VII семестр. Глава 1. Интегральные уравнения.

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (обл-ть)

$(Tu)(x) = \int\limits_\Omega \underbrace{K(x,y)}_{\text{ядро}} u(y)\,dy$

$u \in L_p(\Omega) \Rightarrow Tu \in L_p(\Omega) \quad 1 \le p < \infty$

$T: L_p \to L_p$ - непрер.

$\|Tu\|_p \le c\|u\|_p = c\left(\int\limits_\Omega |u(x)|^p dx\right)^{1/p} \quad \forall u.$

$\|T\| = \inf c = \sup\limits_{u \ne 0} \dfrac{\|Tu\|_p}{\|u\|_p}$

(инф. конст. в нер-ве $\|Tu\| \le c\|u\|_p$).

• Ф.А. I.1) Ω-огр., $K(x,y) \in C(\overline{\Omega \times \Omega})$, тогда $\forall u \in L_p(\Omega)$ $Tu \in C(\Omega) \subset L_p(\Omega)$ и спр-во $\|Tu\|_{C(\bar\Omega)} = \max\limits_{x \in \Omega} |Tu(x)| \le C\|u\|_p$

(теорема Арцела-Асколи)

2) $\{Tu \mid \|u\|_{L_p} \le \tilde C\}$ - предкомп. в $C(\bar\Omega)$ (т.е. $\overline{\{\ \}}$ - компакт)

$\forall \{Tu_j\}_{j=1}^\infty \subset \{Tu \mid \ldots\} \Rightarrow \exists u_{j_k} : Tu_{j_k}$ сх-ся в $C(\bar\Omega)$.

Тогда $T: L_p(\Omega) \to C(\bar\Omega)$ - компакт. оператор.

II. $\forall \Omega \subset \mathbb{R}^n$ (произв. обл-ть). $K(x,y) \in L_2(\Omega \times \Omega)$. $(p=2)$!

оператор Гильберта-Шмидта.

$\int\limits_\Omega\int\limits_\Omega |K(x,y)|^2 dx\,dy < \infty$, $\|K\|^2_{L_2(\Omega\times\Omega)}$

$T: L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ - компакт.

III. Тест Шура: $\forall \Omega \in \mathbb{R}^n$, п.в. $x \in \Omega$ $\int\limits_\Omega |K(x,y)|\,dy \le M_0$

п.в. $y \in \Omega$ $\int\limits_\Omega |K(x,y)|\,dx \le M_1$.

тогда $T: L_p(\Omega) \to L_p(\Omega)$.

Теорема. если равном. вып-ны нер-ва из III, тогда

$(Tu)(x) = \int\limits_\Omega K(x,y)u(y)\,dy$ (1) абс. сх-ся для п.в $x \in \Omega$,

если $u \in L_p(\Omega)$, $Tu \in L_p(\Omega)$, $\|Tu\|_p \le c\|u\|_p$.

Док-во: $\int\limits_\Omega |K(x,y)u(y)|\,dy$ (конечен ли в обл-ти?).

станд. прием нер-во Гельдера: $\int\limits_\Omega |fg|\,dx \le \left(\int\limits_\Omega |f|^p dx\right)^{1/p} \cdot \left(\int\limits_\Omega |g|^{p'} dx\right)^{1/p'}$

$\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right)$.

$f(y) = |K(x,y)|^{1/p} \cdot |u(y)|$

$g(y) = |K(x,y)|^{1/p'}$

$$\int_\Omega |K(x,y)u(y)|dy \le \underbrace{\left(\int_\Omega |K(x,y)|dy\right)^{1/p'}}_{\le M_0} \cdot \underbrace{\left(\int_\Omega |K(x,y)|\cdot|u(y)|^p dy\right)^{1/p}}_{I(x)} = M_0^{1/p'} \cdot I(x)^{1/p} < \infty \text{ (п.в. } x)$$

$I(x) < \infty$ (п.в. x), если $\int_\Omega I(x)dx < \infty$ инт.

(инт. всюду и может $=\infty$, но т.к. она положит., то можем инт. всюду).

$$\int_\Omega I(x)dx = \int_\Omega \left(\int_\Omega |K(x,y)|\cdot|u(y)|^p dy\right)^{1/p} dx = \int_\Omega dy\left(|u(y)|^p \int_\Omega |K(x,y)|dx\right) \le M_1 \int_\Omega |u(y)|^p dy =$$

по теор. Фубини - неотр. подинт. ф-ии и можем менять порядок интегр.

$= M_1 \|u\|^p_{L_p}$

$$\Rightarrow \int_\Omega I(x)dx \le \left(M_1 \|u\|^p_{L_p}\right)^{1/p}$$

$$|(Tu)(x)| \le \int_\Omega |K(x,y)|\cdot|u(y)|dy \le M_0^{1/p'} (I(x))^{1/p}$$

$$\int_\Omega |Tu(x)|^p dx \le \left(\int_\Omega M_0^{1/p'} I^{1/p}(x)\right)^p = \int_\Omega M_0^{p/p'} I(x)dx \le M_0^{\frac{p}{p'}} M_1 \|u\|^p_{L_p}$$

$\|Tu\|^p_{L_p} \le M_0^{p/p'} M_1 \|u\|^p_p$; $\|T\|_{p\to p} \le M_0^{1/p'} M_1^{1/p}$ (мы получили, что $Tu \in L_p$ и $\|Tu\|$ ограничен)

ч.т.д.

§1. Операторы со слабой особенностью.

Опр. Ω - огр. $\subset \mathbb{R}^n$; $K(x,y) = \dfrac{A(x,y)}{|x-y|^\alpha}$, $|A(x,y)| \le A_0$, $A(x,y) \in C(x \ne y)$.

ядро со слаб. особ.

! $\alpha < n$ (пока. степень < размер-ти пр-ва).

(чем больше α, если опять K уходит на ∞).

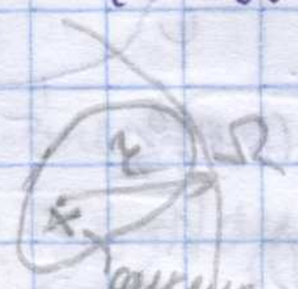
$\alpha = n$, то особ. не св. со слабой, сингулярные опер-ры).

(поэтому со слаб. особ.)

• Если ядро K - со слаб. особ., то соотв. опер-р со слаб. особ.

Лемма. Ω - огр. $\subset \mathbb{R}^n$, $(0 \le \alpha < n)$, $\exists C: \int_\Omega \dfrac{dy}{|x-y|^\alpha} < C$ равном. по $x \in \Omega$ ($x \in \mathbb{R}^n$).

Док-во:



(подинт. ф-ия неотр., если увелич. обл-ть, то инт-л увелич.)

$\Omega \subset B(x,r)$

$\sup_x r = \sup_{x,y\in\Omega} |x-y| =$ (r - максим. расстояние м/у точками)

$$\int_\Omega \frac{dy}{|x-y|^\alpha} \le \int_{B(x,r)} \frac{dy}{|x-y|^\alpha} \le \int_{B(x)} \frac{dy}{|x-y|^\alpha} = \int_{B(0)} \frac{dz}{|z|^\alpha} = \operatorname{diam}\Omega = d$$

(тут $B(0,d)$, $z = x-y$). $\leq \int_0^d \left(\int_{|z|=r} \frac{dS(z)}{|z|^\alpha} \right) dr = \int_0^d |S_1| r^{n-\alpha-1} dr =$

$(n-\alpha>0)$ теор. Рубини $[\,|S_r| \cdot r^{-\alpha} = |S_1| \cdot r^{n-1} \cdot r^{-\alpha}\,]$

$= |S_1| \cdot \frac{r^{n-\alpha}}{n-\alpha} \Big|_0^d$

$\Rightarrow \int_\Omega \frac{dy}{|x-y|^\alpha} \leq \frac{|S_1| d^{n-\alpha}}{n-\alpha}$ ч.т.д.

Теорема 1 (об огр. опер-ра со слаб. особен.) T - интегр. опер-р со слаб. особ-тью $\Rightarrow$ T - огр. в $L_p(\Omega)$, $T: L_p \to L_p$.

Док-во: $\int_\Omega |K(x,y)| dy \leq M_0$ $\longrightarrow$ $\int_\Omega \frac{\overbrace{|A(x,y)|}^{\leq A_0}}{|x-y|^\alpha} dy \leq A_0 \cdot \frac{|S_1| d^{n-\alpha}}{n-\alpha}$

$\int_\Omega |K(x,y)| dx \leq M_1$ (аналогич. для dx).

Следствие. $A(x,y) = 0$, если $|x-y| \geq \delta$.

$\int_\Omega |K(x,y)| dy \leq \int_{|x-y|<\delta} |\ldots| dy \leq C\delta^{n-\alpha}$ (меняем δ, не меняем A.) от размер., величч. $|A|$ (max), а от δ не зависит.

$\Rightarrow \|T\|_{p\to p} \leq C\delta^{n-\alpha}$

Теорема 2 T - интегр. опер. со слаб. особ. $\Rightarrow$ T - компакт. в $L_p(\Omega)$ (т.е. $\underbrace{B}_{\text{огр.}} \subset L_p \Rightarrow \overline{TB}$ - комп. в L_p).

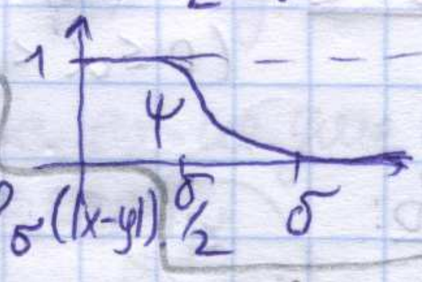
($\{u_j\} \subset L_p$, $\|u_j\|_p \leq C \Rightarrow \exists \{u_{j_k}\}$: $\{Tu_{j_k}\}$ - сх-ся в L_p)

Док-во: • Ф.А.: $\{T_j\}$ - послед. опер-ов в банах. пр-ве ($\in B(X)$), опер. компактны; $\exists T: T_j \to T$ и $\|T_j - T\| \to 0 \Rightarrow$ T - компактный.

для $\forall \delta > 0$ постр. ф-ию $\varphi(t) = \begin{cases} 1, & t > \delta \\ 0, & t < \delta/2 \end{cases}$

$\varphi = \varphi_\delta$

$\psi = \psi_\delta$ $\qquad \psi(t) = 1 - \varphi(t)$



T_δ - опер-р, у постр. по ядру $K_\delta(x,y) = \underbrace{\frac{A(x,y)}{|x-y|^\alpha}}_{K(x,y)} \cdot \varphi_\delta(|x-y|)$ (т.е. вырезали особенность).

и $K_\delta \in C(\Omega \times \Omega)$. $\Rightarrow T_\delta$ - комп.?

и $\|T - T_\delta\| \xrightarrow[\delta \to 0]{} 0$?

$T - T_\delta \longleftrightarrow \frac{A(x,y)}{|x-y|^\alpha} \overbrace{\psi_\delta}^{\leftrightarrow 1-\varphi_\delta}(|x-y|)$

~~если~~ $A_\delta(x,y)=0,\ |x-y|>\delta \Rightarrow \|T-T_\delta\| \le C\cdot\delta^{n-\alpha} \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0$

ч.т.д.

<u>Замечание</u> в L_p можно пользов-ся только выраж. (инт. можно забыть)

<u>Упр</u> $\alpha<n$?

если в Ω для какого-то x: $\int\limits_\Omega \frac{dy}{|x-y|^\alpha}<\infty \Rightarrow \alpha<n$ и инт-л равном. огр. по всем x.

§2 Равномерная сходимость интегралов.

$I(x)=\int\limits_\Omega F(x,y)\,dy$, $F(x,y)=\frac{A(x,y)u(y)}{|x-y|^\alpha}$ - мож со слаб. особ.

когда $I\in C(\Omega)$, непрер. в (·) x^*?

когда $I(x)\xrightarrow[x\to x^*]{} I(x^*)$?

Станд. прием: Теорема Лебега:

1) $F(x,y)\to F(x^*,y)$ п.в. y.

2) $|F(x,y)|\le \Phi(y)\in L_p(\Omega)$, $|x-x^*|<\delta$.

суммир. мажоранта

$|F(x,y)|=\left|\frac{A(x,y)u(y)}{|x-y|^\alpha}\right|<\Phi(y)$ $\forall x: |x-x^*|<\delta$, то $F(x,y)=\infty$, на всем шаре ($x=y$). - куда можем взять такой y.

и $\Phi(y)=\infty$ $\forall y: |y-x^*|<\delta \Rightarrow$ суммир. мажор. нет.

$\Rightarrow$ нельзя пользов-ся теор. Лебега.

Другой путь: $|I(x)-I(x^*)|<\varepsilon$? $|x-x^*|<\delta$

мала перемещ. фиг.

мала, т.к. мал. обл. опред.

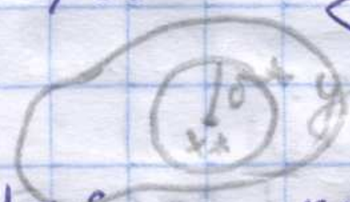
(*) $\left|\int\limits_\Omega F(x,y)dy-\int\limits_\Omega F(x^*,y)dy\right| \le \underbrace{\left|\int\limits_{\Omega\setminus B(x^*,\delta^*)} F(x,y)-F(x^*,y)\,dy\right|}_{(1)}+\underbrace{\int\limits_{\Omega\cap B(x^*,\delta^*)}|F(x,y)|dy}_{(2)}+\underbrace{\int\limits_{\Omega\cap B(x^*,\delta^*)}|F(x^*,y)|dy}_{(3)}$

фиксир. δ^*: $\Omega\cap B(x^*,\delta^*)$

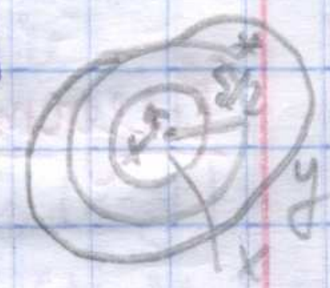
$<\varepsilon,\ |x-x^*|<\delta$

т.к.

[$F(x,y)$ - непрер. по x, если $x\ne y$; скажем, что $F(x,y)\underset{x\to x^*}{\rightrightarrows} F(x^*,y)$ равном по y, если $|x^*-y|>\delta^*$, $|F(x,y)-F(x^*,y)|\le \varepsilon/|\Omega|$.]



[$|F(x,y)-F(x^*,y)|<\varepsilon$ $|x-x^*|<\delta$ - равн. по y: $|y-x^*|>\delta^*$, $\delta<\delta^*/2$.]



<u>Опр</u> Интеграл $I(x)$ - сх-ся равном. в (·) x^*, если $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta^*>0$ $\int\limits_{\Omega\cap B(x^*,\delta^*)}|F(x,y)|dy<\varepsilon$ для $\forall x: |x-x^*|<\delta^*$

<u>Теорема</u> Если инт-л $I(x)$ - сх-ся равном. в (·) x^*, то $I(x)$ - непрер. в (·) x^*, $I(x)\xrightarrow[x\to x^*]{} I(x^*)$.

Док-во: нужно док-ть, что $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta: |x-x^*|<\delta \Rightarrow |I(x)-I(x^*)|<\varepsilon$.

1) $\exists\, \delta^*$: в ф-ле * ин-лы (2), (3) $<\varepsilon$, $|x-x^*|<\delta^*$
2) по δ^*, ε строим δ: $\delta<\delta^*/2$, что вып-ся условие ★
тогда $\left|\int_\Omega F(x,y)dy - \int_\Omega F(x^*,y)dy\right| < 3\varepsilon$.

(В ин-ле (1) в * подынтегр. ф-ия будет мала, за счет близости x и x^*). ч.т.д.

Замечание. 1) Опр. $I(x)$ сх-ся равном. на $\tilde\Omega\subset\Omega$ (может $=\Omega$), если есть равном. сх-ть в $\forall (\cdot)\, x^*\in\tilde\Omega$.

2) Теорема. Если $I(x)$ сх-ся равном. на мн-ве $\tilde\Omega$, то $I(x)$ непрер. на $\tilde\Omega$.

Теорема. Если ф-ия $u\in L_\infty(\Omega)$ ($|u(x)|\le C$ п.в.) (огран), тогда
$$\int_\Omega \underbrace{\frac{A(x,y)}{|x-y|^\alpha}}_{\text{ядро со слаб. особ.}} u(y)dy \text{ - сх-ся равном. в } \Omega.$$

Док-во: нужно увидеть, что $\int_{\Omega\cap B(x^*,\delta^*)} |\ldots|dy<\varepsilon$. (вместо всей обл-ти Ω, от этого ин-л только уменьш. (получен.))

оценим интеграл: $\int_{\Omega\cap B(x^*,\delta^*)} \frac{|A(x,y)|\,|u(y)|}{|x-y|^\alpha}dy \le A_0\cdot C\int_{B(x^*,\delta^*)}\frac{dy}{|x-y|^\alpha}dy$ (<).

$|A(x,y)|\le A_0$
$|u(y)|\le C$

[$B(x^*,\delta^*)\subset B(x,2\delta^*)$ (просто по нер-ву треуг-ка)]

т.к.

(<) $A_0C\int_{B(x,2\delta^*)}\frac{dy}{|x-y|^\alpha} \le \frac{|S_1|(2\delta^*)^{n-\alpha}}{n-\alpha}<\varepsilon$ ч.т.д.

(сопас. меньше)

Следствие 1. Если $u\in L_\infty(\Omega)$, опер. T со слаб. особ., тогда $Tu\in C(\bar\Omega)$

2. $T: L_\infty(\Omega)\to C(\bar\Omega)$ - непрер. опер-р.
опер. со слаб. особ.

Док-во: 1 - это след. предыд. 2-х теорем.

2: нужно док-ть, что $\|Tu\|_{C(\bar\Omega)}\le C\|u\|_\infty$

$$\|Tu\|_{C(\bar\Omega)} = \max \left| \int_\Omega \frac{A(x,y)}{|x-y|^\alpha} u(y)\,dy \right| \le A_0 \cdot C \max_{x\in\bar\Omega} \int_\Omega \frac{dy}{|x-y|^\alpha} \le A_0 \frac{|S_1| d^{n-1}}{n-\alpha} \|u\|_\infty$$

шкалы Гёльдеровой непрерывности

$|u(y)| \le C$ п.в. $\le \frac{|S_1| d^{n-\alpha}}{n-\alpha}$

$[\|u\|_\infty = \inf\{c \mid |u(y)| \le c\}]$

$$\|T\|_{L_\infty \to C} \le \frac{A_0 \cdot |S_1| d^{n-\alpha}}{n-\alpha}$$ ч.т.д.

Замечание. Если $A(x,y)=0$, если $|x-y|>\delta$, тогда $\|T\| \le \frac{A_0 |S_1| \delta^{n-\alpha}}{n-\alpha}$

(по значениям инт-ла будет 0)

Теорема. (Упр.) Опер. со слаб. особ. T, тогда $T: L_\infty \to C$ - компактен.

§3. Непрерывность решений интегральных уравнений

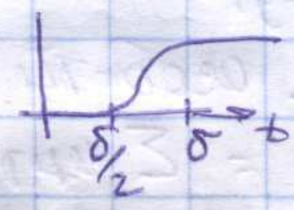
H-гильб. пр-во; T-комп. в H; $u - Tu = f$ (есть теор. Фредгольма о разреш-ти этих ур-ий).

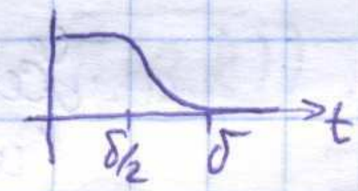
$H = L_2(\Omega)$, T-линеар. опер-р со слаб. особ., комп. в L_2

(всегда опр. ф-ия опер. T переслов. в непрер.)

Когда $u \in C(\bar\Omega)$, то $f \in C(\bar\Omega)$

Теорема. Если $f \in C(\bar\Omega)$, то $\forall$ L_2-решение непрер.

Док-во: $\forall$ ф-ии $\varphi_\delta(t)$: 

, $\psi_\delta(t)$: 

$\psi_\delta(t) = 1 - \varphi_\delta(t)$

$T = T_1 + T_2$, $T_1 \leftrightarrow \frac{A(x,y)\varphi_\delta(|x-y|)}{|x-y|^\alpha}$, $T_2 \leftrightarrow \psi_\delta$.

есть ур-ие: $u - T_1 u - T_2 u = f$ (знаем, что $u \in L_2(\Omega)$)

T_1 - имеет непрер. ядро (т.к. φ_δ убывает) особ.

$T_1 u \in C(\Omega)$

в итоге получили: $u - Tu = f \Leftrightarrow u - T_2 u = \tilde f$, $\tilde f = f + T_1 u$.

т.е. $u - Tu = f$ ($T \sim T_2 \leftrightarrow A(x,y) = 0, |x-y| > \delta$).

вспомним: $\|T\|_{L_p \to L_p}$ была оценка, а у нас $\|T\|_{L_2 \to L_2} \le \underbrace{(M_0 M_1)^{1/2}}_{\le C\delta^{n-\alpha}}$

скажем, что $\|T\|_{L_2 \to L_2} < 1$ (оператор сжатие).

$u = f + Tf + T^2 f + \ldots$ - сх-ся в $L_2(\Omega)$.

реш-ие $u = \sum_{k=0}^{\infty} T^k f$

$f \in C(\bar\Omega)$, $T: C(\bar\Omega) \to C(\bar\Omega)$, тогда $Tf \in C(\bar\Omega)$, $T^k f \in C(\bar\Omega)$ => реш-ие u - это

сумма ряда из непрер. ф-ий. Проверим, что $\sum T^k f$ сх-ся в $C(\bar{\Omega})$, т.е. равномер.

($u_k \in X$ ряд в бан. пр-ве)

(Для сх-ся равном., т.е. абсол.): $\sum u_k$ - сх-ся абсол. : $\sum \|u_k\|_X < \infty$
(если ряд сх-ся абсол. в банах. пр-ве, то он сх-ся в этом пр-ве).

Нужно добиться: $\sum \|T^k f\|_{C(\bar{\Omega})} < \infty$

$\|T^k f\| \le \|T\| \cdot \|T^{k-1} f\| \le \ldots \le \|T\|^k \|f\|$,

$\|T\|_{C(\bar{\Omega}) \to C(\bar{\Omega})} \le \tilde{C} \delta^{n-\alpha} < 1$ — зависит от обл-ти.

можно уменьшить δ, тогда нам ряд будет мажорир. геометр. прогр.

$$\sum \|T^k f\|_{C(\bar{\Omega})} \le \|f\| \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \|T\|^k}_{} \frac{1}{1-\|T\|}$$

ч.т.д.

Упр. Это теорема о сущ. реш-ия или нет?

Замечание. У нас будет вместо обл-ти пов-ть ($\Omega \to S$).

$$(Tu)(x) = \int_S \frac{A(x,y)}{|x-y|^\alpha} u(y)\, dS$$

Условие слаб. особ-ти: $\alpha < \dim S$.
(инт-л пов-ти = $\sum$ инт-ов по пл. тел).

Глава 2. Теория потенциалов.

§1 Объемный потенциал.

$$W^\rho(x) = -\int_\Omega \mathcal{E}(x-y)\rho(y)\,dy$$ (работа для приведения единич. заряда из ∞ в т. x)

$$\mathcal{E}(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{|S_1|(n-2)|z|^{n-2}}, & n \ge 3 \\ -\dfrac{1}{2\pi} \ln|z|, & n = 2 \end{cases}$$

ρ - плотность потенциала
$\rho \in L_\infty(\Omega)$ - огранич.

Ω - огранич. обл-ть $\subset \mathbb{R}^n$. 1) $W^\rho(x)$ - определен всюду в $\mathbb{R}^n$, $x \in \bar{\Omega}$;

$$\tilde{\rho} = \begin{cases} \rho(y), & y \in \Omega \\ 0, & y \notin \Omega \end{cases}$$

тогда $W^\rho(x) = \int_{B(0,R)} \mathcal{E}(x-y)\tilde{\rho}(y)\,dy$

(тогда возникает опр-р со слаб. особ.)

если $n \ge 3 \Rightarrow \alpha = n-2 < n$
если $n = 2$ - тоже слаб. особ. (почему?).

Тогда $W^\rho(x) \in C(R^n)$ (непрер. в шаре, а радиус любой)

$W^\rho(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \Omega)$ (вне обл-ти, т.к. $\mathcal{E}(x-y) \in C^\infty$ по x для $\forall y \in \Omega$)

$\Delta W^\rho(x) = 0$, $x \notin \overline{\Omega}$

<u>Упр</u> провер. повед. на бесконечности: $n \geq 3 \Rightarrow W^\rho(x) \xrightarrow[|x| \to \infty]{} 0$, $W^\rho(x)$ - гармон. вне Ω.

$n = 2$ $W^\rho(x)$ - прав. повер. на $\infty \Leftrightarrow \int_\Omega \rho(y)dy = 0$. ограничч.

<u>Утв</u> $\rho \in L_\infty(\Omega) \Rightarrow W^\rho(x) \in C^1(R^n)$.

<u>Док-во</u>: проверим, что $W^\rho(x) \in C^1(B(0,R))$ (непрер. дифф. в области).

заключим обл-ть в шар и проверим, что $W^\rho(x) \in C^1$ в шаре.

$$\partial_{x_j} W^\rho(x) = -\int_\Omega \partial_{x_j} \mathcal{E}(x-y)\rho(y)dy$$

↳ ($n \geq 3$, $\mathcal{E}(x-y)$ - однор по $x-y$ степени $(n-2)$)

$\partial_{x_j} \mathcal{E}$ - однор. степени $(n-1)$

$$|\partial_{x_j} \mathcal{E}(x-y)| \leq \frac{C}{|x-y|^{n-1}} \quad (\alpha < n)$$

остается гарант. со слаб. особ., а оно непрер.

$\rho \mapsto \partial_{x_j} W^\rho$

непр. $L_\infty \to \mathbb{C}$ в $C(B(0,R))$, тогда $W^\rho(x) \in C^1(\overline{B(0,R)})$ <u>ч.т.д.</u>

<u>Теорема</u> если $\rho \in C^1(\overline{\Omega})$, $\underbrace{\partial\Omega}_{=S} \in C^2$, тогда $W^\rho(x) \in C^2(\Omega)$.

<u>Док-во</u>: $\partial_{x_j} W^\rho(x) = \int_\Omega \underbrace{\partial_{x_j} \mathcal{E}(x-y)}_{-\partial_{y_j}\mathcal{E}(x-y)} \rho(y)dy = \int_\Omega \mathcal{E}(x-y)(\partial_{y_j}\rho)(y)dy - \int_S \mathcal{E}(x-y)\rho(y)\cos(\nu, y_j)dS(y)$

т.к. обл. с шар. грам. то интегр. по частям. ρ - непр.

$= -W^{\rho_{y_j}}(x)$

$\in C(\Omega)$

$\rho_{y_j} \in L_\infty(\Omega)$

$\in C(\Omega)$ пока x и y не встречаются (x - внутри, y - на грак.)

если проц. класса C^1, то сама ф-ия класса C^2. <u>ч.т.д.</u>

$\Delta W^\rho(x) = ?$ (опер. Лапласа от объемного потенциала)

Раньше было: $u \in C_0^\infty(\Omega)$, $u(x) = -\int_\Omega \mathcal{E}(x-y)\Delta u(y)dy$

$W^{\Delta u} = u$.

$u \xmapsto{\Delta} \Delta u \xrightarrow{W} W^{\Delta u} = u$, а нам надо $\rho \xmapsto{W} W^\rho \xmapsto{\Delta} \Delta W^\rho$

Теорема. Если $W^\rho \in C^2(\Omega)$, то $\Delta W^\rho = \rho$ в Ω.
($W^\rho \in C^2(\Omega)$, если $\rho \in C^1(\bar{\Omega})$).

Док-во: $\forall u \in C_0^\infty(\Omega)$, $\int\limits_\Omega u(x)\Delta W^\rho(x)dx =$ (интегр. по частям) =

(отдалена от границы) => нет проблем у ΔW^ρ

= (по ф-ле Грина: $\int\limits_\Omega u\Delta v - v\Delta u\,dx = \int\limits_\Omega u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu}\,dS = 0$,

$u \in C_0^\infty(\Omega, v \in C^2(\Omega))) = \int\limits_\Omega \Delta u(x) W^\rho(x)dx = \int\limits_\Omega \Delta u(x)\left(-\int\limits_\Omega E(x-y)\cdot\right.$

$\left.\cdot\rho(y)dy\right)dx = \int\limits_\Omega dy\left(\rho(y)\underbrace{\left(-\int\limits_\Omega E(x-y)\Delta u(x)dx\right)}_{u}\right)$

получим: $\int\limits_\Omega u(x)\Delta W^\rho(x)dx = \int\limits_\Omega \rho(y)u(y)dy$

$\int\limits_\Omega u(x)\left(\Delta W^\rho(x) - \rho(x)\right)dx = 0$

ч.т.д.

Комментарии: это нужно для решения неоднор. ур-ия!

$\Delta u = f$, $u|_S = \varphi$ $\longrightarrow$ $u = W^f + v$, если $W^f \in C^2$, тогда Π — частное решение неодн. ур-ия; тогда останется $\Delta v = 0$, $v|_S = \varphi - W^f|_S = \tilde{\varphi}$.

$f \in C^1$ — достат. усл-ие для $W^f \in C^2$; но очень жесткое условие.

если $f \in C^l \not\Rightarrow W^f \in C^{l+2}$ (в других классах ф-ий объемный интеграл повышает гладкость на 2 единицы)

если $f \in C^{l,\alpha}$ (ф-ии f — к классу Гельдеровских ф-ий с показателем α).

$l = 0$ $|f(x) - f(y)| \le C|x-y|^\alpha$ $0 < \alpha \le 1$ ($\alpha = 1$, то пр-во Липшица)
$0 < \alpha < 1$.

Вам заранее нужно подбирать конкрет. пр-ва функций.

если $f \in C(\Omega)$, то $W^f \in C^{1,\alpha}$.

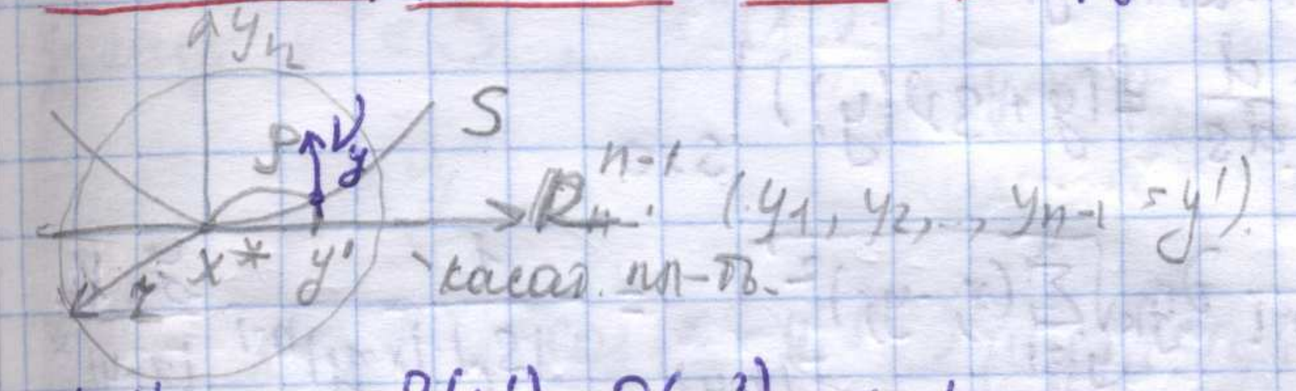
§2. Свойства поверхности класса C^2

$S \in C^2$, $S: \omega(x) = 0$, $\omega \in C^2$
$\omega_x|_S \ne 0$.

по теор. о неяв. ф-ии: локально, в окрест. $\forall$ точки, $x_n = f(x_1, \dots, x_{n-1})$
$f \in C^2$
$x_1, \dots, x_{n-1} = x' \in \mathbb{R}^{n-1}$

если точка $x^* \in S$, то можно взять шарик $B(x^*, r)$ тогда ~~пов~~ в нем пов-ть S будет графиком.

Локальная (местная) сист. координат:



$S: y_n = f(y')$, $f \in C^2(|y'|<r)$.

$f|_{y'=0} = 0$, $\nabla_{y'} f|_{y'=0} = 0$.

$|y'| = \rho$ $\quad f(y') = O(\rho^2)$ $\quad$ (y' - нуль 2-ого порядка).

$\nabla f(y') = O(\rho)$

$w(y) = y_n - f(y') = 0$

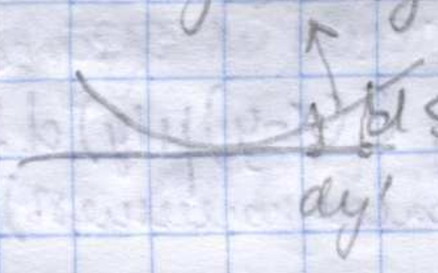
$w_y = (\underbrace{-f_{y_1}, -f_{y_2}, \dots, -f_{y_{n-1}}}_{\in \mathbb{R}^{n-1}}, \underbrace{1}_{w_{y_n}})$ - нормаль (но не единич.)

$\nu_y = \dfrac{(-f_{y'}, 1)}{\sqrt{1+|f_{y'}|^2}}$ - единич. нормаль

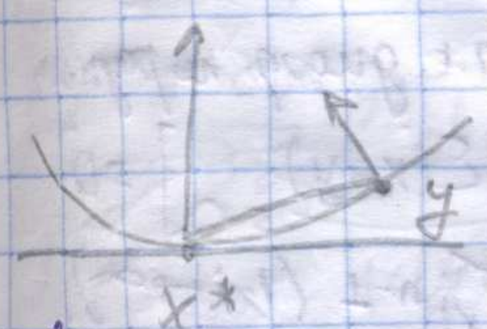
$|(\nu_y)_n| \geq \frac{1}{2}$

n-ая компон. нормали не может быть сильно маленькой.

Это нужно для интегрир. по поверхности.



$dS = \dfrac{dy'}{|\cos(\nu_y, y_n)|} \leq 2\,dy'$ $\quad \geq \frac{1}{2}$



Примерим за углом м/у вектором нормали и $(x^* - y)$.

Лемма $\cos(x^* - y, \nu_y) = O(\rho)$ $\quad \rho \to 0$. $\quad \dfrac{|\cos(x^* - y, \nu_y)|}{|y'|} \leq C$ $\quad |y'| < r$.

Док-во: $\cos(x^* - y, \nu_y) = \dfrac{(-y, \nu_y)}{|y| \cdot |\nu_y|} = -\sum_{k=1}^{n} y_k (\nu_y)_k \cdot \dfrac{1}{\sqrt{\sum y_k^2}} = \dfrac{-\sum_{k=1}^{n-1} y_k(-f_{y_k}) + y_n}{\sqrt{|y'|^2 + y_n^2}}$ (*)

$\overset{0}{=}$ в местной сист. коорд.

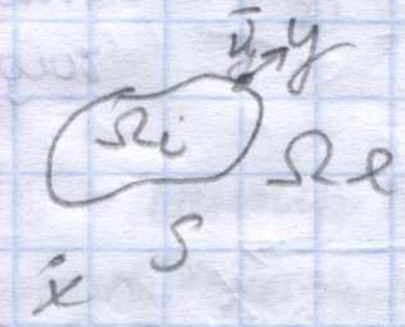
$(y_n = f(y') = O(\rho^2)$, $|y_k| \leq \rho$, $(-f_{y_k}) = O(\rho))$

(*) $\dfrac{O(\rho^2)}{\underbrace{\sqrt{|y'|^2 + y_n^2}}_{\geq \rho}} \leq O(\rho^2)/\rho = O(\rho)$

ч.т.д.

§3. Потенциал двойного слоя.

$$U^{\mu}(x) = \int_S \frac{\partial \mathcal{E}(x-y)}{\partial \nu_y} \underbrace{\mu(y)}_{\text{плотность потенциала}} dS(y)$$



$n \geq 3 \quad \mathcal{E}(x-y) = \frac{1}{|S_1|(n-2)|x-y|^{n-2}}$ $\quad$ S - замкн. пов-ть $\in C^2$

$$\frac{\partial f}{\partial \nu_y} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_k} (\nu_y)_k = \frac{d}{ds} f(y + s\nu(y))\Big|_{s=0}$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}(x-y)}{\partial y_k} = -\frac{1}{|S_1|\,|x-y|^{n-1}} \partial_{y_k} \underbrace{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(x_j-y_j)^2}}_{|x-y|} = -\frac{1}{|S_1|\cdot|x-y|^{n-1}} \frac{y_k - x_k}{|x-y|} =$$

$$= \frac{(x_k-y_k)/|x-y|}{|S_1|\cdot|x-y|^{n-1}}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\mathcal{E}(x-y) = \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k-y_k}{|x-y|}\nu_{y_k}}{|S_1|\cdot|x-y|^{n-1}}$$

в результате: $\underbrace{U^{\mu}(x) = \frac{1}{|S^{n-1}|}\int_S \frac{\cos(x-y,\nu_y)}{|x-y|^{n-1}}\mu(y)\,dS(y)}$ ★

(почему на пл-ти будем то же самое)

Св-ва: 1) $U^{\mu}(x) \in C^{\infty}(R^n \setminus S)$, $\Delta U^{\mu}(x) = 0$, $x \notin S$. (достат., чтобы кратность была огранич. ф-ией).

в ★ будет огранич. ф-ие производ. по x.

Док-во:

$$\Delta U^{\mu}(x) = \int_S \Delta_x \frac{\partial}{\partial y}\mathcal{E}(x-y)\mu(y)\,dS(y) = \Big[\text{(т.к. дифф. по разным перем, то их можно поменять)} = \frac{\partial}{\partial \nu_y}\underbrace{\Delta_x \mathcal{E}(x-y)}_{=0}\Big] = 0$$

2) Правильное поведение на ∞: $|U^{\mu}(x)| \leq \frac{C}{|x|^{n-1}}$ $(|x| \to \infty)$.

Док-во: $\frac{1}{|x-y|^{n-1}} \leq \frac{C}{|x|^{n-1}}$ (x уходит в ∞, а y ост. на пов-ти S)

$|x-y| \geq |x| - |y| \geq \frac{1}{2}|x|$, если $|x| > 2|y|$ $\left(|y| < \frac{|x|}{2}\right)$.

$$|U^{\mu}(x)| \leq \frac{1}{|S^{n-1}|}\cdot \underbrace{|S|}_{\text{площадь пов-ти}} \max \underbrace{|\mu(y)|}_{\text{почему пов-ти}} \cdot 2^{n-1} \cdot \frac{1}{|x|^{n-1}}$$

3) Потенциал двойного слоя - гармонический в Ω_i, в Ω_e.

Теорема. Если $\mu \in L_{\infty}(S)$, тогда $U^{\mu}(x)$, $x \in S$ интеграл

абсолютно сх-ся, $u^\mu(x)|_S \in C(S)$ $\quad$ $u^\mu(x)|_S$ - прямое значение потенц. двойн. слоя.

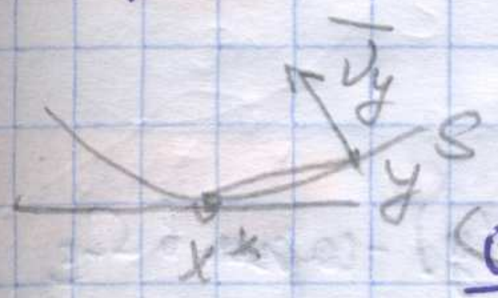
$$\int_\Omega \frac{dy}{|x-y|^\alpha} < \infty \iff \alpha < n = \dim\Omega$$

$\dim S = n-1$; $|\int .| \le \frac{c}{|x-y|^\alpha}$ $\alpha < n-1$.

фиксир. $x^* \in S$, $u^\mu(x^*) = \int$ плохо $+ \int$ не хорошо, т.к. нет особен.

$\int_{S\cap|y-x^*|<r}$ окр-ть x^* $\quad$ $\int_{S\cap|y-x^*|>r}$ вне окр-ти x^*

↳ нужен смеш. сист. координат.



$$\frac{\cos(x^*-y,\nu_y)}{|x^*-y|^{n-1}}\mu(y)\,dS(y) \le C\int_{|y'|<r}\frac{dy'}{|y'|^{n-2}}$$

$dS(y) = \frac{dy'}{|\cos(\nu_y, y_n)|} = O(|y'|)$, $|x^*-y| \ge |y^{n-1}|$

$\mu \longmapsto u^\mu(x)|_S$ - интегр. опер-р на S.

перевод огранич. в непрер. ф-ию.

Интегр. опер-р со слаб. особ. ($\alpha = n-2$). $L_\infty(S) \to C(S)$.

$\Rightarrow$ интегр. двойного слоя пр-ся непрер. функции.

ч.т.д.

§4. Интеграл Гаусса

плотность

$\mu(y) \equiv 1$ $\quad$ $u^1(x) = \frac{1}{|S^{n-1}|}\int_S \frac{\cos(x-y,\nu_y)}{|x-y|^{n-1}}dS(y)$ (легко вычисл.)

1) $x \in \Omega_e$ (фиксир.) $v(y) = \mathcal{E}(x-y)$, $y \in \Omega_i \cup S$ $\Rightarrow v \in C^\infty(\bar\Omega_i)$, $\Delta v = 0$ в Ω_i

$\Rightarrow$ можно написать ф-лу по сред. ф-л Грина: $\int_{\Omega_i}\Delta v(y)dy = \int_S \frac{\partial v}{\partial\nu_y}(y)dS(y)$

$\Rightarrow \int_S \frac{\partial v(y)}{\partial\nu_y}dS(y) = 0$, $v = \mathcal{E}(x-y) \Rightarrow u^\mu(x) \equiv 0$.

2) $x \in \Omega_i$ $\quad$ $v(y) = \mathcal{E}(x-y)$ - р-ие в Ω_ε. $\quad$ $\Omega_\varepsilon = \Omega_i \setminus B(x,\varepsilon)$.

