§ 2. DEFINIȚIA DETERMINANȚILOR DE ORDINUL n

În cele ce urmează vom căuta să dăm definiția determinantului unei matrice pătratice de ordinul n în așa fel încît pentru $n=2$ și $n=3$ să obținem determinantul de ordinul 2 și 3.

În definirea determinantului de ordinul 2 și 3 am utilizat rezolvarea sistemelor de ecuații liniare. Acest procedeu este greu de folosit pentru cazul general, datorită calculelor laborioase care intervin. Noi vom utiliza altă metodă: analizînd formulele care dau determinantul de ordinul 2 și 3 vom deduce o lege generală prin care vom defini determinantul de ordinul n. În capitolul următor vom arăta că formula determinantului de ordinul n, aşa cum o dăm mai jos, ne va permite obţinerea unor formule de tip Cramer pentru rezolvarea sistemelor de n ecuaţii liniare cu n necunoscute.

Să reamintim formulele determinanţilor de ordinul 2 şi 3:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} =$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Constatăm că termenii determinanţilor de ordinul 2 şi 3 sînt produse de elemente aparţinînd la linii şi coloane distincte. În plus, orice astfel de produs (din elemente aparţinînd la linii şi coloane distincte) este termen în formula determinantului respectiv.

Fie R un inel comutativ cu unitate. Să considerăm acum o matrice pătratică de ordinul n cu elemente din inelul R.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}; \; A \in \mathcal{M}_n(R)$$

Vom forma toate produsele posibile de n elemente aparţinînd la linii şi coloane distincte. Un astfel de produs este de forma:

(1) $$a_{1i_1} a_{2i_2} \ldots a_{ni_n}$$

unde $i_1, i_2, \ldots, i_n$ sînt toate elementele mulţimii $1, 2, \ldots, n$, eventual în altă ordine. Înseamnă că putem considera permutarea de gradul n:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix}$$

şi deci produsul (1) se scrie

$$a_{1i_1} a_{2i_2}, \ldots, a_{ni_n} = a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)}, \ldots, a_{n\sigma(n)}.$$

Numărul total al produselor de forma (1) este egal cu numărul tuturor permutărilor de grad n, deci $n!$. Ţinînd cont de formulele determinanţilor de ordinul 2 şi 3, în mod natural formula determinantului de ordinul n trebuie să conţină toate produsele

$$a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{n\sigma(n)},$$

unde σ parcurge toate permutările lui S_n. Mai rămîne de aflat semnul cu care apare produsul $a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{n\sigma(n)}$. Să revenim din nou la formulele determinanților de ordinul 2 și 3. Să luăm, de exemplu, din formula determinantului de ordinul trei termenii cu semnul (+): $a_{11}a_{22}a_{33}$, $a_{12}a_{23}a_{31}$, $a_{13}a_{21}a_{32}$. Se observă că permutările asociate acestor termeni:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

sînt permutări pare, deci semnul lor este +1.

Dacă luăm acum termenii cu semnul (—): $a_{13}a_{22}a_{31}$, $a_{12}a_{21}a_{33}$, $a_{11}a_{23}a_{32}$, permutările asociate acestor termeni:

$$\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

sînt permutări impare, deci au signatura (semnul) —1. Aceste observații ne sugerează că în definiția determinantului de ordinul n, produsul $a_{1\sigma(1)}\ a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$ trebuie să aibă semnul (+) sau (—) după cum permutarea σ are signatura (semnul) +1 sau —1. Acum sîntem în măsură să definim determinantul de ordinul n.

Definiția 2.1. Fie $A \in \mathcal{M}_n(R)$. Elementul din inelul R

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)}\ a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)},$$

unde S_n este mulțimea tuturor permutărilor de gradul n și $\varepsilon(\sigma)$ este signatura permutării σ, se numește *determinantul matricei* A, sau, mai simplu, determinant de ordinul n și se notează de obicei astfel:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Produsul $a_{1\sigma(1)}\ a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}$ se numește *termen al determinantului* de ordinul n.

Se obișnuiește să se spună despre elementele, liniile și coloanele matricei A că sînt elementele, liniile și coloanele determinantului $\det A$. Uneori $\det A$ se mai notează prescurtat și $|A|$ sau $|a_{ij}|_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$.

Observații. 1) Noțiunea de determinant al unei matrice are sens numai pentru matrice pătratice. Este deosebire între matrice și determinantul său: matricea este o funcție, iar determinantul matricei este un element al inelului R.

2) În formula determinantului unei matrice există $n!$ termeni dintre care $\frac{n!}{2}$ au semnul (+), iar $\frac{n!}{2}$ au semnul (—).

3) Definiția determinantului se aplică și matricelor de ordinul 1, cînd $A=(a_{11})$. În acest caz $\det A=a_{11}$.

4) Așa cum a fost definit determinantul de ordinul n, pentru $n=2$ și $n=3$, obținem determinantul de ordinul 2, respectiv 3.

§ 3. PROPRIETĂȚILE DETERMINANȚILOR

Formula determinantului de ordinul 2 este simplă; formula determinantului de ordinul trei este deja complicată. Aici avem avantajul că avem o regulă simplă, regula lui Sarrus, care ne permite să calculăm destul de ușor un determinant de ordinul 3. Dacă, în schimb, avem de calculat determinanți de ordin $n\geqslant 4$, formula prin care este definit determinantul de ordinul n, în general este aproape imposibil de aplicat datorită calculelor laborioase care apar. De exemplu, pentru un determinant de ordinul 4 avem $4!=24$, termeni în formula sa, pentru $n=5$ avem $5!=120$ termeni de calculat, iar pentru $n=10$ avem $10!=$ $=3\,628\,800$ termeni de calculat. Din aceste motive se caută să se scoată în evidență o serie de proprietăți ale determinanților de ordinul n, care simplifică de multe ori calculul determinanților.

Proprietatea 1. *Determinantul unei matrice coincide cu determinantul matricei transpuse. Adică dacă* $A\in \mathcal{M}_n(R)$, atunci $\det A=\det {}^tA$.

Demonstrație. Fie $A=(a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ și ${}^tA=({}^ta_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ matricea transpusă a lui A.

Deci ${}^ta_{ij}=a_{ji}$, oricare ar fi $i=1, 2, \ldots, n$; $j=1, 2, \ldots, n$. Avem

(1) $$\det A=\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)a_{1\sigma(1)}\,a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)}\,,$$

(2) $$\det {}^tA=\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)\,{}^ta_{1\sigma(1)}\,{}^ta_{2\sigma(2)}\cdots {}^ta_{n\sigma(n)}=$$
$$=\sum_{\tau\in S_n}\varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1)1}\,a_{\sigma(2)2}\cdots a_{\sigma(n)n}$$

Dacă notăm $\sigma(i)=k_i$, atunci $i=\sigma^{-1}(k_i)$ și deci produsul

$$\varepsilon(\sigma)a_{1\sigma(1)}\,a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)}=\varepsilon(\sigma)a_{\sigma^{-1}(k_1)k_1}\,a_{\sigma^{-1}(k_2)k_2}\cdots a_{\sigma^{-1}(k_n)k_n}=$$
$$=\varepsilon(\sigma^{-1})a_{\sigma^{-1}(k_1)k_1}\,a_{\sigma^{-1}(k_2)k_2}\cdots a_{\sigma^{-1}(k_n)k_n}$$

deoarece $\varepsilon(\sigma)=\varepsilon(\sigma^{-1})$. Cum numerele $k_1, k_2, \ldots, k_n$ sînt numerele $1, 2, \ldots$ $\ldots, n$, eventual în altă ordine, iar înmulțirea numerelor este comutativă, atunci

$$\varepsilon(\sigma)a_{1\sigma(1)}\,a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)}=\varepsilon(\sigma^{-1})a_{\sigma^{-1}(1)1}\,a_{\sigma^{-1}(2)2}\cdots a_{\sigma^{-1}(n)n}$$

și deci orice termen din suma (1) se regăsește ca termen în suma (2) și invers. Deci $\det A=\det {}^tA$.

Observații. 1) Proprietatea 1 se scrie și astfel:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{21} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

2) Proprietatea 1 arată că ori de cîte ori avem o proprietate adevărată, referitoare la liniile unui determinant, aceeași proprietate este adevărată și pentru coloanele determinantului.

Proprietatea 2. *Dacă toate elementele unei linii (sau coloane) dintr-o matrice sînt nule, atunci determinantul matricei este nul.*

Demonstrație. Să presupunem că toate elementele de pe linia i sînt nule. Cum fiecare termen al determinantului este un produs de elemente, printre care se găsește și un element de pe linia i, atunci acest termen este zero. Deci determinantul este zero.

Exemplu. Fie matricea:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Deoarece linia a 3-a a matricei A are toate elementele nule, det $A=0$.

Proprietatea 3. *Dacă într-o matrice schimbăm două linii (sau coloane) între ele obținem o matrice care are determinantul egal cu opusul determinantului matricei inițiale.*

Demonstrație. Fie matricea:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (i) \\ \\ (j) \\ \\ \\ \end{matrix}$$

Prin schimbarea liniilor i și j între ele obținem matricea:

$$A' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Avem

$$\det A' = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)a_{1\sigma(1)}\, a_{2\sigma(2)}\dots a_{j\sigma(i)}\dots a_{i\sigma(j)}\dots a_{n\sigma(n)}$$

Să considerăm transpoziția $\tau=(ij)$ deci $\tau(i)=j$, $\tau(j)=i$ și $\tau(k)=k$ dacă $k\neq i, j$. Atunci

$$\det A' = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)a_{1\sigma(1)}\, a_{2\sigma(2)}\dots a_{j\sigma(i)}\dots a_{i\sigma(j)}\dots a_{n\sigma(n)} =$$

$$= \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)a_{1(\sigma\tau)(1)}a_{2(\sigma\tau)(2)}\dots a_{j(\sigma\tau)(j)}\dots a_{i(\sigma\tau)(i)}\dots a_{n(\sigma\tau)(n)}$$

Cum $\varepsilon(\sigma\tau)=\varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)=-\varepsilon(\sigma)$, avem

$$\det A' = -\sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma\tau)a_{1(\sigma\tau)(1)}\dots a_{i(\sigma\tau)(i)}\dots a_{j(\sigma\tau)(j)}\dots a_{n(\sigma\tau)(n)}$$

Cînd σ parcurge toate permutările lui S_n și $\sigma\tau$ parcurge toate permutările lui S_n, deci dacă notăm $\sigma\tau=\sigma'$, avem

$$\det A' = -\sum_{\sigma'\in S_n} \varepsilon(\sigma')a_{1\sigma'(1)}\, a_{2\sigma'(2)}\dots a_{n\sigma'(n)}$$

și deci $\det A' = -\det A$.

