, y \in X, x \neq y$ avem $f(x) \neq f(y)$.
- 2) surjectiva daca $\forall y \in Y, \exists x \in X$ astfel incat $f(x) = y$.
- 3) bijectiva daca este injectiva si surjectiva.
- 4) inversabila daca exista $g : Y \rightarrow X$ astfel incat $f \circ g = 1_Y$ si $g \circ f = 1_X$.

Propozitie. Fie $f : X \rightarrow Y$.

- 1) f este injectiva $\Leftrightarrow \exists g : Y \rightarrow X$ surjectiva astfel incat $g \circ f = 1_X$.
- 2) f este surjectiva $\Leftrightarrow \exists g : Y \rightarrow X$ injectiva astfel incat $f \circ g = 1_Y$.
- 3) f este bijectiva $\Leftrightarrow f$ este inversabila.

Definitie. O relatie $\mathcal{R} \subset X \times X$ se numeste

- 1) reflexiva daca $x\mathcal{R}x$ pentru orice $x \in X$
- 2) simetrica daca pentru orice $x, y \in X, x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$
- 3) tranzitiva daca pt orice $x, y, z \in X$

$$x\mathcal{R}y \text{ si } y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$$

- 4) antisimetrica daca pt orice $x, y \in X$

$$x\mathcal{R}y \text{ si } y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y$$

Definitie. O relatie $\mathcal{R} \subset X \times X$ se numeste relatie de echivalenta daca este reflexiva, simetrica si tranzitiva.

Daca \mathcal{R} este relatie de echivalenta pe X scriem adeseori $x \sim y$. Daca $x \in X$, multimea

$$\hat{x} = \{y \in X : x\mathcal{R}y\}$$

se numeste clasa de echivalenta a lui x . Daca $x, y \in X$ atunci $\hat{x} = \hat{y}$ sau $\hat{x} \cap \hat{y} = \emptyset$. Multimea $\hat{X} = X / \sim$ se numeste multimea cat sau factor a lui X generata de \mathcal{R} . Aplicatia $\pi : X \rightarrow \hat{X}, x \mapsto \hat{x}$ se numeste surjectie canonica.

Definitie. O relatie $\mathcal{R} \subset X \times X$ se numeste relatie de echivalenta daca este reflexiva, antisimetrica si tranzitiva. Se noteaza cu \leq . Obiectul (X, \leq) format din multimea X si relatia de ordine \leq se numeste multime ordonata. O multime ordonata (X, \leq) se numeste total ordonata daca pentru orice $x, y \in X$ avem $x \leq y$ sau $y \leq x$.

Exercitiu. Fie A o multime si $(A_i)_{i \in I}$ o partitie a lui A . Sa se arate ca $x \sim y$ daca si numai daca exista $i \in I$ astfel incat $x, y \in A_i$ defineste o relatie de echivalenta pe A pentru care clasele de echivalenta coincid cu elementele partitiei considerate.

Exercitiu. Fie X o multime nevida si $\mathcal{P} = \{A | a \subseteq X\}$. Aratati ca relatia de incluziune \subseteq este o relatie de ordine \mathcal{P} care nu este totala daca X are cel putin doua elemente.

Fie (X, \leq) o multime ordonata si $A \subseteq X, A \neq \emptyset$. Un element $x \in X$ se numeste majorant (resp. minorant) pentru A daca $a \leq x$ (resp. $a \geq x$) pentru orice $a \in A$. Daca A are un majorant (minorant) atunci A se numeste majorata (minorata). Daca A este majorata si minorata, A se numeste marginita.

Daca x este un majorant al lui A si in acelasi timp $x \in A$ atunci x este unic determinat, se numeste cel mai mare element al lui A sau maximul lui A si se noteaza cu $\max A$.

Daca x este un minorant al lui A si in acelasi timp $x \in A$ atunci x , este unic determinat, se numeste cel mai mic element al lui A sau mainimul lui A si se noteaza cu $\min A$.

Daca $A \subseteq X, A \neq \emptyset$ este majorata si daca multimea majorantilor lui A are un cel mai mic element, atunci acest element se numeste marginea superioara a lui A .

$$x = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq x, \forall a \in A \\ \text{daca } a \leq y, \forall a \in A \Rightarrow x \leq y. \end{cases}$$

Daca $A \subseteq X, A \neq \emptyset$ este minorata si daca multimea minorantilor lui A are un cel mai mare element, atunci acest element se numeste marginea inferioara a lui A .

$$x = \inf A \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq x, \forall a \in A \\ \text{daca } y \leq a, \forall a \in A \Rightarrow x \geq y. \end{cases}$$

O multime ordonata se numeste complet ordonata daca orice parte nevida si majorata are margine superioara.

Exercitiu. Daca (X, \leq) este complet ordonata atunci orice parte nevida si minorata are margine inferioara.

Multimi finite, infinite, numarabile

Multimea numerelor naturale

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

Multimea numerelor intregi

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

Multimea numerelor rationale

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$$

Doua multimi A si B se numesc echipotente si scriem $A \sim B$ daca exista o functie bijectiva $f : A \rightarrow B$. Se numeste cardinalul multimii A un simbol asociat multimii notat cu $\text{card } A$ astfel incat $\text{card } A = \text{card } B \Leftrightarrow A \sim B$. Daca A si B sunt doua multimi vom scrie $\text{card } A \leq \text{card } B$, daca $A \sim A_1 \subset B$ si $\text{card } A < \text{card } B$ daca $A \sim A_1 \subset B$ si $A \not\sim B$. Cardinalul multimii vide se noteaza cu 0, cardinalul lui \mathbb{N} se noteaza \aleph_0 . O multime se numeste finita daca $A = \emptyset$ sau exista $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ astfel ca $A \sim \{1, 2, \dots, n\}$; A este infinita daca nu este finita; A este numarabila daca $A \sim \mathbb{N}$. Spunem ca A este cel mult numarabila daca A este finita sau numarabila. Daca A este numarabila exista $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ si fie $a_n = f(n)$. atunci $A = \{a_0, a_1, \dots\}$.