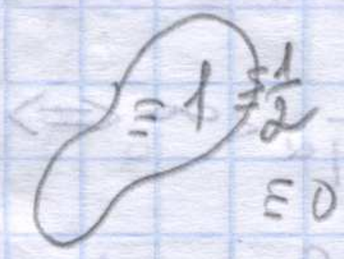
$v \in C^\infty(\bar\Omega_\varepsilon)$, $\Delta v(y) = 0$

$$\int_{\partial\Omega_\varepsilon}\frac{\partial v}{\partial\nu_y}dS(y) = 0, \quad \underbrace{\int_S \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\nu_y}(x-y)dS(y)}_{u^1(x)} + \int_{S_\varepsilon}\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\nu_y}(x-y)dS_\varepsilon(y) = 0$$

$$\frac{\partial\mathcal{E}(x-y)}{\partial\nu_y}\Big|_{S_\varepsilon} = -\frac{\partial\mathcal{E}(r)}{\partial\nu_y}\Big|_{r=\varepsilon} = \left[(n\ge 3) = \left(\frac{1}{|S_1|(n-2)r^{n-2}}\right)' = -\frac{1}{|S_1|r^{n-1}}\right] = +\frac{1}{|S_1|\varepsilon^{n-1}} = +\frac{1}{|S_\varepsilon|}$$

$\Rightarrow u'(x) + (+1) = 0 \Rightarrow u'(x) \equiv -1,\ x \in \Omega_i$

3) Гранич. случай: $x \in S \Rightarrow u'(x) \equiv \frac{1}{2}$.



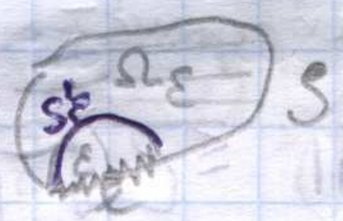
$$\int_\Omega \Delta u\, dy = \int_S \frac{\partial u}{\partial \nu} dS(y)$$

инт-л Гаусса

$u(y) = \mathcal{E}(x-y)$ $\quad \Delta u(y) = 0$.

$x \in \Omega_e$

$y \in \Omega_i,\ \Omega = \Omega_i$



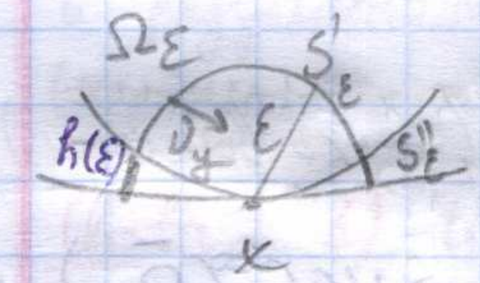
$\Omega_\varepsilon = \Omega_i \setminus B(x, \varepsilon)$

$$\int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \nu_y}(x-y)\, dS(y) = 0 \qquad \mathcal{E}(x-y) = u(y) \text{ - гарм. в } \Omega_\varepsilon$$

$\partial\Omega_\varepsilon = S_\varepsilon \cup S'_\varepsilon$; $\int_{S_\varepsilon} + \int_{S'_\varepsilon} = 0$.

$\to \int_S \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \nu_y}(x-y)\, dS(y) = u'(x)$

Нужно вида, что инт-л по кусочки $\to 0$.



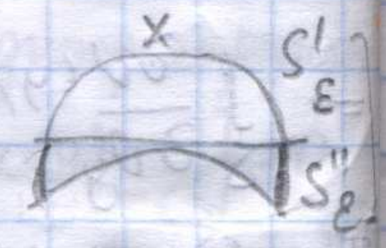
(ν_y нормаль по радиусу)

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \nu_y}(x-y)\Big|_{S'_\varepsilon} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{|S_1|(n-2)r^{n-2}}\right) = \frac{1}{|S_1|} \cdot \frac{1}{r^{n-1}} \quad (r = \varepsilon)$$

$$\int_{S'_\varepsilon} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \nu_y}(x-y)\, dS_\varepsilon(y) = \int_{S'_\varepsilon} \frac{1}{|S_\varepsilon|}\, dS_\varepsilon(y) = \frac{|S'_\varepsilon|}{|S_\varepsilon|} = \frac{\frac{1}{2}|S_\varepsilon| - |S''_\varepsilon|}{|S_\varepsilon|}$$

дописываем до сферы S''_ε

[$-|S''_\varepsilon|$ - площадь со знаком, т.к. может быть:



Хотим увидеть, что $\frac{\overbrace{|S''_\varepsilon|}^{=O(\varepsilon^n)}}{\underbrace{|S_\varepsilon|}_{O(\varepsilon^{n-1})}} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$ (у числит. другой порядок стремл. к 0).

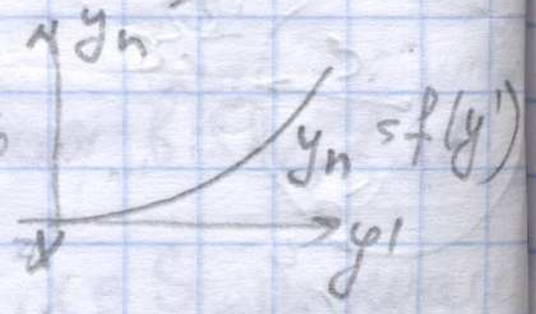
$|S_\varepsilon| = |S_1| \cdot \varepsilon^{n-1}$

$$||S_\varepsilon|| \le \max h(\varepsilon) \cdot |S_1|^{n-2} \varepsilon^{n-2} = O(\varepsilon^n)$$

(площадь $|S_\varepsilon|$ сравнив. с площадью цилиндра

$$h(\varepsilon) \underset{|y|=\varepsilon}{=} f(y') = O(|y'|^2) = \max h(\varepsilon) = O(\varepsilon^2)$$

медленнее

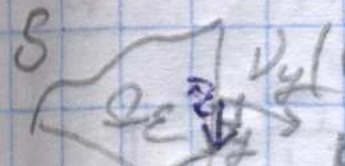


$$\int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \nu_y}(x-y)\,dS = 0. \qquad \int_{S_\varepsilon} \underbrace{\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \nu_y}(x-y)}_{1/|S_\varepsilon|}\,dS(y) = 1.$$

$$\underbrace{\int_{S_\varepsilon} + \int_S}_{u'(x)} = 0$$

Теорема Если S - замкн. огр. пов-ть класса C^2, $u'(x) = \begin{cases} 0, & x \in \Omega_e \\ -1/2, & x \in S \\ -1, & x \in \Omega_i \end{cases}$

Замечание S - огран. $\in C^2$. $u'(x) = \int_S \frac{\cos(r, \nu_y)}{r^{n-1}}\,dS(y)$



ν_y (если x лежит вне пов-ти, то можно организов. коническую пов-ть).

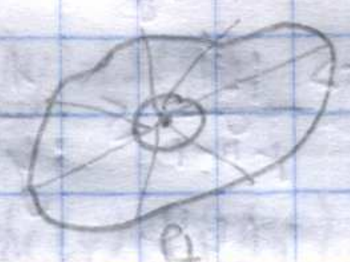
$$\int_{\Omega_\varepsilon} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \nu_y}(x-y)\,dS(y) = 0 \longrightarrow \int_S \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \nu_y} + \int_{S_\varepsilon} + \underbrace{\int_{S_{бок}} \frac{\cos(r, \nu_y)}{r^{n-1}}\,dS}_{=0,\ т.к.\ r \perp \nu_y} = 0.$$

$u(y) = \mathcal{E}(x-y)$ - гарм.

$$\underbrace{\int_S \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \nu_y}\,dS}_{u'(x)} = -\int_{S_\varepsilon} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \nu_y}\,dS_\varepsilon(y) = -\underbrace{\int_{S_\varepsilon} \frac{dS_\varepsilon}{|S_1|\varepsilon^{n-1}}}$$

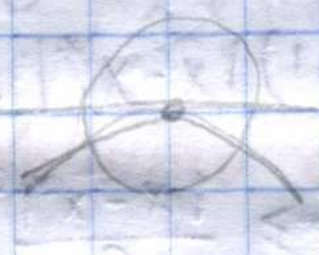
- телесный угол (отношение пл-ди кусочка к пл-ди всей сферы).

§ Абсолютная сходимость интеграла Гаусса.



- телесный угол $= 1$

- телесный угол $= 0$



- телесный угол = половине сферы

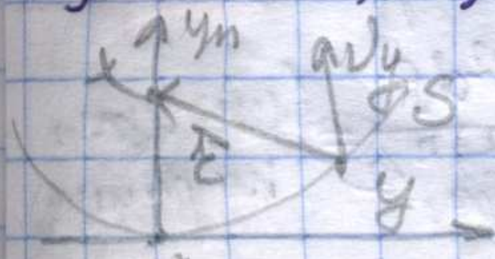
Утв Если S - замкн. огр. $\in C^2$, тогда $\exists\, C = const : \forall x \in \mathbb{R}^n \int_S \frac{|\cos(r, \nu_y)|}{r^{n-1}}\,dS(y) \le C$

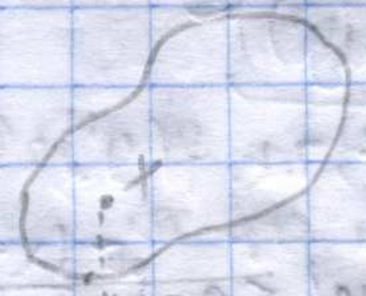
не равным огр. в $\mathbb{R}^n$

Док-во: 1) если $dist(x, S) \ge \delta$, тогда

$$\int_S \frac{\overbrace{|\cos|}^{\le 1}}{r^{n-1}}\,dS(y) \le \frac{|S|}{\delta^{n-1}}$$

2) $dist(x, S) < \delta$

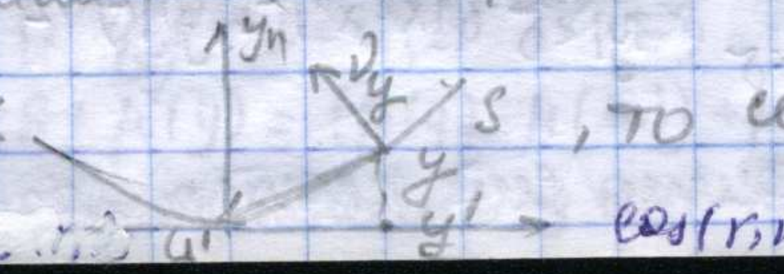




x^* ближайшая точка к поверхности. (δ достат. маленькое)

x^* местная СК, раньше x, то сейчас так не получится.

$u''(x)|_{x \in S, x = x^*}$



$\cos(r, \nu_y) = O(|y'|)$

$S = \underbrace{S'_\delta}_{\text{проблема}} \cup S''_\delta$; $S''_\delta = \{y \in S \mid dist(y, x^*) > \delta\}$; $\int\limits_{S''_\delta} \frac{|\cos|}{r^{n-1}} dS \le \frac{|S|}{\delta^{n-1}}$

$y \in S'_\delta$ – есть местная СК.

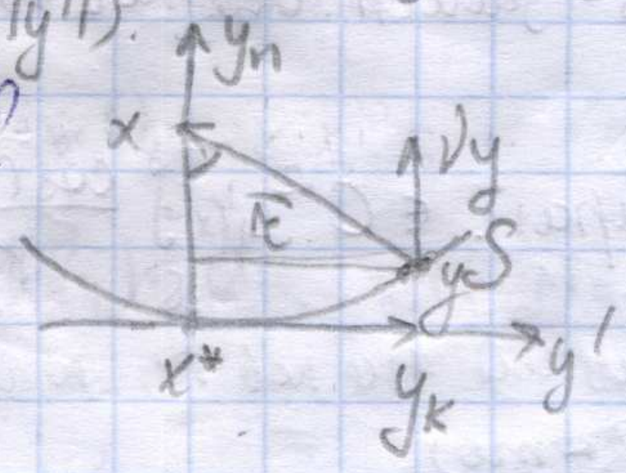
$$\cos(r, \nu_y) = \sum_{k=1}^{n-1} \cos(r, y_k) \cos(\nu_y, y_k) + \cos(r, y_n) \cos(\nu_y, y_n).$$

разные скалярн. произв. по опред.

скалярн. произв. 2-х един. векторов $\to O(|y'|)$

всё Σ тоже будет $O(|y'|)$.

что такое $\cos(r, y_n)$?



$$\cos(r, y_n) = \frac{|x - x^*| - f(y')}{r}$$

$$r^2 = (|x - x^*| - f(y'))^2 + |y'|^2$$

Мы знаем, что $f(y') = O(|y'|^2)$, $\frac{f(y')}{r} = O(|y'|)$

В итоге мы получаем: $\int\limits_{S'_\delta} \frac{|\cos(r, \nu_y)|}{r^{n-1}} dS(y) \le \int\limits_{S'_\delta} \frac{O(|y'|)}{r^{n-1}} + \frac{\overbrace{|x - x^*| - f(y')|}^{\le |x - x^*| + |f(y')|}}{r^n} \cdot dS(y) \le c \int\limits_{|y'| < \delta} \underset{1)}{\frac{|y'|}{r^{n-1}}} + \underset{2)}{\frac{|y'|^2}{r^n}} + \underset{3)}{\frac{|x - x^*|}{r^n}} dy'$

$|y'|$ – проекция вектора r на касат. пл-ть.

$r \ge |y'| \Rightarrow \frac{|y'|}{r^{n-1}} \le \frac{1}{|y'|^{n-2}}$, $\frac{|y'|}{r^n} \le \frac{1}{|y'|^{n-2}}$ $\Rightarrow$ 1) и 2) сначала суммир. и инт-ли сх-ся.

$$\int\limits_{|y'| < \delta} \frac{|x - x^*|}{r^n} dy' \le c \ ?$$

$$r^2 = |x - x^*|^2 - 2f(y')|x - x^*| + |y'|^2 + (f(y'))^2$$

$$2f(y')|x - x^*| \le \frac{|x - x^*|^2}{2} + 2f(y')^2$$

$$r^2 \ge \frac{|x - x^*|^2}{2} + \underbrace{|y'|^2 - 3(f(y'))^2}_{\ge \frac{1}{2}|y'|^2, \text{ т.к. } f(y') = O(|y'|^2)}$$

$$\int\limits_{|y'| < \delta} \le c \int\limits_{|y| < \delta} \frac{|x - x^*|}{(|x - x^*|^2 + |y'|^2)^{n/2}} dy' \le c \int_0^\delta \frac{|x - x^*| \rho^{n-2} d\rho}{(|x - x^*|^2 + \rho^2)^{n/2}} =$$

для мал. окр-ти

перешли в сфер. коорд.

(интегрир. по радиусу)

в c входит еще площадь шарика в касат. пл-ти.

Делаем замену $\rho = |x-x^*|\sigma \Rightarrow \circledeq C\int_0^{|x-x^*|\delta} \frac{\sigma^{n-2}d\sigma}{(1+\sigma^2)^{n/2}} \le C\int_0^{\infty} \frac{\sigma^{n-2}d\sigma}{(1+\sigma^2)^{n/2}}$ ч.т.д.

§ Скачок потенциала двойного слоя.

— не нужно, когда движемся к x^* по S — нужно, когда движемся к x^* по нормали дв. слоя.

Лемма. Если $\mu \in C(S)$, $\mu(x^*)=0$, $x \in S$. Тогда $u^\mu(x)$ — непрер. в (·) x^* (как ф-ция в $\mathbb{R}^n$).

S $u^\mu|_S \in C(S)$ — непрер. на границе, как ф-ция в $\mathbb{R}^n$. $\left(u^\mu(x) \xrightarrow[x\to x^*]{} u^\mu(x^*)\right)$

Докажем, что $u^\mu(x) \xrightarrow[x\to x^*]{} u^\mu(x^*)$ в $\forall$ направлении.

Док-во: Нужно показ. равном. сх-ть в (·) x^*: $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0$:

$$\int_{S\cap|y-x^*|<\delta} \left|\frac{\cos(r,\nu_y)}{r^{n-1}} - \mu(y)\right| dS(y) < \varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{R}^n : |x-x^*|<\delta.$$

Если знаем, что $\mu(x^*)=0$, тогда $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta$: $|y-x^*|<\delta \to |\mu(y)|<\varepsilon$. $y \in S$.

Если это получим, тогда $\int_{S\cap|y-x^*|<\delta} \frac{|\cos(r,\nu_y)|}{r^{n-1}} \underbrace{|\mu(y)|}_{\le\varepsilon} dS(y) \le \varepsilon \int_{S\cap|y-x^*|<\delta} \frac{|\cos(r,\nu_y)|}{r^{n-1}} dS$

$\le C\varepsilon$.

$\le \int \frac{|\cos|}{r^{n-1}} dS \le C$ по равном. сх-ти инт-ла Гаусса

ч.т.д.

Путаница в знаках! $u^\mu(x) = \int_S \frac{\partial \varepsilon}{\partial \nu_y}(x-y)\mu(y)dS(y)$. $(\vec{r} = \bar{x}-\bar{y},\ r=|x-y|)$.

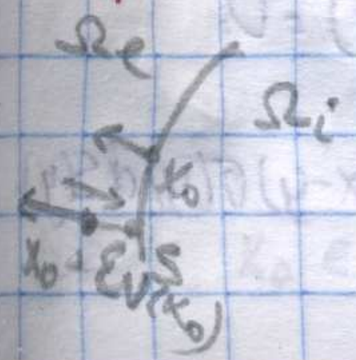
$$\frac{1}{|S_1|}\int_S \frac{\cos(r,\nu_y)}{r^{n-1}}\mu(y)dS(y).$$

При вычисл. инт-ла Гаусса: $u^1(x) = \begin{cases} -1, & x\in\Omega_i \\ -1/2, & x\in S \\ 0, & x\in\Omega_e. \end{cases}$

Предельные значения потенциала двойного слоя.

Теорема. $\mu \in C(S)$, $x_0 \in S$ $\exists \lim_{\varepsilon\to+0} u^\mu(x_0 \pm \varepsilon\nu(x_0)) = u^\mu(x_0) \pm \frac{\mu(x_0)}{2}$

внутр. и внеш. пред. знач-ие $u^\mu_{i,e}$



Док-во: $u^\mu(x) = u^{\mu(y)-\mu(x_0)}(x) + u(x)^{\mu(x_0)} \circledeq$

[фиксир. $x_0 \in S$; $\mu(y) = (\mu(y)-\mu(x_0)) + \mu(x_0)$]

$\circledeq$ (т.к. пл-ть $\mu(x_0)$ — пост. $\Rightarrow$ вынесем из инт-ла) $\circledeq$.

Θ $\underbrace{U^{\mu-\mu(x_0)}(x)}_{\text{непр. в } (\cdot)x_0} + \mu(x_0)\underbrace{U^1(x)}_{\text{знак знаком}}$ $\Rightarrow$ пред знак. существует.

$\Rightarrow e$: $U_e^{\mu}(x_0) = U^{\mu-\mu(x_0)}(x_0) + \mu(x_0)\underbrace{U_e^1(x)}_{=0} = U^{\mu}(x_0) - \mu(x_0)\underbrace{U^1(x_0)}_{-\frac{1}{2}} =$

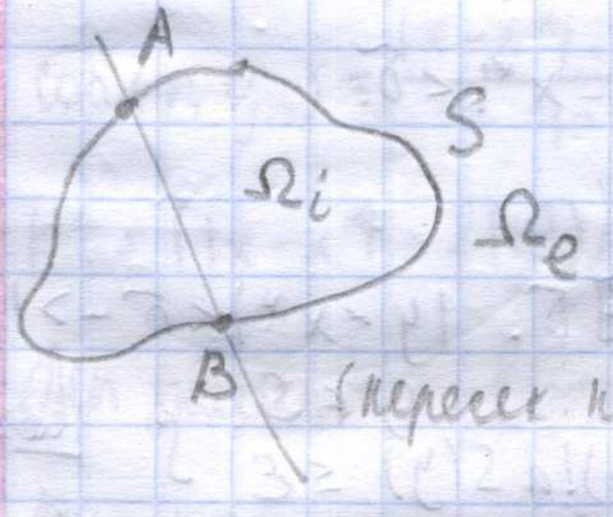
прямое знач-ие. разность плотностей

$= U^{\mu}(x_0) + \frac{\mu(x_0)}{2}$.

i: $U_i^{\mu}(x_0) = \underbrace{U^{\mu-\mu(x_0)}(x_0)}_{U^{\mu}(x_0)} + \mu(x_0)\underbrace{U_i^1(x_0)}_{-1} = U^{\mu}(x_0) - \frac{\mu(x_0)}{2}$

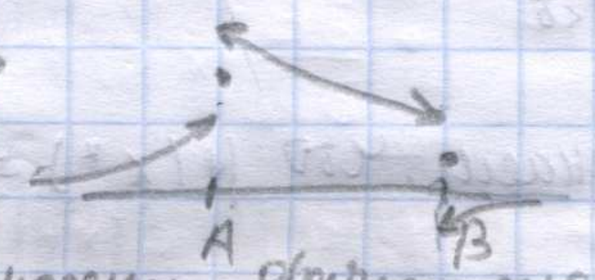
$U^{\mu}(x_0) - \mu(x_0)\underbrace{U^1(x_0)}_{-1/2} =$

ч.т.д.



(пересеч. пов-ть по прямой)

$\Rightarrow$



потенц. двойного слоя внутри и снаружи - это непр. ф-ии

Следствие $U_e^{\mu}(x_0) - U_i^{\mu}(x_0) = \mu(x_0)$ (плотность)

$$\boxed{\begin{aligned} U_e^{\mu} &= U^{\mu} + \frac{\mu}{2} \\ U_i &= U^{\mu} - \frac{\mu}{2} \end{aligned}}$$

Потенциал простого слоя.

$$V^{\sigma}(x) = \int_S \mathcal{E}(x-y)\sigma(y)\,dS(y) \qquad \mathcal{E}(z) = \begin{cases} \frac{1}{|S_1|(n-2)|z|^{n-2}}, & n \geq 3 \\ -\frac{1}{2\pi}\ln|z|, & n=2. \end{cases}$$

Свойства (теорема). $\sigma \in L_\infty(S)$ - огран. ф-ия $\Rightarrow$ 1) $V^{\sigma}(x) \in C^{\infty}(R^n \setminus S)$, $\Delta V^{\sigma}(x) = 0$, $x \notin S$.

2) $n \geq 3 \Rightarrow V^{\sigma}(x) \xrightarrow[|x|\to\infty]{} 0$, гармон. в Ω_e

3) $n = 2$ $V^{\sigma}(x)$ - гарм. ($V^{\sigma}(x)$ - огр.) $\Leftrightarrow \int_S \sigma(y)\,dS(y) = 0$.

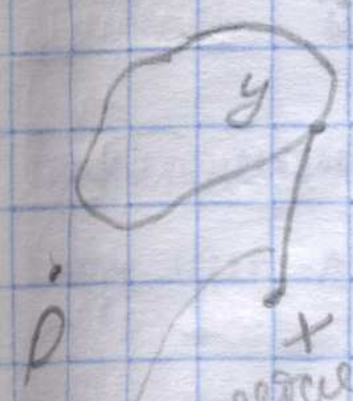
Док-во: $x \notin S$, $\mathcal{E}(x-y) \in C^{\infty}$ по x. $\partial^{\alpha} V^{\sigma}(x) = \int_S \partial_x^{\alpha} \mathcal{E}(x-y)\sigma(y)\,dS(y)$.

$\Delta V^{\sigma}(x) = \int_S \underbrace{\Delta_x \mathcal{E}(x-y)}_{=0\,(x\neq 0)}\sigma(y)\,dS(y)$

$$c\int_S \frac{\sigma y}{|x-y|^{n-2}}\,dS(y) \underset{|x|\to\infty}{\rightrightarrows} 0$$

$n \geq 3$

$n=2$: $V^\sigma(x) = c\int_S \ln|x-y|\,\sigma(y)\,dS(y)$



~~$|x-y| \leq$~~

$\exists |x| > 2\max\limits_{y\in S}|y| \Rightarrow \underbrace{|x-y|}_{\geq \frac{|x|}{2}} \leq |x| + |y| \leq \frac{3}{2}|x| \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln\frac{|x|}{2} \leq \ln|x-y| \leq \ln\frac{3}{2}|x|.$

мало меняется, когда $y \in S$ и по-мало меняется.

$|x-y| = |x|\cdot\left|x^0 - \frac{y}{|x|}\right|$, $x = |x|\cdot x^0$, $x^0 \in S_1$.

$\ln|x-y| = \ln|x| + \ln\left|x^0 - \frac{y}{|x|}\right|$

$V^\sigma(x) = c\ln|x|\int_S \sigma(y)\,dS(y) + c\int_S \ln\left|x^0 - \frac{y}{|x|}\right|\sigma(y)\,dS(y).$

$V^\sigma(x) = \ln|x|\cdot(-2\pi)\int_S \sigma(y)\,dS(y) + O\left(\frac{1}{|x|}\right)$ Хотим, чтобы он $\to 0$.

$V^\sigma(x)$ - гарм. $\Leftrightarrow \int_S \sigma(y)\,dS(y) = 0$

У нас ост-ся $\int_S \ln\left|x^0 - \frac{y}{|x|}\right|\sigma(y)\,dS(y) = \frac{1}{2}\ln\left(1 + O\left(\frac{1}{|x|}\right)\right)$

$\frac{1}{2}\ln\left(\sum_{k=1}^n \left(x_k^0 - \frac{y_k}{|x|}\right)^2\right)$

$= \underbrace{\sum (x_k^0)^2}_{=1} + O\left(\frac{1}{|x|}\right)$

В итоге $\int_S \underbrace{\ln\left|x^0 - \frac{y}{|x|}\right|}_{O\left(\frac{1}{|x|}\right)}\sigma(y)\,dS(y) = O\left(\frac{1}{|x|}\right)$

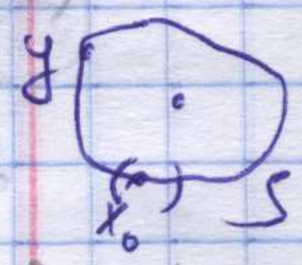
ч.т.д.

Теорема (Непрерыв. потенциала прост. слоя). если $\sigma \in L_\infty(S) \Rightarrow$ $V^\sigma(x) \in C(R^n)$.

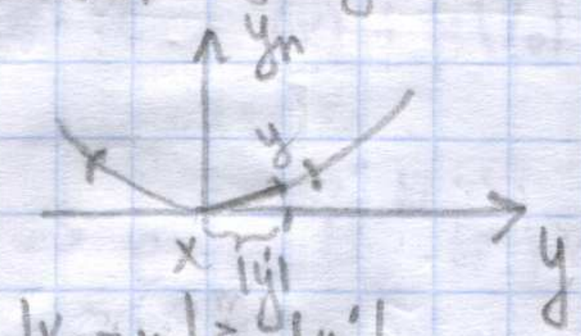
Док-во:

(если точка x лежит в Ω_e или Ω_i, то все хорошо, а если $x \in S$, то у инт-ла полюс особенность).

$n \geq 3$, $x_0 \in S$. $\int \mathcal{E}(x_0 - y)\,\sigma(y)\,dS(y)$ (мы интегр. в ок-ти x_0, получ. инт-л от $\frac{c}{|x_0-y|}$ - все ок.



бера, когда y нах-ся вблизи x_0).



$$\int\limits_{S\cap|x_0-y|<\delta} \frac{c}{|x_0-y|^{n-2}}\sigma(y)\,dS(y) \le c\sup|\sigma| \int\limits_{|y'|<\delta} \frac{dy'}{|y'|^{n-2}} \le \tilde{c}\cdot\delta$$

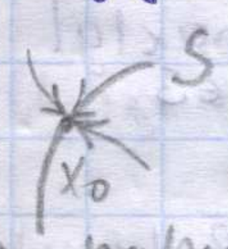
$\dim\{y'\} = n-1 \geq n-2.$

$|x_0-y| \geq |y'|$

$dS(y) \le c\,dy'$

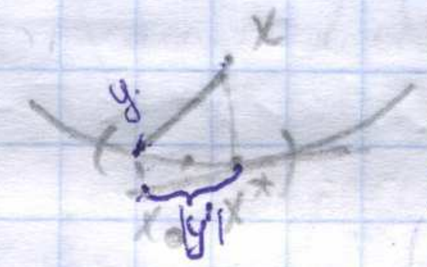
$dS(y) = \frac{1}{|\cos(\nu_y, y_n)|}dy'$

Непрер.: $V^\sigma(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} V^\sigma(x_0)$



(центр будет непр., если инт-л равном. сх-ся к x_0).

Равном. сх-ть инт-ла: $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$: $\int\limits_{S\cap|x_0-y|<\delta}|\mathcal{E}(x-y)\sigma(y)|\,dS(y)<\varepsilon$
равном. по x: $|x-x_0|<\delta$.



x^* - ближ. к x точка на S.
Заменим интегр. по x_0 на x^*: $|x_0-y|<\delta$, $|x-x_0|<\delta$

и $|x-x^*|<\delta \Rightarrow |x^*-y|<3\delta$

$$\int\limits_{S\cap|x_0-y|<\delta} \ldots < \int\limits_{S\cap|x^*-y|<3\delta} \ldots\, dS(y) \le$$ (т.к. интегр. в окр-ти x^*, то возьмем сист. сист. коорд. с центром в x^*)

$$|x-y| \ge |y'| \Rightarrow \le \int\limits_{|y'|<3\delta} \frac{c}{|y'|^{n-2}}dy' = \tilde{c}\cdot 3\delta$$

← вокруг σ, т.к. огр. ф-ия

оценив. фундам. реш-ие

Правильная нормальная производная от потенциала простого слоя.

$$V^\sigma(x) = \int\limits_S \mathcal{E}(x-y)\sigma(y)\,dS(y)$$

можно вычисл. произв. в т. x по направл. l.

$$\frac{\partial V}{\partial l_x}(x) = \frac{d}{dt}V^\sigma(x+tl)\Big|_{t=0}.$$

$$\frac{\partial V^\sigma}{\partial l}(x) = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial V^\sigma(x)}{\partial x_k}l_k \qquad \vec{l} = l_1,\ldots,l_n$$

$n \geq 3$

$$\frac{\partial V^\sigma(x)}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{1}{|S_1|(n-2)|x-y|^{n-2}}\right) = \frac{1}{|S_1|}\cdot\frac{1}{|x-y|^{n-1}}\frac{x_k-y_k}{|x-y|} \longleftrightarrow \left(\frac{\bar r}{|\bar r|}\right)_k$$

когда берем $\sum_k$, то получ. скал. произв.

скалар. произв. $\left(\frac{\bar r}{|r|}, e\right)$

В итоге: $$\frac{\partial V^\sigma}{\partial e}(x) = -\frac{1}{|S_1|}\int_1 \frac{\cos(\bar r, \bar e)}{|x-y|^{n-1}}\sigma(y)\,dS(y)$$

$|e| = 1$.

норм. произв.

Это напомин. потенц. двойного слоя, а он опред. всюду. Если $\vec e = \vec\nu(x^*)$, $x^* \in S$ получ. инт-л $-\frac{1}{|S_1|}\int_S \frac{\cos(\vec r, \vec\nu)}{|x-y|^{n-1}}\sigma(y)\,dS(y)$ - инт-л сход. при $x = x^*$

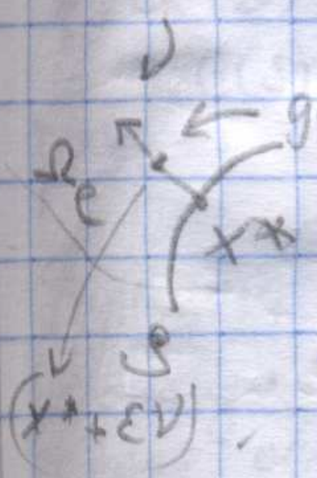
Опр Инт-л при $x = x^*$ наз-ся прямым значением норм. произв. V^σ.

интеграл

$x^* \in S$ $$\frac{\partial V^\sigma}{\partial \nu}(x^*) = -\frac{1}{|S_1|}\int_S \frac{\cos(r,\nu)}{|x^*-y|^{n-1}}\sigma(y)\,dS(y).$$ (это вообще не нев-ся произв. в обычном смысле).

(у потенц. простого слоя есть пред. произв. снаружи и внутри, но в самих точках пов-ти нет)

Теорема Если σ - непрер. на S, $S \in C^2$, тогда существуют $\lim \frac{\partial V^\sigma}{\partial \nu}(x^* \pm \varepsilon\nu(x^*))$, где $x^* \in S$.



$$= \frac{\partial V^\sigma_{i,e}}{\partial \nu}(x^*) = \frac{\partial V^\sigma(x^*)}{\partial \nu} \mp \frac{\sigma(x^*)}{2}.$$

прям. знач. норм. произв.

Док-во: (похоже на док-во для потенц. двойного слоя)

$$\frac{\partial V^\sigma}{\partial \nu}(x^* + \varepsilon\nu) = -\frac{1}{|S_1|}\int_S \frac{\cos(r,\nu)}{r^{n-1}}\sigma(y)\,dS(y), \quad \vec r: \bar x^* + \varepsilon\bar\nu - \bar y$$

$\nu = \nu(x^*)$.

(у нас было: $u^\mu(x) = \frac{1}{|S_1|}\int_S \frac{\cos(r,\nu_y)}{r^{n-1}}\mu(y)\,dS(y)$, r такой же, а нормаль непрер. дифф.)

$$W(x, x^*) = \frac{\partial V^\sigma}{\partial \nu}(\underbrace{x^* + \varepsilon\nu}_{x}) + u^\sigma(x^* + \varepsilon\nu)$$

если имеет скачки на пов-ти x^*, то эти же скачки будут и у второго слагаемого.

$$W(x, x^*) \xrightarrow[x \to x^*]{} W(x^*, x^*) \qquad x = x^* + \varepsilon\nu(x^*)$$

$$\lim_{\varepsilon \to +0} W(x^* + \varepsilon\nu)$$

прямое знач. потенц. прост.

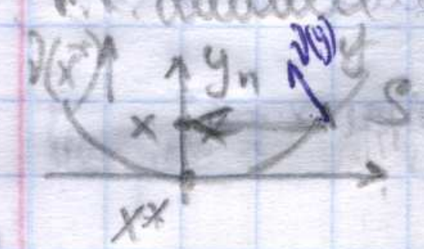
$$\frac{\partial V^\sigma_e}{\partial \nu}(x^*) + \underbrace{u_e^\sigma(x^*)}_{\text{прям. знач-ие}} = \frac{\partial V^\sigma}{\partial \nu}(x^*) + \underbrace{u^\sigma(x^*)}_{\text{прямое зн. двойн.}}; \quad u_e^\sigma(x^*) = u^\sigma(x^*) + \frac{\sigma(x^*)}{2}$$

$$W = \frac{1}{|S_1|} \int_S \frac{\cos(r,\nu(y)) - \cos(r,\nu(x^*))}{r^{n-1}} \sigma(y)\, dS(y).$$

Требуется равномер. сх-ть интеграла,

~~Следовательно~~ $\int_{S\cap|x^*-y|<\delta} |\ldots \sigma(y)|\, dS(y) < \varepsilon$, если $|x-x^*|<\delta$

т.к. малая окр-ть точки x^* перейдет в мал. окр. коорд



y_n - направл. нормали $\nu(x^*)$.

как инвар. расст. м/у x и y

скал. произв. 2-х один. векторов

$O(\rho)$ при $\rho \to 0$

4 разность косинусов: $\cos(r,\nu(y)) - \cos(r,\nu(x^*)) = \sum_{k=1}^{n-1} \cos(r,y_k)\cos(\nu(y),y_k)$

$+ \cos(r,y_n)\cos(\nu,y_n) - \cos(r,y_n) = O(\rho)$ (при $\rho \to 0$).

$= \cos(r,y_n)(\cos(\nu,y_n)-1)$ $\quad = O(\rho)$

$O(\rho^2)$

напр. нормали в т. x^*

$\rho = |y'|$.

посл. компон. вектора r — оценка сов.

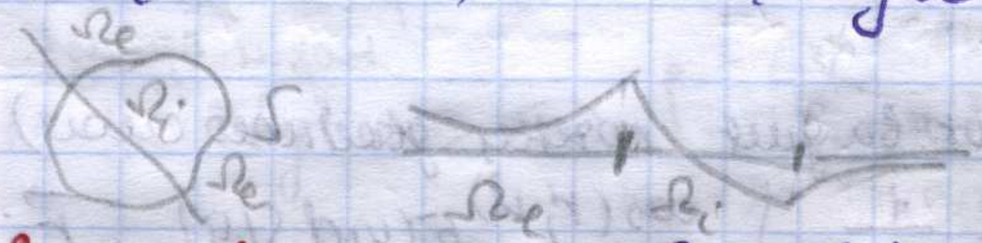
$$\int_{S\cap|x^*-y|<\delta} |\ldots| dS(y) \le \int_{|y'|<\delta} \frac{C\rho \cdot \max|\sigma(y)|}{\rho^{n-1}} dy' \le C \max_S|\sigma(y)| \int_{|y'|<\delta} \frac{dy'}{|y'|^{n-2}} = \tilde{C}\delta < \varepsilon$$

$S|S_1|^{n-2}/\delta$

перем к интегр. по сфер. пл-ти

$\Rightarrow$ интеграл равномер. мал $\quad$ ч.т.д.

Если $\sigma \in C(S)$, $S \in C^2$, тогда потенц. имеет предел:



Следствие. $x \in S$, $\sigma(x) = \frac{\partial V_i}{\partial \nu}(x) - \frac{\partial V_e}{\partial \nu}(x)$ (скачок норм. произв. - плотность этого потенциала).

Сведение краевых задач Дирихле и Неймана к интегральным уравнениям.

3 Дирихле: $\Delta u = 0$ для D_i

$u|_S = \varphi$, $u \in C^2(\Omega_i) \cap C(\overline{\Omega}_i)$.

De: $\Delta u = 0$

$u|_S = \varphi$

$u \in C^\infty(\Omega_e) \cap C(\Omega_e \cup S)$

ф-ия u имеет прав. поведение ∞: $\begin{cases} n \ge 3 & u(x) \to 0,\ |x| \to \infty \\ n = 2 & |u(x)| \le C \end{cases}$

] $u(x) = u^M(x)$ (потенциал двойного слоя)

$u^M(x) \in C^\infty(x \bar{\in} S)$, $\Delta u^M = 0$, $x \bar{\in} S$ (это выполнено всегда)

не лежит на S

D_i: $u_i^M(x) = \varphi(x)$ $\quad S \in C^2$, $\mu \in C(S)$.

D_e: $u_e^M(x) = \varphi(x)$

$u^M(x) \to 0$, $x \to \infty$ (всегда).

Нужно: $u(x) = O\left(\frac{1}{|x|^{n-2}}\right)$, а у нас $u^M(x) = O\left(\frac{1}{|x|^{n-1}}\right)$. (проблема, что мы не сможем охватить все реш-ия на ∞).

Для D_i нужно: $u^M(x) - \frac{\mu}{2} = \varphi(x)$

Де нужно: $u^M(x) + \frac{\mu(x)}{2} = \varphi(x)$

Запишем подробнее: $\frac{1}{|S_1|}\int_S \frac{\cos(r, \nu_y)}{r^{n-1}} \mu(y)\, dS(y) - \frac{\mu(x)}{2} = \varphi(x)$.

Франиц. интег. опер-р: $(K\mu)(x)$, у у ядро $\mathcal{K}(x,y) = \frac{\cos(r,\nu_y)}{|S_1| \cdot r^{n-1}}$ - ядро со слаб. особен. на S.

$K: L_p(S) \to L_p(S)$ - оператор компактный.

$C(S) \to C(S)$

$p = 2$.

Рассмотрим ур-ие опис ур-нием Фредгольма: $\frac{\mu}{2} - K\mu = -\varphi$. D_i.

Нам нужно непрер. пл-ть, а у нас было: если правая часть в ур-ии со слаб. особ. - непрер., тогда и реш-ие L_2 будет непрер.

$\frac{\mu}{2} + K\mu = \varphi$ D_e.

N_i: $\Delta u = 0$

Краев. норм. произв. $\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_S = \psi$

$u \in C^2(\Omega_i) \cap C(\bar{\Omega}_i)$

N_e: $\Delta u = 0$

$\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_S = \psi$

$u \in C^2(\Omega_e) \cap C(\Omega_e \cup S)$.

и-прав. повед. на ∞: $\begin{cases} n \geq 3 & u(x) \to 0, |x| \to \infty \\ n = 2 & |u(x)| \leq c. \end{cases}$

Когда задача Неймана, тогда ищем решение в виде $u(x) = v^\sigma(x)$ $\sigma \in C(S)$

(случай на пл-ти дополн. рассмотр. отдельно)

Считаем, что $n \geq 3$. Зрение. усл-ие: N_i: $\frac{\partial v_i^\sigma}{\partial \nu}(x) = \psi(x) = \frac{\partial v^\sigma}{\partial \nu} + \frac{\sigma}{2}$

N_e: $\frac{\partial v_e^\sigma}{\partial \nu}(x) = \psi(x) = \frac{\partial v^\sigma}{\partial \nu} - \sigma/2$.

N_i: $\underbrace{-\frac{1}{|S_1|}\int_S \frac{\cos(\vec{x-y},\nu(x))}{|x-y|^{n-1}}\sigma(y)\,dS(y)}_{\text{интегр. оператор}} + \frac{\sigma}{2} = \psi.$

ядро интегр. опер-ра

Если $\mathcal{K}(x,y) \leftrightarrow K$, $K^* \leftrightarrow \mathcal{K}_*(x,y) = \overline{\mathcal{K}(y,x)}$

Этот интегр. оператор, у кв-ю сопряж. к интегр. опер-ру, у обсужд. задачу Дирихле.

в итоге: $\boxed{\begin{array}{l} N_i: \ \frac{\sigma}{2} + K^*\sigma = \psi \\ N_e: \ \frac{\sigma}{2} - K^*\sigma = -\psi. \end{array}}$

$\varphi, \psi \in C(S)$, $\exists$ μ и σ это L_2-решение. $(\mu, \sigma) \in C(S)) \Rightarrow$ кр. задачи разрешимы.

ФА: „Альтернатива Фредгольма"

H - гильб. пр-во; T - комп. $H \to H$; (a) $u - Tu = f$ - ур-ие в H

(в) $v - T^*v = 0$ - сопряж. ур-ие.

(есть единств. $\Rightarrow$ у соот. опер-ра ядро $= 0$, если нет, тогда ядро есть)

① Если реш-ие (a) единств. $\Leftrightarrow$ реш-ие (в) единств., и тогда ур-ие (a) разреш. для $\forall$ правой части.

② Если нет единств. $\Rightarrow$ α) $\dim \operatorname{Ker}(I-T) = \dim \operatorname{Ker}(I-T^*) < \infty$

β) ур-ие (a) - разреш. $\Leftrightarrow f \perp \operatorname{Ker}(I-T^*)$.

(т.е. $(f,v)=0$ $\forall v$ в ур-ии (в)).

($\beta \Leftrightarrow$ образ оператора замкнут)

$n \geq 3$

Разрешимость первой пары интегр. ур-ий. (N_i, N_e).

