线代

by Iris

记号：概念

定理

方法

第1章 线性方程组

§1 高斯-若尔当算法

- [矩阵的初等行变换]
  - 把一行的倍数加到另一行上
  - 互换2行位置
  - 用一个非零数乘某一行

- [阶梯形矩阵]
  - 零行在下方
  - 各非零行的主元的列指标随行指标的递增而严格增大

- [简化行阶梯形矩阵]
  - 是阶梯形矩阵
  - 每个非零行的主元都是1
  - 每个主元所在列的其余元素都是0

- [线性方程组的一般解]

$$\begin{cases} \boxed{x_1} = \boxed{x_2} + 2 \\ \boxed{x_3} = -1 \end{cases}$$

主变量　　自由未知量

- [高斯-若尔当算法解线性方程组]

① 通过互换使第一行主元为1

② 利用第一行把下方行的 x_1 消掉，
利用第二行把下方行的 x_2 消掉，
…
得到阶梯形矩阵

③ 利用最后一行把上方行的 x_n 消掉，
利用倒二行把上方行的 x_{n-1} 消掉，
…
得到简化行阶梯形矩阵

§2 线性方程组的解的情况及其判别准则

- 相容：一个线性方程组有解

- [定理1] n元线性方程组的解的情况只有3种可能：无解，有唯一解，有无穷多个解

$\Updownarrow$ 出现 $0=d$　　$\Updownarrow$ 非零行数 $r=$ 未知量 n（阶梯形矩阵中）　　$\Updownarrow$ $r<n$

- [推论2] n元齐次线性方程组有非零解 $\Leftrightarrow$ 阶梯形矩阵中 $r<n$

- [推论3] 若n元齐次线性方程组方程的数目 $s<n$，则一定有非零解

§3 数域　（不考判断某个集合是否构成数域）

- [数域] $K \subseteq \mathbb{C}$ 且满足 $\begin{cases} 0,1 \in K \\ \forall a,b \in K，有\ a \pm b,\ ab \in K，且\ b \neq 0\ 时有\ \frac{a}{b} \in K \end{cases}$（对四则运算封闭）

最小数域：$\mathbb{Q}$
最大数域：$\mathbb{C}$

- [命题1] 任一数域都包含有理数域

第2章　行列式

§1　n元排列

- [n元排列]　n个不同的自然数的一个全排列（总数是 $n!$）
- [定理1]　对换改变n元排列的奇偶性
- [定理2]　任一n元排列与排列 $123\cdots n$ 可以经过一系列对换互变，并且所作对换的次数与这个n元排列有相同的奇偶性

$\left\{\begin{array}{l}奇+奇=偶\\偶+偶=偶\end{array}\right\} \rightarrow 1,2,3\cdots n$ 为偶

§2　n阶行列式的定义

- [n阶行列式的完全展开式]（以行为例）

$$\det A=|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix} \overset{def}{=} \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

- [上三角形行列式]

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

§3　行列式的性质

- [性质1]　转置不变（$|A^T|=A$）
- [性质2]　行列式一行的公因子可以提出去
- [性质3]　行列式中若有一行是两组数的和，则此行列式等于两个行列式的和 -
- [性质4]　两行互换，行列式反号
- [性质5]　两行相同，行列式的值为0
- [性质6]　两行成比例，行列式的值为0
- [性质7]　把一行的倍数加到另一行上，行列式的值不变
- [计算行列式的基本方法之一]

通过初等行变换将行列式化成上三角形行列式的k倍
（列）

- [验算方法]　代入 $n=1$，$n=2$ 验证

§4　行列式按一行（列）展开

- [余子式]　划去某元素 (i,j) 所在行与列后，剩下的行列式

$$\underset{\text{代数余子式}}{A_{ij}} = (-1)^{i+j}\underset{\text{余子式}}{M_{ij}}$$

- [定理1]　n阶行列式 $|A|$ 等于第i行元素与各自的代数余子式的乘积之和

$$|A|=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$$

- [定理2]（列）同上
- [定理3]　n阶行列式 $|A|$ 的第i行元素与第k行 $(k\neq i)$ 相应元素的代数余子式的乘积之和等于零

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj}=0 \quad (k\neq i)$$

- [定理4]（列）同上
- [Vandermonde行列式]

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1}\end{vmatrix} = \prod_{1\le j<i\le n}(a_i-a_j)$$

n阶范德蒙德行列式等于0 $\Leftrightarrow$ $a_1a_2\cdots a_n$ 中至少有2个相等

§5　Cramer法则

- [定理1]　n个方程的n元线性方程组有唯一解 $\Leftrightarrow$ 系数行列式 $|A|\neq 0$
- [推论2]　n个方程的n元齐次线性方程组只有零解 $\Leftrightarrow$ 系数行列式 $|A|\neq 0$
- [定理3]　n个方程的n元线性方程组系数行列式 $|A|\neq 0$ 时，它的唯一解是

$$\left(\frac{|B_1|}{|A|},\frac{|B_2|}{|A|},\cdots,\frac{|B_n|}{|A|}\right)^T \quad 其中|B_j|=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

替换第j列

§6　行列式按k行（列）展开（不考）

- [k阶子式]　n阶行列式中任意取定k行、k列，交叉得的 k^2 个元素组成的k阶行列式

取定第 $i_1,i_2,\cdots i_k$ 行　第 $j_1,j_2,\cdots,j_k$ 列

记作 $A\begin{pmatrix} i_1,i_2,\cdots,i_k\\ j_1,j_2,\cdots,j_k\end{pmatrix}$

划去第 $i_1,i_2,\cdots i_k$ 行、第 $j_1,j_2,\cdots,j_k$ 列，剩下的 $n-k$ 阶行列式称为该子式的余子式，记作 $A\begin{pmatrix} i'_1,i'_2,\cdots,i'_{n-k}\\ j'_1,j'_2,\cdots,j'_{n-k}\end{pmatrix}$

其代数余子式要再乘 $(-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)}$

- [定理1：Laplace]

$$|A|=\sum_{1\le j_1<\cdots j_k\le n} A\begin{pmatrix} i_1,\cdots,i_k\\ j_1,\cdots,j_k\end{pmatrix}(-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)}A\begin{pmatrix} i'_1,i'_2,\cdots,i'_{n-k}\\ j'_1,j'_2,\cdots,j'_{n-k}\end{pmatrix}$$

- [定理2]（列）同上
- [推论]

$$\begin{vmatrix} A & 0\\ C & B\end{vmatrix} = |A|\,|B|$$

第3章　n维向量空间 K^n

§1　n维向量空间 K^n 及其子空间

- [n维向量空间]
  数域K上所有n元有序数组组成的集合 K^n，以及加法、数量乘法运算的定义和满足的8条运算法则
  K^n 的元素称为n维向量

- [8条运算法则]
  $\forall \alpha,\beta,\gamma\in K^n$，$\forall k,l\in K$，有
  ① $\alpha+\beta=\beta+\alpha$（加法交换律）
  ② $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$（加法结合律）
  ③ K^n 的零元素 $(0,0,\cdots,0)$ 满足 $0+\alpha=\alpha+0=\alpha$
  ④ α 的负元素 $-\alpha$ 满足 $\alpha+(-\alpha)=(-\alpha)+\alpha=0$
  ⑤ $1\alpha=\alpha$
  ⑥ $(kl)\alpha=k(l\alpha)$（数的乘法结合律）
  ⑦ $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$（数对向量的乘法分配律）
  ⑧ $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$（向量对数的乘法分配律）

- [行向量组]
  多行 $(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})$ 的组合（列同理）

- [线性组合]
  $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s$ 称为向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s$ 的一个线性组合

- [线性表出]
  对于 $\beta\in K^n$，若存在K中一组数 $c_1,c_2,\cdots c_s$，使得 $\beta=c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\cdots+c_s\alpha_s$，
  则称 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表出

- [线性子空间]
  K^n 的一个非空子集U满足 ① ② $\begin{cases}\alpha,\gamma\in U\Rightarrow\alpha+\gamma\in U\\ \alpha\in U,k\in K\Rightarrow k\alpha\in U\end{cases}$，则U是 K^n 的一个线性子空间
  {0}称为零子空间，K^n 也是自己的一个子空间

- [生成的子空间]
  K^n 中向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的所有线性组合组成的集合W是 K^n 的一个子空间，
  称其为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 生成的子空间，记作 $\langle\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\rangle$

- [推论] 线性方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta$ 有解 $\Leftrightarrow$ β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表出
  常数项列向量　　系数矩阵的列向量组
  $\Leftrightarrow\beta\in\langle\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n\rangle$

§2　线性相关与线性无关的向量组

- [线性相关] K中有不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 使得：$k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s=0$（$s\geq1$）
- [线性无关] 从 $k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s=0$ 可以推出 $k_1=k_2=\cdots=k_s=0$
- [推论] 包含零向量的向量组一定线性相关
- [推论] $\alpha=0\Leftrightarrow\alpha$ 线性相关
  $\alpha\neq0\Leftrightarrow\alpha$ 线性无关　] 单个向量

$\begin{cases}r(A)=m(\text{行数})\to\text{行向量间线性无关}\\ r(A)=n(\text{列数})\to\text{列向量间线性无关}\end{cases}$] 不等价！
eg: $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$　$r(A)=2=m<n$

- [单位坐标向量/标准基向量]
  K^n 中，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\varepsilon_n$ 表示只有一个分量为1，其余分量全为0的列向量

- [判别线性相/无关方法]
  线性组合：线性相关：有系数不全为0的线性组合等于零向量；线性无关：只有系数全为0的线性组合才等于零向量
  线性表出：线性相关：至少有一个向量可由其余向量线性表出；线性无关：每个向量都不能由其余向量线性表出
  齐次线性方程组：线性相关：有非零解；线性无关：只有零解
  行列式：线性相关：矩阵行列式等于0；线性无关：矩阵行列式不等于0

常用
- [判别向量组的线性相关性·数字型]
  ① 特别地，两个向量：看分量是否对应成比例
  ② 多向量：若方阵，行列式 $\overset{?}{=}0$
  非方阵，Rank ＿ 向量个数（< / =）
  ↳ 化成J

- [判别向量组的线性相关性·抽象型]
  eg：设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，求 $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-2\alpha_1$ 的相关性
  ① 把新向量组写成旧向量组乘矩阵的形式（用几何意义想！）
  $(\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-2\alpha_1)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&-2\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$
  列向量组　"系数"矩阵
  ② 若 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\cdot C$
  且 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 无关，则 $\begin{cases}|C|=0\Leftrightarrow\beta_1,\beta_2,\beta_3\text{ 相关}\\ |C|\neq0\Leftrightarrow\beta_1,\beta_2,\beta_3\text{ 无关}\end{cases}$

- [部分组、延伸/缩短组]
  $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的部分组：去掉一些向量
  $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的延伸组：每个向量都增加一些分量，记作 $\tilde\alpha_1,\tilde\alpha_2,\cdots,\tilde\alpha_n$
  $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的缩短组：每个向量都减少一些分量

- [推论] $\begin{cases}\text{向量组的部分组线性相关}\Rightarrow\text{向量组线性相关}\\ \text{向量组线性无关}\Rightarrow\text{向量组的部分组线性无关}\end{cases}$（系数赋0）
  $\begin{cases}\text{向量组线性无关}\Rightarrow\text{其延伸组也线性无关}\\ \text{向量组线性相关}\Rightarrow\text{其缩短组也线性相关}\end{cases}$ eg: (1,2,3)与(2,4,6) → (1,3)与(2,6)

