第36卷 第11期
2004年11月

哈尔滨工业大学学报
JOURNAL OF HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Vol. 36 No. 11
Nov., 2004

Cobb－Douglas生产函数经典参数估计模型的修正

王玉杰，张大克

（天津科技大学 理学院，天津 300222）

摘 要：根据LS估计理论，对Cobb－Douglas生产函数经典参数估计模型存在的问题进行了分析．通过变量变换对该模型中随机误差的方差进行了修正，建立了一个新的参数估计模型．新模型满足Gauss－Markov假定，具有LS估计的优良性质．实例分析表明，新模型的参数估计精确度明显高于经典模型．

关键词：Cobb－Douglas生产函数，经典参数估计模型，估计精度，模型的修正

中图分类号：O212．1　　文献标识码：A　　文章编号：0367－6234(2004)11－1575－03

Correction of classical parameter estimation model for the Cobb－Douglas production function

WANG Yu-jie，ZHANG Da-ke

（College of Science，Tianjin University of Science and Technology，Tianjin 300222，China）

Abstract：According to the theory of Least－Square estimation，the problems existing in classical parameter estimation model for the Cobb－Douglas production function are analyzed．Variations of random errors in the model are corrected by the transformation of variable．A new model of parameter estimation is established which satisfies the Gauss－Markov hypothesis and possesses good qualities of Least－Square estimation．The example analysis indicates that the precision of parameter estimation of the new model is higher than the one of classical parameter estimation model．

Key words：Cobb－Douglas production function；classical parameter estimation model；precision of estimation；correction of the model

1 经典参数估计模型存在的问题

Cobb－Douglas生产函数是研究投入与产出间关系的著名函数，有着广泛的应用．Cobb－Douglas生产函数的一般形式为

$$y = ax_1^{b_1} x_2^{b_2} \cdots x_m^{b_m}. \tag{1}$$

式中：y 为产出的数量；x_i 为生产要素投入的数量；a，b_i 为待估参数，$i=1, 2, \cdots, m$．参数估计模型为

$$y_j = ax_{1j}^{b_1} x_{2j}^{b_2} \cdots x_{mj}^{b_m} + e_j \quad j = 1, 2, \cdots, n. \tag{2}$$

式中：$y_j \sim N(ax_{1j}^{b_1} x_{2j}^{b_2} \cdots x_{mj}^{b_m}, \sigma^2)$；$cov(y_s, y_t) = \begin{cases} \sigma^2 & s = t \\ 0 & s \neq t \end{cases}$，$e_j$ 为随机误差，$e_j \sim N(0, \sigma^2)$，$cov(e_s, e_t) = \begin{cases} \sigma^2 & s = t \\ 0 & s \neq t \end{cases}$，$s, t = 1, 2, \cdots, n$；$j = 1, 2, \cdots, n$．

因模型(2)非线性，所以其参数的估计需采用非线性LS估计[1,2]．但这种参数估计方法复杂，运算量大．根据Cobb－Douglas生产函数的特点，在对其参数进行估计时，一般采用将模型(1)线性化，然后运用线性LS估计对其参数进行估计．对模型(1)两端取常用对数，将其线性化为

$$Y = b_0 + \sum_{i=1}^{m} b_i X_i. \tag{3}$$

式中：$Y = \lg y$；$b_0 = \lg a$；$X_i = \lg x_i$，$i = 1, 2, \cdots, m$．模型(3)的参数估计模型为

$$Y_j = b_0 + \sum_{i=1}^{m} b_i X_{ij} + \varepsilon_j, \quad j = 1, 2, \cdots, n. \tag{4}$$

式中：$Y_j = \lg y_j$；$X_{ij} = \lg x_{ij}$；ε_j 为随机误差，

收稿日期：2003－12－10．
作者简介：王玉杰(1962－)，女，硕士，副教授．

$E(\varepsilon_j)=0$. 对模型(4)运用线性 LS 估计[3]，可获得参数 b_i 的 LS 估计 $\hat{b}_i$. 这是目前对 Cobb－Douglas 生产函数的参数进行估计的经典方法, 但这种方法存在着问题.

在运用线性 LS 估计对模型(4)中参数进行估计时, 模型(4)中随机误差 $\varepsilon_j(j=1,2,\cdots,n)$ 必须满足 Gauss－Markov 假定[7]，其 LS 估计才具有良好的统计性质.