$\frac{\mu}{2} - K\mu = -\varphi$ (эти ур-ия будут разреш. для $\forall$ правых частей, если докажем единств. реш-ия).

$\frac{\sigma}{2} - K^*\sigma = -\psi$ ✗ ур-ие и опер-ры в $L_2(S)$, опер-ры компактны.

Лемма. $\operatorname{Ker}\left(\frac{1}{2} - K^*\right) = \{0\}$.

Док-во:

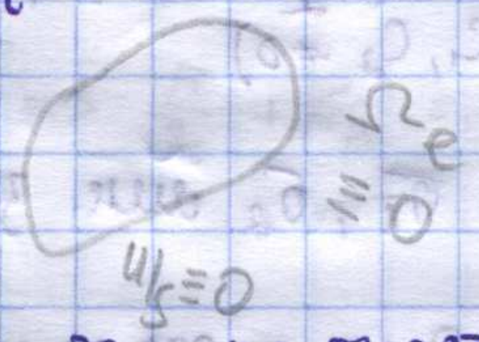
$\sigma \in L_2(S)$, $\frac{\sigma}{2} - K^*\sigma = 0 \Rightarrow \sigma \in C(S)$.

✗ потенц. прост. слоя $V^\sigma(x) = u(x)$ - гармон. в Ω_e, вып-но ур-ие $\frac{\sigma}{2} - K^*\sigma = 0$: $\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_S \equiv 0$ u - реш-ие однор. з. Неймана. по нор. единств.: $u(x) \equiv 0$.

$\Rightarrow$ потенц. $\equiv 0$ в Ω_e. Знаем, что потенц. прост. слоя непрер $\Rightarrow$ (гармон. ф-ия).

$\forall \Omega_i$: $u(x) = V^{\sigma}(x)$ для $x \in \Omega_i$

$u|_S = 0$, $\Delta u = 0$ в Ω_i



$u(x)$ - реш-ие однор. D_i

но жор. единств. $u(x) \equiv 0$ в Ω_i

Тогда скачок норм. произв. $= 0$, а это плотность $(\sigma(x))$. ч.т.д.

Теорема. Если $S \in C^2$, $n \geq 3$. Тогда задачи D_i, N_e - разреш. для $\forall$ непрер. ф-ий $\varphi, \psi \in C(S)$. Решение D_i - потенц. двойного слоя, а N_e - потенц. простого слоя.

(Доказано выше)

Разрешимость 2-ой пары интегр. ур-ий (D_e, N_i)

$\frac{\mu}{2} + K\mu = \varphi$ $\quad D_e$

$\frac{\sigma}{2} + K^*\sigma = \psi$ $\quad N_i$

• Единств-ти решения этих интегр-ур-ий нет.

если $\mu(x) \equiv 1$, то $(K\mu)(x) = W^{\mu}(x)$, $x \in S$ - интеграл Гаусса (у на S = $-1/2$)

тогда $\frac{\mu}{2} + K\mu \equiv 0$ $(\mu = 1)$ $\Rightarrow$

если $\mu(x) \equiv const$: $\mu \in Ker(\frac{1}{2} + K)$, тогда ядро $K^* \neq \{0\}$.

Мы можем док-ть, что ничего больше в ядро не входит.

Лемма. $\dim(Ker(\frac{1}{2} + K^*)) = 1$.

Док-во: $\sigma \in L_2(S)$: $\frac{\sigma}{2} + K^*\sigma = 0 \Rightarrow \sigma \in C(S)$ (т.к. прав часть непрер) по теор. о непр. реш-ии.

$u(x) = V^{\sigma}(x)$, $x \in \Omega_i$; $\Delta u = 0$, u - гарм. в Ω_i; $\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_S = 0$

u - реш-ие однор. задачи N_i, по жор. единств. $u(x) \equiv const$.

Если σ из ядра, то соотв. потенциал мб-ет const.

$V^{\sigma}(x) \equiv C_{\sigma}$ - конст. внутри Ω_i.

Если $C_{\sigma} = 0$, то $V^{\sigma}(x)$ для $x \in \Omega_e$ - гарм. ф-ия и имеет прав. повед. на ∞ и $V^{\sigma}|_S = 0$.

Тогда по т. единств. для D_e $V^{\sigma}(x) \equiv 0$ в Ω_e, $V^{\sigma}(x) \equiv 0$ в $R^n \Rightarrow \sigma(x) \equiv 0$ (т.к. скачок прав. норм. произв. $= 0$).

Если $\sigma_1(x), \sigma_2(x) \in Ker(\frac{1}{2} + K^*)$ $\quad V^{\sigma_1}(x) \equiv C_1$ в Ω_i и $V^{\sigma_2}(x) \equiv C_2$ в Ω_i.

σ_1, σ_2 - лин. завис.? $a_1\sigma_1(x) + a_2\sigma_2(x) \equiv 0$. (константы нельзя пишутся:)

возьмем пп-ть $\sigma(x) = c_1\sigma_2(x) - c_2\sigma_1(x)$. $\to$ $V^{\sigma}(x) = c_1 \underbrace{V^{\sigma_2}(x)}_{c_2} - c_2 \underbrace{V^{\sigma_1}(x)}_{c_1}$
(если $\sigma_1, \sigma_2 \neq 0$, то $c_1, c_2 \neq 0$) $(x \in \Omega_i)$

$\Rightarrow \sigma(x) = 0$, тогда σ_1, σ_2 лин. зависимы.

Теорема $-\Delta u = 0$, $\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_S = \psi$ — эта задача разрешима для $\forall \psi \in C(S)$:
прав. норм. $\int_S \psi\, dS = 0$. (доказ. усл-ие, если ψ - непр.)

Док-во: ψ - по 2-ой ур-ии $\frac{\sigma}{2} + K^*\sigma = \psi$ - разреш. $\Leftrightarrow \psi \perp \ker(\frac{1}{2}+K^*)$
ф-ия $\mu(x) \equiv const \in \ker(\frac{1}{2}+K)$, и только, что док-ли, то
$\dim \ker(\frac{1}{2}+K) \equiv 1 \Rightarrow (\psi, 1)_{L_2(S)} = 0 \Leftrightarrow \int_S \psi(x)\cdot 1\, dS(x) = 0$.
ч.т.д.

(Если усл-ие разреш-ти вып-но, тогда интегр. ур-ие разреш. реш-ие $\int_S \psi = 0$ - это непрер. ф-ия, и ~~что~~ потому простого слоя решает нашу задачу).

D_e, N_i - имеют нетрив. ядро
D_e: $\frac{1}{2}\mu + K\mu = \psi$ | $\dim\{\sigma \mid \frac{1}{2}\sigma + K^*\sigma = 0\} = 1$.
N_i: $\frac{1}{2}\sigma + K^*\sigma = \psi$

D_e: $-\Delta u = 0$ в Ω_e
$u|_S = \varphi$, $u \in C^2(\Omega_e) \cap C(\Omega_e \cap S)$
$u(x) = O(\frac{1}{|x|^{n-2}})$, $x \to 0$ (у нас были усл-ия: $n \geq 3$ $u(x) \to 0$, $|x| \to \infty$; $n = 2$, $|u(x)| \leq C$)

$u(x) = u^{\mu}(x)$, $x \in \Omega_e$
$u^{\mu}(x) = O(\frac{1}{|x|^{n-1}})$, $x \to \infty$ хотим чтобы было так, то в D_e $\exists$ реш-ие не для всех φ.

А если хотим, чтобы реш-ие убывало как фунд. реш-ие, тогда D_e разрешима для $\forall \varphi$.

Теорема (D_e): задача D_e - разрешима для $\forall \varphi \in C(S)$.

$(n \geq 3)$ **Док-во**: $\exists$ ф-ию $E(x - x_0)$, $x_0 \in \Omega_i$, тогда E гармон. на ∞
поэтому реш-ие D_e $u(x) = u^{\mu}(x) + \alpha E(x - x_0)$ (нужно найти коэф.

а пл-ть u^μ)

Мы знаем, что $\mu \in C(S)$ - гармон. в Ω_e. Нужно, чтобы $u|_S = \varphi$, т.е.

$$\underbrace{u_e^\mu(x)}_{\text{потенц. на границе}} + \alpha\, \mathcal{E}(x-x_0)\Big|_{x\in S} = \varphi.$$

$$\underbrace{u^\mu(x)}_{=K\mu} + \mu/2 + \alpha\, \mathcal{E}(x-x_0) = \varphi. \Rightarrow \frac{\mu}{2} + K\mu = \underbrace{\varphi - \alpha\, \mathcal{E}(x-x_0)}$$ - ур-ие разреши-мо $\Leftrightarrow$ $\varphi - \alpha\, \mathcal{E}(x-x_0) \perp \sigma$:

$$\frac{\sigma}{2} + K^*\sigma = 0.$$

$$\int_S (\varphi - \alpha\, \mathcal{E}(x-x_0))\, \sigma(x)\, dS(x) = 0.$$

$$\alpha \underbrace{\int_S \mathcal{E}(x-x_0)\, \sigma(x)\, dS(x)}_{\text{потенциал прост. слоя; } V^\sigma(x_0) = const \neq 0.} = \int_S \varphi\, \sigma\, dS$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\int_S \varphi\, \sigma\, dS}{const(\sigma)}.$$

Как только нашли const, усл-ие 1 вып-но, реш. $\exists$, μ - непр. функц. и нашли её.

ч.т.д.

Краевые задачи на плоскости (в плоской области).

$n=2$ $\quad \mathcal{E}(x) = -\frac{1}{2\pi} \ln|x|$ (не огран. на ∞).

$$u^\mu(x) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{\cos(r, \nu_y)}{r}\, \mu(y)\, dS(y) \quad \left(\text{раньше писали } \frac{1}{|S_1|} \int_S \frac{\cos}{r^{n-1}}\right)$$

$$\int_S \frac{\partial \mathcal{E}(x-y)}{\partial \nu_y}\, \mu(y)\, dS \qquad |S_1| = 2\pi \text{ т.к. } n=2$$

$$V^\sigma(x) = \int_S \mathcal{E}(x-y)\, \sigma(y)\, dS(y) = -\frac{1}{2\pi} \int_S \ln|x-y|\, \sigma(y)\, dS(y).$$

(для $n \geq 3$ было V^σ - гарм. в Ω_i, Ω_e. Сейчас сох-ся хар-ть, ур-ие Лапласа, но повед. в Ω_e стан-ся неправильным).

Лемма 1. $V^\sigma(x)$ - гарм. в Ω_e (имеет прав. повед. на ∞) $\Leftrightarrow \int_S \sigma\, dS = 0$

Док-во: $$V^\sigma(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_S \underbrace{\left(\ln|x| + \ln\frac{|x-y|}{|x|}\right)}_{\ln|x-y|} \sigma(y)\, dS(y) = -\frac{1}{2\pi} \ln|x| \cdot \int_S \sigma(y)\, dS - \frac{1}{2\pi} \underbrace{\int_S \frac{\ln|x-y|}{|x|}\, \sigma(y)\, dS(y)}_{\underset{x\to\infty}{=} O(\frac{1}{x})\ ?}$$

(?) $|x-y| \le |x|+|y|$

$$\ln\frac{|x-y|}{|x|} \le \ln\Big(1+\underbrace{\frac{|y|}{|x|}}_{O\left(\frac{1}{|x|}\right)}\Big) < C\frac{|y|}{|x|}$$ (позамеч. предыдущ.)

$|x-y| \ge |x|-|y|$

$$\ln\left(\frac{|x-y|}{|x|}\right) \ge \ln\left(1-\frac{|y|}{|x|}\right) \sim -\frac{|y|}{x}$$

$\ln(1+\alpha)\sim\alpha$, $\alpha\to 0$

$$\int \ln\left(\frac{|x-y|}{|x|}\right)\sigma(y)\,dS(y) \ge -\max_{y\in S}|y| \int_S |\sigma(y)|\,dS \cdot \frac{1}{|x|} \ge -\frac{C}{|x|}$$

В итоге, что бы было все ok, нужно чтобы $\frac{1}{2\pi}\ln|x|\int_S \sigma(y)\,dS = 0$

Лемма 2. Если u - решение задачи N_e $\quad -\Delta u = 0 \quad u\in C^2(\Omega_e)\cap C(\Omega_e\cap S)$

$\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_S = \psi$ $\quad$ прав. части.

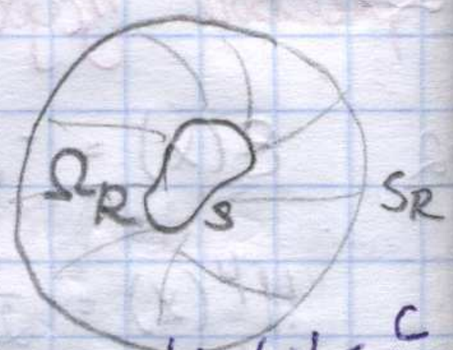
$|u(x)|\le C$, $|x|\to\infty$ проуб.

Тогда $\int_S \psi\,dS = 0$.

Док-во: $\Omega_R = \Omega_e \cap B(0,R)$ $\quad (\Omega_i \subset B(0,R))$

по ф-ле Грина $u, v = 1$:

$$0 = \underbrace{\int_{\Omega_R} \Delta u\cdot 1\,dx}_{=0,\ \text{т.к. ур. лапл.}} = -\underbrace{\int_{\Omega_R} u_x\cdot 1_x\,dx}_{=0} + \int_{\partial\Omega_R}\frac{\partial u}{\partial\nu}\cdot 1\,dS$$



$$\int_{\partial\Omega_R} = \int_S + \int_{S_R} = \int_S \psi\,dS + \int_{|x|=R}\frac{\partial u}{\partial\nu}\,dS_R(x) = 0 \ (*)$$

если u имеет прав. повед. на ∞, то $|u(x)|\le C$, $|x|\to\infty$; $|u_x(x)|\le\frac{C}{|x|^2}$

из прош. семестра, по теореме о повед. гармон. ф-ии на ∞.

$$\left|\int_{|x|=R}\right| \le \frac{C}{R^2}\,2\pi R \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$, применим к $*$ $\Rightarrow$ ч.т.д.

D_i, D_e $\quad \Delta u = 0 \quad x\in\Omega_i,\Omega_e$

$u|_S = \psi$

N_i, N_e $\quad \Delta u = 0 \quad x\in\Omega_i,\Omega_e$

$\frac{\partial u}{\partial\nu}\Big|_S = \psi$

D: $u(x) = U^{\mu}(x)$, $\mu\in C(S)$

N: $u(x) = V^{\sigma}(x)$, $\sigma\in C(S)$. | $x\in\Omega_e$, купина гармоничность, т.е. $\int_S \sigma\,dS = 0$.

D_i: $u_i^\mu(x)=\varphi$ $\quad u^\mu(x)-\mu/2=\varphi$ $\quad\Rightarrow\quad \mu/2-K\mu=-\varphi$ $\qquad K\mu=u^\mu(x)$

D_e: $u_e^\mu(x)=\varphi$ $\quad u^\mu(x)+\mu/2=\varphi$ $\qquad\qquad \mu/2+K\mu=\varphi$

N_i: $\dfrac{\partial v_i^\sigma}{\partial\nu}(x)=\psi,\ x\in S$ $\quad \dfrac{\partial v_i^\sigma}{\partial\nu}(x)+\dfrac{\sigma}{2}=\psi$ $\qquad \dfrac{\sigma}{2}+K^*\sigma=\psi$

N_e: $\dfrac{\partial v_e^\sigma}{\partial\nu}(x)=\dfrac{\partial v^\sigma}{\partial\nu}(x)-\dfrac{\sigma}{2}=\psi$ $\quad\Rightarrow\quad \dfrac{\sigma}{2}-K^*\sigma=-\psi$

Нужны корреп. реш-ия ур-ий $\begin{cases}\mu/2-K\mu=-\varphi & D_i\\ \dfrac{\sigma}{2}-K^*\sigma=-\psi & N_e\end{cases}$; σ: $\int_S\sigma\,dS=0$.

Лемма 3 Если $\int_S\psi\,dS=0$, σ - реш. интегр. ур-ия $N_e \Rightarrow \int_S\sigma\,dS=0$.

Док-во: $\int\left(\dfrac{\sigma}{2}-K^*\sigma\right)dS=-\int_S\psi\,dS=0$. $\qquad K(1)(x)=u'(x)=-\dfrac{1}{2}$ интеграл Гаусса.

$\|$ почти скалярн. произв.

$\left(\dfrac{\sigma}{2}-K^*\sigma,1\right)_{L_2(S)}$

$\|$

$\left(\dfrac{\sigma}{2},1\right)-\left(\sigma,\underbrace{K(1)}_{=-\frac{1}{2}}\right)=(\sigma,1)=\int_S\sigma\,dS=0$

ч.т.д.

Лемма 4 Решение инт. ур-ий D_i, N_e единственно.

Док-во: $\dfrac{\sigma}{2}-K^*\sigma=0$, $\sigma\in L_2(S)\Rightarrow\sigma\equiv0$.

по 13: $\int_S\sigma\,dS=0$, по кор. о непр-ти реш-ия $\Rightarrow\sigma\in C(S)$, мы имеем право взять потенциал с такой плотностью: $u(x)=V^\sigma(x)$, $x\in\Omega_e$ - гарм. в Ω_e, $V^\sigma(x)\to0$, $|x|\to\infty$. $\dfrac{\partial v_e^\sigma}{\partial\nu}(x)\equiv0\Rightarrow u(x)$ - реш-ие однор. задачи N_e, а по кор. о единст. в. $u(x)\equiv const$ в Ω_e, $const=0$ (т.к. $V^\sigma(x)\xrightarrow[|x|\to\infty]{}0$, а это и есть наше реш-ие).

$u(x)=0$ в Ω_e, мы знаем $V^\sigma(x)\in C(R^2)$, $V^\sigma(x)|_S=0$.

$\Rightarrow u(x)=V^\sigma(x)$, $x\in\Omega_i$ - решение одн. $D_i\Rightarrow u(x)\equiv0$ в Ω_i; $V^\sigma(x)\equiv0$ в R^2

$\Rightarrow\sigma=0$ (т.к. σ - скачок потенц. простого слоя). ч.т.д.

Теорема $n=2$ задача D_i разрешима для $\forall\varphi\in C(S)$, а задача N_e: разреш. для $\forall\psi\in C(S)$, $\int_S\psi\,dS=0$. Причем D_i: $u(x)=u^\mu(x)$

N_e: $u(x)=V^\sigma(x)$, $u(x)\xrightarrow[|x|\to\infty]{}0$. (реш-ие не единств. $u(x)=V^\sigma(x)+C$)

N_i, De: $\frac{\mu}{2} + K\mu = \varphi$

$\frac{\sigma}{2} + K^*\sigma = \psi$

для $n \geq 3$: $\mu(x) \equiv const$ - удовл. ур-нию $\frac{\mu}{2} + K\mu = 0$ (св-во инт-ла Гаусса)
$n = 2$ это так же.

Лемма 5 $\dim \ker \left(\frac{1}{2} + K^*\right) = 1$.

Док-во: 4σ: $\frac{\sigma}{2} + K^*\sigma = 0$, $\sigma \in C(S)$.
$u(x) = V^\sigma(x)$ - реш-ие одн. N_i $\Rightarrow$ по теор. един. для N_i $V^\sigma(x) = const$ в Ω_i

если $const \neq 0$, то и ф-ия $\neq 0$.
если σ_1, σ_2 - 2 реш-ия интегр. ур-ия $V^{\sigma_1}(x) = C_1$, $V^{\sigma_2}(x) = C_2$ в Ω_i

построим разность и возьмем $\sigma = c_1\sigma_2 - c_2\sigma_1$ $\Rightarrow V^\sigma(x) \equiv 0$ в Ω_i $\Rightarrow \sigma(x) \equiv 0$ на S, т.е. σ_1, σ_2 - лин. зав. (как было для $n \geq 3$, но и для $n = 2$ так же)

ч.т.д.

Теорема 1. Задача N_i - разреш. для $\forall \psi \in C(S)$, $\int_S \psi dS = 0$.
$u(x) = V^\sigma(x)$.

2. Задача De - разрешима для $\forall \varphi \in C(S)$
$u(x) = u^M(x) + \frac{\alpha}{const}$ $\quad (n \geq 3: u^M + \alpha\, \mathcal{E}(x - x_0))$

Док-во: N_i: $u(x) = V^\sigma(x)$, $\frac{\sigma}{2} + K^*\sigma = \psi$
$\psi \perp \mu$: $\frac{\mu}{2} + K\mu = 0$ (по Л5: $\mu(x) = 1$); $\int_S \psi dS = 0$.
(потенциал решает задачу).

De: $\overbrace{\frac{\mu}{2} + K\mu}^{\text{внеш. пред. знач-ие}} = \varphi - \alpha$
$u_e^M(x) + \alpha = \varphi$ (как нужно, чтобы $\varphi - \alpha \perp \sigma$: $\frac{\sigma}{2} + K^*\sigma = 0$.

выбрав α, вып. усл-ие, прав. часть $\varphi - \alpha$ непр. ф-ия, тогда ф непр. и так возник. реш-ие.

ч.т.д.

Функция Грина.

Было в прош. сем-ре: $G(x,y) = \mathcal{E}(x-y) + g(x,y)$ $\quad x,y \in \Omega_i$; $S \in C^2$.

для фиксир. $x \in \Omega_i$ $\quad \Delta_y g(x,y) = 0$

$g(x,y)|_{y\in S} = -\mathcal{E}(x-y)$. | чтобы $G(x,y)=0$, при $y \in S$.

$g(x,y) = g(y,x) \Rightarrow G(x,y) = G(y,x)$ (симметрич-ть).

$g(x,y) \in C(\overline{\Omega \times \Omega})$ (непрер. по совокуп. переменных).

$0 \le G(x,y) \le \mathcal{E}(x-y)$ (для $n \ge 3$)

$\le \frac{1}{2\pi} \ln \frac{|x-y|}{d} \cdot \frac{1}{d}$, $d = \operatorname{diam} \Omega$; $n=2$.

u: $-\Delta u = f$

st. $u|_S = \varphi$

$$u(x) = \int_\Omega G(x,y) f(y)\,dy - \int_S \frac{\partial}{\partial \nu_y} G(x,y)\varphi(y)\,dS(y).$$

Теорема. S-огран. $\in C^2 \Rightarrow \exists$ ф-ия Грина $G(x,y)$, у имеет прав. норм. произв. $\frac{\partial}{\partial \nu_y} G(x,y)$, $y \in S$.

$$\int_\Omega G(x,y) f(y)\,dy = \underbrace{w^f(x)}_{\text{частное реш-ие}} + \int_\Omega g(x,y) f(y)\,dy.$$

опер-ра Ламэ от объемного потенциала.

Док-во: $\frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu_y}$ $\quad y \in S$, $x \in \Omega_i$ (эти аргум. не склеив.) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \nu_y} \underbrace{\mathcal{E}(x-y)}_{\in C^\infty(\text{по } y),\ y \ne x} + \frac{\partial}{\partial \nu_y} g(x,y).$$

Вспомним как опред-ся ф-ия g: $\Delta_y g(x,y) = 0$

$g(x,y)|_{y\in S} = -\mathcal{E}(x-y)|_{y\in S}$ $\quad x \in \Omega_i$.

(т.е. реш-ие зад. з. Дирихле).

$\exists n \ge 3$. $\quad x \in \Omega_i$, $y \in \Omega_e$ $\quad V_x(y) = \mathcal{E}(x-y)$ - гармон ф-ия в Ω_e

фиксир. $\quad$ фунд. реш-ие

$V_x(y)$ - реш-ие з. Неймана: $\Delta_y V_x(y) = 0$ в Ω_e

$\frac{\partial V_x}{\partial \nu_y}(y)\Big|_S = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \nu_y}(x-y)$

Мы знаем: для $n \ge 3$ N_e разрешима для $\forall \varphi(y) \in C(S)$. реш-ие $= V^\sigma$ (потенц. пр. слоя с какой-то пл-тью)

$y \in \Omega_e$

$$\mathcal{E}(x-y) = V^\sigma(y) = \int_S \mathcal{E}(y-z)\sigma_x(z)\,dS(z)$$

$V^{\sigma_x}(y)$ - гарм. ф-ия, у совпад. с фунд. реш-ием в Ω_e.

потенц. прост. слоя непрер. при переходе через пов-ть; $V^{\sigma_x}(y)$ - гарм. в Ω_i (как св-ам потенц. простого слоя); $V^{\sigma_x}(y)|_{y\in S} = \mathcal{E}(x-y)$. Эта задача практически как задача для g, отличие только в знаке $\Rightarrow$

$g(x,y) = -V^{\delta x}(y)$ $\quad y \in \Omega_i$, фиксир. $x \in \Omega_i$.

как у всякого потенц. простого слоя имеется прав-норм. произв., то и у g тоже существ. прав-норм. произв.

ч.т.д.

Теорема. $\exists f \in C(\bar{\Omega})$, что $W^f \in C^2(\Omega)$ (достат., чтобы $f \in C^1$) (объемный потенциал)

$\varphi \in C(S)$.

Тогда существ. реш-ие D_i: $\Delta u = f$ в D_i

$u|_S = \varphi$

и решение имеет вид $u(x) = \int_\Omega G(x,y) f(y)dy - \int_S \frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x,y)\varphi \, dS$

Док-во: Строим $u(x) = \int_\Omega G f dy - \int_S \frac{\partial G}{\partial \nu}\varphi dS$. Нужно проверить, что

1) $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$
2) $-\Delta u = f$ — получим в процессе.
3) $u|_S = \varphi$, выверим.

$G(x,y) = \mathcal{E}(x-y) + g(x,y)$, то $u(x) = W^f(x) + \int_\Omega g(x,y)f(y)dy + \int_S (\ )\varphi dS$.

если знаем, что $W^f \in C^2 \Rightarrow (-\Delta) W^f = f$ — нужно док-ть, что эти гармонич. ф-ии.

$\Delta_x g(x,y) = 0$, если $x, y \in \Omega$; аналог. $\Delta_y = 0$.

$g(x,y) \in C^\infty(\Omega \times \Omega) \Rightarrow$ в $u(x)$ получим инт-л с бесконеч. гладким ядром $\Rightarrow$ можем дифф. под $\int$ очень много раз.

т.е. $\partial_x^\alpha \int_\Omega g(x,y)f(y)dy = \int_\Omega \partial_x^\alpha g(x,y) f(y)dy$ $\quad \Delta_x \int_\Omega dy = \int_\Omega \underbrace{\Delta_x g}_{=0} f dy$

$G(x,y)$ - гарм. по $x \in \Omega_i$, для $y \in S$.

$\frac{\partial}{\partial \nu_y} G(x,y)$ - гарм.: $\Delta_x \left(\underbrace{\frac{\partial}{\partial \nu_y} G(x,y)}_{\sum (\nu_j)(y) \frac{\partial}{\partial y_j}}\right) = \frac{\partial}{\partial \nu_y} \underbrace{(\Delta_x G(x,y))}_{=0}$ — когда x и y несмежны, то опер. лапл. $= 0$

$\Rightarrow$ получили, что в $u(x)$ $\int_\Omega$ и $\int_S$ - гармонич. в Ω_i.

$u \in C(\bar{\Omega})$, $u|_S = \varphi$: $\quad u(x) \to \varphi(x^*)$

$\Omega_i \ni x \to x^* \in S$

$u(x) = \int_\Omega G(x,y)f(y)dy + \int_S (-\dots)\varphi dS(y)$ $\quad$ докажем, что $\int_\Omega = 0$, когда точка выходит на границу

а) проверим, что $\int_\Omega G(x,y)f(y)dy \xrightarrow[x \to x^*]{} 0$

мы знаем, что $G(x,y)$: $x = x^* \in S$, то $G(x,y)=0$ $\forall y \in \Omega_i$.

если $x \to x^*$, то $G(x,y) \underset{x\to x^*}{\to} G(x^*,y) = 0$ (беда в том, что стремление не равномерно).

докажем, что $\int_\Omega G(x,y) f(y)dy$ - сх-ся равномер. в $(\cdot)$ x^*

$\int_{\Omega\cap|y-x^*|<\delta} |G(x,y) f(y)|dy < \varepsilon$ $\forall x: |x-x^*|<\delta$. ← нужно док-ть

Нам нужно: $G(x,y) \underset{x\to x^*}{\rightrightarrows} G(x^*,y)$ равном. по y : $\underbrace{|x^*-y| \geq \delta > 0}_{\text{это есть}}$

если $|f(y)| \leq c$, $a \leq G(x,y) \leq \varepsilon(x-y)$, тогда $\int_{\Omega\cap|y-x^*|<\delta} \frac{c}{|x-y|^{n-2}} dy < \varepsilon$ (равном. сх-ть инт-ла со слаб. особенностью)

Нужно док-ть $\int_S \to \varphi(x^*)$ $\underset{x\to x^*}{}$ (похоже на задачу Пуассона в шаре).

обозначим $\int_S (\ )\varphi dS(y) = \tilde{u}(x)$.

$$\tilde{u}(x) = \int_S \frac{\partial}{\partial \nu_y} G(x,y)(\varphi(y)-\varphi(x^*))dS(y) + \int_S \frac{\partial}{\partial \nu_y} G(x,y)\varphi(x^*)dS(y).$$

возьмем $u(x) \equiv 1$ в нашем инт. рав-ве $u(x)$, $-\int_S \frac{\partial}{\partial \nu_y} G(x,y)dS(y) \equiv 1$ $\forall x \in \Omega_i$

$\exists f \equiv 0$, $\varphi \equiv 1$, тогда наша ф-ла превратиться:

$$1 = -\int_S \frac{\partial}{\partial \nu_y} G(x,y)dS(y). \ \forall x \in \Omega_i.$$

$\int_S \frac{\partial}{\partial \nu_y} G(x,y)(\varphi(y)-\varphi(x^*))dS(y) \underset{x\to x^*}{\to} 0$, т.е.

$+\int_S | = |\int_{S\cap|y-x^*|<\delta} + \int_{S\cap|y-x^*|>\delta}| < \varepsilon$ Нужно док-ть.

$|y-x^*|<\delta \Rightarrow |\varphi(y)| - \varphi(x^*)| < \varepsilon$. фиксир. δ, то получ, что 1-ый интеграл становится малым; во втором инт-ле там инт-ль $G(x,y)$ - мал, т.к. на границе $G(x,y) \underset{x\to x^*}{\rightrightarrows} 0$ $|x-y| > \delta/2$

ч.т.д.

$-\Delta u = f$ $\quad u(x) = \underset{\int_\Omega}{u_1(x)} + \underset{\int_S}{u_2(x)}$ $\quad -\Delta u_1 = f$ $\quad -\Delta u_2 = 0$

$u|_S = \varphi$ $\quad u_1|_S = 0$ $\quad u_2|_S = \varphi$.

Собственные числа, собственные ф-ии з. Дирихле.

$\Delta u = \lambda u$ - зад. в Ω_i, $S \in C^2$ Нам нужно $u(x) \not\equiv 0$.

$u|_S = 0$ для $\forall \lambda$ $u(x) = 0$ - всегда реш-ие, но они нас не интересуют.

λ - соб. число, u - собств. ф-ия (когда $u(x) \not\equiv 0$).

$\lambda \in \mathbb{C}$, $u(x) \in \mathbb{C}$ (комплексно значная).

Теорема 1. Собств. числа - кол-ть вещ. чисел $\lambda_i > 0$, $\lambda_i \to +\infty$.
соб. числа - конечной кратности
(кратность λ) $= \dim \{u \mid Au = \lambda u\}$ - собств. подпр-во.

2. Соб. ф-ии - можно выбирать веществ., в L_2 $\exists$ полная ортонорм. сист. из собств. ф-ий.
(u_1, u_2 - с. ф-ии. им соот. $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow u_1 \perp u_2$ в $L_2(\Omega)$).

Док-во: $-\Delta u = f$ поставим з Дирихле
$u|_S = 0$. если $f \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) \Rightarrow \exists u : u(x) = \int_\Omega G(x,y) f(y) dy$

$$f(x) = \lambda u(x) \Rightarrow u(x) = \int_\Omega G(x,y) \lambda u(y) dy$$
$\in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$

интегр. опер-р. $(Tu)(x) = \int_\Omega G(x,y) u(y) dy$

λ - соб. число, u - соб. ф. $\Delta_i \Rightarrow \lambda^{-1}, u$ - с.ф. опер-ра T.
$\to \lambda^{-1} u = Tu$.
$\leftarrow$ если есть с.ч. и с. ф. для опер-ра T, то есть рав-во $\lambda^{-1} u(x) = \int_\Omega G(x,y) u(y) dy$
$\lambda^{-1} \neq 0$ это мы увидим

$$\lambda^{-1} u(x) = \int_\Omega G(x,y) u(y) dy$$ - интегр. оператор с непрер. ядром действ. из $L^p \to C$.
$$= \int_\Omega \mathcal{E}(x-y) u(y) dy + \int_\Omega g(x,y) u(y) dS(y)$$ - непр. ф-ии, если $u \in L_2$.

T - опер-р в $L_2(\Omega)$, $u \in L_2(\Omega)$.

нужно показать, что этот оператор будет действовать из L^p в L^{p_1}, где $p < p_1$.

Возьмем $u \in L_2(\Omega) \Rightarrow$ Рассм. $\underbrace{\int_\Omega \mathcal{E}(x-y) u(y) dy}_{\in C(\bar{\Omega})} + \underbrace{\int_\Omega g(x,y) u(y) dy}$
$g \in C(\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}), C^\infty(\Omega \times \Omega)$
$\Rightarrow \int_\Omega g \in C(\bar{\Omega}) \cap C^\infty(\Omega)$

$\Rightarrow u \in C(\bar{\Omega})$.

$\int_\Omega \mathcal{E}(x-y) u(y) dy = W^u(x) \in C^1(\bar{\Omega})$ док-но, когда Δ объемного потенциала.
инт. опер-р. со слаб. особ-тью

$\Rightarrow u \in C^1(\bar{\Omega}) \Rightarrow W^u(x) \in C^2(\Omega)$, $\int_\Omega \in C(\bar{\Omega}) \cap C^\infty(\Omega)$.
т.к. пл-ть $u \in C^1(\bar{\Omega})$

$u \in C^2 \Rightarrow \int_\Omega G(x,y)\,u(y)\,dy$ - реш-ие з. Д.

Док-ем, что задача на собств. числа $\begin{cases} -\Delta u = \lambda u \\ u|_S = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda^{-1} u = Tu \\ u \in L_2(\Omega). \end{cases}$

Хотим увидеть, что <u>λ - с. число $\Rightarrow$ λ - вещ., >0.</u>

$-\Delta u = \lambda u \cdot \bar{u}(x)$.

$$\underbrace{\int_\Omega (-\Delta u)\cdot \bar{u}\,dx}_{\text{можно интегрир. по частям}} = \int_\Omega \lambda |u(x)|^2 dx$$

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_S \Big(-\frac{\partial u}{\partial \nu}\cdot \underbrace{\bar{u}}_{=0}\Big) dS$$

$$\underbrace{\int_\Omega \sum_{k=1}^{n} u_{x_k}\bar{u}_{x_k}\,dx}_{>0} = \lambda \underbrace{\int_\Omega |u|^2 dx}_{>0} \Rightarrow \lambda > 0$$

<u>С.ф. - можно брать веществ.</u>:

$u(x)$ - с.ф. $\Rightarrow \alpha u(x)$ - тоже с.ф. $\alpha \in \mathbb{C}$.

$\exists u(x)$ - с.ф. для с.ч. λ.

$-\Delta u = \lambda u \qquad (-\Delta)(\mathrm{Re}\, u) = \lambda \cdot (\mathrm{Re}\, u)$.

$u|_S = 0 \qquad \mathrm{Re}\, u|_S = 0. \qquad \mathrm{Im}\, u$ - тоже с.ф.

$\exists c \in \mathbb{C}$, то $c u(x) = \bar{c}\,(\mathrm{Re}\, u(x))$

На практике решали з. Штурма-Лиувилля

$-y'' = \lambda u$

$y(0) = y(l) = 0$

$y(x) = (u+1)\sin\frac{\pi k x}{l}$

т.е. собств. ф-ию можно умножить на число $\in \mathbb{C}$.

можно подобрать коэфф. так, что ф-ию можно представить вещ. образом.

<u>если $\lambda_1 \neq \lambda_2$ - с. числа, u_1, u_2 - с.ф. $\Rightarrow u_1 \perp u_2$ в $L_2(\Omega)$</u>

u_1, u_2 - веществ.

$$\int_\Omega (-\Delta u_1) u_2\,dx = \int_\Omega u_1 (-\Delta u_2)\,dx - \int_S \Big(\underbrace{\frac{\partial u_1}{\partial \nu} u_2}_{0} - \underbrace{\frac{\partial u_2}{\partial \nu} u_1}_{0}\Big) dx$$

0 на грани

$$\int_\Omega \lambda_1 u_1 u_2\,dx = \int_\Omega u_1 \lambda_2 u_2\,dx.$$

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\int_\Omega u_1 u_2\,dx = 0 \Rightarrow \int_\Omega u_1 u_2\,dx = 0, \quad \int_\Omega u_1 \bar{u}_2\,dx = 0 \Rightarrow (u_1, u_2) = 0.$$ <u>ч.т.д.</u>

Итак: $\begin{cases} -\Delta u = \lambda u \\ u|_S = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda^{-1} u(x) = \int_\Omega G(x,y)\,u(y)\,dy \qquad Tu = \mu u, \ \mu = \lambda^{-1}$

<u>$n \geq 3$</u> $\quad 0 \leq G(x,y) \leq \mathcal{E}(x-y). \qquad \left(n=2 \quad -\frac{1}{2\pi}\ln|x-y| + C\right).$

т.к. фунд. реш-ие $-\frac{C}{|x-y|^{n-2}}$ - это ядро со слаб. особ., тогда $G(x,y)$ - ядро со слаб.

особ., т.о. опер. T компакт. $L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$. Мы знаем, что $G(x,y) = G(y,x) \Rightarrow T = T^*$ (самосопряж.)
симм.

Из ФАН: $T = T^*$, компл. в $H = L_2(\Omega) \Rightarrow$ а) в H $\exists$ полная орн.с $\{u_j\}$

в) с.числа $\{\mu_i\}$ - пост-ть вещ. чисел, $\downarrow$ стремл. к 0 ($\mu = \mu_i \to 0$).

может быть что бесконч. числу с.ф. соотв. нулевое соб.число, но у нас такого не будет т.к. мы знаем, что все соб.числа опер-ра $T > 0$. Мы знаем, что кратность $\neq 0$ в.ч. конечна.

Следствие. $\forall u \in L_2(\Omega)$, $u = \sum_{j=1}^{\infty} c_j u_j$ - сх-ся в $L_2(\Omega)$.

$$c_j = (u, u_j) = \int_\Omega u \cdot u_j \, dx$$
$$u \cdot \bar{u}_j \, dx$$

$e^x \in L_{1,loc}(\Omega)$

ГЛАВА. Пространства Соболева.

Опр. $u \in L_{1,loc}(\Omega)$ - локально интегр. $\Omega \subset R^n$ ($\forall K \subset \Omega$ $u \in L_1(K)$: $\int_K |u(x)| dx < \infty$).
$V \in L_{1,loc}(\Omega)$. V - наз-ся обобщ. производной ф-ии u порядка α, в обл. Ω: $V = \partial^\alpha u$ $\alpha = \alpha_1, \dots, \alpha_n$ $\partial^{\alpha_1}_{x_1} \dots \partial^{\alpha_n}_{x_n} u$, если $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ вып-ся

$$\int_\Omega u \partial^\alpha \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega V \varphi \, dx.$$ (аналог инт. по частям).

$u \in C^k(\Omega)$, $|\alpha| \le k$, Ω - огр. обл. $S = \partial\Omega = C^2$

$$\int_\Omega u \varphi_{x_j} dx = -\int_\Omega u_{x_j} \varphi \, dx + \int_S u \varphi \cos(\nu, x_j) dS(x). \quad \forall u \in C^1(\bar{\Omega}).$$

если $\varphi|_S = 0 \Rightarrow \int_S dS = 0$.

если $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ $\int_\Omega u \varphi_{x_j} dx = -\int_\Omega u_{x_j} \varphi \, dx$ $\forall \Omega$.

(при каждом дифф. насчет. - $\Rightarrow$ в основ. ф-ие $(-1)^{|\alpha|}$)

классич. произв. совп. с соболевской производной (т.к. она попала в этот мест в ф-ие по частям)

Свойства:

1. $u \in C^k(\bar{\Omega}) \Rightarrow \exists$ собств. произв. $\partial^\alpha u$, $|\alpha| \le k$, где собл. $\partial^\alpha u = \partial^\alpha u$ классич.

2. Соболевская производная единственная (с точностью до п.в.). $V_1, V_2 \in L_{1,loc}(\Omega)$.

$\int_\Omega u\partial^\alpha\varphi dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega v\,\varphi dx \quad j=1,2. \Rightarrow v_1(x)=v_2(x)$ п.в.

$\int_\Omega \underbrace{(v_1-v_2)}_{=0,\text{ по основ. лемме вариац. исчисления!}}\varphi dx = 0 \quad \forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$

$(f\in L_{1,loc}(\Omega), \forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$, $\int_\Omega f\varphi dx=0 \Rightarrow f(x)=0$ п.в.)

3. $v=\partial^\alpha u$ в Ω $\Rightarrow v=\partial^\alpha u$ в $\tilde\Omega\subset\Omega$ (можно уменьшить область и ф-ла останется верной)
собол.

---

4. Обобщ. ф-ии $f\in\mathcal{D}'(\Omega)$, то $\partial^\alpha f\in\mathcal{D}'(\Omega)$ - лин. непр. функ-л, у действует:
$\langle\partial^\alpha f,\varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle f,\partial^\alpha\varphi\rangle$.
когда говорим о собств. произв. то действие функ-ов это интеграл, т.е.
$\int_\Omega v\varphi dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega u\partial^\alpha f dx$.
$\langle f,\varphi\rangle = \int_\Omega \underbrace{u}_{\in L_{1,loc}}\varphi dx$, тогда f назыв регулярной обобщ. функ-ей.
$\partial^\alpha f$ - тоже должна быть регул. обобщ. ф-ей.

