pilet 1

Pilet 1

(a) Tõestada, et valemitest $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n$ järeldub valem $\mathcal{G}$ parajasti siis, kui valem $\mathcal{F}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{F}_n \Rightarrow \mathcal{G}$ on samaselt tõene (vt teoreem 2.24).

(b) Olgu U universaalhulk ja $A, B \subset U$. Tõestada, et

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

(vt lause 3.41).

a)

Võime öelda, et lause 3 järeldub lausetest 1 ja 2. Samuti, olles õppinud, et lause ja tema pöördvastandlause on loogiliselt samaväärsed, võime väita, et lausest „Kui vihma sajab, siis katused on märjad" järeldub „Kui katused ei ole märjad, siis vihma ei saja".

Definitsioon 2.18

Öeldakse, et valemitest $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n$ **järeldub** (ingl *derive*) valem $\mathcal{G}$, kui igal neis valemeis esinevate muutujate väärtustusel, millel $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n$ on tõesed, on ka $\mathcal{G}$ tõene.

Asjaolu, et valemitest $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n$ järeldub valem $\mathcal{G}$, tähistatakse sümbolites nii:

$$\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n \models \mathcal{G},$$

kus sümbolit $\models$ loetakse sõnaga „järeldub."

Eeldused on alati vasakul pool sümbolit $\models$. Kui vasakul on komadega eraldatud mitu valemit, siis on mitu eeldust. Paremal pool $\models$ sümbolit on järeldus. Mõnikord kasutatakse sõna järeldus ka tähenduses järeldamine.

Järeldumist saab kindlaks teha tõeväärtustabeli abil. Valime tõeväärtustabelist välja read, milles valemid $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n$ on kõik tõesed, ja selgitame, kas nendes ridades on ka valem $\mathcal{G}$ tõene. Kui on, siis järeldumine kehtib; kui aga leidub rida, milles valemid $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n$ on tõesed, kuid valem $\mathcal{G}$ on väär, siis oleme leidnud väärtustuse, mis väidetava järeldumise ümber lükkab.

Teoreem 2.24

Valemitest $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n$ järeldub valem $\mathcal{G}$ parajasti siis, kui valem $\mathcal{F}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{F}_n \Rightarrow \mathcal{G}$ on samaselt tõene.

Tõestus. Kui valemitest $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n$ järeldub valem $\mathcal{G}$, siis neil väärtustustel, millel valemid $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n$ on tõesed, on ka valem $\mathcal{G}$ tõene, mistõttu $\mathcal{F}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{F}_n \Rightarrow \mathcal{G}$ on tõene. Väärtustustel, millel mõni valemitest $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n$ on väär, on valem $\mathcal{F}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{F}_n \Rightarrow \mathcal{G}$ tõene seetõttu, et implikatsiooni eesliige on väär.
Ümberpöördult, kui valem $\mathcal{F}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{F}_n \Rightarrow \mathcal{G}$ on samaselt tõene, siis igal väärtustusel, millel valemid $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n$ on tõesed, on ka $\mathcal{F}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{F}_n$ tõene, mistõttu valem $\mathcal{G}$ on samuti tõene. ■

b)

Lause 3.41: Täiendi omadused

Olgu U universaalhulk ja $A, B \subset U$. Hulga täiendi moodustamisel kehtivad järgmised omadused:

1. $\emptyset' = U$;
2. $U' = \emptyset$;
3. $A \cup A' = U$;
4. $A \cap A' = \emptyset$;
5. $A'' = A$;
6. $(A \cup B)' = A' \cap B'$;
7. $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

Tõestus. Omadused 1. – 5. järelduvad vahetult täiendi definitsioonist ja on jäetud iseseisvaks tööks. Omadusi 6. ja 7. nimetatakse De Morgani valemiteks. Antud valemid väljendavad ühendi ja ühisosa duaalsust täiendi võtmise suhtes. Meie tõestame vaid De Morgani valemi 7. (valemi 6. tõestus on analoogiline).
7. Kontrollime võrdust samaväärsuste ahela abil:

$$\begin{aligned}
x \in (A \cap B)' &\Leftrightarrow x \in U \wedge x \notin A \cap B \\
&\Leftrightarrow x \in U \wedge \neg(x \in A \wedge x \in B) \\
&\Leftrightarrow x \in U \wedge (x \notin A \vee x \notin B) \\
&\Leftrightarrow (x \in U \wedge x \notin A) \vee (x \in U \wedge x \notin B) \\
&\Leftrightarrow x \in A' \vee x \in B' \\
&\Leftrightarrow x \in A' \cup B'.
\end{aligned}$$