Propozitie. Orice submultime infinita a unei multimi numarabile este numarabila.

Fie $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ si $B \subseteq A$ infinita. Definim recursiv $f : \mathbb{N} \rightarrow B$ dupa cum urmeaza. $f(1) = a_{n_1}$ unde n_1 este cel mai mic element $n \in \mathbb{N}$ a.i. $a_n \in B$. Punem $f(2) = a_{n_2}$ unde n_2 este cel mai mic element $n \in \mathbb{N}$ a.i. $a_n \in B \setminus \{a_1, a_2, a_{n_1}\}$; $f(k+1) = a_{n_{k+1}}$ unde n_{k+1} este cel mai mic element $n \in \mathbb{N}$ a.i. $a_n \in B \setminus \{a_1, \dots, a_{n_k}\}$. Cum f este bijectiva deducem $B \sim \mathbb{N}$.

Teorema. Multimea $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ este numarabila

Demonstratie. Consideram functia $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definita prin $f(m, n) = 2^{m-1}(2n-1)$. se poate verifica cu usurinta ca f este bijectiva.

Teorema. Imaginea surjectiva a unei multimi numarabile este cel mult numarabila.

Demonstratie. Sa presupunem ca A este numarabila si $f : A \rightarrow B$ este o surjectie. Atunci exista $g : B \rightarrow A$ injectiva astfel incat $f \circ g = 1_B$.

Cum $g(B) \subseteq A$ si A este numarabila rezulta ca $B \sim g(B)$ este cel mult numarabila.

Propozitie. Fie $(A_n)_{n \geq 1}$ un sir de multimi numerabile. Atunci $A = \cup_{n \geq 1} A_n$ este numarabila.

Demonstratie. Pentru orice $n \geq 1$ avem

$$A_n = \{a_n^1, a_n^2, \dots\}$$

Definim

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \quad f(m, n) = a_n^m.$$

Evident ca f este surjectiva si deci A este cel mult numarabila. Cum $A_n \subset A$ deducem ca A este infinita si deci numarabila.

Multimea numerelor reale

Definitie. Se numeste corp ordonat un corp comutativ $(K, +, \cdot)$ inzestrat cu o relatie de ordine \leq care satisface

- 1) $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z \quad \forall x, y, z \in K$
- 2) $x \leq y \Rightarrow x \cdot z \leq y \cdot z \quad \forall x, y, z \in K$
- 3) $x, y \in K \Rightarrow x \leq y$ sau $y \leq x$

Doua corpuri K si F se numesc izomorfe daca exista o functie $\varphi : K \rightarrow F$ astfel incat $\forall x, y \in K$

- 1) $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$
- 2) $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$
- 3) $x \leq y \Rightarrow \varphi(x) \leq \varphi(y)$

Un corp ordonat K se numeste corp complet ordonat daca multimea ordonata (K, \leq) este complet ordonata.

Teorema. Oricare doua corpuri complet ordonate sunt izomorfe.

Definitie. Se numeste taietura in \mathbb{Q} o submultime T a lui \mathbb{Q} cu urmatoarele proprietati:

- 1) $T \neq \emptyset$ si $T \neq \mathbb{Q}$
- 2) T nu are un cel mai mic element
- 3) daca $a \in T$ si $x > a$ atunci $x \in T$

Notam cu \mathcal{T} multimea taieturilor in \mathbb{Q} . Daca $a \in \mathbb{Q}$, atunci $S_a = \{x \in \mathbb{Q} : x > a\}$ se numeste taietura rationala determinata de numarul rational a . Observam ca $\inf S_a = a$ si ca aplicatia

$$\mathbb{Q} \ni a \mapsto S_a \in \mathcal{T}$$

este injectiva.

Propozitie. Relatia \leq definita prin

$$T_1 \leq T_2 \Rightarrow T_1 \subset T_2$$

este o relatie de ordine pe \mathcal{T} cu proprietatile

- 1) Daca $T_1, T_2 \in \mathcal{T}$ atunci $T_1 \leq T_2$ sau $T_2 \leq T_1$.
- 2) orice parte nevida si majorata a lui \mathcal{T} are supremum.
- 3) Daca $a, b \in \mathbb{Q}$ si $a \leq b$ atunci $S_a \leq S_b$.

Propozitie. Pentru orice $T_1, T_2 \in \mathcal{T}$ multimea

$$T_1 + T_2 = \{x + y : x \in T_1, y \in T_2\}$$

este o taietura a lui \mathbb{Q} si asocierea

$$(T_1, T_2) \mapsto T_1 + T_2$$

este o lege de compozitie in raport cu care \mathcal{T} este un grup abelian.

In plus daca $T_1, T_2 \in \mathcal{T}$ si $T_1 \leq T_2$ atunci

$$T_1 + T \leq T_2 + T, \quad \forall T \in \mathcal{T}.$$

Elementul neutru in raport cu adunarea " + " este taietura S_0 si pentru $T \in \mathcal{T}$ opusul lui T este taietura

$$-T = \{x \in \mathbb{Q} : x > -a, \quad \forall a \in T\}$$

Pentru orice $T \in \mathcal{T}$ avem fie $S_0 \leq T$ fie $T \leq S_0$. Fie $\mathcal{T}_+ = \{T \in \mathcal{T} : T \geq S_0\}$.