- [命题1] $\begin{cases}\text{向量组 }\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\text{ 线性无关，则 }\beta\text{ 可由 }\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\text{ 线性表出}\Leftrightarrow\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta\text{ 线性相关}\\ \text{向量组 }\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\text{ 线性无关，则 }\beta\text{ 不可由 }\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\text{ 线性表出}\Leftrightarrow\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta\text{ 线性无关}\end{cases}$

§3　极大线性无关组、向量组的秩

- [极大线性无关组]
  K^n 中向量组的一个部分组，满足 $\begin{cases}\text{本身线性无关}\\ \text{从这个向量组的其余向量中任取一个添上就线性相关}\end{cases}$
  则称为一个极大线性无关组
- [向量组等价]
  向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 与 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 可以互相线性表出，则等价
  （等价具有传递性）
- [命题1] 向量组与它的极大线性无关组等价
- [推论2] 向量组的任意两个极大线性无关组等价
- [引理1] 向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表出，
  若 $r>s$，则向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 线性相关
- [推论3] 向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表出，
  若向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 线性无关，则 $r\leq s$
- [向量组的秩]
  向量组的极大线性无关组所含向量的数目，记为 $\operatorname{rank}\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$
  零向量组的秩规定为0
- [命题6] 向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性无关 $\Leftrightarrow\operatorname{rank}\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s\}=s$
  向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性相关 $\Leftrightarrow\operatorname{rank}\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s\}<s$
- [命题7] 向量组Ⅰ可由向量组Ⅱ线性表出，$\operatorname{rank}(\text{Ⅰ})\leq\operatorname{rank}(\text{Ⅱ})$
- [推论8] 等价的向量组有相同的秩
- [求向量组的极大线性无关组和秩] 化成J，数非零行（极大无关组优先选主元列，本质是要求线性无关）
  若还要求，包含某指定向量，推荐换顺序
  若还要求，将其余向量用该极大线性无关组表示，就继续化成最简行阶梯形写一般解

§4　向量空间 K^n 及其子空间的基与维数

- [子空间的基]
  U是 K^n 的一个子空间，U中的向量组 $\alpha_1,\cdots\alpha_r$ 若满足 $\begin{cases}\text{线性无关}\\ \text{U可由其线性表出}\end{cases}$，则 $\alpha_1,\cdots\alpha_r$ 是U的一个基
- [标准基] $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 K^n 的标准基
- [定理1] K^n 的每一个非零子空间U都有一个基
  （从子空间U的一个非零向量出发，可以扩充成U的一个基）
- [子空间的维数]
  U是 K^n 的一个非零子空间，U的一个基所含向量的数目称为U的维数，记作 $\dim U$
- [命题3]
  $\alpha_1,\cdots\alpha_r$ 是U的一个基，则U可由 $\alpha_1,\cdots\alpha_r$ 线性表出且表出方式唯一
  其系数称为 α 在基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 下的坐标
- [命题4] 设U是 K^n 的r维子空间，则U中任意r+1个向量都线性相关
- [命题5] 设U是 K^n 的r维子空间，则U中任意r个线性无关的向量是U的一个基（找基）
- [命题6] 设U和W是 K^n 的非零子空间，若 $U\subseteq W$，则 $\dim U\leq\dim W$
- [命题7] 设U和W是 K^n 的非零子空间，且 $U\subseteq W$，若 $\dim U=\dim W$，则 $U=W$
- [定理8] 向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 的秩等于由它生成的子空间的维数
  $\operatorname{rank}\{\alpha_1,\cdots\alpha_s\}=\dim\langle\alpha_1,\cdots,\alpha_s\rangle$
- [行/列空间] 数域K上 $s\times n$ 矩阵A的列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 生成的子空间称为A的列空间（行同理）

§5　矩阵的秩

- [列/行秩] 列秩：矩阵列向量组的秩（行同理）
- [定理1] 阶梯形矩阵J的行秩与列秩相等，都等于J的非零行数目，
  并且J的主元所在的列构成列向量组的一个极大线性无关组
- [定理2] 矩阵的初等行变换不会改变行秩 → 即：乘初等矩阵，rank不变
- [定理3] 矩阵的初等行变换不会改变列向量组的线性相关性，从而不会改变列秩
- [矩阵的秩]
  任一矩阵的行秩等于列秩，统称为A的秩，记作 $\operatorname{rank}(A)$
- [推论6] $\operatorname{rank}(A^T)=\operatorname{rank}(A)$
- [推论7] 矩阵的初等行变换不会改变矩阵的秩（转置：从对偶空间看）
- [定理8] 任一非零矩阵的秩等于它的不为零的子式的最高阶数（非方阵也有子式，子式是截取方阵）
  若秩 < n-1，则所有子式都为0
- [推论9] 一个n级矩阵A的秩等于n $\Leftrightarrow|A|\neq0$
- [满秩矩阵] 秩等于级数的方阵
- [推论10] 设 $s\times n$ 矩阵A的秩为r，则A不等于零的r阶子式所在的列（行）构成A的列（行）向量组的一个极大线性无关组
- [求矩阵的秩的方法]
  ① 作初等行/列变换，化为阶梯形矩阵，数非零行个数
  But 若还要求列/行向量组的极大线性无关组，则行/列变换不能都做
  ② 直接取一个最大的方阵（S级），证它的行列式 $\neq0$，成功则 $\operatorname{rank}(A)=S$

§6　线性方程组有解的充分必要条件

- [线性方程组有解判别定理]　$|A|=0\Leftrightarrow$ 无解或无穷解，须结合该定理判断
  线性方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta$ 有解 $\Leftrightarrow$ 增广矩阵的秩 = 系数矩阵的秩
  $\Leftrightarrow\dim\langle\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta\rangle=\dim\langle\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\rangle$

  $\tilde J=\begin{pmatrix}1&-1&1&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&-2\end{pmatrix}$　也说 0 = -2.
  即 $\operatorname{rank}(\tilde J)$ 必然比 $\operatorname{rank}(J)$ 大
  （多一个维度 - 这线性无关）

  若 $r(A)=m$（行），则一定有解
  (A,b) m行，$r\leq m$
  (A,b) 比A多一列，$r\geq m$
  $\therefore r(A,b)=m$

- [证明线性方程组有解的方法]
  去证 $\operatorname{rank}(A)\geq\operatorname{rank}(\tilde A)$
- [定理2]
  线性方程组有解时，若系数矩阵A的秩等于未知量的数目n，则有唯一解（有效信息）
  ……小于……　　无穷多解
  $\begin{cases}\text{唯一解：}r(A)=r(A,b)=n\\ \text{无穷解：}r(A)=r(A,b)<n\\ \text{无解：}r(A)<r(A,b)\text{（就差1）}\end{cases}$
- [推论3]
  齐次线性方程组有非零解 $\Leftrightarrow$ 系数矩阵的秩 < n

§7　齐次线性方程组的解集的结构

- [解向量]
  n元齐次线性方程组的一个解是数域K上一个n元有序数组，称为方程组的一个解向量
- [齐次线性方程组解的性质]
  ① 齐次线性方程组的任意两个解的和还是它的解
  $\gamma,\delta\in W\Rightarrow\gamma+\delta\in W$
  ② 齐次线性方程组的任意一个解的倍数还是它的解
  $\gamma\in W,k\in K\Rightarrow k\gamma\in W$
- [解空间]
  n元齐次线性方程组的解集W是 K^n 的一个子空间，称为齐次线性方程组的解空间
- [基础解系]
  解空间W的一个基称为齐次线性方程组的一个基础解系
  即齐次线性方程组有非零解时，其有限多个解 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 满足 $\begin{cases}\text{线性无关}\\ \text{解空间可由其线性表出}\end{cases}$
- [通解]
  设 $\eta_1,\cdots,\eta_t$ 为一个基础解系，则解集W的代表元素 $k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_t\eta_t$（$k_i\in K$）称为齐次线性方程组的通解
- [定理1]
  数域K上n元齐次线性方程组的解空间W的维数为 $\dim W=n-\operatorname{rank}(A)$（称为"自由度"）

§8　非齐次线性方程组的解集的结构

- [导出组]
  n元齐次线性方程组称为对应n元非齐次线性方程组的导出组
- [非齐次线性方程组解的性质]
  ① n元非齐次线性方程组的两个解的差是它的导出组的一个解
  ② n元非齐次线性方程组的一个解与它的导出组的一个解之和仍是非齐次线性方程组的一个解
- [定理1]
  如果数域K上n元非齐次线性方程组有解，则它的解集U为 $U=\{\gamma_0+\eta\mid\eta\in W\}$
  其中 γ_0 是一个特解，W是导出组的解空间
- [线性流形/陪集]
  若W是 K^n 的一个子空间，$\alpha_0\in K^n$，令 $\alpha_0+W=\{\alpha_0+\eta\mid\eta\in W\}$，则称 α_0+W 是一个W型的线性流形（或W的一个陪集）
- [推论2]
  如果n元非齐次线性方程组有解，其解唯一 $\Leftrightarrow$ 其导出组只有零解
- [通解]
  $U=\{\gamma_0+k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_{n-r}\eta_{n-r}\mid k_i\in K,i=1,2,\cdots,n-r\}$
- [求线性方程组解集/通解方法]
  ① 化成 $\tilde J$，写出一般解
  ② 若非齐次，则先找特解 γ_0
  ③ 去常数项变齐次线性方程组，对自由未知量分别取 $(1,0,\cdots,0)(0,1,0,\cdots,0)\cdots$ 求出一个基础解系
  ④ 有 γ_0 加 γ_0，写解集 $U=\{(\gamma_0)+k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_{n-r}\eta_{n-r}\mid k_i\in K,i=1,2,\cdots,n-r\}$

- [抽象型求线性方程组通解方法]
  eg：已知四元非齐次线性方程 $Ax=b$ 的系数矩阵A的秩 $R(A)=3$，且 $Ax=b$ 有三个特解 ξ_1,ξ_2,ξ_3，满足
  $3\xi_1-\xi_2=(2,2,4,2)^T$　$\xi_2+2\xi_3=(0,3,0,0)^T$，求 $Ax=b$ 的通解
  ① $\dim W=n-\operatorname{rank}(A)$ 求得基础解系的向量个数（4-3=1）
  ② 凑出 $A\alpha=0$ 的 α，求得基础解系（若不止一个要说明求出的 α 间线性无关！）
  $\begin{cases}A(3\xi_1-\xi_2)=2b\\ A(\xi_2+2\xi_3)=3b\end{cases}\to A(9\xi_1-3\xi_2-2\xi_2-4\xi_3)=0$
  ↳ $(6,0,12,6)\to\alpha=(1,0,2,1)$
  ③ 凑出 $A\gamma=b$ 的 γ，求得特解
  $A(3\xi_1-\xi_2)=2b\to A\dfrac{3\xi_1-\xi_2}{2}=b\to\gamma=(1,1,2,1)^T$
  $\therefore\{k\alpha+\gamma\mid k\in K\}$

