ДЗ 3

1) Найдите собственные вектора и собственные зн-ия для линейного оператора, заданного матрицей

$A = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$

Найдем собственные зн-ия

$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 6 \\ 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$-(1+\lambda)(6-\lambda) + 12 = 0$

$-(6-\lambda+6\lambda-\lambda^2) + 12 = 0$

$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$

по т. Виета $\lambda_1 = 2$ $\lambda_2 = 3$

Собственные зн-ия 2 и 3

Найдем собственные вектора

а) для $\lambda = 2$

$\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} -x_1 - 6x_2 = 2x_1 \\ 2x_1 + 6x_2 = 2x_2 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = -2x_2 \\ x_1 = -2x_2 \end{cases}$

Получаем бесконечно много собственных векторов

$\exists \; x_1 = 2 \quad x_2 = -1$

$$\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -2+6=4 \\ 4-6=-2 \end{cases} \quad \begin{cases} 4=4 \\ -2=-2 \end{cases}$$

Собственный вектор для $\lambda = 2$ $\quad x = (2; -1)$

б) для $\lambda = 3$

$$\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -x_1 - 6x_2 = 3x_1 \\ 2x_1 + 6x_2 = 3x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x_1 + 6x_2 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -\frac{3}{2} x_2 \\ x_1 = -\frac{3}{2} x_2 \end{cases}$$

Получаем бесконечно много собственных векторов

$\exists \; x_1 = 3 \quad x_2 = -2$

$$\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -3+12=9 \\ 6-12=-6 \end{cases} \quad \begin{cases} 9=9 \\ -6=-6 \end{cases}$$

Собственный вектор для $\lambda = 3$ $\quad x = (3; -2)$

(2) Дан оператор поворота на $180°$, задаваемый матрицей

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Покажите, что любой вектор считается для него собственным

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-1-\lambda)(-1-\lambda) = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -1$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -x_1 = -x_1 \\ -x_2 = -x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Сл-но любой вектор является собственным

(3) Пусть линейный оператор задан матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Установите, считается ли вектор $x = (1, 1)$ собственным вектором этого линейного оператора

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 1+1=\lambda \\ -1+3=\lambda \end{cases} \begin{cases} \lambda=2 \\ \lambda=2 \end{cases} \Rightarrow \lambda=2$$

Сл-но вектор $x=(1,1)$ является собственным вектором

4) Пусть линейный оператор задан матрицей

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Установите является ли вектор $x=(3;-3;-4)$ собственным вектором этого линейного оператора

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -9 = 3\lambda \\ 9 = -3\lambda \\ -12 = -4\lambda \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda = -3 \\ \lambda = -3 \\ \lambda = 3 \end{cases}$$

Система не имеет смысла сл-но вектор $x=(3;-3;-4)$ не является собственным вектором