Gauss—Markov 假定的意义是: 随机误差 ε_1, ε_2, …, ε_n 互不相关, 且有等方差(方差齐性). 若模型(4)中的随机误差不具有方差齐性, 这时虽然其 LS 估计仍然是无偏的, 但一般不具有方差一致最小性, 这意味着参数估计的精确度降低了[4].

在模型(4)中, $Y_j=\lg y_j$, $\mathrm{d}Y_j/\mathrm{d}y_j=1/(y_j\ln 10)$, Y_j 随 y_j 变化的变化率与随机变量 y_j 的取值大小有关. 因此, 虽然 y_j 具有方差齐性, 但是 Y_j 却不具有方差齐性. 又因为模型(4) 中 Y_j 与 ε_j 方差相同, 所以, 随机误差 ε_j 不具有方差齐性. 这意味着模型(4) 中参数 $b_i(i=0,1,\cdots,m)$ 的 LS 估计 $\hat{b}_i(i=0,1,\cdots,m)$ 只是一个线性无偏估计, 并不是方差一致最小估计, 其参数估计的精确度降低了. 这是 Cobb－Douglas 生产函数经典参数估计模型存在的第一个问题.

另外, 由于变量变换 ($Y_j=\lg y_j$) 的原因, 模型(4) 中的 Y_j 已不服从正态分布, 因此, 其随机误差 ε_j 也不服从正态分布. 这就使得建立在随机误差 $\varepsilon_j\sim N(0,\sigma^2)$ 基础上的 LS 估计的回归方程拟合效果显著性检验统计量和所构造的回归系数置信区间均不成立[4], 因此模型(4)中 LS 估计的显著性检验也存在问题. 这是 Cobb－Douglas 生产函数经典参数估计模型存在的第二个问题.

2 经典参数估计模型的修正

对经典参数估计模型进行修正是通过变量变换对模型(4)中随机误差的方差进行修正, 使 ε_j 的方差能够近似地相等, 处于比较稳定的状态, 并且使其近似地服从所需要的分布 $N(0,\sigma^2)$[5~8].

定理 1 当模型(2)中随机误差 e_j 的绝对值足够小时, 令 $T_j=y_j\ln 10$, 则 $T_j\varepsilon_j\approx e_j$, $T_j\varepsilon_j$ 近似地满足 Gauss－Markov 假定, $T_j\varepsilon_j$ 近似地服从 $N(0,\sigma^2)$, $j=1,2,\cdots,n$.

证明 记 $y_j^*=ax_{1j}^{b_1}x_{2j}^{b_2}\cdots x_{mj}^{b_m}$, $Y_j^*=b_0+\sum\limits_{i=1}^{m}b_iX_{ij}$, $j=1,2,\cdots,n$. 则 $e_j=y_j-y_j^*$, $\varepsilon_j=Y_j-Y_j^*$, $j=1,2,\cdots,n$.

因为 $\varepsilon_j=Y_j-Y_j^*=\lg y_j-\lg y_j^*=\lg y_j/y_j^*$, 所以当 e_j 的绝对值无限减小时, ε_j 的绝对值也随之无限减小. 又因为 $\mathrm{d}Y_j/\mathrm{d}y_j=1/(y_j\ln 10)$ 存在, 所以, 当 e_j 的绝对值足够小时, 差分[9]
$\dfrac{Y_j-Y_j^*}{y_j-y_j^*}=\dfrac{\lg y_j-\lg y_j^*}{y_j-y_j^*}\approx\dfrac{1}{y_j\ln 10}$, 即 $\dfrac{\varepsilon_j}{e_j}\approx\dfrac{1}{y_j\ln 10}$, $T_j\varepsilon_j\approx e_j$.

