超越对数函数要素替代弹性公式修正与估计方法比较①

郝　枫

（天津财经大学统计学系）

【摘要】对超越对数函数要素替代弹性估计方法进行专门研究，修正了超越对数生产函数要素替代弹性公式错误，梳理超越对数成本函数各类替代弹性定义，综合考虑数据易得性、估计可靠性、定义合意性以判定各类估计方法的相对优劣。研究发现，受困于共线性难题，基于超越对数生产函数计算替代弹性效果不佳；基于超越对数成本函数计算替代弹性更具优势，影子替代弹性凭借出色的理论性质与强稳健性成为首选。

关键词　超越对数　对偶成本　替代弹性　可分性

中图分类号　F061.2　　**文献标识码**　A

DOI:10.13653/j.cnki.jqte.2015.04.006

超越对数（Transcendental Logarithmic，Translog）函数形式灵活，凭借其包容性和易估计优势，在经济研究中广泛应用。刻画生产要素之间的替代/互补关系及其变化特征，是超越对数函数的核心功能之一，其在该领域颇具优势。

准确把握生产要素之间的替代关系，有助于决策者根据要素价格变化采取相应对策，以改善资源配置。微观层面，面对要素市场的外生价格冲击，经营者调整要素结构的能力严格取决于要素替代关系及其程度。中观层面，不同行业在要素替代关系上的差异，决定其应对外生价格冲击（如石油危机）实现转型的可能性。宏观层面，有效测度在主要生产要素之间的替代能力，对合理制定能源政策、物质资本与人力资本投资政策具有重要的参考价值。

20世纪70年代，基于超越对数函数的要素替代关系研究逐渐兴起，形成丰富的理论与经验研究成果。理论研究方面，重点是构建与超越对数生产函数对偶的超越对数成本函数及价格函数，并给出多种替代弹性定义。经验研究集中于3个领域：一是分析资本与劳动的替代关系，早期文献侧重考察各类物质资本（机器、建筑）与劳动的关系（Berndt和Christensen，1973），近期研究更关注技能劳动（人力资本）与非技能劳动及物质资本的关系（张月玲和叶阿忠，2014）；二是研究能源与其他生产要素（特别是资本）的替代/互补关系，该领域文献众多但分歧较大（Berndt和Wood，1975），并引起国内研究高度关注（郑照宁和刘顺德，2004；樊茂清等，2009；杨福霞等，2011）；三是考察各种农业生产要素之间的替代关系，此类研究经久不息（Debertin和Pagoulatos，1985；Shumway，1995；Salhofer，2000），但国内文献较少涉及（李志俊，2014）。

① 本文获得教育部人文社会科学研究规划基金课题“时变特征与行业差异视角下中国要素替代弹性实证估计与政策评价研究”（14YJA910002）、天津市高校“中青年骨干创新人才培养计划”、天津市“131创新型人才培养工程”、天津财经大学“优秀青年学者计划”的资助。感谢审稿专家对本文提出的宝贵意见，文责自负。

梳理国内基于超越对数函数的要素替代弹性研究，发现其存在三方面问题。其一，超越对数生产函数之下，替代弹性计算公式有误，使分析结论可靠性受损；其二，超越对数成本函数之下，替代弹性公式选择及结果比较不够充分，难以有效揭示要素替代关系及其变化特征的稳健性；其三，对超越对数生产函数与超越对数成本函数替代弹性估计方法的适用范围及相对优劣，缺乏深入系统的比较。有鉴于此，本文对超越对数函数要素替代弹性估计方法进行专门研究。创新性工作主要体现在：对国内文献中超越对数生产函数要素替代弹性的公式错误进行修正，评估其对正确公式的背离程度，并反思公式误用的原因；细致梳理各类替代弹性定义之间的关系，综合考虑理论性质及结果稳健性，由数据易得性、估计可靠性、定义合意性三方面给出估计方法的优先顺序，为该领域实证研究的方法选择提供参照。

一、超越对数函数族

Kmenta（1967）利用二阶泰勒展式将 CES 函数对数线性化，可视为超越对数函数的萌芽。经 Griliches 和 Ringstad（1971）的贡献，超越对数函数最终成形。

超越对数函数在结构上属于平方响应面（Quadratic Response Surface）模型，具有易估计和包容性优势。所谓易估计：一则其只需基本的投入产出数量（或价格）数据，即可利用线性模型方法估计，比非线性的 CES 函数更易处理；二则其无须任何改变，即可用于多要素（$n>2$）情形①。至于包容性：一则其可视为对任意函数的二阶泰勒展式近似，C-D 函数、CES 函数均为其特例；二则其对特定参数（如产出弹性、替代弹性）无须施加先验设定，可完全由实际数据估计与检验。凭借以上优势，超越对数函数在揭示要素替代关系、刻画生产前沿及测度技术偏向等方面大行其道。特别是在多要素情形下，超越对数函数优势明显。

尽管起源于生产函数研究，但超越对数函数实为一族。根据被解释变量的不同，可分为超越对数生产函数、超越对数价格函数、超越对数成本函数。三者之间具有密切的内在联系。

多要素情形下，超越对数生产函数的指数形式为：

$$Y=f\left(X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n\right)=A\Pi_i X_i^{\alpha_i}\Pi_i X_i^{\frac{1}{2}[\Sigma_j\alpha_{ij}\ln X_j]} \tag{1}$$

其中，Y 为产出，A 为反映一般技术水平的效率参数②，X_i 为各种生产要素（$i=1$，2，…，n）。有别于常以指数形式出现的 C-D 和 CES 生产函数，超越对数生产函数习惯采用对数形式：

$$\ln Y=\alpha_0+\sum_i\alpha_i\ln X_i+\frac{1}{2}\sum_i\sum_j\alpha_{ij}\ln X_i\ln X_j \tag{2}$$

其中，$\alpha_0=\ln A$，α_i 与 α_{ij} 均为未知参数。根据可积函数 Young 定理，该函数对任意两个自变量二阶交叉偏导的取值与求导顺序无关，$\alpha_{ij}=\alpha_{ji}$（对称性）恒成立（Berndt 和 Chris-

① 多要素情形下，超越对数函数对各要素之间替代弹性无任何约束，其完全由数据确定。相比之下，多要素一级 CES 生产函数假定任意一对要素之间替代弹性相同；多级 CES 生产函数虽可放松该假定，但以引入多层嵌套结构并极大增加模型复杂性为代价。

② 可以证明，该形式实质为希克斯中性生产函数。Berndt 和 Christensen（1973）给出一种允许超越对数生产函数包含有偏技术进步的方式，对该式做出重要扩展。鉴于是否考虑有偏技术并不影响替代弹性计算，本文模型均基于希克斯中性技术进步设定。

tensen, 1973)。在式 (2) 交叉项 $\ln X_i \ln X_j$ 前乘以 1/2，其系数变为 $(\alpha_{ij}+\alpha_{ji})/2=\alpha_{ij}$，由于剔除冗余项，使公式推导大为简化。但在这种设定下，平方项系数为 $(\alpha_{ii}/2)$。经验研究中，习惯将式 (2) 改写为：

$$\ln Y=\alpha_0+\sum_i\alpha_i\ln X_i+\sum_i\tilde{\alpha}_{ii}(\ln X_i)^2+\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\sum_j\alpha_{ij}\ln X_i\ln X_j$$

或

$$\ln Y=\alpha_0+\sum_i\alpha_i\ln X_i+\sum_i\tilde{\alpha}_{ii}(\ln X_i)^2+\sum_{i<j}\sum_j\alpha_{ij}\ln X_i\ln X_j \tag{3}$$

平方项系数变为 $\tilde{\alpha}_{ii}=(1/2)\alpha_{ii}$，其余参数不变。其好处是，模型参数与软件输出结果完全对应①。

根据对偶 (Duality) 理论，可构造相应的成本函数或价格函数，以等价反映原生产函数的全部信息。式 (2) 的对偶价格函数 (Dual Price Function) 为：

$$\ln P_Y=\beta_0+\sum_i\beta_i\ln P_i+\frac{1}{2}\sum_i\sum_j\beta_{ij}\ln P_i\ln P_j \tag{4}$$

其中，P_Y 为产出价格，P_i 为各类要素价格。

相应的最小成本函数 (Minimum Cost Function) 反映给定产出之下，最低总生产成本如何由各类生产要素数量与价格决定。其一般形式为：

$$\ln C=\gamma_0+\sum_i\alpha_i\ln X_i+\sum_i\beta_i\ln P_i+\frac{1}{2}\sum_i\sum_j\alpha_{ij}\ln X_i\ln X_j$$
$$+\frac{1}{2}\sum_i\sum_j\beta_{ij}\ln P_i\ln P_j+\sum_i\sum_j\gamma_{ij}\ln P_i\ln X_j \tag{5}$$