5. $\partial^\alpha(a_1u_1+a_2u_2) = a_1\partial^\alpha u_1 + a_2\partial^\alpha u_2 \qquad u_1,u_2\in L_{1,loc}(\Omega)$.
(т.е. линейность производной). т.к ф-ла интегр. по частям линейна

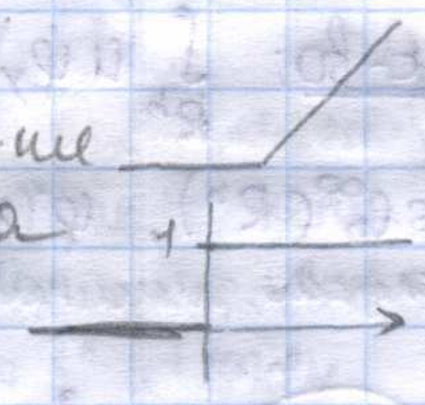
Примеры: 1) $\Omega=\mathbb{R}$, $u(x)=\begin{cases}x, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$

считаем 1-ую произв.: $\int_{-\infty}^{\infty} u\varphi' dx = \int_0^\infty x\varphi' dx$ (=). $\quad \varphi\in C_0^\infty(-\infty,\infty)$, $\varphi(x)=0, |x|\ge a$

(=) $\int_0^a x\varphi' dx = \underbrace{x\varphi|_0^a}_{=0} - \int_0^a\varphi dx = -\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{\chi_+(x)}_{v(x)}\varphi dx$.

$\Rightarrow u' = \chi_+(x) = \begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x<0\end{cases}$ была ф-ия

u'': $\int_{-\infty}^{\infty} u\varphi'' dx = \int_0^\infty x\varphi'' dx$ (=) а стала

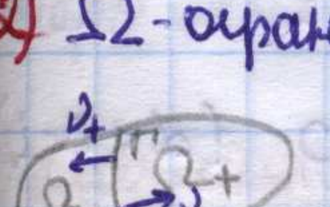


(=) $-\int_0^\infty\varphi'(x)dx = \varphi(0) = \langle\delta,\varphi\rangle$

$\varphi\mapsto\varphi(0)$, но δ - не лев-ся собств. производ., т.к нельзя представ. в виде интеграла.

($\exists u''=\delta$, $\nexists u''$ собол.)

2) Ω - огран. $\subset\mathbb{R}^n$, $\underset{S}{\partial\Omega}\in C^1$. имеется пов-ся Γ, которая делит на 2 части.
$\Gamma\in C^1$



$u(x)=\begin{cases}u_+(x), & x\in\Omega_+\\ u_-(x), & x\in\Omega_-\end{cases} \qquad u_\pm(x)\in C^1(\bar\Omega_\pm)$

Утв. $\exists\, u_{x_j}$ - собств. $\Leftrightarrow u \in C(\overline{\Omega})$.
$1 \le j \le n$. $\qquad u_+(x)|_\Gamma = u_-(x)|_\Gamma$

Док-во: ($\Leftarrow$). $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ $\quad \int\limits_\Omega u\varphi_{x_j}\,dx = \int\limits_{\Omega_-} u_-\varphi_{x_j}\,dx + \int\limits_{\Omega_+} u_+\varphi_{x_j}\,dx. =$

ф-ии u_-, u_+ гладкие (вплоть до границы, можем интегр. по частям.

$$= -\int\limits_{\Omega_-}(u_-)_{x_j}\varphi\,dx + \int\limits_{\partial\Omega_-} u_-\varphi\cos(\nu, x_j)\,dS(x) - \int\limits_{\Omega_+}(u_+)_{x_j}\varphi\,dx + \int\limits_{\partial\Omega_+} u_+\varphi\cos(\nu_+, x_j)\,dS(x) = -\int\limits_\Omega v\varphi\,dx + \int\limits_\Gamma (u_+ - u_-)\varphi\cos(\nu_+, x_j)\,dS(x) = -\int\limits_\Omega v\varphi\,dx + \int_\Gamma$$

предельные значения.

Если ф-ия необязательно непрер. $u \in C(\Omega)$, то $u_+|_\Gamma \ne u_-|_\Gamma$, где скачок $= 0$. $\Rightarrow \int_\Gamma = 0$.

$$v = \begin{cases} (u_+)_{x_j}, & x \in \Omega_+ \\ (u_-)_{x_j}, & x \in \Omega_- \end{cases}$$

Упр. ($\Rightarrow$) нужно док-ть, если $\forall\varphi$ и $\forall$ напр. x_j $\int = 0$, то скачок $= 0$.

3) $\Omega = \mathbb{R}^n \qquad u(x) = |x|^{-\alpha}$

Знаем, что $\int\limits_{B(0,R)} u(x)\,dx < \infty \Leftrightarrow \alpha < n$

посчит. классич. произв.: u_{x_j} - класс. $(|x|^{-\alpha})_{x_j} = -\alpha\dfrac{1}{|x|^{\alpha+1}}\dfrac{x_j}{|x|}$
если $\alpha + 1 < n$, тогда ф-ия лок. интегрир.

Утв. $\alpha < n-1 \Rightarrow \underbrace{(|x|^{-\alpha})_{x_j}}_{\text{классич.}} = \underbrace{(|x|^{-\alpha})_{x_j}}_{\text{соболевская.}}$ (т.е. пока подынт. ф-ция суммируема)

Док-во: $\int\limits_{\mathbb{R}^n} u\varphi_{x_j}\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\dfrac{\varphi_{x_j}}{|x|^\alpha}\,dx = \lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\varepsilon<|x|<a}\dfrac{\varphi_x}{|x|^\alpha}\,dx.$

$\left[\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),\ \varphi(x) = 0,\ |x| \ge a\right]$
случай, финитная.

$$\int\limits_{\varepsilon<|x|<a}\frac{\varphi_x}{|x|^\alpha}\,dx = -\int\limits_{\varepsilon<|x|<a}\varphi(x)(|x|^{-\alpha})_{x_j}\,dx + \int\limits_{\partial\Omega_\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{|x|^\alpha}\cos(\nu, x_j)\,dS(x).$$

$\partial\Omega_\varepsilon = S_\varepsilon \cup S_a \qquad \int\limits_{S_a} = 0 \quad (\varphi(x) \equiv 0,\ |x| \ge a).$

Х мал. сферу: $\displaystyle\int\limits_{S_\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{|x|^\alpha}\cos(\nu, x_j)\,dS(x) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$

$$\left|\int\limits_S\right| \le \frac{1}{\varepsilon^\alpha}\max_{|x|=\varepsilon}|\varphi(x)|\cdot\underbrace{|S_\varepsilon|}_{|S_1|\varepsilon^{n-1}} = c\cdot\varepsilon^{n-\alpha-1} \to 0 \quad (\alpha < n-1).$$

$$\int_{R^n} \frac{1}{|x|^\alpha} \varphi_{x_j}\, dx = -\int_{R^n} \left(\frac{1}{|x|^\alpha}\right)_{x_j} \varphi(x)\,dx.$$ ч.т.д. ($\alpha < n-1$, тогда имеем право интегрир. по частям).

Соболевские пространства для $n=1$.

Опр 1 $u(x)$ на $[a,b]$ наз-ся абсол. непрер. на $[a,b]$, если для $\forall \varepsilon>0$ $\exists \delta>0$: $\forall$ $\mathrm{dis}(\alpha_k, \beta_k) \subset [a,b]$ $1 \le k \le N$: $\sum (\beta_k - \alpha_k) < \delta \Rightarrow$

многой конечный дизъюнктный набор.

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{N} |u(\beta_k) - u(\alpha_k)| < \varepsilon.$$

если $N=1$: $|\beta - \alpha| < \delta \Rightarrow |u(\beta) - u(\alpha)| < \varepsilon$ (равном. непр-ть).

β, α - произв. точки, у бегают на $[a,b]$.

$]u(\beta) \ge u(\alpha)$. $\beta > \alpha$, u монот. возр., то у ф-ии имеется пред. значение слева и справа.

$\mu(\alpha, \beta] = u(\beta) - u(\alpha)$.

можно построить меру (Лебега-Стильтьеса) по ф-ии u, она м.б. абсол. непрер. отн-но Меры Лебега.

абсол. непр-ть: $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0$: $|E|_{леб.} < \delta \Rightarrow \mu(E) < \varepsilon$.

Наше опред. написано, если $E = \bigcup_k [\alpha_k, \beta_k)$.

абсол. непр-ть: абсол. непр. меры постр. по монот. ф-ии.

$\{u$ - не монот. : $u = u_+ - u_-$ Мера, порожд. ф-ей u — это разность 2-х мер.

монотонные

мера μ - абсол. непрер. $\Leftrightarrow \exists p(x)$: $\mu(E) = \int_E p(x)\,dx$. $p(x) = \frac{d\mu}{dx}$.

$\in L_1(dx)$ (суммир. по мере Лебега)

Опр 2. ф-ия $u(x)$ абсол. непр. на $[a,b]$, если 1) ф-ия u непр. на $[a,b]$, 2) $\exists u'(x)$ - мож. произв. п.в., 3) справ. ф-ла Ньютона-Лейбница:

$\in L_1[a,b]$

$$u(x) = u(x_0) + \int_{x_0}^{x} u'(y)\,dy.$$

u' м. быть, а ф-ла Лейбница не вып-ся, $\Rightarrow$ усл-ия 2) и 3) независ.

Незнакопр. мера, порожд. немонот. ф-ей абсол. непрер. отн-но меры Лебега.

Замечание u - абс. непрер. на $[a,b]$, $\varphi \in C^\infty[a,b] \Rightarrow u\varphi$ - абс. непр. на $[a,b]$.

(это мы будем исп-ть для гладких финиш ф-ий)

Док-во: по опр 1. $u(\beta_k)\varphi(\beta_k) - u(\alpha_i)\varphi(\alpha_i)$.
φ мало мен-ся: $|\varphi(\beta)-\varphi(\alpha)| < C|\beta-\alpha|$.

Теорема. $u \in L_{1,loc}(a,b)$ - имеет собст. пр-ную $\Leftrightarrow u(x) \underset{п.в.}{=} \hat{u}(x)$.
$\hat{u}(x)$ - абс. непр. на $[\alpha,\beta]$. $\forall [\alpha,\beta] \subset (a,b)$.

(имеет соб. произв. $\Leftrightarrow$ когда её можно изменить на мн-ве 0-ой меры, так что она станет непрер.)

Док-во:
$u(x)$ - абс. непр. на $[a,b]$, $\varphi \in C_0^\infty(a,b) \Rightarrow u\varphi \in C_0^\infty(a,b)$.
$\exists$ классич. произв. $(u\varphi)'$. по ф-ле Ньютона-Лейбница: $u(x)\varphi(x) = u(x_0)\varphi(x_0) + \int_{x_0}^{x} (u'\varphi + u\varphi')dy$; $x = b$, $x_0 = a \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_a^b u'\varphi dx = -\int_a^b u\varphi' dx$ - есть $\forall \varphi \in C_0^\infty(a,b)$, т.е. док-ли $\Leftarrow$.
собст. произв. $\equiv$ классик.

$\Rightarrow$. есть соб. произв., нужно сдел. чтобы ф-ция была абс. непрер.
$u \in L_{1,loc}(a,b)$, $\exists\, u'_{соб.} \in L_{1,loc}(a,b)$. $\forall [\alpha,\beta] \subset (a,b)$, тогда ф-ция суммир. на $[\alpha,\beta]$.
$\Rightarrow u' \in L_1(\alpha,\beta)$ $\quad v(x) = \int_\alpha^x u'(y)dy$, v - абс. непрер. $\Rightarrow v$ по $\Leftarrow$

$\exists$ собст. произв. v' = классик. произв., т.е. $v'(x) = u'(x)$ п.в.

Тогда $\forall$ разность: $u(x) - v(x)$, $\exists$ собст. произв. $(u-v)' = 0$ на (α,β)

(вспомин. об обоб. ф-ции: $T \in \mathcal{D}'(a,b)$, $T' = 0 \Rightarrow T = const$, т.е. $(T,\varphi) = \int_a^b c\varphi dx$)

$\Rightarrow$ мы получили произв. в смысле обобщ. ф-ции $\Rightarrow u(x) - v(x) = const$ п.в. на $[\alpha,\beta]$.

$\Rightarrow u(x) \underset{п.в.}{=} c + \int_\alpha^x \underbrace{u'(y)}_{собст. произв.} dy \Rightarrow$ прав часть это $\hat{u}(x)$ - абсол. непр. (перем. интеграл от суммир. ф-ции это абс. непрер. ф-ия).

ч.т.д.

Замкнутость обобщ. дифференцирования.

$\{u_k\}_1^\infty \in L_{1,loc}(\Omega)$ - лок. интегр. - обл., $\quad \exists$ собст. произв. $\{\partial^\alpha u_k\}_1^\infty \subset L_{1,loc}(\Omega)$

(Обобщ. ф-ции: если $f \in L_{1,loc}(\Omega)$, то имеем фун-л $(T_f,\varphi) = \int_\Omega f\varphi dx$, $f \leftrightarrow T_f$

$\{T_k\} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$, $T_k \to T$ в $\mathcal{D}'(\Omega)$, если $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ $(T_k, \varphi) \to (T, \varphi)$
$\in C_0^\infty(\Omega)$

если T_k - регулярные, т.е. порожд. ф-циями u_k, тогда $u_k \to u$ в $\mathcal{D}'$,
если $T_{u_k} \to T_u$ в $\mathcal{D}'$

(сх-ть u_k-ых это сх-ть функционала)

<u>Теорема</u> (замк-ть дифф.) $u_k \to u$ в $\mathcal{D}'$ ($\forall \varphi \in C_0^\infty$ $\int_\Omega u_k \varphi dx \to \int_\Omega u \varphi dx$)
и $\partial^\alpha u_k \to v$ в $\mathcal{D}'$. Тогда $\exists$ собств. $\partial^\alpha u$, $\partial^\alpha u = v$

<u>Док-во</u>: $K: X \to Y$ K-непрер.
$u_j \to u$ в $X \Rightarrow Ku_j \to Ku$ в Y.
Если $\{u_j\}$, $u_j \to u$ и $K = \partial^\alpha$ $Ku_j \to v \Rightarrow v = Ku$.

Оранж. $X \times Y$ и $\forall$ пары $\{u, Ku\}$, у образуют график K - замкнут.
(предел точек графика, яв-ся точкой графика)

$\partial^\alpha u_k$: $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ $\int_\Omega \partial^\alpha u_k \cdot \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u_k \partial^\alpha \varphi dx$

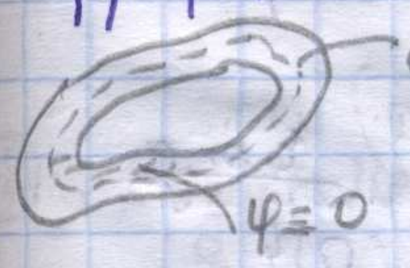
$$\underbrace{(T_{\partial^\alpha u_k}, \varphi)} = (-1)^{|\alpha|} \underbrace{(T_{u_k}, \partial^\alpha \varphi)}$$ если фиксир. φ.

$$(T_v, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (T_u, \partial^\alpha \varphi) \Rightarrow$$ ф-ия v яв-ся собств. произв.

перепишем это в инт-ах:
$$\int_\Omega v \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u \partial^\alpha \varphi dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \Rightarrow v = \partial^\alpha u.$$ ч.т.д.

<u>Замечание</u> (что нужно для сх-ти в $\mathcal{D}'$, у обычн. пред. перехор в инт-ле)
$u_k \to u$ в $\mathcal{D}'$, если для $\forall \tilde{\Omega}$ $u_k \to u$ в $L_p(\tilde{\Omega})$ $\|u_k - u\|_p \to 0$.

<u>Док-во</u>: проверим, что $\int_\Omega (u_k - u)\varphi dx \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$ для фиксир. $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.
если фиксир. φ, то она будет сущест. не только в Ω, но и в более узкой обл-ти.
supp φ - компакт. $\Rightarrow \exists \tilde{\Omega} \subset \Omega$, $\varphi \in C_0^\infty(\tilde{\Omega})$.



$$\int_\Omega = \int_{\tilde{\Omega}} (u_k - u)\varphi dx \to \left|\int_{\tilde{\Omega}}\right| \le \underbrace{\|u_k - u\|_{L_p(\tilde{\Omega})}}_{\to 0} \cdot \|\varphi\|_{L_{p'}(\tilde{\Omega})}$$ нер-во Гельдера

из сх-ти внутри $L_p \Rightarrow$ сх-ть в $L_{p'}$.

$u_k \to u$ в $L_p(\tilde{\Omega})$
$\partial^\alpha u_k \to v$ в $L_p(\tilde{\Omega})$ $\Rightarrow v = \partial^\alpha u$ - соб. произв.

ч.т.д.

<u>Упр</u> 1) $u \in L_{1,loc}$, $\exists$ u_{x_j} - собств. произв. $\in L_{1,loc}$. если $a \in C^1(\Omega)$, то $(au)_{x_j}$ - собств.

$(au)_{x_j} = a_{x_j} u + a u_{x_j}$.

2) Ω - обл., $\Phi: \Omega \to \tilde{\Omega}$ - диффеоморфр. $\Phi \in C^\infty$, $\exists \Phi^{-1} \in C^\infty$
если $u \in L_{1,loc}(\Omega)$, $\exists$ u_{x_j} - собств., $1 \le j \le n \Rightarrow u \circ (\Phi^{-1}) = \tilde{u}(\tilde{x})$
$\left(u(x) = \tilde{u}(\underbrace{\tilde{x}(x)}_{\Phi(x)}) \right)$, то $\exists \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}_k} = \sum\limits_{j=1}^{n} (u)_{x_j} \dfrac{\partial x_j}{\partial \tilde{x}_k}$

Пространства Соболева

$W_p^l(\Omega) = \{ u \in L_p(\Omega) \mid \forall |\alpha| \le l \ \ \exists \partial^\alpha u \in L_p(\Omega) \ \ 1 \le p \le \infty, l \ge 0 \}$.
пр-во соболева

$\|u\|^p_{W_p^l} = \sum\limits_{|\alpha| \le l} \|\partial^\alpha u\|^p_{L_p}$, $\|u\|_{W_1^l} = \left(\int\limits_\Omega \sum\limits_{|\alpha|=1} |\partial^\alpha u|^p dx \right)^{1/p}$ $p < \infty$

Теорема $W_p^l(\Omega)$ - полное (банахово).

Док-во: полнота: $\{u_k\}$ - фунд. посл-ть в W_p^l, $\exists u \in W_p^l : \|u_k - u\|_{W_p^l} \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$
фунд-ть: $\|u_k - u_{k'}\|_{W_p^l} \to 0$ $(k, k' \to \infty) \Leftrightarrow \|u_k - u_{k'}\|_p \to 0$ $(k, k' \to \infty)$
[сх-ть в пр-ве W_p^l: $u_k \to u$ в $W_p^l(\Omega) \Leftrightarrow u_k \to u$ в L_p
$\forall \alpha : |\alpha| \le l$ $\partial^\alpha u_k \to \partial^\alpha u$ в L_p]

фиксир. α, $\{u_k\}$, - фунд. в $L_p(\Omega)$
$\{\partial^\alpha u_k\}$ - фунд. в $L_p(\Omega)$ (аналогич. с $\{u_k\}$)

т.к. $L_p(\Omega)$ - полное $\Rightarrow \exists u \in L_p$, $v_\alpha \in L_p$: $u_k \to u$ в L_p, $\partial^\alpha u_k \to v_\alpha$ в L_p.

Замкнутость: $v_\alpha = \partial^\alpha u$, т.е. $\exists$ собств. произв. $\partial^\alpha u$, $|\alpha| \le l$; $u \in L_p \Rightarrow$
$\partial^\alpha u \in L_p \Rightarrow u \in W_p^l(\Omega)$.

Мы видим, что $u_k \to u$ в L_p
$\forall |\alpha| \le l$ $\partial^\alpha u_k \to \partial^\alpha u$ в L_p $\Leftrightarrow u_k \to u$ в $W_p^l(\Omega)$
(т.е. вслед полнотой L^p и замкнутостью дифф-ия) ч.т.д.

4 частный случай: $W_2^1(\Omega) = \{ u \in L_2(\Omega) \mid \exists \underset{\text{собств.}}{u_{x_j}} \in L_2(\Omega) \}$

можем записать: $(u, v)_{W_2^1(\Omega)} = \int\limits_\Omega u\bar{v} + \sum\limits_{j=1}^{n} u_{x_j} \bar{v}_{x_j} dx$

$(u, u)_{W_2^1} = \|u\|^2_{W_2^1}$, $W_2^1(\Omega)$ - гильбертово.

Пример: $u = |x|^{-\alpha}$, $\exists$ собств. произв. u_{x_j} в $\mathbb{R}^n$, если $\alpha < n-1$

если фиксир. Ω, то возьмем $|x-x_0|^{-\alpha}$, $x_0 \in \Omega$ (если $\alpha < n-1$), то она попад в какое-то L_p.

$u_{x_j} = (-\alpha)|x|^{-(\alpha+1)} \frac{x_j}{|x|}$. Если $(\alpha+1)p < n$ $u_{x_j} \in L_{p,loc}(\mathbb{R}^n)$, то

можно заменить $(-\alpha)|x-x_0|^{-(\alpha+1)} \cdot \frac{(x-x_0)}{|x-x_0|}$

$$\int_\Omega |u|^p + \sum_{j=1}^n |u_{x_j}|^p dx \le \int_{\substack{B(x_0,R) \\ \cup \\ \Omega}} |u|^p + \sum |u_{x_j}|^p dx = C \text{ (независит от } x_0)$$

Что получается: $u(x) = |x-x_0|^{-\alpha}$

$u \in L_p(\Omega)$, $\|u\|_{W_p^l} \le C$.

4 ряд, составл. из сдвигов $u(x)$; $\{x_l\}$ - рац. точки в Ω.

$u(x) = \sum_{l=1}^{\infty} 2^{-l} u(x-x_l)$ - сх-ся абс. в W_p^l, т.к. $\sum \|2^{-l} u(x-x_l)\|_{W_p^l} \le$

и пр-во полное $\Rightarrow$ ряд сх-ся в $W_p^l(\Omega)$, в част-ти ряд сх-ся в L_p $\le C \sum 2^{-l} = 2C$.

каждый член ряда в какой-то рац. точке $= \infty$ $\Rightarrow$ нет производных классич.

(хотя есть собол. произв. 1-ого пор-ка).

<u>Пример</u>. (чтобы существовала n-ая собол. производ не нужно существов. производных предыдущих порядков)

$\Omega \subset R^2$, $f(x)$, $g(y)$; $x \mapsto x, y$. $f(x)$, $g(y)$ - не абс. непрер. (м.б. непрер.).

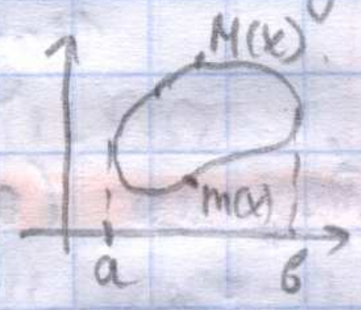
$u(x,y) = f(x) + g(y)$ (нет собол. произв. 1-ого порядка, т.к. её нет у f и g).

Утверждаем, что $\exists\, u_{xy}$ собол. и $u_{xy} = 0$.

Проверим это: $\int_\Omega u \varphi_{xy} dx dy \overset{?}{=} 0$ $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ - если докажем

$\| $

$(-1)^2 \int_\Omega \underbrace{u_{xy}}_{=0} \varphi dx dy$



$$? : \int_\Omega \underbrace{f(x)\varphi_{xy}(x,y)}_{\text{класс. произв.}} dx dy = \int_\Omega (f(x)\varphi_x(x,y))_y dx dy = \int_a^b dx \int_{m(x)}^{M(x)} (f(x)\varphi_x(x,y)dy)_y$$

т.к. f не завит от y классич. произв.

$$= \int_a^b f(x)\varphi_x(x,y)\Big|_{y=m(x)}^{y=M(x)} dx = 0$$

т.к. φ - финит., то на границе φ и вся её произв. $= 0$.

Этот пример связан с волновым ур-нием: $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$. $u(x,t) = f(x-at) + g(x+at)$.

если $x-at = \xi$, $x+at = \eta$ $\Rightarrow$ ур-ие $u_{\xi\eta} = 0$, общ. реш-ие $f(\xi) + g(\eta)$

Сейчас мы увидим, что ф-ии f и g м.б. произвольными.

Пространство $\overset{\circ}{W}{}_p^l(\Omega)$

$\overset{\circ}{W}{}_p^l(\Omega)$ исход. пр-во будет $C_0^\infty(\Omega)$.

$\overset{\circ}{W}{}_p^l(\Omega) = \{u \in W_p^l(\Omega) \mid \exists \{u_j\} \in C_0^\infty(\Omega) : u_j \to u$ в $W_p^l(\Omega)\}$.

предел гладких финит. ф-ий.

$W_p^l \supset C_0^\infty(\Omega)$.

- линейное подмн-во, оно не замкнуто. Замкнем его, т.е. $\overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W_p^l}$ = предел $\Rightarrow$ получим $\overset{\circ}{W}{}_p^l$.

$\overset{\circ}{W}{}_p^l(\Omega) \subset W_p^l(\Omega)$ $\quad \| \ \|_{\overset{\circ}{W}} = \| \ \|_{W_p^l}$

замкнутое подпр-во.

т.к. $\overset{\circ}{W}{}_p^l$ - замкн. подпр-во полного пр-ва $\Rightarrow \overset{\circ}{W}{}_p^l$ - полное (банахово) ($p=2 \Rightarrow$ гильберт. пр-во).

<u>Вопрос</u>: $\overset{\circ}{W}{}_p^l(\Omega) = W_p^l(\Omega)$? Это возможно.

<u>Теорема</u>. $\Omega = R^n$: $\overset{\circ}{W}{}_p^l(R^n) = W_p^l(R^n)$.

(Это так, т.к.: $\int_{R^n} |u|^p dx < \infty$, $\int_{R^n} |u_{x_j}|^p dx < \infty$.

инт-л по больш. шару даст инт-л почти по всему R^n

т.е. $\int_{|x|>R} |u|^p dx \to 0$, $R \to \infty$, ф-ие u можно отлич. по норме от финитной ф-ии (т.е. мы можем обрезать ф-ию и сделать её финитной).

Плотность мы не обсуждаем.

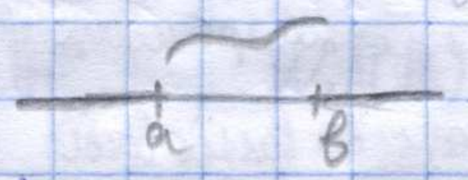
<u>Теорема</u> (о продолжении нулем).

$u \in \overset{\circ}{W}{}_p^l(\Omega)$, строим $\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x), & x \in \Omega \\ 0, & x \bar{\in} \Omega \end{cases}$ $\quad \tilde{u}(x)$ - ф-ия в R^n - продолжение нулем.

Тогда $\tilde{u} \in W_p^l(R^n)$.

$W_p^l(\hat{\Omega})$, $\forall \hat{\Omega} \supset \Omega$.

<u>Пример 1</u> $u = 1$, $\Omega = (a, b)$.



$u \in W_p^l(a,b)$ ($\exists u'$ - собств.) $\Rightarrow u(x) = u^*(x)$ абсол. непр. на (a, b)

u^* продолж нулем $\Rightarrow$ могут разрывы $\Rightarrow$ на гр. обл-ти $\tilde{u}^*$ не абсолю. непрер. (не непрер.)

$\Rightarrow$ производной (собств.) нет на $\tilde{\Omega} \supset (a, b)$.

Вывод: если хотим, чтобы $u \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(a, b) \Rightarrow$ нужно, чтобы $u^*(x) = 0$ $x = a, b$. (Это необход. усл-ие).

<u>Док-во</u>: (главное док-ть сущ-ие собств. произв.); $\|\tilde{u}\|^p_{W_p^l(\tilde{\Omega})} = \int\limits_{\tilde{\Omega}} \sum\limits_{|\alpha| \le l} |\partial^\alpha \tilde{u}(x)|^p dx$

Т.к. $\partial^\alpha \tilde{u}(x) = 0$, $x \notin \Omega$ $\Rightarrow$ инт-л св-ся к инт-лу по обл-ти.

т.е. $\int\limits_{\Omega} \sum\limits_{|\alpha| \le l} |\underbrace{\partial^\alpha \tilde{u}}_{\partial^\alpha u}|^p dx = \|u\|^p_{W_p^l(\Omega)}$.

$u \in \overset{\circ}{W}{}_p^l(\Omega)$ $\exists \{u_j\} \subset C_0^\infty(\Omega)$; $u_j \to u$ в $W_p^l(\Omega)$, т.е. $u_j \to u$ в $L_p(\Omega)$

гладкие, финитные

$\forall |\alpha| \le l$ $\partial^\alpha u_j \to \partial^\alpha u$ в L_p.

Берем $\{\tilde{u}_j\}$ – продолж. нулем; $\tilde{u}_j \in C_0^\infty(\tilde{\Omega})$ $(\forall \tilde{\Omega} \supset \Omega)$.

т.к. $\{u_j\}$ сх-ся в L_p, то $\{u_j\}$ св-ся фунд. посл-тью $\Rightarrow \|u_j - u_{j'}\|^p_{L_p} =$

$= \int\limits_{\Omega} |u_j - u_{j'}|^p dx = \int\limits_{\tilde{\Omega}} |\tilde{u}_j - \tilde{u}_{j'}|^p dx = \|\tilde{u}_j - \tilde{u}_{j'}\|^p_{L_p(\tilde{\Omega})}$.

$\Rightarrow \{\tilde{u}_j\}$ – фунд. посл. в $L_p(\tilde{\Omega}) \Rightarrow \tilde{u}_j \to \mathcal{U}(x)$ в $L_p(\tilde{\Omega})$.

т.к. $\{\partial^\alpha u_j\}$ сх-ся, то они образ. фунд. посл. в $L_p \Rightarrow \{\partial^\alpha \tilde{u}_j\}$ – фунд. посл-ть в $L_p(\tilde{\Omega}) \Rightarrow \partial^\alpha \tilde{u}_j \to V_\alpha$ в $L_p(\tilde{\Omega})$.

Замкн-ть дифф-ия: если это так, то д.б. $V_\alpha = \partial^\alpha \mathcal{U}$ в $\tilde{\Omega}$.

ф-ия $\mathcal{U}$ предел $\{\tilde{u}_j\}$, $\mathcal{U} = 0$ вне обл-ти Ω (если есть сх-ть в L_p, тогда подпосл-ть сх-ся п.в., т.е. $\tilde{u}_j \to \mathcal{U}$ в $L_p \Rightarrow$ подпосл. $\tilde{u}_{j_k}(x) \to \mathcal{U}(x)$ п.в.).

* подпосл-ть $\tilde{u}_{j_k}(x) = \begin{cases} u_{j_k}(x), & \text{в } \Omega \\ 0, & \text{вне } \Omega \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\mathcal{U}(x) = 0$ вне Ω, $\mathcal{U}(x) = u(x)$ в Ω.

$\Rightarrow \mathcal{U} = \tilde{u}$, в итоге у $\tilde{u}$ есть собств. произв. $\Rightarrow u \in \overset{\circ}{W}{}_p^l(\tilde{\Omega})$, т.к. св-ся пределом глад. финит. ф-ий из обл-ти Ω.

$\tilde{u} \in \overset{\circ}{W}{}_p^l(\tilde{\Omega})$

<u>ч.т.д.</u>

Пример: Ω - огр., $S = \partial\Omega \in C^1$; $u(x) \in C^1(\overline{\Omega})$

берем $\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x), & x \in \Omega \\ 0, & x \in \Omega \end{cases}$

Если $u \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$, то $\Rightarrow u|_S = 0$. ⊛

Докажем это:

$u(x) \equiv 0$.
$\Omega_+ = \Omega$
$\Omega_- = \tilde{\Omega} \setminus \Omega$

[Было: Ω_- | Ω_+, u_- Γ u_+ $\quad u_\pm(x) \in C^1(\overline{\Omega}_\pm)$
$\exists u_{x_j}(x)$, $1 \le j \le n$. $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow u_+|_\Gamma = u_-|_\Gamma = 0$]

и на границе: $u|_S = 0$.

[в ⊛ верно и $\Leftarrow$.]

$\overset{\circ}{W}{}_p^\ell(\Omega) \subsetneq W_p^\ell(\Omega)$

бывает, когда эти пр-ва совпадают.

Утв $\overset{\circ}{W}{}_p^\ell(R^n) = W_p^\ell(R^n)$. (т.е. для $\forall u \in W_p^\ell(R^n)$ $\exists \{u_j\} \subset C_0^\infty(R^n)$: $u_j \to u$ в $W_p^\ell(R^n)$)

$C_0^\infty(R^n)$ - плотно в $W_p^\ell(R^n)$.

Схема док-ва: ф-ия $u \in W_p^\ell(R^n)$, тогда мы можем её обрезать, т. е. $\zeta_R(x) = \begin{cases} 1, & |x| < R \\ 0, & |x| > R+1 \end{cases}$ (выруч. шарик)

$\|u - \zeta_R u\|_{W_p^\ell(R^n)} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$; ζ - финитная, ζ можно приблизить гладкими ф-ями.

$\int_{|x|>R} \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$.

ζ - срезка.

ч.т.д.

Теорема (о продолжении): обл-ть Ω, $\partial\Omega \in C^1$, тогда $\exists$

$\Pi : \underset{\in W_p^\ell(\Omega)}{u} \longmapsto \underset{\in W_p^\ell(R^n)}{\Pi u}$; Π - лин. непрер. оператор продолж. $\Pi u|_\Omega = u$.

$\|\Pi u\|_{W_p^\ell(R^n)} \le C\|u\|_{W_p^\ell(\Omega)}$

Πu $\quad \varphi(x) \in C_0^\infty(\Omega_\varepsilon)$,
$\Omega_\varepsilon = \{x \in R^n | \operatorname{dist}(x, \Omega) < \varepsilon\}$
$\varphi(x) \equiv 1$ на Ω.
$\varphi(x) \cdot \underbrace{(\Pi u)(x)}_{\in W_p^\ell(R^n)} \in W_p^\ell(\Omega_\varepsilon)$

(если есть продолж. на R^n, то можно постр. продолж. на скоб угодно близкое разм.)

Следствие: **Теорема 1** (плотность C^∞-ф-ий)

$\partial\Omega \in C^1$, Ω-огр., то $C^\infty(\overline{\Omega})$ - всюду плотно в $W_p^l(\Omega)$, т.е. для $\forall u \in W_p^l(\Omega)$ $\exists \{u_j\} \subset C^\infty(\Omega)$: $u_j \to u$ в $W_p^l(\Omega)$.

<u>Док-во</u>: $u \in W_p^l(\Omega)$ берем $\Pi u \in W_p^l(R^n) = \overset{\circ}{W}{}_p^l(R^n) \Rightarrow$
через граф. финиш.

$\exists \{u_j^*\} \subset C_0^\infty(R^n)$: $u_j^* \to \Pi u$ в $W_p^l(R^n)$.

u_j^* - образ. фунд. посл-ть, т.е. $\underbrace{\|u_j^* - u_{j'}^*\|^p_{W_p^l(R^n)}}_{\to 0,\ j,j' \to \infty} = \int_{R^n} \sum_{|\alpha| \le l} |\partial^\alpha u_j^* - \partial^\alpha u_{j'}^*|^p dx$

шире

$\geq \int_\Omega \sum_{|\alpha| \le l} |\partial^\alpha u_j^* - \partial^\alpha u_{j'}^*|^p dx = \|u_j^* - u_{j'}^*\|^p_{W_p^l(\Omega)}$

$\Rightarrow \{u_j^*|_\Omega\}$ - фунд. в $W_p^l(\Omega)$; $u_j^*(x) \to u(x)$ п.в. в R^n

$u_j^*|_\Omega \to u$ в $W_p^l(\Omega)$

$\|u_j^* - \Pi u\|^p_{W_p^l(R^n)} = \int_{R^n} \ldots \geq \int_\Omega \ldots = \|u_j^*|_\Omega - u\|^p_{W_p^l}$

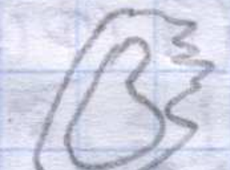
- сужение глад. финиш. функ, они св-ся гладкими вплоть до границы.
$\in C^\infty(\overline{\Omega})$.

ч.т.д.

<u>Теорема 2</u> („аппроксимация внутри").

$\forall \Omega$ если $u \in W_p^l(\Omega)$, то $\exists \{u_j\} \subset C^\infty(\Omega)$: для $\forall$ обл. $\Omega^* \subset\subset \Omega$
строго внутри (dist м/у границами > 0).
$u_j|_{\Omega^*} \to u|_{\Omega^*}$ в $W_p^l(\Omega^*)$.

если обл-ть плоская и не можем найти посл-ть гладких ф-ий сх-ся к ф-ии тогда $\nexists$ обл-ть, $\int$ лежит внутри.



$\forall \Omega^* \int_{\Omega^*} \sum_{|\alpha| \le l} |\partial^\alpha u_j - \partial^\alpha u|^p dx \xrightarrow[j \to \infty]{} 0$

<u>Док-во</u>: $\exists$ посл-ть обл-ей $\{\Omega_j^*\}_1^\infty$: $\partial\Omega_j^* \in C^1$, $\Omega_1^* \subset \Omega_2^* \subset \ldots$; $\bigcup \Omega_j^* = \Omega$

$\Omega_j^* = \{x \in \Omega \mid dist(x, \partial\Omega) > \frac{1}{j}\}$ если возьмем строго это расстояние, то получим Липшицевый (т.е. не совсем C^1).

$\exists$ обл-ть Ω_j^*, сузим ф-цию u на эту обл-ть:

$u_j(x)$: берем $u_j(x)$ в Ω_j^*: $\in C^\infty(\overline{\Omega_j^*})$, $\|u - u_j\|_{W_p^l(\Omega_j^*)} < \varepsilon_j$

$u_j(x) \in C^\infty(\Omega \setminus \Omega_j^*)$ - продолжаем гладко вне обл-ти Ω_j^*.

если $\Omega^* \subset\subset \Omega$, тогда $\Omega^* \subset \Omega_j^*$, $j \geq j_0$ тогда $\|u_j - u\|_{W_p^l(\Omega^*)} \leq \|u_j - u\|_{W_p^l(\Omega_j^*)}$

$<\varepsilon_j \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$ ч.т.д.

Следствие 3. $u \in L_p(\Omega)$ $\{V_\alpha\}_{|\alpha|\le l} \subset L_p(\Omega)$. V_α - собств. $\partial^\alpha u \Leftrightarrow$
$\exists \{u_j\} \subset C^\infty(\Omega)$: $u_j \to u$ в $L_p(\Omega^*)$.
$\partial^\alpha u_j \to V_\alpha$ в $L_p(\Omega^*)$ $\forall \Omega^* \subset \Omega$.

(эквивал. понятие собств. произв., только мы послуч. усиленн. набор производных)

$V_\alpha = \partial^\alpha u$ $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$\int_\Omega u \partial^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega V_\alpha \varphi dx$ Это опять назад применить св-во класс. произв.

Док-во: $\Leftarrow$ замкн. дифф. (если $u_j \to u$ в $\mathcal{D}'$ и $\partial^\alpha u_j \to \partial^\alpha u$ в $\mathcal{D}'$ тогда ...)

$\int_{\Omega^*} u_j \partial^\alpha \varphi dx \to \int_{\Omega^*} u \partial^\alpha \varphi dx$.

(след. замкн-ти диф-ия).

$\Rightarrow$ нужно предъявить пос-ть $\{u_j\}$, $\int$ получ. с помощью теор. 2. если $u \in W_p^l$, тогда ин-ся пол-ть u_j с нужными нам св-ами.

ч.т.д.

Следствие 4. Замена переменных: $\Omega \xrightarrow[\Phi]{} \tilde{\Omega}$ $\Phi \in C^{l+1}$ - дифферен. $\exists \Phi^{-1} \in C^{l+1}$

$u \in W_p^l(\Omega)$, $\tilde{u} = u \circ \Phi^{-1} \in W_p^l(\tilde{\Omega})$

$\|u\|_{W_p^l(\Omega)} \asymp \|\tilde{u}\|_{W_p^l(\tilde{\Omega})}$ оцениваются с двух сторон.

$l=1$: $\partial_{x_j} u(x) = \partial_{x_j}(\hat{u}(\underbrace{\Phi(x)}_{\tilde{x}})) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}_k} \frac{\partial \tilde{x}_k}{\partial x_j}$ - огранич.

$\int_{\tilde{\Omega}} d\tilde{x} = \int_\Omega \ldots |\det \Phi'(x)| dx$.

$u = \lim u^{(l)}$, $u^{(l)} \in C^\infty$, для гар. ф-ий эта ф-ла верна, а потом делаем предельный переход.

$\partial_{x_j} u^{(l)}(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \tilde{u}^{(l)}}{\partial \tilde{x}_k} \cdot \frac{\partial \tilde{x}_k}{\partial x_j}$

$\downarrow L_p$ $\qquad \downarrow$

$\partial_{x_j} u(x)$ $\qquad \partial_{\tilde{x}_k} \tilde{u}$ ч.т.д.

$A(u_j) = B(u_j)$ - есть для $u \in C^\infty(\Omega)$ A, B - непрер. в W_p^l

распр. по непрер. на W_p^l; в W_p^l $u_j \in C^\infty(\Omega)$

$\downarrow$

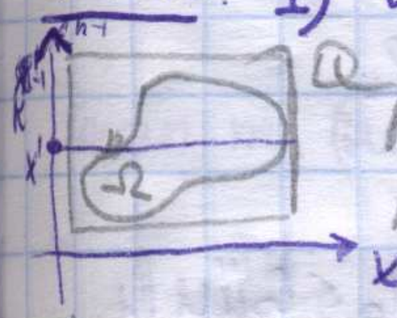
u в W_p^l => $A(u_j) \to A(u)$

$B(u_j) \to B(u)$.

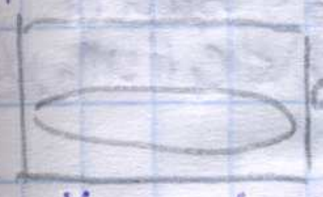
Неравенство Фридрихса

Теорема Ω - огр. $\subset R^n$. $\exists c = c(\Omega)$: $\int_\Omega |u|^p dx \le c \underbrace{\int_\Omega |u_x|^p dx}_{\text{градиент}}$ $\forall u \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$

Док-во: 1) $u \in C_0^\infty(\Omega) \Rightarrow u \in C_0^\infty(Q)$



Продолжим гладк. в Ω ф-цию и продолжим её на кубики гарантированно $Q = \{x \mid a_j < x_j < a_j + d\}$.