又因为模型(2)中随机误差 $e_j(j=1,2,\cdots,n)$ 满足 Gauss—Markov 假定, 且 $e_j\sim N(0,\sigma^2)$, 所以当 $e_j(j=1,2,\cdots,n)$ 的绝对值足够小时, $T_j\varepsilon_j(j=1,2,\cdots,n)$ 近似地满足 Gauss－Markov 假定, $T_j\varepsilon_j$ 近似地服从 $N(0,\sigma^2)$. 证毕

定理 2 当模型(2)中随机误差 $e_j(j=1,2,\cdots,n)$ 的绝对值足够小时, 模型(4) 中随机误差 $\varepsilon_j(j=1,2,\cdots,n)$ 的方差可以得到修正, 使其近似地满足 *Gauss－Markov* 假定. 并且通过解正规方程组

$$A\hat{b}=B \tag{5}$$

可获得模型(1) 中参数 a, $b_i(i=1,2,\cdots,m)$ 唯一的一个线性无偏方差一致最小估计 $\hat{a}=\mathrm{e}^{\hat{b}_0}$, $\hat{b}_i(i=1,2,\cdots,m)$. 其中

$$A=\begin{bmatrix}\sum\limits_{j=1}^{n}T_j & \sum\limits_{j=1}^{n}T_jX_{1j} & \cdots & \sum\limits_{j=1}^{n}T_jX_{mj}\\ \sum\limits_{j=1}^{n}T_jX_{1j} & \sum\limits_{j=1}^{n}T_jX_{1j}^2 & \cdots & \sum\limits_{j=1}^{n}T_jX_{mj}X_{1j}\\ & & \vdots & \\ \sum\limits_{j=1}^{n}T_jX_{mj} & \sum\limits_{j=1}^{n}T_jX_{1j}X_{mj} & \cdots & \sum\limits_{j=1}^{n}T_jX_{mj}^2\end{bmatrix},$$

$$\hat{b}=\begin{bmatrix}\hat{b}_0\\ \hat{b}_1\\ \vdots\\ \hat{b}_m\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}\sum\limits_{j=1}^{n}T_jY_j\\ \sum\limits_{j=1}^{n}T_jY_jX_{1j}\\ \vdots\\ \sum\limits_{j=1}^{n}T_jY_jX_{mj}\end{bmatrix}.$$

证明 用 T_j 乘模型(4)的两端得

$$T_jY_j=b_0T_j+\sum_{i=1}^{m}b_iT_jX_{ij}+T_j\varepsilon_j. \tag{6}$$

由于 $T_j=y_j\ln 10$ 不含未知参数, 所以模型(6) 仍为线性模型, 且其未知参数与模型(4) 中未知参数相同, $T_j\varepsilon_j(j=1,2,\cdots,n)$ 为其随机误差.

由定理1知, 当模型(2) 中随机误差 e_j 的绝对值足够小时, $T_j\varepsilon_j(j=1,2,\cdots,n)$ 近似地满足

Gauss－Markov 假定. 因此当 e_j 的绝对值足够小时, 模型(6) 已对模型(4) 中随机误差 ε_j 的方差进行了修正.

当 e_j 的绝对值足够小时, 对模型(6)运用 LS 估计, 以其误差平方和 $Q(b_0, b_1, \cdots, b_m) = \sum_{j=1}^{n}(T_j\varepsilon_j)^2 = \sum_{j=1}^{n}\left[T_j\left(Y_j - b_0 - \sum_{i=1}^{m} b_iX_{ij}\right)\right]^2$ 为极小化目标函数, 建立正规方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial b_0} = -2\sum_{j=1}^{n} T_j\left(Y_j - b_0 - \sum_{i=1}^{m} b_iX_{ij}\right) = 0, \\ \dfrac{\partial Q}{\partial b_1} = -2\sum_{j=1}^{n} T_j\left(Y_j - b_0 - \sum_{i=1}^{m} b_iX_{ij}\right)X_{1j} = 0, \\ \vdots \\ \dfrac{\partial Q}{\partial b_m} = -2\sum_{j=1}^{n} T_j\left(Y_j - b_0 - \sum_{i=1}^{m} b_iX_{ij}\right)X_{mj} = 0. \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} \left(\sum_{j=1}^{n} T_j\right)b_0 + \left(\sum_{j=1}^{n} T_jX_{1j}\right)b_1 + \cdots + \\ \left(\sum_{j=1}^{n} T_jX_{mj}\right)b_m = \sum_{j=1}^{n} T_jY_j, \\ \left(\sum_{j=1}^{n} T_jX_{1j}\right)b_0 + \left(\sum_{j=1}^{n} T_jX_{1j}^2\right)b_1 + \cdots + \\ \left(\sum_{j=1}^{n} T_jX_{mj}X_{1j}\right)b_m = \sum_{j=1}^{n} T_jY_jX_{1j}, \\ \vdots \\ \left(\sum_{j=1}^{n} T_jX_{mj}\right)b_0 + \left(\sum_{j=1}^{n} T_jX_{1j}X_{mj}\right)b_1 + \cdots + \\ \left(\sum_{j=1}^{n} T_jX_{mj}^2\right)b_m = \sum_{j=1}^{n} T_jY_jX_{mj}. \end{cases} \tag{7}$$

