When Interaction Actions?

黃河泉
淡江大學財務金融系

March 12, 2017

1. 沒有交互項

2. 有交互項
   - 兩個連續變數
   - 一連續、一離散之交互項
   - 兩個離散變數

讓我們先回顧一個沒有交互效果 (interaction effects) 的迴歸如下:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u \tag{1}$$

其中, y 為被解釋變數, x_1 與 x_2 為解釋變數。我們以 x_1 為例, 令 y 對 x_1 取變動為:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x_1} = \beta_1 \tag{2}$$

所以, 其他情況不變下, x_1 (假設為連續的變數) 每額外增加一單位, y 平均會增加 β_1 單位 (implicitly evaluated at $x_2 = \bar{x}_2$, the mean value of x_2.)。[1] 該模型中, 下式說明 x_1 對 y 的邊際效果只由其係數 β_1 之正負、大小來衡量, 完全不受另外一個解釋變數 x_2 之影響:

$$\frac{\Delta\left(\frac{\Delta y}{\Delta x_1}\right)}{\Delta x_2} = \frac{\Delta \beta_1}{\Delta x_2} = 0 \tag{3}$$

底下我們利用 Wooldridge 的 ‘`WAGE2.dta`’ 資料來一步一步說明相關的概念。

- 在該資料中, 被解釋變數是 `wage`, 其衡量一個人的每月工資 (單位是美元)。
- 解釋變數有該人之受教育年數 `educ` (單位是年)、工作經驗 `exper` (單位是年) 與婚姻狀態 `married` (虛擬變數, 若已婚則其值為 1, 否則為 0)。
- 底下其他例子會使用到的 `black` 與 `south` 兩個變數, `black` 為一虛擬變數, 若一人為黑人, 則其值為 1, 否則為 0; `south` 亦為一虛擬變數, 若一人居住於南方, 則其值為 1, 否則為 0。
- 我們首先分析一人之工資 `wage` 高低與其之 `educ`、`exper` 和 `married` 之關係, 迴歸可設定如下:

$$\texttt{wage} = \beta_0 + \beta_1 \texttt{educ} + \beta_2 \texttt{exper} + \beta_3 \texttt{married} + u \qquad (4)$$

首先，我們報告基本統計量與相關係數矩陣如下:

```
. use "WAGE2.dta", clear

. // basic statistics/correlation matrix
. sum wage educ exper married black south, sep(10)
```

Variable	Obs	Mean	Std. Dev.	Min	Max
wage	935	957.9455	404.3608	115	3078
educ	935	13.46845	2.196654	9	18
exper	935	11.56364	4.374586	1	23
married	935	.8930481	.3092174	0	1
black	935	.1283422	.3346495	0	1
south	935	.3411765	.4743582	0	1

初步的基本統計量指出，共有 935 筆觀察值。平均工資、教育與經驗為 958 元、13.5 年與 11.6 年，而已婚之比例約為 89.3%。另外，黑人之比例約 12.8% 而居住於南方者佔 34.1%。

所有變數的相關係數矩陣如下:

```
. pwcorr wage educ exper married black south, sig
```

	wage	educ	exper	married	black	south
wage	1.0000					
educ	0.3271	1.0000				
	0.0000					
exper	0.0022	-0.4556	1.0000			
	0.9467	0.0000				
married	0.1366	-0.0586	0.1063	1.0000		
	0.0000	0.0735	0.0011			
black	-0.2109	-0.1795	0.0558	-0.0534	1.0000	
	0.0000	0.0000	0.0879	0.1024		
south	-0.1594	-0.0970	0.0213	0.0228	0.2365	1.0000
	0.0000	0.0030	0.5162	0.4870	0.0000	

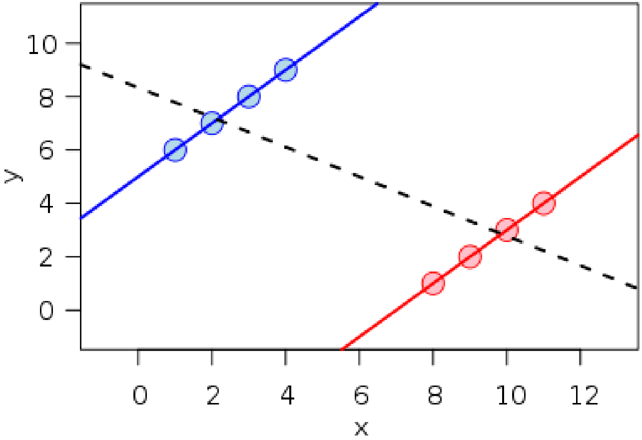
或是:

```
. pwcorr_a wage educ exper married black south
```

	wage	educ	exper	married	black	south
wage	1.000					
educ	0.327***	1.000				
exper	0.002	-0.456***	1.000			
married	0.137***	-0.059*	0.106***	1.000		
black	-0.211***	-0.179***	0.056*	-0.053	1.000	
south	-0.159***	-0.097***	0.021	0.023	0.236***	1.000