=> $d = \operatorname{diam} \Omega = \sup_{x,y \in \Omega} |x-y|$

$x = x', x^n$; $x' \in Q' \subset R^{n-1}$

Напишем ф-лу Ньютона-Лейбн. по какой-нибудь переменной:

$$u(x', x_n) = \underbrace{u(x', a_n)}_{\substack{\in Q \\ u(..)=0}} + \int_{a_n}^{x_n} u_{x_n}(x', y)dy$$

$$|u(x', x_n)|^p \le \left(\int_{a_n}^{x_n} |u_{x_n}(x', y)|dy\right)^p \le \left(\int_{a_n}^{a_n+d} |u_{x_n}(x', y)|dy\right)^p$$

Нер. мер-ли Гельдера: $\int_{a_n}^{x_n} |u_{x_n}(x', y)|dy \le \left(\int_{a_n}^{x_n} |u_{x_n}(x', y)|^p dy\right)^{1/p} (x_n - a_n)^{1/p'}$

$$|u(x', x_n)|^p \le (x_n - a_n)^{p/p'} \int_{a_n}^{a_n+d} |u_{x_n}(x', y)|^p dy.$$

Интегрир. по кубу: $\int_Q |u(x', x_n)|^p dx' dx_n \le \int_{a_n}^{a_n+d} dx_n \int_{Q'} dx' \left((x_n - a_n)^{p/p'} \int_{a_n}^{a_n+d} |u(x', y)|dy\right)$

$$= \int_{a_n}^{a_n+d} (x_n - a_n)^{p/p'} dx_n \int_Q |u_{x_n}(x)|^p dx.$$

$$\frac{(x_n - a_n)^{p/p'+1}}{\frac{p}{p'}+1}\Bigg|_{a_n}^{a_n+d} = \frac{d^{p(\frac{1}{p'}+\frac{1}{p})}}{p} \quad =1$$

В итоге: $\int_Q |u|^p dx \le \frac{d}{p} \int_Q |u_{x_n}|^p dx \le \frac{d}{p} \int_Q |u_x|^p dx$ — вместо одной производной нашлись градиент. $C = C(\Omega) \le c \underbrace{\operatorname{diam} \Omega}_{=d}$

2) $u \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$ (распространение по непрер-ти)

$\exists \{u_j\} \subset C_0^\infty(\Omega)$, $u_j \to u$ в W_p^1

$$\int_\Omega |u_j|^p dx \le \frac{d}{p}\int_\Omega |u_{jx}|^p dx.$$

$u_j \to u$ в L_p, $(u_j)_x \to u_x$ в L_p $\Rightarrow$ $\|u_j\|_{L_p} \to \|u\|_p$, $\|(u_j)_x\|_p \to \|u_x\|_p$

$$\Rightarrow \int_\Omega |u|^p dx \le \frac{d}{p}\int_\Omega |u_x|^p dx.$$

Упр. $\forall u \in W_p^1(\Omega)$, $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ тогда $\int_\Omega u\varphi_{x_j} dx = -\int_\Omega u_{x_j}\varphi dx$

(опер. собств. производ.)

дифф. u и φ раз. φ. Формула верна, если $u \in W_p^1(\Omega)$, $\varphi \in \mathring{W}_{p'}^1(\Omega)$.

левая часть $= A(\varphi)$, прав. часть $= B(\varphi)$ проверяет непр-ть

$f \wedge g$

$c_1 < \frac{f}{g} < c_2$

ч.т.д.

Эквивалентные нормы в $\mathring{W}_p^1(\Omega)$.

X - лин. мн-во, $\|\cdot\|_0$, $\|\cdot\|_1$ - эквивал., если $\exists c_0, c_1$: $\|u\|_0 \le c_0\|u\|_1$, $\|u\|_1 \le c_1\|u\|_0$.

$$\Rightarrow c_0^{-1}\|u\|_0 \le \|u\|_1 \le c_1\|u\|_0$$

$\|\cdot\|_0 \sim \|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$ $\Rightarrow \|\cdot\|_0 \sim \|\cdot\|_2$

Эквивал. нормы решают, но задают одну и ту же сх-ть, т.е.

$\|u_j - u\|_0 \to 0 \iff \|u_j - u\|_1 \to 0$.

Утв. $\|u\|_{\mathring{W}_p^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u_x|^p dx\right)^{1/p} = \|u_x\|_p$ эквивалентна исходной норме на $\mathring{W}_p^1$.

$W_p^1 \leftrightarrow \|u\|_{W_p^1} = \left(\int_\Omega |u|^p + \sum_{j=1}^n |u_{x_j}|^p dx\right)^{1/p}$ ← исходная норма

$\mathring{W}_p^1 \subset W_p^1$

Док-во:

$\|u\|^p_{W_p^1} \ge \|u\|^p_{\mathring{W}_p^1}$

$\int_\Omega |u|^p + \sum |u_{x_j}|^p dx \ge \int_\Omega \sum_{j=1}^n |u_{x_j}|^p dx$ (нужно док-ть обрат. нер-во).

$\le C$, $C = 1 + \frac{d}{p}$ - константа из нер-ва Фридрихса

ч.т.д.

Теорема Вложение.

X - лин. мн-во; $\|\cdot\|_0$, $\|\cdot\|_1$ - им соотв. пр-ва X_0 и X_1.

Отобр-ие $Id: \underset{X_0}{\overset{\cap}{u}} \longmapsto \underset{X_1}{\overset{\cap}{u}}$ (отобр. тождественное, но нормы разные => возник. разные пр-ва).

Id наз-ся оператором вложения. - линейный опер-р. ; $X_0 \hookrightarrow X_1$ (вложение).
Св-ва этого опер-ра и есть теорема вложения.

Теорема (Реллиха). если обл-ть Ω -огранич. в R^n, тогда $\mathring{W}_p^1(\Omega) \hookrightarrow L_p(\Omega)$ компактно.

($Id: \underset{\in \mathring{W}_p^1}{u} \longmapsto \underset{\in L_p}{u}$ -комп. (если огран. мн-во перевод. в предкомпактное). $\underset{\text{огр.}}{B} \in \mathring{W}_p^1 \Rightarrow B \subset L_p$ -предкомпакт, т.е. $\bar{B}^{L_p}$ -компакт)

[комп-ть (на пост-ти): $\{u_j\} \subset \mathring{W}_p^1(\Omega)$ - огр. пос-ть: $\|u_j\|_{\mathring{W}_p^1} \le C \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists \{u_{j_k}\}: u_{j_k} \to u^*$ в L_p.

Док-во: $\overset{Id:}{\mathring{W}_p^1(\Omega) \to L_p}$
$u \rightsquigarrow u$
(дальше манипулируем с u, в результ. у нас с новаполучим u и при этом ещё что-нибудь хорошее.

$u \in C_0^\infty(\Omega) \Rightarrow u(x) = -\int_\Omega \mathcal{E}(x-y)\Delta u(y)dy$. $\mathcal{E}(x) = \begin{cases} \frac{1}{|S_1|(n-2)|z|^{n-2}}, & n\ge 3 \\ -\frac{1}{2\pi}\ln|z|, & n=2 \end{cases}$

Покажем, что $n \ge 3$: $\int_\Omega \mathcal{E}(x-y)u_{y_j y_j}(y)dy = \int_\Omega (\mathcal{E}(x-y))_{y_j} u_{y_j}(y)dy$

(проинт. по частям можно т.к. мы наше. простр. опред. собств. произв.: $u_{y_j} \in C_0^\infty(\Omega)$, $\int_\Omega E(y)\varphi_{y_j}(y)dy = -\int_\Omega E_{y_j}(y)\varphi(y)dy$ это справедливо, если $\frac{1}{|y|^\alpha}$ $\alpha < n-1 \Rightarrow \exists$ собств. $\{\frac{1}{|y|^\alpha}\}_{y_j} \equiv$ классик. произ. (воз-ть напишат ~~фигур~~ интегр. по частям))

$u(x) = \sum_{j=1}^n \int_\Omega (\mathcal{E}(x-y))_{y_j} u_{y_j}(y)dy$

$(\mathcal{E}(x-y))_{y_j} = \left(\frac{1}{|S_1|(n-2)|x-y|^{n-2}}\right)_{y_j} = \underbrace{-\frac{1}{|S_1|}\cdot\frac{1}{|x-y|^{n-1}}\cdot\frac{y_j-x_j}{|x-y|}}$ $k_j(x,y)$ - ядро со слаб. особен.

В нашем случае $\alpha = n-2$; $A(x,y) = \frac{x_j-y_j}{|S_1||x-y|}$ (т.е. $k_j(x,y) = \frac{A(x,y)}{|x-y|^\alpha}$)

В итоге получаем: $u(x) = \sum_{j=1}^n (T_j D_j u)(x)$, $D_j: u \mapsto u_{y_j}$
$(T_j v)(x) = \int_\Omega k_j(x,y)v(y)dy$.
$u \in C_0^\infty(\Omega)$.

2) рав-ство есть для $\forall u \in \mathring{W}_p^1(\Omega)$ (п.в.).

распространяется по непрер-ти. Если $u \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$: $\exists \{u_\ell\} \subset C_0^\infty(\Omega)$
$u_\ell \to u$ в $W_p^1(\Omega)$

$D_j : W_p^1(\Omega) \to L_p(\Omega)$. - линейный опер, непрер.

$\exists$ собств. $(u_{x_\ell}) \in L_p$.

$D_j : \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega) \to L_p(\Omega)$.

$T_j : L_p(\Omega) \to L_p(\Omega)$ - лин. непр. опер.
опер. со слаб. особ.

$u_\ell \xrightarrow[\ell\to\infty]{} u$ в $W_p^1 \Rightarrow D_j u_\ell \to D_j u$ в L_p. $\Rightarrow T_j D_j u_\ell \to T_j D_j u$ в L_p

$u_\ell = \sum_{j=1}^{n} (T_j D_j u_\ell)(x)$.

в W_p^1 $\downarrow$

$u(x) = \sum_{j=1}^{n} (T_j D_j u)(x)$ в L_p $\Rightarrow Id : \overset{\circ}{W}{}_p^1 \to L_p$.

3). $T_j : L_p(\Omega) \to L_p(\Omega)$ - компакт. оператор. (Ω - ограниче.)

$D_j : \overset{\circ}{W}{}_p^1 \to L_p$ - непрер.
$T_j : L_p \to L_p$ - компакт. $\Big\} \Rightarrow T_j D_j$ - компакт. : $\overset{\circ}{W}{}_p^1 \to L_p$.

$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} T_j D_j$ - компакт.

ч.т.д.

Замечание: 1) Компактность вложения м.б. на непр. Ω, но не для любых. (когда $\Omega = R^n$ - компак-ти нет!)

пост-ть ф-ий

$W_p^1(R) \supset \{u_j\}_1^\infty$ $\quad n = 1$.

u_0: $u_j(x) = u_0(x-j)$.

$\|u_j\|_{W_p^1} = \|u_0\|_{W_p^1} = const$.

есть огран-послед, но нет никакой сход-ся подпослед-ти, иначе $\{u_{j_k}\}$ фундам., т.е. $\|u_{j_k} - u_{j_{k'}}\|_{L_p} \xrightarrow[k,k'\to\infty]{} 0$

норма сдвигов одинак.

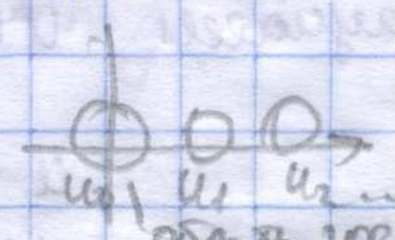
$\| \quad \|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |u_0(x-j_k) - u_0(x-j_{k'})|^p dx \leq$

фундаментальные носители $\Rightarrow \begin{cases} \text{либо оба} = 0, \\ \text{либо один из них} = 0. \end{cases}$

$\leq \int_{-\infty}^{\infty} |u_0(x-j_k)|^p dx + \int_{-\infty}^{\infty} |u_0(x-j_{k'})|^p dx = 2\|u_0\|_{L_p}^p$

$n > 1$: $u_0(x)$, $u_j(x)$ = сдвиг $u_0(x)$.

если можем провести шарик по бесконеч. рукаву обл-ти $\Rightarrow$ нет компакт-ти



если область бесконеч, а объем конечный => компакт есть.

2) Теорема (Реллих): Ω-огр., $\partial\Omega \in C^1 \Rightarrow W_1^p(\Omega) \hookrightarrow L_p(\Omega)$ - компактно.

Док-во:

Ω - огр. $\exists$ лин. непрер. $\underset{W_p^1(\Omega)}{u} \mapsto \underset{\mathring{W}_p^1(\tilde{\Omega})}{Pu}$ (продолжение)

можем взять P: $\tilde{\Omega}$ - огранич., $\tilde{\Omega} \subset \{x \mid dist(x, \Omega) < \varepsilon\}$.

$\forall$ посл-ть $\{u_j\} \subset W_p^1(\Omega)$, $\|u_j\|_{W_p^1(\Omega)} \le C_0 < \infty$

т.к. опер. продолж. непрер., то $\{Pu_j\} \subset \mathring{W}_p^1(\tilde{\Omega})$, $\|Pu_j\|_{W_p^1(\tilde{\Omega})} \le C \le \|P\| \cdot C_0$.

для $\mathring{W}_p^1$

Применим т. Реллиха к продолжению!

$\exists \{Pu_{j_k}\}_1^\infty$ - сход. в $L_p(\tilde{\Omega})$

$\int_{\tilde{\Omega}} |Pu_{j_k} - Pu_{j_{k'}}|^p dx \xrightarrow[k,k' \to \infty]{} 0$ на Ω $Pu_{j_k} = u_{j_k}$.

$\int_{\tilde{\Omega}} \ge \int_{\Omega} |u_{j_k} - u_{j_{k'}}|^p dx \to 0$. => получили сх-ся подпосл-ть в L_p.

Теорема вложения для $W_p^l(\Omega)$.

если увелич. p или l то особен. у ф-ии становятся лучше.

пок-ль l - гладкость; пок-ль p - суммируемость.

в огр. Ω $L_{p_0} \subset L_{p_1}$ $p_0 > p_1$.

Теорема (о вложении с предельным показателем) (Соболева).

существует такая константа c, что $\forall u \in C_0^\infty(R^n)$ $\|u\|_{p^*} \le C\|u_x\|_p$ $p<n$.

(Про пр-во W_p^1) градиент.

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n} > 0$$

(Без док-ва). (получаем нер-во, у и зависит от области. По непрер-ти оно распр. на все ф-ии, градиенты $\in L_p$).

Как получ. рав-во на p^*!

$u(x) \to u(\lambda x) = u_\lambda(x)$.

$\|u_\lambda\|_{p^*} \le c\|(u_\lambda)_x\|_p$ $dx = \lambda^{-n} d(\lambda x)$.

$\left(\int |u(\lambda x)|^{p^*} dx\right)^{1/p^*}$ $\left(\sum_{j=1}^n \int_{R^n} |(u(\lambda x))_{x_j}|^p dx\right)^{1/p} = \lambda^{(p-n)\cdot\frac{1}{p}}$

$\lambda^{-\frac{n}{p^*}}$ $\lambda(u_{x_j})(\lambda x)$ $\left(\sum_{j=1}^n \int_{R^n} |u_{y_i}(y)|^p dy\right)^{1/p}$

хотим, чтобы $\frac{n}{p^*} = \frac{n}{p} - 1 \Rightarrow \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$. ч.т.д.

Если $pl > n \Rightarrow \|u\|_{L_{p^*}} \le c \sum_{|\alpha|=l} \|D^\alpha u\|_{L_p}$; $p^*: \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{l}{n}$.

лок. обоб-ти слабее в L_{p^*}, чем лок. обоб-ти в W_p^l.

$W_p^l \hookrightarrow L_{p^*}$, $L_{p^*} \subset L_p$ (локально).

$pl \underset{p^* \to \infty}{\to} n$, $p^* > p$.

09.11.12. Что получится, если $pl > n$. $\Omega = R^n$.

<u>Теорема</u>. $l > \frac{n}{p} + k$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Тогда $W_p^l(R^n) \hookrightarrow C_B^k(R^n)$.

$\|u\|_{C_B^k} = \sup\limits_{\substack{x \in R^n \\ |\alpha| \le k}} |\partial^\alpha u(x)|$ (или $\sup\limits_x \sum\limits_{|\alpha| \le k} |\partial^\alpha u(x)|$) в классе эквив. W_p^l $\exists$ представ. явл-ся C^k.

Когда обсуж. непр. оператор: $Id : X_0 \to X_1$ $X_0 = (X, \| \|_0)$
$X_1 = (X, \| \|_1)$.
не полное пр-во мн-во ф-ций с нормой из L_{p^*}

Сейчас: $X_0 \sim W_p^l$ - элемент - класс эквив. ф-ий
X_1 - элемент - ф-ия класса C^k
Если можем найти в классе эквив. ф-ию класса C^k, тогда все хорошо. (т.е. в кач. эл-та берем конкр. представителя класса эквивал.) Но случаи этого представ. взять не откуда.
если $pl > n$, то найдется представитель.

Для $W_p^l(R^n) = \overset{\circ}{W}{}_p^l(R^n)$ т.е. в W_p^l плотно гладкие финит. ф-ии.

$\measuredangle$ $X = C_0^\infty(R^n)$, $\| \cdot \|_0 = \| \|_{W_p^l}$; $\| \cdot \|_1 = \| \|_{C_B^k}$ (в, т.к. $\measuredangle$ не компакт. мн-во ф-ий заранее ф-ии, они не обяз. быть финит.)

Нам нужно док-ть, что тождеств. опер. непрер., т.е.
$Id : X, \| \|_0 \to X, \| \|_1$.
Если докажем, тогда сможем распр-ть на пр-во W_p^l.

$\measuredangle$ $u \in C_0^\infty(R^n)$: $\|u\|_{C_B^k} \le c \|u\|_{W_p^l(R^n)}$ $\star$.

$\forall u \in W_p^l(R^n)$: $\exists \{u_j\} \subset C_0^\infty(R^n)$, $u_j \to u$ в W_p^l, т.е. $\|u_j - u_{j'}\|_{W_p^l} \to 0$ $(j, j' \to \infty)$.

Напишем оценку $\star$ для гладк. финит. ф-ий:
$\|u_j - u_{j'}\|_{C_B^k} \le c \|u_j - u_{j'}\|_{W_p^l}$.

$\{u_j\}$ - фунд. в $C_b^k(R^n)$; $u_j \to \tilde{u}$ в $C_b^k(R^n)$.
$\exists \tilde{u} \in C_b^k(R^n)$.

$u_j \to u$ в W_p^l $\Rightarrow \exists \{u_{j_k}\}: u_{j_k} \to u(x)$ п.в.
$u_j \to \tilde{u}$ в C_b^k $\Big\} \Rightarrow \tilde{u}(x) = u(x)$ п.в.

Нужно док-ть оценку (★), т.е. $u \in C_0^\infty(R^n)$: $\|u\|_{C_b^k} \le C\|u\|_{W_p^l(R^n)}$.
p - показатель суммирования.

$p = 2$

1. Лемма 1. $u \in C_0^\infty(R^n)$, то ∃ преобр. Фурье $\hat{u}(\xi) = \int_{R^n} e^{-ix\xi} u(x)dx$:

$$\|u\|^2_{W_2^l(R^n)} \asymp \int_{R^n} (1+|\xi|^2)^l |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi.$$

Док-во: а) рав-во Парсеваля. ? (это верно для $u \in C_0^\infty(R^n)$, $u \in S$ - класс Шварца, $u \in L_2(R^n)$)

$$\int_{R^n} |u|^2 dx = (2\pi)^{-n} \int_{R^n} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi$$

в) $u \in C_0^\infty(R^n)$ $(\partial^\alpha u)^\wedge(\xi) = (i\xi)^\alpha \hat{u}(\xi)$. $\alpha = \alpha_1, \dots, \alpha_n$.

$\alpha = \alpha_1 \dots \alpha_n$ $\quad (i\xi_1)^{\alpha_1} \dots (i\xi_n)^{\alpha_n}$

$$\|u\|^2_{W_2^l(R^n)} = \int_{R^n} \sum_{|\alpha| \le l} |\partial^\alpha u|^2 dx = \left[\|\partial^\alpha u\|_{L_2} = \|\widehat{\partial^\alpha u}\|^2 \cdot (2\pi)^{-n}\right] =$$

$$= (2\pi)^{-n} \int_{R^n} \sum_{|\alpha| \le l} |(i\xi)^\alpha \hat{u}(\xi)|^2 d\xi = (2\pi)^{-n} \int_{R^n} \Big(\sum_{|\alpha| \le l} |(i\xi)^\alpha|^2\Big) \cdot |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi.$$

Нужно проверить: $\sum_{|\alpha| < l} |\xi^\alpha|^2 \overset{\vee}{\wedge} (1+|\xi|^2)^l$, т.е. $\le C_1(1+|\xi|^2)^l$ (оценивается с двух сторон)
$\ge C_2(1+|\xi|^2)^l$

Наша норма эквивал. норме, заданной через преобр. Фурье

2. Лемма 2 $l > \frac{n}{2} \Rightarrow$ для $u \in C_0^\infty(R^n)$ $\sup_{R^n} |u(x)| \le C\|u\|_{W_2^l(R^n)}$

Док-во: (напишем ф-лу обратн. преобр. Фурье)

$$u(x) = (2\pi)^{-n} \int_{R^n} e^{ix\xi} \hat{u}(\xi) d\xi.$$

$$|u(x)|^2 \le \Big((2\pi)^{-n} \int_{R^n} |\hat{u}(\xi)| d\xi\Big)^2$$ добавим $(1+|\xi|^2)^{\pm l/2}$

$\Rightarrow$ сам. нер-ву Гельдера: $\le (2\pi)^{-4n} \underbrace{\int_{R^n} (1+|\xi|^2)^{-l} d\xi}_{<\infty} \overbrace{\int_{R^n} (1+|\xi|^2)^l |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi}^{\le C\|u\|^2_{W_2^l}}$

Мог док-ли теорему для $k=0$. (т.е. док-ли пер-во для $k=0$).

3. Док-во теоремы для $\forall k$, $p=2$:

$u \in C_0^\infty(R^n)$, $l > k + \frac{n}{2}$. $\|\partial^\alpha u\|_{W_2^{l-|\alpha|}(R^n)} \le \|u\|_{W_2^l(R^n)}$

$(\partial^\alpha : W_2^l \to W_2^{l-|\alpha|}$, ∂^α - непрер.)

по Лемме 2: $\sup\limits_{R^n} |\partial^\alpha u| \le c\|\partial^\alpha u\|_{W_2^{l-|\alpha|}(R^n)} \le C\|u\|_{W_2^l(R^n)}$. $l-|\alpha| > \frac{n}{2}$ если $|\alpha| \le k$.

Нужно напис. оценку произв., мы получили нер-во.

$\|u\|_{C_B^k} \le c\|u\|_{W_2^l(R^n)}$. ч.т.д.

$L_2 \quad W_2^l \hookrightarrow L^{p^*} \quad W_p^l \hookrightarrow C^2 \quad C^3$ и т.д. $\quad l_0 = \frac{n}{2}+1$; $l_1 = \frac{n}{2}+2$ и т.д.

$0 \quad p^*$-расст $\quad n/2 \quad l_0 \quad l_1 \quad l$

$p=2$; $W_2^l(R^n)$ $\quad$ l-пор дифф., движ. прямых прямыми

когда l подх. к $n/2$, то $p^* \to \infty$.

когда $l = n/2$ не попадаю, т.е. $W_2^l \not\hookrightarrow L_\infty$, $l = n/2$.

Следствие 1. $\mathring{W}_p^l(\Omega)$, если $l > \frac{n}{p} + k$, тогда $\mathring{W}_p^l(\Omega) \hookrightarrow C^k(\bar{\Omega})$

$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x), & x \in \Omega \\ 0, & x \notin \Omega \end{cases}$ $\quad$ | $\tilde{u} \in W_p^l(R^n)$, $\tilde{u} \in C_B^k(R^n)$

т.к. $\tilde{u}|_\Omega = u$. $\Rightarrow u \in C_B^k(R^n)$.

Следствие 2. Если $\exists$ непр. опер. продолжения $W_p^l(\Omega) \to W_p^l(R^n)$

$\Rightarrow W_p^l(\Omega) \hookrightarrow C^k(\bar{\Omega})$, $l > k + n/2$. $\quad (\partial\Omega \in C^1)$.

и в обл. Ω прод. на все пр-во, а потом восп. теоремой.

Д ом гладкости и движения в обсл. сторону.

Пространство $W_2^{-1}(\Omega)$. (-1 - показатель гладкости)

Опр. $u \in W_2^{-1}(\Omega)$ - это обобщ. ф-ция, т.е. $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$:

$|\langle u, \varphi\rangle| \le c\|\varphi\|_{W_2^1(\Omega)}$, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ $C_0^\infty(\Omega)$ $\quad$ или непр. функ-л на пр-ве $\mathcal{D}(\Omega)$

$W_2^{-1}(\Omega)$ = (пополнение $C_0^\infty(\Omega)$ в норме W_2^1) $*$ - сопряжение.

т.е. функ-ла, у непрер. в норме $W_2^1(\Omega)$.

Опр. $\|u\|_{W_2^{-1}(\Omega)}$ - норма функционала $= \inf c$:

$$|\langle u, \varphi\rangle| \le c\|\varphi\|_{W_2^1(\Omega)} \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

другими словами: $\|u\|_{W_2^{-1}(\Omega)} = \sup\limits_{\substack{\varphi \in C_0^\infty(\Omega) \\ \varphi \ne 0}} \dfrac{|\langle u, \varphi\rangle|}{\|\varphi\|_{W_2^1(\Omega)}}$.

$W_2^{-1}(\Omega) = (\mathring{W}_2^1(\Omega))^*$.

Примеры: 1. $f \in L_2(\Omega)$ $\quad \langle T_f, \varphi\rangle = \int\limits_\Omega f\varphi\, dx$, $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

T_f - регул. обобщ. ф-ия.

$|\langle T_f, \varphi\rangle| = \left|\int\limits_\Omega f\varphi\, dx\right| \le \|f\|_{L_2}\|\varphi\|_{L_2} \le c\|\varphi_x\|_{L_2}$, $\|\varphi\|_{\mathring{W}_2^1(\Omega)}$. $\quad \Omega$ - огранич.

$\Rightarrow T_f$ - лин. непрер. фун-л в норме $\mathring{W}_2^1$

T_f - задан на C_0^∞, мы можем продолжить на $\mathring{W}_2^1$. $\Rightarrow T_f$ - лин. непр. фун-л на $\mathring{W}_2^1$, $T_f \in W_2^{-1}(\Omega)$

Отмечаем, что $f \in W_2^{-1}(\Omega) \Rightarrow L_2(\Omega) \hookrightarrow W_2^{-1}(\Omega)$.

$$|\langle T_f, \varphi\rangle| \le \underbrace{c}_{\text{из нер-ва Фридрихса}} \|f\|_{L_2} \cdot \|\varphi\|_{\mathring{W}_2^1}$$

$$\|f\|_{W_2^{-1}} \le c\|f\|_{L_2}$$

В итоге получаем, что W_2^{-1} шире, чем L_2 (двигаемся по шкале влево).

2. для $f \in L_2(\Omega)$ ∂x, T_f.

Утв. $\partial_{x_j} T_f \in W_2^{-1}$. $\quad (\partial_{x_j} f \in W_2^{-1})$.

$$\|\partial_{x_j} f\|_{W_2^{-1}} \le c\|f\|_{L_2}.$$

Док-во: $\langle \partial_{x_j} T_f, \varphi\rangle = -\langle T_f, \varphi_{x_j}\rangle$

$$|\langle \partial_{x_j} T_f, \varphi\rangle| = \left|-\int\limits_\Omega f(x)\varphi_{x_j}\, dx\right| \le \|f\|_{L_2}\underbrace{\|\varphi_{x_j}\|_{L_2}}_{\le \|\varphi_x\|_{L_2} = \|\varphi\|_{\mathring{W}_2^1}}$$

В итоге мы получили, что $c = 1$.

ч.т.д.

Теорема. $u \in W_2^{-1}(\Omega) \Rightarrow \exists \underbrace{f_0, \{f_k\}_1^n}_{\in L_2(\Omega)}$: $u = f_0 + \sum\limits_k (f_k)_{x_k}$

Док-во: $(\mathring{W}_2^1(\Omega))^*$ Нам нужно опис. фун-ов на гильб. пр-ве.

скалр. произв.

$$\left[\forall \Omega,\ (u, v)_{\mathring{W}_2^1(\Omega)} = (u, v)_{W_2^1(\Omega)} = \int\limits_\Omega u\bar{v} + \sum_{k=1}^n u_{x_k} v_{x_k}\, dx\right].$$

[Т. (Рисс): H - гильб., T - лин. непр. функ-л на H: $\exists f \in H$:
$\langle T, \varphi \rangle = (\varphi, f)$]

T_2

если $u \in (\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))^* \Rightarrow \exists f \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$: $\langle u, \varphi \rangle = (\varphi, f)_{W_2^1(\Omega)}$.

$$\langle u, \varphi \rangle = \underbrace{\int_\Omega f\varphi\, dx}_{\langle T_f, \varphi \rangle} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \int_\Omega f_{x_k} \varphi_{x_k}\, dx}_{\langle T_{f_k}, \varphi \rangle}$$, если $f_{x_k} = f_k \in L_2$.

$u = T_f + \sum_{k=1}^{n} \partial_{x_k} T_{f_k}$, если не делать различ. между функ-ми и ф-ей, у ею порожд., то получ. $u = f_0 + \sum_{k=1}^{n} (f_k)_{x_k}$ ч.т.д.

$T \in W_2^{-1}(\Omega) \Leftrightarrow T \in \mathcal{D}'$, непрер. в норме $W_2^1(\Omega)$.
Фун-л на $C_0^\infty(\Omega)$. $|\langle T, \varphi \rangle| \le C\|\varphi\|_{W_2^1}$ $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.
$\updownarrow$
фун-л T задан на $\overset{\circ}{W}{}_2^1$ (т.е. на продолж. $C_0^\infty(\Omega)$)

$W_2^{-1} = (\overset{\circ}{W}{}_2^1)^*$. Сопр. пр-во можно реал. по разному! Когда W_2^{-1} мы хотим писать фун-лы как объекты ф-ий и нам не нужна двойств-ть которая получ. в скалер. пр-ии.

Следы ф-ий на поверхности.

$\Omega \in R^n$ $W_2^1(\Omega)$

Хотим понять, что происх. на границе

Трудность собств. пр-ва! Эл-тами мн-ва классов эквив. ф-ий $[u]$. У разных прирсов, класс эквив. разные знач. на пов-ти $(-\infty, +\infty)$, т.к. повер-ть эт мн-во объемной меры 0.

Ω: $C^\infty(\overline{\Omega})$ - плотно в $W_2^1(\Omega)$. $(\partial\Omega = S \in C^1)$.

Опред. опер-р. $\gamma: u \mapsto u|_S$ $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Нужно получ. замкн-ть γ, т.е. $\|\gamma u\|_{X(S)} \le C\|u\|_{W_p^1(\Omega)}$.
если $X(S)$ - полное, то расширим γ на все W_p^1.
Тогда сигналом ф-ии (в пр-ве $X(S)$) - результат продолжения по непрерывности.

Теорема если $S \in C^1$ (граница), Ω - огр. $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists C_\varepsilon$: для $u \in C^\infty(\bar\Omega)$.

спр-во $\int\limits_S |u|^2 dS \le \varepsilon \int\limits_\Omega |u_x|^2 dx + C_\varepsilon \int\limits_\Omega |u|^2 dx$. $\underline{X(S) = L_2(S)}$.

Если $u \in W_2^1(\Omega)$, берем $\{u_j\} \subset C^\infty(\bar\Omega)$. $u_j \to u$ в $W_2^1(\Omega)$.

$\|u_j - u_{j'}\|_{L_2(S)} \le \varepsilon \|(u_j - u_{j'})_x\|_{L_2(\Omega)} + C_2 \|u_j - u_{j'}\|_{L(\Omega} \xrightarrow[j, j' \to \infty]{} 0$ (т.к. $u_j \to u$ в $W_2^1(\Omega)$)

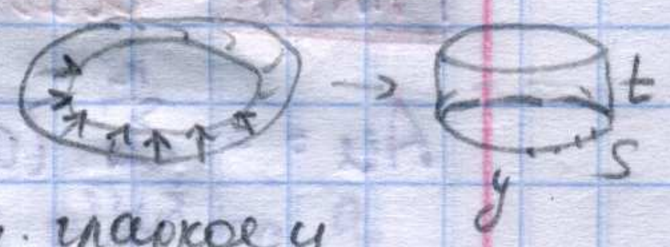
$\Rightarrow \{u_j\}$ - фунд. в $L_2(S)$, $\gamma u = \lim \gamma u_j$ в $L_2(S)$.
(от посл-ти не зависит).

Упр Спр-ть: будет ли опер-р вложения спера опер-ем „на"
Док-ть, что γ - компактный.

16.11.12

Док-во: если $S \in C^1$, $x \mapsto y, t$. $y \in S$ (коорд.) $t > 0$.

нужно организов. у-ки, γ гладко меняются на границе, потом сдвигаем на t во внутр.



получим точки $\vec{x} = \vec{y} + t\,\vec{\ell}(\vec{y})$ это преобр. по координ. гладкое и невырожд., если $t \in (0, \varepsilon)$, т.е. маленькое, чтобы концы 2-х соседних векторов не пересекались.

если $u(x)$: $u(y,t) = 0$, $t \ge \varepsilon$, тогда элем. площади $dx = \left|\frac{Dx}{D_y D_t}\right| dS(y) dt$

$\Rightarrow \int\limits_\Omega u\,dx = \int\limits_S \int\limits_0^t u(y,t) \left|\frac{Dx}{D_y D_t}\right| dS(y) dt$

якобиан перехода $\Phi(y,t)$ $\Phi(x)$

возьмем срезку $\zeta(y,t) = \begin{cases} 1, & t = 0 \\ 0, & t \ge \varepsilon \end{cases}$, $\zeta \in C^\infty(\bar\Omega)$

возьмем $u \in C^\infty(\Omega)$, $\int\limits_S \int\limits_0^1 (\zeta u^2(y,t))_t \, dS(y) dt = \int\limits_\Omega (\zeta u^2)_t \Phi(x) dx$

элем. объема, у переменчатая.

$\int\limits_S \zeta(y,t) u^2(y,t) \Big|_0^\varepsilon dS(y) = -\int\limits_S u^2(y) dS(y)$

$\Rightarrow \int\limits_S u^2 dS \le \int\limits_S |(\zeta u^2)_t| \Phi(x) dx \overset{?}{\le} \int\limits_\Omega \sum\limits_k |a_k(x) \zeta u u_{x_k}| \Phi(x) dx + \int\limits_\Omega \zeta_{x_k} u^2 \Phi(x) dx$

берем произв. по t, а мы хотим перейти по x. $\Rightarrow \partial_t = \sum a_k(x) \partial_{x_k}$ $\le$

$?\ (\zeta u^2)_{x_k} = \zeta_{x_k} u^2 + 2\zeta u u_{x_k}$

ф-ии $\Phi(x) \le C_0$; $a_k \le \ldots$, $\zeta, \zeta_{x_k} \le \ldots$ $\Rightarrow \le C_1 \sum\limits_{k=1}^n \int\limits_\Omega |u u_{x_k}| dx +$

$+ C_2 \int\limits_\Omega u^2 dx$ $\le$

$ab \le \frac{a^2 + b^2}{2}$ оцениваем с помощью нер-ва среднеарифм.,

$(\varepsilon a)(\varepsilon^{-1} b) \le \frac{\varepsilon^2 a^2 + \varepsilon^{-2} b^2}{2}$ среднего геометр.

$$\Leftarrow \frac{c_1\varepsilon}{2}\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\int_\Omega |u_{x_k}|^2dx}_{\int_\Omega |u_x|^2dx} + \underbrace{\frac{c_1\varepsilon^{-1}}{2}n\int_\Omega u^2dx + c_2\int_\Omega |u|^2dx}_{=c_\varepsilon}$$

ч.т.д.

Замечание. Если $u\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \Rightarrow \gamma u=0$

$u=\lim u_j,\ u_j\in C_0^\infty(\Omega)$

$\gamma u_j=0$ ~~[illegible]~~

$\gamma u_j\to 0$ в $L_2(S)$

$\gamma(u)=\lim\limits_{j\to\infty}\gamma u_j$ в $L_2(S)$.

Можно док-ть: если $u\in W_2^1(\Omega)$, $\gamma u=0 \Rightarrow u\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$.

ГЛАВА. Обобщенные решения краевых задач.

$$Au=-\sum_{k,j=1}^{n}(a_{kj}(x)u_{x_k})_{x_j}+\sum_{k=1}^{n}b_k(x)u_{x_k}+c(x)u(x)=f \quad (1)$$

1) $a_{kj}, b_k, c\in L_\infty(\Omega)$ - огран. функции (веществ. коэфф.).

если раскрыли произв. по x_j: $a_{kj}(x)u_{x_kx_j}+\underbrace{(a_{kj})_{x_j}}_{\text{этой произв. нет}}u_{x_k}$

эта запись некорректна, она формальная.

2) $A(x)=(a_{kj}(x))$ - симметр. матрица. $(a_{kj}(x)=a_{jk}(x))$. стандартная запись опер-ра.

$(a_{12}+a_{21})u_{x_1x_2}$, т.е. мы по идее должны написать $\frac{A}{2}u_{x_1x_2}+\frac{A}{2}u_{x_2x_1}$

3) $\forall x\in\Omega,\ \forall\xi\in R^n$

$\underbrace{\sum_{k,j=1}^{n}a_{kj}(x)\xi_k\xi_j\ge c_0|\xi|^2}$, $c_0>0$ → нер-во эллиптичности

$(A(x)\xi,\xi)_{R^n}$

квадр. форма матрицы

(3) ⟷ усл-ие эллиптичности.

Лемма. Нер-во (3) ⟺ если λ - с. число $A(x)$, $\lambda\ge c_0$.

Док-во (⟹) когда опред. нек ур-ие, то его опред. по матрице коэфф. старшего члена. Эллиптич. знач., что все собств. числа одного знака.

для нашей ситуации скажем, что эллипт. $\Leftrightarrow$ Re с. числа > 0, $\lambda = \lambda_j(x)$ $1 \le j \le n$.

λ - с. число ξ - с. вектор, $A\xi = \lambda\xi$

$(A\xi, \xi) = (\lambda\xi, \xi) = \lambda|\xi|^2 \ge c_0|\xi|^2$ $\lambda \ge c_0$, $\xi \ne 0$.

$\Leftarrow$ из (3) $\Rightarrow$ эллип.

A - симм. в R^n есть ортонор. базис с. в. $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(n)}$
$\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

$\xi = \sum_{j=1}^{n} c_j \xi^{(j)}$, $|\xi|^2 = \sum_{j=1}^{n} |c_j|^2$

если напиш. квадр. форму, $(A\xi, \xi) = \left(A \sum_{j=1}^{n} c_j \xi^{(j)}, \sum_{k=1}^{n} c_k \xi^{(k)}\right) =$

$= \sum_{j,k=1}^{n} c_j c_k \underbrace{(A\xi^{(j)}, \xi^{(k)})}_{\text{ортонор-ть}} = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\lambda_j}_{\ge 0} c_j^2 \ge c_0 |\xi|^2$

(если $k = j \Rightarrow 1$
$k \ne j \Rightarrow 0$) $= |\xi|^2$

ч.т.д.

Усл-ия 1) - 3) - стандартные условия для опер-ра a
+ огранич. область.

Как поиск обобщенное решение?
и-тинник. реш-ие $u \in C^2(\Omega)$, $a_{kj} \in C^1$
$(Au)(x) = f(x)$ (2) (поточечное равенство) $\forall x \in \Omega$.

можем записать (1) в развернутом виде, т.е. взять производные, как обычно.

Проблема: очень тяжело док-ть разрешимость задачи со всеми станд. условиями.

Мы будем искать решение в широком классе, в) это делать проще.

$\triangle$ $v \in C_0^\infty(\Omega)$, умнож. v на (2) и проинтегр.!

$\int_\Omega (Au)(x) v(x) dx = \int_\Omega f(x) v(x) dx$.

подставим ф-лу (1), интегрируем по частям!

$-\int_\Omega (a_{kj}(x) u_{x_k})_{x_j} v(x)$.

$\int_\Omega \sum_{k,j=1}^{n} \overbrace{a_{kj}(x) u_{x_k}}^{\in L_\infty \in L_2} \overbrace{v_{x_j}}^{\in L_2} + \sum_{k=1}^{n} b_k(x) u_{x_k} v + c(x) u v \, dx = \int f v \, dx$. (интегр. рав-во, которое мы будем решать) тож-во.

Это все ф-ии по нер-ву Гельдера

чтобы написать интегр. тожд-во нужно, чтобы $u, v \in W_2^1(\Omega)$.

Опр. u - обобщ. решение ур-ия $Au = f$, если $u \in W_2^1(\Omega)$ и $\forall v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ есть интегр. тожд-во.

$v \in C_0^\infty(\Omega)$

$a[u,v] = \int_\Omega f v\,dx$ — непрер. по v в $W_2^1(\Omega)$.

продолж. по непр-ти => рав-во для $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1$

Утв. 1) Если u - классич. реш-ие $Au = f$ => u яв-ся обобщ. решением.

2) Если u - обобщ. реш-ие, $u \in C^2$ и коэфф. гладкие, $a_{kj} \in C^1$, тогда u - классич. решение.

(для док-ва, нужно продолжать все выкладки в обратную сторону: интегр. тожд-во интегр. показать в обратн. сторону)

Док-во 2): $a[u,v] = \int f v\,dx \Rightarrow \int_\Omega (Au)(x)\,v(x)\,dx = \int_\Omega f v\,dx$

$\int_\Omega (Au - f) v\,dx = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (Au)(x) = f(x) \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega)$.

Обсудим, что рав-во (1) это равенство функционалов.

$v \in C_0^\infty(\Omega)$

Рассм. отобр.: $v \longmapsto \underbrace{\int_\Omega \sum a_{kj} u_{x_k} v_{x_j} + b_k v_{x_k} v + c u v\,dx}_{\text{число}}$

отобр. яв-ся функционалом, линейным для $u \in W_2^1(\Omega)$ - функц. непрер. по v в $W_2^1(\Omega)$.

