ДЗ 2

Матрицы. Часть 1.

(1) Установить, какие произведения матриц AB и BA определены, и найти размерности полученных матриц

а) A – матрица 4×2, B – матрица 4×2

A·B $(4\times2)\cdot(4\times2)$ → не определено
$2 \neq 4$

B·A $(4\times2)\cdot(4\times2)$ → не определено
$2 \neq 4$

б) A – (2×5), B – (5×3)

A·B $(2\times5)\cdot(5\times3)$ → (2×3)
$5 = 5$

B·A $(5\times3)\cdot(2\times5)$ → не определено
$3 \neq 2$

в) A – (8×3), B – (3×8)

A·B $(8\times3)\cdot(3\times8)$ → (8×8)
$3 = 3$

B·A $(3\times8)\cdot(8\times3)$ → (3×3)
$8 = 8$

г) A – (4×4), B – (4×4)

A·B $(4\times4)\cdot(4\times4)$ → (4×4)
$4 = 4$

B·A $(4\times4)\cdot(4\times4)$ → (4×4)
$4 = 4$

(2) Найти сумму и произведение матриц

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 0\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 0 & 5\end{pmatrix}$$

$$A+B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & -1\\ 0 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & -3\\ 3 & 5\end{pmatrix}$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & -1\\ 0 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -11\\ 12 & -3\end{pmatrix}$$

(3) Из закономерностей сложения и умножения матриц на число можно сделать вывод, что матрицы одного размера образуют линейное пр-во. Вычислить линейную комбинацию $3A-2B+4C$ для матриц

$$A=\begin{pmatrix}1 & 7\\ 3 & -6\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}0 & 5\\ 2 & -1\end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix}2 & -4\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$3\cdot\begin{pmatrix}1 & 7\\ 3 & -6\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}0 & 5\\ 2 & -1\end{pmatrix}+4\cdot\begin{pmatrix}2 & -4\\ 1 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}3 & 21\\ 9 & -18\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -10\\ -4 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}8 & -16\\ 4 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & -5\\ 9 & -12\end{pmatrix}$$

(4) Дано матрица $A=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 5 & -2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$

Вычислить AA^T и A^TA

$$A^T = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16+1 & 20-2 & 8+3 \\ 20-2 & 25+4 & 10-6 \\ 8+3 & 10-6 & 4+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 18 & 11 \\ 18 & 29 & 4 \\ 11 & 4 & 13 \end{pmatrix}$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16+25+4 & 4-10+6 \\ 4-10+6 & 1+4+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 & 0 \\ 0 & 14 \end{pmatrix}$$

Матрицы. Часть 2

1) Вычислить определитель

а) $\begin{vmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix} = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$

б) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} - 0 + 0 = 4 \cdot 45 = 180$

в) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} =$

$= (45-48) - 2(36-42) + 3(32-35) = -3 + 12 - 9 = 0$

2) Определитель матрицы A равен 4. Найти:

а) $\det(A^2) = \det(A \cdot A) = \det(A) \cdot \det(A) = 16$

б) $\det(A^T) = \det(A) = 4$

в). $det(2A) = 2^n det(A) = 2^4 \cdot 4$, где n - кол-во строк матрицы A

3. Доказать, что матрица

$$\begin{pmatrix} -2 & 7 & -3 \\ 4 & -14 & 6 \\ -3 & 7 & 13 \end{pmatrix}$$

вырождена

$$\begin{vmatrix} -2 & 7 & -3 \\ 4 & -14 & 6 \\ -3 & 7 & 13 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} -2 & 7 & -3 \\ -2 & 7 & -3 \\ -3 & 7 & 13 \end{vmatrix} \Rightarrow det = 0 \Rightarrow$$

матрица вырождена

4. Найти ранг матрицы

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$

ранг матрицы 2

б) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to$

$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ ранг матрицы 3