Exemplu. Fie matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Dacă schimbăm liniile 1 și 2 între ele obținem matricea $A'=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Conform proprietății 3, avem $\det A = -\det A'$, ceea ce se poate verifica și folosind regula lui Sarrus.

Proprietatea 4. *Dacă o matrice are două linii (sau coloane) identice atunci determinantul său este nul.*

Demonstrație. Fie $A=(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$ o matrice pătratică de ordinul n în care liniile i și j sînt identice. Aceasta înseamnă că $a_{ik}=a_{jk}$ pentru orice $k=1, 2, \dots, n$. Înseamnă că orice termen din dezvoltarea lui $\det A$ se regăsește în această dezvoltare cu semnul schimbat. Deci toți termenii din dezvoltarea lui $\det A$ se reduc 2 cîte 2 și prin urmare $\det A=0$.

Exemplu. Fie matricea $A=\begin{pmatrix} 3 & -13 & -13 \\ -2 & 52 & 52 \\ 1 & 7 & 7 \end{pmatrix}$ care are două coloane identice (coloana 2 și coloana 3). Deci conform proprietății 4 avem $\det A=0$.

Proprietatea 5. *Dacă toate elementele unei linii (sau coloane) ale unei matrice sînt înmulțite cu un element* α *obținem o matrice al cărui determinant este egal cu* α *înmulțit cu determinantul matricei inițiale.*

Demonstrație. Fie matricea $A=(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$ și fie $A'=(a'_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$ matricea care se obține din A prin înmulțirea liniei i cu elementul α. Deci avem $a'_{rj}=a_{rj}$ pentru $r\neq i$ și $j=1, 2, \ldots, n$ și $a'_{ij}=\alpha a_{ij}$ oricare ar fi $j=1, 2, \ldots, n$. Deci

$$\det A'=\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)a'_{1\sigma(1)}a'_{2\sigma(2)}\ldots a'_{i\sigma(i)}\ldots a'_{n\sigma(n)}=$$

$$=\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\ldots(\alpha a_{i\sigma(i)})\ldots a_{n\sigma(n)}=$$

$$=\alpha\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\ldots a_{i\sigma(i)}\ldots a_{n\sigma(n)}=\alpha\det A.$$

Deci $\det A'=\alpha\det A$.

Observație. Proprietatea 5 se transcrie și astfel (pentru linii):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \alpha a_{i1} & \alpha a_{i2} & \ldots & \alpha a_{in}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}\end{vmatrix}=\alpha\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

Exemplu. Fie matricea

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & 1 & -3\\ 1 & -1 & 4\end{pmatrix}$$

Dacă înmulțim coloana 1 cu numărul $\alpha=-2$ obținem matricea

$$A'=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 2\\ -6 & 1 & -3\\ -2 & -1 & 4\end{pmatrix}$$

Aplicînd proprietatea 5 avem $\det A'=-2.\det A$, lucru ce se poate verifica și direct aplicînd regula lui Sarrus. Avem $\det A=-7$, $\det A'=14$.

Proprietatea 6. *Dacă elementele a două linii (sau coloane) ale unei matrice sînt proporționale, atunci determinantul matricei este nul.*

Demonstrație. Fie matricea $A=(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$ în care liniile i și j sînt proporționale, adică există un element α astfel încît $a_{jl}=\alpha a_{il}$ oricare ar fi $l=1, 2, \ldots, n$.

Aplicînd proprietatea 5 rezultă că $\det A$ este produsul dintre elementul α și determinantul unei matrice care are două linii egale. Aplicînd proprietatea 4 rezultă că $\det A$ este zero.

Exemplu. Fie matricea

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -4 & 2 & -5 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -\dfrac{5}{2} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Cum linia a 2-a și a 4-a a matricei A sînt proporționale, aplicînd proprietatea 6, avem $\det A=0$.

Proprietatea 7. *Fie* $A=(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$ *o matrice pătratică de ordinul* n. *Presupunem că elementele liniei* i *sînt de forma* $a_{ij}=a'_{ij}+a''_{ij}$, *oricare ar fi* $j=1, 2, \ldots, n$. *Dacă* A' *(respectiv* A''*) este matricea care se obține din* A *înlocuind elementele de pe linia* i *cu elementele* a'_{ij} *(respectiv* a''_{ij}*),* $j=1, 2, \ldots, n$, *atunci*

$$\det A=\det A'+\det A''.$$

Demonstrație. Avem:

$$\det A=\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\ldots a_{i\sigma(i)}\ldots a_{n\sigma(n)}=$$

$$=\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\ldots(a'_{i\sigma(i)}+a''_{i\sigma(i)})\ldots a_{n\sigma(n)}=$$

$$=\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\ldots a'_{i\sigma(i)}\ldots a_{n\sigma(n)}+\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)a_{1\sigma(1)}\ldots a''_{i\sigma(i)}\ldots a_{n\sigma(n)}=$$

$$=\det A'+\det A''.$$

Observații. 1) Proprietatea 7 se transcrie și astfel:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a'_{i1}+a''_{i1} & a'_{i2}+a''_{i2} & \ldots a'_{in}+a''_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a'_{i1} & a'_{i2} \ldots & a'_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a''_{i1} & a''_{i2} \ldots & a''_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

2) Folosind proprietatea 1 obţinem pentru proprietatea 7 şi varianta pe coloane, adică egalitatea:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a'_{1j} + a''_{1j} \ldots a_{1n} \\ \ldots & \ldots \\ a_{21} & a_{22} \ldots a'_{2j} + a''_{2j} \ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a'_{nj} + a''_{nj} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a'_{ij} \ldots a_{1n} \\ \ldots & \ldots \\ a_{21} & a_{22} \ldots a'_{2j} \ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a'_{nj} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a''_{1j} \ldots a_{1n} \\ \ldots & \ldots \\ a_{21} & a_{22} \ldots a''_{2j} \ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a''_{nj} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

Fie $A=(a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ o matrice pătratică. Vom spune că linia i a matricei A este o *combinaţie liniară* de celelalte linii, dacă există elementele α_j, $j=1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n$, astfel încît

$$a_{ij}=\alpha_1 a_{1j}+\alpha_2 a_{2j}+\ldots+\alpha_{i-1} a_{i-1,j}+\alpha_{i+1} a_{i+1,j}+\ldots+\alpha_n a_{nj}$$

oricare ar fi $j=1, 2, \ldots, n$. Asupra elemenelor α_j nu se pune nici o condiţie, în sensul că unele dintre ele pot fi şi zero. Analog se poate defini ce înseamnă că o coloană j a matricei A este combinaţie liniară de celelalte coloane.

Exemplu. Fie matricea:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Linia a 2-a a matricei A este combinaţie liniară de celelalte două linii. Într-adevăr, dacă considerăm numerele $\alpha_1=2$ şi $\alpha_3=-1$ se observă că $3=2.2+(-1).1$, $3=2.1+(-1).(-1)$, $-5=2.(-1)+(-1).3$.

Proprietatea 8. *Dacă o linie (sau coloană) a unei matrice pătratice este o combinaţie liniară de celelalte linii (sau coloane) atunci determinantul matricei este nul.*

Demonstraţie. Presupunem că linia i a matricei A este o combinaţie liniară de celelalte linii. Utilizînd proprietatea 7, determinantul matricei A este o sumă de determinanţi care au două linii proporţionale, deci, după proprietatea 6, sînt zero toţi aceşti determinanţi. Prin urmare determinantul matricei A este zero.

Exemplu. Să considerăm din nou matricea de mai sus

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Cum linia a 2-a este o combinaţie liniară de celelalte două linii rezultă că $\det A=0$.

Proprietatea 9. *Dacă la o linie (sau coloană) a matricei A adunăm elementele altei linii (sau coloane), înmulțite cu același element, atunci această matrice are același determinant ca și matricea A.*

Demonstrație. Să presupunem că $A=(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}}$ și că la linia i adunăm elementele liniei j înmulțite cu elementul α. Obținem astfel o matrice A care are aceleași linii ca matricea A, în afară de linia i, ale cărei elemente sînt

$$a_{ir}+\alpha a_{jr},\ r=1, 2, \ldots, n.$$

Folosind proprietatea 7, determinantul matricei A' este suma a doi determinanți dintre care unul este determinantul unei matrice care are două linii proporționale. Conform proprietății 6, acest al doilea determinant este nul. Prin urmare $\det A'=\det A$.

Observație. Proprietatea 9 se transcrie astfel (pentru linii):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1}+\alpha a_{j1} & a_{i2}+\alpha a_{j2} & \ldots a_{in}+\alpha a_{jn} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{j1} & a_{j2} & \ldots a_{jn} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} \ldots a_{in} \\ \ldots & \ldots \\ a_{j1} & a_{j2} \ldots a_{jn} \\ \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

Observație. Se poate constata că proprietatea 8 extinde proprietatea 6 și că proprietățile 4 și 2 sînt cazuri particulare ale proprietății 6. Dar le-am dat datorită importanței lor și pentru o reținere mai bună.

§ 4. CALCULUL DETERMINANȚILOR

În cele ce urmează vom da un procedeu prin care calculul unui determinant de ordinul n se reduce la calculul unui anumit număr de determinanți de ordinul $n-1$.

Fie

$$d=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ \ldots & \ldots \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

un determinant de ordinul n. Determinantul de ordinul $n-1$ care se obține suprimînd linia i și coloana j din determinantul d se numește *minorul* elementului a_{ij} și se notează cu d_{ij}. Elementul $\delta_{ij}=(-1)^{i+j}d_{ij}$ se numește *complementul algebric* al elementului a_{ij} în determinantul d. Evident, unui determinant de ordinul n i se pot asocia n^2 minori de ordinul $n-1$ și respectiv n^2 complemenți algebrici.