鉴于该函数包含自变量过多，受数据容量制约，其参数往往无法估计。简化起见，可用产出代理各类投入信息，给出成本函数的其他形式：

$$\ln C=\gamma_0+\alpha_Y\ln Y+\sum_i\beta_i\ln P_i+\frac{1}{2}\sum_i\sum_j\beta_{ij}\ln P_i\ln P_j+\sum_i\gamma_{iY}\ln P_i\ln Y \tag{6}$$

$$\ln C=\gamma_0+\alpha_Y\ln Y+\sum_i\beta_i\ln P_i+\frac{1}{2}\sum_i\sum_j\beta_{ij}\ln P_i\ln P_j \tag{7}$$

式 (6) 和式 (7) 可以有效减少待估参数。

理论上 3 种超越对数函数可等价地用于相关研究。区别在于，生产函数直接刻画生产行为，而与其对偶的价格函数和成本函数间接刻画生产者决策。鉴于价格函数实为单位成本函数，故其与刻画总成本决定的最小成本函数异曲同工。一般而言，为刻画要素替代和技术进步偏向，使用超越对数成本函数或价格函数更为方便 (Jorgenson 等，2007)。

以超越对数函数测度替代弹性，优点在于：便于处理生产要素大于 2 的一般情形；允许替代弹性随时间以及要素组合变化。其难点在于：为获得统计显著的估计值，常对参数关系施加一系列理论约束；随着要素种类增多，交叉项数量急剧膨胀，过多解释变量不仅严重消耗自由度，还会导致严重的共线性问题。权衡利弊，两要素情形下，多数研究偏爱 CES 函数 (郝枫和盛卫燕，2014)；多要素情形下，只要能克服共线性等估计问题，超越对数函数即为首选。

二、超越对数生产函数替代弹性公式正源

作为对 CES 生产函数的扩展，超越对数生产函数提出后迅速流行，尤其在行业分析及

---

① 对式 (4) 和式 (5)，估计时一般也做类似改写，使平方项系数变为 $\tilde{\beta}_{ii}=(1/2)\beta_{ii}$。

多要素生产函数研究中倍受青睐。其核心改进在于，允许替代弹性随要素比率（及时间）变化且允许不同“投入要素对”（Input Pairs）的替代弹性不同。此外，放松函数齐次性要求且不受投入可分性（Input Separability）影响，也均为其重要优势。Boisvert（1982）认为，不同研究者可按自身偏好审视该函数①，以及其与对偶的超越对数成本函数具有数学相似性，也是其广受欢迎的原因。

1. 多要素生产函数的直接替代弹性定义

要素替代弹性是衡量要素之间替代关系强弱的核心指标，其最初定义由 Hicks（1932）在《工资理论》中给出。几乎同时，Robinson（1933）给出一个基本等价但更为流行的定义：要素替代弹性度量（给定产出不变时）为边际替代率（Marginal Rate of Substitution）百分比变化引致的要素比率百分比变化。Lerner（1933）指出，替代弹性的直观含义是等产量线的曲率（Curvature of Isoquant）。

两要素生产函数 $Y=f(K, L)$ 之下，资本 K 与劳动 L 之间的替代弹性 σ 为：

$$\sigma=-\frac{d\ln(L/K)}{d\ln(f_L/f_K)}=\frac{d\ln(L/K)}{d\ln(f_K/f_L)}=\frac{d\ln(K/L)}{d\ln(f_L/f_K)} \tag{8}$$

其值域为 $[0, +\infty)$，取值越大，表明要素之间替代性越强。通常以 $\sigma=1$ 为界，将值域分为两部分：$\sigma>1$，称为强替代关系；$\sigma<1$，称为弱替代关系。利用“要素价格等于其边际产品”的生产者决策均衡条件，其也常写作 $\sigma=d\ln(K/L)/d\ln(w/r)$，反映要素比价 (w/r) 变动对要素比率 (K/L) 的影响。

多要素生产函数 $Y=f(X)=f(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 之下，对任意两种生产要素之间替代弹性的测度复杂得多。核心问题在于，当考察某对要素之间的替代关系时，必须对其他要素数量与价格是否保持不变施加假定。不同假定引出多类定义，并导致测度结果变化。本节首先考虑式（8）在多要素情形下的自然扩展和直接替代弹性（Direct Elasticity of Substitution, DES）。

多要素情形下，生产要素 i 与 j 之间的 DES 定义为：给定产出、其他要素投入数量及边际产品不变时，二者边际替代率相对变化导致要素比率相对变化（Sato 和 Koizumi, 1973）。其公式为：

$$\sigma_{ij}=\frac{d\ln(X_j/X_i)}{d\ln(f_i/f_j)}=\frac{d\ln(X_i/X_j)}{d\ln(f_j/f_i)}=\sigma_{ji} \tag{9}$$

DES 仍具有对称性，但值域扩展至整个实数轴：取值大于 0，要素之间为替代关系；取值小于 0，要素之间为互补关系。

2. 超越对数生产函数 DES 计算公式推导

以下针对超越对数生产函数之式（2），推导 DES 计算公式。

首先，任意两要素之间的边际替代率 φ 为：

$$\varphi=-\frac{dX_j}{dX_i}=\frac{f_i}{f_j}=\frac{\partial Y/\partial X_i}{\partial Y/\partial X_j}=\frac{X_j}{X_i}\frac{\partial \ln Y/\partial \ln X_i}{\partial \ln Y/\partial \ln X_j}=\frac{X_j\eta_i}{X_i\eta_j} \tag{10}$$

① 常见的视角有 3 种：一是看作某种具体生产函数的真实形式；二是看作对 CES 生产函数的二阶泰勒展式近似；三是看作对形式未知的一般化生产函数的二阶泰勒展开式近似。3 种理解在不同情境下各有长处，使用者可按需选择。

其中，$\eta_i = \partial \ln Y / \partial \ln X_i$ 为要素 i 的产出弹性。对 φ 全微分：

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial X_i} dX_i + \frac{\partial \varphi}{\partial X_j} dX_j \tag{11}$$

可以证明，φ 对两种要素的偏导分别为：

$$\frac{\partial \varphi}{\partial X_i} = \frac{X_j}{X_i^2}\left(\frac{\alpha_{ii}}{\eta_j} - \frac{\eta_i\ (\eta_j + \alpha_{ji})}{\eta_j^2}\right) \tag{12}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial X_j} = \frac{1}{X_i}\left(\frac{\eta_i + \alpha_{ij}}{\eta_j} - \frac{\alpha_{jj}\eta_i}{\eta_j^2}\right) \tag{13}$$

利用式（10）～式（13），得到 φ 变化率：

$$\begin{aligned} d\ln\varphi &= \frac{d\varphi}{\varphi} = \frac{1}{\varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial X_i} dX_i + \frac{1}{\varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial X_j} dX_j \\ &= \frac{1}{X_j\eta_i}\left(X_j \frac{\alpha_{ii}}{X_i} - \frac{X_j\eta_i}{X_i\eta_j}\ (\eta_j + \alpha_{ji})\right) dX_i + \frac{1}{X_j\eta_i}\left((\eta_i + \alpha_{ij}) - \frac{X_j\eta_i}{X_i\eta_j}\ (X_i \frac{\alpha_{jj}}{X_j})\right) dX_j \end{aligned} \tag{14}$$

类似地，要素比率变化率为：

$$d\ln\ (X_j / X_i) = \frac{d\ (X_j/X_i)}{X_j/X_i} = \frac{dX_j}{X_j} - \frac{dX_i}{X_i} \tag{15}$$

将式（14）和式（15）代入式（9），可得：

$$\sigma_{ij} = \frac{X_j\eta_i\ [\ (1/X_j)\ dX_j - \ (1/X_i)\ dX_i]}{\left(X_j \frac{\alpha_{ii}}{X_i} - \frac{X_j\eta_i}{X_i\eta_j}\ (\eta_j + \alpha_{ji})\right) dX_i + \left((\eta_i + \alpha_{ij}) - \frac{X_j\eta_i}{X_i\eta_j} X_i \frac{\alpha_{jj}}{X_j}\right) dX_j} \tag{16}$$

根据式（10），给定产出水平下：

$$dX_j = -\frac{X_j\eta_i}{X_i\eta_j} dX_i \tag{17}$$

将其代入式（16），分子分母同时除以 dX_i，整理得到：

$$\sigma_{ij} = \frac{-\ (X_j/X_i)\ (\eta_i/\eta_j)\ (\eta_i + \eta_j)}{\left(X_j \frac{\alpha_{ii}}{X_i} - \frac{X_j\eta_i}{X_i\eta_j}\ (\eta_j + \alpha_{ji})\right) + \left((\eta_i + \alpha_{ij}) - \frac{X_j\eta_i}{X_i\eta_j} X_i \frac{\alpha_{jj}}{X_j}\right)\left(-\frac{X_j\eta_i}{X_i\eta_j}\right)} \tag{18}$$