- [带参数方程组的求解]
  eg：已知线性方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=1\\ x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda\\ x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda^2\end{cases}$ 有无穷多解，求 λ 与方程组的通解
  ① 求 $|A|$，非唯一解则令 $|A|=0$，唯一解则直接令 $|A|\neq0$　　若A非方阵，则直接②，然后
  $|A|=\begin{vmatrix}\lambda&1&1\\1&\lambda&1\\1&1&\lambda\end{vmatrix}=\cdots=(\lambda-1)^2(\lambda+2)$，$|A|=0\to\lambda=1$ 或 -2
  分类讨论 $\begin{cases}\text{主元都不为零}\\ \text{主元为零（余下）}\end{cases}$，用秩判断 $\begin{cases}r(A)=r(A,b)<n\\ r(A)=r(A,b)=n\\ r(A)<r(A,b)\end{cases}$
  ② 化成 $\tilde J$，代入上述 λ 排除无解情况，写通解
  $\left(\begin{array}{ccc|c}\lambda&1&1&1\\1&\lambda&1&\lambda\\1&1&\lambda&\lambda^2\end{array}\right)\xrightarrow{\text{先交换！}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&\lambda&\lambda^2\\1&\lambda&1&\lambda\\\lambda&1&1&1\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&\lambda&1\\0&\lambda-1&1-\lambda&\lambda-\lambda^2\\0&0&(1-\lambda)(2+\lambda)&(1-\lambda)(1+\lambda)^2\end{array}\right)$
  $\lambda=1$. ✓
  $\lambda=-2$. 无解
  一般解为 $x_1=1-x_2-x_3$
  通解：$\begin{cases}x_1=-\frac{?}{?}x_3+\frac{?}{?}\\ x_2=\frac{?}{?}x_3+\frac{1}{3}\\ x_3=x_3\end{cases}\xrightarrow{\text{令}x_3=c}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}-\frac{?}{?}\\\frac{1}{3}\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\\0\end{pmatrix}$

	一般解	通解	基础解系	解集
$\left(\begin{array}{ccc\|c}1&-1&0&2\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{array}\right)$	$\begin{cases}x_1=x_2+2\\x_3=-1\end{cases}\to\begin{cases}x_1=k+2\\x_2=k\\x_3=-1\end{cases}$	$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$	取k=1，$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$	$\{k_1\alpha_1+\gamma\mid k_1\in K\}$
$\left(\begin{array}{ccccc\|c}1&0&-1&-1&-3&1\\0&1&1&2&6&2\end{array}\right)$	$\begin{cases}x_1=x_3+x_4+3x_5+1\\x_2=-x_3-2x_4-6x_5+2\end{cases}\to\begin{cases}x_1=k_1+k_2+3k_3+1\\x_2=-k_1-2k_2-6k_3+2\\x_3=k_1\\x_4=k_2\\x_5=k_3\end{cases}$	$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}3\\-6\\0\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\\0\end{pmatrix}$	$\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ 见左（取 $k_1=1/k_2=1/k_3=1$）	$\{k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+\gamma\mid k_1,k_2,k_3\in K\}$

主变量个数 + 自由变量个数 = 未知数个数
秩　　解空间维度　　系数矩阵列数 → $A_{m\times n}$ 中n更关键！

汇总
一般解：选主元为主变量（不是靠前的就是主变量）
（若干个解）基础解系：$\alpha_1=\begin{pmatrix}\vdots\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}\vdots\end{pmatrix}\cdots\alpha_n$　是 $Ax=0$ 的解！不是特解！ $\begin{cases}\text{是解}\\\text{无关}\\\text{个数}\end{cases}$
（一般形式）通解：$x=c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\cdots+c_n\alpha_n(+\gamma)$
（所有解）解集：$\{c_1\alpha_1+\cdots+c_n\alpha_n(+\gamma)\mid c_1,\cdots,c_n\in K\}$

eg1：已知 $\xi_1=(5,2,0)^T$，$\xi_2=(5,2,1)^T$ 是方程组 $\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1\\ 2x_1+a_{22}x_2+x_3=b_2\\ -x_1+a_{32}x_2+2x_3=b_3\end{cases}$ 的两个解.
试求两个特解不同的通解
必无关：$R\geq2$　　无穷个解 $R<3$　　$\therefore R=2$
$\alpha_1=\xi_1-\xi_2=(0,0,-1)$
$\gamma_1=\xi_1$
$\gamma_2=\xi_2$ / $\frac{\xi_1+\xi_2}{2}$ / …

eg2：已知 β_1,β_2,β_3 是 $A_{4\times3}x=b$ 的三个线性无关解，求 $Ax=b$ 通解
↳ $\beta_1-\beta_2$，$\beta_1-\beta_3$ 为 $Ax=0$ 的解，且线性无关 $\Rightarrow\dim W\geq2$，$R\leq1$
$Ax=b$ 有解 $\xrightarrow{\text{只有零矩阵秩}=0\text{，而零矩阵不满足 }Ax=b\text{.}}R\geq1$
$\therefore R=1$. $\dim W=2$
(✓) $k_1(\beta_1-\beta_2)+k_2(\beta_1-\beta_3)+\dfrac{4\beta_1-\beta_2}{3}$
(✓) $k_1(\beta_1+\beta_2-2\beta_3)+k_2(\beta_1-\beta_3)+\dfrac{\beta_2+2\beta_3}{3}$
↳ 复杂的用矩阵乘法　$r(\beta_1+\beta_2-2\beta_3,\beta_1-\beta_3)=r\left[\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\beta_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&0\\-2&-1\end{pmatrix}\right]=2$

推论：n个线性无关的非齐次解 → n-1个线性无关的齐次解
n-1个线性无关的齐次解 $\xrightarrow{Ax=b\text{有解时}}$ n个线性无关的非齐次解
↳ $\eta_1,\cdots,\eta_s\to\gamma,\gamma+\eta_1,\cdots,\gamma+\eta_s$　　可能无解
$\begin{cases}Ax=0\text{ 有解}\\ Ax=b\text{ 无解}\end{cases}\to\tilde J=$ 有数 "0"

eg1：
齐次解与非齐次解
【李正元改编】
设非齐次线性方程组 $A_{m\times n}x=b$，判断下列命题的正确性
①若 $Ax=0$ $\begin{cases}\text{仅有零解，则 }Ax=b\text{ 有唯一解}&×\\ \text{有无穷多解，则 }Ax=b\text{ 有无穷多解}&×\end{cases}$
②若 $Ax=b$ $\begin{cases}\text{有唯一解，则 }Ax=0\text{ 仅有零解}&✓\\ \text{有无穷多解，则 }Ax=0\text{ 有无穷多解}&✓\\ \text{无解，则 }Ax=0\text{ 一定有解}&✓\end{cases}$
③当 $r(A)=n$ 时，$\begin{cases}Ax=b\text{ 有解}&×\\ Ax=b\text{ 有唯一解}&×\end{cases}$
④当 $r(A)=m$ 时，$\begin{cases}Ax=b\text{ 有解}&✓\\ Ax=b\text{ 有唯一解}&×\end{cases}$

eg2：
已知 $Ax=0$ 和 $Bx=0$ 都是n元线性方程组，下面说法正确的是
①若 $Ax=0$ 的解均是 $Bx=0$ 的解，则 $r(A)\geq r(B)$ ✓　解的信息依于秩的
②若 $r(A)\geq r(B)$，则 $Ax=0$ 的解均是 $Bx=0$ 的解
$n-r(A)\leq n-r(B)$　$\Rightarrow r(B)\leq r(A)$
$x_A=l_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$，$x_B=k_1\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$
$Ax=0$　$Bx=0$

线性表出 $\begin{cases}\text{线性相关}\\ \text{线性方程组有解}\end{cases}$

5. 用向量再次认识线性方程组
向量组：$\alpha_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{pmatrix}$，向量：$b=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}$　　$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_n=b$；$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_n=b$
b能不能由前面这三个向量表示?(可倍乘可加减)
$\begin{pmatrix}a_{11}x_1\\a_{21}x_1\\\vdots\\a_{m1}x_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_{12}x_2\\a_{22}x_2\\\vdots\\a_{m2}x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_{13}x_3\\a_{23}x_3\\\vdots\\a_{m3}x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3\\\vdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+a_{m3}x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}$
b能否由 α_1、α_2、α_3 线性表示 $\begin{cases}\text{不能表示}\Leftrightarrow Ax=b\text{ 无解}\\ \text{表示方式唯一}\Leftrightarrow Ax=b\text{ 有唯一解}\\ \text{表示方式不唯一}\Leftrightarrow Ax=b\text{ 有无穷多解}\end{cases}$

[2016] 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\2&a&1\\-1&1&a\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2&2\\1&a\\-a-1&-2\end{pmatrix}$，求 $AX=B$ 中的X →（同时求2个x）
[2016+2019改编]
已知向量组Ⅰ：$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\a\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\a\end{pmatrix}$，向量组Ⅱ：$\beta_1=\begin{pmatrix}2\\1\\-a-1\end{pmatrix}$，$\beta_2=\begin{pmatrix}2\\a\\-2\end{pmatrix}$
若 β_1,β_2 均可以由 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$ 表示出来，求其中 k_1,k_2,k_3 的取值
$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=\beta_1$
$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta_1$
$\begin{cases}x_1-x_2-x_3=2\\ 2x_1+ax_2+x_3=1\\ -x_1+x_2+ax_3=-a-1\end{cases}$
$r(\text{Ⅰ})=r(\text{Ⅰ},\text{Ⅱ})$ ⇒ Ⅱ可由Ⅰ表示
$r(A)=r(A,B)$
若向量组Ⅰ,Ⅱ可以互相线性表示
$\begin{rcases}r(\text{Ⅰ})=r(\text{Ⅰ},\text{Ⅱ})\\ r(\text{Ⅱ})=r(\text{Ⅰ},\text{Ⅱ})\end{rcases}r(\text{Ⅰ})=r(\text{Ⅱ})=r(\text{Ⅰ},\text{Ⅱ})$

求公共解：联立两式

已知同解：化成了后一样

1. 求公共解：给2个基础解系

eg：已知两个四元齐次方程组的基础解析分别为 $\begin{cases}\xi_1=(5,-3,1,0)^T\\ \xi_2=(-3,2,0,1)^T\end{cases}$ 和 $\begin{cases}\alpha_1=(2,-1,a+2,1)^T\\ \alpha_2=(-1,2,4,a+8)^T\end{cases}$

当 a 为何值时，两个方程组有非零的公共解，并求出所有的公共解

$\begin{cases} x_左=k_1\xi_1+k_2\xi_2 \\ x_右: l_1\alpha_1+l_2\alpha_2 \end{cases}$

$x_左=x_右 \Rightarrow k_1\xi_1+k_2\xi_2+l_1(-\alpha_1)+l_2(-\alpha_2)=0$

得此约束关系式，代回一个通解即得公共解

类似 $\begin{cases} x_1=3a \\ x_2=a+2 \end{cases} \to 3a=a+2$ 解出 $a=1$，回代 $x_1=x_2=3$

用了判断有无解，一定要清楚这是齐次/非齐次！

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & a+2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & a+8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & a+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a+1 \end{pmatrix} \to \begin{cases} a\neq -1, & r(A)=4，公共解仅有零解 \\ a=-1, & r(A)=2<4 \end{cases}$$

令 $\begin{cases} l_1=c_1 \\ l_2=c_2 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} k_1=-c_1-4c_2 \\ k_2=-c_1-7c_2 \end{cases}$ （c_1, c_2 不能同时为零）

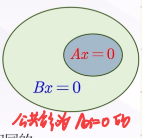
代回 $x_左=k_1\xi_1+k_2\xi_2$ ✓

总结理解 $\begin{cases} Ax=\xi 与 Bx=\eta 的公共解，即方程组 \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} 的解 \\ Ax=0 的基础解系为 \xi_1,\cdots,\xi_s，Bx=0 的基础解系为 \eta_1,\cdots,\eta_s，则两方程组有非零公共解 \Longleftrightarrow \xi_1,\cdots,\xi_s,\eta_1,\cdots,\eta_s 线性相关 \end{cases}$

（$x_左=x_右$）

2. 同解：

若A的解均是B的解



【2003改编】

$Ax=0$ 和 $Bx=0$ 都是 n 元线性方程组，下面说法正确的是

①若 $Ax=0$ 的解均是 $Bx=0$ 的解 $\begin{cases} \Longrightarrow r(A)\geqslant r(B) \\ \Longleftrightarrow \begin{cases} Ax=0 \\ Bx=0 \end{cases} 和 Ax=0 的解是相同的 \\ \Longleftrightarrow r(A)=r\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \end{cases}$