т.е. функционал $\in W_2^{-1}(\Omega)$

изменим u: $u \longmapsto Au \in W_2^{-1}(\Omega)$.

Утв. $A: W_2^1 \to W_2^{-1}$ - непрер. лин. опер-р.

Док-во:

$Au \in W_2^{-1}$ - функционал, зададим его действие на пробные

функции v

$\langle Au, v\rangle = a[u,v]$

$\|Au\|_{W_2^{-1}} \le C\|u\|_{W_2^1}$

$T \in W_2^{-1}$, $\|T\| = \inf C : |\langle T, v\rangle| \le C\|v\|_{W_2^1}$, $v \in C_0^\infty$]

$|\langle T, v\rangle| = |\langle Au, v\rangle| = |a[u,v]| \le C\|u\|_{W_2^1} \cdot \|v\|_{W_2^1}$

$\|Au\|_{W_2^{-1}} \le C\|u\|_{W_2^1}$ ← (если мы получ., что норма опер. не превосх. какой-то константы, а она должно быть минимум)

$T \in W_2^{-1}$: $T' = g_0 + \Sigma(g_k)_{x_k}$ $\quad g_0, g_k \in L_2$ (вид произв. элем-та из W_2^{-1}

$\left(\underbrace{a_{kj}(x)\, u_{x_k}}_{\text{собств. прав}}\right)_{x_j}$ произв. обобщ. ф-ий.

Краевая задача

1) $Au = f$

$u|_S = 0$ (однород. гр. усл-ие).

$u \in W_2^1(\Omega)$

$\partial\Omega \in C^1$ есть след γu.

$u|_S = 0$: $\gamma u = 0$.

(гранич. усл-ие - это результат действия следа).

граник. усл-ие понимается след. образом: $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$

u - обобщ. реш-ие краевой задачи: если $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$.

$Au = f$, $u|_S = 0$

если $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, т.е. $\forall v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ есть интегр. тожд-во.

2) $Au = f$ $\quad \exists\, \varphi$ - задана в Ω, $S \in C^1$

$u|_S = \varphi$ $\quad \varphi|_S = \gamma\varphi$, т.е. $\varphi \in W_2^1(\Omega)$

граник. усл-ие понимается, что $\gamma u = \gamma\varphi$ (гранич. следы равны).

$\tilde{u} = u - \varphi$; $\quad A\tilde{u} = Au - A\varphi$ $\quad \tilde{f} = \underset{W_2^{-1}}{f} - \underset{W_2^{-1}}{A\varphi}$

u - обобщ. решение краевой задачи $Au = f$ $\quad u|_S = \varphi$, $(\varphi \in W_2^1(\Omega))$,

если $u = \tilde{u} + \varphi$, $\quad \tilde{u}$ - обобщ. реш-ие $A\tilde{u} = \tilde{f} = f - A\varphi$

$\tilde{u}|_S = 0$.

Теоремы единственности

Теорема 1. $\exists\, C_0 : c(x) \geq C_0$, тогда обобщ. решение единственно.

$Au = f$ — $A\tilde{u} = f$ нужно док-ть, если $\tilde{f} = 0 \Rightarrow \tilde{u} = 0$.

$u|_S = \varphi$ — $\tilde{u}|_S = 0$.

эквивалентно.

$u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) : A\tilde{u} = 0$ в $W_2^{-1}(\Omega)$, т.е. $\forall v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$

$$\int_\Omega \sum_{k,j=1}^n a_{kj}(x) u_{x_k} u_{x_j} + \sum_{k=1}^n b_k(x) u_{x_k} v + cuv\,dx = 0 \qquad u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega).$$

Возьмем $v = u$.

$$\int_\Omega \sum a_{kj} u_{x_k} u_{x_j} + \sum b_k u_{x_k} u + cu^2 dx = 0.$$

$$\sum_{k,j=1}^n a_{kj}(x)\xi_k \xi_j \geq C_0 |\xi|^2$$

в кач-ве вектора ξ можно взять градиент u_x.

② $ab \leq \frac{\varepsilon a^2 + \varepsilon^{-1} b}{2}$ — полная чисел, а ур-ие $\forall \Rightarrow$ модуль, для нас $a = u_{x_k}$, $b = b_k(x) u(x)$.

$$\left|\sum_{k=1}^n b_k u_{x_k} u\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \underbrace{\sum_{k=1}^n u_{x_k}^2}_{|u_x|^2} + \frac{1}{2\varepsilon} \sum_{k=1}^n b_k^2 u^k$$

$\varepsilon = C_0$

$$\sum b_k u_{x_k} u \geq -\frac{C_0}{2}|u_x|^2 - \frac{1}{2C_0} u^2 \sum_{k=1}^n b_k^2(x)$$

$$(\star) \quad \frac{C_0}{2}\int_\Omega |u_x|^2 dx + \int_\Omega \underbrace{\left(c(x) - \frac{1}{2C_0}\sum b_k^2(x)\right)}_{\geq 0} u^2(x)\,dx \leq 0$$

(от сюда получим оценку снизу для c)

$C_0 : \frac{1}{2C_0}\sum_{k=1}^n b_k^2(x) \leq C_0$, если $c(x) \geq C_0 \Rightarrow$, $\Rightarrow$ весь интеграл будет ≥ 0.

$$\Rightarrow \frac{C_0}{2}\int_\Omega |u_x|^2 dx \leq 0$$

$\|u\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)} \leq 0$ это выполнено, когда $u = 0$

ч.т.д.

Теорема 2. Существ. число $d_0 > 0$: $\operatorname{diam}\Omega \leq d_0 \Rightarrow$ есть единств-ть решения. (обл. огранич., т.к. мы в скалер. ситуацию)

Док-во: в теореме 1 в $\star$ мы делали так, чтобы $\int$ инт-л был ≥ 0. Здесь же мы не знаем какие коэфф-ты, поэтому знак м.б. любой.

но в $(\star)$ $\left(c(x) - \frac{1}{2C_0}\sum b_k^2(x)\right) \geq -C$ (не уходит в ∞, т.к. не коэфф. огранич.)

$\frac{c_0}{2}\int_\Omega |u_x|^2 dx \le c\int_\Omega u^2 dx \le c\,4d^2 \int_\Omega |u_x|^2 dx$. $\quad u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. $\quad d = \operatorname{diam}\Omega$.

Вспомним нер-во Фридрихса: $\int_\Omega u^2 dx \le const \cdot \int |u_x|^2 dx$.

если d маленький: $c4d^2 < \frac{c_0}{2}$, тогда ее будет ≤ 0.

т.е. выбираем d: $4cd^2 < \frac{c_0}{2} \Rightarrow \int_\Omega |u_x|^2 dx \le 0 \Rightarrow u = 0$.

ч.т.д.

Следствие. если $b_k(x) \equiv 0 \Rightarrow$ если $c(x) \ge 0$, то есть единственность.

Энергетическое пространство.

энергетич. пр-во опер-ра A.

$H_A = \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$; энергет. норма $\|u\|_A = \int_\Omega \sum_{k,j=1}^n a_{kj} u_{x_k} u_{x_j} dx$

$$(u,v) = \int_\Omega \sum_{k,j} a_{kj} u_{x_k} v_{x_j} dx$$

$$(u,u)_A = \|u\|_A.$$

Утверждение $\|u\|_A$, $(\cdot,\cdot)$ действ. норма и скаляр. произв. Норма эквивалентна $\|\cdot\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1}$.

Док-во: скаляр. произв.: 1. линейность: $u \mapsto (u,v)_A$ - лин. по u.

2. симметр. $(u,v)_A = (v,u)_A$ - симм. все веществ.

3. невырожденность: $(u,v)_A = 0 \ \forall v \Rightarrow u = 0$. $(v = u)$. док-во.

$\|u\|_A = 0 \Rightarrow u = 0$.

Эквивал. норм: $\|u\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^1} \le c_0 \|u\|_A^2$

$\|u\|_A^2 \le c_1 \|u\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^1}$

если $\|u\|_A = 0 \Rightarrow \|u\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1} = 0 \Rightarrow u = 0$. ($\Rightarrow$ достат. проверить эквивал-ть).

$* \int_\Omega \sum a_{kj}(x) u_{x_k} u_{x_j} dx \qquad \int_\Omega |u_x|^2 dx$ Нужно ~~оценить~~ сравнить

вспомним нер-во эллиптич. оно поточечное $\sum a_{kj} u_{x_k} u_{x_j} \ge c_0 |u_x|^2$

в кач-ве $\xi = u_x$

$\Rightarrow$ в $*$ под-ся $\ldots \ge c_0 \ldots$, где c_0 - константа эллиптичности.

$(a_{kj}(x)) = A(x) \quad (A(x)\xi, \xi) \le C|\xi|^2$, $C = \sup\|A(x)\|$.

$\Rightarrow$ в $*$ под-ся $\ldots \le C|u_x|^2$ из-за ограниченности коэфф.

ч.т.д.

$H_A \sim \overset{\circ}{W}{}_2^1$ норма $\|\cdot\|_A \sim \|\cdot\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1}$ есть одно и тоже мн-во с эквивал. нормами. То пр-во функц. не отличимо, сх-ть будет одинаковая => H_A будет полным.

<u>Утв</u> H_A - гильбертово. (т.к. сх-ть эквив. сх-ти в $\overset{\circ}{W}{}_2^1$), фун-ты в H_A и в $\overset{\circ}{W}{}_2^1$ наслед. одинак.

<u>Вывод абстрактного уравнения.</u>

$Au = f$, $f \in W_2^{-1}(\Omega)$. (достат. рассмат. однор. краевым усл-ям, т.к. неодн. задача сводится к однородной) обл. огранич.

$u|_S = 0$

u - обобщенное решение, если $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$.

$$\int_\Omega \sum_{k,j=1}^{n} a_{kj}(x) u_{x_k} v_{x_j} + \sum b_k(x) u_{x_k} v(x) + c(x) u v \, dx = \langle f, u \rangle$$

$\forall v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. действие $f \in W_2^{-1}$ на $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1$.

f - лин. непр. в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \sim H_A$, по т. Рисса (если есть лин. непр. функ-л, то он порожд. скалярным произв-ем), т.е.
$\exists! F \in H_A : \langle f, v \rangle = (F, v)_A$.

$$\int_\Omega \sum a_{kj} u_{x_k} v_{x_j} \, dx = (u, v)_A$$

* 2-ое и 3-ье слагаемое:

$$\int_\Omega \sum \underbrace{b_k(x) u_{x_k}}_{\text{комбин. огранич. коэфф.}} v + c \overset{\in L_2}{u} v \, dx =$$

* как некий функц., завис. от u - фикс., $\in H_A$, у ф-ии $v \mapsto \int_\Omega (\ ) v \, dx \Rightarrow$ это лин. непрер. функционал в H_A. Проверяем непр-ть, т.е.
$\left| \int_\Omega (\ ) v \, dx \right| \le c \|v\|_A$.

т.к. фиксировали $u \in H_A \Rightarrow u, u_{x_k} \in L_2 \Rightarrow (\ ) \in L_2$
$\Rightarrow$ можно напис. нер-во Гельдера: $\left| \int_\Omega (\ldots) v \, dx \right| \le \underbrace{\| \sum b_k u_{x_k} + c u \|_{L_2}}_{\le c \|u\|_{W_2^1(\Omega)}} \cdot \|v\|_{L_2}$

(по нер-ву Фридрихса: $\|v\|_{L_2} \le c \underbrace{\|v_x\|_{L_2}}_{= \|v\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1} \sim \|v\|_{H_A}}$ эквив.)

в итоге: $\left| \int_\Omega (\ldots) v \, dx \right| \le c \|u\|_{W_2^1} \cdot \|v\|_A$

$v \mapsto \int \sum b_k(x) u_{x_k} v + cuv\,dx$ – лин. непр. $\Rightarrow \exists Tu \in H_A$.

$$\int_\Omega (\dots) v\,dx = (Tu, v)_A$$

в результате: $(u,v)_A + (Tu,v)_A = (F,v)_A$
(по теор. Рисса рассмотр. функ-лы и получ. скалярн. пр-ие).

$(u+Tu-F, v)_A = 0 \quad \forall v \in H_A$.
$u+Tu-F=0$.
$u+Tu=F$ – абстрактное ур-ие в H_A (это интегр. тождество перепис. через энергет. пр-во).

Замечание если $b_k(x) \equiv 0$, $c(x) \equiv 0$, тогда слаг. Tu отсутств.
$\Rightarrow$ Абстр. ур-ие сводится к $u = F$, т.е. сразу возникает решение (получили разрешение ур-ие).

(мы знали, что для кн-ти имеется ортогон. вектор $\Rightarrow \exists$ прерывные функционала, а ортогон. вектор дает нам решение)
т.е. нет разумного способа построения решения.

будем исследовать абстр. ур-ие, но нам надо знать св-ва T.

$T: u \mapsto Tu$ опер-р в H_A.

Свойства оператора T.

Теорема T – лин. компактный оператор в H_A.

раньше вывели оценку: $\left|\int_\Omega (\dots) v\,dx\right| \le c\|u\|_{W_2^1} \cdot \|v\|_{L_2(\Omega)}$.

$$|(Tu,v)_A| \le c\|u\|_{W_2^1} \cdot \|v\|_{L_2(\Omega)}. \quad u,v \in H_A.$$

$u,v \mapsto \int_\Omega (\sum b_k u_{x_k} + cu) v\,dx = (Tu,v)$
линейное вар-ие по u, v $\Rightarrow T$ лин. оп-р.
для ф-ий из энер. пр-ва: $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1$: $\underbrace{\|u\|_{W_2^1(\Omega)}}_{=\|u_x\|_{L_2}} \sim \|u\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1} \sim \|u\|_A \Rightarrow$

$\Rightarrow |(Tu,v)_A| \le c\|u\|_A \cdot \underbrace{\|v\|_{L_2}}_{v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1 \Rightarrow \text{по нер-ву Фридрихса} \le c\|v\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1} \sim \|v\|_A}$

$\Rightarrow |(Tu,v)_A| \le c\|u\|_A \cdot \|v\|_A \quad \forall u,v \in H_A$ это нер-во характер. ограниченность.

$v = Tu \Rightarrow \|Tu\|_A^2 \le c\|u\|_A \cdot \|Tu\|_A$

$\|Tu\|_A \le C\|u_j\|_A$ (это означ., что $T: H_A \to H_A$ непрер.)

T-компактен?

по опред.: возьмем посл-ть $\{u_j\} \in H_A$; $\|u_j\|_A \le C$

Проверим, что $\exists\, u_{j_k}$: $\{Tu_{j_k}\}$ - сх-ся в H_A.

(o) $\|Tu\|_A^2 \le C\|u\|_A \cdot \|Tu\|_{L_2}$

T - непр.: $H_A \to H_A$, т.е. огран. послед. перев. в огранич. $\Rightarrow$ $\{Tu_j\}$ - огран. в H_A.

Вспом. т. Рисса: если посл-ть огр. в $\overset{\circ}{W}{}_2^1$, то $\exists$ подпосл-ть: сх-ся в L_2

т.е. $\exists \{u_{j_k}\}$: $\{Tu_{j_k}\}$ - сх-ся в $L_2(\Omega)$.

Проверим, что $\{Tu_{j_k}\}$ сх-ся в H_A. это следует из (o):

$$\|Tu_{j_k} - Tu_{j_{k'}}\|_A^2 \le C \underbrace{\|u_{j_k} - u_{j_{k'}}\|_A}_{\le \underbrace{\|u_{j_k}\| + \|u_{j_{k'}}\|}_{\text{огран.}}} \cdot \underbrace{\|Tu_{j_k} - Tu_{j_{k'}}\|_{L_2}}_{\to 0}$$

$\Rightarrow \|\ \|_A^2 \to 0$

ч.т.д.

Теорема о существовании

У нас возникло ур-ие с компл. опер-ом: $u + Tu = F$, за разрешимость по отвеч. теор. Фредгольма (раньше сформулировали, а здесь только абстрактно получаем).

Опр. $A: X \to Y$ (лин. непрер.), A наз-ся фредгольмовым, если (банахов)

1) ядро конечномерно ($\ker A$).
2) образ замкнут и имеет конеч. коразмер. ($\operatorname{Im} A$) (индекс)

$\operatorname{codim} \operatorname{Im} A < \infty$ ($\dim L < \infty$, $L \sim Y/\operatorname{Im} A$, $Y = \operatorname{Im} A + L$)

$\operatorname{ind} A = \dim \ker A - \operatorname{codim} \operatorname{Im} A$ ($\dim L$)

Пример: $X = Y = H$, $A = I + T$, T - компактный.

вып-ся все усл-ия для фредгольм. опер-ра и $\dim \ker A = \dim \ker A^* = \operatorname{codim} \operatorname{Im} A$, т.е. $\operatorname{ind} A = 0$.

Теорема $A : \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \to W_2^{-1}(\Omega)$ - фредгольмовский оператор.

Док-во: (нужно проверить, что $\ker A$ - конечномер.; $\operatorname{Im} A$ - замкн. в W_2^{-1}, $\operatorname{codim} \operatorname{Im} A < \infty$).

$$\begin{cases} Au = f \\ u|_S = 0 \end{cases} \iff u + Tu = F$$

т.к. эти задачи эквивал. $\Rightarrow \ker A$ в $\overset{\circ}{W}{}_2^1 = \ker(I+T)$ в H_A.
(стандр. фредг. теория: есть опер: единич. + компл. в гильб. пр-ве)
$\Rightarrow \dim \ker(I+T) < \infty$.

$$f \in \operatorname{Im} A \iff F \in \underbrace{\operatorname{Im}(I+T)}_{\text{замкн. пр-во в } H_A \text{, и имеет конеч. коразм., т.е. } \operatorname{codim} \operatorname{Im} < \infty}$$

Что попад. в ортогон. доп-ие?
по фредгольм. теории: $(F \in \operatorname{Im}(I+T) \iff (F, v)_A = 0 \quad \forall v : v + T^* v = 0)$

23.11.12

$\operatorname{Im}(I+T)$ - замкнут $\subset H_A$; $F \in \operatorname{Im} \iff (F, v)_A = 0 \quad \forall v : v + T^* v = 0$ (*)
от пощуп. абстр. ур-ие в H_A.
нам нужно, чтобы $\langle f, v \rangle = 0$, где v - реш-ие ур-ия.

$\exists w \in H_A$, тогда: $(v + T^* v, w)_A = 0 \quad \forall w \in H_A$

$$(v, w) + (v, Tw)_A = 0.$$

$$= (Tw, v)_A \overset{\text{по постр. опер-ра } T}{=} \int_\Omega \sum_{k=1}^n b_k(x) w_{x_k} v + c(x) w v \, dx.$$

$$\Rightarrow \int_\Omega \sum_{k,j=1}^n a_{kj}(x) v_{x_k} w_{x_j} + \sum_{k=1}^n b_k(x) v w_{x_k} + c v w \, dx = 0.$$

получаем, что $v \in H_A \sim \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ по каб. элементов; знаем, что $\forall w \in H_A$, а это опред. обобщ. реш-ие: $\int_\Omega \tilde{A} v \cdot w \, dx$.

где опер-р $\tilde{A} v = -\sum_{k,j=1}^n (a_{kj}(x) v_{x_k})_{x_j} - \sum_{k=1}^n (b_k(x) v(x))_{x_k} + c v$
формально сопряженный.

$$\int_\Omega A u v \, dx = \left[\text{после интегр. по частям на гран. границ. ф-ции: } u, v \in C_0^\infty(\Omega),\ a_{kj}, b_k \in C^1\right] = \int_\Omega u A^* v \, dx.$$

$= A$, A^* т.к. сопряженный

Тогда (*) $\iff v$ - обобщ. реш-ие $A^* v = 0$, $v|_S = 0$

$\Rightarrow \operatorname{Im} A$ - замкнут (образ опер-ра - функ-ла, $f = 0$ на обобщ. реш. сопряж. задачи)

т.е. $f : f|_{\ker A^*} = 0$: $\langle f, v \rangle = 0$, $\forall v$ - обобщ. реш. $A^* v = 0$, $v|_S = 0$

Замечание. $f \in W_2^{-1}(\Omega)$; $f = f_0 + \sum_{k=1}^{n} (f_k)_{x_k}$, $f_0, f_k \in L_2(\Omega)$

$$\langle f, v\rangle = \int_\Omega f_0 v - \sum_{k=1}^{n} f_k v_{x_k} dx.$$

Следствие. $Au = f_0 + \sum (f_k)_{x_k}$; $f_0, \{f_k\} \in L_2(\Omega)$; $u|_S = 0$

задача разрешима $\Leftrightarrow$ вып-ся усл-ие разреш-ти,

т.е. $\int_\Omega f_0 v - \sum_{k=1}^{n} f_k v_{x_k} dx = 0$ для $\forall v$: $A^* v = 0$ $v|_S = 0$.

$$A = -\sum (a_{kj} u_{x_k})_{x_j} + \sum_{k=1}^{n} b_k u_{x_k} + cu$$

разница м/у A и A^*

$$A^* v = -\sum (a_{kj} v_{x_k})_{x_j} - \sum_{k=1}^{n} (b_k v)_{x_k} + cv$$

обобщ. произв. $\in W_2^1$

а $b_k v \in L_2$.

Краевая задача. Вариационная задача.

$$I(u) = \int_\Omega \underbrace{\sum_{k,j=1}^{n} a_{kj} u_{x_k} u_{x_j} + c(x) u^2}_{\text{квадр. часть}} dx - \underbrace{2\int_\Omega u f dx}_{\text{лин. часть}}.$$

квадратич. функционал.

Изучим: $I(u) \to \inf$

Условие: $u \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$: $u_{x_k} \in L_2(\Omega)$

Станд. усл-ия на коэфф: огранич. и эллиптичность.
$c(x) \geq 0$
$f \in L_2(\Omega)$.

Теорема. Если выполн. ке условия на коэфф., то реш-ие кр. задачи существ. и единств., явл-ся обобщ. решением кр. задачи
$$Au = f$$
$$u|_S = 0.$$

Док-во: на $\mathring{W}_2^1$ новое энергет. скалярн. произв-ие:

$$[u, v]_A = \int_\Omega \sum_{k,j=1}^{n} a_{kj} u_{x_k} u_{x_j} + c(x) uv dx.$$

$$|u|_A^2 = [u, u]_A = \int_\Omega \sum a_{kj} u_{x_k} u_{x_j} + cu^2 dx.$$

① $|u|_A^2 \sim \|u\|^2_{\mathring{W}_2^1(\Omega)} = \int_\Omega |u_x|^2 dx.$

эквивал.

$$|u|_A^2 \geq c_0 \|u\|^2_{\mathring{W}_2^1} : \underbrace{\int_\Omega \sum a_{kj} u_{x_k} u_{x_j}}_{\geq c_0 |u_x|^2} + \underbrace{cu^2 dx}_{\geq 0} \geq c_0 \int_\Omega |u_x|^2 dx$$

≥ 0 (благодаря ц)

$\Rightarrow$ не поуч. нер-во эллипт. инв-ла, и он только уменьш.

теперь покажем нер-во в др. сторону:

$$\int_\Omega \underbrace{\sum a_{kj} u_{x_k} u_{x_j}}_{\le C|u_x|^2} + cu^2 dx \le C\int_\Omega |u_x|^2 dx + \max|c(x)| \underbrace{\int_\Omega u^2 dx}_{\le \tilde{C}\int_\Omega |u_x|^2}$$

нер-во эллипт. нер-во Фридрихса

Мы показали, что на $\overset{\circ}{W}{}_2^1$ есть новая норма. $\tilde{H}_A$ - гильберт. (т.к. норма эквивал., а скал. пр-во полное)

Теперь 4 лин. часть: $\int_\Omega fu dx$. хотим восприн. как лин. функ-л, т.е. $u \mapsto \int_\Omega fu dx$ - лин. функ-л, непрер. в $\tilde{H}_A$.

Непрер-ть: $\left|\int_\Omega fu dx\right| \le C\underbrace{\|u\|_A}_{\text{новая энерг. норма}}$ - это нер-во сев-ся непр. нер-ва Фридрихса.

$$\left|\int_\Omega fu dx\right|^2 \le \int_\Omega f^2 dx \underbrace{\int_\Omega u^2 dx}_{\le C\int_\Omega |u_x|^2 dx} \le C\int_\Omega f^2 dx \|u\|_A^2$$

② по т. Рисса: $\exists F \in \tilde{H}_A$: $\int_\Omega fu dx = [F, u]_A \quad \forall u \in H_A$

В результате мы представ. наш функ-л сигр. образом:

$I(u) = [u,u]_A - 2[F,u] \to \inf$ min функ-ла достиг. на F.

Проверим $I(u) \ge I(F)$; рав-во достигается, если $u = F$.

Пусть $u = F + h$; $I(F+h) - I(F) \ge 0$ (рав-во $\Leftrightarrow h = 0$).

$$[F+h, F+h] - 2[F, F+h] - ([F,F] - 2[F,F]) = [F,F] + [h,F] + [F,h] + [h,h] - 2[F,F] - 2[F,h] - (-[F,F]) = [h,h] \ge 0$$

③ Связь с краев. задачей: F: $\int_\Omega fu dx = [F,u]_A \quad \forall u \in H_A$

распишем это рав-во: F: $\int_\Omega \sum_{k,j=1}^n a_{kj} F_{x_k} u_{x_j} + c(x) Fu dx = \int_\Omega fu dx, \forall u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1$

а это интегр. тождество $\overset{\circ}{W}{}_2^1$ $\Rightarrow$ F - обобщ. реш-ие краев. задачи:

где $[F,u] = \int_\Omega AF \cdot u dx$. (ведь и u это разные ф-ии).

$$(AU)(x) = -\sum_{k,j=1}^n (a_{kj} U_{x_k})_{x_j} + c(x)U(x) = f(x) \quad U|_S = 0.$$

ч.т.д.

Комментарий: сигр. способ реш-ия вариации - это написать ур-ие Эйлера. Для нашего случая!

$I(u)$ – $dI(u,h)$ – дифф-р-л;

$dI(u,h) = \frac{d}{dt} I(u+ht)\Big|_{t=0}$

$$I(u) = \int_\Omega \sum a_{kj} u_{x_k} u_{x_j} + cu^2 dx - 2\int_\Omega u f dx.$$

$$dI(u,h) = 2\int_\Omega \sum_{k,j=1}^{n} a_{kj} u_{x_k} h_{x_j} + cuh\,dx - 2\int_\Omega fh\,dx = 0 \quad \forall h$$

(u – доп. extr)

$\int_\Omega (\ )\, h\,dx = 0$ ур-ие Эйлера

из-за того, что u_{x_k} не имеет произв. => не можем интегр. по частям

Ур-ие Эйлера: $-\sum (a_{kj} u_{x_k})_{x_j} + cu - f_j = 0$ (это та скобка, $= 0$)

это и есть наша задача $Au = f$!

$u \in C^1(\Omega)$

$u|_S = 0$

Для одном. случая в $dI(u,h)$ удалось док-ть, что та u, у доп. extr ев-ся гладкой => можно интегр. по частям.

=> в линейном случае получаем, что не имеем право писать ур-ие Эйлера.

Дифф. ур-ие воспринимим, как интегр. тождество. Т.е. ур-ие Эйлера для функ-ла это интегр. тождество. (производной $(a_{kj} u_{x_k})_{x_j}$ нет, а если есть, то только как обобщ. ф-ия).

Ур-ие Эйлера это и есть краевая задача для нашего функционала.

Задача на собственные числа.

A – станд. эллип. опер-р без коэфф. b, т.е.

$$(Au)(x) = -\sum_{k,j=1}^{n} (a_{kj} u_{x_k})_{x_j} + c(x)u(x) \qquad b_k = 0$$

$A = A^*$ – форм. сопряж. опер.

Задача: $Au = \lambda u$ в Ω

$u|_S = 0$

ищем λ: $\exists u \neq 0$; λ – собств. число, а соотв. решение u – собств. функция.

$\lambda \in \mathbb{C}$, $u = u(x)$ - комплекснозн. ф-ия.
u - обобщ. реш-ие
в пр. части u - стоит регуляр. функционал $\in W_2^{-1}$
$\Rightarrow$ $Au = \lambda u$: $\int\limits_\Omega \sum a_{kj} u_{x_k} \bar{v}_{x_j} + cu\bar{v}\,dx = \lambda \int\limits_\Omega u\bar{v}\,dx$
$u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, $\forall v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ есть инт. тож-во.

Напишем новое энерг. скал. произв.: $[u, v]_A = \int\limits_\Omega \sum a_{kj} u_{x_j} \bar{v}_{x_j} +$
$+ (c(x) + \lambda^*) u\bar{v}\,dx$ $(*)$
λ^*: $c(x) + \lambda^* \geq 0$.
(к обеим частям прибавим $\lambda^* \int u\bar{v}\,dx$):

$[u, v]_A = (\lambda + \lambda^*) \int\limits_\Omega u\bar{v}\,dx = (\lambda + \lambda^*)(u, v)_{L_2(\Omega)}$.

Утверждение: 1) если λ - собств. число $\Rightarrow$ λ - вещ.; $\lambda > -\lambda^*$;
2) u - собств. ф-ия $\Rightarrow$ можно брать вещ. собств.

Док-во: 1) u - с. в., λ - с. число. Если $u \in \tilde{H}_A$, $\forall v \in \tilde{H}_A$
$[u, v]_A = (\lambda + \lambda^*)(u, v)_{L_2}$ возьмем $u = v$
$\Rightarrow \underbrace{[u, u]_A}_{\geq 0} = (\lambda + \lambda^*) \underbrace{\|u\|^2_{L_2}}_{\geq 0}$ $\Rightarrow$ $\lambda + \lambda^*$ - вещ. число > 0.
$\lambda > -\lambda^*$.
2) u - соб. ф-ия, отв. собств. числу λ, тогда
есть энерг. тожд-во $(*)$; $\int\limits_\Omega \ldots dx = \lambda \int u\bar{v}\,dx$ и $\overline{\int \ldots dx} = \lambda \overline{\int u\bar{v}\,dx}$
$\Rightarrow$ в лев. части будут $\bar{u}$, v; а в левой части $\lambda \int \bar{u} v\,dx$.
$\Rightarrow$ $\bar{u}$ - собств. ф-ия.
чим Δ $\operatorname{Re} u = \frac{u + \bar{u}}{2}$, $\operatorname{Im} u = \frac{u - \bar{u}}{2i}$ } тоже св-ся собст. ф-ии, для того же с. числа.
одна из этих $\uparrow$ комплекс. будет $\neq 0$, её возьмем в кач-ве с.ф.
ч.т.д.

Пр-во $\tilde{H}_A$ - гильбер. пр-во с новым скалярн. произв-ем
корма $\|u\|^2_A$ эквивал. $\|u\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)}$
когда прибавили λ^*.

Построим абстр. ф-ие в $\tilde{H}_A$: $v \mapsto \int\limits_\Omega u\bar{v}\,dx$ - аналитич., непрер в $\tilde{H}_A$
$\tilde{H}_A$ для $u \in \tilde{H}_A$ - фиксир.

$\Rightarrow \exists Tu \in \tilde{H}_A$: $\int\limits_\Omega u\bar{v}\,dx = [Tu, v]_A$

$\begin{matrix} Au = \lambda u \\ u|_S = 0 \end{matrix} \Leftrightarrow [u, v] = (\lambda + \lambda^*)[Tu, v]$ верно для $\forall v \in \tilde{H}_A$

$u = (\lambda + \lambda^*)Tu$. (мы получ, что $\lambda + \lambda^* > 0$).

эквивал.

$\Rightarrow$ u - с.ф. опер-а A $\Leftrightarrow$ u - с.ф. опер-ра T

λ - с.ч. опер-а $\Leftrightarrow$ $\mu = (\lambda + \lambda^*)^{-1}$ - с.ч. опер-ра T

Было: $(u, v)_A = \int\limits_\Omega \sum a_{x_j} u_{x_k} \bar{v}_{x_j}\,dx$

$[u, v]_A = \int\limits_\Omega \sum a_{x_j} u_{x_k} \bar{v}_{x_j} + (c(x) + \lambda^*) u\bar{v}\,dx$.

$\|u\|_A \sim \|u\|_A \sim \|u\|_{W_2^1}$

нов норма

$(Tu, v)_A = \int\limits_\Omega (b_k u_{x_k} + c\,u)\bar{v}\,dx$.

а теперь $[Tu, v]_A = \int u\bar{v}\,dx$ - это част. случай $\Rightarrow$

T - компактный, лин. опер-р $: H_A \to H_A$

<u>Утв</u> T - самосопряж. опер. в $\tilde{H}_A$.

<u>Док-во</u>: [из Ф.А.: T в гильб. пр-ве самосопряж. когда $(Tu, u)_H$ - вещ.].

в нашем случае: $[Tu, v]_A = \int\limits_\Omega u\bar{v}\,dx$ <u>$J\ u = v$</u> $\Rightarrow$

$\Rightarrow [Tu, u]_A = \int\limits_\Omega |u|^2\,dx$ - вещ., > 0, $u \neq 0$.

<u>Теорема</u> В пр-ве $\tilde{H}_A$ $\exists$ полная ортонорм. система $\{u_k\}_1^\infty$ - собств. функций опер. A; соотв. собств. числа $\{\lambda_k\}$, $\lambda_k \xrightarrow[k\to\infty]{} +\infty$. Все собств. числа имеют конечную кратность. (кратность с. ч. μ: $\dim\{u \mid Tu = \mu u\}$), т.е. λ: $\dim\{u \mid Au = \lambda u,\ u|_S = 0\}$.

<u>Док-во</u>: [Ф.А.: T - компак. самосопр. опер. в гильб. пр-ве $\tilde{H}_A$ $\Rightarrow \exists$ полная орто-нормир. система из собств ф-ций $\{u_k\}$, т.е. $[u_k, u_j]_A = \begin{cases} 1, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases}$.

а собств число $\mu = \mu_k > 0$, $\mu_k \to 0$ и имеют

конечную кратность.
(удобно перенумер. собств. числа, чтобы они неубывали
т.е. $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_3 \le \dots$) $\Rightarrow$ может возникнуть: $u_k\ u_{k+1} \dots u_{k+m}$

$\lambda_{k-1} < \lambda_k = \lambda_{k+1} = \dots = \lambda_{k+m} < \lambda_{k+m+1}$

$\Rightarrow u_k, \dots u_{k+m}$ – образуют базис в подпр-ве (соотв. одному собств. числу)

$\Rightarrow$ кратность λ_k будет $m+1$. ч.т.д.

(П.О.Н.С. – : система $\{u_k\}$ – полна в любб. пр-ве H, если есть $u \in H$: $u \perp u_k \Rightarrow u = 0$. (если система не полна, то $\exists u \in H$: $u \perp u_k$, $u \ne 0$ то система $u_0, u_1, u_2, u_3, \dots$ включим эл-т u_0 $\Rightarrow$ система полна, то мы не можем ничего добавить)

Ф.А.: H – любб., $\{u_k\}$ – п.он.с $\Rightarrow \forall f \in H$ (можем напис. разлож. по базису, т.е. ряд Фурье) $f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k$; $c_k = (f, u_k)$.
$((f, u_j) = \sum c_k \underbrace{(u_k, u_j)}_{=0, \text{ если } k \ne j} \Rightarrow (f, u_j) = c_j)$.)

Ряды Фурье по собственным функциям

$\{u_k\}$ – п.он.с в $\widetilde{H}_A$ (новое скалер. произв. очень неудобно, самое удоб. скалер. пр-ие это в L_2, мы попытаемся к этому привести)

Теорема. Система собств. ф-ий $\{u_k\}$ – полная, ортогон. система в $L_2(\Omega)$.

Док-во: $(u_k, u_j)_{L_2} = 0$ $k \ne j$ | ортогон.
$\ne 0$ $k = j$

Проверим ортогон-ть: $Au = \lambda u$, $u|_S = 0$ $\Leftrightarrow$ $u = (\lambda + \lambda^*)Tu$
$[u, v]_A = (\lambda + \lambda^*)[Tu, v]_A$
$= (\lambda + \lambda^*)(u, v)_{L_2}$.

~ было – искодно.

мы говорили, что u – с.ф. λ – с.з. $\Leftrightarrow \forall v \in \widetilde{H}_A$ вып-ся рав-во ~.

$u = u_k$, $\lambda = \lambda_k$.
$[u_k, v]_A = (\lambda_k + \lambda^*)(u_k, v) \Rightarrow$ [если возьмем $v = u_j$, $k \ne j$] $\Rightarrow$

$\Rightarrow 0 = [u_k, u_j] = \underbrace{(\lambda_k - \lambda^*)}_{>0}(u_k, u_j)_{L_2} \Rightarrow (u_k, u_j)_{L_2} = 0 \Rightarrow$ орт-ть.

Проверим полноту: [Ф.А.: система $\{u_k\}$ – полная ортогон. в H $\Leftrightarrow$ лин. обол. $\operatorname{Lin}\{u_k\}$ – всюду плотна в H].

т.е. для $\forall f \in H$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \sum_{k=1}^{N} c_k u_k$: $\|f - \sum_{1}^{N} c_k u_k\| < \varepsilon$.

Проверим это.

$f \in L_2(\Omega)$ $\exists ?$ $\sum_{k=1}^{N} c_k u_k$: $\|f - \sum_1^N c_k u_k\|_{L_2} < \varepsilon$?

строим приближ. в 2 этапа

а) $f \in L_2(\Omega)$, фиксир. $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists g \in C_0^\infty(\Omega)$ кус. финит.: $\|f - g\|_{L_2} < \varepsilon$.

нужно приблизить ф-ию g, но $g \in C_0^\infty(\Omega) \subset \tilde{H}_A = \overset{\circ}{W}{}_2^1$, т.к. система $\{u_k\}$ полна в $\tilde{H}_A$ $\Rightarrow$ разложим g в ряд Фурье

$g = \sum_1^\infty c_k u_k$ - ряд Фурье в $\tilde{H}_A$, этот ряд сх-ся, т.е.

для $\varepsilon > 0$ $\exists N$: $\|g - \sum_1^N c_k u_k\| < \varepsilon$

ж в L_2: $\|g - \sum_1^N c_k u_k\| \le C\|g - \sum_1^N c_k u_k\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1} \le \tilde{C}\|g - \sum_1^N c_k u_k\|_A$

по нер-ву Фридрихса

по нер-ву треуг.:

$$\|f - \sum_1^N c_k u_k\|_{L_2} \le \varepsilon + \hat{C}\varepsilon$$

$\Rightarrow$ мн. колебан. собст. ф-ий плотно в L_2. ч.т.д.

До сих пор было, что $[u, v]_A = (\lambda + \lambda^*)(u, v)_{L_2}$, в частности $1 = [u_k, u_k]_A = (\lambda_k + \lambda^*)\|u_k\|^2_{L_2(\Omega)}$.

Теперь считаем, что $\|u_k\|^2_{L_2(\Omega)} = 1$ (т.е. система $\{u_k\}$ норм.)

Теорема (сх-ть рядов Фурье).

$\{u_k\}$ - п.он.с в L_2 собств-ых ф-ий $Au = \lambda u$, $u|_S = 0$ (эллипт. краев. задачи), $u = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k$, $c_k = (u, u_k)$.

Утв-ся: 1) $u \in L_2(\Omega) \Rightarrow$ ряд Фурье сх-ся в $L_2(\Omega)$.

2) $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \Rightarrow$ ряд Фурье сх-ся в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$.

Док-во: ② $\{u_k\}$ - пос в $\tilde{H}_A$, $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1 \Leftrightarrow u \in \tilde{H}_A$,

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{c}_k u_k \text{ - ~~ряд сх-ся в~~ } H_A$$

$$\tilde{c}_k = \frac{[u, u_k]_A}{[u_k, u_k]}$$

u_k - с.ф. $\forall u \in \tilde{H}_A$; $\overline{[u, u_k]} = \overline{(\lambda_k + \lambda^*)(u_k, u)_{L_2}}$ $\Rightarrow$ поменяем порядок

$\Rightarrow [u, u_k] = (\lambda_k + \lambda^*)(u, u_k)_{L_2}$

$[u_k, u_k] = (\lambda_k + \lambda^*)(u_k, u_k)_{L_2}$ $\Rightarrow \tilde{c}_k = \frac{(u, u_k)_{L_2}}{(u_k, u_k)_{L_2}} = c_k$

$\Rightarrow u = \sum \tilde{c}_k u_k$ - ряд, сх-ся в H_A. ч.т.д.

Замечание. Рав-во Парсеваля (для рядов Фурье):

$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \|u_k\|^2$, где $f = \sum c_k u_k$

(в единичн. теор. Пифагора, где ∡ бесконеч треугольник)

$u \in L_2$, $\{u_k\}$ - ПОНС в L_2.

$\|u\|^2 = \sum_1^{\infty} |c_k|^2$; $\|u\|_A^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k + \lambda^*)|c_k|^2$

$u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$

$u \in L_2$ попадает в

т.е. $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \Leftrightarrow$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |c_k|^2 < \infty$

знаем, что $\lambda_k \to \infty \Rightarrow$ усл-ие сх-ти: $u \in L_2 \Rightarrow \sum |c_k|^2 < \infty$. и нужно, чтобы ряд с дополнит. растущ. мн-телем, тоже сх-ся.

<u>Теорема</u>. $u \in W_2^{-1}(\Omega)$ - функц. на $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$; ∡ действие функ-ла $\langle u, \varphi \rangle$, $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^1$, в кач-ве $\varphi = u_k \Rightarrow \langle u, u_k \rangle$ (u_k - веществ.).

если u - регул. $\Rightarrow \langle u, u_k \rangle = \int_\Omega u u_k \, dx = c_k$ - L_2-коэфф. Фурье.

$\to$ если $u \in W_2^{-1}(\Omega)$, тогда 1) ряд $\sum_1^{\infty} c_k u_k = u$ сх-ся к u в W_2^{-1}

и 2) $\|u\|^2_{W_2^{-1}(\Omega)} \underset{\text{эквивал.}}{\asymp} \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_k + \lambda^*)^{-1} |c_k|^2$

(2) знач., что $u \in W_2^{-1} \Leftrightarrow c_k$ такие, что $\sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_k + \lambda^*)^{-1} |c_k|^2$ сх-ся (если $(\lambda_k + \lambda^*)^{-1}$ растут очень быстро, то c_k не обязаны убывать).

<u>Док-во</u>: ② хотим увидеть, что нормы эквивалентны.

знаем, что $\|\ \|_{W_2^{-1}}$ - норма функ-ла на $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, если в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ поменяем норму на эквивал., то получим. эквив. норму в W_2^{-1}.