Propozitie. Pentru orice $T_1, T_2 \in \mathcal{T}_+$ multimea

$$T_1 \circ T_2 = \{xy | x \in T_1, y \in T_2\}$$

este o taietura in \mathbb{Q} si asocierea

$$(T_1, T_2) \mapsto T_1 \circ T_2$$

are proprietatile

- 1) $(T_1 \circ T_2) \circ T_3 = T_1 \circ (T_2 \circ T_3)$
- 2) $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$
- 3) $T_1 \circ (T_2 + T_3) = T_1 \circ T_2 + T_1 \circ T_3$
- 4) $T_1 \leq T_2 \Rightarrow T_1 \circ T_3 \leq T_2 \circ T_3$

Pentru orice $T_1, T_2, T_3 \in \mathcal{T}_+$.

Elementul neutru in raport cu operatia ” \circ ” este taietura S_1 si pentru $T \in \mathcal{T}_+$ exista o taietura $U \in \mathcal{T}_+$ a.i. $T \circ U = U \circ T = S_1$. Mai precis

$$U = \{x \in \mathbb{Q} : x > \frac{1}{a}, \forall a \in \mathcal{T}\}.$$

Propozitie. Operatia ” \cdot ” definita pe \mathcal{T} prin

$$T_1 \cdot T_2 = \begin{cases} T_1 \circ T_2, & T_1, T_2 \in \mathcal{T}_+ \\ -(-T_1 \circ T_2), & T_1 \notin \mathcal{T}_+, T_2 \in \mathcal{T}_+ \\ -(T_1 \circ (-T_2)), & T_1 \in \mathcal{T}_+, T_2 \notin \mathcal{T}_+ \\ (-T_1) \circ (-T_2), & T_1, T_2 \notin \mathcal{T}_+ \end{cases}$$

are proprietatile

- 1) $(T_1 \cdot T_2) \cdot T_3 = T_1 \cdot (T_2 \cdot T_3)$
- 2) $T_1 \cdot T_2 = T_2 \cdot T_1$
- 3) $T_1 \cdot (T_2 + T_3) = T_1 \cdot T_2 + T_1 \cdot T_3$

Teorema. Inzestrata cu operatiile ” $+$ ” si ” \cdot ” si cu relatia de ordine ” \leq ”, \mathcal{T} este un corp complet ordonat.

Definition 1. Se numeste corp de numere reale si se noteaza cu \mathbb{R} orice corp complet ordonat.

Teorema. Fie $A \subset \mathbb{R}$ nevida. Un element $a \in \mathbb{R}$ este margine superioara a lui A daca

- 1) $x \leq a, \forall x \in A$
- 2) $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A$ a.i. $a - \varepsilon < x \leq a$

Teorema. Fie $A \subset \mathbb{R}$ nevida. Un element $b \in \mathbb{R}$ este margine inferioara a lui A daca

- 1) $x \geq b, \forall x \in A$
- 2) $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A$ a.i. $b \leq x < b + \varepsilon$

Teorema (Proprietatea lui Arhimede). Pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ cu $y > 0$ exista $n \in \mathbb{N}$ astfel incat $x \leq ny$.

Presupunem ca pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $x > ny$. Fie

$$A = \{y, 2y, \dots, ny, \dots\} \subset \mathbb{R}$$

Cum $ny < x$, multimea A este marginita si deci admite margine superioara sup A . Asadar,

$$(n+1)y \leq \sup A, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Atunci

$$ny \leq \sup A - y, \forall n \in \mathbb{N}.$$

si deci $\sup A - y$ este un majorant al lui A . Asadar,

$$\sup A - y \geq \sup A$$

ceea ce reprezinta o contradictie, intrucat $y > 0$.

Propozitie. Pentru orice sir descrescator de intervale inchise $[a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$ avem

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] = \emptyset.$$

Deoarece $[a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$ este un sir descrescator de intervale avem

$$a_n \leq b_m, \forall m, n \in \mathbb{N}.$$

Fie

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b_m, \forall m \in \mathbb{N}\}$$

Evident ca $A \neq \emptyset$, intrucat $a_n \in A$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Cum A este marginita rezulta ca A are margine superioara. Fie $u = \sup A$. Avem

$$a_n \leq u \leq b_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

si deci

$$u \in [a_n, b_n], \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Elemente de topologie

Fie $x \in \mathbb{R}^n$ si $r > 0$. Multimea

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - x\| < r\}$$

se numeste bila deschisa de centru x si raza r iar multimea

$$B[x, r] = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - x\| \leq r\}$$

se numeste bila inchisa de centru x si raza r .

Definitie. O multime $D \subset \mathbb{R}^n$ se numeste deschisa daca pentru orice $x \in D$ exista $r > 0$ astfel incat $B(x, r) \subset D$.

Exercitiu. Aratati ca $B(x, r)$ este o multime deschisa.

Propozitie. 1) \emptyset si \mathbb{R}^n sunt multimi deschise.

2) Reuniunea unei familii arbitrare de multimi deschise este deschisa.

3) Intersectia unei familii finite de multimi deschise este deschisa.

Observatie. Intersectia unei familii infinite de multimi deschise nu este in general deschisa. De exemplu, daca $D_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, $n \geq 1$ atunci $\cap_{n \geq 1} D_n = \{0\}$.

Definitie. O multime $F \subseteq \mathbb{R}^n$ se numeste inchisa daca complementara ei este o multime deschisa.

Propozitie. 1) \emptyset si \mathbb{R}^n sunt multimi inchise.

2) Intersectia unei familii arbitrare de multimi inchise este deschisa.

3) reuniunea unei familii finite de multimi inchise este inchisa.

Definitie. Fie $x \in \mathbb{R}^n$. O multime $V \subseteq \mathbb{R}^n$ se numeste vecinatate a lui x daca exista D o multime deschisa din \mathbb{R}^n astfel incat $x \in D \subseteq V$.

Un element $x \in \mathbb{R}^n$ se numeste punct interior al multimii $A \subseteq \mathbb{R}^n$ daca acesta este o vecinatate a lui x .

Un element $x \in \mathbb{R}^n$ se numeste punct de acumulare al multimii $A \subseteq \mathbb{R}^n$ daca orice vecinatate a lui x contine cel putin un element din A diferit de x .