公共解为 $Ax=0$ 的

表示公共解（竖着拼接，就是联立）

②若 $\begin{cases} Ax=0 的解均是 Bx=0 的解 \\ Bx=0 的解均是 Ax=0 的解 \end{cases} \Longleftrightarrow r(A)=r(B)=r\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$（同解）

同解 ⇒ 公共解相互包含 ⇒ 三秩相等

理解：$r(A)=r(B)$ 推不出同解，但再等于 $r\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ 就行：

$r\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \to r\begin{pmatrix} 行最简 \\ B \end{pmatrix} \to r\begin{pmatrix} 行最简 \\ 行最简 \end{pmatrix} \xrightarrow[行最简同]{A.B本质同} r\begin{pmatrix} 行最简 \\ 0 \end{pmatrix}$

③若 $r(A)=r(B)$，则 $\begin{cases} Ax=0 的解均是 Bx=0 的解 \\ Bx=0 的解均是 Ax=0 的解 \end{cases}$ ×

【2021】

$r(B)=r(A,B)$

设3阶矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ 若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 可由向量组 β_1,β_2,β_3 线性表示，则（　）

A 可由 B 表示 ⇔ $r(B)=r(B,A)$ $=r(A,B)$

$BX=A$ 有解

(A) $Ax=0$ 的解均是 $Bx=0$ 的解 → $r(A)=r\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$

(B) $Bx=0$ 的解均是 $Ax=0$ 的解 → $r(B)=r\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$

(C) $A^Tx=0$ 的解均是 $B^Tx=0$ 的解 → $r(A^T)=r\begin{pmatrix} A^T \\ B^T \end{pmatrix}$

(D) $B^Tx=0$ 的解均是 $A^Tx=0$ 的解 → $r(B^T)=r\begin{pmatrix} A^T \\ B^T \end{pmatrix}$

$r(B)=r(A,B)$

引：$\begin{cases} r(A,B)=r(B,A) \\ r\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}=r\begin{pmatrix} B \\ A \end{pmatrix} \\ r(A)=r(A^T) \\ r(A,B)=r[(A,B)^T]=r\begin{pmatrix} A^T \\ B^T \end{pmatrix} \end{cases}$

→初等变换

横着拼接　竖着拼接

同解

$Ax=0$ 的解均是 $Bx=0$ 的解，且 $r(A)=r(B) \leftrightarrow Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解

$r(A)=r\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}=r(B)$

$Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解 $\Longleftrightarrow$
- $Ax=0$ 的解均是 $Bx=0$ 的解，且 $Bx=0$ 的解也均是 $Ax=0$ 的解（通解相等）
- 等价，就是可以相互表示！
- A 与 B 的行向量组等价 $\Longleftrightarrow r(A)=r(B)=r\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$
- $[A] \longrightarrow \cdots \longrightarrow$ 行最简 $\longrightarrow \cdots \longrightarrow [B] \longrightarrow \cdots \longrightarrow$ 有相同的行最简
- $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 的基础解析（向量组）等价（基础解系不一定相等）；$Ax=0$ 与 $Bx=0$ 的解空间是同一个空间（数一）

$Ax=b$ 与 $Bx=c$ 同解 $\Longleftrightarrow$
- $Ax=b$ 的解均是 $Bx=c$ 的解，且 $Bx=c$ 的解也均是 $Ax=b$ 的解（通解相等）
- $r(A,b)=r(B,c)=r\begin{pmatrix} A,b \\ B,c \end{pmatrix} \Longleftrightarrow (A,b)$ 与 (B,c) 的行向量组等价
- $[A,b] \longrightarrow \cdots \longrightarrow$ 行最简 $\longrightarrow \cdots \longrightarrow [B,c] \longrightarrow \cdots \longrightarrow$ 相同的行最简

两个方程组同解，则它们的通解一定相等，基础解系中向量的个数也一定相等

eg1：【2005】

$Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解 $\Longleftrightarrow r(A)=r(B)=r\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$

已知(I) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0 \\ 2x_1+3x_2+5x_3=0 \\ x_1+x_2+ax_3=0 \end{cases}$ 和(II) $\begin{cases} x_1+bx_2+cx_3=0 \\ 2x_1+b^2x_2+(c+1)x_3=0 \end{cases}$ 同解，试求参数 a,b,c

$r(A)=r(B)=r\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$　　$r(B)\leqslant 2$

A不满秩 → $|A|=0$，得 $a=2$，$r(A)=2$（可直接看出）

$r(B)=2$，$r\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}=2$

$\begin{cases} c-b-1=0 \\ c-b^2-1=0 \end{cases}$ 结合

得 $\begin{cases} b=1 \\ c=2 \end{cases}$

eg2：已知(I)和(II) $\begin{cases} x_1+bx_2+cx_3=0 \\ 2x_1+b^2x_2+(c+1)x_3=0 \end{cases}$ 同解，且(I)的基础解析为 $(1,1-1)^T$，求参数 b,c

$r(A)=r(B)=r\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$　　$n=3$. $\dim W=1$ $\therefore r(A)=2$

I的通解：$x=k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 代入到II中，应满足恒成立

$\begin{cases} k+bk-ck=0 \\ 2k+b^2k-(c+1)k=0 \end{cases} \xrightarrow[k\neq 0]{恒成立} \begin{cases} 1+b-c=0 \\ 1+b^2-c=0 \end{cases} \to \begin{cases} b=1 \\ c=2 \end{cases}$ ✓ 或 $\begin{cases} b=0 \\ c=1 \end{cases}$ ×

再代入检验 $r(B)=2$

4个结论：

秩的证明 $\begin{cases} 【1】\begin{cases} 若P为列满秩矩阵，r(PA)=r(A)【左乘列满秩不改变秩】 \\ 若P为行满秩矩阵，r(AP)=r(A)【右乘行满秩不改变秩】 \end{cases} \\ 【2】r(A)=r(A^T)=r(A^TA)=r(AA^T)\ [四秩相等] \\ 【3】A_{m\times n}B_{n\times s}=O，则 r(A)+r(B)\leqslant n \\ 【4】设A是n阶方阵，则 A^nx=0 与 A^{n+1}x=0 同解 \end{cases}$

[向量专题]

基础知识补充:

- 向量内积: $\alpha^T\beta = (a_1, a_2, \cdots, a_n)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1b_1 + \cdots + a_nb_n$

行向量 × 列向量 = 式子(数) ⇒ 口诀"行列式"

列向量 × 行向量 = 矩阵 (秩为1, 全成比例)

推论补充:

- 设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 无关, 若 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \beta$ 相关, 则 β 可由 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 表示, 且表示方式唯一 (因为表示它的向量们都无关)
- n 个 m 维向量, 若 $n > m$. 则一定线性相关 (理解: n 维表情的最大线性无关组向量个数为 n)

  eg: $n+1$ 个 n 维向量一定相关

  → 由此可理解: $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 均为 m 维向量, 则 $\begin{cases} r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \le n & (个数) \\ r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \le m & (维度) \end{cases}$

向量组的秩 可以把向量拼成矩阵, 向量组的秩跟这个矩阵的秩是一样的

3.向量组之间秩的关系

表示性:
- (I)可由(II)表示 ⟹
  - $r(\mathrm{I}) \le r(\mathrm{II})$ 【谁被表示谁秩小】
  - $r(\mathrm{II}) = r(\mathrm{II}, \mathrm{I})$ 【谁被表示谁在右】 联想 $AX=B$
  - 但(II)不可由(I)表示 ⟹ $r(\mathrm{I}) < r(\mathrm{II})$
- (I)可由(II)表示, 且(II)可由(I)表示 ⟺ 可以相互表示, 即向量组等价
- (I)可由(II)表示, 且 $r(\mathrm{I}) = r(\mathrm{II})$ ⟺ 向量组等价, 可以相互表示 很像, 但还是分别记吧
- (I)可由(II)表示, 且(I)中向量个数大于(II)中向量个数 ⟹ (I)一定线性相关

【以少表多, 多必相关】

向量组等价 若向量组(I)中的每一个向量都能由向量组(II)线性表示, 且向量组(II)中的每一个向量都能由向量组(I)线性表示 } 两个向量组可以相互线性表示

向量组I	向量组II
$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$	$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$

$r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = r(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m) = r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m)$

$r(\mathrm{I}) = r(\mathrm{II}) = r(\mathrm{I}, \mathrm{II})$ **三秩相等**

16/27

题型:

- 将 β_3 用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示

  $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = \beta_3$ 的方程

- 判断向量间是否线性相关 ⇒ 先看数量! (< 维度)

  eg: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3$ 无关, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 无关吗? $k\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + l\alpha_2$ 无关吗?

  $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3)$ 初等变换, 秩不变
  $= r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$

  $r = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k & l \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2$ ✓ $(r \le 2)$

- 证明……能否由……线性表出 可用秩的语言

  β 可由 $\alpha_1, \cdots \alpha_n$ 线性表示 → $\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \beta$ 线性相关

  β 不可由 $\alpha_1, \cdots \alpha_n$ 线性表示 $\not\to$ $\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \beta$ 线性无关
  ($\alpha_1, \cdots \alpha_n$ 可以相关)

eg:

设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 和向量 β 和向量 γ (都是同维向量)

(1) 如果 β、γ 都可以用 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性表示, 则 $\beta + \gamma$ 也可以用 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性表示 ✓

(2) 如果 β、γ 都不可以用 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性表示, 则 $\beta + \gamma$ 也不可以用 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性表示 ✗

(3) 如果 β 可以用 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性表示, 而 γ 不可以用 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性表示, 则 $\beta + \gamma$ 不可以用 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性表示 ✓

可消去

eg: 0向量

eg: $\begin{matrix}(0,1) \\ (1,-1)\end{matrix} \to (1,0) = \alpha_1$

- 向量组等价: 可相互表出
  矩阵等价: 形状相同 + 秩相等 不限定维度, 只看个数

$A = (\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$ 与 $B(\beta_1, \cdots, \beta_m)$ 等价

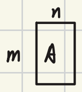
⇕

n 维列向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ $(m<n)$ 无关, 则 n 维列向量组 $\beta_1, \cdots, \beta_m$ 无关 ⇐ $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 与 $\beta_1, \cdots, \beta_m$ 等价

- 非方阵的满秩

  左乘 列满秩
  右乘 行满秩 → 秩不变

性质整理



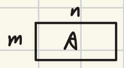
列满秩: $r(A) = n$

$r(AB) = r(B)$

列向量线性无关. 有 n 个行向量线性无关

$Ax=0$ 仅有零解. $Ax=b$ 可能无解.