式（18）表明，替代弹性可表示为模型参数与要素投入的复杂函数。将分子分母同时除以－（X_j/X_i）（η_i/η_j），最终化简得到：

$$\sigma_{ij} = \left(1 + \left(2\alpha_{ij} - \frac{\eta_j}{\eta_i}\alpha_{ii} - \frac{\eta_i}{\eta_j}\alpha_{jj}\right)\ (\eta_i + \eta_j)^{-1}\right)^{-1} \tag{19}$$

式（19）形式简洁，仅由函数参数和要素产出弹性表示。由于产出弹性 $\eta_i = \alpha_i + \sum_k \alpha_{ik} \ln X_k$ 随投入数量变化，替代弹性并非常数。经验研究中，超越对数生产函数常用式（3）。根据参数关系，此时 DES 改写为：

$$\sigma_{ij} = \left(1 + 2\left(\alpha_{ij} - \frac{\eta_j}{\eta_i}\tilde{\alpha}_{ii} - \frac{\eta_i}{\eta_j}\tilde{\alpha}_{jj}\right)\ (\eta_i + \eta_j)^{-1}\right)^{-1} \tag{20}$$

3. 国内替代弹性公式误用及其反思

国内研究对超越对数生产函数替代弹性的推导，普遍有误。所见形式有①：

$$\sigma_{ij}=\left(1+\left(\alpha_{ij}-\frac{\eta_i}{\eta_j}\tilde{\alpha}_{jj}\right)(\eta_i-\eta_j)^{-1}\right)^{-1} \tag{21}$$

$$\sigma_{ij}=\left(1-\left(\alpha_{ij}-\frac{\eta_i}{\eta_j}\tilde{\alpha}_{jj}\right)\right)^{-1} \tag{22}$$

郑照宁和刘顺德（2004）、黄磊和周勇（2008）、史红亮等（2010）、杨福霞等（2011）、张月玲和叶阿忠（2013，2014）、李志俊（2014）均采用式（21）；王明益（2012）则用式（22）。王灿雄和谢志忠（2013）注意到此类公式推导存在逻辑错误，并给出修正结果：

$$\sigma_{ij}=\left(1+\left(\alpha_{ij}-2\frac{\eta_i}{\eta_j}\tilde{\alpha}_{jj}\right)(\eta_i-\eta_j)^{-1}\right)^{-1} \tag{23}$$

但其仍然沿袭上述文献的推导思路，仅改动一处细节，并未得到正确结果。

理论上，DES 具有对称性，式（19）和式（20）具备该特征。式（21）～式（23）均不满足对称性，故其错误可直观验证。用错误公式进行实证分析，难免对结论有效性产生损害。引人深思地是，究竟是何原因导致国内对超越对数生产函数替代弹性公式普遍误用？王灿雄和谢志忠（2013）将矛头指向学术研究中借用现成结果的“搭便车”行为。但关键是，为何大家没搭上“对路便车”？国外文献对此讨论较少，恐怕是一个重要的原因。

Khanna（2001）曾基于超越对数生产函数，评估《京都议定书》导致的经济损失。国内研究在考察能源与非能源替代关系及技术偏向时，经常参照其方法（郑照宁和刘顺德，2004；黄磊和周勇，2008；杨福霞等，2011）。Khanna（2001）未给出替代弹性公式，但 Khanna 等（1997）显示其采用式（20），该结果源于 Boisvert（1982）的推导，与式（19）等价。Boisvert（1982）与 Khanna 等（1997）均为未发表的工作论文，且替代弹性公式推导置于技术附录，长期湮没不闻。本文推导对 Boisvert（1982）进行改写与简化，以期促进正确公式传播，推动有关研究进展。

即使所用 DES 公式无误，利用超越对数生产函数计算替代弹性仍有困难。症结在于，其计量模型包含的解释变量过多，共线性问题十分严重，尚无完美的解决方案②。此外，投入数量往往由决策主体决定，具有较强的内生性（在企业和行业层面尤其明显），故容易导致估计量有偏。有鉴于此，更多研究转向采用超越对数成本函数或价格函数。

三、超越对数成本函数替代弹性估计方法

1. 对偶成本函数存在性条件及主要性质

对多要素生产函数 $Y=f(X)$，其对偶成本函数的存在应满足两个条件：第一，各要素边际产品非负（$f_i\geqslant 0$），这是良态（Well-behaved）生产函数的一般要求，可由生产者对投

① 国内文献所用符号不尽相同。为便于比较，均改由本文符号重新表述。

② 生产要素为 n 种时，待估参数为 $1+[n(n+3)/2]$ 个。在给定样本数据容量之下，过多待估参数往往导致严重的共线性问题，甚至使模型无法估计。对此问题，常见处理思路有 3 种：一是变量剔除法，如剔除统计不显著的变量，或先验地剔除平方项，但其无疑损害了“灵活性”（Flexibility）这一超越对数生产函数的核心优势；二是施加理论约束，如在齐次性条件下做单方程估计，可有效减少待估参数个数，但约束条件未必能通过检验；三是岭回归估计，该方法虽可提高估计精度，但以引入估计偏差为代价，且仍无力根除共线性问题。

入的自由处置（Free Disposal of Inputs）保证；第二，任意“投入要素对”之间的边际替代率非递增（$d(dX_j/dX_i)/dX_i \leqslant 0$），即等产量线弱凸向原点。

如生产函数满足上述条件，与其对偶的最小成本函数 $C(Y;P)=\min[P'X: f(X)\geqslant Y]$ 不仅存在，还具有如下性质：一是连续性，$C(Y;P)$ 对要素价格 $P=(P_1, P_2, \cdots, P_n)$ 连续；二是 $C(Y;P)$ 对任意要素价格非递减，$C_i \equiv \partial C(Y;P)/\partial P_i \geqslant 0$；三是 $C(Y;P)$ 对所有要素价格具有一次齐次性，所有要素价格都变动 m 倍，则产出也变动 m 倍，即 $C(Y;mP)=m \cdot C(Y;P)$；四是给定产出水平下，$C(Y;P)$ 是任意要素价格的凹函数，其要求二阶导数 $C_{ii} \equiv \partial^2 C(Y;P)/\partial P_i^2 \leqslant 0$。

根据谢泼德引理（Shephard's Lemma），最小成本函数对要素价格的偏导数，等于给定产出水平下使总成本最低的要素投入数量，即 $C_i \equiv \partial C(Y;P)/\partial P_i = X_i(Y;P)$。该定理对经验研究非常重要，其表明无须生产函数，即可利用与其对偶的最小成本函数确定要素需求。由于 $C(Y;P)$ 对要素价格一次齐次，故要素需求函数 $X_i(Y;P)$ 对要素价格零次齐次，其仅取决于比价变化，绝对价格同比变化并无影响。更重要的是，以要素需求价格弹性为基础，可方便地计算多类重要的替代弹性。

2. 常用替代弹性公式及相互关系

（1）Allen 替代弹性（Allen Elasticity of Substitution，AES）。对多要素生产函数 $Y=f(X)$，Allen（1938）给出如下替代弹性定义：

$$\sigma_{ij}^A = \frac{\sum_{i=1}^n X_i f_i}{X_i X_j} \cdot \frac{|B_{ij}|}{|B|} \tag{24}$$

其中，$|B|$ 为加边海瑟矩阵 B 的行列式，$|B_{ij}|$ 为相应的余子式。容易证明，该定义满足对称性（$\sigma_{ij}^A=\sigma_{ji}^A$）。上文讨论的 DES，也可由类似形式给出：

$$\sigma_{ij} = \frac{X_i f_i + X_j f_j}{X_i X_j} \cdot \frac{|B_{ij}|}{|B|} \tag{25}$$

多要素情形下 AES 与 DES 明显不同，二者仅在两要素情形下等价。给定生产函数 $f(X)$，利用要素投入及加边海瑟矩阵信息，即可计算 DES 与 AES。Uzawa（1962）证明，AES 也可由与生产函数对偶的最小成本函数 $C(Y;P)$ 导出：

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}^A &= \frac{CC_{ij}}{C_i C_j} = \frac{C(Y;P)}{[\partial C(Y;P)/\partial P_i][(\partial C(Y;P)/\partial P_j]} \cdot \frac{\partial^2 C(Y;P)}{\partial P_i \partial P_j} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n X_i P_i}{X_i X_j} \cdot \frac{\partial X_i}{\partial P_j}\end{aligned} \tag{26}$$

一旦 $C(Y;P)$ 形式确定，即可据其计算 AES。该 AES 公式的一大优势在于，其易由要素需求交叉价格弹性 $E_{ij}=\partial \ln X_i/\partial \ln P_j$ 计算：

$$\sigma_{ij}^A = \frac{\sum_{i=1}^n X_i P_i}{X_j P_j} \cdot \frac{\partial \ln X_i}{\partial \ln P_j} = \frac{E_{ij}}{S_j} \tag{27}$$