Exemplu. Fie determinantul de ordinul trei

$$d=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix}.$$

Minorii elementelor din d sînt în număr de 9. Aceștia sînt:

$$d_{11}=\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}=\ \ 6;\ d_{12}=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=\ \ 5;\ d_{13}=\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}=-7$$

$$d_{21}=\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}=-15;\ d_{22}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=-11;\ d_{23}=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}=\ \ 10$$

$$d_{31}=\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}=-12;\ d_{32}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-\ 7;\ d_{33}=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=\ \ 8.$$

Complemenții algebrici ai elementelor din d sînt:

$$\delta_{11}=(-1)^{1+1}d_{11}=\ \ 6;\ \delta_{12}=(-1)^{1+2}d_{12}=-5;\ \delta_{13}=(-1)^{1+3}d_{13}=-7$$

$$\delta_{21}=(-1)^{2+1}d_{21}=\ \ 15;\ \delta_{22}=(-1)^{2+2}d_{22}=-11;\ \delta_{23}=(-1)^{2+3}d_{23}=-10$$

$$\delta_{31}=(-1)^{3+1}d_{31}=-12;\ \delta_{32}=(-1)^{3+2}d_{32}=\ \ 7;\ \delta_{33}=(-1)^{3+3}d_{33}=\ \ 8.$$

Teorema 4.1. *Fie determinantul de ordinul* n, $d=|a_{ij}|_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$. *Atunci pentru orice* $1\leqslant i\leqslant n$, are loc egalitatea:

(1) $$d=a_{i1}\delta_{i1}+a_{i2}\delta_{i2}+\ldots+a_{in}\delta_{in}$$

Egalitatea (1) *poartă denumirea de dezvoltarea determinantului după linia* i.

Demonstrație. Vom nota cu S suma

(2) $$S=a_{i1}\delta_{i1}+a_{i2}\delta_{i2}+\ldots+a_{in}\delta_{in}.$$

Să considerăm termenul $a_{ij}\delta_{ij}=(-1)^{i+j}a_{ij}d_{ij}$ din suma (2). Să presupunem mai întîi că $i=j=1$. În acest caz un termen oarecare din dezvoltarea determinantului d_{11} de ordinul $n-1$ este de forma $a_{2k_2}a_{3k_3}\ldots$ $\ldots a_{nk_n}$, unde $k_2, k_3, \ldots, k_n$ sînt numerele $2, 3, \ldots, n$ eventual în altă ordine. Rezultă că termenul $a_{11}a_{2k_2}a_{3k_3}\ldots a_{nk_n}$ este un termen al determinantului d. Semnul termenului $a_{2k_2}a_{3k_3}\ldots a_{nk_n}$ provenit din dezvoltarea determinantului d_{11} este egal cu $(-1)^l$, unde l este numărul de inversiuni ale permutării

$$\sigma=\begin{pmatrix} 2 & 3\ldots n \\ k_2 & k_3\ldots k_n \end{pmatrix}$$

Deci semnul termenului $a_{11}a_{2k_2}a_{3k_3}\ldots a_nk_n$ provenit din produsul $a_{11}\delta_{11}$ este $(-1)^{1+1}(-1)^l=(-1)^l$.

Pe de altă parte semnul termenului $a_{11}a_{2k_2}a_{3k_3}\ldots a_{nk_n}$ în dezvoltarea determinantului d este egal cu $(-1)^r$, unde r este numărul de inversiuni ale permutării

$$\tau=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\ldots n \\ 1 & k_2 & k_3\ldots k_n \end{pmatrix}$$

Cum $k_2>1$, $k_3>1$, ..., $k_n>1$, permutările σ și τ au același număr de inversiuni; deci $r=l$. Prin urmare termenul $a_{11}a_{2k_2}a_{3k_3}\ldots a_{nk_n}$ provenit din produsul $a_{11}\delta_{11}$ are același semn cu cel provenit din dezvoltarea determinantului d.

Trecem la cazul general. Vom proceda în modul următor: vom schimba liniile și coloanele în așa fel încît elementul a_{ij} să vină în locul elementului a_{11} și minorul d_{ij} să rămînă neschimbat. În acest fel linia i și coloana j devin linia 1 respectiv coloana 1; linia 1 devine linia 2, linia 2 devine linia 3, ..., linia $i-1$ devine linia i; coloana 1 devine coloana 2, coloana 2 devine coloana 3, ..., coloana $j-1$ devine coloana j. Determinantul obținut prin aceste schimbări îl notăm cu d'. Aplicînd proprietatea 3 a determinanților, avem:

$$d=(-1)^{i+j}d' \tag{3}$$

În plus, $d'_{11}=d_{ij}$. Dacă $a_{1k_1}a_{2k_2}\ldots a_{i-1k_{i-1}k_{i-1}}a_{i+1k_{i+1}}\ldots a_{nk_n}$ este un termen oarecare din dezvoltarea determinantului d_{ij}, din egalitatea (3) și ținînd seama de prima parte a demonstrației, rezultă că semnul termenului $(-1)^{i+j}a_{1k_1}a_{2k_2}\ldots a_{i-1k_{i-1}}a_{ij}a_{i+1k_{i+1}}\ldots a_{nk_n}$ provenit din produsul $a_{ij}\delta_{ij}$ este același cu cel dat de dezvoltarea determinantului d. În concluzie, fiecare termen din produsul $a_{ij}\delta_{ij}$ luat cu semnul său este un termen cu același semn, al determinantului d. Cum produsul $a_{ij}d_{ij}$ conține $(n-1)!$ termeni, atunci toți termenii care apar în suma (2) sînt în număr de $(n-1)!n=n!$. Deci în suma (2) se găsesc toți termenii (inclusiv semnul) determinantului d. Deci are loc egalitatea $d=S$.

Corolarul 4.2. *Fie* $d=|a_{ij}|_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ *un determinant de ordinul* n. *Pentru orice* $i\neq j$ *are loc egalitatea*

$$a_{i1}\delta_{j1}+a_{i2}\delta_{j2}+\ldots+a_{in}\delta_{jn}=0$$

Demonstrație. Considerăm determinantul

$$d'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\dots a_{1n} \\ \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2}\dots a_{in} \\ \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2}\dots a_{in} \\ \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2}\dots a_{nn} \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ (i) \\ \\ \\ (j) \\ \\ \end{matrix}$$

care s-a obținut din d prin înlocuirea liniei j cu linia i. Cum d' are două linii egale, aplicînd proprietatea 4 a determinanților, avem $d'=0$. Dezvoltînd determinantul d' după linia j (conform teoremei 1) obținem egalitatea căutată.
Din proprietatea 1 a determinanților și teorema 1 obținem

Teorema 4.3. *Fie determinantul de ordinul* n, $d=|a_{ij}|_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$. *Atunci pentru orice* $1\leq j\leq n$ *are loc egalitatea*:

$$d=a_{1j}\delta_{1j}+a_{2j}\delta_{2j}+\dots+a_{nj}\delta_{nj} \tag{1'}$$

Egalitatea (1') poartă denumirea de dezvoltarea determinantului d după coloana j.

Corolarul 4.4. *Fie* $d=|a_{ij}|_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$ *un determinant de ordinul* n. *Pentru orice* $i\neq j$ *are loc egalitatea*

$$a_{1j}\delta_{1i}+a_{2j}\delta_{2i}+\dots+a_{nj}\delta_{ni}=0$$

Demonstrație. Se aplică proprietatea 1 a determinanților și consecința 1.

După cum se observă, teorema 4.1 și teorema 4.3 dau procedee prin care calculul unui determinant de ordinul n se reduce la calculul unui anumit număr de determinanți de ordinul $n-1$. Pentru a simplifica calculele, în aplicații, vom face dezvoltarea unui determinant după acea linie sau coloană care are cel mai mare număr de elemente egale cu zero. Din aceste motive, la calculul unui determinant vom aplica sistematic cele 9 proprietăți ale determinanților pentru ca pe o anumită linie sau coloană să obținem cît mai multe elemente egale cu zero.

Exemple. 1) Să calculăm determinantul de ordinul 4:

$$d=\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 5 \\ 4 & -3 & 1 & -6 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Cum linia a 2-a conţine un element nul, vom face dezvoltarea determinantului după linia a doua:

$$d=(-1)^{2+1}(-2)\cdot\begin{vmatrix}-1 & -2 & 3\\ -3 & 1 & -6\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}+(-1)^{2+2}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ 4 & 1 & -6\\ 2 & -1 & 0\end{vmatrix}+$$

$$+(-1)^{2+4}\cdot 5\cdot\begin{vmatrix}1 & -1 & -2\\ 4 & -3 & 1\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix}.$$

Calculăm primul determinant de ordinul 3:

$$\begin{vmatrix}-1 & -2 & 3\\ -3 & 1 & -6\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & -3 & 3\\ -3 & -2 & -6\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=(-1)^{3+1}\cdot 1\begin{vmatrix}-3 & 3\\ -2 & 6\end{vmatrix}=$$

$$=(-3)\cdot(-6)-(-2)\cdot 3=24$$

La calculul acestui determinant am procedat astfel: mai întîi am adunat coloana 1 la coloana 2, apoi am dezvoltat determinantul după a 3-a linie:

$$\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ 4 & 1 & -6\\ 2 & -1 & 0\end{vmatrix}=(-1)^{3+1}\cdot 2\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 1 & -6\end{vmatrix}+(-1)^{3+2}\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix}1 & 3\\ 4 & -6\end{vmatrix}=$$

$$=2\cdot 9+1\cdot(-18)=0.$$

La calculul acestui determinant am făcut dezvoltarea determinantului după linia a 3-a:

$$\begin{vmatrix}1 & -1 & -2\\ 4 & -3 & 1\\ 2 & +1 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 4 & 1 & 9\\ 2 & 3 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 9\\ 3 & 3\end{vmatrix}=-24.$$

La calculul acestui determinant am procedat astfel: mai întîi am adunat coloana 1 la coloana 2, apoi am înmulţit coloana 1 cu 2 şi am adunat-o la coloana 3. În final am dezvoltat determinantul după prima linie.

Deci valoarea determinantului d este:

$$d=2\cdot 24+1\cdot 0+5\cdot(-24)=48-120=-72.$$

2) Să calculăm determinantul de ordinul 4:

Cum linia a 2-a conține un element nul, vom face dezvoltarea determinantului după linia a doua:

$$d=(-1)^{2+1}(-2)\cdot\begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -3 & 1 & -6 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}+(-1)^{2+2}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & -6 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}+$$

$$+(-1)^{2+4}\cdot 5\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Calculăm primul determinant de ordinul 3:

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -3 & 1 & -6 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & -3 & 3 \\ -3 & -2 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{3+1}\cdot 1\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -2 & 6 \end{vmatrix}=$$

$$=(-3)\cdot(-6)-(-2)\cdot 3=24$$

La calculul acestui determinant am procedat astfel: mai întîi am adunat coloana 1 la coloana 2, apoi am dezvoltat determinantul după a 3-a linie:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & -6 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{3+1}\cdot 2\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -6 \end{vmatrix}+(-1)^{3+2}\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix}=$$

$$=2\cdot 9+1\cdot(-18)=0.$$

La calculul acestui determinant am făcut dezvoltarea determinantului după linia a 3-a:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 2 & +1 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 9 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}=-24.$$

La calculul acestui determinant am procedat astfel: mai întîi am adunat coloana 1 la coloana 2, apoi am înmulțit coloana 1 cu 2 și am adunat-o la coloana 3. În final am dezvoltat determinantul după prima linie.

