Для составления физической модели полета ракеты с Земли на Луну и обратно, с детальным выводом всех необходимых формул, будем опираться на полет аппарата "Зонд-5". Мы последовательно рассмотрим ключевые этапы: старт с Земли, вывод ракеты на низкую орбиту, маневр к Луне, маневр вокруг Луны, возвращение на Землю и посадку.

Старт ракеты с Земли

Первый этап — это запуск ракеты с Земли. Для этого используется второй закон Ньютона для движения ракеты, а также учёт изменения её массы на каждом этапе. Для ракеты, движущейся вверх, мы имеем уравнение второго закона Ньютона, учитывающее все силы, действующие на ракету:

$$m(t) \cdot \frac{dV(t)}{dt} = T(t) - F_{\text{грав}} - F_{\text{сопротивление}}$$

где:

$m(t)$ — масса ракеты в момент времени t,

$\frac{dV(t)}{dt}$ — ускорение ракеты,

$T(t)$ — сила тяги двигателя,

$F_{\text{грав}} = \frac{GM_{З}m(t)}{r(t)^2}$ — сила гравитационного притяжения Земли,

$F_{\text{сопротивление}} = \frac{1}{2}C_d\rho v(t)A$ — сила сопротивления воздуха, где:

C_d — коэффициент сопротивления,

ρ — плотность атмосферы,

$v(t)$ — скорость ракеты,

A — площадь поперечного сечения ракеты.

Изменение массы ракеты

Ракета состоит из нескольких ступеней, каждая из которых сжигает топливо. Масса ракеты изменяется во времени, особенно для каждой из ступеней. Масса ракеты в момент времени t для каждой ступени i будет:

$$m(t) = m_0 - \dot{m}_i t,$$

где:

m_0 — начальная масса ракеты,

$\dot{m}_i$ — скорость расхода топлива для i-й ступени.

Когда одна ступень заканчивает своё сгорание, её масса переключается на следующую ступень.

Первая космическая скорость

Для того чтобы ракета могла выйти на орбиту, она должна развить минимальную скорость для выхода из гравитационного поля Земли, которая называется первой космической скоростью:

$$v_{\text{перв. косм.}} = \sqrt{\frac{GM_3}{r}},$$

где:

G — гравитационная постоянная,

M_3 — масса Земли,

r — радиус орбиты.

Для низкой орбиты r составляет около 6378 км, и для этой скорости будет $v_{\text{перв. косм.}} \approx 7.9$ км/.

Оптимальный угол полета

Для того чтобы ракета поднималась в космос, нужно выбрать оптимальный угол подъема относительно горизонта. Обычно ракеты стартуют с углом около 5–10 градусов и постепенно увеличивают угол. Для начала можно использовать угловую траекторию с небольшим уклоном:

$$\theta = \arctan\left(\frac{g}{v_{\text{старт}}^2}\right)$$

где g — ускорение свободного падения, $v_{\text{старт}}$ — начальная скорость ракеты.

Время работы двигателя

Чтобы достичь орбитальной скорости, ракета должна работать некоторое время с максимальной тягой, с постепенным изменением скорости. Время работы двигателя для достижения орбиты:

$$t_{\text{двигателя}} = \frac{m_{\text{нач}} - m_{\text{конеч}}}{\dot{m}}$$

где $m_{нач}$ и $m_{конеч}$— начальная и конечная массы ракеты, $\dot{m}$ — скорость расхода топлива.

Для того чтобы рассчитать апогей траектории ракеты, используется формула:

$$h_{\max} = h_0 + \frac{v_0^2}{2g}$$

где:

$h_{\max}$ — максимальная высота (апогей),

h_0 — начальная высота (время старта),

v_0 — начальная скорость ракеты,

g — ускорение свободного падения (приблизительно $9.81\ \text{м}/\text{с}^2$).

Вывод ракеты на НОО Земли

После старта ракета выходит на низкую орбиту, где её скорость будет соответствовать орбитальной скорости. Формула орбитальной скорости для низкой орбиты Земли:

$$v_{\text{орб}} = \sqrt{\frac{GM_3}{r}}$$

где r — радиус орбиты.

Для низкой орбиты r≈6378 км, и орбитальная скорость будет около 7.8 км/с.

Период обращения

Период обращения ракеты вокруг Земли можно рассчитать по формуле Кеплера:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM_3}}$$

Манёвр в сторону Луны

Для того чтобы начать движение к Луне, ракете нужно выполнить импульс в нужный момент, чтобы выйти на эллиптическую орбиту с Земли, пересекающую орбиту Луны. Это делается с помощью манёвра Хоумана.

Трансферная орбита (манёвр Хоумана)

Для перехода с орбиты Земли на орбиту Луны ракете нужно перейти на эллиптическую орбиту, где перицентр будет на орбите Земли, а апоцентр — на орбите Луны.