其中，$S_j = X_j P_j / \sum_{i=1}^n X_i P_i$ 为要素 j 的成本份额。AES 实质上刻画给定产出和其他要素价格不变时，单纯由 P_j 变化对 X_i 变化的影响（Sato 和 Koizumi，1973），故也称偏替代弹性（Partial Elasticity of Substitution）。对式（27），当 $i=j$ 时称为 Allen 自价格替代弹性 $\sigma_{jj}^A = E_{jj}/S_j$，其中 $E_{jj}=\partial \ln X_j/\partial \ln P_j$ 为要素需求（自）价格弹性。AES 的另一优势在于，

其可为计算其他替代弹性提供良好基础。

(2) Morishima 替代弹性 (Morishima Elasticity of Substitution，MES)。MES 由 Morishima (1967) 提出。Blackorby 和 Russell (1981，1989) 认为，MES 凭其多种优良性质优于 AES。常见定义为：

$$\sigma_{ij}^{M}=\partial \ln (C_i/C_j) / \partial \ln (P_j/P_i)$$
$$=P_j [(C_{ij}/C_i) - (C_{jj}/C_j)] = \partial \ln (X_i/X_j) / \partial \ln P_j \tag{28}$$

故 MES 反映给定其他价格不变，仅由 P_j 变化对要素比率 (X_i/X_j) 变化的影响。其可由式 (29) 计算：

$$\sigma_{ij}^{M}=E_{ij}-E_{jj}=S_j (\sigma_{ij}^{A}-\sigma_{jj}^{A}) \tag{29}$$

与众不同的是，MES 具有非对称性 $(\sigma_{ij}^{M}\neq\sigma_{ji}^{M})$。

(3) 影子替代弹性 (Shadow Elasticity of Substitution，SES)。与 AES 及 MES 相比，McFadden (1963) 给出的 SES 更接近 Hicks 对替代弹性的原始定义。其反映给定产出及其他要素价格不变，仅由要素比价 (P_j/P_i) 百分比变化导致的要素比率 (X_i/X_j) 百分比变化。SES 同样可由 $C(Y; P)$ 给出：

$$\sigma_{ij}^{S}=\left(-\frac{C_{ii}}{C_iC_i}+2\frac{C_{ij}}{C_iC_j}-\frac{C_{jj}}{C_jC_j}\right)/\left(\frac{1}{P_iC_i}+\frac{1}{P_jC_j}\right) \tag{30}$$

其也可由 AES 或要素需求价格弹性计算：

$$\sigma_{ij}^{S}= [S_iS_j/ (S_i+S_j)] (2\sigma_{ij}^{A}-\sigma_{ii}^{A}-\sigma_{jj}^{A})$$
$$= [S_i/ (S_i+S_j)] (E_{ij}-E_{jj}) + [S_j/ (S_i+S_j)] (E_{ji}-E_{ii}) \tag{31}$$

SES 仍具有对称性，$\sigma_{ij}^{S}=\sigma_{ji}^{S}$。Frenger (1985) 指出，SES 与 DES 之间关系为：$\sigma_{ij}^{S}\geqslant\sigma_{ij}^{D}$；当且仅当要素 (i, j) 与其他要素弱可分时，等号成立。

只要获得 AES 和成本份额数据，MES、SES 及其现代改进公式[①]均可方便得到。AES 以要素需求价格弹性为基础，后者直接依赖于对最小成本函数的估计。对多要素情形下替代弹性估计而言，超越对数成本函数堪称不二之选 (Binswanger，1974)。

3. *超越对数成本函数之替代弹性估计*

根据 Binswanger (1974)，在超越对数成本函数中，要素需求价格弹性 E_{ij} 可由 β_{ij} 计算：

$$E_{ij}=\frac{\beta_{ij}}{S_i}+S_j \qquad i, j=1, 2, \cdots, n \qquad i\neq j \tag{32}$$

$$E_{ii}=\frac{\tilde{\beta}_{ii}}{S_i}+S_i-1 \qquad i=1, 2, \cdots, n \tag{33}$$

其中，$\tilde{\beta}_{ii}= (1/2) \beta_{ii}$。将其代入式 (27)，得 AES 计算式：

$$\sigma_{ij}^{A}=\frac{\beta_{ij}}{S_iS_j}+1 \qquad i, j=1, 2, \cdots, n \qquad i\neq j \tag{34}$$

$$\sigma_{ii}^{A}=\frac{1}{S_i^2} (\tilde{\beta}_{ii}+S_i^2-S_i) \qquad i=1, 2, \cdots, n \tag{35}$$

① 有关替代弹性测度公式的近期发展，可见 Mundra 和 Russell (2004)、Blackorby 等 (2007)、Stern (2011)。

利用要素需求价格弹性或 AES，可根据式（29）和式（31）计算 MES 和 SES。

可见，要计算各类替代弹性，核心是获取 β_{ij} 估计值。对式（5），直接估计往往面临极其严重的共线性问题。因此常利用谢泼德引理，转向估计成本份额函数：

$$S_i \equiv \frac{P_i X_i}{C} = \frac{\partial \ln C}{\partial \ln P_i} = \beta_i + \sum_j \beta_{ij} \ln P_j + \sum_j \gamma_{ij} \ln X_j \tag{36}$$

在式（6）和式（7）之下，相应结果分别为：

$$S_i = \beta_i + \sum_j \beta_{ij} \ln P_j + \gamma_{iY} \ln Y \tag{37}$$

$$S_i = \beta_i + \sum_j \beta_{ij} \ln P_j \tag{38}$$

对任意要素 $i=1, 2, \cdots, n$，只要拥有成本份额、要素价格、要素数量（或产出）数据，利用式（36）～式（38）均可进行参数估计。由于待估参数大幅减少，共线性问题明显削弱。

对式（4）给出超越对数价格函数，直接估计 β_{ij} 同样遭遇严重的共线性问题，也应转向成本份额函数。在竞争市场条件下，利润最大化条件保证 $C=P_Y Y$。因此：

$$S_i \equiv \frac{P_i X_i}{C} = \frac{P_i X_i}{P_Y Y} = \frac{P_i}{P_Y Y} \frac{\partial (P_Y Y)}{\partial P_i} = \frac{P_i}{P_Y} \frac{\partial P_Y}{\partial P_i} = \frac{\partial \ln P_Y}{\partial \ln P_i} = \beta_i + \sum_j \beta_{ij} \ln P_j \tag{39}$$

经验研究中，利用统计数据估计成本份额方程时，无法区分其究竟基于来自成本函数之式（38）还是基于来自价格函数之式（39）。二者具有完全相同的统计形式，估计结果等价。

根据最小成本函数的性质，超越对数成本函数有关参数满足：第一，$\beta_{ij}=\beta_{ji}$，该对称性由 Young 定理保证；第二，$\sum_i \beta_i = 1$，其由最小成本对要素价格的一次齐次性保证；第三，$\sum_i \beta_{ij} = \sum_j \beta_{ij} = 0$，其由要素需求对要素价格的零次齐次性保证。在此约束下，实际仅可估计（$n-1$）个独立的成本份额方程。实际操作中，对重要性最低的投入，其成本份额方程不予估计，而是根据约束条件由其他参数估计值推算。当然，对各类投入重要性的判断取决于具体情境及研究者偏好，具有一定主观性。

在竞争市场条件下，决策主体可将要素价格视为外生变量。因此，在微观（企业）或中观（行业）层面，以要素价格为自变量的超越对数成本函数（及价格函数）能有效避免内生解释变量问题，故其优于超越对数生产函数。在宏观（国民经济）层面，由于要素价格和要素数量均可视为内生变量，3 种超越对数函数的相对优劣难以预判。

四、要素替代弹性估计方法比较：以中国农业数据为例

1. 数据说明

估计超越对数生产函数与成本函数，需要分别使用产出和投入的数量与价格数据。为保证两类方法之下估计结果的可比性，各类数据应来自同一数据源。经审慎考虑，选用 ICPA 项目提供的我国农业数据[①]为例说明。对总产出（O）、资本（K）、劳动（L）、能源（E）、非能源中间投入（M），该数据集可提供数量指数（见图 1）和价格指数（见图 2），均以

① ICPA（International Comparison of the Productivity among Asian Countries Project）提供美国、日本、中国、韩国、中国台湾有关生产率测度的系统性数据，其已广泛用于我国生产率及技术偏向研究（Jorgenson 等，2007；Cao 等，2009；卯光宇，2012）。该数据集涵盖 33 个细分行业，但系统性行业比较并非本文主旨，仅以农业为例进行说明。