Deci valoarea determinantului d este:

$$d=2\cdot 24+1\cdot 0+5\cdot(-24)=48-120=-72.$$

2) Să calculăm determinantul de ordinul 4:

$$d=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & 9 \\ 4 & 1 & -3 & 0 \\ 12 & 0 & 7 & 8 \\ -5 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Cum coloana a patra conţine două elemente egale cu zero, vom face dezvoltarea după această coloană

$$d=(-1)^{1+4}\cdot 9\begin{vmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 12 & 0 & 7 \\ -5 & 1 & 2 \end{vmatrix}+(-1)^{3+4}\cdot 8\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 4 & 1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Calculăm primul determinant de ordinul 3:

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 12 & 0 & 7 \\ -5 & 1 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 12 & 0 & 7 \\ -9 & 0 & 5 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 12 & 7 \\ -9 & 5 \end{vmatrix}=-(60+63)=$$

$$=-123.$$

La calculul acestui determinant am procedat astfel: mai întîi am înmulţit linia 1 cu (-1) şi apoi am adunat-o la linia 3. În final am dezvoltat determinantul după coloana 2.

Calculăm al doilea determinant:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 4 & 1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & -23 \\ -5 & -9 & 27 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 9 & -23 \\ -9 & 27 \end{vmatrix}=36.$$

La calculul acestui determinant am procedat astfel: mai întîi am înmulţit coloana 1 cu 2 şi am adunat-o la coloana 2; apoi am înmulţit coloana 1 cu -5 şi am adunat-o la coloana 3. În final am făcut dezvoltarea determinantului după linia 1.

Valoarea determinantului d este:

$$d=(-1)^{1+4}\cdot 9\cdot(-123)+(-1)^{3+4}\cdot 8\cdot 36=1107-288=819.$$

§ 5. FORMULA BINET-CAUCHY

DETERMINANTUL PRODUSULUI A DOUĂ MATRICE

Fie m şi n două numere naturale nenule astfel încît $m\leqslant n$, iar R un inel comutativ. Ca de obicei, notăm prin $\mathcal{M}(m, n, R)$ (respectiv $\mathcal{M}(n, m, R)$) mulţimea matricelor cu m linii şi n coloane (respectiv cu

$$d=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & 9 \\ 4 & 1 & -3 & 0 \\ 12 & 0 & 7 & 8 \\ -5 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Cum coloana a patra conţine două elemente egale cu zero, vom face dezvoltarea după această coloană

$$d=(-1)^{1+4}\cdot 9\begin{vmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 12 & 0 & 7 \\ -5 & 1 & 2 \end{vmatrix}+(-1)^{3+4}\cdot 8\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 4 & 1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Calculăm primul determinant de ordinul 3:

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 12 & 0 & 7 \\ -5 & 1 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 12 & 0 & 7 \\ -9 & 0 & 5 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 12 & 7 \\ -9 & 5 \end{vmatrix}=-(60+63)=$$

$$=-123.$$

La calculul acestui determinant am procedat astfel: mai întîi am înmulţit linia 1 cu (-1) şi apoi am adunat-o la linia 3. În final am dezvoltat determinantul după coloana 2.

Calculăm al doilea determinant:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 4 & 1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & -23 \\ -5 & -9 & 27 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 9 & -23 \\ -9 & 27 \end{vmatrix}=36.$$

La calculul acestui determinant am procedat astfel: mai întîi am înmulţit coloana 1 cu 2 şi am adunat-o la coloana 2; apoi am înmulţit coloana 1 cu -5 şi am adunat-o la coloana 3. În final am făcut dezvoltarea determinantului după linia 1.

Valoarea determinantului d este:

$$d=(-1)^{1+4}\cdot 9\cdot(-123)+(-1)^{3+4}\cdot 8\cdot 36=1107-288=819.$$

§ 6. DEFINIREA DETERMINANTULUI UNEI MATRICE PRIN INDUCȚIE

Am văzut în §1 că formula determinanților de ordinul 2 și 3 are o formă simplă, adică

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Formula acestor determinanți, dar mai ales a celui de ordinul 3, ne sugerează că putem defini determinantul de ordinul n prin inducție: și anume pentru $n=1$ și $n=2$ avem definit determinantul de ordinul 2 (respectiv 3) prin formulele (1) (și respectiv (2)). Presupunem că este definit determinantul pentru orice matrice de ordinul $n-1$. Atunci punem ca determinantul de ordinul n să fie egal cu

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}D_1 - a_{12}D_2 + a_{13}D_3 - \dots (-1)^{n-1}a_{1n}D_n$$

unde D_k este determinantul matricei de ordinul $(n-1)\times(n-1)$

$$\begin{pmatrix} a_{21} & \dots & a_{2\ k-1} & a_{2\ k+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{n1} & \dots & a_{n\ k-1} & a_{n\ k+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

adică submatricea matricei inițiale din care am scos prima linie și coloana „k".

Problema care se pune este de a arăta că modul în care am definit determinantul de ordinul n, coincide cu definiția determinantului dată în § 2.

Pentru aceasta este comod să introducem cîteva noțiuni preliminare.

Definiția 6.1. Fie R un inel comutativ, E și F două R-module. O aplicație $\varphi: E^n \to F$ se numește *multiliniară* dacă pentru orice $i=1, \ldots, n$ și pentru orice $\lambda, \mu \in R$, $x_1, \ldots, x_i, x_i', \ldots, x_n \in E$ să avem

$$\varphi(x_1, \ldots, \lambda x_i + \mu x_i', \ldots, x_n) = \lambda \varphi(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) + \mu \varphi(x_1, \ldots, x_i', \ldots, x_n)$$

Dacă $F=R$, atunci φ se numește *formă n-lineară* pe E.

Dacă $n=2$, φ se numește aplicație *bilinară* (respectiv *formă biliniară*). Dacă în plus aplicația multiliniară φ are proprietatea că $\varphi(x_1, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)=0$ ori de cîte ori $x_i = x_{i+1}$, atunci φ se numește *multiliniară și alternată*.

În continuare vom da cele mai importante proprietăți ale aplicațiilor multiliniare și alternate:

Teorema 6.2. *Fie $\varphi: E^n \to F$ o aplicație multiliniară și alternată. Atunci au loc următoarele afirmații:*

1) *Dacă $i<j$, atunci* $\varphi(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n) = -\varphi(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$

2) *Dacă $x_i = x_j$ $(i \neq j)$, atunci* $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = 0$.

3) *Dacă $a \in R$,* atunci $\varphi(x_1, \ldots, x_i + a x_j, \ldots, x_j, \ldots, x_n) =$

$$= \varphi(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n).$$

4) *Dacă $\sigma \in S_n$, atunci*

$$\varphi(x_{\sigma(1)}, \ldots x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) \varphi(x_1, \ldots, x_n).$$

5) *Fie matricea $A=(a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ și elementele $e_1, e_2, \ldots, e_n \in E$. Dacă definim elementele*

$$f_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j \text{ și } g_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j \text{ cu } i=1, \ldots, n, \text{ atunci } \varphi(f_1, f_2, \ldots, f_n) =$$

$$= \varphi(g_1, g_2, \ldots, g_n) = \det(A) \varphi(e_1, e_2, \ldots, e_n).$$

Demonstrație. 1) Cum $i<j$, putem scrie $j=i+k$ cu $k \geqslant 1$. Vom face inducție după k. Dacă $k=1$, atunci $j=i+1$ și atunci

$$\varphi(x_1, \ldots, x_i + x_{i+1}, x_i + x_{i+1}, \ldots, x_n) = 0.$$

Cum φ este multiliniară obținem egalitatea

$$0=\varphi(x_1, \ldots, x_i, x_i, \ldots, x_n)+\varphi(x_1, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)+$$
$$+\varphi(x_1, \ldots, x_{i+1}, x_i, \ldots, x_n)+\varphi(x_1, \ldots, x_{i+1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

și aplicînd din nou faptul că φ este și alternată obținem

$$\varphi(x_1, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)+\varphi(x_1, \ldots, x_{i+1}, x_i, \ldots, x_n)=0$$

de unde

$$\varphi(x_1, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)=-\varphi(x_1, \ldots, x_{i+1}, x_i, \ldots, x_n).$$

Presupunem afirmația adevărată pentru $k-1$ și o demonstrăm pentru k. Avem succesiv:

$$\varphi(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n)=-\varphi(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, x_{j-1}, \ldots, x_n)=$$
$$=-(-\varphi(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, x_{j-1}, \ldots, x_n))=-(-(-\varphi(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots,$$
$$\ldots, x_n)))=-\varphi(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots x_n).$$

2) Presupunem $i<j$. Atunci aplicînd proprietatea 1) avem

$$\varphi(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n)=-\varphi(x_1, \ldots, x_{j-1}, \ldots, x_i, x_j, \ldots, x_n)=0.$$

3) Se aplică faptul că φ este multiliniară și 2).

4) Permutarea σ este un produs de transpoziții. Ținînd cont că $\varepsilon(\sigma)=\varepsilon(\tau_1) \ldots \varepsilon(\tau_k)$, atunci în mod evident ne putem reduce la cazul cînd $k=1$, adică σ este o transpoziție.

Dar în acest caz afirmația noastră rezultă din 1).