■

Hulkade A ja B vahet $A \setminus B$ nimetatakse mõnikord ka **hulga** B **täiendiks hulga** A **suhtes**. Põhjuse selleks annab definitsioon $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$.

hulk on eri objektide kogum, objekte nim elementideks
universaalhulk on hulk kuhu kuuluvad kõik vaadeldavad
lausearvutuse lauseks nimetatakse lauset, millele saab omistada tõeväärtuse

PILET 2

Pilet 2

(a) Tõestada, et valemid $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{G}$ on samaväärsed parajasti siis, kui valem $\mathcal{F} \Leftrightarrow \mathcal{G}$ on samaselt tõene (vt teoreem 2.29).

(b) Tõestada, et mis tahes hulkade A, B ja C korral

$$A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$$

(vt teoreem 3.55).

a)

Teoreem 2.29

Valemid $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{G}$ on samaväärsed parajasti siis, kui valem $\mathcal{F} \Leftrightarrow \mathcal{G}$ on samaselt tõene.

Tõestus. Eeldame, et valemid $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{G}$ on samaväärsed. Valime valemites $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{G}$ esinevatele muutujatele suvalise väärtustuse. Kui valitud väärtustusel valem $\mathcal{F}$ on tõene ja valem $\mathcal{G}$ on tõene, siis $\mathcal{F} \Leftrightarrow \mathcal{G}$ on samuti tõene, kui aga valitud väärtustusel valem $\mathcal{F}$ on väär ja valem $\mathcal{G}$ on väär, siis jällegi $\mathcal{F} \Leftrightarrow \mathcal{G}$ on tõene. Järelikult on valem $\mathcal{F} \Leftrightarrow \mathcal{G}$ tõene sõltumata väärtustusest ehk samaselt tõene.
Eeldame nüüd ümberpöördult, et valem $\mathcal{F} \Leftrightarrow \mathcal{G}$ on samaselt tõene. Valime selles valemis esinevatele muutujatele suvalise väärtustuse. Et ekvivalents on tõene, siis kas $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{G}$ on mõlemad tõesed või $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{G}$ on mõlemad väärad. See tähendab, valemite $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{G}$ tõeväärtused on suvalisel väärtustusel samad. Vastavalt definitsioonile on valemid $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{G}$ samaväärsed. ■

Igapäevase keele abil on lihtne veenduda, et need valemid väljendavad ühte ja sama: esimene valem tähendab „Pole nii, et laused X ja Y on mõlemad tõesed“ ning teine valem „Vähemalt üks lausetest X või Y on väär“. Ühesuguse tõeväärtusveeruga valemeid ei ole võimalik nende komponentlausete sisu järgi teineteisest eristada, ehkki neil võib olla erinev väliskuju. Niisugustest kaalutlustest lähtudes anname järgmise definitsiooni.

Definitsioon 2.26

Valemeid $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{G}$ nimetatakse **loogiliselt samaväärseteks** (ingl *logically equivalent*), kui nende tõeväärtused on võrdsed igal neis valemeis esinevate muutujate väärtustusel.

Asjaolu, et valemid $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{G}$ on samaväärsed, märgib kirjutis $\mathcal{F} \equiv \mathcal{G}$.

Hulkade A ja B otsekorrutiseks nim kõikide paaride (a, b) hulka, kus a E A ja b E B, seejuures elementide järjekord on oluline

PILET 3

Pilet 3

Iga täisarvu a ja naturaalarvu b korral leiduvad üheselt määratud täisarvud q ja r nii, et $a = bq + r$ ja $0 \leq r < b$ (vt teoreem 4.4).

Teoreem 4.4

Olgu a täisarv ja b naturaalarv. Siis leiduvad üheselt määratud täisarvud q (jagatis) ja r (jääk) nii, et

$$a = bq + r \quad \text{ja} \quad 0 \leq r < b.$$

Teoreemi tõestuses kasutame järgmist abitulemust

Lemma 4.5

Mis tahes täisarvu a korral $a^2 + a \geq 0$.