Эллиптическая орбита описывается через параметр:

$$v_{\text{трансфер}} = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}$$

где:

$\mu = GM_{\text{З}}$,

r — радиус орбиты Земли,

a — большая полуось орбиты (среднее расстояние от Земли до Луны).

Расчёт импульса для манёвра

Чтобы выйти на эту орбиту, ракете нужно набрать скорость:

$$\Delta v = v_{\text{трансфер}} - v_{\text{орб}}$$

Манёвр вокруг Луны

Когда ракета достигает орбиты Луны, необходимо выполнить манёвр, чтобы войти в орбиту вокруг Луны.

Орбитальная скорость вокруг Луны определяется как:

$$v_{\text{Луна}} = \sqrt{\frac{GM_{\text{Л}}}{r_{\text{Луна}}}}$$

где $r_{\text{Луна}}$— расстояние от ракеты до Луны, $M_{\text{Л}}$ — масса Луны

Манёвр на снижение скорости

Для того чтобы ракета вошла в орбиту Луны, её скорость нужно уменьшить:

$$\Delta v_{\text{Луна}} = v_{\text{трансфер}} - v_{\text{Луна}}.$$

Возвращение на Землю

Для возвращения на Землю ракета должна выйти из орбиты Луны на гиперболическую траекторию, которая пересечет атмосферу Земли. Для ракеты, возвращающейся на Землю, скорость на перицентре, траектория рассчитывается как:

$$v_{\text{гипербола}} = \sqrt{2\mu \left(\frac{1}{r_З} - \frac{1}{r_{\text{перицентр}}} \right)}$$

где:

$\mu = GM_З$,

r — радиус орбиты Земли,

a — большая полуось орбиты (среднее расстояние от Земли до Луны)

Вход в атмосферу

Для входа в атмосферу ракета должна иметь оптимальный угол входа. Слишком маленький угол приведет к отскоку ракеты в космос, слишком большой — к сгоранию. Оптимальный угол зависит от скорости и высоты ракеты на входе в атмосферу.

Равновесие сил в процессе входа в атмосферу:

$$F_{\text{грав}} = F_{\text{сопр}}$$

Сила сопротивления рассчитывается как:

$$F_{\text{сопр}} = \frac{1}{2} C_D \rho v^2 A$$

где:

C_D — коэффициент сопротивления,

ρ — плотность атмосферы на данной высоте,

v — скорость ракеты относительно воздуха,

A — поперечная площадь ракеты.

Оптимальный угол: Оптимальный угол входа ракеты в атмосферу, в общем случае, можно приблизительно рассчитать с использованием формулы:

$$\theta_{\text{opt}} = \arcsin\left(\frac{v_{\text{orb}}}{v_{\text{entry}}}\right)$$

где:

v_{orb} — орбитальная скорость (скорость ракеты на орбите),

v_{entry} — скорость при входе в атмосферу.

в общем случае для большинства аппаратов, включая «Зонд-5», оптимальный угол составляет:

$$\theta_{\text{opt}} \approx 5 - 7^\circ$$

Безопасное приземление:

Космический аппарат, такой как «Зонд-5», при сплэшдауне (приземление на воду) должен иметь скорость порядка 10-15 м/с, чтобы избежать повреждений при ударе о поверхность воды.

Для упрощения можно записать закон замедления с учетом силы сопротивления в зависимости от массы аппарата:

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{2}C_D\rho v^2 A$$

После интеграции этого уравнения получим зависимость скорости от времени:

$$v(t) = v_0 \exp\left(-\frac{C_D\rho A}{2m}t\right)$$

где v_0 — начальная скорость при входе в атмосферу.

После того как аппарату удается замедлиться и выйти на высоту, на которой сопротивление атмосферы достаточно велико, включатся парашюты для ещё большего замедления. Использование парашютов можно моделировать следующим образом:

$$F_{\text{параш}} = C_{\text{para}} \cdot \rho \cdot v^2 \cdot A_{\text{para}}$$

где:

C_{para} — коэффициент сопротивления для парашютов (обычно около 1-1.5),

A_{para}— площадь раскрытого парашюта

Космический аппарат должен приземлиться на поверхность воды с безопасной скоростью, чтобы не разрушиться. Обычно, скорость удара о воду не должна превышать 6-8 м/с.

Для расчета безопасной скорости при сплэшдауне v_{sp} можно используем уравнение замедления с учётом парашютов и тормозных систем:

$$v_{\mathrm{sp}} = \sqrt{\frac{2mg}{C_D \rho A}}$$

Здесь:

g — ускорение свободного падения,

CD — коэффициент аэродинамического сопротивления для тормозных систем,

A — эффективная площадь тормозных поверхностей (например, парашютов),

ρ — плотность атмосферы на момент сплэшдауна.