5) Avem

$$\varphi(f_1, \ldots, f_n)=\varphi\left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}e_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} a_{nj}e_j\right)=\sum_{1\leq i_1, \ldots, i_n\leq n} a_{1i_1}a_{2i_2}\ldots a_{ni_n}\varphi(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}).$$

Considerăm funcția $\sigma:\{1, \ldots, n\}\to\{1, \ldots, n\}$ astfel încît $\sigma(k)=i_k$. Atunci

$$\varphi(f_1, f_2, \ldots, f_n)=\sum_{\sigma:\{1,\ldots,n\}\to\{1,\ldots,n\}} a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\ldots a_{n\sigma(n)}\cdot\varphi(e_{\sigma(1)},\ldots,e_{\sigma(n)})=$$

$$=\sum_{\sigma\in S_n} a_{1\sigma(1)}\ldots a_{n\sigma(n)}\varphi(e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(n)})+\sum_{\substack{\sigma:\{1,\ldots,n\}\to\{1,\ldots,n\}\\ \sigma \text{ nu este injectivă}}} a_{1\sigma(1)}\ldots a_{n\sigma(n)}\varphi(e_{\sigma(1)},\ldots e_{\sigma(n)}).$$

Dacă σ: $\{1, \ldots, n\}\to\{1, \ldots, n\}$ este neinjectivă, există $k\neq l$ astfel încît $\sigma(k)=\sigma(l)$ și deci $e_{\sigma(k)}=e_{\sigma(l)}$.

Cum φ este alternată, atunci $\varphi(e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(n)})=0$. Deci

$$= \varphi(f_1, \ldots, f_n) = \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} \ldots a_{n\sigma(n)} \varphi(e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(n)}) =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \ldots a_{n\sigma(n)} \varphi(e_1, \ldots, e_n) = \det(A) \varphi(e_1, \ldots, e_n).$$

Analog se arată egalitatea

$$\varphi(g_1, \ldots, g_n) = \det(A) \varphi(e_1, \ldots, e_n)$$

(aici se ține cont de proprietatea 1 a determinanților).

Fie R un inel comutativ. Notăm $E = \mathcal{M}(n, 1, R)$ adică

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \ a_i \in R \right\}$$

Este evident că E este un R-modul liber cu baza

$$\xi^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \xi^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \xi^n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dacă $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ este o matrice pătratică de ordinul n, vom nota cu $A^1, A^2, \ldots, A^n$ coloanele acestei matrice. Evident, $A^1, \ldots, A^n \in E$.

Corolarul 6.3. *Fie φ o formă multiliniară și alternată $\varphi: E^n \to R$ astfel încît $\varphi(\xi^1, \ldots, \xi^n) = 1$. Dacă $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ este o matrice pătratică de ordinul n, atunci*

$$\varphi(A^1, \ldots, A^n) = \det A.$$

Demonstrație. Cum $A^i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \xi^j$, atunci din propoziția precedentă obținem că

$$\varphi(A^1, \ldots, A^n) = \det A \, \varphi(\xi^1, \ldots, \xi^n) = \det A.$$

Teorema 6.4. (Teorema fundamentală a teoriei determinanților).

Fie $E = \mathcal{M}(n, 1, R)$. Atunci există o unică formă multiliniară și alternată $\varphi_n: E^n \to R$ astfel încît $\varphi_n(\xi^1, \ldots, \xi^n) = 1$.

Demonstrație. Fie $A^1, \ldots, A^n \in E$. Putem forma matricea pătratică $A = (A^1, A^2, \ldots, A^n)$ care are coloanele $A^1, A^2, \ldots, A^n$. Dacă $\varphi_n, \varphi_n' : E^n \to R$ sînt două forme multiliniare alternate cu proprietatea $\varphi_n(\xi^1, \ldots, \xi^n) =$

$=\varphi_n'(\xi^1, \ldots, \xi^n)$ avem din teorema 6.2 că $\varphi_n(A^1, \ldots, A^n)=\varphi_n'(A^1, \ldots, A^n)=$ $=\det A$ şi deci $\varphi_n=\varphi_n'$.

În continuare vom arăta existenţa lui $\varphi_n: E^n \to R$. Procedăm prin inducţie după n. Dacă $n=1$, atunci $E=\{(a),\ a\in R\}\ \xi^1=1$ şi punem $\varphi_1((a))=a$. Presupunem construită $\varphi_{n-1}: F^{n-1}\to R$, unde $F=\mathcal{M}(n-1, 1, R)$ cu proprietatea din enunţul teoremei.

Fie acum $A^1, \ldots, A^n \in E$ şi $A=(A^1, \ldots, A^n)$ matricea pătratică avînd coloanele $A^1, \ldots, A^n$.

$$\text{Presupuenm că } A^i=\begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} \text{ unde } i=1, \ldots, n.$$

În acest caz $A=(a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$. Dacă A_{ij} este matricea obţinută din A eliminînd linia i şi coloana j, punem prin definiţie:

$$\varphi_n(A^1, \ldots, A^n)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\varphi_{n-1}(A_{ij}^1, \ldots, A_{ij}^{n-1}). \tag{3}$$

Se observă că

$$\varphi_n(\xi^1, \ldots, \xi^n)=(-1)^{i+i}a_{ii}\varphi_{n-1}(A_{ii}^1, \ldots, A_{ii}^{n-1})=1,$$

deoarece $a_{ii}=1$ şi $\varphi_{n-1}(A_{ii}^1, \ldots, A_{ii}^{n-1})=1$, conform ipotezei de inducţie. Să dovedim că φ_n este multiliniară. Mai întîi vom arăta că

$$\varphi_n(A^1, \ldots, A^k+A'^k, \ldots, A^n)=\varphi_n(A^1, \ldots, A^k, \ldots, A_n)+$$
$$+\varphi_n(A^1, \ldots, A'^k, \ldots, A^n).$$

Presupunem $A'^k=\begin{pmatrix} a'_{1k} \\ \vdots \\ a'_{nk} \end{pmatrix}$ şi fie $A=(A^1,\ldots, A^k, \ldots, A^n)=(a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ şi $A'=$ $=(A^1, \ldots, A'^k, \ldots, A^n)=(a'_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$, unde $a'_{ij}=a_{ij}$ pentru $j\neq k$.

Fie matricea $B=(B^1, \ldots, B^k, \ldots, B^n)=(b_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, unde $B^i=A^i$ pentru $i\neq k$ şi $B^k=A^k+A'^k$. Deci $b_{ij}=a_{ij}=a'_{ij}$ pentru $j\neq k$ şi $b_{ik}=$ $=a_{ik}+a'_{ik}$.

Avem

$$\varphi_n(A^1, \ldots, A^k+A'^k, \ldots, A^n)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}b_{ij}\varphi_{n-1}(B_{ij}^1, \ldots, B_{ij}^{n-1})=$$

$$=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}(-1)^{i+j}b_{ij}\varphi_{n-1}(B_{ij}^1, \ldots, B_{ij}^{n-1})+(-1)^{i+k}b_{ik}\varphi_{n-1}(B_{ik}^1, \ldots, B_{ik}^{n-1})$$

Dacă $j \neq k$, avem

$$\varphi_{n-1}(B_{ij}^1, \ldots, B_{ij}^{n-1}) = \varphi_{n-1}(A_{ij}^1, \ldots, A_{ij}^{n-1}) + \varphi_{n-1}(A_{ij}'^1, \ldots, A_{ij}'^{n-1})$$

Dacă $j = k$, obținem

$$\varphi_{n-1}(B_{ik}^1, \ldots, B_{ij}^{n-1}) = \varphi_{n-1}(A_{ij}^1, \ldots, A_{ij}^{n-1}) = \varphi_{n-1}(A_{ij}'^1, \ldots, A_{ij}'^{n-1}).$$

Deci

$$\varphi_n(A^1, \ldots, A^k + A'^k, \ldots, A^n) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \varphi_{n-1}(A_{ij}^1, \ldots, A_{ij}^{n-1}) +$$

$$+ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n (-1)^{i+j} a_{ij}' \varphi_{n-1}(A_{ij}'^1 A_{ij}'^{n-1}) + (-1)^{i+k} a_{ik} \varphi_{n-1}(A_{ij}^1, \ldots, A_{ij}^{n-1}) +$$

$$+ (-1)^{i+k} a_{ik}' \varphi_{n-1}(A_{ij}'^1, \ldots, A_{ij}'^{n-1}).$$

Grupînd convenabil obținem că

$$\varphi_n(A^1, \ldots, A^k + A'^k, \ldots, A^n) = \varphi_n(A^1, \ldots, A^k, \ldots, A^n) + \varphi^n A^1, \ldots, A'^k \ldots, A^n)$$

În mod similar se arată că

$$\varphi_n(A^1, \ldots, \lambda A^k, \ldots, A^n) = \lambda \varphi_n(A^1, \ldots, A^k, \ldots, A^n).$$

Să dovedim că φ_n este alternată. Presupunem că $A^k = A^{k+1}$. Deci $a_{ik} = a_{i\,k+1}$ oricare ar fi $i = 1, \ldots, n$.
Avem

$$\varphi_n(A^1, \ldots, A^n) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \varphi_{n-1}(A_{ij}^1, \ldots, A_{ij}^{n-1}) =$$

$$= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k,\, k+1}}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \varphi_{n-1}(A_{ij}^1, \ldots, A_{ij}^{n-1}) + (-1)^{i+k} a_{ik} \varphi_{n-1}(A_{ik}^1, \ldots, A_{ik}^{n-1}) +$$

$$+ (-1)^{i+k+1} a_{i\,k+1} \varphi_{n-1}(A_{i\,k+1}^1, \ldots, A_{i\,k+1}^{n-1})$$

Deoarece $A^k = A^{k+1}$ și $j \neq k, k+1$ avem $\varphi_{n-1}(A_{ij}^1, \ldots, A_{ij}^{n-1}) = 0$ (întrucît două componente consecutive din șirul $A_{ij}^1, \ldots, A_{ij}^{n-1}$ sînt egale).

Pe de altă parte, se observă imediat că

$$\varphi_{n-1}(A_{ik}^1, \ldots, A_{ik}^{n-1}) = \varphi_{n-1}(A_{ik+1}^1, \ldots, A_{ik+1}^{n-1})$$

și deci

$$\varphi_n(A^1, \ldots, A^n) = ((-1)^{i+k} a_{ik} + (-1)^{i+k+1} a_{i\,k+1}) \varphi_{n-1}(A_{ik}^1, \ldots, A_{ik}^{n-1}) = 0$$

deoarece $a_{ik} = a_{i\,k+1}$ și $(-1)^{i+k+1} = -(-1)^{i+k}$.

Corolarul 6.5. *Dacă* $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ *este o matrice pătratică de ordinul* n, *atunci*

$$\det A=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}.\det(A_{ij}),$$

unde A_{ij} *este matricea care se obține din* A *eliminînd linia* i *și coloana* j.

Demonstrație. Se ține cont de definiția lui φ_n și de corolarul 6.3.

Observații. 1) Pentru $i=1$ obținem dezvoltarea determinantului după prima linie așa cum am dat-o la începutul acestui paragraf.