$\overset{H}{(\ ,\ )} \to \overset{H_A}{(\ ,\ )_A}$ $\Rightarrow$ нормы функ-ов тоже эквивал.

нормы эквивал.

$\ell \in H^*$, $|\langle \ell, u \rangle| \le c\|u\|_H$, $\inf c = \|f\|$.

$\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \sim \tilde{H}_A$ (нормы эквивал.); $(\ )^* \sim (\tilde{H}_A)^*$ - нормы эквив.

$\|u\|_{W_2^{-1}} = \sup \frac{|\langle u, \varphi \rangle|}{\|\varphi\|_{W_2^1}} = \sup \frac{|\langle u, \varphi \rangle|}{\|\varphi\|_A}$, а теперь $\exists\, u \in L_2(\Omega) \Rightarrow$

$u \in W_2^{-1}$

$\Rightarrow \langle u, \bar{\varphi} \rangle = \int_\Omega \overbrace{u\bar{\varphi}}^{\text{- компл. сопряж. в } L_2} dx = [$если $u = \sum c_k u_k$, $\varphi = \sum d_k u_k] = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \bar{d}_k$

$\|\varphi\|_A^2 = \sum (\lambda_k + \lambda^*) |d_k|^2$

$\sup \frac{|\sum c_k \bar{d}_k|}{(\sum (\lambda_k + \lambda^*) |d_k|^2)^{1/2}} = \sqrt{\sum (\lambda_k + \lambda^*)^{-1} |c_k|^2}$ - это так потому.

- попад. в L_2 норма конеч. $\Rightarrow$ это выр-ие тоже должно быть конечно.

$$\sup_{\beta_k} \frac{|\sum \alpha_k \beta_k|}{\sqrt{\sum \beta_k^2}} = \sqrt{\sum |\alpha_k|^2}$$ (нер-ть Гельдера)

$\leq$, выберем β $\Rightarrow$ получим $=$ всюду

у нас: $\beta_k = \sqrt{(\lambda_k + \lambda^*)}\,|d_k|$

$\alpha_k = \left(\sqrt{(\lambda_k + \lambda^*)}\right)^{-1} c_k$.

Вариационные свойства собственных чисел

$$Au = -\sum_{k,j=1}^{n} (a_{kj} u_{x_k})_{x_j} + cu = \lambda u$$

$u|_S = 0$. $\quad c(x) \geq 0$.

если нет усл-ия $c(x) \geq 0$ $\Rightarrow$ нормируем опер-р. $A + \lambda^* = \tilde{A}$

$\Rightarrow \lambda_k(A) + \lambda^* = \lambda_k(\tilde{A})$ $\Rightarrow$ собств. числа получ. сдвигом, а собств. ф-ии не изменяются $u_k(A) = u_k(\tilde{A})$.

Знаем, что $\exists$ ПОН $\in \{u_k\}$, $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \ldots$ $\lambda_k \to +\infty$.

Теорема Если есть $u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}$: u_k - решение :

$$\frac{[u,u]_A}{\|u\|^2_{L_2}} = \frac{\int_\Omega a_{kj} u_{x_k} u_{x_j} + cu^2\,dx}{\int_\Omega u^2 dx} \to \inf$$

при усл-ии, что $u \in \overset{\circ}{W}{}^1_2$, $u \perp u_j$ в L_2, $1 \leq j \leq k-1$.

при этом $\inf = \lambda_k$.

(Частный случай: $\lambda_1 = \inf\limits_{u \in \overset{\circ}{W}{}^1_2} \underbrace{\frac{\int_\Omega \sum a_{kj} u_{x_k} u_{x_j} + cu^2 dx}{\int_\Omega u^2 dx}}_{= I(u)}$,

$\inf I(u) = I(u_1) = \lambda_1$

область, на $\int$ ищем $\inf$ сужаем, как только нашли λ_1 $\Rightarrow$ сред. собств. число не м. быть меньше, а только больше; сужаем, т.к. добавился усл-ие ортогональности.

Док-во: $I(u) = \frac{[u,u]_A}{\|u\|^2_{L_2}} = \frac{\|\sum c_k u_k\|^2_A}{\|\sum c_k u_k\|^2_{L_2}} = \frac{\sum |c_k|^2 \lambda_k}{\sum |c_k|^2} \geq$ (разлож. по собств. ф-ии; рав-ть Парсев.)

$u \in \overset{\circ}{W}{}^1_2$,

$\geq \lambda_1 \frac{\sum |c_k|^2}{\sum |c_k|^2}$, а с друг. стор. c_k: $c_1 = 1$, $c_k = 0$ $k > 1$ т.е. из суммы берем только 1-ое слаг.

и снова получим λ_1. Если добавим условие ортогон-ти, т.е. $u \perp u_1$ => единицу берем от 2, а не от 1 и продолжаем тоже самое и т.д.

30.11.12.

$$I(u) = \frac{\int_\Omega \sum a_{kj} u_{x_k} \overline{u}_{x_j} + c(x)|u|^2 dx}{\int_\Omega |u|^2 dx} \to \inf$$

$$\begin{array}{l} I(u) \to \inf \\ u \in \mathring{W}_2^1 \end{array} \Big| \begin{array}{l} \lambda_1 \\ u_1 \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{l} I(u) \to \inf \\ u \perp u_1 \text{ в } L_2 \\ u \in \mathring{W}_2^1 \end{array} \Big| \begin{array}{l} \lambda_2 \\ u_2, \dots \end{array}$$

$$\int_\Omega \sum a_{kj} u_{x_k} u_{x_j} + cu^2 dx \geq \underbrace{\lambda_1}_{\text{точная константа}} \int_\Omega u^2 dx.$$

$u \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$

Теперь вернемся к: $-\Delta u = \lambda u$ - зад. D_i
$u|_S = 0$

Соотв. с тем, чем занимались.
$A = -\Delta$
$a_{kj}(x) = \begin{cases} 1, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases}$, $c(x) = 0$.

Лаплас $\leftrightarrow$ ф-ия Грина

$$\begin{array}{l} -\Delta u = \lambda u \\ u|_S = 0 \end{array} \iff u(x) = \lambda \underbrace{\int_\Omega \overbrace{G(x,y)\, u(y)\, dy}^{Gu \text{ - опер-р}}}_{\text{ф-ия Грина}},$$

- компактный самосопр. опер-р в $L_2(\Omega)$.

(Вариац. принцип)' : $\int_\Omega (Gu)(x)\, u(x)\, dx \Big/ \int_\Omega u^2 dx = I'(u)$.
интеграл. вар. принцип для оператора Лапласа.

$\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$ - соб. числа
$u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad \dots$ - соб. ф-ии

Их можно получить: $I'(u) \to \sup$, $u \in \mathring{W}_2^1$ | $\sup = \lambda_1^{-1}$, $u = u_1 \in \mathring{W}_2^1$

(можно написать L_2, C_0^∞; $\sup \in L_2$, но $\sup \notin C_0^\infty$ => поэтому ищем sup, а не max)

Затем ищем: $I'(u) \to \sup = \lambda_2^{-1}$, $u \perp u_1$: $u = u_2$; $I'(u) \to \sup = \lambda_3^{-1}$, $u \perp u_1$, $u \perp u_2$ | в L_2, $u = u_3$, т.д.

Все самое можно делать через ф-ию Грина:

$$I'(u) = \frac{\int_\Omega (Gu) \cdot u\, dx}{\int_\Omega u^2 dx} = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-1} |c_k|^2}{\sum |c_k|^2} \to \sup. \quad (\lambda_k^{-1} \text{ монот. убывают}).$$

$u = \sum c_k u_k$, $\|u_k\|_{L_2} = 1$ $\quad \forall u \iff \forall c_k$

$\sum \lambda_k^{-1} c_k^2 \leq \lambda_1^{-1} \sum c_k^2$, $I'(u) \leq \lambda^{-1}$ - наиб.

$u = u_1$

$c_1 = 1, \quad c_k = 0$
$k \geq 2.$

$I(u_1) = \lambda_1^{-1}$

Теорема λ_1 - наим. собств. число $A = -\Delta$ св-ся простым. (т.е. его кратность $= 1$).

Док-во: (Это верно и для произв. A, произв. огранич. Ω) докажем через ф-ию Грина, область должна быть с границей $\in C^2$.

u_1 - с.ф; λ_1 - с. число $\longleftrightarrow$ $\int_\Omega (Gu)(x)u(x)dx \leq \lambda_1^{-1}\int_\Omega u^2 dx$

(заинтересуемся вещ. числами ф-ции не имеющ. комп. сопряж.)

рав-во бывает на собств. подпр-ве, т.е. $-\Delta u = \lambda_1 u$
$u|_S = 0.$

[Было: $G(x,y) \geq 0$ в $\Omega \times \Omega$ (всюду); $x, y \in \Omega$, то $G(x,y) > 0$.]

1) покажем, что ~~на~~ u не может менять знак (u - это ф-ия, на u: $\int_\Omega (Gu)u\,dx = \max$ $u(x)$ - не меняет знак, γ достиг. знач).

если ф-ия u меняет знак, тогда $I(u) \not\to \max$.

$$\int_\Omega Gu \cdot u\,dx = \int_\Omega \underbrace{\left(\int_\Omega G(x,y)u(y)dy\right)}_{Gu} \cdot u(x)dx$$

т.к. знак где-то меняется, то $u(y)u(x) < |u(y)u(x)|$.
(если это нер-во есть в (·) x^* $y = x = x^*$, тогда $\exists\, \delta > 0 : |x^* - y| < \delta$ и $|x^* - x| < \delta$ и нер-во вып-ся с каким-то запасом, т.е. $u(y)u(x) < |u(y)u(x)| - \varepsilon$.

$$\iint_{\Omega\,\Omega} G(x,y)\,u(y)u(x)dydx \leq \iint_{\Omega\times\Omega \cap |x^*-y|<\delta} + \int_{\substack{|x^*-x|<\delta}} \leq \iint_{\substack{\Omega\times\Omega \cap |x^*-y|<\delta \\ |x^*-x|<\delta}} G(x,y)\cdot$$

$$\cdot(|u(y)|\cdot|u(x)| - \varepsilon)\,dydx + \int_{\Omega\setminus\{y\}} G(x,y)|u(y)u(x)|. \leq \quad (A > 0)$$

интеграл только увелич., если увелич. параметр ф-ию.

$$\leq \underbrace{\int_{\Omega\Omega} G(x,y)|u(y)u(x)|dydx}_{\leq \lambda_1^{-1}\int_\Omega |u|^2 dx} - \varepsilon \int_{\substack{|x^*-y|<\delta \\ |x^*-x|<\delta}} G(x,y)dxdy \Rightarrow \int (Gu)(x)u(x)dx < \lambda_1^{-1}\int_\Omega |u|^2 dx$$

> 0

т.к. вычитаем строго положит. число

$\Rightarrow$ u явл-ся с.ф. отвеч. собств. числу λ_1.

2) u - с. ф для λ_1 : $u(x) > 0$, $x \in \Omega$.

если $\exists x^* \in \Omega$: $u(x^*) = 0$:

$$0 = u(x^*) = \lambda_1 \int_\Omega \underbrace{G(x^*, y)}_{>0} \underbrace{u(y)}_{\geq 0} dy > 0.$$

=> т.е. интеграл берется от неотр. ф-ии по полож. мере => он обязан быть больше нуля.

3) кратность с.ч. = 1.

если не так : u_1, u_2 - с.ф. для λ_1 ; $u_1 \perp u_2$ => $\int_\Omega u_1(x) u_2(x) dx = 0$,

знаем, что $u_1, u_2 > 0$ в области

но этого не м. быть, т.к. чтобы было так нужно чтобы ф-ии меняли знак, а они положит.

т.е. т.д.

Замечание. Нер-во Фридрихса: $\int_\Omega u^2 dx \leq c \int_\Omega |u_x|^2 dx$

тогда $\inf c$: $c^{-1} \leq \dfrac{\int_\Omega |u_x|^2}{\int_\Omega u^2 dx} = I(u)$

знаем, что точ. константа $c = \dfrac{1}{\lambda_1}$

Упр. Док-ть, что если $\Omega \subset \tilde{\Omega}$, то соб. число $\underset{\text{мин}}{\lambda_1(\Omega)} < \underset{\text{мин}}{\lambda_1(\tilde{\Omega})}$

если $|\tilde{\Omega} \setminus \Omega| > 0$, то нер-то строгое.

с увелич. области с.ч. уменьшается, а константа растет.

$G(x,y) > 0$ и симметр., непрер. => собств. число простое (это верно для $\forall$ симметр. опер-ра с положит., непрер., симметр. ядром).

$\Delta u = f$

$u|_S = 0$

$u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ внешних такая гладкость будет у обобщ. решения, от чего зависит гладкость.

зарани будут локальны : $u \in (W_2^l)_{loc}$; $\varphi u \in W_2^l$; $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

$A = -\Delta$.

Гладкость обобщенного решения.

Задачу в R^n : $-\Delta u = f$

$u \in W_2^l$

$\partial^\alpha u \in W_2^{l-|\alpha|}(R^n)$

$-\Delta u = f \in W_2^{l-2}(R^n)$.

Теорема $A = -\Delta + 1$ - изоморфизм: $W_2^{l+2}(R^n) \to W_2^l(R^n)$ $\forall l > 0$.

Док-во: [$A = -\Delta + 1 : W_2^{l+2}(R^n) \to W_2^l$ - инъ; этот опер-р обратим; обратный - непрер.]

Вспомним преобр. Фурье: $-\Delta u + u = f$, $u \in W_2^{l+2}(R^n) \subset S$.

$$-\widehat{\Delta u + u} = \hat{f}, \quad (\widehat{-\Delta u})(\xi) = |\xi|^2 \hat{u}(\xi)$$

$$\Rightarrow (|\xi|^2 + 1)\hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi), \quad \hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi) / (1 + |\xi|^2)$$

$$\|u\|^2_{W_2^l} \overset{\text{эквивал.}}{\sim} \int_{R^n} (1 + |\xi|^2)^l |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi.$$

если $f \in S' \Rightarrow u : \hat{u} = \dfrac{\hat{f}(\xi)}{1 + |\xi|^2} \in S'$ (решение есть всегда, нужно только проверить непр-ть)

т.е. решение (из S') есть для $\forall f \in S'$

проверим: если $f \in W_2^l \Rightarrow u \in W_2^{l+2}$; $\|u\|_{l+2} \le C\|f\|_l$

$$\|u\|^2_{l+2, R^n} \le C\|f\|^2_{l, R^n} \longleftrightarrow \int_{R^n} (1 + |\xi|^2)^{l+2} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \le C \int_{R^n} (1 + |\xi|^2)^l |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi$$

$\le$

Итак: $-\Delta u + u = f$ в R^n, $f \in W_2^l(R^n) \Rightarrow \exists! \; u \in W_2^{l+2}$ ч.т.д.

(единств. в классе S').

Теорема (гладкость обобщ. решения).

$\exists u \in W_2^1(\Omega)$ - решение ур-ия $-\Delta u = f$ в Ω, $f \in W_2^{-1}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$

(но мы знаем, что $\exists \omega : f \in W_2^l(\omega)_{loc}$) $\Rightarrow u \in W_2^{l+2}(\omega)_{loc}$.

$\omega \subset \Omega$ (строго внутри).

в обл-ти есть f, у границы плохая (т.е. правая часть плохая) и в ω f будет хорошая, правая часть будет гладкая, то, что снаружи не влияет, но то что происх. внутри обл-ти ω.

Док-во: нужно проверить св-ва ф-ии φu, где $\varphi \in C_0^\infty(\omega)$.

дифф. только ф-ию u.

$$-\Delta(\varphi u) = \varphi(-\Delta u) + L_1(x, D_x)u$$

опер-р первого порядка (посм., что это за опер.) коэфф. гладкие, есть 1-ые произв по u и сама ф-ия u. обр. в 0 вне supp φ)

$$-\Delta u = f \Rightarrow -\Delta(\varphi u) + \varphi u = \underbrace{\varphi(-\Delta u)}_{f} + L_1 u + \varphi u = \tilde{f} \text{ - ур-ие в } R^n$$

(вне ω Re $\equiv 0$).

если $f \in W_2^l$, $u \in W_2^1 \in L_2$ $\Rightarrow L_1 u + \varphi u \in L_2$, $\tilde{f} \in L_2$.

φu - решение $(-\Delta + 1)(\varphi u) = \tilde{f} \in L_2 \Rightarrow \varphi u \in W_2^2(R^n)$ $\forall \varphi$ $\Rightarrow u \in W_2^2(\omega)_{loc}$.

знаем, что $u \in W_2^2(\omega)_{loc} \Rightarrow L_1 u \in W_2^1(R^n)$ (вне ω $L_1 u = 0$ вырожд. коэфф.

коэфф. требуют не то, что нужн. при приближ. к границе ω.

$\tilde{f} \in W_2^1(R^n)$, если $f \in W_2^1(R^n)$ (если $l \geq 1$) по теор. об изоморф.

$\Rightarrow \varphi u \in W_2^3(R^n)$ $\forall \varphi \Rightarrow u \in W_2^3(\omega)_{loc}$ и т.д.

останавливаемся до тех пор пока ф-ия f не будет иметь конеч гладкость l.

если коэфф. перем., то локально (в окр-ти точки) это св-ся маленьким возмущением для ур-ия с пост. коэф-ами.

т.е. если немного отойдем от точки, то коэфф. мало изменяется.

Задача Неймана

I. Вариац. задача.

$Au = f$

$u_S = 0$, то реш-ие можно получить как реш-ие вариац. задачи:

$$I(u) = \int_\Omega \sum a_{kj} u_{x_k} u_{x_j} + cu^2 dx - 2\int_\Omega u f dx.$$

$$I(u) \to \inf$$
$$u \in \mathring{W}_2^1 \quad \Rightarrow u \text{ - реш-ие кр. задачи.}$$

Матр. коэфф. симметр.: $a_{kj} = a_{jk}(x) \in L_\infty$; $c(x) \in L_\infty$, $c(x) \geq 1$.

вып-ся нер-во эллиптич.: $\sum a_{kj}^{(x)} \xi_k \xi_j \geq c_0 |\xi|^2$ $\forall \xi \in R^n$, $\forall x \in \Omega$.

Наша задача: $I(u) \to \inf$
$u \in W_2^1(\Omega)$

$$I(u) = \underbrace{\int_\Omega \sum a_{kj} u_{x_k} u_{x_j} + cu^2 dx}_{\|u\|_A^2 \text{ - энерг. норма}} - 2(u, f)_{L_2}$$

новое энерг. пр-во для з. Неймана:

в $W_2^1(\Omega)$ с нормой $\|u\|_A^2$; скалер. произв.: $[u, v]_A = \int_\Omega \sum_{k,j=1}^n a_{kj} u_{x_k} u_{x_j} + cuv dx$.

Утв. есть нер-во эллиптич. $\Rightarrow \|u\|_A \asymp \|u\|_{W_2^1}$ - эквивал. нормы.

Следствие H_A - гильбертово.

Утв. $l_f(u): u \mapsto (u,f)_{L_2}$ - лин. непр. функ-л в H_A

Док-во: $|l_f(u)| \le C\|u\|_A$

$|(u,f)| \le \underbrace{\|u\|_{L_2}}_{\le \|u\|_A} \cdot \|f\|_{L_2}$ => лин. непр. функ-л.

$\left[\begin{array}{l} c(x) \ge 1 \\ \|u\|_A \ge \|u\|_{L_2} \end{array}\right]$

ч.т.д.

По т. Рисса: $\exists!\ F \in H_A$: $l_f(u) = (u,f)_{L_2} = [u,F]_A$

Задача Дирихле

$I(u) = \|u\|_A^2 - 2[u,F]_A \to \inf \quad u \in H_A$

$\exists!\ (\cdot)\min, \quad u_{min} = F.$

Что такое F?

F получ. из т. Рисса; $[u,F]_A = (u,f)_{L_2}$.

$$\int_\Omega \sum a_{kj} u_{x_k} F_{x_j} + c(x) u F\,dx = \int_\Omega u f\,dx.$$

сделаем замену: $F \mapsto u$, $u \mapsto \varphi$

$$\int_\Omega \sum a_{kj} u_{x_k} \varphi_{x_j} + cu\varphi\,dx = \int_\Omega f u\,dx$$ это рав-во выт-ся!

$u \in W_2^1(\Omega) \sim H_A \quad \forall \varphi \in W_2^1(\Omega)$

ур-ие Эйлера: (формально проинтегрир. по частям)

$\int_\Omega (Au - f)\varphi\,dx = 0\ \forall\varphi \Rightarrow Au = f$

1) $\varphi \in C_0^\infty(\Omega) \Rightarrow$ интегр. тождество означает, что $Au = f$ (это понимают в смысле $\mathcal{D}'$). (в смысле обобщ. ф-ий) $\in W_2^{-1}(\mathcal{D})$.

2) $\varphi \in C^\infty(\bar\Omega)$. Естеств. урав. ин-ие:

$$\int_\Omega f\varphi_{x_j}\,dx = -\int_\Omega f_{x_j}\varphi\,dx + \int_S f\varphi\cos(\nu, x_j)\,dS(x).$$

ν - един. внешняя нормаль.

$$\int_\Omega \Big(-\sum_{k,j=1}^n (a_{kj} u_{x_k})_{x_j} + cu\Big)\varphi\,dx + \int_S \Big(-\sum_{k,j=1}^n a_{kj} u_{x_k}\cos(\nu, x_j)\Big)\varphi\,dS(x) =$$

$= \int_\Omega f\varphi dx$. – рав. во вып-ся в смысле интегр. тождества (1)

$\int_S \sum_{k,j=1}^{n} a_{kj} u_{x_k} \cos(\nu, x_j)\varphi dS(x) = 0$

перебер. все знач-ия $\varphi \in C^2(\bar\Omega) \Rightarrow \varphi|_S \in C^\infty(S)$

$\Rightarrow \sum_{k,j=1}^{n} a_{kj} u_{x_k} \underbrace{\cos(\nu, x_j)}_{j\text{-ая компонента нормали.}}\Big|_S = 0$ (2) – это усл-ие получ. в гладкой ситуации.

$\frac{\partial}{\partial \nu_A} u$ – произв. по конормали. (по нормали соотв. опер-ру A)

У нас есть (1), $Au = f$ и (2), вып-ся в смысле интегр. тождества, т.е. воспринимаем всю задачу в смысле интегр. тождества.

I. Задача Неймана.

$Au = f$ Ω-огран.

$\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_S = 0$.

I:

u-обобщ. решение 3. Неймана, если

1) $u \in W_2^1(\Omega)$, $\forall \varphi \in W_2^1(\Omega)$.

$$\int_\Omega \sum_{k,j=1}^{n} a_{kj}(x) u_{x_k} u_{x_j} + c(x) u\varphi dx = \underbrace{\langle f, \varphi\rangle}_{\text{лин, непр. функц.}}$$

$+ \sum_{k=1}^{n} b_k u_{x_k} \varphi$

$\varphi \longmapsto \langle f, \varphi\rangle$

$$(Au)(x) = -\sum_{k,j=1}^{n} (a_{kj}(x) u_{x_k})_{x_j} + \sum b_k(x) u_{x_k} + c(x) u$$

Ω-огр.; $a_{kj}(x), a_{jk}(x) \in L_\infty$; $b_k, c \in L_\infty$

Нер-во эллиптичности: $\sum_{k,j=1}^{n} a_{kj}(x)\xi_k\xi_j \geq c_0|\xi|^2$ $\forall x \in \Omega$, $\forall \xi \in R^n$ $\quad \underline{c_0 \geq 0}$.

III: $S \in C^1$ ($\exists$ след $\in L_2(S)$ ф-ий $\in W_2^1(\Omega)$). Станд. усл-ие выполнены.

раньше писали $I(u) = \int_\Omega \ldots dx$, а можно написать: $\tilde I(u) = \underbrace{\int_\Omega \ldots dx}_{I(u)} + \int_S \sigma u^2 dS$

если $\sigma \geq 0$ и $dI(u, \varphi) = 2\int_S \sigma u\varphi dS$.

Опр. u-обобщ. решение III краев. задачи, если $u \in W_2^1(\Omega)$, для $\forall \varphi \in W_2^1(\Omega)$ вып-ся: $\int_\Omega \sum a_{kj} u_{x_k} u_{x_j} + \sum b_k u_{x_k}\varphi + cu\varphi dx + \int_S \sigma u\varphi dS(x) = \langle f, \varphi\rangle$.

$$\left[\int_S \sum a_{kj} u_{x_k} \cos(\nu, x_j)\varphi\, dS + \int_S \sigma u \varphi\, dS = 0\right]$$

Естеств. гранич. усл-ие: $\sum_{k,j=1}^{n} a_{kj} u_{x_k} \cos(\nu, x_j) + \sigma u\big|_S = 0$,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \nu_A} + \sigma u\right)\Big|_S = 0.$$

$\varphi \longmapsto \langle f, \varphi\rangle$

лин. непр. функционал на $W_2^1(\Omega)$

Примеры: 1. $f \in L_2(\Omega)$, $\langle f, \varphi\rangle = \int_\Omega f\varphi\, dx$

$$\Delta u = f$$

если $f \in W_2^{-1}(\Omega)$, то $f = f_0 + \sum_{k=1}^{n} (f_k)_{x_k}$; $f_0, f_k \in L_2(\Omega)$.

главное мат., у заменим правую часть.

2. $S \in C^1$, $\langle f_g, \varphi\rangle = \int_S g\varphi\, dS$, где $g \in L_2(S)$

функ-л, порожд. ф-ей g. $\varphi_{\in W_2^1(\Omega)} \longmapsto \varphi|_S \in L_2$ - лин. непр. отобр.

по нер-ву Гельдера: $|\langle f_g, \varphi\rangle| \le \|g\|_{L_2(S)} \cdot \underbrace{\|\varphi\|_{L_2(S)}}_{\le C\|\varphi\|_{W_2^1(\Omega)}}$.

в 1: f - обобщ. ф-ия, $f \in L_2(\Omega)$, а у нас f_g не яв-ся обобщ. ф-ей в обл-ти; можем сказать, что $f_g = g\delta_S$ яв-ся эл-ом $\mathcal{D}'(R^n)$

На C_0^∞ верно рав-во: $\int_\Omega \Delta u \cdot \varphi\, dx + \int_S \frac{\partial u}{\partial \nu_A}\varphi\, dS = \int_S g\varphi\, dS$

$\Delta u = 0$ - ур-ие в $\mathcal{D}'(\Omega)$

$\frac{\partial u}{\partial \nu_A}\Big|_S = g$ (если мы заменим ~~функ-л сверх образ.~~

$$\langle f, \varphi\rangle = \int_S g\varphi\, dS = \int_\Omega \left\{\sum a_{kj}(x) u_{x_k} u_{x_j} + \sum b_k u_{x_k}\varphi + c(x) u\varphi\, dx\right)$$

Теорема единственности

Теорема $\exists\, c^*: c(x) \ge c^*$, то обобщ. решение (II, III) будет единственным.

(будем в основном обсуждать задачу III).

$c^* = c^*(c_0, b_k, \sigma)$.

равномерно эллипт.

Док-во: $\triangleleft$ u_1, u_2 - обобщ. решение; пишем интегр. тожд-ва для каждого из них, напишем разность $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ получ. интегр. тождество для $u_1 - u_2$:

$$\int_\Omega \sum_{k,j=1}^{n} a_{kj}(x) u_{x_k} u_{x_j} + \sum b_k u_{x_k} \varphi + c u \varphi \, dx + \int_S \sigma u \varphi \, dS = 0. \quad \forall \varphi \in W_2^1(\Omega).$$

$]\ \varphi = u$

$$\int_\Omega \underbrace{\sum_{k,j=1}^{n} a_{kj} u_{x_k} u_{x_j}}_{\substack{\geq c_0 |u_x|^2 \text{ (по эллип. матр)} \\ \geq c_0 (u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2 + \ldots + u_{x_n}^2)}} + \sum b_k u_{x_k} u + c(x) u^2 dx + \int_S \sigma u^2 dS(x) = 0.$$

$$c_0 \int_\Omega |u_x|^2 dx + \underbrace{\int_\Omega \sum b_k u_{x_k} u}_{\geq -\frac{c_0}{2}\int_\Omega |u_x| - \frac{1}{2\varepsilon^2}\int_\Omega b_k^2 u^2 dx} + c u^2 dx + \int_S \sigma u^2 dS \leq 0.$$

$\forall$ 2-ое слагаемое: $|b_k(x) u_{x_k} u| \leq \frac{\varepsilon u_{x_k}}{2} + \frac{1}{\varepsilon} b_k^2 u^2 \leftarrow \left(\underset{(\sqrt{\varepsilon} a)(\sqrt{\varepsilon}^{-1} b)}{ab} \leq \varepsilon \frac{a^2}{2} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{b^2}{2} \right)$

$$\Rightarrow c_0 \int_\Omega |u_x|^2 dx - \frac{c_0}{2} \int_\Omega |u_x|^2 dx + \int_\Omega \left(c(x) - \frac{\sum b_k^2}{c_0} \right) u^2 dx + \int_S \sigma u^2 dS \leq 0.$$

$$\int_S u^2 dS \leq \varepsilon \int_\Omega |u_x|^2 dx + C_\varepsilon \int_\Omega u^2 dx$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists C_\varepsilon : \forall u \in W_2^1(\Omega)$$

$\sigma(x) = \underbrace{\sigma_+(x)}_{\text{можем выкин.}} - \underbrace{\sigma_-(x)}_{\text{мешает}} \longleftrightarrow \int_S \sigma u^2 dx \geq -\int_S \sigma_-(x) u^2 dS \geq -C \int_S u^2 dS. \ (\geq)$

считаем, что $\sigma_-(x) \leq C$ п. в. в $\partial\Omega$-ти., $C = \|\sigma_-\|_\infty$.

$$(\geq) \ -\frac{c_0}{4} \int_\Omega |u_x|^2 dx - C \int_\Omega u^2 dx.$$

$$\frac{c_0}{4} \int_\Omega |u_x|^2 dx + \int_\Omega \underbrace{\left(c(x) - \frac{\sum b_k^2(x)}{c_0} - C \right)}_{>0} u^2 dx \leq 0. \Rightarrow \int_\Omega |u_x|^2 dx = 0, \ \int_\Omega |u|^2 dx = 0$$

$c(x) \geq c^*$

$c^* = \sup \left(\frac{\sum b^2(x)}{c_0} + C \right).$

$\Rightarrow u = 0 \Rightarrow u_1 = u_2$

ч.т.д.

Энергетическое пространство. (задача II/III)

Энер. пр-во: $H_A \subseteq W_2^1(\Omega)$ по набору элементов.

$[u, v]_A = \int_\Omega \sum_{k,j=1}^{n} a_{kj}(x) u_{x_k} v_{x_j} + uv \, dx$ - скалер. произв.

(≥) кер-ть эллипт. $|u|_A^2 = \int_\Omega \sum_{k,j=1}^{n} a_{kj}(x) u_{x_k} u_{x_j} + u^2 dx \le C_1 \int_\Omega |u_x|^2 + u^2 dx = \|u\|^2_{W_2^1(\Omega)}$

доказ.

$\sum a_{kj}\xi_k\xi_j \ge c_0|\xi|^2$ $\ge c_2 \int_\Omega |u_x|^2 + u^2 dx.$

$\xi_k = u_{x_k}$

Утв. $|u|_A \asymp \|u\|_{W_2^1(\Omega)}$ - норма эквивал. на $W_2^1(\Omega)$.

$\sum a_{kj} u_{x_k} u_{x_j} \ge c_0 |u_x|^2$.

Следствие. H_A - гильбертово.

(≤) квадратич. форма оценив-ся сверху.

$$\sum_{k,j=1}^{n} a_{kj}\xi_k\xi_j \le C|\xi|$$

$C_1 = \max(1, C)$

$C_2 = \min(1, c_0)$

Абстрактное уравнение в H_A.

$Au = f \in W_2^{-1}(\Omega)$ $(L_2(\Omega))$.

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \nu_A} + \sigma u\right)\Big|_S = 0$$

$u \in H_A$, $\forall \varphi \in H_A$ имеет место интегр. тождество:

$$\underbrace{\int_\Omega \sum a_{kj} u_{x_k} \varphi_{x_j} + \sum b_k u_{x_k} \varphi + c u \varphi dx + \int_S \sigma u dS}_{[u,\varphi]_A} = \overbrace{\langle f, \varphi\rangle}^{[F,\varphi]_A}.$$

энерг. норма. $+u\varphi$ $-u\varphi$

лин. непр. функ-л по φ: $\exists F \in H_A$: $\langle f, \varphi\rangle = [F, \varphi]$.

* оставш. слагаемые: $\int_\Omega (b_k u_{x_k} + (c(x)-1)u)\varphi dx$.

фиксир. $u \in H_A$: $u, u_{x_k} \in L_2(\Omega)$. $\varphi \mapsto \int_\Omega (\dots)\varphi dx = l(\varphi)$.

непрер. функ-л.

* действие функционала:

$$|l(\varphi)| \le \|\sum b_k u_{x_k} + (c(x)-1)u\|_{L_2} \cdot \|\varphi\|_{L_2} \le C\underbrace{\left(\sum \|u_{x_k}\|_{L_2} + \|u\|_{L_2}\right)}_{\le \tilde{C}|u|_A} \cdot \underbrace{\|\varphi\|_{L_2}}_{\le \|\varphi\|_A}$$

(т. к. $|\varphi|_A^2 \ge \|\varphi\|^2_{L_2(\Omega)}$; $\int_\Omega (\underbrace{\sum \dots}_{\ge 0} + \varphi^2 dx)$)

$\exists u$ - фиксир.: $|l(\varphi)| \le c|\varphi|_A$ - непрер.

$\exists T_1 u \in H_A : \ell(\varphi) = [T_1 u, \varphi]_A$.

$\ell_S(\varphi) = \int_S \sigma u \varphi \, dS$; $\varphi \mapsto \ell_S(\varphi)$ - лин. непрер. ф-л в H_A

$|\ell_S(\varphi)| \le \|\sigma u\|_{L_2(S)} \cdot \|\varphi\|_{L_2(S)}$.

$\|\varphi\|_{L_2(S)} \le \varepsilon \int_\Omega |\varphi_x|^2 dx + C_\varepsilon \int_\Omega \varphi^2 dx$ $\left(C_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}\right)$??

если $\varepsilon = 1$, то $C\|\varphi\|^2_{W_2^1(\Omega)} \le \tilde{C}|\varphi|_A^2$.

$\Rightarrow \exists T_2 u \in H_A : \int_S \sigma u \varphi \, dS = [T_2 u, \varphi]_A$

Итог: u - обобщ. решение задачи III $\Leftrightarrow u + T_1 u + T_2 u = F$ - абстр. ур-ие в пр-ве H_A

т.е. интегр. тождество запишем в след. виде:

$[u, \varphi] + [T_1 u, \varphi] + [T_2 u, \varphi] = [F, \varphi]$

$[u + T_1 u + T_2 - F, \varphi]_A = 0 \ \forall \varphi \in H_A$.

Будем заниматься компактностью опер-ров T_1, T_2
компактность основ. на лемме Ремеха.
была след. лемма:
Теорема вложения для $W_2^1(\Omega)$: Ω-огран., есть гор. о непр. продолж. $\Rightarrow$
$W_2^1(\Omega) \hookrightarrow L_2(\Omega)$ - компактно.

Скажем, что $S \in C^1$, тогда есть теорема о непрер. продолжении.

07.12.12

$Au = f$

$Au = -\sum_{k,j=1}^{n} (a_{kj}(x) u_{x_k})_{x_j} + 2 b_k u_{x_k} + cu = f$. ур-ие выполн. в смысле интегр. тождества

$\left(\frac{\partial u}{\partial \nu_A} + \sigma u\right)\Big|_S = 0$ $\quad \frac{\partial u}{\partial \nu_A}\Big|_S = \sum_{k,j=1}^{n} a_{kj} u_{x_k} \cos(\nu, x_j) \longleftrightarrow (A \nabla u, \nu)$.

$Au = f$ ур. уст. : $\int_\Omega \sum a_{kj} u_{x_k} v_{x_j} + \sum b_k u_{x_k} v + cuv \, dx + \int_S \sigma u v \, dS = \langle f, v \rangle$

$u \in W_2^1(\Omega)$, $\forall v \in W_2^1(\Omega)$ есть интегр. тожд-во.

функ-лы f бывают нескольких видов:

$f = f_S : \langle f_S, v \rangle = \int_S f_S v \, dS$ | $f = f_\Omega : \langle f_\Omega, v \rangle = \int_\Omega f v \, dx$.

Мы брали энергет. пр-во: H_A : $[u,v] = \int_\Omega \sum a_{kj} u_{x_k} v_{x_j} + uv\,dx$.

$H_A \sim W_2^1(\Omega)$; своя норма, γ эквив. $\|\cdot\|_{W_2^1}$

4 оператор по области: T_Ω : $[T_\Omega u, v]_A = \int_\Omega \sum b_k u_{x_k} v + (c(x)-1)uv\,dx$

—"— по границе T_S : $[T_S u, v]_A = \int_S \sigma uv\,dS$

[для теор. : Ω - огр. $\subset R^n$, $S \in C^1$ => есть продолж., следы, есть компакт. вложение]

Интегр. тожд.: $[u,v] + [T_\Omega u, v] + [T_S u, v] = \underbrace{\langle f, v\rangle}_{[F,v],\ F\in H_A \text{ по т. Рисса}}$

есть абстр. ур-ие: $u + T_\Omega u + T_S u = F$.

Утв. 1 T_Ω - компл. лин. опер-р в H_A. $T_\Omega : H_A \to H_A$

(говорим, что если $u \in H_A$, u - фиксир., то прав. часть в опред. T_Ω $\exists\, l(v)$: $v \mapsto \int_\Omega b_k \ldots dx = l(v)$. - лин. непр. в H_A).

Док-во: (нужно провер. непрер., компакт.)

когда определили T_Ω, то в скалярн. произв. была оценка:

$|[T_\Omega u, v]| \le c\underbrace{\|u\|_{W_2^1}}_{\le \tilde{c}\|u\|_A} \cdot \|v\|_{L_2} \le c\|u\|_A \cdot \|v\|_{L_2} \le c\|u\|\cdot\|v\|$ т.к.

$\left[\|u\|_{L_2}^2 \le |u|_A^2 = \int_\Omega \underbrace{\sum a_{kj} u_{x_k} u_{x_j}}_{\ge c_0|u_x|^2 \ge 0} + u^2\,dx\right]$

если $v = T_\Omega u$: $|T_\Omega u|_A^2 \le c|u|_A \cdot |T_\Omega u|_A \Rightarrow |T_\Omega u|_A \le c|u|_A$ → непр-ть опер.

компт-ть вложения: мы имеем сооб. нер-во: $|T_\Omega u|_A^2 \le c|u|_A \cdot \|T_\Omega u\|_{L_2}$.

4 пом-ть $\{u_j\} \subset H_A$, $|u_j|_A \le C < \infty \Rightarrow |T_\Omega u_j|_A \le \tilde{C}$, $\|T_\Omega u_j\|_{W_2^1(\Omega)} \le \tilde{C}$

$W_2^1(\Omega) \hookrightarrow L_2(\Omega)$ компакт. по теор. о вложл. $\exists \{T_\Omega u_{j_\ell}\}$: $T_\Omega u_{j_\ell}$ - сх-ся в $L_2(\Omega)$.

сх-ть в H_A: по нер-ву (1) $|T_\Omega u_{j_\ell} - T_\Omega u_{j_{\ell'}}|_A^2 \le c\underbrace{|u_{j_\ell} - u_{j_{\ell'}}|_A}_{\le |u_{j_\ell}|_A + |u_{j_{\ell'}}|_A} \cdot \underbrace{\|T_\Omega u_{j_\ell} - T_\Omega u_{j_{\ell'}}\|_{L_2}}_{\ell, \ell' \to \infty \to 0}$

=> пом-ть фунд. в H_A, а H_A - полное => есть сх-ть.

Утв. 2 T_S : лин., компак. $H_A \to H_A$.

(в опр. T_S u, v следы ф-ий на пов-ти, получали раньше

оценке; T_S - лин-я получ. по пост-ию: получ., что $v \mapsto \int_S \sigma u v\, dS$ - лин. непр. функ-л в H_A).

<u>Док-во</u>: $u \in H_A \Rightarrow T_S u \in H_A$, $u \mapsto T_S u$ - лин.

Вспомним оценку: $\int_S u^2 dS \le \underbrace{\mu \int_\Omega |u_x|^2 dx + C_\mu \int_\Omega u^2 dx}_{*}$ $\forall \mu > 0\ \exists C_\mu$ (мало).

$$|[T_S u, v]|^2 = \left|\int_S \sigma u v\, dS\right|^2 \le \Big(\underbrace{\sup_S |\sigma(x)|}_{\text{нер-во Гельдера } \le C \text{ (т.к. } \sigma\text{-огран. ф-ия)}} \cdot \|u\|_{L_2(S)} \|v\|_{L_2(S)}\Big)^2 \le$$

Напишем для одного лин-ла $\mu = 1 \Rightarrow *$ будет тот, что и энер. норма для другого лин-ла произв. μ.

$$\le C^2 \|u\|_A^2 \Big(\mu \underbrace{\int_\Omega |v_x|^2 dx}_{\le C \|v\|_A^2} + C_\mu \int_\Omega v^2 dx\Big)$$

$$|[T_S u, v]|^2 \le \|u\|_A^2 \Big(\mu \|v\|_A^2 + C_\mu \underbrace{\|v\|^2_{L_2(\Omega)}}_{\le C\|v\|_A^2}\Big) \quad (*).$$

$\exists \mu = 1 \quad v = T_S u$

$$|T_S u|^4 \le C \|u\|_A^2 \cdot \|T_S u\|_A^2$$

$$\|T_S u\|_A \le C^{1/2} \|u\|_A \Rightarrow T_S \text{ - непр. } H_A \to H_A.$$

<u>Комп-ть</u>: $\forall$ пост-ть $\{u_j\} \subset H_A$, $\|u_j\|_A \le C$. Нужно проверить, что $\exists \{u_{j_\ell}\}$: $T u_{j_\ell}$ - сход. в H_A?

Проверим, что $\{T_S u_{j_\ell}\}$ - фунд. в H_A: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N: \|T_S u_{j_\ell} - T_S u_{j_{\ell'}}\| < \varepsilon, \ell, \ell' > N$

Усл. разреш.: $\langle f, v \rangle = 0$ для $v \in$ ядру сопряж. задачи.