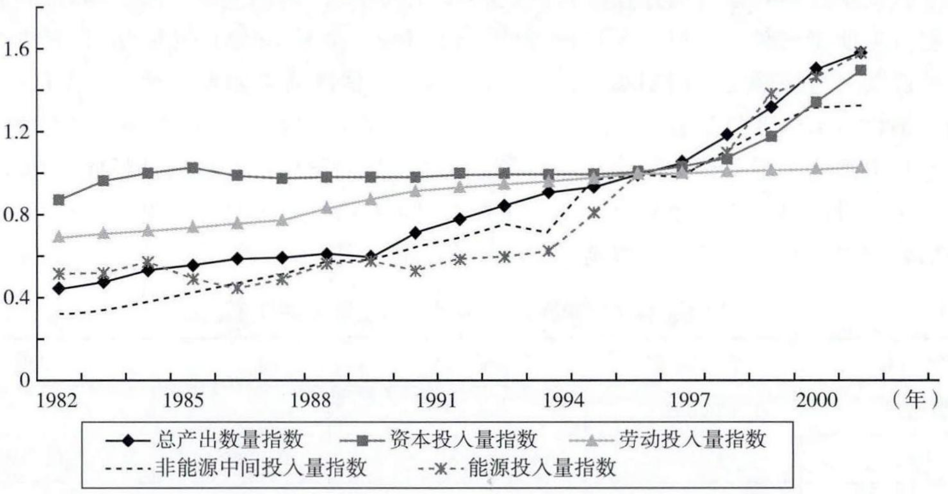

图 1 1982～2000 年中国农业产出与投入数量变化趋势

资料来源：ICPA 数据集，http：//www.rieti.go.jp/cn/database/d03.html#。

1995 年为 1，时期跨度为 1982～2000 年。此外，其还提供现价成本数据（单位：百万元），可据以计算各类投入的成本份额。

之所以选择农业，原因有二：一则农业是多要素生产函数的传统应用领域，已积累起大量文献，可为本研究提供良好的对比参照；二则农业单独构成第一产业，比其他细分行业（如造纸业）代表面大，适合用作示例分析。

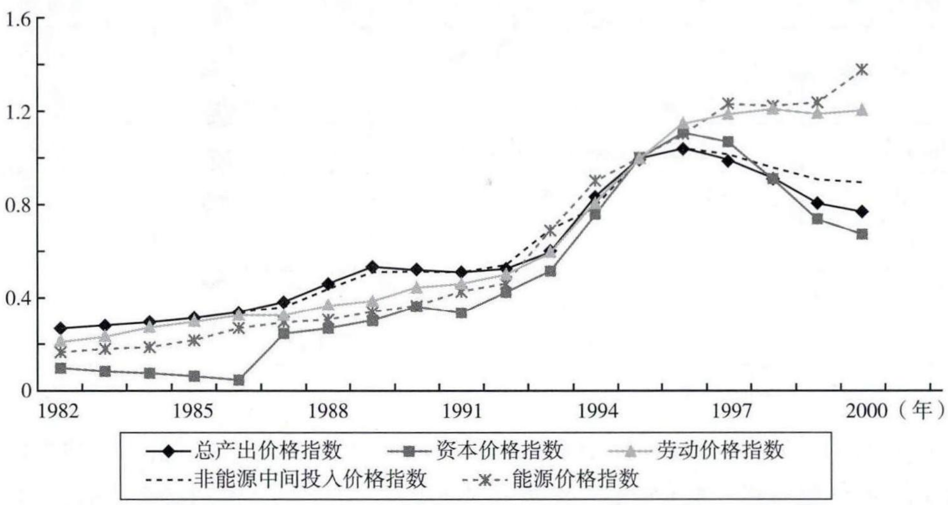

图 2 1982～2000 年中国农业产出与投入价格变化趋势

资料来源：ICPA 数据集，http：//www.rieti.go.jp/cn/database/d03.html#。

2. 基于超越对数生产函数之替代弹性估计

利用我国农业产出及各类投入的数量指数估计式（3），得到其全部参数。根据 $\eta_i = \alpha_i + \sum_k \alpha_{ik} \ln X_k$ 计算各种产出弹性，并按式（20）计算各种替代弹性。为评估公式误用对替代弹性估计的影响，另以式（21）和式（23）进行计算。

由于自变量过多，该方法存在极其严重的共线性问题。国内文献一般采用岭回归方法处理该问题。为便于比较，这里也采用该做法。以 Hoerl 和 Kennard（1975）的方法为基础，并参照岭迹图，最终确定岭回归系数 $\lambda=0.38$，岭回归估计结果如表 1 所示。即使采用岭回归方法，估计效果（变量显著性 t 检验）仍然很差。考虑到数据仅有 19 年，待估参数为 15 个，过低自由度之下得到这种结果不足为奇。基于超越对数生产函数估计替代弹性效果欠佳的理论推论，可以得到有关经验支持。好在表 1 中系数符号基本符合理论预期，且此处主要以其评估公式误用对替代弹性的影响，下面暂且据其计算。

表 1　　超越对数生产函数式（3）岭回归结果（$\lambda=0.38$）

变量	回归系数	标准差	t 值	P 值
常数项	0.061	—	—	
lnK	0.173	0.538	0.322	0.763
lnL	0.084	1.149	0.073	0.945
lnM	0.334	0.302	1.106	0.331
lnE	0.318	0.245	1.297	0.264
lnKK	0.050	2.682	0.019	0.986
lnKL	−0.001	10.149	0.000	1.000
lnKM	0.024	3.146	0.008	0.994
lnKE	0.049	3.091	0.016	0.988
lnLL	−0.012	10.233	−0.001	0.999
lnLM	−0.043	9.185	−0.005	0.996
lnLE	−0.028	2.845	−0.010	0.993
lnMM	−0.126	2.190	−0.057	0.957
lnME	−0.052	1.877	−0.028	0.979
lnEE	0.023	0.790	0.029	0.978

调整后的 R^2	0.997	DW 统计量	3.13
F 统计量	461	F 检验 P 值	0.00

注：结果由 EViews 给出，岭回归估计通过编程实现。

基于式（20）的替代弹性估计结果如图 3 所示。图 3 显示，各要素之间均为替代关系（σ 均大于 0）；但绝对水平差异明显，资本与其他投入之间替代弹性较大，其他三类投入之间替代弹性接近 1；考察期内，各类替代弹性均呈下降趋势，资本与其他要素间替代弹性显著下降，L、M、E 之间替代弹性仅在 20 世纪 90 年代中后期轻微下降。

基于表 1 的结果，也可根据错误公式（21）及略改公式（23）计算替代弹性。表 2 将其与正确公式（20）结果对比，以误差平方和反映绝对背离程度，以相差倍率反映式（21）和式（23）的相对优劣。结果显示：对所有 6 种替代弹性，式（21）和式（23）对式（20）均有不同程度的背离，且背离方向与程度在不同年份及不同要素之间差别明显；出人意料的是，略改公式效果完败于错误公式！

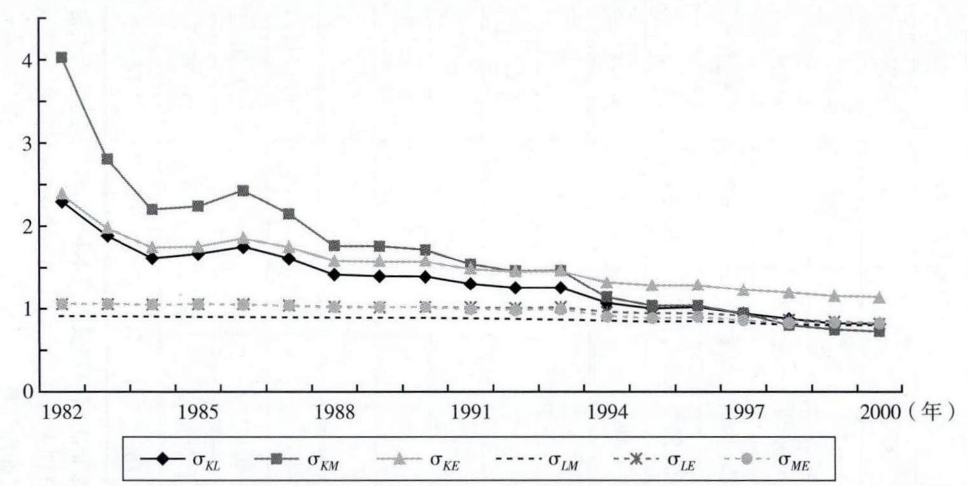

图 3　中国农业超越对数生产函数替代弹性估计

注：σ_{KL}代表资本与劳动的替代弹性，σ_{KM}代表资本与非能源投入的替代弹性，σ_{KE}代表资本与能源的替代弹性，σ_{LM}代表劳动与非能源投入的替代弹性，σ_{LE}代表劳动与能源的替代弹性，σ_{ME}代表非能源投入与能源的替代弹性。

表 2　替代弹性错误公式对结果的影响

误差平方和	σ_{KL}	σ_{KM}	σ_{KE}	σ_{LM}	σ_{LE}	σ_{ME}
错误公式（21）	7.5	58.4	3.9	0.2	0.5	24.1
略改公式（23）	141.9	681.9	4.3	0.8	0.7	369.2
相差倍率	18.8	11.7	1.1	4.9	1.4	15.3

注：对正确公式（20）的背离以误差平方和反映，取值越小越好。相差倍率＝略改公式误差平方和/错误公式误差平方和，取值小于 1 表示错误公式更差，取值大于 1 表示略改公式更差。