初步簡單相關係數顯示, 工資 (wage) 與受教育年數、工作經驗與婚姻狀態都有正相關 (但與工作經驗之關係不顯著), 但與種族與居住區域成顯著反向關係。

也請注意, 迴歸結果有時會與簡單相關係數呈現相反符號:



用 OLS 估計的迴歸結果 (並利用 robust 來修正異質性變異數) 如下:

```
. reg wage educ exper married, robust
Linear regression                                   Number of obs   =       935
                                                    F(3, 931)       =     52.23
                                                    Prob > F        =    0.0000
                                                    R-squared       =    0.1558
                                                    Root MSE        =    372.12
```

wage	Coef.	Robust Std. Err.	t	P>|t|	[95% Conf.	Interval]
educ	76.55046	6.610435	11.58	0.000	63.57738	89.52354
exper	16.31668	3.103631	5.26	0.000	10.22575	22.4076
married	185.9073	36.53057	5.09	0.000	114.2155	257.5991
_cons	-427.7748	112.2528	-3.81	0.000	-648.0726	-207.4771

所以, 在其他情況不變下, $\texttt{educ}$ 與 $\texttt{exper}$ 對 $\texttt{wage}$ 之邊際效果分別為:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta\texttt{wage}}{\Delta\texttt{educ}} &= \hat{\beta}_1 = 76.5505\\ \frac{\Delta\texttt{wage}}{\Delta\texttt{exper}} &= \hat{\beta}_2 = 16.3167\end{aligned}$$

亦即表示當受教育年數 (工作經驗) 每額外增加一年, 工資會額外增加 76.5505 (16.3167) 美元; 而 $\texttt{married}$ (虛擬變數) 對 $\texttt{wage}$ 之邊際效果為:

$$\frac{\Delta\texttt{wage}}{\Delta\texttt{married}} = \hat{\beta}_3 = 185.9073$$

表示其他情況不變下, 平均而言, 已婚者比未婚者之工資多 185.9073 美元。

[1]若 x_1 為 (間斷的, discrete) 虛擬變數, 則其對 y 之邊際效果可解釋為當 $x_1 = 1$ 比 $x_1 = 0$ 時多 β_1 個單位。

什麼時候需要交互 (interaction) 項呢? 若一個變數 x_1 對被解釋變數 y 之效果可能會受到其他變數 x_2 之影響時, 這時我們可以考慮使用含交互項之迴歸。現在, 讓我們考慮一個簡單但典型的交互效果模型如下:

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot \underbrace{\boxed{x_1}}_{\text{主要項}} + \alpha_2 \cdot \underbrace{\boxed{x_1 x_2}}_{\text{交互項}} + \alpha_3 \cdot \underbrace{\boxed{x_2}}_{\text{主要項}} + u \tag{5}$$

其中, y 為被解釋變數, x_1 與 x_2 為解釋變數 (主要項, main terms), 而兩個主要項的相乘項 $x_1 x_2$ 即為交互項 (interaction term)。此時, x_1 與 x_2 對 y 之邊際效果分別可寫成:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x_1} = \alpha_1 + \alpha_2 x_2 \tag{6}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x_2} = \alpha_3 + \alpha_2 x_1 \tag{7}$$

從 (6) 式可以發現, 此時 x_1 對 y 的邊際效果為 $\alpha_1 + \alpha_2 x_2$, 而下式說明該邊際效果會受到另一個解釋變數 x_2 之影響, 除非 $(\alpha_2 = 0)$:

$$\frac{\Delta\left(\frac{\Delta y}{\Delta x_1}\right)}{\Delta x_2} = \frac{\Delta(\alpha_1 + \alpha_2 x_2)}{\Delta x_2} = \alpha_2 \tag{8}$$

例如, 若 $\alpha_2 > 0$, 則 x_1 對 y 的影響效果會隨著 x_2 的值之增加而增加; 反之, 若 $\alpha_2 < 0$, 則 x_1 對 y 的影響效果會隨著 x_2 的值之增加而降低。由於該交互效果模型中, x_1 與 x_2 存在著對稱之情況, 所以所有對 x_1 效果之說明 (解釋、分析與檢定等), 都可適用於第 (7) 式 x_2 之情況。
實際的例子 (太多了!) 有 (只舉兩篇):

- Shen and Lee (2006) 探討為什麼同樣的金融發展可能會帶來不一樣的經濟成長?其考慮之模型為:

$$
\begin{aligned}
\texttt{GROWTH} &= \beta_0 + \beta_1\,\texttt{BANK} + \beta_2\texttt{STOCK} + u && (9)\\
\beta_1 &= \beta_{11} + \beta_{12}\,\texttt{Z} && (10)\\
\beta_2 &= \beta_{21} + \beta_{22}\,\texttt{Z} && (11)\\
\texttt{GROWTH} &= \beta_0 + \beta_{11}\,\texttt{BANK} + \beta_{12}\,(\texttt{BANK}\times\texttt{Z}) \\
&\quad + \beta_{21}\texttt{STOCK} + \beta_{22}(\texttt{STOCK}\times\texttt{Z}) + u
\end{aligned}
$$