A^TA 为正定矩阵 (得 $n \times n$) → (小的!) ←



行满秩: $r(A) = m$

$r(BA) = r(B)$

行向量线性无关. 有 m 个列向量线性无关

$Ax=b$ 一定有解

AA^T 为正定矩阵 (得 $m \times m$)

第4章 矩阵的运算

§1 矩阵的运算

[矩阵的加法与数乘]

加法：$A=(a_{ij})$，$B=(b_{ij})$ 都是数域K上 $s\times n$ 矩阵

$C=A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{s\times n}$

数量乘法：$k\in K$，$A=(a_{ij})$

$M=kA=(ka_{ij})_{s\times n}$ $\Rightarrow |kA|=k^n|A|$

[矩阵加法与数乘满足的8条性质]

① $A+B=B+A$
② $(A+B)+C=A+(B+C)$
③ 零矩阵 0 使得 $A+0=0+A=A$
④ A的负矩阵 $-A=(-a_{ij})$，有 $A+(-A)=(-A)+A=0$
⑤ $1A=A$
⑥ $(kl)A=k(lA)$
⑦ $(k+l)A=kA+lA$
⑧ $k(A+B)=kA+kB$

[矩阵的乘法]

设 $A=(a_{ij})_{s\times n}$，$B=(b_{ij})_{n\times m}$

$C=A\times B=(c_{ij})_{s\times m}$，$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\cdot b_{kj}$

c_{ij} 是左矩阵A的第i行行向量与B的第j列列向量点乘的结果

[矩阵乘法的性质]

① 结合律：$(AB)C=A(BC)$

不适合交换律：$AB\neq BA$ （若 $AB=BA$，称其为可交换的）

$AB=0$ 不能推出 $A=0$ 或 $B=0$

② 分配律：左分配律：$A(B+C)=AB+AC$

右分配律：$(A+B)C=AC+BC$

不适合消去律：$AC=BC$ 且 $C\neq 0$，不能推出 $A=B$

③ 主对角线上元素都是1，其余元素都是0的n级矩阵 称为n级单位矩阵，记作 I_n 或 I

有 $I_sA_{s\times n}=A_{s\times n}$，$A_{s\times n}I_n=A_{s\times n}$

若A为n级矩阵，则 $IA=AI=A$

④ $k(AB)=(kA)B=A(kB)$

主对角线上元素都是k，其余元素都是0的n级矩阵 称为n级数量矩阵，即 kI

数量矩阵与任一同级矩阵（方阵）可交换：$(kI)A=A(kI)$

⑤ 方幂：设A是一个n级矩阵，$A^m\overset{def}{=}\underbrace{AA\cdots A}_{m个}$，$A^0\overset{def}{=}I$

则有 $\left.\begin{matrix}A^kA^l=A^{k+l}\\(A^k)^l=A^{kl}\end{matrix}\right]k,l\in N^*$

但 $(AB)^k\neq A^kB^k$

$\underbrace{(AB)(AB)\cdots(AB)}_{k个}\neq\underbrace{A\cdots A}_{k个}\underbrace{B\cdots B}_{k个}$

[零因子]

对于矩阵A，若存在一个非零矩阵B使得 $AB=0$，称A是一个左零因子

$BA=0$ 右零因子

同时满足 $\longrightarrow$ 零因子

称零矩阵是平凡的零因子，其余零因子称为非平凡的

[推论]

线性方程组 $\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\\cdots\\a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=b_s\end{cases}$

可写成：$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{s1}&a_{s2}&\cdots&a_{sn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_s\end{pmatrix}$

可写成：$\underset{系数矩阵}{A}X=\beta$

列向量 η 是齐次线性方程组 $AX=0$ 的解 $\Leftrightarrow A\eta=0$

[矩阵乘法的简化表示]

① 记 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ （α为列向量）

$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n$

② 记 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ （α为列向量）

$A_{s\times n}=(a_{ij})$，$B_{n\times m}=(b_{ij})$

AB 的第j列为 $\begin{pmatrix}a_{11}b_{1j}+a_{12}b_{2j}+\cdots+a_{1n}b_{nj}\\a_{21}b_{1j}+a_{22}b_{2j}+\cdots+a_{2n}b_{nj}\\\vdots\\a_{s1}b_{1j}+a_{s2}b_{2j}+\cdots+a_{sn}b_{nj}\end{pmatrix}=b_{1j}\alpha_1+b_{2j}\alpha_2+\cdots+b_{nj}\alpha_n$

$AB=(b_{11}\alpha_1+b_{21}\alpha_2+\cdots+b_{n1}\alpha_n,\ \cdots,\ b_{1m}\alpha_1+b_{2m}\alpha_2+\cdots+b_{nm}\alpha_n)$

[转置运算]

① $(A+B)^T=A^T+B^T$
② $(kA)^T=kA^T$
③ $(AB)^T=B^TA^T$ $\Rightarrow (A^T)^T=A$

§2 特殊矩阵

[对角矩阵] 也可为0

主对角线以外元素全为0的方阵，记作 $diag\{d_1,d_2,\cdots,d_n\}$

本质：对行/列缩放

$diag(d_1,d_2,\cdots,d_s)\cdot\begin{pmatrix}\gamma_1\\\gamma_2\\\vdots\\\gamma_s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d_1\gamma_1\\d_2\gamma_2\\\vdots\\d_s\gamma_s\end{pmatrix}$

行向量组 左乘 diag，秩不变

列 右

$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\cdot diag(d_1,d_2,\cdots,d_s)=(d_1\alpha_1,d_2\alpha_2,\cdots,d_n\alpha_n)$

特别地：$diag(d_1,d_2,\cdots,d_s)\cdot diag(c_1,c_2,\cdots,c_s)=diag(d_1c_1,d_2c_2,\cdots,d_sc_s)$

$I=diag(1,1,\cdots,1)$

[上(下)三角矩阵]

上三角：主对角线下方全为0

（标准定义：$a_{ij}=0$，当 $i>j$）

两个n级上三角矩阵A与B的乘积仍为上三角矩阵，且AB的主对角元 等于A与B相应主对角元的乘积

即：$(AB)(i,j)=0$ 当 $i>j$，$(AB)(i,i)=a_{ii}b_{ii}$

[基本矩阵]

只有一个元素是1，其余元素均为0的矩阵称为基本矩阵，(i,j)元为1的基本矩阵记作 E_{ij}

设 $A_{s\times n}(i,j)=\begin{pmatrix}\gamma_1\\\gamma_2\\\vdots\\\gamma_s\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$

$E_{ij}A=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\\gamma_j\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$ 第i行 “左行右列” $AE_{ij}=(0,\cdots,0,\alpha_i,0,\cdots,0)$ 第j列

把A的第j行搬到第i行，其余行清0　把A的第i列搬到第j列，其余列清0

[初等矩阵]

由单位矩阵经过一次初等行(列)变换所得矩阵

仅有三类：$P(j,i(k))$ 对j+k倍i　$P(i,j)$ 互换　$P(i(c))$ 数乘

用初等矩阵左乘A $\Leftrightarrow$ 对A作一次相应的初等行变换

用初等矩阵右乘A $\Leftrightarrow$ 对A作一次相应的初等列变换 “左行右列”

[对称矩阵]

满足 $A^T=A$ 的矩阵（必为方阵，且 $A(i,j)=A(j,i)$）

[斜(反)对称矩阵]（不考）

满足 $A^T=-A$ 的矩阵（必为方阵，且 $A(i,j)=-A(j,i)$）

特别地，有 $A(i,i)=-A(i,i)=0$ （主对角线元素为0）

§3 矩阵乘积的秩与行列式

[定理1] 设 $A=(a_{ij})_{s\times n}$，$B=(b_{ij})_{n\times m}$，则

$rank(AB)\leq min\{rank(A),rank(B)\}$ （多次变换，秩不会变大，只可能变小）

[命题2] 设A是实数域上 $s\times n$ 矩阵，则 $rank(A^TA)=rank(AA^T)=rank(A)=rank(A^T)$

（多乘一个 A^T/A，只是改变最后行列的表述） A^TA 即 n维向量 $\to$ m维空间 $\to$ n维空间中，秩不变

[定理3] 设A,B都是n级矩阵，则 $|AB|=|A||B|$

[退化] n级矩阵A 满足 $|A|\neq 0\Rightarrow$ 非退化

$|A|=0\Rightarrow$ 退化

[Binet-Cauchy 比内-柯西公式]（不考）

$A_{s\times n}$，$B_{n\times s}$，若 $s>n$，则 $|AB|=0$

若 $s\leq n$，则 $|AB|=\sum_{1\leq v_1<v_2<\cdots<v_s\leq n}A\begin{pmatrix}1,2,\cdots,s\\v_1,v_2,\cdots,v_s\end{pmatrix}B\begin{pmatrix}v_1,v_2,\cdots,v_s\\1,2,\cdots,s\end{pmatrix}$

A的所有s阶子式与B的相应s阶子式的乘积之和

§4 可逆矩阵

[可逆矩阵] 对于数域K上的矩阵A，如果存在数域K上的矩阵B，

使得 $AB=BA=I$，则A是可逆矩阵/非奇异矩阵（A,B一定是方阵）

若A可逆，$AB=I$，则B唯一

[逆矩阵] $AB=I\Rightarrow$ B为A的逆矩阵，记作 A^{-1}

若A可逆，则 A^{-1} 也可逆

n级零矩阵不是可逆矩阵

[命题1] 如果A是可逆矩阵，则 $|A|\neq 0$

[伴随矩阵] n级矩阵A的第i行元素的代数余子式写成第i列，组成伴随矩阵，记作 A^*

$AA^*=A^*A=\begin{pmatrix}|A|&0&\cdots&0\\0&|A|&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&|A|\end{pmatrix}=|A|I$　$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ $A^*=\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$

区分行列式数乘与矩阵数乘：

一行(列)提一个公因子　一整个矩阵提一个公因子（行列式是数的运算，矩阵是一张数表）

[伴随矩阵法求逆矩阵]（仅适用于方阵）

数域K上n级矩阵A可逆 $\Leftrightarrow |A|\neq 0$ （此方法要先判断 $det\neq 0$）

可逆时，有：$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$

[推论3] n级矩阵A可逆 $\Leftrightarrow rank(A)=n$ （满秩）

[推论4] 数域K上n级矩阵A可逆 $\Leftrightarrow$ A的行(列)向量组线性无关

[推论5] 数域K上n级矩阵A可逆 $\Leftrightarrow$ A的行(列)向量组为 K^n 的一个基

[推论6] 数域K上n级矩阵A可逆 $\Leftrightarrow$ A的行(列)空间等于 K^n

[判断矩阵是否可逆的方法]

设A与B都是n级矩阵，如果 $AB=I$，则A与B都是可逆矩阵，且 $A^{-1}=B$，$B^{-1}=A$

[推论7]

初等矩阵都可逆：$P(j,i(k))^{-1}=P(j,i(-k))$

$P(i,j)^{-1}=P(i,j)$ 或 $P(j,i)$

$P(i(c))^{-1}=P(i(\frac{1}{c}))$

[可逆矩阵的性质]

① 单位矩阵I可逆，且 $I^{-1}=I$

② 如果A可逆，A^{-1} 也可逆，且 $(A^{-1})^{-1}=A$

③ 如果n级矩阵A,B都可逆，则AB也可逆，且 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

推广：$(A_1A_2\cdots A_s)^{-1}=A_s^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}$

④ 如果A可逆，则 A^T 也可逆，且 $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$ （转置与逆变换间无顺序要求）

⑤ 可逆矩阵经过初等行变换化成的简化行阶梯行矩阵一定是单位矩阵

⑥ 矩阵A可逆 $\Leftrightarrow$ A可以表示一些初等矩阵的乘积

⑦ 用一个可逆矩阵去左(右)乘矩阵A，结果的秩与A的秩一样

[初等变换法 求逆矩阵]

把A与I并排放一起组成 $n\times 2n$ 级矩阵 $(A,I)\xrightarrow{初等行变换}(I,A^{-1})$

此方法可以不算行列式，若 $det=0$ 自会出现全零行，化不成单位矩阵

可推广：$AX=B$ 求X $\Rightarrow (A|B)$ 无须 $A^{-1}\times B$！

$(I|A^{-1}B)$

§5 矩阵的分块

[子矩阵] 由矩阵A的若干行、若干列（可不相等）的交叉位置元素按原来顺序排成的矩阵

[分块矩阵相乘]

