ДЗ 4
СЛАУ. Часть 1

1 Решите систему уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -2 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 4 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ -x_2 + x_3 + 5x_4 = -2 \\ -2x_3 + 3x_4 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_4 = C \\ x_3 = \frac{3C-4}{2} \\ x_2 = \frac{3C-4}{2} + 5C + 2 \\ x_1 = -\left(\frac{3C-4}{2} + 5C + 2\right) + \frac{3C-4}{2} + 2C \end{cases}$$

$x_4 = C$

$x_3 = \frac{3C-4}{2}$

$x_2 = \frac{13C}{2}$

$x_1 = -3C - 2$

② Проверьте на совместность и выясните сколько решений будет иметь система линейных уравнений

а) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 = -17 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & -3 & -17 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -7 & -1 & -17 \\ 0 & 4 & -4 & -4 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -7 & -1 & -17 \\ 0 & 0 & 32 & 56 \end{array}\right)$$

$\mathrm{rank}\,A = \mathrm{rank}\,\tilde{A} = 3$

Система совместна и имеет ед. реш-ие

б) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -2 \\ 3x_1 - 6x_2 + 9x_3 = 5 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 6 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -2 \\ 3 & -6 & 9 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 6 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$ $\mathrm{rank}\,A = 1$ $\mathrm{rank}\,\tilde{A} = 3$

Система несовместна

в) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_2 - 8x_3 = -2 \end{cases}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & -8 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & -5 & 23 & -14 \end{array}\right)$

$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \tilde{A} = 2 < n = 3$

Система совместна и имеет мн-во решений

(3) Проверьте на совместность и выясните, сколько решений будет иметь система линейных уравнений, заданная расширенной матрицей

$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$

$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \tilde{A} = 4$

система совместна и имеет ед решение

(4) Дана система линейных уравнений, заданная расширенной матрицей

$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 4 & 5 & 6 & b \\ 7 & 8 & 9 & c \end{array}\right)$

Найдите соотношение между параметрами a, b, c, при которых система считается несовместной.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 4 & 5 & 6 & b \\ 7 & 8 & 9 & c \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & -3 & -6 & b-4a \\ 0 & -6 & -12 & c-7a \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & -3 & -6 & b-4a \\ 0 & 0 & 0 & c-7a-2b+8a \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & -3 & -6 & b-4a \\ 0 & 0 & 0 & c-2b+a \end{array}\right)$$

При $c-2b+a \neq 0$ система несовместна

СЛАУ. Часть 2.

1) Решите систему уравнений методом Крамера

a) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1 \\ 3x_1 - 4x_2 = 7 \end{cases}$

$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$

$\det A_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 7 & -4 \end{vmatrix} = 10$

$\det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 4$

$x_1 = \frac{10}{2} = 5$

$x_2 = \frac{4}{2} = 2$

б) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 10 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = -2 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\cdot 13 + 7 + 5\cdot 2 = 43$$

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 10 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 10\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 10\cdot 13 + 1 + 5\cdot(-9) = 86$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 10 & 5 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 10\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 - 10\cdot 7 + 5\cdot 5 = -43$$

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 10 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 10\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\cdot 9 + 5 + 10\cdot 2 = 43$$

$$x_1 = \frac{86}{43} = 2$$

$$x_2 = \frac{-43}{43} = -1$$

$$x_3 = \frac{43}{43} = 1$$

② * Найдите L-матрицу LU-разложения для матриц коэф-ов.

а) $U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 9 & 12 \\ 3 & 26 & 30 \end{pmatrix} \to$ | $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix} \to$

$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 20 & 18 \end{pmatrix} \to$ | $\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & c & 1 \end{pmatrix} \to$

$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ | $\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

б) $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 8 & 9 \\ 3 & 18 & 29 & 18 \\ 4 & 22 & 53 & 33 \end{pmatrix} \to$ | $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & c & 1 & 0 \\ d & e & f & 1 \end{pmatrix} \to$

$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 15 & 23 & 6 \\ 0 & 18 & 45 & 17 \end{pmatrix} \to$ | $\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & c & 1 & 0 \\ 4 & e & f & 1 \end{pmatrix} \to$

$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 21 & 11 \end{pmatrix} \to$ | $\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & f & 1 \end{pmatrix} \to$

$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ | $\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 7 & 1 \end{pmatrix}$

③* Решите систему линейных ур-ий методом LU-разложения

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ 11x_1 + 7x_2 + 5x_3 = -6 \\ 9x_1 + 8x_2 + 4x_3 = -5 \end{cases}$$

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 11 & 7 & 5 \\ 9 & 8 & 4 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3/2 & -23/2 \\ 0 & 7/2 & -19/2 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3/2 & -23/2 \\ 0 & 0 & 52/3 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 11/2 & 1 & 0 \\ 9/2 & c & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 11/2 & 1 & 0 \\ 9/2 & 7/3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y_1 = 1 \\ 11/2\, y_1 + y_2 = -6 \\ \frac{9}{2} y_1 + \frac{7}{3} y_2 + y_3 = -5 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = -6 - \frac{11}{2} = -\frac{23}{2} \\ y_3 = -5 - \frac{9}{2} \cdot 1 - \frac{7}{3}\left(-\frac{23}{2}\right) = \frac{52}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ \frac{3}{2} x_2 - \frac{23}{2} x_3 = -\frac{23}{2} \\ \frac{52}{3} x_3 = \frac{52}{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3 = 1 \\ x_2 = \left(-\frac{23}{2} + \frac{23}{2}\right) \cdot \frac{2}{3} = 0 \\ x_1 = (1 - 3 \cdot 1 - 0) \cdot \frac{1}{2} = -1 \end{cases}$$