Софийски университет "Св. Климент Охридски"
Факултет по математика и информатика

УЧЕБЕН ПРОЕКТ

по

Диференциални уравнения и приложения

спец. Софтуерно инженерство, 2 курс, летен семестър,

учебна година 2020/2021

Тема № СИ21-П-130

13.06.2021 Изготвил: Ирина Цветанова Христова

София Ф. No. 62473

Група 5

Оценка :……………………………..

С Ъ Д Ъ Р Ж А Н И Е

(номерата на страниците са примерни !)

1. Тема (задание) на проекта

Учебен проект по "Диференциални уравнения и приложения"
спец. Софтуерно инженерство,
2 курс, летен семестър, уч. год. 2020-2021

Име...,
Ф.No............, група ....

Тема СИ21-П-130. Разпределението на топлината в тънък хомогенен прът се моделира със следната смесена задача

$$\left|\begin{array}{l} u_t = \frac{1}{40}u_{xx}, \quad t > 0,\ 0 < x < 60, \\[2ex] u|_{t=0} = \begin{cases} [e^{(x-40)(x-50)} - 1]^3, & x \in [40, 50] \\ 0, & x \in [0, 40) \cup (50, 60], \end{cases} \\[2ex] u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=60} = 0, \quad t \geq 0. \end{array}\right.$$

1. Разделете променливите в задачата, като търсите решение от вида $u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x)T_k(t)$. За функциите $X_k(x)$ получете задача на Щурм-Лиувил и напишете нейните собствени стойности и собствени функции. Напишете кои са функциите $T_k(t)$ и кои са коефициентите в получения ред за $u(x,t)$.

2. Направете на MATLAB анимация на изменението на температурата в пръта за $t \in [0, 12]$, като използвате 41-та частична сума на реда за $u(x,t)$. Начертайте с червен цвят в един прозорец една под друга графиките в началния, крайния и един междинен момент от направената анимация, като означете коя графика за кое t се отнася.

2. Решение на Задачата.

2.1. Теоретична част

$$\begin{cases} u_t = \frac{1}{40} u_{xx}, \quad t>0, \quad 0<x<60 \\ u|_{t=0} = \begin{cases} \left[e^{(x-40)(x-50)} - 1 \right]^3, & x\in[40,50] \\ 0, & x\in[0,40)\cup(50,60] \end{cases} \\ u_x|_{x=0} = 0 \quad u|_{x=60} = 0, \quad t\geq 0 \end{cases}$$

$$u(x,0) = \varphi(x) \qquad \varphi(x) = \begin{cases} \left[e^{(x-40)(x-50)} - 1 \right]^3, & x\in[40,50] \\ 0, & x\in[0,40)\cup(50,60] \end{cases}$$

$\varphi(x)$ - непрекъсната и частично гладка в инт. $[0,60]$

$$\varphi(0) = \varphi(60) = 0$$

Ще използваме метода на Фурие (разделяне на променливите)

1) Търсим реш от вида $u(x,t) = X(x)T(t) \not\equiv 0$

2) Заместване в у-нието $X(x)T'(t) = \frac{1}{40} X''(x)T(t)$

$$\Rightarrow \frac{T'(t)}{T(t)} \cdot 40 = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \rightarrow \text{произволна константа}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ T'(t) + \frac{1}{40} \lambda T(t) = 0 \end{array}$$

3) Използване ГУ: $u_x|_{x=0} = X'(0)T(t) = 0, \ t\geq 0 \Rightarrow X'(0) = 0$

$u|_{x=60} = X(60)T(t) = 0, \ t\geq 0 \Rightarrow X(60) = 0$

Получаваме следната задача на Щурм – Лиувил

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, & 0 < x < 60 \\ X'(0) = 0, \quad X(60) = 0 \end{cases}$$

$$\lambda_k = \frac{k}{60} \qquad X_k(x) = e^{\left(\frac{kx}{60}-40\right)\left(\frac{kx}{60}-50\right)} - 1 \qquad k = 1, 2, 3 \ldots$$

Ако $\lambda \neq \lambda_k$, то само $X(x) \equiv 0$ е реш.
При $\lambda = \lambda_k$ за някое $k \in \mathbb{N}$ има безбр. много реш. $X(x) = c \cdot X_k(x)$, c - константа

За $\lambda = \lambda_k$ реш. у-нието за $T(t)$:

$$T_k'(t) + \frac{1}{40}\left(\frac{k}{60}\right)^2 T(t) = 0, \quad k \in \mathbb{N}$$

$$T_k'(t) = \frac{-k^2}{40 \cdot 60^2}$$

$$T_k(t) = A_k \cdot e^{-\frac{k^2}{40 \cdot 60^2} t}, \quad A_k \text{ - конст, реш. на у-нието}$$

$$\Rightarrow u_k(x,t) = T_k(t) \cdot X_k(x) \quad k \in \mathbb{N}$$

В общия случай

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{A_k e^{-\frac{k^2}{40 \cdot 60^2} t}}_{T_k(t)} \cdot \underbrace{\left(e^{\left(\frac{kx}{60}-40\right)\left(\frac{kx}{60}-50\right)} - 1\right)}_{X_k(x)}$$

$$u|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot X_k(x) = \left(e^{(x-40)(x-50)} - 1\right)^3$$

$$\Rightarrow A_k = \frac{1}{4} \int_0^{60} \left(e^{(x-40)(x-50)} - 1\right)^3 \cdot \left(e^{\left(\frac{kx}{60}-40\right)\left(\frac{kx}{60}-50\right)} - 1\right) dx$$

2.2. MatLab код и получени в командния прозорец резултати при изпълнението му

```
function tema130

% Въвеждаме необходимите параметри
a=1/sqrt(40);
L=60;
tmax=12;
 x=0:L/100:L;
t=0:tmax/100:tmax;

% Декларираме функцията фи
function y=phi(x)
for i=1:length(x)
if x(i)>=40 && x(i)<=50 y(i)=((exp((x-40)*(x-50)))-1)^3;
else
y(i)=0;
end
end
end

% Декларираме функцията u(x,t)
function y=u(x,t)
y=0;
% Изчисляваме 41-та частична сума на реда за u(x,t)
for k=0:40
Xk=exp((((k*x)/L)-40)*(((k*x)/L)-50))-1;
Ak=2*trapz(x,phi(x)*Xk)/L;
 Tk=Ak*exp(-(((a*k)/L)^2)*t);
y=y+(Xk*Tk);
end
end

% Генерират се графиките за анимацията
for n=1:length(t)
plot(x,u(x,t(n)),'LineWidth',5);
axis([0,L,-1.5,0.5])
grid on M(n)=getframe;
end movie(M,1)

% Чартае в един прозорец графиките от анимацията
% в моментите t1=0, t2=1, t3=12
subplot(3,1,1) plot(x,u(x,0),'LineWidth',2) title('При t=0')
grid on
subplot(3,1,2)
plot(x,u(x,1),'LineWidth',2) title('При t=1')
grid on
subplot(3,1,3)
```

```
plot(x,u(x,12),'LineWidth',2) title('При t=12')
grid on
 end
```