Tõestus. Olgu $a \in \mathbb{Z}$. Kuna a on täisarv, siis piisab vaadelda kahte juhtu, kui $a \geq 0$ ja kui $a < 0$. Esimesel juhul on selge, et $a^2 + a \geq 0$, sest $a \geq 0$ ja $a^2 \geq 0$. Teiseks, kui nüüd aga $a < 0$, siis $a \leq -1$, sest $a \in \mathbb{Z}$. Kuna $a + 1 \leq 0$, siis $a^2 + a = a(a+1) \geq 0$. Kokkuvõttes olemegi näidanud, et iga täisarvu a korral $a^2 + a \geq 0$. ■

Nüüd oleme valmis esitama jäägiga jaguvuse tulemuse tõestuse.

Teoreemi tõestus. Olgu antud $a \in \mathbb{Z}$ ja $b \in \mathbb{N}$. Vaatleme hulka

$$A = \{a - bx \mid x \in \mathbb{Z}, a - bx \geq 0\} \subset \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Esmalt paneme tähele, et $A \neq \emptyset$. Tõepoolest,

$$a - b(-a^2) = a + ba^2 \geq a + a^2 \geq 0,$$

kus viimane võrratus kehtib lemma 4.5 põhjal ja seega $a - b(-a^2) \in A$. Kuna hulga $\mathbb{N} \cup \{0\}$ igas mittetühjas alamhulgas leidub vähim element, siis leidub ka hulga A vähim element $r = a - bq \in A$, kus $q \in \mathbb{Z}$.
Näitame, et $r < b$. Selleks oletame vastuväiteliselt, et $r \geq b$. Tähistame $r' := r - b$, siis

$$0 \leq r' = r - b = a - b(q+1) \in A \quad \text{ja} \quad r' < r,$$

mis on vastuolus r valikuga. Niiviisi oleme leidnud sellised $q, r \in \mathbb{Z}$, et $a = bq + r$ ja $0 \leq r < b$.
Näitame, et q ja r on üheselt määratud. Selleks oletame, et leiduvad täisarvud q_1, q_2, r_1, r_2 nii, et

$$a = bq_1 + r_1 = bq_2 + r_2 \quad \text{ja} \quad 0 \leq r_1, r_2 < b.$$

Siis $b(q_1 - q_2) = r_2 - r_1$. Kuna $b \geq 1$, $|r_2 - r_1| < b$ ja $q_1 - q_2 \in \mathbb{Z}$, siis võrdusest $|r_2 - r_1| = |b| \cdot |q_1 - q_2|$ järeldub, et $q_1 - q_2 = 0$ ja seega ka $r_2 - r_1 = 0$. Sellega olemegi näidanud, et $q_1 = q_2$ ja $r_1 = r_2$. ■

Definitsioon 4.6

Täisarv on arv, mis on esitatav naturaalarvude vahena.
naturaalarvud on arvud mida me kasutame loendamisel

See video peaks seletama seda tõestust

- https://www.youtube.com/playlist?list=PLHXZ9OQGMqxersk8fUxiUMSIx0DBqsKZS

PILET 4

Pilet 4

Iga ühest suurema naturaalarvu saab esitada algarvude korrutisena ja see esitus on ühene tegurite järjekorra täpsuseni (vt teoreem 4.23).

Algarv (ingl *prime number*) on naturaalarv, mis on suurem kui 1 ja mis jagub ainult arvuga 1 ja iseendaga.
Naturaalarve, mis peale ühe ja iseendaga jagumise jaguvad veel vähemalt mingi kolmanda naturaalarvuga, nimetatakse kordarvudeks.

Teoreem 4.23: Aritmeetika põhiteoreem

Iga naturaalarvu $n \geq 2$ saab esitada algarvude korrutisena (st leiduvad $r \in \mathbb{N}$ ja algarvud $p_1, \ldots, p_r$ nii, et $n = p_1 \cdot \ldots \cdot p_r$) ning see esitus on ühene tegurite järjekorra täpsuseni.