进一步数据模拟显示，式（21）与式（23）之间的优劣关系并不稳定，其对模型参数估计值（以及 λ 值）高度敏感。主要发现为：第一，替代弹性取值受岭回归系数 λ 影响较大，利用超越对数生产函数估计替代弹性，结果缺乏稳健性；第二，利用错误公式或略改公式计算替代弹性，其结果高度依赖模型参数估计值，二者对正确公式的背离方向及程度无法（统一）先验确定，其可信性只能（逐一）事后评估；第三，错误公式和略改公式的相对优劣并不确定，甚至很多情形下略改公式的效果更差。

由于普遍存在替代弹性公式误用，国内文献基于超越对数生产函数估计的替代弹性不足为信。幸而，此类研究重点关注技术偏向，由于计算过程绕开替代弹性（仅依赖模型参数），故有关结论的有效性并未受损。

3. 基于超越对数成本函数之替代弹性估计

在超越对数成本函数或价格函数中，只要获取 β_{ij} 估计值，即可计算 AES、MES 与 SES。本文数据跨度为 19 年，式（5）和式（6）待估参数分别为 45 个和 20 个，无法估计；式（7）和式（4）的待估参数分别降为 16 个和 15 个，虽可估计，但自由度过低仍导致严重的估计问题。在该方法之下参数估计量虽内在满足对称性约束，但各类齐次性条件很难成立。

鉴于以上困难，改由成本份额函数估计。式（36）为基于超越对数成本函数的基本模型，式（37）和式（38）为其简化形式；式（39）虽由超越对数价格函数导出，但其统计

表 3　　成本份额方程估计结果汇总比较

模　型	式(36)				式(37)				式(38)和式(39)			
变　量	SK	SL	SM	SE	SK	SL	SM	SE	SK	SL	SM	SE
常数项	0.058***	0.542***	0.385***	0.014***	0.058***	0.550***	0.379***	0.013***	0.058***	0.548***	0.381***	0.013***
lnR	**0.031*** **	−0.020***	−0.011***	0.000#	**0.029*** **	−0.038***	0.008#	0.001#	**0.028*** **	−0.042***	0.012#	0.001#
lnW	−0.020**	**0.234*** **	−0.204***	−0.010***	−0.012*	**0.110#**	−0.109#	0.011#	−0.019**	**0.076#**	−0.072#	0.014**
lnU	0.007#	−0.214***	**0.210*** **	−0.003#	−0.032*	−0.057#	**0.113#**	−0.024*	−0.021*	−0.003#	**0.053#**	−0.029**
lnV	−0.001#	−0.008**	−0.003#	**0.012*** **	0.009#	−0.039#	0.022#	**0.008#**	0.003#	−0.068#	0.054#	**0.011#**
lnQ	—	—	—	—	−0.011#	−0.055#	0.061#	0.005#	—	—	—	—
lnK	0.041***	−0.027***	−0.023***	0.009***	—	—	—	—	—	—	—	—
lnL	−0.084***	0.268***	−0.175***	−0.008*	—	—	—	—	—	—	—	—
lnM	0.006#	−0.215***	0.211***	−0.002#	—	—	—	—	—	—	—	—
lnE	−0.020***	0.001#	0.007***	0.012***	—	—	—	—	—	—	—	—
调整后的 R^2	0.992	0.999	0.999	0.994	0.973	0.941	0.886	0.758	0.972	0.939	0.879	0.771
AIC 值	−10.22	−11.19	−11.06	−12.49	−9.07	−5.71	−5.68	−8.89	−9.05	−5.69	−5.65	−8.97
DW 统计量	2.66	2.89	2.01	2.07	1.47	1.33	1.62	0.90	1.25	1.19	1.36	0.97
F 统计量	278	9763	4497	359	131	59	29	12	155	70	34	16

注：每类公式之下，可分别估计各种投入要素的成本份额方程。SK 为资本成本份额，SL 为劳动成本份额，SM 为非能源中间投入成本份额，SE 为能源成本份额。鉴于多数模型存在自相关，故估计时均以 Newey-West HAC Standard Errors & Covariance 方法修正。***、**、* 分别表示在 1%、5%、10%的水平下显著，# 表示统计不显著。上部区域为 β 估计结果（以粗体标注 β_{ii}），直接用于替代弹性计算；中部区域为 γ 估计值，其不影响替代弹性计算。

形式与式（38）完全相同。对任意要素 $i=1, 2, \cdots, n$，只要拥有成本份额、要素价格、要素数量（或产出）数据，即可利用式（36）、式（38）、式（39）进行参数估计。三者的待估参数分别降为 9 个、6 个和 5 个，共线性问题大为削弱。

表 3 给出式（36）～式（39）的估计结果，对其根据经济意义检验与统计检验进行比较取舍。经济意义检验：所有模型中，$\beta_i>0$，保证 $C(Y; P)$ 对要素价格非递减；三类模型均满足参数齐次性约束 $\sum_i\beta_i=1$ 与 $\sum_i\beta_{ij}=0$；但从对称性 $\beta_{ij}=\beta_{ji}$ 看，式（36）明显优于另外两个模型，其对 $\sum_j\beta_{ij}=0$ 的满足程度最高；式（36）之下，β_{ii} 均统计显著且满足 $(\beta_{ii}-S_i+S_i^2)<0$，保证 $C(Y; P)$ 是要素价格的凹函数，即要 $C_{ii}=(\beta_{ii}-S_i+S_i^2)(C/P_i^2)<0$。统计检验为：三类模型中，常数项 β_i 估计值极其接近，且统计上均非常显著，表现出极强的稳健性；β_{ij} 估计量随模型变化较大，综合比较拟合优度（调整后的 R^2，AIC 值，F 统计量）与变量显著性，式（36）效果最好。故最终根据式（36）估计结果计算替代弹性。

为计算替代弹性，需要内在施加对称性约束 $\beta_{ij}=\beta_{ji}$。在各类齐次性约束条件下，n 个成本份额方程中仅有 $n-1$ 个独立方程。如果对称性约束成立，则排除任意一个方程均不影响替代弹性计算结果。但式（36）近似满足对称性，故不同的方程排除方式对替代弹性计算结果具有影响。稳妥起见，本文对所有排除方式及“未加排除方式”之下的结果进行比较，以检验替代弹性估计值的稳健性。“未加排除方式”指利用全部成本份额方程信息，计算替代弹性时 β_{ij} 取 $(\hat{\beta}_{ij}+\hat{\beta}_{ji})/2$；排除第 m 个成本份额方程后，与 m 有关的参数取 $\hat{\beta}_{im}$（$\hat{\beta}_{mj}$ 已被排除），其他参数仍取 $(\hat{\beta}_{ij}+\hat{\beta}_{ji})/2$（对任意 $i, j\neq m$）。鉴于未加排除方式能更充分地利用模型信息，其结果（见图 4～图 6）更为可靠。

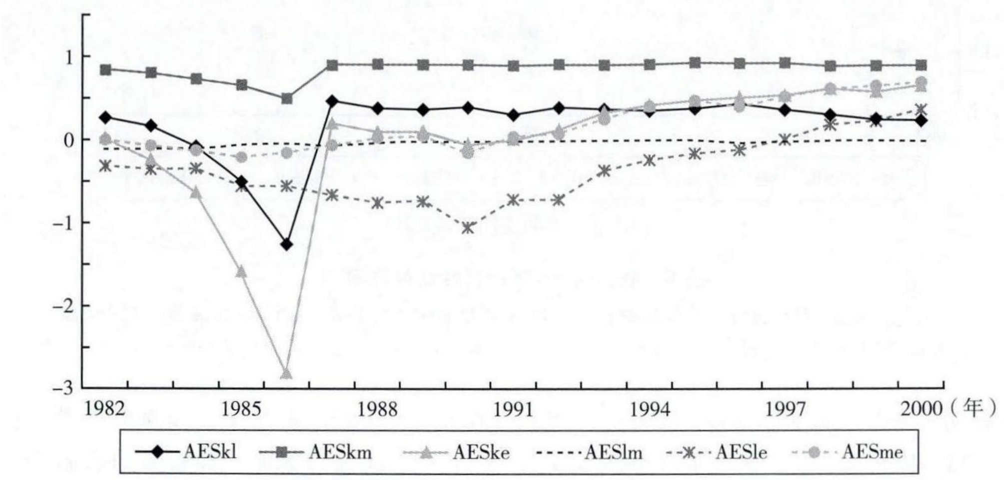

图 4 Allen 替代弹性估计结果

注：Allen 替代弹性具有对称性。AESkl 代表资本与劳动之间的 Allen 替代弹性；其余符号可类似解释，不再赘述。

图 4～图 6 显示，各类定义之下替代弹性计算结果不尽相同，但具有相似的大小关系与变化趋势。一方面，AES 公式下替代弹性变动幅度较大，MES 和 SES 公式下变动幅度较小；另一方面，AES 公式下各组替代弹性之间差异较大，MES 和 SES 公式下若干组替代弹性明显趋同。对此趋同现象，可由投入可分性理论解释。Berndt 和 Christensen（1973）证明，如果 $\sigma_{im}=\sigma_{jm}$，则要素 i 与要素 j 可加总为一种复合要素，要素 m 与要素组合 (i, j)