需要满足：① 左矩阵的列组数 = 右矩阵的行组数

② 左矩阵的每个列组所含列数 = 右矩阵相应行组所含行数

$$\begin{array}{c}\\s_1\\\vdots\\s_p\\\vdots\\s_u\end{array}\begin{array}{c}\begin{matrix}n_1&n_2&\cdots&n_t\end{matrix}\\\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&\cdots&A_{1t}\\\vdots&&&\\A_{p1}&A_{p2}&\cdots&A_{pt}\\\vdots&&&\\A_{u1}&A_{u2}&\cdots&A_{ut}\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{c}\begin{matrix}m_1&\cdots&m_q&\cdots&m_v\end{matrix}\\\begin{pmatrix}B_{11}&\cdots&B_{1q}&\cdots&B_{1v}\\B_{21}&\cdots&B_{2q}&\cdots&B_{2v}\\\vdots&&\vdots&&\\B_{t1}&\cdots&B_{tq}&\cdots&B_{tv}\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{c}\\n_1\\n_2\\\vdots\\n_t\end{array}$$

[推论1] A为 $s\times n$ 矩阵，B为 $n\times m$ 矩阵，B的列向量组为 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$

$AB=(A\beta_1,A\beta_2,\cdots,A\beta_m)$

[推论2] $A_{s\times n}\neq 0$，$B_{n\times m}$ 的列向量组为 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$

则 $AB=0\Leftrightarrow\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 都是齐次线性方程组 $AX=0$ 的解

[解矩阵方程方法（尤其是不可逆矩阵）]

$AX=B\Leftrightarrow(AX_1,AX_2,AX_3)=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ 列向量组

$\Leftrightarrow AX_1=\beta_1,AX_2=\beta_2,AX_3=\beta_3$

同时求解：$(A\ B)=(A\ \ \beta_1\ \beta_2\ \beta_3)$

$\xrightarrow{初等行变换}$ 得到三组一般解/解，可求 $X_1,X_2,X_3\Rightarrow$ 求得X

[分块对角矩阵] 主对角线上所有子矩阵都是方阵，其余矩阵全为0

$\begin{pmatrix}A_1&0&0&\cdots&0\\0&A_2&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&A_s\end{pmatrix}$ 可简写为 $diag\{A_1,A_2,\cdots,A_s\}$

[分块上三角矩阵] $\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&\cdots&A_{1s}\\0&A_{22}&\cdots&A_{2s}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&A_s\end{pmatrix}$

[分块矩阵的初等行/列变换]（不考）

① 把一个块行的左P(P为矩阵)倍 加到另一个块行上

② 两块行互换

③ 用一个可逆矩阵左乘某一块行

（列变换：把左乘改为右乘）

[分块单位矩阵] 把单位矩阵分块所得

[分块初等矩阵] 分块单位矩阵经一次分块矩阵的初等行/列变换得到的矩阵

[结论] 对分块矩阵做分块矩阵的初等行/列变换 $\Leftrightarrow$ 左/右乘相应的分块初等矩阵（不考）

[推论] 分块矩阵的初等行/列变换不改变矩阵的秩

§6 正交矩阵，欧几里得空间 R^n

[正交矩阵] 实数域上方阵A满足 $A^TA=I$

[推论] $A^TA=I\Leftrightarrow$ A可逆且 $A^{-1}=A^T\Leftrightarrow AA^T=I$

[正交矩阵的性质] “旋转 + 反射”

① I是正交矩阵

② 若A与B是正交矩阵，则AB也是正交矩阵

③ 若A是正交矩阵，则 A^{-1}（即 A^T）也是正交矩阵

④ 若A是正交矩阵，则 $|A|=\pm 1$ （非充分）eg: shear

[Kronecker 记号] $\delta_{ij}=\begin{cases}1,&i=j\\0,&i\neq j\end{cases}$

[定理1]

设实数域上n级矩阵A的行向量组为 $\gamma\cdots$，列…为 $\alpha\cdots$

A为正交矩阵 $\Leftrightarrow\gamma_i\gamma_j^T=\begin{cases}1,&当i=j\\0,&当i\neq j\end{cases}$ $\Leftrightarrow\alpha_i^T\alpha_j=\begin{cases}1,&当i=j\\0,&当i\neq j\end{cases}$

注意1个向量

$=\delta_{ij}$，$1\leq i,j\leq n$　$=\delta_{ij}$，$1\leq i,j\leq n$

[内积] 在 R^n 中，任给 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$，$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$

规定 $(\alpha,\beta)\overset{def}{=}(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)$，称为 R^n 的标准内积

$(\alpha,\beta)=\alpha^T\beta$

（点乘）

[内积的性质] 对 $\forall\alpha,\beta,\gamma\in R^n$，$k\in R$ 有：

① $(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$

② $(\alpha+\gamma,\beta)=(\alpha,\beta)+(\gamma,\beta)$

③ $(k\alpha,\beta)=k(\alpha,\beta)$

④ $(\alpha,\alpha)\geq 0$，当且仅当 $\alpha=0$ 时取等

[欧几里得空间] 定义了标准内积后，称 R^n 为一个欧几里得空间

向量 α 的长度 $|\alpha|$ 规定为 $|\alpha|\overset{def}{=}\sqrt{(\alpha,\alpha)}$

[单位向量] $(\alpha,\alpha)=1$ $\Leftrightarrow AA^T=A^TA=1$

[单位化] 非零向量 α 乘上 $|\alpha|^{-1}$

[正交] $(\alpha,\beta)=0$，称 α 与 β 是正交的，记作 $\alpha\perp\beta$

零向量与任何向量正交

[正交向量组] 向量组中两两正交

仅由一个非零向量组成的向量组也是正交向量组

若每个向量都是单位向量，则称为正交单位向量组

[命题2] 欧几里得空间 R^n 中，正交向量组一定线性无关

[正交基] 欧几里得空间 R^n 中，n个向量组成的正交向量组是 R^n 的正交基

若是正交单位向量组，则为标准正交基

如：$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$

正交矩阵每个向量都是单位向量（$\gamma_i\gamma_j^T=\alpha_i^T\alpha_j=1$）

[命题3] $A_{n\times n}$ 是正交矩阵 $\Leftrightarrow$ A的行/列向量组是 R^n 的一个标准正交基

[施密特正交化过程] 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 R^n 的一个线性无关的向量组，

令 $\begin{cases}\beta_1=\alpha_1\\\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1\\\cdots\\\beta_s=\alpha_s-\sum_{j=1}^{s-1}\frac{(\alpha_s,\beta_j)}{(\beta_j,\beta_j)}\beta_j\end{cases}$

[补] 再将 β_i 单位化：$\eta_i=\frac{1}{|\beta_i|}\beta_i$，则 $\eta_1,\cdots,\eta_s$ 是与 $\alpha_1,\cdots\alpha_s$ 等价的正交单位向量组

§7 K^n 到 K^s 的线性映射

[变换] 集合S到自身的一个映射，称为S上的一个变换

[恒等映射] 映射 $f:S\to S$，再把S中每一个元素对应到它自身

记作 1_S

n列 m行 $R^n\to R^m$ 定义域 陪域（想去的地方）

值域：（实际能到的地方）ImA 值域 = 列空间/像空间 $\to$ 仅与A有关，x只是组合系数，与值域无关（与值有关）

$Ax=b$ 有解 $\Leftrightarrow$ b在值域里

满射 $\Leftrightarrow$ 值域 ImA = 陪域 R^m 空间不被升维

eg：$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&1\end{pmatrix}$ 二维 $\to$ 三维，A的列空间为 R^2 而非 R^3，故非满射（R^3上很多元素在R^2里没有对应）

定义域：R^2，陪域：R^3，值域 R^2（列空间）

单射 $\Leftrightarrow$ 核 $kerA=\{0\}$ $\Leftrightarrow det(A)\neq 0$

空间不被降维 只有零向量的像是零向量

eg：$A=\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}$，非零向量 $a=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ 与 $\vec{0}$ 都能使 $Aa=0$，故非单射

双射 $\Leftrightarrow$ 矩阵A是可逆方阵

空间不被降维也不被升维

函数：陪域为数集的映射 $\Leftrightarrow$ 把n维向量空间压缩至1维数轴

eg：$A_{1\times n}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$

$Ax=a_1x_1+\cdots+a_nx_n$ （线性函数）

第5章 矩阵的相抵与相似

§1 等价关系与集合的划分

[笛卡儿积] 设 S, M 是2个集合，则集合 $\{(a,b) \mid a\in S,\ b\in M\}$ 为 S 与 M 的笛卡儿积，记作 $S\times M$
指有序对（不是点乘）

[二元关系] S 为非空集合，$S\times S$ 的一个非空子集 W 称为 S 上的一个二元关系
若 $(a,b)\in W$，则称 a 与 b 有 W 关系，记作 aWb 或 $a\sim b$
（a,b 在 S 中，但不一定在 W 中）

[等价关系] 二元关系 $\sim$ 满足：
关系 $\updownarrow$ 对应 集合
① $a\sim a$（反身性）
② $a\sim b \Rightarrow b\sim a$（对称性）
③ $a\sim b$ 且 $b\sim c \Rightarrow a\sim c$（传递性）
则称 $\sim$ 是 S 上的一个等价关系

[等价类] 设 $\sim$ 是 S 上的一个等价关系，对于 $a\in S$，
令 $\bar{a} \overset{def}{=} \{x\in S \mid x\sim a\}$，则称 $\bar{a}$ 是由 a 确定的等价类（a 为 $\bar{a}$ 的一个代表）
① $x\in\bar{a} \Leftrightarrow x\sim a$
② $\bar{x}=\bar{y} \Leftrightarrow x\sim y$

[定理1] 设 $\sim$ 是 S 上的一个等价关系，$\forall a,b\in S$，$\bar{a}$ 与 $\bar{b}$ 要么相等，要么不相交（$\bar{a}\cap\bar{b}=\varnothing$）

[划分] 若集合 S 是一些非空子集 S_i 的并集，且其中不相等的子集一定不相交，
则称集合 $\{S_i \mid i\in I\}$ 是 S 的一个划分，记作 $\pi(S)$（不重复的分法就是划分）

[定理2] 设 $\sim$ 是 S 上的一个等价关系，则所有等价类组成的集合是 S 的一个划分，记作 $\pi_\sim(S)$
同一物的不同说法（场合不同）

[商集] 设 $\sim$ 是 S 上的一个等价关系，由所有等价类组成的集合称为 S 的商集，对于关系 $\sim$ 的商集，记作 $S/\sim$
来源：$\mathbb{Z}$ 对模7同余关系的商集：$\mathbb{Z}/(7)=\{\bar{0},\bar{1},\cdots,\bar{5},\bar{6}\}$

§2 矩阵的相抵

[相抵] 矩阵 A 经一系列初等行、列变换变成矩阵 B，则 A 与 B 相抵，记作 $A\overset{相抵}{\sim}B$
$\Leftrightarrow \operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(B)$

§3 广义逆矩阵

§4 矩阵的相似

非方阵没有相似的说法

[相似] 对 A_n, B_n，若存在可逆矩阵 P_n，使得 $P^{-1}AP=B$，则 A 与 B 是相似的，记作 $A\sim B$
相似是一种等价关系，故有"相似类"

[计算技巧] $B_1=P^{-1}AP$，则 $B_1^m=P^{-1}A^mP$

[相似的性质]
① 相似的矩阵，行列式相等
② 相似的矩阵可逆性相同，（若有）逆矩阵也相似
③ 相似的矩阵，秩相等
④ 相似的矩阵，迹相等
$tr(AB)=tr(BA)$ 迹的性质
$\Rightarrow tr(A)=tr(APP^{-1})=tr(P^{-1}AP)=tr(B)$

[迹] n 级矩阵 A 的主对角线上的元素的和称为 A 的迹，记作 $tr(A)$
基向量拉伸程度总和/特征值之和
det 是特征值之积
性质：$tr(A+B)=tr(A)+tr(B)$
$tr(kA)=k\,tr(A)$
$tr(AB)=tr(BA)$，$tr(ABC)=tr(BCA)=tr(CAB)$