其中的 'Z' 包含了 11 個狀態變數。沈公中華 (作者之一的 Shen) 每次都跟我說, (9) 到 (11) 式就是結構式 (structural) 模型, 因此可展開為最後一式, 此時並不需要 (沒有) 直接包括 Z 項在迴歸中。

- Alfaro, Chanda, Kalemli-Ozcan, and Sayek (2004) 探討外人直接投資 (foreign direct investment, FDI) 對本國經濟成長 (economic growth, GROWTH) 之效果, 是否會受到本國之金融發展程度 (local financial development, FINANCE) 之影響:

$$\texttt{GROWTH} = \alpha_0 + \alpha_1\,\texttt{FDI} + \alpha_2\,(\texttt{FDI} \times \texttt{FINANCE}) + \alpha_3\texttt{FINANCE} + u$$

而

$$\frac{\Delta\texttt{GROWTH}}{\Delta\texttt{FDI}} = \alpha_1 + \alpha_2\,\texttt{FINANCE}$$

底下, 我們繼續延伸之前的例子, 額外考慮交叉項之迴歸為:

$$\texttt{wage} = \alpha_0 + \alpha_1\texttt{educ} + \alpha_2(\texttt{educ} \times \texttt{exper}) + \alpha_3\texttt{exper} + \alpha_4\texttt{married} + u \tag{12}$$

兩個連續變數

```
. reg wage c.educ##c.exper married, robust

Linear regression                               Number of obs     =        935
                                                F(4, 930)         =      42.13
                                                Prob > F          =     0.0000
                                                R-squared         =     0.1626
                                                Root MSE          =     370.81
```

wage	Coef.	Robust Std. Err.	t	P>|t|	[95% Conf.	Interval]
educ	34.69507	17.6137	1.97	0.049	.127853	69.26228
exper	-34.90561	19.36479	-1.80	0.072	-72.90936	3.098149
c.educ#c.exper	3.97449	1.529389	2.60	0.010	.9730367	6.975944
married	187.0312	36.39812	5.14	0.000	115.5992	258.4632
_cons	125.6415	237.7932	0.53	0.597	-341.032	592.315

- educ 對 wage 的邊際效果 ($\mathtt{ME}_e$) 如下:

$$\mathtt{ME}_e = \frac{\Delta\mathtt{wage}}{\Delta\mathtt{educ}} = \alpha_1 + \alpha_2\,\mathtt{exper}$$

而對應之標準誤為:

$$\begin{aligned} se(\mathtt{ME}_e) &= \sqrt{V(\alpha_1 + \alpha_2\,\mathtt{exper})} \\ &= \sqrt{V(\alpha_1) + \mathtt{exper}^2 V(\alpha_2) + 2\,\mathtt{exper}\,Cov(\alpha_1, \alpha_2)} \end{aligned}$$

- exper 對 wage 的邊際效果 ($\mathtt{ME}_{ex}$) 如下:

$$\mathtt{ME}_{ex} = \frac{\Delta\mathtt{wage}}{\Delta\mathtt{exper}} = \alpha_3 + \alpha_2\,\mathtt{educ}$$

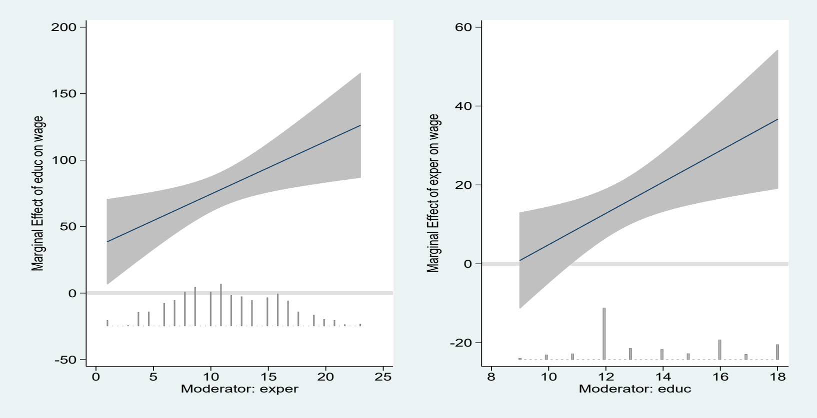
- 可用圖形來展示不同經驗水準下，額外增加一年教育對工資之影響效果：請先到 'Yiqing Xu' 的網站，到 `Stata Program` 處下載使用手冊 'User's Guide (PDF)' 並也下載程式：

