ДЗ 1

Линейное пр-во. Часть 1

① Исследовать на линейную зависимость

$f_1(x) = e^x \quad f_2(x) = 1 \quad f_3(x) = x+1 \quad f_4(x) = x - e^x$

$f_3 - f_2 - f_1 = f_4$

$x + 1 - 1 - e^x = x - e^x$

$x - e^x = x - e^x \Rightarrow ЛЗ$

② Исследовать на линейную зависимость

$f_1(x) = 2 \quad f_2(x) = x \quad f_3(x) = x^2 \quad f_4(x) = (x+1)^2$

$f_3 + 2 \cdot f_2 + 0{,}5 f_1 = f_4$

$x^2 + 2 \cdot x + 0{,}5 \cdot 2 = (x+1)^2$

$x^2 + 2x + 1 = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow ЛЗ$

③ Найти координаты вектора

$x = (2, 3, 5) \in R^3$ в базисе

$b_1 = (0, 0, 10) \quad b_2 = (2, 0, 0) \quad b_3 = (0, 1, 0)$

$x = (2, 3, 5) = (2, 0, 0) + (0, 3, 0) + (0, 0, 5) =$

$= 1 \cdot (2, 0, 0) + 3 \cdot (0, 1, 0) + 0{,}5 (0, 0, 10) =$

$= 0{,}5 b_1 + 3 b_2 + b_2 = 0{,}5 b_1 + b_2 + 3 b_3 = (0{,}5; 1; 3)$

4) Найти координаты вектора

$3x^2-2x+2 \in \mathbb{R}^3[x]$:

а) в базисе $1, x, x^2$

$3x^2-2x+2 = 2\cdot 1 + (-2)\cdot x + 3\cdot x^2 \Rightarrow (2, -2; 3)$

б) в базисе $x^2; x-1; 1$

$3x^2-2x+2 = 3x^2-2(x-1) =$

$= 3\cdot x^2 + (-2)\cdot(x-1) + 0\cdot 1 \Rightarrow (3, -2, 0)$

5) Установить, является ли линейным подпространством

а) совокупность всех векторов трехмерного пр-ва, у которых по крайней мере одно из двух координат равна нулю:

$\exists \quad x = (0, x_2, x_3)$

$y = (y_1, 0, y_3)$

$x+y = (0+y_1, x_2+0, x_3+y_3) = (y_1, x_2, x_3+y_3)$

Ни одна из двух первых координат не равна нулю $\Rightarrow$ совокупность векторов не является линейным подпространством б) все вектора являющиеся линейными комбинациями данных векторов $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$

$\exists$ $x = a_1 \cdot u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n$

$y = b_1 u_1 + b_2 u_2 + \dots + b_n \cdot u_n$

$x + y = (a_1 + b_1) u_1 + (a_2 + b_2) u_2 + \dots + (a_n + b_n) u_n$

$\alpha \cdot x = \alpha a_1 u_1 + \alpha a_2 u_2 + \dots + \alpha a_n u_n$

Условия выполняются => совокупность векторов является линейным подпространством

Линейное пр-во. Часть 2

1) Найти скалярное произведение векторов $x, y \in R$

а) $x = (0; -3; 6)$ $y = (-4; 7; 9)$

$(x, y) = 0 \cdot (-4) + (-3) \cdot 7 + 6 \cdot 9 = 33$

б) $x = (7; -4; 0; 1)$ $y = (-3; 1; 11; 2)$

$(x, y) = 7 \cdot (-3) + (-4) \cdot 1 + 0 \cdot 11 + 1 \cdot 2 = -23$

2) Найти нормы векторов $(4; 2; 4)$ и $(12; 3; 4)$ и угол между ними

$x = (4; 2; 4)$

$y = (12; 3; 4)$

$$\cos\varphi = \frac{(x,y)}{\|x\|\cdot\|y\|}$$

$(x,y) = 4\cdot 12 + 2\cdot 3 + 4\cdot 4 = 70$

$\|x\|_1 = |4| + |2| + |4| = |10|$

$\|y\|_1 = |12| + |3| + |4| = |19|$

$$\cos\varphi = \frac{70}{10\cdot 19} = \frac{7}{19}$$

$\|x\|_2 = \sqrt{4^2+2^2+4^2} = \sqrt{36} = 6$

$\|y\|_2 = \sqrt{12^2+3^2+4^2} = \sqrt{169} = 13$

$$\cos\varphi = \frac{70}{6\cdot 13} = \frac{35}{39}$$

③ Будет ли линейное пространство евклидовым, если за скалярное произведение принять:

а) произведение длин векторов

$(x,y) = \|x\|\cdot\|y\|$

1. $\|x\|\cdot\|y\| = \|y\|\cdot\|x\|$

2. $\|\lambda\cdot x\|\cdot\|y\| = |\lambda|\cdot\|x\|\cdot\|y\|$

3. $\|x_1+x_2\|\cdot\|y\| \neq \|x_1\|\cdot\|y\| + \|x_2\|\|y\|$,

т.к. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Сл-но не является евклидовым

б) утроенное обычное скалярное произведение векторов

$(x,y) = 3(x,y)$

1. $3(x,y) = 3(y,x)$
2. $3(\lambda x, y) = 3\lambda(x,y)$
3. $3(x_1+x_2, y) = 3((x_1,y)+(x_2,y))$
4. $3(x,x) > 0$

Все условия выполняются, сл-но является евклидовым

4) Какие из нижеперечисленных векторов образуют ортонормированный базис в линейном пр-ве R^3

а) $(1,0,0)$ $(0,0,1)$

Нет, т.к. должно быть 3 вектора

б) $x=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ $y=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ $z=(0,0,1)$

$\|x\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+0} = 1$

$\|y\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+0} = 1$

$\|z\|_2 = \sqrt{0+0+1} = 1$

$(x,x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+0=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$

$(y,y)=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+0=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$

$(z,z)=0+0+1\cdot1=1$

$(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+0=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$

$(x,z)=0+0+0=0$

$(y,z)=0+0+0=0$

$\Rightarrow$ являются ортонормированным базисом

в) $x=\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2};0\right)$ $y=\left(0;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ $z=(0,0,1)$

$(x,x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+0=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\neq1.$

одно из условий не выполняется $\Rightarrow$ не являются ортонормированным базисом

г) $x=(1;0;0)$ $y=(0;1;0)$ $z=(0;0;1)$

$(x,x)=1+0+0=1$

$(y;y)=0+1+0=1$

$(z;z)=0+0+1=1$

$(x,y)=1\cdot0+0\cdot1+0=0$

$(x,z)=1\cdot0+0+0\cdot1=0$

$(y,z)=0+1\cdot0+0\cdot1=0$

$\|x\|_2 = \sqrt{1+0+0} = 1$

$\|y\|_2 = \sqrt{0+1+0} = 1$

$\|z\|_2 = \sqrt{0+0+1} = 1$

$\Rightarrow$ являются ортонормированным базисом