Teorema. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Urmatoarele afirmatii sunt echivalente.

- 1) A este deschisa
- 2) orice $x \in A$ este punct interior al lui A .
- 3) A este o vecinatate pentru orice punct al ei.

Siruri

Definitie. Un sir de elemente dintr-o multime M este o functie $x : \mathbb{N} \rightarrow M$ (sau $x : \mathbb{N}_k \rightarrow M$ unde $\mathbb{N}_k = \{k, k+1, \dots\}$). Un sir $x : \mathbb{N} \rightarrow M$ il vom nota cu $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sau $(x_n)_{n \geq 1}$ unde $x_n = x(n)$ pentru $n \in \mathbb{N}$.

Definitie. Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un sir de elemente din \mathbb{R}^p . Un element $x \in \mathbb{R}^p$ se numeste limita a sirului daca pentru orice vecinatate V a lui x exista $n_V \in \mathbb{N}$ astfel incat pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_V$ sa avem $x_n \in V$.

Spunem ca $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge la x sau ca $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ are limita x . Vom scrie $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ sau $x_n \rightarrow x$.

Propozitie. Un sir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elemente din \mathbb{R}^p este convergent la $x \in \mathbb{R}^p$ daca si numai daca oricare ar fi $\varepsilon > 0$ exista $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel incat pentru orice $n \geq n_\varepsilon$ sa avem $\|x_n - x\| < \varepsilon$.

Daca $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un sir de numere reale, adica $p = 1$ scriem $|x_n - x| < \varepsilon$.

Definitie. Un sir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elemente din \mathbb{R}^p se numeste marginit daca exista $M > 0$ astfel incat $\|x_n\| < M$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Propozitie. Orice sir convergent de elemente din \mathbb{R}^p este marginit.

Propozitie (Reducerea convergentei din \mathbb{R}^p la convergenta in \mathbb{R}). Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un sir de elemente din \mathbb{R}^p , $x_n = (x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^p)$. Sirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent si are limita $x = (x^1, x^2, \dots, x^p)$ daca si numai daca pentru orice $k \in \{1, 2, \dots, p\}$ sirul $(x_n^k)_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent si $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n^k)_{n \in \mathbb{N}} = x^k$.

Definitie. Un sir de numere reale $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se numeste

- (1) crescator (resp. descrescator) daca $x_n \leq x_{n+1}$ (resp. $x_n \geq x_{n+1}$) pentru orice $n \in \mathbb{N}$
- (2) strict crescator (resp. strict descrescator) daca $x_n < x_{n+1}$ (resp. $x_n > x_{n+1}$) pentru orice $n \in \mathbb{N}$
- (3) monoton daca este crescator sau descrescator.

Definitie. Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un sir de numere reale si Spunem ca $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ are limita $+\infty$ daca pentru orice $\varepsilon > 0$ exista $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel incat pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$ sa avem $x_n > \varepsilon$.

Spunem ca $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ are limita $-\infty$ daca pentru orice $\varepsilon > 0$ exista $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel incat pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$ sa avem $x_n < -\varepsilon$.

Propozitie (Operatii cu siruri convergente). Fie $x_n \rightarrow x$, $y_n \rightarrow y$ unde $x, y \in \mathbb{R}$. Atunci

- (1) $x_n + y_n \rightarrow x + y$
- (2) $x_n y_n \rightarrow xy$
- (3) $ax_n \rightarrow ax$, pentru orice $a \in \mathbb{R}$
- (4) $\frac{x_n}{y_n} \rightarrow \frac{x}{y}$ daca $y \neq 0$

Propozitie. Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ siruri de numere reale

- (1) Daca $x_n \rightarrow x$, $z_n \rightarrow x$ si exista $n_0 \in \mathbb{N}$ a.i. $x_n \leq y_n \leq z_n$ pentru orice $n \geq n_0$ atunci $y_n \rightarrow x$.
- (2) $x_n \rightarrow 0$ daca si numai daca $|x_n| \rightarrow 0$.
- (3) Daca $x_n \rightarrow x$ atunci $|x_n| \rightarrow |x|$.
- (4) Daca $x_n \rightarrow 0$ si $(y_n)_{n \geq 1}$ este marginit atunci $x_n y_n \rightarrow 0$.

Definitie. Spunem ca $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^p$ este sir Cauchy (sau fundamental) daca pentru orice $\varepsilon > 0$ exista $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel incat pentru orice $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m \geq n_\varepsilon$ sa avem $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ (daca $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, adica $p = 1$ scriem $|x_n - x_m| < \varepsilon$).

Exemplu. Sirul $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$, $n \geq 1$ este divergent.

Intr-adevar, se observa ca

$$|x_{2n} - x_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}$$

pentru orice $n \geq 1$. De aici deducem cu usurinta ca $(x_n)_{n \geq 1}$ nu este fundamental si deci nu este convergent.

Din Lema anterioara si Lema lui Cesaro obtinem.

Teorema. Daca $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un sir crescator (resp. descrescator) si marginit de numere reale atunci el este convergent. In plus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n \quad (\text{resp. } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} x_n)$$

Demonstratie. Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un sir crescator si marginit de numere reale. Fie

$$a = \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n$$

Fie $\varepsilon > 0$. Cum $a - \varepsilon$ nu este un majorant al sirului, exista $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel incat

$$x_{n_\varepsilon} > a - \varepsilon.$$

Deoarece $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este crescator,

$$x_n \geq x_{n_\varepsilon} > a - \varepsilon, \quad \forall n \geq n_\varepsilon.$$

Cum $x_n \leq a < a + \varepsilon$, $\forall n \in \mathbb{N}$ rezulta ca

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon, \quad \forall n \geq n_\varepsilon$$

adica

$$|x_n - a| < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_\varepsilon.$$

Deci $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent si $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. Similar se trateaza cazul in care sirul este descrescator.