ssc install interflex, replace all

```
. // interflex
. tempfile interflex_exper
. tempfile interflex_educ
.
. interflex wage educ exper married, vce(robust) type(linear) ///
> ylab("wage") dlab("educ") xlab("exper")
. graph save Graph `interflex_exper´, replace
(note: file C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ST_04000001.tmp not found)
(file C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ST_04000001.tmp saved)
.
. interflex wage exper educ married, vce(robust) type(linear) ///
> ylab("wage") dlab("exper") xlab("educ")
. graph save Graph `interflex_educ´, replace
(note: file C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ST_04000002.tmp not found)
```

```
(file C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ST_04000002.tmp saved)
.
. graph combine "`interflex_exper´" "`interflex_educ´"
. graph save Graph "E:\WAGE2-interflex-2.gph", replace
(file E:\WAGE2-interflex-2.gph saved)
. graph export "E:\WAGE2-interflex-2.pdf", as(pdf) replace
(file E:\WAGE2-interflex-2.pdf written in PDF format)
```

兩個連續變數


Marginal Effect of educ on wage
200
150
100
50
0
-50
0
5
10
15
20
25
Moderator: exper
Marginal Effect of exper on wage
60
40
20
0
-20
8
10
12
14
16
18
Moderator: educ

有關交互項迴歸應該注意之事項 I

1. 包括應該包括的所有項目: 若迴歸中有交互項, 則所有的主要項 (組成份子) 都應包含在迴歸中 (除非有經濟理論將其排除)。
   - 例如最一般的就是 $x_1 x_2$ (educ $\times$ exper) 交互項, 這時迴歸應該至少再包括 x_1 (educ) 項與 x_2 (exper) 項。
   - 又例如 (三叉項) $x_1 x_2 x_3$, 這時迴歸應該包括 x_1, x_2, x_3 與 $x_1 x_2, x_1 x_3, x_2 x_3$ 等項。
   - 若缺少某一主要項, 交互項可能由於 left-out variable bias 而顯著。
2. 共線性之問題: Dalal and Zickar (2012) demonstrate that mean-centering reduces nonessential collinearity but not essential collinearity. 常常聽到有人談到同時包括主要項與交互項會產生共線性之問題:

有關交互項迴歸應該注意之事項 II

- 雖然有人 (Althauser, 1971; Smith and Sasaki, 1979) 證明主要項與交互項會有相關，而可能導致共線性之情形; 但 Balli and Sørensen (2013) 並不認為共線性在一般交互模型中是一個太特殊/嚴重之問題。
- 由於有時候加入交互項後，迴歸結果不好 (不管從什麼角度來看，但要確定你的解讀是正確的)，去掉某一主要項後結果又很好。這時你或許可以參考 (但是還是有不少人可能不贊同) Shen and Lee (2006) 之模型設定，注意 z 並沒有直接包含於他們的模型中。

3. 主要項之解釋 (conditional versus unconditional): Brambor, Clark, and Golder (2006) 說，我們不應該將主要項解釋為非條件 (unconditional) 或平均 (average) 效果 — 因為他們本來就不是!

有關交互項迴歸應該注意之事項 III

- 我們一般關心的 α_1 係數, 其之解釋與以往有所不同: 其乃是當 $x_2 = 0$ 時, 若 x_1 每額外增加一單位, y 平均會增加 α_1 單位。所以, 在其他情況不變下, educ 對 wage 之邊際效果為:

$$\frac{\Delta \texttt{wage}}{\Delta \texttt{educ}} = \hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2\, \texttt{exper} = 34.6951 + 3.9745\, \texttt{exper}$$

  亦即在 exper 等於 0 時, 若受教育年數每額外增加一年, 工資會額外增加 34.6951 美元。以我們的例子來看, exper 的值都是大於等於 1 (基本統計量表中是介於 1 與 23 年), 因此 α_1 並沒有太大的經濟意義 。所以其係數 (用 t 檢定) 是否顯著, 可能也不是我們主要關心的項目, 而很不幸地, 不少人並不清楚這點。

有關交互項迴歸應該注意之事項 IV

- 可能更重要的是，檢定 x_1 對 y 的邊際效果 (平均來看) 是否會受到另一個解釋變數 x_2 之影響:

$$\begin{aligned} H_0: &\quad \alpha_2 = 0 \\ H_1: &\quad \alpha_2 \neq 0 \end{aligned}$$

此時，可用估計值 $\hat{\alpha}_2$ 之對應 t 值來檢定。(請也參考最底下之圖形說明)

4. 中心化: 如果想要讓交互項迴歸的主要項之係數有意義 (就像沒交叉項之情況)，可考慮將交叉項中心化 (centering, 變數減去自己的平均數) 如:

$$y = \gamma_0 + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 (x_1 - \bar{x}_1)(x_2 - \bar{x}_2) + \gamma_3 x_2 + u \tag{13}$$