Tõestus. Näitame esmalt tugeva matemaatilise induktsiooniga, et iga naturaalarvu $n \geq 2$ saab esitada algarvude korrutisena. Arvu $n = 2$ puhul on see väide selge. Oletame, et $n > 2$ ja iga naturaalarvu $1 < m < n$ saab esitada algarvude korrutisena. Naturaalarv n peab olema kas algarv või kordarv. Esimesel juhul pole midagi tõestada. Kui aga n on kordarv, siis leidub naturaalarv d nii, et $d \mid n$, kusjuures $1 < d < n$. Olgu $n = da$, kus $a \in \mathbb{N}$, siis ka $1 < a < n$. Induktsiooni eelduse põhjal avalduvad d ja a algarvude korrutisena ning järelikult ka n avaldub algarvude korrutisena.
Ühesuse näitamiseks oletame, et naturaalarvu n saab algarvude korrutisena esitada kahel viisil:

$$n = p_1 p_2 \ldots p_r = q_1 q_2 \ldots q_s,$$

kus üldisust kitsendamata $r \leq s$ ja algarvud p_i ja q_j on mittekahanevas järjekorras, st $p_1 \leq p_2 \leq \cdots \leq p_r$ ja $q_1 \leq q_2 \leq \cdots \leq q_s$. Kuna $p_1 \mid q_1 q_2 \ldots q_s$ ja p_1 on algarv, siis $p_1 = q_k$ mingi $k \in \{1, \ldots, s\}$ korral. Seega kehtib ka, et $p_1 \geq q_1$. Samamoodi arutledes saame, et $q_1 \geq p_1$ ning kokkuvõttes $p_1 = q_1$. Arvu p_1 taandades saame $p_2 \ldots p_r = q_2 \ldots q_s$. Korrates seda mõttekäiku saame $p_2 = q_2$ ja $p_3 \ldots p_r = q_3 \ldots q_s$. Kui $r < s$, siis niimoodi jätkates jõuame võrduseni $1 = q_{r+1} q_{r+2} \ldots q_s$, mis on aga võimatu, sest $q_i > 1$ iga $i \in \{1, \ldots, s\}$ korral. Seega $r = s$ ja $p_1 = q_1, \ldots, p_r = q_r$. ■

PILET 5

Pilet 5

(a) Tõestada, et $\sqrt{2}$ on irratsionaalarv (vt lause 5.10).

(b) Tõestada, et leiduvad irratsionaalarvud x ja y nii, et x^y on ratsionaalarv (vt lause 5.19).

a)

Lause 5.10

Reaalarv $\sqrt{2}$ on irratsionaalarv

Tõestus. Oletame vastuväiteliselt, et $\sqrt{2}$ on ratsionaalarv. Järelikult leiduvad täisarvud r ja $s \neq 0$ nii, et $\sqrt{2} = \frac{r}{s}$. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et $\frac{r}{s}$ on taandumatu murd. Võttes selle võrduse ruutu saame $2 = \frac{r^2}{s^2}$, millest $2s^2 = r^2$. Seega on r^2 paarisarv, mistõttu on ka r paarisarv. Niisiis, leidub täisarv k nii, et $r = 2k$. Nüüd saame võrduse $2s^2 = r^2$ kirjutada kujul $2s^2 = 4k^2$, seega ka s on paarisarv. Et s ja r on mõlemad paarisarvud, siis nad sisaldavad tegurit 2, mis on vastuolus meie eeldusega, et $\frac{r}{s}$ on taandumatu murd. Järelikult on $\sqrt{2}$ irratsionaalarv.

■

Ratsionaalarv on arv, mida saab esitada kahe täisarvu *m* ja *n* jagatisena $^m/_n$. Kuna nulliga ei saa jagada, siis jagaja $n \neq 0$.

Irratsionaalarvudeks nimetatakse mitteperioodilisi lõpmatuid kümnendmurde.

b)

Tõestus. Teame, et $\sqrt{2}$ on irratsionaalarv. Uurime arvu $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$. Vaatame nüüd kahte alamjuhtu:

1. Kui $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ on ratsionaalarv, siis olemegi oma väite tõestanud, sest võime võtta $x = y = \sqrt{2}$.

2. Kui $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ on irratsionaalarv, siis
$$((\sqrt{2})^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2.$$
Seega sel juhul võime võtta $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ ja $y = \sqrt{2}$.