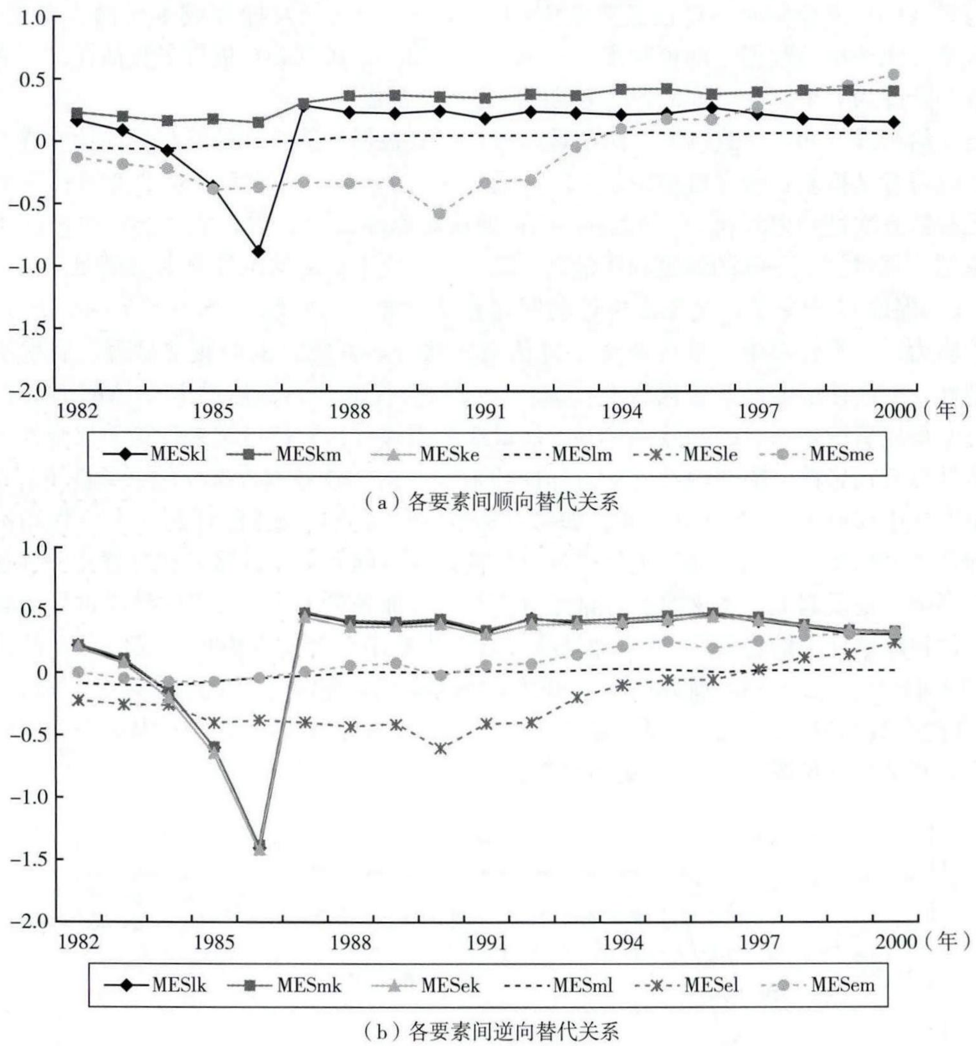

图 5　Morishima 替代弹性估计结果

注：Morishima 替代弹性具有非对称性，故由顺向和逆向并列展示；MESkl 代表资本对劳动的 Morishima 替代弹性，MESlk 代表劳动对资本的 Morishima 替代弹性，其余符号可类似解释。

之间具有弱可分性。据此判断：AES 公式之下（见图 4），各要素之间不存在可分性，记为（K，L，M，E）；MES 公式之下（见图 5），子图 A 显示能源与其他 3 种要素组合具有弱可分性，记为［（K，L，M），E］，子图 B 显示资本与其他 3 种要素组合具有弱可分性，记为［（L，M，E），K］；SES 公式之下（见图 6），存在两层可分性，分别为［（L，M），K］和［（K，L，M），E］，最终整合为｛［（L，M），K］，E｝。经验表明，我国农业生产中，各种投入之间有明显的层级关系：劳动 L 和非能源中间投入 M 是最基本的投入，资本投入 K 与二者具有稳定的替代关系；随着农业技术进步和机械化程度提高，能源 E 与其他投入由互补关系转变为替代关系，且替代能力持续提高。显然，SES 公式能有效捕捉我国农业生产要素之间的层级关系与可分性特征。

与 AES 和 MES 相比，SES 更接近 Hicks 对替代弹性的原始定义，具有理论优势。对所有情形下替代弹性计算结果的系统比较显示，SES 计算结果几乎免受模型选择与方程排除

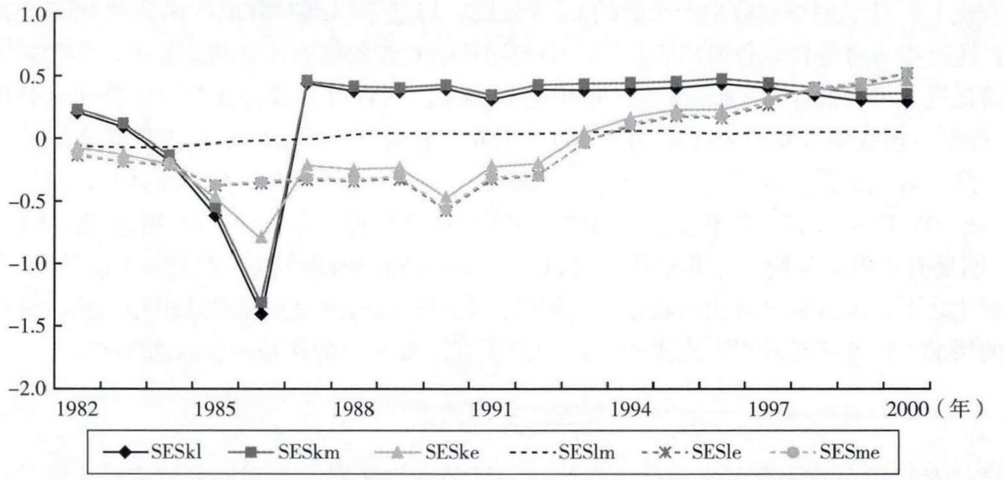

图 6 影子替代弹性估计结果

注：影子替代弹性具有对称性；SESkl 代表资本与劳动之间的影子替代弹性，其余符号可类似解释。

方式变化的影响，其稳健性明显高于 AES 及 MES。同时，其对投入要素之间层级关系和可分性特征的刻画，也得到我国现实的有力支撑。综上可见，基于超越对数成本函数的 SES 公式可作为替代弹性计算之首选。

4. 小结

基于超越对数函数估计要素替代弹性有两个关键问题：一是函数形式选择，二是替代弹性定义取舍。对各种可行的方法组合，可由数据易得性、估计可靠性、定义合意性三方面比较优劣（见表 4）。

表 4 超越对数函数替代弹性估计方法优劣比较

方法分类		性质比较		
函数选择	替代弹性定义	数据易得性	估计可靠性	定义合意性
超越对数生产函数	DES	强	弱	强
超越对数成本函数（含价格函数）	AES	弱	强	弱
	MES			较强
	SES			强

基于超越对数生产函数估计要素替代弹性，核心是确定模型参数并计算产出弹性时变估计值。尽管生产函数所需数据更易获取，但由于解释变量过多，估计过程往往遭遇严重的共线性问题。采用岭回归方法仍无力根本解决这一问题，且参数估计结果对 λ 值高度敏感。在其参数估计结果基础上，即使运用正确公式计算 DES，其可靠性也很难保证。加之国内研究替代弹性公式误用十分普遍，相应结果更难采信。

基于超越对数成本函数估计替代弹性，由于可采用成本份额方程，共线性问题得到很好地解决。据其参数估计结果，可分别采用 AES、MES 和 SES 公式计算各种要素之间的替代弹性。SES 较 AES 及 MES 更具理论优势，其计算结果稳健性强，且对投入要素之间层级关系的刻画更符合实际，故 SES 公式是以超越对数成本函数计算替代弹性的首选。但使用该方法的最大限制在于，产出价格和要素价格数据较难获取，且该问题将伴随要素分类细化而急剧恶化。