[相似标准形] A_n 相似于对角矩阵
$\Leftrightarrow$ K^n 中有 n 个线性无关的列向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 和 n 个数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 使得：
$A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1$，$A\alpha_2=\lambda_2\alpha_2$，$\cdots$，$A\alpha_n=\lambda_n\alpha_n$
此时令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 则 $P^{-1}AP=\operatorname{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$
记忆：$P^{-1}AP=D \Rightarrow AP=PD \Rightarrow A\alpha_i=\lambda_i\alpha_i$
若 A_n 相似于 D，则称 A 可对角化，D 称为 A 的相似标准形

§5 矩阵的特征值和特征向量

[特征值] 对于 A_n，若存在 $A\alpha=\lambda_0\alpha$（$\lambda_0\in K$），则称 λ_0 是 A 的一个特征值，
对任意 n 级方阵都能列出此式
称 α 是 A 的属于特征值 λ_0 的一个特征向量
（$k\neq0$ 时，$k\alpha$ 也是 A 的属于特征值 λ_0 的一个特征向量）

[特征矩阵]
$$\lambda I-A=\begin{pmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{pmatrix}$$
$A\alpha=A\cdot A\alpha=A(\lambda\alpha)=\lambda\cdot\lambda\alpha$
$\lambda^2=1$
$\lambda=0$ $\downarrow$ $n-r$
$\lambda=1$ $\downarrow$ 去证明秩为 r
$A^2=A \Leftrightarrow A(A-I)=0$

[特征多项式] $|\lambda I-A|$ 称为 A 的特征多项式

[定理1] λ_0 是 A 的一个特征值 $\Leftrightarrow$ λ_0 是 $|\lambda I-A|$ 在 K 中的一个根
α 是 A 的属于特征值 λ_0 的一个特征向量 $\Leftrightarrow$ α 是齐次线性方程组 $(\lambda_0I-A)X=0$ 的一个非零解
理解：$A\alpha=\lambda_0\alpha=\lambda_0I\alpha$
$(\lambda_0I-A)\alpha=0 \Rightarrow$ 方程组视角

[判断/求解矩阵特征值与特征向量的方法]
① 计算特征多项式 $|\lambda I-A|$
② 判别 $|\lambda I-A|$ 在数域 K 中有没有根，若无根则无特征值与特征向量，
若有根，则全部根就是全部特征值
③ 对 A 的每一个特征值 λ_j，求 $(\lambda_jI-A)X=0$ 的解空间（求基础解系 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$）
则 A 属于 λ_j 的全部特征向量组成的集合是 $\{k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots k_t\eta_t \mid k_1,k_2\cdots k_t\in K$ 且不全为 $0\}$

[特征子空间] $(\lambda_jI-A)X=0$ 的解空间即 A 的属于 λ_j 的特征子空间（但零向量不是特征向量）

[矩阵的 k 阶主子式]
子式 $A\begin{pmatrix}i_1,i_2,\cdots,i_k\\ i_1,i_2,\cdots,i_k\end{pmatrix}$ $(1\le k\le n)$

[命题2] 对 n 级矩阵 A 的特征多项式 $|\lambda I-A|$，
$(-1)^k\sum\limits_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} A\begin{pmatrix}i_1,i_2,\cdots,i_k\\ i_1,i_2,\cdots,i_k\end{pmatrix}\lambda^{n-k}$
λ^n 的系数是1，常数项为 $(-1)^n|A|$，λ^{n-k} 的系数为 A 的所有 k 阶主子式的和乘 $(-1)^k$
作用：① 验算 ② 部分分析
特别地，λ^{n-1} 的系数是 $-tr(A)$

[(接上节)相似的性质]
⑤ 相似的矩阵有相等的特征多项式
⑥ 相似的矩阵有相同的特征值（包括重数相同）
（注：特征多项式相等的矩阵不一定相似）

§6 矩阵可对角化的条件

[定理1(重复)] 数域 K 上 n 级矩阵可对角化 $\Leftrightarrow$ A 有 n 个线性无关的特征向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$
此时令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 则有 $P^{-1}AP=\operatorname{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$
称上述对角矩阵为 A 的相似标准形，其除了主对角线上元素顺序外是唯一的

[推论4] n 级矩阵 A 属于不同特征值的特征向量是线性无关的

[定理5] K^n 中矩阵 A 可对角化 $\Leftrightarrow$ A 的属于不同特征值的特征子空间维数之和等于 n

[推论6] A 有 n 个不同的特征值 $\Rightarrow$ K^n 中矩阵 A 可对角化

§7 实对称矩阵的对角化

[正交相似] $P^{-1}AP$ 的 P 为正交矩阵 T

[定理1] 实对称矩阵的特征多项式在复数域中的每一个根都是实数（代数基本定理只在复数域成立，故为了保证 A 有特征值，先从 $\mathbb{C}$ 讨论）
"n 次多项式 $\to$ n 个根"

[定理2] 实对称矩阵 A 的属于不同特征值的特征向量是正交的（没讨论同 λ_j 也正交）

[定理3] 实对称矩阵一定正交相似于对角矩阵（别管原因，总之可知实对称矩阵同 λ_j 也一定线性无关，故可正交化）

[求实对称矩阵 A 正交相似的对角矩阵的方法]
① 求 $|\lambda I-A|$ 的实根
② 对于每一个特征值 λ_j，求出 $|\lambda_jI-A|=0$ 的一个基础解系 $\alpha_{j1},\cdots$
然后进行施密特正交化和单位化，得到特征向量的正交单位版本 $\eta_{j1},\cdots$
③ 令 $T=(\eta_{11},\cdots,\cdots)$（总个数为 n）
则 $T^{-1}AT=\operatorname{diag}\{\lambda_1,\cdots\}$

[深刻理解]

八(10分)、设 3 阶对称矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=6,\lambda_2=\lambda_3=3$，且与特征值 $\lambda_1=6$ 对应的特征向量为 $\mathbf{p}_1=(1,1,1)^T$，求正交矩阵 P 使得 P^TAP 为对角矩阵.

不同 λ 对应的特征向量正交 $\Rightarrow$ $\vec{p_2},\vec{p_3}$ 是线性方程组 $x_1+x_2+x_3=0$ 的解
$\Rightarrow$ 特征向量(基础解系)不唯一，我们只选代表（线性无关；最好正交，可省去正交化一步）
取 $\vec{p_2}=(-1,1,0)^T$，$\vec{p_3}=(-1,0,1)$

单位化后，得 P

第6章 二次型，矩阵的合同

§1 二次型和它的标准形

- [n元二次型] n个变量 $x_1,\cdots,x_n$ 的一个二次齐次多项式

  一般形式：
$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)= a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+\cdots+a_{1n}x_1x_n$$
$$+a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{2n}x_2x_n$$
$$+\cdots$$
$$+a_{n1}x_nx_1+a_{n2}x_nx_2+\cdots+a_{nn}x_n^2$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j\text{，其中 } a_{ji}=a_{ij}$$

- [二次型矩阵]

  二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的矩阵 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & & & & \vdots\\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$
  主对角元为 x_i^2 项系数
  非主对角元 a_{ij} 为 x_ix_j 项系数的一半

  A为对称矩阵

  令 $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$，则该二次型可写作 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX$

- [非退化线性替换]

  $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$，$Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$，C为n级可逆矩阵，则 $X=CY \overset{\text{def}}{=}$ 变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 到变量 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 的一个 ~

  [理解] $Y=C^{-1}X$：Y是X的基向量经过变换 C^{-1} 得到的新基下的表示系数
  C^{-1} 为基变换矩阵，但二次型研究用坐标变换矩阵C更方便计算

- [二次型的等价]

  两个n元二次型 X^TAX 与 Y^TBY 等价 ⇔ 存在 $X=CY$，把 X^TAX 变成 Y^TBY
  记作 $X^TAX\cong Y^TBY$

- [矩阵的合同]

  A与B合同 ⇔ 存在可逆矩阵C，使 $C^TAC=B$
  记作 $A\simeq B$　　A与B合同，即A与B代表同一二次型在不同坐标系下的表达
  合同也是等价关系 ⇒ "合同类"

- [命题1] $X^TAX\cong Y^TBY \Leftrightarrow A\simeq B$

  二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)=X^TAX$，其矩阵为A
  变换坐标：$X=CY$
  $f(x_1,\cdots,x_n)=(CY)^TACY=Y^T(C^TAC)Y=Y^TBY$，其矩阵为B
  二次型的等价变换，就是去找矩阵的合同

  等价的三件事
  $X=TY$，正交替换
  $T^TAT=D$，矩阵合同
  $f(x_1,\cdots,x_n)$ 化为标准二次型

- [标准形]

  "只含平方项的二次型"：X^TAX 的一个标准形
  若对称矩阵A合同于一个对角矩阵，此对角矩阵为A的一个合同标准形

- [正交替换] T为正交矩阵，称变量替换 $X=TY$ 为正交替换

  [二次型化为标准形]

  二次型只含平方项 ⇔ 矩阵为对角矩阵　$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$ → 使 $x_i\neq x_j$ 的系数 a_{ij} $(i\neq j)$ 为0

- [思路]（实数域）一个普通二次型 → 其矩阵A为实对称矩阵 → 有 $T^{-1}AT=D$，$T^{-1}=T^T$ → 有 $T^TAT=D$

  实数域上的n元二次型 X^TAX 一定等价于只含平方项的二次型，而且能找到正交矩阵T，
  使得经过变量替换 $X=TY$ 后，$X^TAX=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$（$\lambda_i$ 为A的全部特征值）

- [二次型经正交替换化为标准形的方法]

  eg：二次曲面S在直角坐标系I中的方程为 $x^2+4y^2+z^2-4xy-8xz-4yz-1=0$
  作直角坐标变换，把它化成标准方程

  ① 写出二次型及其矩阵
  主对角元为 x_i^2 项系数
  非主对角元 a_{ij} 为 x_ix_j 项系数的一半

  $f(x,y,z)=x^2+4y^2+z^2-4xy-8xz-4yz$

  $A=\begin{pmatrix}1&-2&-4\\-2&4&-2\\-4&-2&1\end{pmatrix}$

  ② 用实对称矩阵对角化方法找出正交矩阵T，使 $T^{-1}AT=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$

  $T=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt5}{5}&\frac{4\sqrt5}{15}&\frac23\\-\frac{2\sqrt5}{5}&\frac{2\sqrt5}{15}&\frac13\\0&-\frac{\sqrt5}{3}&\frac23\end{pmatrix}$

  ③ 作正交替换 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$ 可把二次型化为标准形 $f(x_1,\cdots,x_n)=\lambda_1y_1^2+\cdots\lambda_ny_n^2$

  $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}x^*\\y^*\\z^*\end{pmatrix}$，$f(x,y,z)=5x^{*2}+5y^{*2}-4z^{*2}$

- [定理2] 数域K上任一对称矩阵都合同于一个对角矩阵

- [二次型的秩]

  同一个二次型的标准形不唯一，但对应的矩阵唯一
  二次型的秩 $\overset{\text{def}}{=}$ 二次型矩阵的秩 = 标准形中系数不为0的平方项

§2 实二次型的规范形

- [将普通标准形化为规范形] $d_1y_1^2+\cdots d_py_p^2-d_{p+1}y_{p+1}^2-\cdots-d_ry_r^2 \longrightarrow z_1^2+\cdots+z_p^2-z_{p+1}^2-\cdots-z_r^2$

- [规范形] 形如 $z_1^2+\cdots+z_p^2-z_{p+1}^2-\cdots-z_r^2$ 的二次型标准型（平方项系数为1.-1.0，且有顺序）
  p为正惯性指数，r-p为负惯性指数，正-负 (2p-r) 为符号差