2) Din teorema 6.4, ținînd cont de proprietățile aplicațiilor multiliniare și alternate, obținem toate proprietățile determinanților.

Folosind funcția φ_n ne propunem să demonstrăm și

Teorema 6.6. *Fie* $A, B\in\mathcal{M}(n, R)$. *Atunci* $\det(AB)=\det A\cdot\det B$.

Demonstrație. Fie $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$, $B=(b_{ij})_{1\le i,j\le n}$. Fie $e_i=\sum_{j=1}^{n}b_{ij}\xi^j$ și $f_i=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}e_j$, $i=1, \ldots, n$. Deci $e_1, e_2, \ldots, e_n$; $f_1, \ldots, f_n\in E=\mathcal{M}(n, 1, R)$.

Se observă imediat că:

$$\begin{pmatrix}e_1\\ \vdots\\ e_n\end{pmatrix}=B.\begin{pmatrix}\xi^1\\ \vdots\\ \xi^r\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}f^1\\ \vdots\\ f_n\end{pmatrix}=A.\begin{pmatrix}e_1\\ \vdots\\ e_n\end{pmatrix}$$

Deci

$$\begin{pmatrix}f_1\\ \vdots\\ f_n\end{pmatrix}=A\cdot\left(B\begin{pmatrix}\xi^1\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix}\right)=\quad (AB)\begin{pmatrix}\xi^1\\ \vdots\\ \xi^n\end{pmatrix}.$$

Din teorema 6.2 avem

$$\varphi_n(f_1, \ldots, f_n)=\det(AB)\varphi_n(\xi^1, \ldots, \xi^n)=\det(AB).$$

Pe de altă parte,

$$\varphi_n(f_1, \ldots, f_n)=\det A.\ \varphi_n(e_1, \ldots, e_n)=$$
$$=\det A(\det B\cdot\varphi_n(\xi^1, \ldots, \xi^n))=\det A\cdot\det B.$$

$$\text{Deci }\det(AB)=\det A\cdot\det B.$$

§ 7. MATRICE INVERSABILE. INVERSA UNEI MATRICE. REGULA LUI CRAMER

Fie R un inel comutativ. Vom considera $\mathcal{M}(n, R)$ inelul matricelor pătratice de ordinul n. O matrice $A\in\mathcal{M}(n, R)$ se numește *inversabilă* dacă este inversabilă ca element în inelul $\mathcal{M}(n, R)$, adică există o matrice $B \in \mathcal{M}(n, R)$ (care este unică) astfel încît $AB = BA = I_n$. Matricea B, dacă există, se notează cu A^{-1} şi se numeşte inversa matricei A.

Teorema 7.1. *Fie* $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}(n, R)$. *Atunci* A *este inversabilă dacă şi numai dacă* $\det(A)$ *este un element inversabil în inelul* R.

În acest caz $A^{-1} = (a_{ij}^*)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$, *unde* $a_{ij}^* = (-1)^{i+j} d^{-1} d_{ji}$, *unde* $d = \det A$ *şi* d_{ji} *este minorul elementului* a_{ji}.

Demonstraţie. Presupunem că A este inversabilă. Există $B \in \mathcal{M}(n, R)$ astfel încît $AB = BA = I_n$. În acest caz avem $\det(AB) = \det I_n = 1$ sau $\det A \cdot \det B = 1$ ceea ce arată că $\det A$ este un element inversabil în R.

Invers, presupunem că $d = \det A$ este inversabil în R. Să notăm

$$A^* = (a_{ij}^*)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \quad \text{şi} \quad AA^* = B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}. \quad \text{Deci} \quad b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{kj}^* =$$

$$= \sum_{k=1}^{u} a_{ik} (-1)^{k+j} d^{-1} d_{jk} = d^{-1} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{ik} d_{jk}.$$

Dacă $j = i$, atunci din teorema 4.1 obţinem că $b_{ii} = dd^{-1} = 1$.

Dacă $j \neq i$, din corolarul 4.2 obţinem că $b_{ij} = 0$. Deci $B = I_n$, adică $AA^* = I_n$. Analog se arată că $AA^* = I_n$.

Exemplu. Să se calculeze inversa matricei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det A = d = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0.$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* & a_{13}^* \\ a_{21}^* & a_{22}^* & a_{23}^* \\ a_{31}^* & a_{32}^* & a_{32}^* \end{pmatrix},$$

unde

$$a_{11}^* = (-1)^{1+1} \, d^{-1} \cdot d_{11}, \qquad d_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3,$$

$$a_{12}^* = (-1)^{1+2} d^{-1} \cdot d_{21}, \qquad d_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 6 = -4,$$

$$a_{13}^* = (-1)^{1+3} d^{-1} \cdot d_{31}, \qquad d_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1,$$

$$\overset{*}{a}_{21}=(-1)^{2+1}d^{-1}\, d_{12}, \qquad d_{12}=\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=2,$$

$$\overset{*}{a}_{22}=(-1)^{2+2}d^{-1}\cdot d_{22}, \qquad d_{22}=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=1+3=4,$$

$$\overset{*}{a}_{23}=(-1)^{2+3}d^{-1}\cdot d_{32}, \qquad d_{32}=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=2,$$

$$\overset{*}{a}_{31}=(-1)^{3+1}d^{-1}\cdot d_{13}, \qquad d_{13}=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=1,$$

$$\overset{*}{a}_{32}=(-1)^{3+2}d^{-1}\cdot d_{23}, \qquad d_{23}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=2+2=4,$$

$$\overset{*}{a}_{33}=(-1)^{3+3}d^{-1}\cdot d_{33}, \qquad d_{33}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1,$$

deci

$$\overset{*}{a}_{11}=\frac{3}{4}, \qquad \overset{*}{a}_{12}=-\frac{4}{4}=-1, \qquad \overset{*}{a}_{13}=-\frac{1}{4},$$

$$\overset{*}{a}_{21}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}, \qquad \overset{*}{a}_{22}=-\frac{4}{4}=-1, \qquad \overset{*}{a}_{23}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2},$$

$$\overset{*}{a}_{31}=-\frac{1}{4}, \qquad \overset{*}{a}_{32}=\frac{4}{4}=1, \qquad \overset{*}{a}_{33}=\frac{-1}{4}.$$

Deci

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -1 & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & 1 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Corolarul 7.2. Fie K un corp și $A\in\mathcal{M}_n(K)$. Atunci A este inversabilă dacă și numai dacă $\det A\neq 0$.

Teorema 7.3. (Regula lui Cramer). *Fie un sistem de n ecuații liniare cu n necunoscute cu coeficienți într-un corp K:*

$$(1)\quad \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ \dots\ a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ \dots\ a_{2n}x_n=b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\dots a_{nn}x_n=b_n. \end{cases}$$

Notăm cu $A=(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ *matricea coeficienților. Dacă* $d=\det A\neq 0$, *atunci sistemul* (1) *are o unică soluție dată de egalitățile:* $x_1=d_1\,d^{-1}$, $x_2=d_2d^{-1}$, ..., $x_n=d_nd^{-1}$, *unde*

$$d_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \dots a_{1n} \\ b_2 & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots\dots\dots \\ b_n & a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix},\quad d_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \dots a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots\dots\dots \\ a_{n1} & b_n & a_{n3} \dots a_{nn} \end{vmatrix}\quad \text{ş.a.m.d.}$$

Demonstrație. Sistemul (1) de ecuații îl punem sub forma matriceală:

$$(2)\qquad A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Dacă înmulțim la stînga cu A^{-1} egalitatea (2) și ținînd cont de asociativitatea produsului de matrice, obținem:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Din teorema 7.1 avem că $A^{-1}=(a^*_{ij})_{1\leq i,\,j\leq n}$, unde $a^*_{ij}=d^{-1}(-1)^{i+j}d_{ji}$; deci avem

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d^{-1}\sum\limits_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}d_{j1}\,b_j \\ d^{-1}\sum\limits_{j=1}^{n}(-1)^{2+j}d_{j2}\,b_j \\ \vdots \\ d^{-1}\sum\limits_{j=1}^{n}(-1)^{n+j}d_{jn}\,b_j \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d^{-1}\,d_1 \\ d^{-1}\,d_2 \\ \vdots \\ d^{-1}\,d_n \end{pmatrix}$$

și deci $x_1=d^{-1}d_1$, $x_2=d^{-1}d_2$, ..., $x_n=d^{-1}d_n$. ✳

§ 8. RANGUL UNEI MATRICE

În cele ce urmează matricele considerate sînt cu elemente dintr-un corp K (comutativ).

Fie $A=(a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n}}\in\mathcal{M}(m, n, K)$.

Dacă considerăm şirurile de numere $1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_p\leqslant m$ şi $1\leqslant j_1<j_2<\ldots<j_q\leqslant n$, putem construi o submatrice a matricei A, de tipul $p\times q$, astfel:

$$\begin{pmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} \ldots a_{i_1 j_q}\\ \vdots & \\ a_{i_p j_1} & a_{i_p j_2} \ldots a_{i_p j_q}\end{pmatrix}$$

adică este o matrice constituită din toate elementele matricei A care se găsesc la intersecţia liniilor $i_1, \ldots, i_p$ cu coloanele $j_1, \ldots, j_q$.

Se observă că în acest fel putem construi $C_m^p\times C_n^q$ submatrici de tipul $p\times q$, ale matricei A.

Vom numi *minor de ordinul* p $(p\geqslant 1)$ al matricei A, determinantul unei submatrici de tipul $p\times p$ al lui A.

Definiţia 8.1. Fie $A\in\mathcal{M}(m, n, K)$ o matrice nenulă cu m linii şi n coloane. Se numeşte *rangul matricei* A un număr natural $r>0$ avînd următoarele proprietăţi:

1. Există un minor de ordinul r al lui A, nenul.
2. Orice minor de ordin $>r$ este egal cu zero.

Numărul r se notează astfel $r=\text{rang } A$.

Dacă $A=0$, atunci punem prin definiţie rang $A=0$.

Vom da acum cîteva proprietăţi simple ale rangului unei matrici $A\in\mathcal{M}(m, n, K)$ care rezultă imediat din definiţia 8.1 şi din proprietăţile determinanţilor.

1) $0\leqslant \text{rang } A\leqslant \min(m, n)$.

2) $\text{rang } A=\text{rang } {}^tA$.

3) Rangul unei matrici nu se schimbă dacă permutăm liniile (respectiv coloanele) între ele.