Limita inferioara si superioara

Definitie. Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un sir marginit de numere reale. Fie

$$u_n = \sup\{x_i : i \geq n\}, \quad v_n = \inf\{x_i : i \geq n\}$$

Sirul $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este descrescator si sirul $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este crescator. Pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$ avem

$$v_n \leq u_m.$$

Numarul

$$v = \sup_n v_n$$

se numeste limita inferioara a sirului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si se noteaza cu $\liminf x_n$. Numarul

$$u = \inf_n u_n$$

se numeste limita superioara a sirului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si se noteaza cu $\limsup x_n$. Evident $\liminf x_n \leq \limsup x_n$.

Teorema. Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un sir marginit de numere reale si $u = \liminf x_n$ si $v = \limsup x_n$. Atunci exista doua subsiruri convergente $(x_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ si $(x_{l_n})_{n \in \mathbb{N}}$ astfel incat

$$x_{k_n} \rightarrow u \text{ si } x_{l_n} \rightarrow v$$

Demonstratie. Fie

$$u_n = \sup\{x_i : i \geq n\}.$$

Construim un sir strict crescator de numere naturale $(k_n)_{n \geq 1}$ astfel incat $k_1 = 1$ si a.i.

$$u_{k_n+1} < x_{k_n+1} + \frac{1}{n+1}, \quad n \geq 1.$$

Avem

$$u_{k_{n+1}} - \frac{1}{n+1} \leq u_{k_n+1} - \frac{1}{n+1} < x_{k_n+1} \leq u_{k_n+1}, \quad \forall n \geq 1.$$

Deoarece $u_{k_{n+1}} \rightarrow u$ si $\frac{1}{n+1} \rightarrow 0$ rezulta ca $x_{k_n} \rightarrow u$. Similar se arata ca exista $(x_{l_n})_{n \in \mathbb{N}}$ a.i. $x_{l_n} \rightarrow v$.

Corolar (Lema lui Cesaro). Orice sir marginit din \mathbb{R} contine un subsir convergent.

Teorema. Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un sir marginit de numere reale. Atunci $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent si $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ daca si numai daca

$$\liminf x_n = \limsup x_n = a.$$

Atunci exista doua subsiruri convergente $(x_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ si $(x_{l_n})_{n \in \mathbb{N}}$ astfel incat

$$x_{k_n} \rightarrow \limsup x_n \text{ si } x_{l_n} \rightarrow \liminf x_n.$$

Demonstratie. Intrucat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{k_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{l_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

deducem ca

$$\liminf x_n = \limsup x_n$$

Reciproc, sa presupunem ca $\liminf x_n = \limsup x_n$. Ca mai sus fie

$$u_n = \sup\{x_i : i \geq n\}, \quad v_n = \inf\{x_i : i \geq n\}.$$

Deoarece

$$v_n \leq x_n \leq u_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = a$$

rezulta ca $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent si $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

Lema. Orice sir Cauchy care are un subsir convergent este convergent.

Demonstratie. Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un sir Cauchy. Fie $\varepsilon > 0$. Atunci exista $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel incat

$$m, n \in \mathbb{N}, \quad m, n \geq n_\varepsilon \Rightarrow \|x_m - x_n\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Fie $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ un subsir convergent avdn limita x . Exsiata $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$, $n_{k_\varepsilon} \geq n_\varepsilon$ astfel incat

$$\|x_{n_{k_\varepsilon}} - x\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Daca $n \geq n_\varepsilon$ avem

$$\|x - x_n\| \leq \|x_{n_{k_\varepsilon}} - x_n\| + \|x_{n_{k_\varepsilon}} - x\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

si deci $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent.

Teorema. Orice sir Cauchy din \mathbb{R}^p este convergent.

Numarul e

Sirul

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

este convergent si are limita $e \in (2, 3)$

Observatie. 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$

2) Daca $x_n \rightarrow \infty$ atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e \text{ si } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = \frac{1}{e}$$

3) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$

Propozitie. 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0, \quad a > 1, \alpha > 0$

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0, \quad a > 0$

4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$

Serii de numere reale

Definitie. Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un sir de numere reale si fie $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sirul definit prin

$$s_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$

Sirul $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se numeste sirul sumelor partiale. Perechea de siruri $((x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (s_n)_{n \in \mathbb{N}})$ se numeste seria generata de sirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si se noteaza cu $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ sau $\sum_{n \geq 1} x_n$. Spunem ca seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergenta daca sirul $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent. Numarul $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ se numeste suma seriei si se noteaza cu $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$. O serie care nu este convergenta se numeste divergenta.

Propozitie. Daca $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este o serie convergenta atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Corolar. Daca $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq 0$ atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este divergenta.

Exemplu. Studiati convergenta seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$ si in cazul in care ste convergenta determinati suma ei.

Solutie. Avem

$$s_n = \frac{1}{1+1} + \frac{1}{2^2+2} + \cdots + \frac{1}{n^2+n} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 1$ si deci seria este convergenta si $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} = 1$.

Exemplu. Seria geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ este convergenta daca si numai daca $q \in (-1, 1)$.

Solutie. Intr-adevar, sa observam ca daca $q \neq 1$ atunci

$$s_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Deci seria este convergenta daca $q \in (-1, 1)$ si divergenta in caz contrar. In plus, daca $q \in (-1, 1)$ atunci

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1 - q}.$$

Exemplu. Seria armonica generalizata $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ este convergenta daca $\alpha > 1$ si divergenta daca $\alpha \leq 1$.