理论上，基于超越对数生产函数的 DES 公式，与基于超越对数成本函数的 SES 公式联系紧密，满足投入可分性条件时二者相等。但利用我国农业数据的计算结果显示，尽管若干要素之间满足投入可分性，但 DES 与 SES 结果差异很大。二者对要素替代关系的性质（替代或互补）、程度（强或弱）及趋势（升或降）判断迥异：前者（见图 3）显示各要素之间替代弹性持续下降，替代关系由强（$\sigma>1$）变弱（$0<\sigma<1$）；后者（见图 6）表明各要素之间均由互补关系（$\sigma<0$）转向（弱）替代关系（$0<\sigma<1$），但变化模式不尽相同。特别地，DES 大于 SES，明显有违理论预期。究其根源，超越对数生产函数糟糕的估计效果使 DES 结果严重失真。相比之下，SES 结果对我国农业要素替代关系的刻画与理论及经验认识相一致。故在数据可得的情况下，基于超越对数成本函数以 SES 公式计算替代弹性是理想的选择。

五、主要结论

通过对超越对数函数要素替代弹性估计问题的专门研究，得到如下结论与认识。

第一，多要素情形下，基于超越对数生产函数估计替代弹性，往往存在较大困难。一般问题是随着要素种类增多，待估参数急剧膨胀；给定样本容量约束下，其往往导致严重的共线性问题，甚至使模型无法估计。尽管岭回归方法有助于减弱共线性程度，但其以引入估计偏差为代价，且岭回归系数 λ 取值对估计结果影响很大。据此计算替代弹性，其可靠性很难保证。特殊问题是撇开共线性问题，国内文献中普遍存在替代弹性公式误用，对结果可信性造成严重损害。

第二，相比之下，基于超越对数成本函数计算替代弹性，效果更好。估计优势为利用对偶理论和谢泼德引理，构建形式简化的成本份额模型，由于待估参数明显减少，可有效克服共线性问题。计算优势为基于最小成本函数，已有研究提出多种替代弹性定义；AES 原始定义基于生产函数，但在最小成本函数下更易计算；以 AES 为基础，MES 和 SES 也易得到。分析优势为该方法可同时给出 AES、MES、SES 的结果，有助于全面审视要素替代关系，且便于结果比较与稳健性检验；此外，据其计算的要素需求价格弹性也有分析价值。

第三，对各类方法的选择，还应考虑研究问题的具体背景和数据情况。超越对数生产函数估计，只需产出与投入数量数据，其较易获取；超越对数成本函数（及价格函数）估计，还需使用要素成本份额、要素价格数据，获取难度较大。当数据可得时，超越对数成本函数方法堪称首选，此时 SES 凭借其理论优势与结果稳健性，较 AES 及 MES 更胜一筹。当然，只要能较好地克服共线性问题，基于超越对数生产函数估计 DES 也是可行的选择。

参考文献

[1] Anderson R. K., Moroney J. R., 1993, *Morishima Elasticities of Substitution with Nested Production Functions* [J], Economics Letters, 42 (2−3), 159～166.

[2] Berndt E., Wood D., 1975, *Technology, Prices, and the Derived Demand for Energy* [J], Review of Economics and Statistics, 57 (3), 259～268.

[3] Binswanger H. P., 1974, *A Cost Function Approach to the Measurement of Elasticities of Factor Demand and Elasticities of Substitution* [J], American Journal of Agricultural Economics, 56 (1), 377～386.

[4] Blackorby C., Russell R., 1981, *The Morishima Elasticity of Substitution, Symmetry, Constancy, Separability, and Its Relationship to the Hicks and Allen Elasticities* [J], Review of Economic Studies, 48 (1), 147～158.

[5] Blackorby C., Russell R., 1989, *Will the Real Elasticity of Substitution Please Stand Up? (A Comparison of the Allen/Uzawa and Morishima Elasticities)* [J], American Economic Review, 79 (4), 882~888.

[6] Boisvert R. N., 1982, *The Translog Production Function: Its Properties, Its Several Interpretations and Estimation Problems* [R], Cornell University, Working Paper, No. A. E. Res. 82-28.

[7] Cao J., Ho M., Jorgenson D., Ren R., Sun L., Yue X., 2009, *Industrial and Aggregate Measures of Productivity Growth in China* [J], Review of Income and Wealth, 55 (s1), 485~513.

[8] Frenger P., 1985, *A Directional Shadow Elasticity of Substitution* [R], Norway, Central Bureau of Statistics, Discussion Paper, No. 7.

[9] Christiansen L. R., Jorgensen D. W, Lau L. J., 1971, *Conjugate Duality and the Transcendental Logarithmic Production Function* [J], Econometrica, 39 (4), 255~256.

[10] Griliches Z., Ringstad V., 1971, *Economies of Scale and the Form of the Production Function* [M], Amsterdam, North-Holland Publishing Co.

[11] Jorgenson D., Kuroda M., Motohashi K., 2007, *Productivity in Asia: Economic Growth and Competitiveness* [M], Edward Elgar Publishing.

[12] Khanna N., 2001, *Analyzing the Economic Cost of the Kyoto Protocol* [J], Ecological Economics, 38 (1), 59~69.

[13] Sato R., Koizumi T., 1973, *On the Elasticity of Substitution and Complementarity* [J], Oxford Economic Papers, 25 (1), 44~56.

[14] Shumway C. R., 1995, *Recent Duality Contributions in Production Economics* [J], Journal of Agricultural and Resource Economics, 20 (1), 178~194.

[15] Stern I., 2011, *Elasticities of Substitution and Complementarity* [J], Journal of Productivity Analysis, 36 (1), 79~89.

[16] Uzawa H., 1962, *Production Functions with Constant Elasticities of Substitution* [J], Review of Economic Studies 30 (1), 291~299.

[17] 樊茂清、任若恩、陈高才：《技术变化、要素替代和贸易对能源强度影响的实证研究》[J]，《经济学（季刊）》2009年第1期。

[18] 郝枫、盛卫燕：《中国要素替代弹性估计》[J]，《统计研究》2014年第7期。

[19] 黄磊、周勇：《基于超越对数生产函数的能源产出及替代弹性分析》[J]，《河海大学学报（自然科学版）》2008年第1期。

[20] 李志俊：《中国农业要素的替代弹性》[J]，《财经论丛》2014年第7期。

[21] 卯光宇：《技术演化：关于中国技术进步偏差的研究》[J]，《南开经济研究》2012年第5期。

[22] 史红亮、陈凯、闫波：《我国钢铁行业能源—资本—劳动的替代弹性分析——基于超越对数生产函数》[J]，《工业技术经济》2010年第11期。

[23] 王灿雄、谢志忠：《论超越对数生产函数要素替代弹性的逻辑错误》[J]，《统计与信息论坛》2013年第10期。

[24] 王明益：《山东省能源要素产出弹性、替代弹性的实证研究——基于超越对数生产函数的岭回归估计》[J]，《技术经济》2012年第4期。

[25] 杨福霞、杨冕、聂华林：《能源与非能源生产要素替代弹性研究——基于超越对数生产函数的实证分析》[J]，《资源科学》2011年第3期。

[26] 张月玲、叶阿忠：《中国区域技术选择与要素结构匹配差异：1996~2010》[J]，《财经研究》2013年第12期。

[27] 张月玲、叶阿忠：《中国的技术进步方向与技术选择》[J]，《产业经济研究》2014年第1期。

[28] 郑照宁、刘顺德：《考虑资本能源劳动投入的中国超越对数生产函数》[J]，《系统工程理论与实践》2004年第5期。

（下转第122页）

Logistic Regression Model Application to Population Census Quality Assessment

Hu Guihua[1] Wu Jie[2]
(1. ChongqingTechnology and Business University;
2. National Bureau of Statistics of China)

Abstract: Dual system estimator is now a main method that estimates true number of persons of the target population and census net error. Constructing dual system estimator demands persons of population to own the same registration probability. The current practice of countries is stratifying population after sampling In order to realize this aim. Logistic regression model can be used instead of stratifying after sampling, which is an international frontier issue in the field of the census quality assessment. Dual system estimator and its variance estimator is roundly and systematically interpretated by this thesis. The results of the study show that logistic regression model can include more post stratification variables, and has good application prospect.

Key Words: Census Net Error; Quality Assessment Sample Survey; Logistic Model; Dual System Estimator

JEL Classification: J11

(责任编辑：彭 战)

(上接第 105 页)

Formula Correction and Estimation Methods Comparison on Elasticity of Substitution within Translog Functions

Hao Feng
(Department of Statistics, Tianjin University of Finance and Economics)

Abstract: This paper focuses on the estimation methods of elasticity of substitution within Translog functions. The formula of substitution elasticity in Translog production function is corrected, then various definitions of substitution elasticity under Translog cost function are detailed compared. We identifies the relative merits of various methods by considering the data availability, estimation reliability and definition desirability. Main findings are: trapped in serious multicollinearity problems, calculating elasticity of substitution within Translog production function is not satisfactory; there are advantages of calculating elasticity of substitution with Translog cost function, meanwhile shadow elasticity of substitution is an ideal choice owing to its remarkable theoretical properties and robustness.

Key Words: Translog Function; Dual Cost; Elasticity of Substitution; Sparability

JEL Classification: O47; E23

(责任编辑：陈星星)