4) Rangul unei matrici nu se schimbă dacă înmulţim o linie (sau coloană) cu un element nenul din corpul K.

5) $r=\text{rang } A$ dacă şi numai dacă există un minor de ordinul r nenul al lui A şi orice minor de ordinul $r+1$ al lui A este nul.

Pentru verificarea afirmaţiei 5) trebuie să arătăm că orice minor al lui A de ordin $s>r$ este nul. Într-adevăr, dacă $s=r+1$, afirmaţia rezultă din ipoteză. Dacă $s=r+2$ se ţine cont că orice determinant de ordinul $r+2$ dezvoltat după o linie este o combinaţie liniară de s determinanți de ordinul $r+1$ și deci acest minor este nul. În continuare se procedează prin recurență după s.

Alte proprietăți ale rangului unei matrici vor rezulta din teorema lui Kronecker pe care o vom prezenta în continuare.

Fie $A=(a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}}\in\mathcal{M}(m, n, K)$.

Vom nota cu $A_1, \ldots, A_m$ (respectiv $A^1, \ldots, A^n$) liniile (respectiv coloanele) matricei A.

Dacă $E=\mathcal{M}(m, 1, K)$ și $F=\mathcal{M}(1, n, K)$ este binecunoscut că E și F sînt K-spații vectoriale în care $\dim_K E=m$ și $\dim_K F=n$.

Se observă că $A_1, \ldots, A_m\in F$ iar $A^1, \ldots, A^n\in E$ și deci are sens să vorbim de subspațiul vectorial al lui F generat de elementele $A_1, \ldots, A_m$ notat $\langle A_1, \ldots, A_m\rangle$ precum și de subspațiul vectorial al lui E generat de elementele $A^1, \ldots, A^n$ notat $\langle A^1, \ldots, A^n\rangle$.

Cu aceste notații putem enunța:

Teorema 8.2. (Kronecker). rang $A=\dim_K\langle A^1, \ldots, A^n\rangle=$ $=\dim_K\langle A_1, \ldots, A_m\rangle$ *sau altfel spus rang A este egal cu numărul maxim de coloane (respectiv linii) care sînt liniar independente.*

Demonstrație. Fie $r=\text{rang}\, A$. Putem presupune că $A\neq 0$ (deoarece cazul $A=0$ este evident). Dacă $A\neq 0$, atunci $r\neq 0$ și atunci există un minor de ordinul r nenul.

Deoarece rangul unei matrici nu se schimbă dacă permutăm liniile (respectiv coloanele) între ele, putem presupune că submatricea lui A:

$$M=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r}\\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill}\\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rr}\end{pmatrix} \quad \text{are } \det M\neq 0$$

Pentru a arăta egalitatea $r=\dim_K\langle A^1, \ldots, A^n\rangle$ vom proba că $A^1, \ldots, A^r$ sînt liniar independente și este un sistem de generatori pentru subspațiul $\langle A^1, \ldots, A^n\rangle$.

Fie egalitatea $\alpha_1A^1+\alpha_2A^2+\ldots+\alpha_rA^r=0$. Rezultă clar că $\alpha_1M^1+\alpha_2M^2+\ldots+\alpha_rM^r=0$. Deoarece $\det M\neq 0$, putem aplica regula lui Cramer și rezultă că $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_r=0$.

Să dovedim că $A^1, \ldots, A^r$ este un sistem de generatori pentru subspațiul $\langle A^1, \ldots, A^n\rangle$. Este suficient să dovedim că orice A^j, cu $j>r$, este o combinație liniară de $A^1, \ldots, A^r$.

Considerăm matricea pătratică de ordinul $r+1$

$$B=\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1r} & a_{1j}\\ a_{21} & \ldots & a_{2r} & a_{2j}\\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill}\\ a_{r1} & \ldots & a_{rr} & a_{rj}\\ a_{i1} & \ldots & a_{ir} & a_{ij}\end{vmatrix}, \text{ unde } i \text{ este arbitrar}$$

Dacă $i \leqslant r$ avem det $B=0$ deoarece B are 2 linii egale; dacă $i > r$ avem det $B=0$ deoarece $r=\text{rang } A$, deci oricum ar fi i avem det $B=0$.

Pentru simplificare notăm cu d complementul algebric al lui a_{ij} în matricea B, cu $d_k(1 \leqslant k \leqslant r)$ complementul algebric al lui a_{ik}. Dezvoltînd det B după ultima linie avem $a_{i1}d_1 + a_{i2}d_2 + \ldots + a_{ir}d_r + a_{ij}d = 0$.

Cum $d \neq 0$, atunci $a_{ij} = -d^{-1}d_1a_{i1} - d^{-1}d_2a_{i2} - \ldots - d^{-1}d_ra_{ir}$ și deci $A^j = -d^{-1}d_1A^1 - \ldots - d^{-1}d_rA^r$, unde $d_1, d_2, \ldots, d_r$ nu depind de i. Deci $A^1, \ldots, A^r$ este un sistem de generatori pentru subspațiul $\langle A^1, \ldots, A^n \rangle$.

Analog se arată egalitatea rang $A = \dim_K \langle A_1, \ldots, A_m \rangle$.

Din teorema lui Kronecker rezultă următoarele proprietăți ale rangului unei matrici, care se adaugă la cele 5 proprietăți deja puse după definiția 8.1.

6) Rangul unei matrici A nu se schimbă dacă:

— la o linie (respectiv coloană) adunăm o altă linie (respectiv coloană) înmulțită cu un element din corpul K.

Într-adevăr, dacă A' este matricea care se obține din A adunînd la o linie o altă linie înmulțită cu un element, atunci este evident că subspațiul generat de liniile lui A este egal cu subspațiul generat de liniile lui A'.

Analog se demonstrează afirmația pentru coloane.

Corolar 8.3. *Determinantul unei matrici pătratice este nul dacă și numai dacă una dintre liniile (respectiv coloanele) sale este o combinație liniară de celelalte linii (respectiv coloane).*

Teorema lui Kronecker ne permite să calculăm rangul unei matrici în mod iterativ.

Fiind dată o matrice nenulă, aceasta are neapărat un minor de ordinul întîi nenul (putem lua orice element nenul al matricei).

Dacă am găsit un minor de ordinul k nenul, îl bordăm pe rînd cu elementele corespunzătoare ale uneia dintre liniile și uneia dintre coloanele rămase obținînd astfel toți minorii de ordinul $k+1$ care-l conțin. Dacă toți acești minori sînt nuli, rangul matricei este $r=k$.

Dacă însă cel puțin unul dintre aceștia (de ordinul $k+1$) este nenul, atunci reținem unul dintre ei și continuăm procedeul.

Numărul minorilor de ordinul $r+1$ care trebuie considerați este $(m-r)(n-r)$ (în loc de $C_m^{r+1} C_n^{r+1}$) reducîndu-se în mod substanțial numărul lor.

Exemplu. Să calculăm rangul matricei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 1 & -3 \\ 3 & 5 & 1 & 11 \end{pmatrix}$$

Se observă că minorul $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -9$ este nenul.

Dacă bordăm acest minor obţinem 2 minori de ordinul 3.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ şi } \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & -3 \\ 3 & 5 & 11 \end{vmatrix} = 0.$$

Cum aceşti 2 minori de ordinul 3 sînt nuli, din teorema lui Kronecker rezultă că rang $A=2$.

§ 10. SISTEME DE ECUAŢII LINIARE

În tot acest capitol K va desemna un corp comutativ. Fie sistemul de m ecuaţii cu n necunoscute

$$(1)\qquad (S)=\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}$$

unde a_{ij}, $b_i \in K$, oricare ar fi $i=1, \ldots, m$ şi $j=1, \ldots, n$. Dacă $b_1=$ $=b_2=\ldots=b_n=0$ sistemul (1) se numeşte *omogen*.

Sistemul (S) se numeşte *compatibil* dacă are cel puţin o soluţie. Este evident că orice sistem omogen este compatibil deoarece admite soluţia banală $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$.

Sistemul (1) se scrie concentrat sub forma:

$$(1') \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=b_i, \quad i=1, \ldots, m$$

Vom nota cu $A=(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}}$ matricea coeficienţilor sistemului (S), numită matricea sistemului iar cu A^e matricea care se obţine din A adăugîndu-i încă o coloană şi anume coloana $B=\begin{pmatrix} b_1\\ \vdots \\ b_m\end{pmatrix}$, adică

$$A^e=\begin{pmatrix} a_{11}\ldots a_{1n} & b_1\\ a_{21}\ldots a_{2n} & b_2\\ a_{m1}\ldots a_{mn} & b_n\end{pmatrix}$$

Matricea A^e se numeşte *matricea extinsă* a sistemului (S).

Dacă notăm cu $X=\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}$ matricea nedeterminatelor, sistemul (S) se scrie sub forma matriceală astfel:

$$(3) \qquad AX=B$$

sau dacă notăm cu $A^1, \ldots, A^n$ coloanele matricei A, atunci (S) se scrie şi astfel:

$$(4) \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i A^i = B.$$

Teorema 10.1. (Kronecker-Capelli). *Sistemul* (S) *este compatibil dacă şi numai dacă* rang $A=$ rang A^e.

Demonstraţie. Presupunem că sistemul (S) este compatibil; atunci există o soluţie $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ a sa. Folosind scrierea (4) a sistemului (S) avem că

$$B=\sum_{i=1}^{n} \alpha_i A^i \text{ şi deci } B \in \langle A^1, \ldots, A^n\rangle$$

de unde $\langle A^1, \ldots, A^n, B\rangle=\langle A^1, \ldots, A^n\rangle$, ceea ce implică

$$\dim_K\langle A^1, \ldots, A^n\rangle=\dim_K\langle A^1, \ldots, A^n, B\rangle.$$

Din teorema lui Kronecker rezultă că rang $A=$ rang A^e.

Invers, dacă $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A^e$, cum $\langle A^1, \ldots, A^n \rangle$ este un subspaţiu al spaţiului vectorial $\langle A^1, \ldots, A^n, B \rangle$, rezultă că aceste două spaţii vectoriale coincid, adică $\langle A^1, \ldots, A^n \rangle = \langle A^1, \ldots, A^n, B \rangle$. Deci $B \in \langle A^1, \ldots, A^n \rangle$, adică există $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ astfel încît $B = \alpha_1 A^1 + \alpha_2 A^2 + \ldots + \alpha_n A^n$. Aceasta ne arată că sistemul $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ este o soluţie a sistemului (S). ✱

În continuare, pentru simplificare, vom introduce cîteva notaţii:

$$K^n = \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \mid \alpha_i \in K\} = \mathcal{M}(1, n, K),$$

$$^nK = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \middle| \alpha_i \in K \right\} = \mathcal{M}(n, 1, K).$$

Dacă $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ este o matrice de tipul $m \times n$, putem să definim aplicaţia:

$$u \colon {}^nK \to {}^mK, \ u(x) = Ax, \text{ unde } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

este un element oarecare din ^nK.