有關交互項迴歸應該注意之事項 V

而且我們可以很簡單證明此式與 (5) 式有一對一之關係，其與 (5) 式有完全一樣的配適度 (R^2)，而且會得到完全一樣的 $\hat{\alpha}_2$ 估計值，也就是 $\hat{\gamma}_2 = \hat{\alpha}_2$。此外，

$$\frac{\Delta y}{\Delta x_1} = \gamma_1 + \gamma_2(x_2 - \bar{x}_2)$$

所以，x_1 係數 γ_1 之解釋為：其乃是當 $x_2 = \bar{x}_2$ 時，若 x_1 每額外增加一單位，y 平均會增加 γ_1 單位。這與無交叉項迴歸之 (2) 式中 x_1 係數 β_1 解釋是相近的！

有關交互項迴歸應該注意之事項 VI

至於主要項是否也要中心化，其實並不重要。因為我們可以輕易證明:

$$y = \gamma_0' + \gamma_1(x_1 - \bar{x}_1) + \gamma_2(x_1 - \bar{x}_1)(x_2 - \bar{x}_2) + \gamma_3(x_2 - \bar{x}_2) + u \tag{14}$$

除了常數項之外，其餘斜率項係數與 (13) 完全一樣。所以，就如同 Kam and Franzese (2003, p.3) 所說:

centering "alters nothing important statistically and nothing at all substantively."

- 只對交互項中心化:

$$\begin{aligned} \texttt{wage} &= \gamma_0 + \gamma_1\texttt{educ} + \gamma_2\left[(\texttt{educ} - \overline{\texttt{educ}}) \times (\texttt{exper} - \overline{\texttt{exper}})\right] \\ &\quad + \gamma_3\texttt{exper} + \gamma_4\,\texttt{married} + u \end{aligned}$$

有關交互項迴歸應該注意之事項 VII

```
. // centering interaction only (I)
. // ssc install center
. center educ exper, prefix(c)

. gen ceduc_cexper = ceduc*cexper

. reg wage educ ceduc_cexper exper married, robust

Linear regression                               Number of obs     =        935
                                                F(4, 930)         =      42.13
                                                Prob > F          =     0.0000
                                                R-squared         =     0.1626
                                                Root MSE          =     370.81
```

wage	Coef.	Robust Std. Err.	t	P>|t|	[95% Conf.	Interval]
educ	80.65463	6.691402	12.05	0.000	67.52263	93.78663
ceduc_cexper	3.97449	1.529389	2.60	0.010	.9730366	6.975944
exper	18.62462	3.378966	5.51	0.000	11.99333	25.2559
married	187.0312	36.39812	5.14	0.000	115.5992	258.4632
_cons	-493.3626	114.9412	-4.29	0.000	-718.9368	-267.7883

有關交互項迴歸應該注意之事項 VIII

- 同時對主要項與交互項中心化:

$$
\begin{aligned}
\texttt{wage} \quad = \quad & \gamma_0' + \gamma_1(\texttt{educ} - \overline{\texttt{educ}}) \\
& + \gamma_2 \left[(\texttt{educ} - \overline{\texttt{educ}}) \times (\texttt{exper} - \overline{\texttt{exper}}) \right] \\
& + \gamma_3(\texttt{exper} - \overline{\texttt{exper}}) + \gamma_4 \, \texttt{married} + u
\end{aligned}
$$

```
. // centering main terms and interaction (II)
. *reg wage ceduc ceduc_cexper cexper married, robust
. reg wage c.ceduc##c.cexper married, robust
Linear regression                               Number of obs     =        935
                                                F(4, 930)         =      42.13
                                                Prob > F          =     0.0000
                                                R-squared         =     0.1626
                                                Root MSE          =     370.81

------------------------------------------------------------------------------
             |               Robust
        wage |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
```

有關交互項迴歸應該注意之事項 IX

ceduc	80.65463	6.691402	12.05	0.000	67.52263	93.78663
cexper	18.62462	3.378966	5.51	0.000	11.99333	25.2559
c.ceduc#c.cexper	3.97449	1.529389	2.60	0.010	.9730367	6.975944
married	187.0312	36.39812	5.14	0.000	115.5992	258.4632
_cons	808.2986	34.41927	23.48	0.000	740.7501	875.847

可以發現, 兩者結果只差在常數項之估計值。

5. 內生性之處理: 若遇到 x_2 是內生的 (endogenous) 變數, x_1 是外生的 (exogenous) 變數, 而 z 為 x_2 之正確工具變數 (valid instrument), 則 '$x_1 z$' 也將是 '$x_1 x_2$' 之正確工具變數。

有關交互項迴歸應該注意之事項 X

- Rajan and Zingales (1998) 為了了解金融發展是否會對經濟成長造成影響, 提出一個嶄新的方法並利用來跨國、跨產業資料來驗證。其模型設定為:

$$
\begin{aligned}
G_{j,k} &= \beta_0 + \Gamma_1 \cdot \texttt{Industry Dummy}_j + \Gamma_2 \cdot \texttt{Country Dummy}_k \\
&\quad + \beta_1 S_{j,k} + \beta_2 \cdot (ED_j \times FD_k) + \epsilon_{j,k} \qquad (15)
\end{aligned}
$$