Propozitie. Daca seriile $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ si $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ sunt convergente si $c \in \mathbb{R}$, atunci seriile $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n)$, $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n - y_n)$ si $\sum_{n=1}^{\infty} cx_n$ sunt convergente si au loc relatiile

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + \sum_{n=1}^{\infty} y_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x_n - y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n - \sum_{n=1}^{\infty} y_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} cx_n = c \sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

Teorema (Criteriul lui Cauchy). Seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergenta daca si numai daca pentru orice $\varepsilon > 0$ exista $n_{\varepsilon} \in \mathbb{N}$ astfel incat pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_{\varepsilon}$ si orice $m \in \mathbb{N}$ avem

$$|x_{n+1} - x_{n+1} + \cdots + x_{n+m}| < \varepsilon.$$

Teorema (Primul criteriu al comparatiei). Fie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ si $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ serii cu termeni pozitivi. Daca exista $n_o \in \mathbb{N}$ astfel incat $x_n \leq y_n$ pentru orice $n \geq n_o$.

- 1) Daca seria $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ este convergenta atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergenta.
- 2) Daca seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este divergenta atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ este divergenta.

Exemplu. Studiati convergenta seriei $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n + 3^n}$.

Solutie. Evident $\frac{1}{2^n + 3^n} < \frac{1}{2^n}$. Cum seria $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n}$ este convergenta deducem atunci din primul criteriu al comparatiei ca seria $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n + 3^n}$ este convergenta.

Teorema (Al doilea criteriu al comparatiei). Fie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ si $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ serii cu termeni pozitivi astfel incat exista $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = l$.

- 1) Daca $0 < l < \infty$ atunci cele doua serii au aceasi natura.
- 2) Daca $l = 0$ si $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ este convergenta atunci $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergenta.
- 3) Daca $l = \infty$ si $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ este divergenta atunci $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este divergenta.

Exemplu. Studiati convergenta seriei $\sum_{n \geq 1} \frac{n+1}{2n^3+n}$.

Fie $x_n = \frac{n+1}{2n^3+n}$, $n \geq 1$ si $y_n = \frac{1}{n^2}$. Cum

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + n}{2n^3 + n} = \frac{1}{2}$$

iar seria $\sum_{n \geq 1} y_n = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ este convergenta deducem din al doilea criteriu al comparatiei ca seria $\sum_{n \geq 1} \frac{n+1}{2n^3+n}$ este convergenta.

Teorema (Criteriul raportului). Fie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ o serie cu termeni pozitiv.

1) Daca exista $r < 1$ si $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel incat $\frac{x_{n+1}}{x_n} < r$, $\forall n \geq n_0$ atunci seria este convergenta

2) Daca exista $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel incat $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1$, $\forall n \geq n_0$ atunci seria este divergenta

Corolar. Fie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ o serie cu termeni pozitivi. Daca exista $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$, atunci

1) pentru $l < 1$, seria este convergenta

2) pentru $l > 1$, seria este divergenta

Exemplu. Studiati convergenta seriei $\sum_{n \geq 1} \frac{n}{3^n}$.

Fie $x_n = \frac{n}{3^n}$ termenul general al seriei. Avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{3^{n+1}} \frac{3^n}{n} = \frac{1}{3} < 1$$

si deci seria este convergenta

Teorema (Criteriul radacinii). Fie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ o serie cu termeni pozitiva.

1) Daca exista $r < 1$ si $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel incat $\sqrt[n]{x_n} < r$, $\forall n \geq n_0$ atunci seria este convergenta

2) Daca exista $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel incat $\sqrt[n]{x_n} \geq 1$, $\forall n \geq n_0$ atunci seria este divergenta.

Corolar. Fie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ o serie cu termeni pozitiva. Daca exista $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n}$, atunci

1) pentru $l < 1$, seria este convergenta.

2) pentru $l > 1$, seria este divergenta.

Exemplu. Studiati convergenta seriei $\sum_{n \geq 1} (\sqrt{n^2+1} - n)^{n+1}$.

Solutie. Fie $x_n = (\sqrt{n^2+1} - n)^{n+1}$, $n \geq 1$. Cum

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+1} - n)^{\frac{n+1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{\sqrt{n^2+1} + n} \right)^{\frac{n+1}{n}} = \frac{1}{2} < 1$$

rezulta ca seria este convergenta.

Teorema (Criteriul Raabe-Duhamel). Fie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ o serie cu termeni pozitivi.

1) Daca exista $r < 1$ si $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel incat $n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) > r, \forall n \geq n_0$ atunci seria este convergenta

2) Daca exista $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel incat $n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) \leq 1, \forall n \geq n_0$ atunci seria este divergenta.

Corolar. Fie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ o serie cu termeni pozitivi. Daca exista $l = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right)$, atunci

1) pentru $l > 1$, seria este convergenta.

2) pentru $l < 1$, seria este divergenta.

Exemplu. Studiați convergența seriei $\sum_{n \geq 1} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}$.

Solutie. Fie

$$x_n = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}.$$

Avem

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \frac{4^{n+1} ((n+1)!)^2}{(2n+2)!} - 1 \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{2n+2}{2n+1} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1 \end{aligned}$$

si deci seria este divergenta.

Teorema (Criteriul condensarii). Fie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ o serie cu termeni pozitivi astfel incat sirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este descrescator. Atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergenta daca si numai daca seria $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x_{2^n}$ este convergenta

Fie

$$s_n = \sum_{k=1}^n x_k, \quad t_k = \sum_{k=0}^n 2^k x_{2^k}$$

Deoarece $(x_n)_{n \geq 0}$ este descrescator, avem

$$2^n x_{2^{n+1}} \leq \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} x_k \leq 2^n x_{2^n}$$

Prin urmare

$$s_{2^{n+1}} \leq t_n \text{ si } t_{n+1} \leq 2s_{2^{n+1}}$$

de unde rezulta imediat ca cele doua serii au aceasi natura.

Corolar. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ este convergenta daca si numai daca $\alpha > 1$.

Intr-adevar, cu criteriul condensarii seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

are aceasi natura ca si seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^{n\alpha}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}} \right)^n$$

care ste convergenta daca si numai daca $2^{\alpha-1} < 1$, adica daca $\alpha > 1$.