Este evident că u este o aplicaţie liniară de spaţii vectoriale. Dacă notăm cu $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in {}^mK$, atunci mulţimea soluţiilor sistemului (S) este egală cu

$$u^{-1}(\{b\}) = \{\alpha \in {}^nK \mid u(\alpha) = b\}.$$

Se observă imediat că $\operatorname{Im} u = \langle A^1, \ldots, A^n \rangle$, adică subspaţiul generat de coloanele $A^1, \ldots, A^n$ ale matricei A.

Presupunem că sistemul (S) este omogen. În acest caz $b = 0$ şi deci mulţimea soluţiilor lui (S) este egală cu nucleul morfismului u, $\operatorname{Ker} u$ care este un subspaţiu vectorial al lui ^nK.

Cum $\operatorname{Im} u \simeq {}^nK / \operatorname{Ker} u$, atunci avem egalitatea:

$\dim_K \operatorname{Im} u = \dim_K {}^nK - \dim_K \operatorname{Ker} u = n - \dim_K \operatorname{Ker} u$ şi deci $\dim_K \operatorname{Ker} u = n - \operatorname{rang} A$.

Deci putem enunţa următorul rezultat:

Teorema 10.2. *Dacă sistemul (S) este omogen, atunci mulţimea soluţiilor lui (S) este un subspaţiu vectorial la lui ^nK de dimensiune egală cu $n - \operatorname{rang} A$.*

Din această teoremă rezultă imediat:

Corolarul 10.3. *Dacă (S) este un sistem omogen, atunci (S) are numai soluţia hanală $(0, 0 \ldots 0)$, dacă şi numai dacă $n = \operatorname{rang} A$.*

Cum mulţimea soluţiilor unui sistem omogen formează un spaţiu vectorial, are sens să vorbim de o bază a sa, care se va numi *un sistem fundamental de soluţii* al sistemului omogen dat.

Evident că un sistem omogen poate avea mai multe sisteme fundamentale de soluţii. Din teorema 10.2 rezultă că orice sistem fundamental de soluţii are $n-\text{rang } A$ elemente.

Presupunem acum că sistemul (S) este oarecare. Am văzut că mulţimea soluţiilor acestui sistem este egală cu $u^{-1}(\{b\})$. Presupunem că (S) este compatibil şi presupunem că $x_0=\begin{pmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix}$ este o soluţie particulară a lui (S).

Vom nota cu $x_0+\text{Ker } u=\{x_0+\alpha \mid \text{unde } \alpha\in\text{Ker } u\}$, unde, aşa cum am văzut, $\text{Ker } u$ este mulţimea soluţiilor sistemului omogen asociat lui (S).

Teorema 10.4. *Cu notaţiile de mai sus, dacă sistemul* (S) *este compatibil, atunci mulţimea soluţiilor sale este egală cu* x_0+ *mulţimea soluţiilor sistemului omogen asociat, unde* x_0 *este o soluţie particulară a lui* (S).

Demonstraţie. Fie α o soluţie a sistemului omogen asociat lui (S). Avem $u(\alpha)=0$. Cum $u(x_0)=b$, atunci $u(x_0+\alpha)=u(x_0)+u(\alpha)=b$ şi deci $x_0+\alpha$ este o soluţie a lui (S). Invers, fie y_0 o soluţie oarecare a lui (S). Cum $u(x_0)=b$ şi $u(y_0)=b$, obţinem că $u(x_0)=u(y_0)$ şi deci $u(y_0-x_0)=0$, de unde $\alpha=y_0-x_0\in\text{Ker } u$ este o soluţie a sistemului omogen asociat lui (S). Dar $y_0=x_0+\alpha$, ceea ce încheia demonstraţia. *

Corolarul 10.5. *Dacă sistemul* (S) *este compatibil, atunci el are o unică soluţie dacă şi numai dacă* $n=\text{rang } A$.

Corolarul 10.6. *Presupunem că* $m=n$. *Atunci sistemul* (S) *are o soluţie unică dacă şi numai dacă* $\det A\neq 0$. *(În acest caz soluţia se obţine cu regula lui Cramer).*

Teorema Kronecker-Capelli ne permite să decidem dacă sistemul (S) este compatibil sau nu, dar nu ne dă un mijloc practic de aflare a tuturor soluţiilor sistemului dat. De această problemă ne vom ocupa în continuare. Fie deci sistemul (S) compatibil.

Să presupunem că $\text{rang } A=\text{rang } A^e=r$. Cum $\text{rang } A=r$, matricea A conţine un minor de ordinul r nenul şi toţi minorii de ordinul $>r$ sînt zero. Făcînd o eventuală renumerotare a ecuaţiilor şi a nedeterminatelor din sistemul (S), putem presupune că acest minor nenul de ordinul r este determinantul matricei

$$P=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{pmatrix}$$

În acest caz det P se va numi *minor principal* al sistemului (S).

Asociem sistemului (S) sistemul

$$(S')=\begin{cases} a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+\ldots+a_{2n}x_n=b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1+\ldots+a_{rn}x_n=b_r \end{cases}$$

care are r ecuații și n nedeterminate.

Teorema 10.7. *Mulțimea soluțiilor sistemului* (S) *este egală cu mulțimea soluțiilor sistemului* (S').

Demonstrație. Este evident că orice soluție a lui (S) este o soluție și a lui (S'). Invers, fie $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ o soluție a lui (S'). Cum rang $A^e=r$, atunci din teorema lui Kronecker și din faptul că det $P\neq 0$, primele r linii ale matricei A^e formează o bază pentru subspațiul generat de toate liniile lui A^e. Deci orice altă linie a lui A^e este o combinație liniară de primele r linii ale lui A^e. Acest fapt ne arată imediat că $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ anulează orice ecuație a sistemului (S). ✱

Introducem următoarele notații.

$$X^P=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix};\ x_1, \ldots, x_r \text{ se vor numi } \textit{nedeterminate principale.}$$

$$X^S=\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix};\ \text{și } x_{r+1}, \ldots, x_n \text{ se vor numi } \textit{nedeterminatele secundare.}$$

De asemenea, vom considera și matricele

$$\mathcal{S}=\begin{pmatrix} a_{1r+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{2r+1} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{rr+1} & \ldots & a_{rn} \end{pmatrix},\quad B'=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_r \end{pmatrix}$$

Cu aceste notații sistemul (S') se scrie sub forma matriceală astfel:

$$PX^P+\mathcal{S}X^S=B'$$

Cum P este inversabilă, obținem imediat că

$$X^P=P^{-1}B'-(P^{-1}\mathcal{S})X^S \tag{4}$$

care constituie formula de rezolvare a unui sistem compatibil (S).

În cazul cînd (S) este omogen avem $B'=0$ și (4) se scrie sub forma

$$X^P=-(P^{-1}\mathcal{S})X^S, \tag{5}$$

care constituie formula de rezolvare a unui sistem omogen.

Formula (5) ne permite să obținem un sistem fundamental de soluții pentru un sistem omogen în felul următor: Dăm pentru nedeterminatele secundare următoarele valori: $x_{r+1}=1$, $x_{r+2}=\ldots=x_n=0$ şi din (5) obţinem în mod unic valorile $x_1=\lambda_1^1$, ..., $x_r=\lambda_r^1$ şi deci obţinem pentru sistemul omogen dat soluţia

$$\alpha_1=(\lambda_1^1, \lambda_2^1, \ldots, \lambda_r^1, 1, 0, \ldots, 0).$$

Acum dăm pentru nedeterminatele secundare valorile: $x_{r+1}=0$, $x_{r+2}=1$, $x_{r+3}=\ldots=x_n=0$ şi din (5) obţinem în mod unic valorile $x_1=\lambda_1^2$, ..., $x_r=\lambda_r^2$ şi deci obţinem pentru sistemul omogen dat soluţia:

$$\alpha_2=(\lambda_1^2, \ldots \lambda_r^2, 0, 1, 0, 0, \ldots 0).$$

Continuînd procedeul în final dăm nedeterminatelor secundare valorile: $x_{r+1}=\ldots=x_{n-1}=0$, $x_n=1$. Din formula (5) obţinem în mod unic valorile $x_1=\lambda_1^{n-r}$, $x_2=\lambda_r^{n-r}$, ..., $x_r=\lambda_r^{n-r}$ şi deci obţinem pentru sistemul omogen dat soluţia

$$\alpha_{n-r}=(\lambda_1^{n-r}, \ldots, \lambda_l^{n-r}, 0, 0, \ldots, 1).$$

Cu aceste notaţii putem enunţa rezultatul următor:

Teorema 10.8. *Dacă sistemul (S) este omogen, atunci $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-r}$ formează un sistem fundamental de soluţii pentru (S).*

Deci mulţimea soluţiilor sistemului (S) este mulţimea:

$$\{\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_{n-r}\alpha_{n-r} \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-r}\in K\}.$$

Demonstraţie. Se vede uşor că $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-r}$ sînt liniar independente peste K. Cum sînt în număr de $n-r$, rezultă că $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-r}$ formează o bază pentru spaţiul vectorial al tuturor soluţiilor sistemului (S) şi deci $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-r}$ este un sistem fundamental de soluţii.

Combinînd teorema 10.4 şi teorema 10.8 obţinem:

Teorema 10.9. *Fie (S) un sistem compatibil de ecuaţii liniare. Dacă $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-r}$ este un sistem fundamental de soluţii pentru sistemul omogen asociat, iar x_0 este o soluţie particulară a sistemului (S), atunci orice soluţie a lui (S) este de forma*

$$x_0+\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_{n-r}\alpha_{n-r}, \text{ unde } \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-r}\in K.$$

Mai mult, o soluţie particulară x_0 a lui (S) se obţine dînd valorile $x_{r+1}=\ldots=x_n=0$ şi din formula (4) obţinem valorile pentru nedeterminatele principale date de egalitatea:

$$X^0=P^{-1}B' \text{ unde } X^0=\begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ x_r^0 \end{pmatrix}$$