根据 Gauss-Markov 假定, 正规方程组(7)有惟一解, 其解即为模型(6)中参数 $b_i(i = 0, 1, \cdots, m)$ 惟一的一个线性无偏方差一致最小估计 $\hat{b}_i(i = 0, 1, \cdots, m)$. 而模型(1) 中参数 a 的 LS 估计 $\hat{a} = e^{\hat{b}_0}$, 其余参数的 LS 估计与模型(6) 中参数相同. 正规方程组(7) 的矩阵形式即为方程组(5).

定理 3　当模型(2) 中随机误差 $e_j(j = 1, 2, \cdots, n)$ 的绝对值足够小时, 对模型(6)运用线性 LS 估计, 则线性 LS 估计的回归方程拟合效果显著性检验方法和回归系数显著性检验方法对其是适用的.

证明　由定理 1 知, 当模型(2) 中随机误差 e_j 的绝对值足够小时, 参数估计模型(6) 的随机误差 $T_j\varepsilon_j$ 近似地服从 $N(0, \sigma^2)$, 且近似地满足 Gauss－Markov 假定. 由于正态随机变量的不相关性与独立性等价, 所以, 当 e_j 的绝对值足够小时, 建立在随机误差相互独立, 且均服从 $N(0, \sigma^2)$ 基础上的, 线性 LS 估计的回归方程拟合效果显著性检验方法和回归系数显著性检验方法对模型(6) 是适用的.

定理 4　模型(2) 中随机误差 e_j 的绝对值较大的概率很小.

证明　在 Cobb－Douglas 生产函数模型的确适合于描述所研究的生产过程的情况下, 模型(2) 中随机误差 $e_j \sim N(0, \sigma^2)$, 且相互独立. 由于 $e_j \sim N(0, \sigma^2)$, $P(|e_j| > \sigma) = 0.3173$, $P(|e_j| > 2\sigma) = 0.0455$, 且随机误差 $e_j(j = 1, 2, \cdots, n)$ 的方差 σ^2 很小, 所以 e_j 的绝对值较大的概率很小.

虽然模型(2) 中随机误差 $e_j(j = 1, 2, \cdots, n)$ 的绝对值较大的概率很小, 但 e_j 的绝对值仍有可能取较大的值, 而使 e_j 的绝对值取较大值的试验数据$(y_j, x_{1j}, x_{2j}, \cdots, x_{mj})$在统计学中称为奇异点(异常点), y_j 称为奇异值(异常值). 奇异点往往对参数估计产生非同小可的影响, 并且在奇异点处本文定理 1 ～ 3 的结果均不成立. 对于奇异点可运用文献[4] 和[10] 中方法进行检验, 并将检验出的奇异点从试验数据中去掉.

参考文献:

[1] 袁亚湘, 孙文瑜. 最优化理论与方法[M]. 北京: 科学出版社, 1997.

[2] 杜　藏. 最优化计算方法[M]. 天津: 天津大学出版社, 1996.

[3] 张金魁. 线性模型参数估计及其改进[M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 1999.

[4] 陈希孺, 王松桂. 近代回归分析[M]. 合肥: 安徽教育出版社, 1987.

[5] 王松桂. 线性回归诊断(I)[J]. 数理统计与管理, 1985(6): 38－49.

[6] MILLIKEN G A. New criteria for estimability for linear model [J]. Ann. statist, 1971(42): 1588－1594.

[7] WEBSTER J T, GUNST R T, MANSON R L. Latent root regression analysis [J]. Technometrics, 1974(16): 513－522.

[8] MASSY W F. Principle components regression in exploratory statistical research [J]. J Amer statist Assoc, 1965(60): 234－266.

[9] 李庆扬, 王能超, 易大义. 数值分析[M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 1999.

[10] BECKMAN R J, COOK R D. outliers [J]. Technometrics, 1983(25): 119－163.

(编辑　王小唯)