Teorema (Criteriul lui Dirichlet). Fie $(x_n)_{n \geq 1}$ si $(y_n)_{n \geq 1}$ doua siruri de numere reale cu proprietatea ca $(x_n)_{n \geq 1}$ este descrescator, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ si sirul $s_n = y_0 + y_1 + \dots + y_n$ este marginit. Atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ este convergenta.

Corolar. Daca $(x_n)_{n \geq 1}$ este un sir descrescator de numere reale si $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x_n$ este convergenta.

Definitie. Daca $(x_n)_{n \geq 1}$ este un sir de numere reale, spunem ca seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este absolut convergenta daca seria $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ este convergenta.

Folosind criteriul lui Cauchy, obtinem

Teorema. Orice serie absolut convergenta este convergenta.

Exemplu. Studiati convergenta seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Sirul cu termenul general $a_n = \frac{1}{n}$ este descrescator si are limita egala cu zero. Aplicand criteriul lui Leibniz deducem ca seria este convergenta.

Observam ca sria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergenta si deci seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ nu este absolut convergenta !

Observatie. Exemplul de mai sus arata ca nu orice serie convergenta este absolut convergenta.

Multimi compacte

O multime $A \subset \mathbb{R}^p$ se numeste compacta daca pentru orice familie $(D_i)_{i \in I}$ de multimi deschise din \mathbb{R}^p cu proprietatea ca $A \subset \bigcup_{i \in I} D_i$ exista $J \subset I$ finita astfel incat $A \subset \bigcup_{i \in J} D_i$

Propozitie. Orice multime compacta $K \subset \mathbb{R}^p$ este inchisa.

Demonstratie. Fie $x \in \mathbb{R}^p \setminus K$ si fie

$$D_m = \{y \in \mathbb{R}^p : \|x - y\| > \frac{1}{m}\}$$

Evident

$$K \subset \bigcup_{m \in \mathbb{N}} D_m.$$

Cum K este compacta exista $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel incat

$$K \subset D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_{n_0} = D_{n_0}.$$

Prin urmare

$$CD_{n_0} = \mathbb{R}^p \setminus D_{n_0} \subseteq \mathbb{R}^p \setminus K$$

Asadar,

$$\{y \in \mathbb{R}^p : \|x - y\| < \frac{1}{n_0}\} \subset \mathbb{R}^p \setminus K$$

Atunci $\mathbb{R}^p \setminus K$ este deschisa si deci K este inchisa.

Teorema (Heine-Borel). O multime $K \subset \mathbb{R}^p$ este compacta daca si numai daca este marginita si inchisa (demonstratie la pag 216)

Teorema. O multime $K \subset \mathbb{R}^p$ este compacta daca si numai daca orice sir de elemente din K contine un subsir convergent la un element din K .

Multimi conexe

O multime $A \subset \mathbb{R}^p$ se numeste neconexa daca exista doua multimi deschise D_1 si D_2 din \mathbb{R}^p cu proprietatea ca

$$A \cap D_1 \neq \emptyset, \quad A \cap D_2 \neq \emptyset, \quad A \cap D_1 \cap D_2 = \emptyset, \quad \text{si } A = (D_1 \cap A) \cup (D_2 \cap A)$$

O multime se numeste conexa daca nu este neconexa.

Teorema. O multime $A \subset \mathbb{R}$ este conexa daca si numai daca A este interval

” \Rightarrow ” Sa presupunem ca A este conexa. Aratam pentru inceput ca pentru orice $x, y \in A$, $[x, y] \subset A$. Sa presupunem ca exista $x, y \in A$ astfel incat intervalul $[x, y]$ sa nu fie continut in A . Atunci exista $z \in (x, y)$ astfel incat $z \notin A$. Atunci

$$((-\infty, z) \cap A) \cup ((z, \infty) \cap A) = A$$

si intrucat

$$(-\infty, z) \cap A \neq \emptyset, \quad (z, \infty) \cap A \neq \emptyset$$

rezulta ca A este neconexa. Contradictie !

Fie

$$p = \inf A, \quad q = \sup A.$$

Pentru a arata ca A este interval este suficient sa aratam ca $(p, q) \subset A$. Pentru aceasta este suficient sa demonstram ca daca $c \in A$ atunci $(p, c] \subset A$ si $[c, q) \subset A$.

Cazul I. $p = -\infty$

Fie $x < c$. Cum $p = -\infty = \inf A$. Atunci exista $\alpha \in A$ astfel incat $\alpha < x$. Atunci

$$x \in [\alpha, c] \subset A$$

si deci $x \in A$ si cum x a fost ales arbitrar rezulta ca

$$(-\infty, c] \subset A.$$

Cazul II. $p \in \mathbb{R}$

Fie $x \in (p, c)$. Atunci exista $\alpha \in A$ astfel incat $p \leq \alpha < x$. Deci

$$\alpha < x < c \Rightarrow [\alpha, c] \subset A \Rightarrow x \in A$$

Asadar

$$(p, c] \subset A.$$

Similar se arata ca $[c, q) \subset A$.

” \Leftarrow ” Fie A un interval. Sa presupunem ca A este neconexa. Atunci exista doua multimi deschise D_1 si D_2 cu proprietatea ca

$$A \cap D_1 \neq \emptyset, \quad A \cap D_2 \neq \emptyset, \quad A \cap D_1 \cap D_2 = \emptyset, \quad \text{si} \quad A = (D_1 \cap A) \cup (D_2 \cap A)$$

Fie

$$x \in A \cap D_1, \quad y \in A \cap D_2.$$

si fie

$$z = \sup D_1 \cap [x, y]. \tag{1}$$

Daca $z \in D_1$ atunci $z < y$. Cum D_1 este deschisa, exista $h > 0$ astfel incat

$$[z, z + h) \subset D_1 \cap [x, y].$$

Acest fapt contrazice (1).