Me ei tea kumb juht realiseerub, aga kindlasti leiduvad irratsionaalarvud x ja y nii, et x^y on ratsionaalarv. ■

PILET 6

Pilet 6

Olgu f funktsioon hulgast X hulka Y.

(a) Tõestada, et iga $A, B \subset X$ korral $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ (vt teoreem 6.16).

(b) Tõestada, et iga $C \subset Y$ korral $f^{-1}(Y \setminus C) = X \setminus f^{-1}(C)$ (vt teoreem 6.22).

a)

Olgu antud funktsioon $f\colon X \to Y$.

Definitsioon 6.12

Kui $x \in X$ ja $y \in Y$ on sellised, et $y = f(x)$, siis elementi y nimetatakse **elemendi x kujutiseks** (ingl *image of* x).

Igal määramispiirkonna X elemendil on parajasti üks kujutis.

Definitsioon 6.14

Hulga $A \subset X$ **kujutiseks** (ingl *image*) nimetatakse hulga Y osahulka $f(A)$, mis koosneb kõikide hulga A elementide kujutistest, st

$$f(A) = \{f(x)\colon x \in A\} = \{y \in Y\colon \exists x\ (x \in A \wedge f(x) = y)\}.$$

NB! Kujutis $\neq$ kujutus. Sõna „kujutus“ tähistab funktsiooni (kujutamise viisi), sõna „kujutis“ tähendab aga funktsiooni väärtust, st kujutamise tulemust.

Teoreem 6.16: Kujutise omadused

Olgu f funktsioon hulgast X hulka Y ja $A, B \subset X$. Siis

1. $f(\emptyset) = \emptyset$;
2. $f(X) \subset Y$;
3. Kui $A \subset B$, siis $f(A) \subset f(B)$;
4. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;
5. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

Teoreemi 6.16 tõestus.

1. Vastavalt hulga kujutise definitsioonile $f(\emptyset) = \{f(x) \colon x \in \emptyset\}$. Kuna aga ükski x tühja hulka ei kuulu, siis pole paremal olev tingimus rahuldatud ühegi elemendi x korral. Seega on parempoolne hulk tühi.

2. Olgu $y \in f(X)$. Hulga kujutise definitsiooni põhjal $f(X) = \{y \in Y \colon \exists x\ (x \in X \wedge f(x) = y)\}$. Seega $y \in Y$.

3. Olgu $A, B \subset X$ ja $A \subset B$. Väite 3. tõestamiseks tuleb meil vastavalt osahulga definitsioonile näidata, et kui $y \in f(A)$, siis $y \in f(B)$. Olgu $y \in f(A)$. Siis hulga kujutise definitsiooni järgi eksisteerib $x \in A$, nii et $y = f(x)$. Kuna $A \subset B$, siis saame $x \in B$. Seega eksisteerib $x \in B$, nii et $y = f(x)$, mistõttu hulga kujutise definitsiooni järgi $y \in f(B)$.

4. Võrduse tõestamiseks näitame, et kehtib järgmine samaväärsuste ahel:

$$\begin{aligned}
y \in f(A \cup B) &\Leftrightarrow \exists x\ (x \in A \cup B \wedge y = f(x)) \\
&\Leftrightarrow \exists x\ ((x \in A \vee x \in B) \wedge y = f(x)) \\
&\Leftrightarrow \exists x\ (x \in A \wedge y = f(x) \vee x \in B \wedge y = f(x)) \\
&\Leftrightarrow y \in f(A) \vee y \in f(B) \\
&\Leftrightarrow y \in f(A) \cup f(B).
\end{aligned}$$

5. Olgu $y \in f(A \cap B)$. Hulga kujutise definitsiooni järgi eksisteerib $x \in A \cap B$, nii et $y = f(x)$. Ühisosa definitsiooni järgi kehtib siis $x \in A$ ja $x \in B$. Et $y = f(x)$, siis hulga kujutise definitsiooni järgi saame konjunktsiooni esimesest poolest $y \in f(A)$ ja teisest poolest $y \in f(B)$. Siit saame hulkade ühisosa definitsiooni põhjal $y \in f(A) \cap f(B)$.