3. Если для задачи $Au = f_\Omega$, $\frac{\partial u}{\partial \nu_A} + \sigma u|_S = f$ есть кор. единств-ть реш-ия, то задача разрешима для $\forall f_\Omega \in L_2(\Omega), f_S \in L_2(S)$.

<u>Док-во</u>: 1) $\ker A = \ker(I + T)$ в H_A, T - комп., пр-во H_A гильбер. $\Rightarrow$ ядро конечномер. ($\dim \ker < \infty$).

2) Описание f_Ω, f_S для которых задача разреш.:
$F = ?$: задача $u + Tu = F$ - разрешима

$\exists\, u \Leftrightarrow \underbrace{[F, v]_A}_{=} = 0 \quad \forall v : v + T^* v = 0.$

по построен $\langle f, v\rangle = \underbrace{\int_\Omega f_\Omega v\,dx + \int_S f_S v\,dS(x)}_{=0 \text{ для } \forall v \text{ из сопряж}} = 0.$

реш-ие существ., согл. абстр. ур-ие.

$v + T^* v = 0$, w

$[v, w]_A + [T^* v, w]_A = 0 \quad \forall w \in H_A \sim W_2^1(\Omega).$

$\underline{[v, Tw]_A}$

$[Tw, v]_A$ ежедневн, что все веществ.

$[T_\Omega w, v] + [T_S w, v].$

$\int_\Omega \sum a_{kj} v_{x_k} w_{x_j} + v w\,dx + \int_\Omega \Big(\sum_k b_k w_{x_k} v + (c(x) - 1)\Big) w v\,dx + \int_S \sigma w v\,dS = 0$

$[v, w]. \qquad [T_\Omega w, v] \qquad [T_S w, v].$

нашуг. критер.-топр. $\int_\Omega + \int_\Omega = \int_\Omega \underbrace{A v}_{=0} \cdot w\,dx$

рав-во есть для $\forall\, w \in H_A \sim W_2^1(\Omega) \Rightarrow$ 1) $w \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$.

(*) $\int_\Omega \sum_{k,j} a_{kj} v_{x_k} w_{x_j} + \sum b_k w_{x_k} v + c v w\,dx = 0.$, $\underbrace{A^* v}_{\in W_2^{-1}} = 0$ в $\mathcal{D}'(\Omega)$

где $A^* v = -\sum (a_{kj} v_{x_k})_{x_j} - \sum (b_k v)_{x_k} + c v$ - форм. сопряж. к A.

(проинтегр. по частям *) $\int_\Omega A u v\,dx = \int_\Omega u A^* v\,dx$

v удовл. ур-ию: $A^* v = 0$ (как эл-т $W_2^{-1}(\Omega)$) $u, v \in C_0^\infty(\Omega)$

изв-но, что $|u_j|_A \le C \Rightarrow |T_S u_j|_A \le \tilde{C}$ по теор. о вложении. $\exists \{u_{j_\ell}\}$: $\{T_S u_{j_\ell}\}$ - сход. в $L_2(\Omega)$.

$u \mapsto u_{j_\ell} - u_{j_{\ell'}}$, $v = T_S u_{j_\ell} - T_S u_{j_{\ell'}}$

в нер-ве * уберем квадрат (там будут др. конечно, но нер-во останется верным).

$|T_S u_{j_\ell} - T_S u_{j_{\ell'}}|_A^2 \le |u_{j_\ell} - u_{j_{\ell'}}| \left(\mu |T_S u_{j_\ell} - T_S u_{j_{\ell'}}| + C_\mu \|T_S u_{j_\ell} - T_S u_{j_{\ell'}}\|_{L_2}\right).$

a) $\mu |u_{j_\ell} - u_{j_{\ell'}}| \cdot \underbrace{|T_S u_{j_\ell} - T_S u_{j_{\ell'}}|_A}_{\le C}$

берем μ: $\mu C < \frac{\varepsilon}{2}$

$\ell, \ell' \to \infty$

$\to 0$ (из-за компл-ти вложения).

в) $\underbrace{\|u_{j\ell} - u_{j\ell'}\|_A}_{\le C}$ $C_\mu \cdot \|T_S u_{j\ell} - T_S u_{j\ell'}\|_{L_2(\Omega)} < \varepsilon/2$ (т.к. выбрали такое N: $\ell, \ell' > N$)

конкр. конст., т.к. μ - фиксир.

в итоге $\|T_S u_{j\ell} - T_S u_{j\ell'}\|_A^2 < \varepsilon$ => получ. сх-ся посл-ть в H_A.

Теорема разрешимости з. Неймана (3-ей кр. задача).

A - станд. эллип., Ω - огран., $S = \partial\Omega \in C^1$; $\sigma \in L_\infty(S)$.

u - обобщ., $Au = f_\Omega$

$\frac{\partial u}{\partial \nu_A} + \sigma u|_S = f_S$

выполн. вместе, если вып-ся интегр. тождество

$$\langle Au, v\rangle = \int_\Omega \sum a_{ij} u_{x_i} v_{x_j} + \sum b_k u_{x_k} v + cuv\,dx + \int_\Omega \sigma uv\,dS = \langle f, v\rangle$$

$f_\Omega \in L_2(\Omega)$

$f_S \in L_2(S)$

$\langle f, v\rangle = \int_\Omega f_\Omega v\,dx + \int_S f_S v\,dS$ - лин. непр. функ-л.

$f = f_\Omega, f_S \mapsto \exists F \in H_A : \langle f, v\rangle = [F, v]_A$.

u - обобщ. реш-ие: $u + T_\Omega u + T_S u = F$, $T = T_S + T_S$ лин. компл. в H_A.

$u + Tu = F$ в пользб. H_A.

разреш-ть задачи опред. теор. Фредгольма.

Теорема. 1) $\operatorname{Ker} A = \{u : Au = 0,\ (\frac{\partial u}{\partial \nu_A} + \sigma u)|_S = 0\}$ - конечномер.

2) $Au = f_\Omega$ - разрешима $\Leftrightarrow \int_\Omega f_\Omega v\,dx + \int_S f_S v\,dS = 0$

гр. усл-ия

$\forall v : A^* v = 0 \quad \frac{\partial v}{\partial \nu_{A^*}} + \sigma v|_S = 0.$

2) $w \in W_2^1(\Omega) \sim H_A$

$$\int_\Omega \sum a_{kj} v_{x_k} w_{x_j} + \sum b_k w_{x_k} v + cv \cdot w\,dx + \int_S \sigma wv\,dS = \int_\Omega A^* v w\,dx + \langle A^* v, w\rangle$$

интегр. по частям

при интегр. выкинуть границ. инт-лы

$$+ \int_S \Big(\sum_{k,j} a_{kj} v_{x_k} \cos(\nu, x_j) w + \sum_k b_k w v \cos(\nu, x_k) + \sigma w v\Big) dS = 0$$

$\int_S (\quad) w\,dS = 0 \quad \forall w \Rightarrow (\ldots) = 0.$

$\Rightarrow$ вып-ся гранич. усл-ие: $\underbrace{\sum_{k,j=1}^n a_{kj} v_{x_k} \cos(\nu, x_j)}_{(Av_x, \nu)_{R^n}} + \Big(\underbrace{\sum_{k=1}^n b_k \cos(\nu, x_k)}_{(\bar{b}(x), \nu)_{R^n}} + \sigma v\Big) = 0$ на S.

скалер. произв.

т.е. $(Av_x, \nu)_{R^n} + ((\bar{b}, \nu)_{R^n} + \sigma v) = 0$

③ если есть единств. $\Rightarrow \exists$ для $\forall$ правых частей.

$\dim\ker(I+T) = \dim\ker(I+T^*)$.

единств.: $\dim\ker(I+T)=0 \Rightarrow \dim\ker(I+T^*)=0$; $\{v\}=\{0\}$.

ч.т.д.

Обобщенное решение начально-краевых задач.

Теоретпр-ть: $u_t - \underbrace{\sum_{k,j=1}^{n} (a_{kj} u_{x_k})_{x_j}}_{A=A^*} + c(x)u = f(x,t)$.

, коэфф. b_k - нет.

$a_{kj} = a_{kj}(x)$ - независимо от времени.

$u = u(x,t)$ - векторнознач. ф-ия.

$t \mapsto u(\cdot, t)$ - результат действия отоб-ия - элемент одного из пр-в: H (L_2, W_2^1, W_2^{-1}) - функции от x"

$u(x,t)$ - ф-ия по перем. t со значениями в пр-вах от x.

$\underset{\in[a,b]}{t} \mapsto \underset{\in H}{u(t)}$ - непрер., если $t \mapsto t^*$

$u(t) \to u(t^*)$ в H

$\|u(t) - u(t^*)\|_H \to 0$.

дифференцируемость:

$\exists u'$, если $\left\| \frac{u(t+h)-u(t)}{h} - \underbrace{u'(t)}_{\in H} \right\| \xrightarrow[h\to 0]{} 0$

14.12.12. „Абстр. ф-ия" H-сепараб., гильбер.

$u: \underset{\in[0,T]}{t} \mapsto \underset{\in H}{u(t)}$

$C([0,T], H)$

$C^1([0,T], H)$

$L_2([0,T], H)$.

$u(t) \xrightarrow[t\to t^*]{} u(t^*)$ в H

u' - производная; $\left\| \frac{u(t+h)-u(t)}{h} - \underbrace{u'(t)}_{\in H} \right\|_H \xrightarrow[h\to 0]{} 0$

$\|u\|^2_{L_2([0,T],H)} = \int_0^T \|u(t)\|^2 dt < \infty$

$\|u\|^2_{C([0,T],H)} = \max_{0\le t\le T} \|u(t)\|$

если $\{u_k\}$ п.о.н.с в H, то $u(t) = \sum c_k u_k$ - ряд Фурье

$c_k = c_k(t) = (u(t), u_k)$ → скаляр. произв.

$u \in C(H)$ - функция на отрезке. если u непрер., то скаляр. произв. непрер.

или и непрер. $\Rightarrow c_k(t) \in C[0,T]$,
или и непрер. дифф. $\Rightarrow c_k(t) \in C^1[0,T]$.

$$|u(t)|_H^2 = \sum_1^\infty |c_k(t)|^2; \quad \|u\|^2_{L_2(H)} = \int_0^T \sum_1^\infty |c_k(t)|^2 dt = \sum_1^\infty \int_0^T |c_k(t)|^2 dt$$

Утв. Если $\{v_k\}_1^\infty$ - эл-ты гильб. пр-ва H, у образ. базис (не обяз. ортонорм.), в том смысле, что $\overline{Lin\{v_k\}} = H$ ($v_k = u_k$ - п.он.с)

Тогда $\{u = u(t) \mid u(t) = \sum_{k=1}^N c_k(t) v_k, \forall c_k(t) \in C^\infty[0,T], \forall N\}$ это мн-во будет всюду плотно в $C(H)$, $C'(H)$, $L_2(H)$.

Док-во: (докажем только для $L_2(H)$)

считаем, что v_k - п.он.с, иначе есть процесс ортогонализации.

1. ортогонализир.: $\{v_k\} \longmapsto \{u_k\}$ - п.он.с.

$$Lin\{v_k\}_1^N = Lin\{u_k\}_1^N \ \forall N$$

$$\sum_1^N c_k(t) v_k = \sum_1^N \hat{c}_k(t) u_k$$ (коэф-ты можно найти дохо через другое).

$L_2(H)$: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N, \{c_k(t)\}_1^N \in C^\infty[0,T]$

$$\|u - u_N\|^2_{L(H)} < \varepsilon^2$$

т.к. ф-ция $u \in L_2(H)$, $u(t) = \sum a_k(t) u_k$ - ряд Фурье. п.в. $t \in [0,T]$

$$\|u\|^2_{L_2(H)} = \sum_1^\infty \int_0^T |a_k(t)|^2 dt$$

$\exists N: \sum_{k>N} \int_0^T |a_k(t)|^2 dt < \varepsilon^2/2$ ряд сх-ся, хвост ряда оценен, т.к. он маленький.

для коэф-ф. $a_k \in L_2[0,T]$ $\exists c_k(t) \in C^\infty[0,T]$: $\|a_k - c_k\|^2_{L_2[0,T]} = \int_0^T |a_k(t) - c_k(t)|^2 \cdot dt \le \frac{\varepsilon^2}{2^{k+1}}$ (каждый коэф-ф. Фурье приближ. гладк. ф-ционом, у плотно в L_2).

$$\|u - u_N\|^2_{L_2(H)} = \underbrace{\sum_{k=1}^N \int_0^T |a_k(t) - c_k(t)|^2 dt}_{\le \varepsilon^2/2} + \underbrace{\sum_{N+1}^\infty \int_0^T |a_k(t)|^2 dt}_{\le \varepsilon^2/2}$$

ч.т.д.

Пр-во H гил. б. $\longrightarrow \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$
$\downarrow \searrow W_2^{-1}(\Omega)$
$L_2(\Omega)$.

Утв. $u \in C([0,T], \overset{\circ}{W}{}_2^1)$, $\exists u'$ - в $W_2^{-1}(\Omega)$: $\left\| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - u' \right\|_{W_2^{-1}} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$

непрер. на $[0,T]$, сознач. ну $\overset{\circ}{W}{}_2^1$

$\Rightarrow \exists \left(\|u(t)\|^2_{L_2(\Omega)}\right)' = 2(\underbrace{u'}_{\in W_2^{-1}}, \underbrace{u}_{\in \mathring{W}_2^1})$ продолжение скалярн. произвед L_2

<u>Док-во</u>: $(u(t), u(t))' = ?$ (нужно док-ть, что $\exists$).

$$(u(t+h), u(t+h))_{L_2} - (u(t), u(t))_{L_2} = \left(\frac{u(t+h)-u(t)}{h}, u(t+h)\right) +$$

$$+ \left(\underbrace{u(t)}_{\in \mathring{W}_2^1}, \frac{u(t+h)-u(t)}{h}\right) \quad (*)$$

$\frac{u(t+h)-u(t)}{h} \to u'(t)$ в W_2^{-1}, $\left(u(t), \frac{u(t+h)-u(t)}{h}\right) \to (u(t), u'(t))$

$|(f,g)| \le \|f\|_{W_2^{-1}} \cdot \|g\|_{W_2^1}$

$f, g \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$

$\{f_k\}, \{g_k\} \subset \mathring{W}_2^1(\Omega)$

$\left.\begin{array}{l} f_k \to f \text{ в } \mathring{W}_2^1(\Omega) \\ g_k \to g \text{ в } W_2^{-1}(\Omega) \end{array}\right\} \Rightarrow (f_k, g_k)_{L_2} \to (f, g)$

если посл-ти сх, то они огр. в соотв. пр-вах $\Rightarrow (f_k, g_k)$ сх-ся.

$\Rightarrow$ в $(*)$ $\frac{u(t+h)-u(t)}{h} \to u'$ в W_2^{-1}

$u(t+h) \to u(t)$ в $\mathring{W}_2^1$

ч.т.д.

<u>Замечание</u>. В $H = \mathring{W}_2^1$, выполнено $\|u\|_{\mathring{W}_2^1} \asymp \underbrace{\|u\|_A}_{\text{энергетич. норма}}$

$\|u\|_C \asymp \|u\|_{C^1_{L_2}([0,T], \mathring{W}_2^1(\Omega))}$ $\quad C^1_{L_2}([0,T], H_A)$.

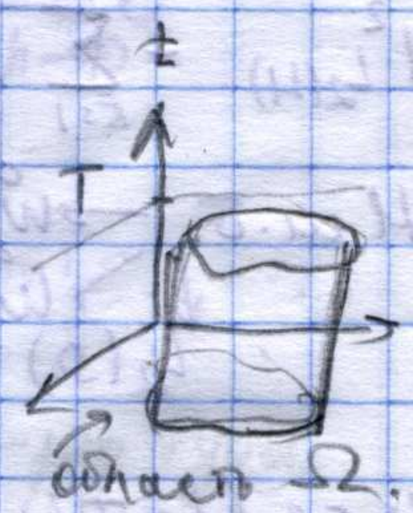
Обобщенное решение начально-краевой задачи для ур-ия теплопроводности.

$u = u(x,t)$ $\quad x \in \Omega$, $t \in [0,T]$, Ω - огран.

$$u_t - \sum_{k,j=1}^{n} (a_{kj}(x) u_{x_k})_{x_j} + c(x)u = f(x,t)$$

$u|_{t=0} = \varphi(x)$

$u|_S = 0$.



Краткая запись ур-ия: $u_t + Au = f$, A - эллипт. опер-р.

$b_k(x) = 0 \Rightarrow A = A^*$ (самосопряжен.), коэфф. зависят только от x.
$c(x) \geq 0$

$a_{kj}(x) = a_{jk}(x)$, $c(x) \in L_\infty(\Omega)$.

усл. равн-во эллиптич.: $\sum_{k,j=1}^{n} a_{kj}(x)\xi_k\xi_j \geq C_0|\xi|^2$

$\underbrace{u_t}_{W_2^{-1}} + \underbrace{Au}_{W_2^{-1}(\Omega)} = \underbrace{f}_{W_2^{-1}}$ (пространств. - соболев. пространств.)

$A: \mathring{W}_2^1(\Omega) \to W_2^{-1}(\Omega)$ - изоморфизм.

$u|_S = 0$: $u \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$

означает.

Опр. u - обобщ. решение, если $u \in L_2([0,T], \mathring{W}_2^1(\Omega)) \cap C([0,T], L_2(\Omega))$
для п. в. $t \in [0,T]$ $\exists\, u'(t) \in W_2^{-1}(\Omega)$

принадлежат в смысле пр-ва

есть нач. ф-ия $u|_{t=0} = \varphi$ это означ., то $\varphi \in L_2(\Omega)$.
вып-ся ур-ие $u'(t) + Au = f$.

u - сильн. решение $\Rightarrow$ u - обобщ. решение.

что значит, что вып-ся $u'(t) + Au = f$
в $W_2^{-1}(\Omega)$ п. в. t т.е.
$\forall v \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$

$$\langle u'(t), v\rangle + \underbrace{\langle Au, v\rangle}_{\int_\Omega \sum_{k,j=1}^{n} a_{kj}(x) u_{x_k} v_{x_j} + cuv\,dx} = \langle f(t), v\rangle.$$

$c(x) \geq 0$.

$[u,v]_A$ - энерг. скал. произв.

$\|u\|_A^2 = [u,u]_A \sim \|u\|_{\mathring{W}_2^1}$

энерг. норма

$v \in \mathring{W}_2^1$

$= [u,v]_A$.

энерг. скал. произв.

H_A - энерг. пр-во, $H_A = \mathring{W}_2^1(\Omega)$, $\|u\|_A$ - эн. норма.

Априорная оценка:

Теорема. $u \in C([0,T], \mathring{W}_2^1(\Omega))$
$u_t \in C([0,T], W_2^{-1}(\Omega))$

вып-ся ур-ие: $u_t + Au = f$ - п.в. t
рав-во эл-ов $W_2^{-1}(\Omega)$.

Тогда $\max_{0\leq t\leq T} \|u(t)\|^2_{L_2(\Omega)} + \int_0^T |u(t)|^2_{\mathring{W}_2^1(\Omega)} dt \leq$

$\leq C(\|u(0)\|^2_{L_2(\Omega)} + \int_0^T |f(t)|^2_{W_2^{-1}(\Omega)} dt.$

т.е. $\|u\|^2_{C(L_2)} + \|u\|^2_{L_2(\mathring{W}_2^1)} \leq C(\underbrace{\|\varphi\|^2_{L_2}}_{u|_{t=0}} + \|f\|^2_{L_2(W_2^{-1})})$

Док-во: $(u'(t), v) + [u(t), v] = (f(t), v)$ $\forall v \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$, $v = u(t)$.

$(u'(t), u(t)) + \|u(t)\|^2 = (f(t), u(t))$ $(*)$.

$\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2$

$|(f,u)| \leq \|f(t)\|_{W_2^{-1}} + \|u(t)\|_{\mathring{W}_2^1} \leq \frac{1}{2\varepsilon}\|f(t)\|^2 + \frac{\varepsilon}{2}\|u(t)\|^2_{\mathring{W}_2^1}$

в лев. часть.

(*) проинтегр. по отрезку $[0, t^*]$.

(□) $\int_0^{t^*} dt$: $\|u(t^*)\|^2_{L_2(\Omega)} + \int_0^{t^*} |u(t)|^2 dt \le C\left(|u(0)|^2_{L_2(\Omega)} + \int_0^{t^*} |f(t)|_{W_2^{-1}(\Omega)}\right)$

$\left[|u(t)|^2_A - \frac{\varepsilon}{2} |u(t)|^2_{\mathring{W}_2^1(\Omega)} \ge \underbrace{C}_{>0} |u(t)|^2_{\mathring{W}_2^1(\Omega)} \right]$

Решение □ : $\int_0^T |u(t)|^2_{\mathring{W}_2^1} dt \le C\left(|u(0)|^2_{L_2} + \int_0^T |f(t)|^2_{W_2^{-1}(\Omega)} dt\right)$

$\forall t^* \in [0, T]$ $\max_{t^*} |u(t^*)|^2_{L_2(\Omega)} \le C\left(|u(0)|^2_{L_2} + \int_0^T |f(t)|^2_{W_2^{-1}(\Omega)} dt\right)$

ч.т.д.

Метод Фурье. (разложим все в ряды по собств. ф-ям)

$Au_k = \lambda_k u_k$ $\quad$ λ_k - с. числа $\quad$ $\lambda_k > 0$, $\lambda_k \to +\infty$

$u_k|_S = 0$ $\quad$ u_k - с. ф-ии $\quad$ $\{u_k\}$ - п.он. с в $L_2(\Omega)$.

$[u_k, v]_A = \lambda_k (u_k, v)_{L_2}$. $\quad$ $u_k \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$, $\forall v \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$.

$v = u_k$: $|u_k|^2 = \lambda_k$, $\{u_k\}$ - п.о.с в H_A.

Ищем $u = u(t)$ - решение.

$$\begin{cases} u_t + Au = f \\ u|_{t=0} = \varphi \\ u|_S = 0 \end{cases}$$

$u \in C(L_2) \cap L_2(\mathring{W}_2^1)$.

$\forall t$ $u(t) \in L_2(\Omega)$

$u(t) = \sum_k c_k(t) u_k$ - мер сх-ся в $L_2(\Omega)$.

$W_2^{-1}(\Omega) \Rightarrow f(t) = \sum f_k(t) u_k$, $f_k(t) = \langle f(t), u_k \rangle$

мер сх-ся в $W_2^{-1}(\Omega)$.

$u_t + Au = f$ - как эл-ты W_2^{-1}:

$\langle u_t, v \rangle + [u, v] = \langle f, v \rangle$ $\quad$ $\forall v \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$

$v = u_k$: $[u(t), u_k] = \lambda_k \overbrace{(u(t), u_k)}^{\text{коэфф. Фурье}} = \lambda_k c_k(t)$

$\langle f(t), u_k \rangle = f_k(t)$.

$(u_t, u_k) = \frac{d}{dt}(u(t), u_k) = c_k'$ предел: $\lim \frac{u(t+h) - u(t)}{h}$ в W_2

$\in W_2^{-1}$

в итоге: $\begin{cases} c_k' + \lambda_k c_k = f_k \\ c_k(0) = \varphi_k \end{cases}$

$u|_{t=0} = \varphi$: $c_k(0) = (\varphi, u_k) = \varphi_k$.

решение: $c_k(t) = \varphi_k e^{-\lambda_k t} + \int_0^t e^{-\lambda_k (t-s)} f_k(s)\,ds$.

т.е. если u - решение задачи $\Rightarrow$ коэфф. Фурье опред. однозн.

Теорема (единственности). $\forall \varphi \in L_2(\Omega)$, $f \in L_2([0,T], W_2^{-1}(\Omega))$
$\Rightarrow \exists!$ решение $u_t + Au = f$
$u|_{t=0} = \varphi$, $u|_S = 0$.

Док-во: ! - доказано выше
сущ-ие: по φ, f построим $c_k(t)$. Нужно док-ть, что
$u(t) = \sum c_k(t) u_k$ - решение (т.е. ряд сх-ся к решению).
$u_N(t) = \sum_{k=1}^{N} c_k(t) u_k$ (частич. сумма ряд Фурье).

можем взять аналог. суммы для правых частей, т.е.
$\varphi_N = \sum_1^N \varphi_k u_k$
$u_t + Au = f_N$
$u|_{t=0} = \varphi_N$

для отдельного члена ряда соотв. аналогичная задача решением

$u_N|_S = 0$, то u_N яв-ся решением.

$u_N \in C(\mathring{W}_2^1)$, $\exists (u_N)_t' \in W_2^{-1}(\Omega)$ и для u_N можем написать априорную оценку.

ф-ии u_N имеют лучшую гладкость, чем коэфф. ряда.

$$\|u_{N+M} - u_N\|^2_{C(L_2)} + \|u_{N+M} - u_N\|^2_{L_2(\mathring{W}_2^1)} \le c\left(\underbrace{|\varphi_{N+M}|^2_{L_2}}_{\to 0} + \underbrace{\|f_{N+M} - f_N\|^2_{L_2(W_2^{-1})}}_{\to 0}\right)$$

$f_N(t) = \sum f_k(t) u_k \to f$ в $L_2(W_2^{-1})$
$\varphi_N = \sum_1^N \varphi_k u_k \to \varphi$ в L_2.

эти пр-ва полны

$\Rightarrow \{u_N\}$ - фунд. посл-ть в $C(L_2)$, $L_2(\mathring{W}_2^1)$ $\Rightarrow \exists\, u \in C(L_2) \cap L_2(\mathring{W}_2^1)$
$u = \lim u_N = \lim \sum_1^N c_k(t) u_k = \sum_1^\infty c_k(t) u_k$.

т.е. док-ли, что ряд сх-ся там, где нужно.

$u = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) u_k = \lim_{N\to\infty} u_N(t)$ - ряд сход-ся $C(L_2)$
(разных весов) $L_2(\mathring{W}_2^1)$.

и-реш-ие задачи?

$\langle u_t, v\rangle + [u,v] = \langle f, v\rangle$ $\quad u|_{t=0} = \varphi$ - есть.

$u|_{t=0} = \sum \varphi_k u_k = \varphi$.

Проверим ур-ие:

u_N: $\underbrace{((u_N)_t, u_k)}_{c_k'} + \underbrace{[u_N, u_k]}_{\lambda_k c_k} = \underbrace{\langle f, u_k\rangle}_{f_k(t)}$ (*)

<u>$N \geq k$</u>

фиксир. u_k и для $N \geq k$ получ. рав-во

если перейдем к пределу $N \to \infty$, тогда $((u)_t, u_k) + [u, u_k] = \langle f, u_k\rangle$
(это рав-во есть для $\forall k$) $\quad c_k' \quad \lambda_k c_k \quad f_k$

~~Нужно~~ рав-во (*) есть для u_k, для лин. комбин. $\sum_{k=1}^{k_0} a_k u_k$ есть для лин. оболочки $\mathrm{Lin}\{u_k\}_1^{\infty}$, а она всюду плотна в L_2 по L_2-норме; в $\mathring{W}_2^1$ - по $\mathring{W}_2^1$-норме.

рав-во распростран. по непр-ти для $\forall v \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$

$\Rightarrow u_t + Au = f$ - так ж-то $W_2^{-1}(\Omega)$.

<u>ч.т.д.</u>

Требовали, чтобы $c(x) > 0$, чтобы написать энерг. скалярн. произв. если $c(x)$ $\forall$, тогда добавл. лишние слаг., нужно перекидываться априорной оценка, но результат сохраняется.

Если опер-р A не формально самосопряж., то у нас нет соб. ч. и соб. ф. и м. Фурье не работает, тогда нужно использовать м. Галеркина (приближенно). Но результат тот же: реш-ие $\exists!$.

<u>Если $n=1$</u>. $\Omega = (a,b)$

$Au = (-pu')' + qu$, $q(x) \geq 0$.

$p(x) \geq p_0 > 0$ - эллиптичность

Мы получили опер-р Штурма-Лиувилля.
(в пред. семестре было $Au = -u''$).

Утв. $u(x,t)$: $u_t-(pu')'+qu=f$

$u|_{t=a}=\varphi$, $\underbrace{u|_{x=a}=u|_{x=b}}_{u|_S=0}=0$ — реш-ие задачи.

Если $f(x,t)\equiv 0$, $\varphi\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(a,b)$, тогда $u(x,t)\in C(x\in[a,b], t\in[0,T])$

Док-во:

В этой ситуации $u(x,t)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\underbrace{\varphi_k e^{-\lambda_k t}}_{c_k(t)}u_k(x)$ (1)

$\varphi\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(a,b) \Rightarrow u=u(t)\in C([0,T], \overset{\circ}{W}{}_2^1(a,b))$

$(\varphi\in L_2(\Omega) \Rightarrow u\in C([0,T], L_2(\Omega))\cap L_2([0,T], \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))$.

$\underbrace{\varphi_k e^{-\lambda_k t}}_{\in C^\infty[0,T]}\underbrace{u_k(x)}_{\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(a,b)}\in C([0,T], \overset{\circ}{W}{}_2^1(a,b))$. Ряд сх-ся в $C(\overset{\circ}{W}{}_2^1)$?

то сумма ряда $\in C(\overset{\circ}{W}{}_2^1) \Rightarrow$ реш-ие $\in C(\overset{\circ}{W}{}_2^1)$.

~~Ряд сх-ся в пол. норм. пр-ве, если он абсол. сх-ся.~~

~~Проверим абсол. сх-ть:~~

~~$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\|\varphi_k e^{-\lambda_k t}u_k\|_{C(\overset{\circ}{W}{}_2^1)}$ запишем норму на эквивал. ей, т.е. $\overset{\circ}{W}{}_0^1\to H_A$~~

~~$\Leftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty}\max\limits_{0\le t\le T}|\varphi_k e^{-\lambda_k t}u_k|$~~ проверяем, что ряд сх-ся в $C([0,T],H_A)$

$\{u_N\}$, $\|u_{N+M}-u_N\|^2_{C(H_A)}=\max\limits_{0\le t\le T}\left|\sum\limits_{k=N+1}^{N+M}\varphi_k e^{-\lambda_k t}u_k\right|_A^2=$

$=$ [т.к. $\{u_k\}$ - ортогон. в H_A] $=\max\limits_{0\le t\le T}\sum\limits_{k=N+1}^{N+M}|\varphi_k e^{-\lambda_k t}u_k|_A^2\le\sum\limits_{N+1}^{N+M}\lambda_k|\varphi_k|^2$

$|\varphi_k|^2 e^{-\lambda_k t\cdot 2}\cdot\underbrace{|u_k|_A^2}_{=\lambda_k}$

(когда заменяли. ехор. ряда Фурье, то говорили, что $\sum\lambda_k|\varphi_k|^2<\infty \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \varphi\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, а $\sum\lambda_k|\varphi_k|^2=|\varphi|_A^2$)

$n=1$. $\overset{\circ}{W}{}_2^1(a,b)\hookrightarrow C[a,b] \Rightarrow$ исход. ряд, φ сх-ся равном. по $t\in[0,T]$ и равном. по $x\in[a,b]$

$\Rightarrow \sum$ ряда будет непрерыв. функцией.

Если p, q - гладкие (как минимум const) $\Rightarrow u(x,t)\in C^\infty(x\in[a,b], t\in[\varepsilon,T])$, $\varepsilon>0$.

Упр. если t отдал. от нуля, тогда ф-ии скачков. бесконе-гладкие и ряд очень хорошо сх-ся.

ч.т.д.

Начально краевая задача для волнового уравнения.

$$u_{tt} - \underbrace{\sum_{k,j=1}^{n}(a_{kj}(x)u_{x_k})_{x_j} + c(x)u}_{Au} = f(x,t) \qquad u = u(x,t).$$

$0 \le t \le T$

$x \in \Omega$ - огран. $\subset R^n$

$$\Rightarrow u_{tt} + Au = f$$

$$u|_{t=0} = \varphi \qquad u|_S = 0$$

$$u_t|_{t=0} = \psi$$

Обобщ. решение в пр-ве ф-ий, где есть только одна произв. по t (с вторая компрнен. как произв. обобщ. ф-ии):

Умножим ур-ие на $v(x,t)$ - глад., финит. по $x \in \Omega$ глад. по t, т.е C^∞.

Интегрир. ее по обл-ти и по времени:

$$\int_0^T\int_\Omega u_{tt}v\,dx\,dt - \int_0^T\int_\Omega(-\sum a_{kj}u_{x_k})_{x_j} + cu)v\,dx\,dt = \int_0^T\int_\Omega f v\,dx\,dt$$

интегр. по частям:

$$\int_0^T\left(-\int_\Omega u_t v_t\,dx\right)dt + \int_0^T\int_\Omega \sum a_{kj}u_{x_k}v_{x_j} + cuv\,dx\,dt +$$

$$+\int_\Omega u_t v\,dx\Big|_0^T = \int_0^T\int_\Omega f v\,dx\,dt$$

Считаем, что у нас скалар. эллип. оператор (A), не станд. ум-ие, f были для параболич. типа выт-ся $\exists\, c(x) \ge 0$

тогда $\int_0^T\int_\Omega \sum a_{kj}u_{x_k}v_{x_j} + cuv\,dx\,dt = [u,v]_A$.

если $v|_{t=T} = 0 \Rightarrow \int_\Omega u_t v\,dx\Big|_0^T = -\int_\Omega u_t v|_{t=0}\,dx = -\int_\Omega \psi v(0)\,dx$

в итоге получ. инт. тождество:

$$(\diamond)\quad \int_0^T -(u_t, v_t)_{L_2(\Omega)} + [u,v]_A\,dt = \int_\Omega \psi v(0)\,dx \overset{(\psi, v(0))_{L_2}}{} + \int_0^T (f(t), v(t))_{L_2(\Omega)}\,dt$$

Нужно, чтобы каждое слаг. из и. ч. было суммир.

u - обобщ. решение, если 1) $u \in C([0,T], \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))$, $u_t \in C([0,T],$

$L_2(\Omega))$, $u|_{t=0} = \varphi$ (в смысле пр-ва, у принадл. u);

для $\forall v \in C([0,T], \overset{\circ}{W}{}_2^1)$, $u_t \in C([0,T], L_2)$, $u|_{t=T} = 0$ - класс ф-ий D_T

есть интегр. тождество.

Априорная оценка

] $u \in C^1(\overset{\circ}{W}{}_2^1)$, $u_t \in C^1(L_2)$ и $\exists\, u_{tt} \in L_2$, $\exists\, u_t \in \overset{\circ}{W}{}_2^1$

тогда в интегр. тож-ве ($\diamond$) можно проделать интегр. по частям в обратную сторону:

$$\int_0^T (u_{tt}, v)_{L_2}\, dt + \int_0^T [u, v]_A\, dt = \int_0^T (f, v)_{L_2}\, dt.$$

$v = h(t) w$, $w \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$

$h(t) \in C^\infty[0,T]$, $h(T) = 0$, тогда $v \in D_T$.

$$\int_0^T \Big[(u_{tt}(t), w)\, h(t) + h(t)[u(t), w] - h(t)(f(t), w)\Big]\, dt = 0.$$

- фиксир. вектор. $\in \overset{\circ}{W}{}_2^1$

$$\int_0^T (\ldots)\, h(t)\, dt = 0 \quad \forall h \Rightarrow (\ldots) = 0.$$

$\Rightarrow \forall w \in \overset{\circ}{W}{}_2^1$ вып-ся $(u_{tt}, w)_{L_2} + [u_t, w]_A = (f(t), w)_{L_2}$

] $w = u_t$ $\quad \int_0^{t^*} \overbrace{(u_{tt}, u_t)_{L_2}}^{d/dt\, |u_t|_{L_2}^2} + \overbrace{[u, u_t]_A}^{d/dt\, |u|_A^2}\, dt = \int_0^{t^*} (f(t), u_t)_{L_2}\, dt \quad (*)$

$$(f(t), u_t)_{L_2} \le \|u_t\|_{L_2} \cdot \|f(t)\|_{L_2} \le \frac{\varepsilon \|u_t\|_{L_2}^2}{2} + \frac{1}{2\varepsilon} \|f(t)\|_{L_2}^2 \le c\, |u_t|_A^2$$

по нер-ву Фридрихса возьмем $c\varepsilon \le \frac{1}{2}$

проинтегрируем $(*)$ $\quad |u_t(t^*)|_{L_2}^2 - |u_t(0)|_{L_2}^2 + |u(t^*)|_A^2 - |u(0)|_A^2 \le \int_0^{t^*} |u_t|_{L_2(\Omega)} \cdot |f(t)|_{L_2(\Omega)}\, dt$ это сист. неравенст.

$0 \le t^* \le T$: $|u_t(t^*)|_{L_2(\Omega)}^2 \le \underbrace{|u_t(0)|_{L_2}^2}_{\psi} + c \int_0^T |f(t)|^2\, dt.$ $\quad (\le)$

Возьмем $\max\limits_{0 \le t^* \le T}$, тогда $\|u\|_{C^1([0,T], L_2)}^2 \le c\left(|\psi|_{L_2}^2 + \|f\|_{L_2([0,T], L_2(\Omega))}^2\right)$

$(\le)$ $\frac{\varepsilon}{2} \int_0^{t^*} |u_t|_{L_2(\Omega)}^2\, dt + \frac{1}{2c} \int_0^{t^*} |f(t)|_{L_2}^2\, dt$

$\max\limits_{0 \le t \le t^*} |u_t| \cdot t^*$, $\varepsilon T \le 1$ $\Rightarrow$ $\max\limits_{0 \le t \le T} |u(t)|_A^2 + \max\limits_{0 \le t \le T} |u_t(t)|_{L_2(\Omega)}^2 \le$

$$\le c\left(\underbrace{|\varphi|_A^2}_{u(0)} + \underbrace{|\psi|_{L_2}^2}_{u_t(0)} + \int_0^T |f(t)|^2\, dt\right)$$

~~Если~~ Эта оценка справедлива, если $u \in C^1(\overset{\circ}{W}{}_2^1)$, $u_t \in C^1(L_2)$.

Метод Фурье. Теорема о ∃ и ! задачи

$Au_k = \lambda_k u_k$ $\quad \{u_k\}$ – п. он. с в $L_2(\Omega)$.

$u_k|_S = 0$

интегр. тождество; $v(t) = \underbrace{h(t)u_k}_{D_T}$, $h(t) \in C^\infty[0,T]$, $h(T) = 0$.

подставим в интегр. тождество:

$$\int_0^T -(u_t, h_t u_k)_{L_2} + [u(t), h(t)u_k]\,dt = h(0)\underbrace{(\psi, u_k)}_{\psi_k} + \int_0^T (f(t), h(t)u_k)_{L_2}\,dt$$

$$\downarrow$$

$$\int_0^T -h_t c_k' + h(t)\underbrace{[u(t), u_k]}_{=\lambda_k \underbrace{(u, u_k)}_{c_k}}\,dt = h(0)\psi_k + \int_0^T h(t) f_k(t)\,dt$$

Правые части: $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$

$\psi \in L_2(\Omega)$

$f \in L_2([0,T], L_2(\Omega)) = L_2(0 \le t \le T, x \in \Omega)$.

Интегр. тождество перепишем в сокр. виде:

$$\int_0^T (-h' c_k' + (\lambda_k c_k - f_k) h_t)\,dt = h_0 \varphi_k$$

Добавим условие $h(0) = 0 \Rightarrow \int_0^T -h' G + F h\,dt = 0$ для $\forall h \in C^\infty[0,T]$, $h(0) = h(T) = 0$.

по 3-ей осн. лемме вариац. исчисления получ., что $G' + F = 0$.

и $c_k'' + \lambda_k c_k - f_k = 0 \quad (*)$

$c_k(0) = \varphi_k = (\varphi, u_k)$

$c_k'(0) = \psi_k = (\psi, u_k)$.

Ур-ие $(*)$ – обычный диф. ур., у него решается.

$$c_k(t) = \varphi_k \cos\sqrt{\lambda_k}\,t + \frac{\psi_k}{\sqrt{\lambda_k}} \sin\sqrt{\lambda_k}\,t + \int_0^t e^{-\sqrt{\lambda_k}(t-s)} f_k(s)\,ds$$

Важно, что решение задачи ∃ и единственно.

Теорема Если $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, $\psi \in L_2(\Omega)$, $f \in L_2(\underbrace{\Omega}_{L_2})$ $\Rightarrow$ обобщ. решение нач. краевой задачи $\exists!$

Док-во: ! - уже есть (т.к. записали ряд Фурье, вычислили его коэфф-ты).

существование! (вид коэфф. не важен)

~~Заверш. часть~~ ф-ия $u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) u_k$ сх-ся? реш. задачи?

+ частич. суммы! $u_N = \sum_{k=1}^{N} c_k(t) u_k$

$f_N = \sum_{k=1}^{N} f_k(t) u_k$

φ_N, ψ_N

если в пр-частн нач-е ф-ии конч. суммы, тогда реш-ие получ-ся, т.е. u_N действ. реш-ие, для них можем написать априор. оценку.

$u_N \in C^1(\overset{\circ}{W}{}_2^1)$, $(u_N)_t \in C^1(L_2)$: для разности можем написать априор. оценку

$$\|u_{N+M} - u_N\|_{C(\overset{\circ}{W}{}_2^1)} + \|(u_{N+M} - u_N)_t\|_{C(L_2)} \le \underbrace{\|\varphi_{N+M} - \varphi_N\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1}}_{\to 0} + \underbrace{\|\psi_{N+M} - \psi_N\|_{L_2}}_{\to 0} + \underbrace{\|f_{N+M} - f_N\|_{L_2}}_{\to 0}$$

частич. суммы правых частей сх-ся в нормах простр. (соотв.) они явл-ся фунд. послед. в своих пр-в.

$\Rightarrow$ суммы сх-ся.

Проверка, что решение!

u_N - сходящ-ся, $u(t) = \sum_{1}^{\infty} c_k(t) u_k$, для этой ф-ии u_N есть интегр. тождество, где ф-ия $v = h(t) u_k$, h - произв. ф-ия $\in C^\infty([0,T])$, $h(T) = 0$, $k \le N$

$\Rightarrow$ интегр. тожд. есть для $\forall$ ф-ии v

для ф-ии u - есть интегр. тождество с такой же $v(t)$.

$\Rightarrow$ для u есть интегр. тожд. с ф-ей $v \in \mathrm{Lin}\{h(t) u_k\}$.

мн-во $\mathrm{Lin}\{h(t) u_k\}$ всюду плотно в D_T $\Rightarrow$ интегр. тожд. есть для всех ф-ий $v \in D_T$

ч.т.д.