Daca $z \in D_2$ atunci $z > x$. Cum D_2 este deschisa exista $h > 0$ astfel incat

$$(z - h, z] \subset D_2 \cap [x, y]$$

Cum $z = \sup D_1 \cap [x, y]$ exista $z \in D_1 \cap [x, y]$ astfel incat $z - h < t \leq z$. Prin urmare $D_1 \cap D_2 \cap A \neq \emptyset$. Contradictie!

Teorema. Multimea \mathbb{R}^p este conexa.

Demonstratie. Presupunem ca \mathbb{R}^p este neconexa. atunci exista D_1, D_2 multimi deschise nevide astfel incat

$$D_1 \cap D_2 = \emptyset \text{ si } D_1 \cup D_2 = \mathbb{R}^p.$$

Fie $x \in D_1$ si $y \in D_2$. Definim multimile

$$G_1 = \{t \in \mathbb{R} : x + t(y - x) \in D_1\}$$

$$G_2 = \{t \in \mathbb{R} : x + t(y - x) \in D_2\}$$

Atunci G_1 si G_2 sunt multimi deschise din \mathbb{R} astfel incat

$$G_1 \cap [0, 1] \neq \emptyset, \quad G_1 \cap [0, 1] \neq \emptyset, \quad G_1 \cap G_2 \cap [0, 1] = \emptyset,$$

$$[0, 1] = (G_1 \cap [0, 1]) \cup (G_2 \cap [0, 1])$$

Atunci $[0, 1]$ este neconexa. Contradictie !

Funcții continue

Definitie. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ si $a \in D$. Spunem ca f este continua in a daca pentru orice vecinatate V a lui $f(a)$, exista o vecinatate U a lui a (care depinde de V), astfel incat pentru orice $x \in U$ sa avem $f(x) \in V$.

Teorema. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ si $a \in D$. Urmatoarele afirmatii sunt echivalente.

- (i) f este continua in a .
- (ii) pentru orice $\varepsilon > 0$, exista $\delta_\varepsilon > 0$ astfel incat pentru orice $x \in D$, $\|x - a\| < \delta_\varepsilon$ sa avem $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$.
- (iii) orice sir $(x_n)_{n \geq 1}$ de elemente din D , care converge la a , sirul $(f(x_n))_{n \geq 1}$ converge la $f(a)$.

(i) \Rightarrow (ii). Multimea

$$B(f(a), \varepsilon) = \{y \in \mathbb{R}^q : \|y - f(a)\| < \varepsilon\}$$

este o vecinatate a lui $f(a)$. Din (i) rezulta ca exista U o vecinatate a lui a astfel incat

$$x \in U \cap D \Rightarrow f(x) \in B(f(a), \varepsilon).$$

Deoarece U este o vecinatate a lui a , exista $\delta_\varepsilon > 0$ astfel incat $B(a, \delta_\varepsilon) \subset U$. Atunci, daca $x \in D$ si $\|x - a\| < \delta_\varepsilon$ rezulta ca $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$.

(ii) \Rightarrow (iii). Fie $(x_n)_{n \geq 1} \subset D$ cu $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. Fie $\varepsilon > 0$. Din (ii), exista $\delta_\varepsilon > 0$ astfel incat

$$x \in D, \|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$$

(iii) \Rightarrow (i). Sa presupunem ca (i) este falsa. Atunci exista V_0 o vecinatate a lui $f(a)$ cu proprietatea ca pentru orice vecinatate U a lui a exista $x_U \in U \cap D$ astfel incat $f(x_U) \notin V_0$. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ fie

$$U_n = B(a, 1/n) = \{x \in \mathbb{R}^p : \|x - a\| < \frac{1}{n}\}$$

Atunci pentru orice $n \in \mathbb{N}$ exista $x_n \in D$ astfel ca

$$f(x_n) \notin V_0$$

fapt ce contrazice (iii).

Teorema. $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ si $a \in D$. Atunci f este continua in a daca si numai daca pentru orice vecinatate V a lui $f(a)$, exista o vecinatate U a lui a , astfel incat $U \cap D = f^{-1}(V)$.

Teorema (de continuitate globala). Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$. Urmatoarele afirmatii sunt echivalente

(i) f este continua pe D ;

(ii) pentru orice multime deschisa G din \mathbb{R}^q exista o multime deschisa G_1 din \mathbb{R}^p astfel incat $f^{-1}(G) = G_1 \cap D$;

(iii) pentru orice multime inchisa F din \mathbb{R}^q exista o multime inchisa F_1 din \mathbb{R}^p astfel incat $f^{-1}(F) = F_1 \cap D$.

Corolar. Fie $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$. Urmatoarele afirmatii sunt echivalente

- (i) f este continua pe \mathbb{R}^p ;
- (ii) pentru orice multime deschisa G din \mathbb{R}^q , $f^{-1}(G)$ este deschisa in \mathbb{R}^p ;
- (iii) pentru orice multime inchisa F din \mathbb{R}^q , $f^{-1}(F)$ este inchisa in \mathbb{R}^p .

Observatie. In general, daca f este continua si $G \subset \mathbb{R}^p$ este o multime deschisa nu rezulta ca $f(G)$ este deschisa.

De exemplu daca

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{1+x^2},$$

atunci

$$f(-1, 1) = \left(\frac{1}{2}, 1 \right], \quad f(\mathbb{R}) = (0, 1]$$

Operatii cu functii continue

Teorema. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in D$. Daca f, g si φ sunt continue in a atunci $f + g$, f_g , fg , φf si $\frac{f}{\varphi}$ (daca $\varphi(a) \neq 0$) sunt continue in a . Daca f este continua in a atunci $\|f\|$ este continua in a .

Teorema. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow D' \subseteq \mathbb{R}^q$ si $g : D' \subseteq \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^p$ astfel incat f este continua in a si g este continua in $f(a)$. Atunci $g \circ f$ este continua in a .