∎

NUMBER 4 SIIT ÜLEVALT ON VASTUS

b)

6.4 Hulga originaal ja tema omadused

Definitsioon 6.19

Olgu antud funktsioon $f\colon X \to Y$. Kui $x \in X$ ja $y \in Y$ on sellised, et $y = f(x)$, siis elementi x nimetatakse funktsiooni f **elemendi y originaaliks** (ingl *inverse image of y*).

Mõnel hulga Y elemendil võib originaale olla üks, mõnel rohkem ja mõnel mitte ühtegi. Näiteks, kui me vaatleme ruutfunktsiooni kui funktsiooni reaalarvude hulgast reaalarvude hulka, siis on igal positiivsel reaalarvul kaks originaali, arvul null on üks originaal ja negatiivsetel reaalarvudel pole mitte ühtegi originaali. Täpsemalt, kui $f(x) = x^2$, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, siis arvu 1 originaalid on -1 ja 1, sest $f(-1) = 1$ ja $f(1) = 1$.

Definitsioon 6.20

Hulga $B \subset Y$ **originaaliks** (ingl *inverse image*) nimetatakse hulka $f^{-1}(B)$, mis koosneb kõigist nendest hulga X elementidest, mis kujutuvad hulga B elemendiks, st

$$f^{-1}(B) = \{x \in X\colon f(x) \in B\}.$$

Tähistus f^{-1} ei tähenda siin, et funktsioonil f peaks leiduma pöördfunktsioon vaid on lihtsalt sümbol. Küll aga, kui funktsioonil f leidub pöördfunktsioon, siis need mõisted –

Teoreem 6.22: Originaali omadused

Olgu f funktsioon hulgast X hulka Y ja $A, B \subset Y$. Siis

1. $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$;
2. $f^{-1}(Y) = X$;
3. Kui $A \subset B$, siis $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$;
4. $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$;
5. $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$;
6. $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$.

SIIT NR 6 (vb 2 ka aitab):

Tõestus.

1. Vahetult originaali definitsioonist saame, et $f^{-1}(\emptyset) = \{x \in X \colon f(x) \in \emptyset\}$. Kuna pole selliseid hulga X elemente, mis kujutuvad tühihulga elementideks, siis võrdus kehtib.

2. Vahetult originaali definitsioonist saame, et $f^{-1}(Y) = \{x \in X \colon f(x) \in Y\}$. Funktsiooni definitsiooni järgi kujutub hulga X iga element mingiks hulga Y elemendiks. Seega võrdus kehtib.

3. Olgu $x \in f^{-1}(A)$. Originaali definitsioonist saame, et siis $f(x) \in A$. Eelduse kohaselt on hulk A hulga B osahulk, ehk siis ka $f(x) \in B$. Hulga originaali definitsiooni järgi kehtib $x \in f^{-1}(B)$.

4. Näitame, et suvalise $x \in X$ korral kehtib $x \in f^{-1}(A \cup B)$ parajasti siis, kui $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(A \cup B) &\Leftrightarrow f(x) \in A \cup B \\ &\Leftrightarrow f(x) \in A \vee f(x) \in B \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \vee x \in f^{-1}(B) \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B). \end{aligned}$$

5. Näitame, et suvalise $x \in X$ korral kehtib $x \in f^{-1}(A \cap B)$ parajasti siis, kui $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(A \cap B) &\Leftrightarrow f(x) \in A \cap B \\ &\Leftrightarrow f(x) \in A \wedge f(x) \in B \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \wedge x \in f^{-1}(B) \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B). \end{aligned}$$

6. Näitame, et suvalise $x \in X$ korral kehtib $x \in f^{-1}(Y \setminus B)$ parajasti siis, kui $x \in X \setminus f^{-1}(B)$.

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(Y \setminus B) &\Leftrightarrow f(x) \in Y \setminus B \\ &\Leftrightarrow f(x) \in Y \wedge \neg(f(x) \in B) \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(Y) \wedge \neg(x \in f^{-1}(B)) \\ &\Leftrightarrow x \in X \wedge x \notin f^{-1}(B) \\ &\Leftrightarrow x \in X \setminus f^{-1}(B), \end{aligned}$$

kusjuures eelviimane ekvivalents kehtib varem tõestatud seose $f^{-1}(Y) = X$ tõttu.

$\blacksquare$