其中, j 代表產業而 k 代表國家。$G_{j,k}$ 乃是實質附加價值 (real value added) 年成長率家之平均值 (1980–1990 年)、$\texttt{Industry Dummy}_j$ ($\texttt{Country Dummy}_k$) 為產業 (國家) 虛擬變數、$S_{j,k}$ 代表 j 產業佔總製造業附加價值於期初 (1980 年) 的比例、ED_j 代表 j 產業對外資金仰賴程度 (extenal dependence) 而 FD_k 則是表示 k 國之金融發展 (financial development) 程度。其中, 最重要的就是 ED_j 與 FD_k (可能有內生性, 常用國家法源 legal origins and rule of law 來當作工具變數) 的交叉項; 根據 RZ 的猜測, 一個產業對外資金仰賴程度越高, 而且其所在的國

有關交互項迴歸應該注意之事項 XI

家之金融發展程度越好, 其之 (產業) 經濟成長應該越快。換言之, β_2 應為正數, 而其結果也支持該說法。

- 另外, Aghion, Howitt, and Mayer-Foulkes (2005) 的迴歸如下:

$$g_i - g_1 = \beta_0 + \beta_f F_i + \beta_y (y_i - y_1) + \beta_{fy} \left[F_i \cdot (y_i - y_1) \right] + u_i \quad (16)$$

其中, g 代表經濟成長、F 為金融發展程度 (可能有內生性, 用國家法源來當作工具變數) 而 y 為起始期所得 (控制收斂效果)。註: 有下標 1 的是指美國資料, 換言之, 結果是相對於美國的。

有關交互項迴歸應該注意之事項 XII

6. 利用圖形展示完整結果: 有時我們想知道, 在不同的 x_2 值下, x_1 對 y 的邊際效果為多少 (有些 x_2 值下可能為正、有些則可能為負)? 是否顯著 (有些 x_2 值下可能顯著、有些則可能不顯著)? 所以, 我們必須計算 (6) 式的變異數 (開根號為標準誤) 如下:

$$V(\alpha_1 + \alpha_2 x_2) = V(\alpha_1) + x_2^2 V(\alpha_2) + 2x_2 Cov(\alpha_1, \alpha_2)$$

可以用外掛程式 ‘`interflex`’ 來畫圖形展示不同 x_2 值下, x_1 對 y 之邊際效果。

接著，我們考慮兩個主要項的解釋變數，一個是連續的 (continuous)、一個是離散的 (discrete) 的情況。底下的例子中，black 為一虛擬變數，若一人為黑人，則其值為 1，否則為 0。

$$\texttt{wage} = \alpha_0+\alpha_1\texttt{educ}+\alpha_2(\texttt{educ}\times\texttt{black})+\alpha_3\texttt{black}+\alpha_4\texttt{married}+u \tag{17}$$

- educ 對 wage 的邊際效果 ($\texttt{ME}_e$) 如下：

$$\begin{aligned}\texttt{ME}_e = \frac{\Delta\texttt{wage}}{\Delta\texttt{educ}} &= \alpha_1 + \alpha_2\,\texttt{black} \\ &= \begin{cases}\alpha_1 & \text{if } \texttt{black} = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 & \text{if } \texttt{black} = 1\end{cases}\end{aligned}$$

而對應之標準誤為:

$$
\begin{aligned}
se(\texttt{ME}_e) &= \sqrt{V(\alpha_1 + \alpha_2\,\texttt{black})} \\
&= \sqrt{V(\alpha_1) + \texttt{black}^2 V(\alpha_2) + 2\,\texttt{black}\,Cov(\alpha_1, \alpha_2)} \\
&= \begin{cases} \sqrt{V(\alpha_1)}, & \text{if } \texttt{black} = 0 \\ \sqrt{V(\alpha_1) + V(\alpha_2) + 2\,Cov(\alpha_1, \alpha_2)}, & \text{if } \texttt{black} = 1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

- black 對 wage 的邊際效果 ($\texttt{ME}_b$) 如下:

$$
\texttt{ME}_b = \frac{\Delta\texttt{wage}}{\Delta\texttt{black}} \quad = \quad \alpha_1 + \alpha_2\,\texttt{educ}
$$

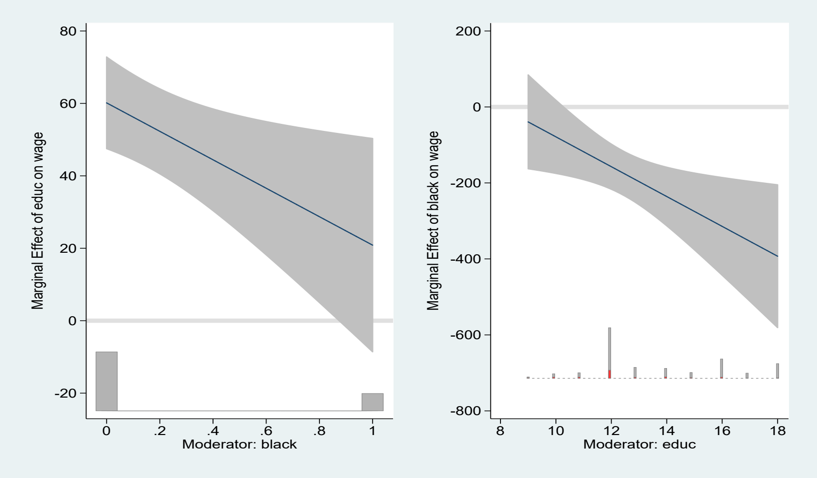
而對應之標準誤為:

$$
\begin{aligned}
se(\texttt{ME}_b) &= \sqrt{V(\alpha_1 + \alpha_2\,\texttt{educ})} \\
&= \sqrt{V(\alpha_1) + \texttt{educ}^2 V(\alpha_2) + 2\,\texttt{educ}\,Cov(\alpha_1, \alpha_2)}
\end{aligned}
$$

```
. ******************************
. ** (II) continuous + discrete **
. ******************************
. // without interaction
. reg wage educ black married, robust

Linear regression                               Number of obs     =        935
                                                F(3, 931)         =      55.55
                                                Prob > F          =     0.0000
                                                R-squared         =     0.1523
                                                Root MSE          =     372.89

------------------------------------------------------------------------------
             |               Robust
        wage |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
        educ |   56.92315   6.090257     9.35   0.000     44.97092    68.87537
       black |  -178.2715   30.34796    -5.87   0.000    -237.8299   -118.7132
     married |   191.9787   35.36565     5.43   0.000      122.573    261.3843
       _cons |    42.7125   89.81772     0.48   0.635    -133.5561    218.9812
------------------------------------------------------------------------------

. // with ineraction
. reg wage c.educ##i.black married, robust

Linear regression                               Number of obs     =        935
                                                F(4, 930)         =      42.36
                                                Prob > F          =     0.0000
```

R-squared	=	0.1556
Root MSE	=	372.36

wage	Coef.	Robust Std. Err.	t	P>|t|	[95% Conf.	Interval]
educ	60.15103	6.467409	9.30	0.000	47.45862	72.84344
1.black	314.2491	204.8295	1.53	0.125	-87.73252	716.2307
black#c.educ						
1	-39.28515	16.33241	-2.41	0.016	-71.33779	-7.232504
married	190.877	35.3198	5.40	0.000	121.5613	260.1928
_cons	-.2592446	94.01292	-0.00	0.998	-184.7613	184.2428


Marginal Effect of educ on wage
80
60
40
20
0
-20
0
.2
.4
.6
.8
1
Moderator: black
Marginal Effect of black on wage
200
0
-200
-400
-600
-800
8
10
12
14
16
18
Moderator: educ

最後我們考慮兩個主要項的解釋變數都是離散的 (discrete) 情況。底下的例子中, black 為一虛擬變數, 若一人為黑人, 則其值為 1, 否則為 0; south 亦為一虛擬變數, 若一人居住於南方, 則其值為 1, 否則為 0。

$$\texttt{wage} = \alpha_0 + \alpha_1 \texttt{black} + \alpha_2 (\texttt{black} \times \texttt{south}) + \alpha_3 \texttt{south} + \alpha_4 \texttt{educ} + u$$

black 對 wage 的邊際效果 (ME_b) 如下 (south 之分析完全相同):

$$\begin{aligned} \mathrm{ME}_b = \frac{\Delta \texttt{wage}}{\Delta \texttt{black}} &= \alpha_1 + \alpha_2 \, \texttt{south} \\ &= \begin{cases} \alpha_1 & \text{if south} = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 & \text{if south} = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

而對應之標準誤為:

$$
\begin{aligned}
se(\mathrm{ME}_b) &= \sqrt{V(\alpha_1 + \alpha_2\,\texttt{south})} \\
&= \sqrt{V(\alpha_1) + \texttt{south}^2 V(\alpha_2) + 2\texttt{south}\,Cov(\alpha_1, \alpha_2)} \\
&= \begin{cases} \sqrt{V(\alpha_1)} & \text{if } \texttt{south} = 0 \\ \sqrt{V(\alpha_1) + V(\alpha_2) + 2\,Cov(\alpha_1, \alpha_2)} & \text{if } \texttt{south} = 1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

一樣地, 我們首先報告沒有交互項之結果:

```
. ******************************
. ** (III) discrete + discrete **
. ******************************
. // without interaction
. reg wage black south educ, robust
Linear regression                                   Number of obs     =        935
                                                    F(3, 931)         =      50.28
                                                    Prob > F          =     0.0000
                                                    R-squared         =     0.1402
                                                    Root MSE          =     375.56
```

wage	Coef.	Robust Std. Err.	t	P>|t|	[95% Conf.	Interval]
black	-162.9069	31.93441	-5.10	0.000	-225.5787	-100.2352
south	-84.43181	27.53549	-3.07	0.002	-138.4706	-30.39299
educ	53.99133	6.125652	8.81	0.000	41.96964	66.01301
_cons	280.48	80.96168	3.46	0.001	121.5915	439.3686

上表之解釋還算標準，所以就暫時省略了!接下來，我們以‘人工’方式計算相關數值，讓大家更有概念。

```
. // with ineraction
. gen black_south = black*south

. reg wage black black_south south educ, robust

Linear regression                               Number of obs     =        935
                                                F(4, 930)         =      43.08
                                                Prob > F          =     0.0000
                                                R-squared         =     0.1437
                                                Root MSE          =     374.99
```

wage	Coef.	Robust Std. Err.	t	P>|t|	[95% Conf.	Interval]
black	-74.58742	50.73888	-1.47	0.142	-174.1634	24.98855
black_south	-149.6337	64.34495	-2.33	0.020	-275.9119	-23.3556
south	-63.26966	30.58202	-2.07	0.039	-123.2874	-3.251897
educ	54.53846	6.108172	8.93	0.000	42.55106	66.52586
_cons	266.7186	80.8305	3.30	0.001	108.0873	425.3499

```
. matrix b = e(b)
. matrix V = e(V)
. scalar b1 = b[1,1]
. scalar b2 = b[1,2]
. scalar b12 = b1+b2
. scalar v1 = V[1,1]
. scalar v2 = V[2,2]
. scalar cov12 = V[1,2]
. scalar se1 = sqrt(v1)
. scalar se2 = sqrt(v1+v2+2*cov12)
. scalar list b1 se1 b12 se2
        b1 = -74.587419
       se1 =  50.738881
       b12 = -224.22115
```

```
se2 =  39.695136
```

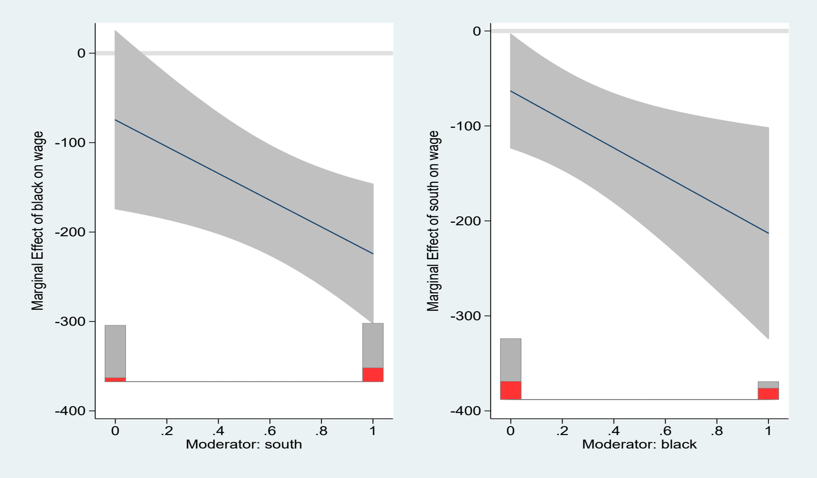
當然，我們也可以藉由 `interflex` 指令來直接畫圖，可以讓大家對不同狀況下的邊際效果一目瞭然。

```
. reg wage i.black##i.south educ, robust
Linear regression                              Number of obs     =        935
                                               F(4, 930)         =      43.08
                                               Prob > F          =     0.0000
                                               R-squared         =     0.1437
                                               Root MSE          =     374.99

------------------------------------------------------------------------------
             |               Robust
        wage |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
     1.black |  -74.58742   50.73888    -1.47   0.142    -174.1634    24.98855
     1.south |  -63.26966   30.58202    -2.07   0.039    -123.2874   -3.251897
             |
 black#south |
        1 1  |  -149.6337   64.34495    -2.33   0.020    -275.9119    -23.3556
             |
        educ |   54.53846   6.108172     8.93   0.000     42.55106    66.52586
```

_cons	266.7186	80.8305	3.30	0.001	108.0873	425.3499

其結果如下: 從左圖之左邊可以看出, 在非南方地區 ($\texttt{south} = 0$), 黑人相對於非黑人之工資少 74.5874 美元, 但 95% 的信賴區間包括 0, 因此我們判定此差距 (74.5874 美元) 在統計上不顯著異於 0。此外, 左圖之右邊指出, 在南方地區 ($\texttt{south} = 1$), 黑人相對於非黑人之工資少 $74.5874 + 149.6337 = 224.2211$ 美元, 而且 95% 的信賴區間並不包括 0, 因此我們判定其在統計上顯著小於 0。所以我們的結論為: 在南方, 黑人的工資顯著少於非黑人之工資; 但在非南方, 黑人的工資與非黑人之工資並無統計上之顯著差異!

兩個離散變數


0
-100
-200
-300
-400
Marginal Effect of black on wage
0
.2
.4
.6
.8
1
Moderator: south
0
-100
-200
-300
-400
Marginal Effect of south on wage
0
.2
.4
.6
.8
1
Moderator: black