- [合同规范形] 合同于形如 $\mathrm{diag}\{1,\cdots,1,-1,\cdots,-1,0,\cdots,0\}$ 的n级实对称矩阵

- [惯性定理] n元实二次型 X^TAX 的规范形是唯一的

  理解：旋转/拉伸坐标系
  无法将曲线 ↔ 直线 (r=2) (r=1) / 曲面 ↔ 柱面 (r=3) (r=2)，故r不变
  无法把椭圆 ↔ 双曲线 (p=2) (p=1) / 单叶双曲面 ↔ 双叶双曲面 (p=2) (p=1)，故p不变

- [命题2] 两个n元二次型等价 ⇔ 规范形相同（r.p都相等）
- [推论4] 两个n级实对称矩阵合同 ⇔ 同上

- [补] r为非零行数目．p为非零行中对角元为+1的数目，r-p个是为-1的，n-r个是为0的

§3 正定二次型与正定矩阵

- [正定] 对任意非零列向量 α，都有 $\alpha^TA\alpha>0$　比如 $\alpha=(0,0,1)^T$
  正定的二次型 ⟷ 正定矩阵（一定是对称矩阵）

- [定理1] n元实二次型 X^TAX 是正定的 ⇔ 正惯性指数 $p=n$（即：满秩＋符号全为正）
- [推论2] ⇔ 规范形为 $y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2$
  ⇔ 标准形中n个系数>0
- [定理3] ⇔ $A\simeq I$
  ⇔ A的合同标准形中主对角元全>0
- [推论4] ⇔ A的特征值全>0

- [推论6] 非退化线性替换不改变实二次型的正定性
  旋转/拉伸坐标系　(r.p)

- [推论7] 正定矩阵的行列式一定>0
  普通矩阵（正定的合同类）转为标准型 (I)：$A=C^TIC$
  $|A|=|C|^2>0$

- [k阶顺序主子式] $A\begin{pmatrix}1,2,\cdots,k\\1,2,\cdots,k\end{pmatrix}$（必须从"1"开始）（这样讨论也最精简）

- [定理8] 实对称矩阵A是正定的 ⇔ A的所有顺序主子式>0

- [判定某实二次型是否正定的方法]

  eg：$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2-3x_3^2+4x_1x_2+2x_2x_3$

  (法一) ① 写矩阵　$A=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&2&1\\0&1&-3\end{pmatrix}$
  ② 算所有顺序主子式>0　$\begin{vmatrix}1&2\\2&2\end{vmatrix}=-2<0$ → 非正定

  (法二) ① 写矩阵
  ② 算A的特征值全>0（麻烦！）

- [与行列式的关系]

  对于任一实可逆矩阵C，都有 C^TC 为正定矩阵
  C^TC 是对称矩阵 ✓
  C是实可逆 ✓
  $C^TC=C^TIC \Rightarrow C^TC\simeq I$
  也可：因 $|C|\neq0$，$x^TC^TCx=(Cx)^TCx=|Cx|^2>0$

  抽象矩阵：构造二次型
  设 P 为 $m\times n$ 实矩阵，$r(P)=n$，$A=P^TP$，证明 A 是正定矩阵
  对称性：$A^T=(P^TP)^T=P^TP=A$
  正定性：构造二次型 $f=x^TAx$，证明 $f\geqslant0$，且 $f=0$ 时仅有零解
  $f=x^TAx=x^TP^TPx=(Px)^T(Px)=\|Px\|^2\geqslant0\Longrightarrow f\geqslant0$
  因为 P 为列满秩矩阵，$r(P)=n\Longleftrightarrow Px=0$，当且仅当 $x=0$ 时，$f=0$，所以 A 正定

  $|A|=0$ → A^TA 为半正定矩阵
  $x^TA^TAx=|Ax|^2\geqslant0$ 且存在 $x_0\neq0$ 使 $Ax_0=0$（齐次方程组有非零解）

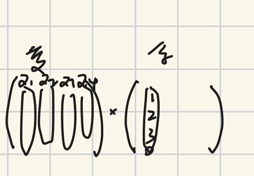
- [半正定…]

  半正定：$\alpha^TA\alpha\geqslant0$ → 特殊情况：正定
  半负定：$\alpha^TA\alpha\leqslant0$ → 特殊情况：负定
  负定：$\alpha^TA\alpha<0$
  不定：都不满足

[矩阵专题]

1. 本质理解

- 左乘：



新矩阵的每一列 都是原矩阵的所有列线性组合得到的

- 右乘：

新矩阵的每一行 都是原矩阵的所有行线性组合得到的

2. 万能公式 (*, -1, T)

$(A^{\bullet})^{\bullet} = (A^{\bullet})^{\bullet}$
$\begin{cases} (A^*)^{-1} = (A^{-1})^* \\ (A^T)^* = (A^*)^T \\ (A^{-1})^T = (A^T)^{-1} \end{cases}$

$(AB)^{\bullet} = B^{\bullet}A^{\bullet}$
$\begin{cases} (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \\ (AB)^T = B^TA^T \\ (AB)^* = B^*A^* \end{cases}$

3. 特殊乘法

① "行列式" $\alpha^T\beta = (a_1, a_2, \cdots, a_n)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = (a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)$

② "列行阵" (秩一) $\alpha^T\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_2b_1 & \cdots & a_nb_1 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}$

③ 阵列列 ⇒ 方程 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$
$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$

4. 乘法性质

- 不满足交换律
  - 本身就无法交换 $A = (\ )_{m\times s}$, $B = (\ )_{s\times n}$　$\begin{cases} AB \neq BA \\ (AB)^n \neq A^nB^n \end{cases}$
  - 交换结果不同型 行列式.列行阵.必然不同型
  - 交换结果不相等 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- 不满足消去律
  - $AB = O \not\Rightarrow A = O$ 或 $B = O$　$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
  - $AB = AC$ 且 $A \neq O \not\Rightarrow B = C$　$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
  - (将矩阵乘法视为行线性组合)
- 具有结合律 $(AB)C = A(BC)$
- 具有分配律 $\begin{cases} \text{左分配律:} C(A+B) = CA + CB \\ \text{右分配律:} (A+B)C = AC + BC \end{cases}$

5. 初等矩阵

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$　$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} \text{左乘P即行变换} \\ \text{右乘P即列变换} \end{cases}$　(左乘：PA. P为系数. → 行变换)

用乘初等矩阵表示初等变换，得把每次初等变换分开写成一系列P相乘

eg: 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{100}\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，求 A　第一列的20倍加到第3列　右乘→列变换. 形状控制一样哦!

$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 5 & 2 & 100 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 5 & 2 & 100 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 5 & 2 & 200 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 20 \end{pmatrix}$

6. 抽象矩阵求逆矩阵 → 配凑

eg1: n阶矩阵A有 $A^2 + 3A - 5E = O$，求 A^{-1}, $(A+E)^{-1}$, $(A+xE)^{-1}$

(1) 提A：$A(A+3E) = 5E$　$A \cdot \frac{A+3E}{5} = E$

(2) 提A+E：$(A+E)(A+2E) = 7E$　$(A+E)\frac{A+2E}{7} = E$

(3) $(A+xE)[A+(3-x)E] \cdots$

7. $AX = E$

$\begin{cases} \text{A可逆. 则求}A^{-1} \\ \text{A不可逆. 则老实当方程组解去} \end{cases}$

eg: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & a & 1 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}$　$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & a \\ -a-1 & -2 \end{pmatrix}$　求 $AX=B$ 无解/唯一解/无穷多解时 a的值.

$\begin{cases} AX = \beta_1 \\ AX = \beta_2 \end{cases}$ 的公共解　两个一起解

$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & a & 1 & 1 & a \\ -1 & 1 & a & -a-1 & -2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & a+2 & 3 & -3 & a-4 \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a & 0 \end{array}\right)$

$a \neq 1, a \neq -2$ 时. → $\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{3a}{a+2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{a-4}{a+2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$　有唯一解

$a=1$ 时. → $\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$　$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -k_1 & -k_2 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$a=-2$ 时 → $\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$　无解

8. 可逆与向量组等价

$AB = C$ → C的行向量组可由B的行向量组表示
$B = A^{-1}C$ → B的行向量组可由C的行向量组表示
A可逆 → B.C 行向量组等价

$AB = C$ → C的列向量组可由A的列向量组表示
$A = CB^{-1}$ → A的列向量组可由C的列向量组表示
B可逆 → A.C列向量组等价

9. 秩

$r(AB) \leq \begin{cases} r(A) \\ \text{or} \\ r(B) \end{cases} \leq \begin{cases} r(A,B) \\ \text{or} \\ r\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \end{cases} \leq r(A) + r(B)$

秩越乘越小，越拼越大，分开加最大

$A \cdot A^* = |A|E$

$r(A)$ = 非零子式的最高阶数

秩的意义 $\begin{cases} \text{行：有效方程的个数} \\ \text{列：独立向量的个数} \end{cases}$

分块矩阵的秩 $\begin{cases} r\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = r(A) + r(B) \\ r\begin{pmatrix} O & B \\ A & O \end{pmatrix} = r(A) + r(B) \end{cases}$　$\begin{cases} r\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} \geq r(A) + r(B) \\ \text{同理} \cdots \end{cases}$　若A/B可通过行列变换消去C. 则=　若消不掉. 则秩增加

Ⅰ可由Ⅱ线性表示 $\begin{cases} r(\text{Ⅰ}) \leq r(\text{Ⅱ}) \\ r(\text{Ⅱ}) \leq r(\text{Ⅱ}, \text{Ⅰ}) \end{cases}$　谁被表示谁秩小

秩相等
- 二秩相等 (矩阵等价)：$r(A) = r(B)$
- 三秩相等
  - 向量组等价：$r(\text{Ⅰ}) = r(\text{Ⅱ}) = r(\text{Ⅰ}, \text{Ⅱ})$
  - 方程组同解：$r(A) = r(B) = r\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$
- 四秩相等 (转置矩阵)：$r(A) = r(A^T) = r(AA^T) = r(A^TA)$

伴随矩阵的秩

$r(A^*) = \begin{cases} n, & r(A) = n \\ 1, & r(A) = n-1 \\ 0, & r(A) < n-1 \end{cases}$

秩与方程组的解

$\begin{cases} Ax=0 \text{ 的解均为 } Bx=0 \text{ 的解. 则 } r(A) \geq r(B) \\ AB = O. \text{ 则 } r(A) + r(B) \leq n \end{cases}$

10. 矩阵的高次幂

① 数归法

② 秩一矩阵　$A = \alpha\beta^T \Rightarrow A^n = \alpha\beta^T\alpha\beta^T \cdots \alpha\beta^T = \alpha(\beta^T\alpha)^{n-1}\beta^T$

eg: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}(1\ 2\ 3)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}(1\ 2\ 3) \cdots \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}(1\ 2\ 3)$
$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} 17^{n-1} (1\ 2\ 3)$
$= 17^{n-1} \cdot A$
$tr(A) = 17$

③ 相似矩阵

④ 二项展开　将一个矩阵拆为2个高次幂好求的矩阵 (一般是 kE+零零阵)

eg: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \left[E + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right]^n = E + nB + \frac{n(n-1)}{2}B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 4n^2-n \\ 0 & 1 & 4n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$B^3 = O$

11. 分块矩阵

① 分块矩阵乘法

当作正常元素来. 但得保证整体和局部的内标都相等

② 分块矩阵转置

$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{pmatrix}$　$(A, B)^T = \begin{pmatrix} A^T \\ B^T \end{pmatrix}$　$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}^T = (A^T, B^T)$

整体和局部都要转置

③ 分块矩阵高次幂

$\begin{pmatrix} A & & \\ & B & \\ & & C \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} A^n & & \\ & B^n & \\ & & C^n \end{pmatrix}$

副对角线无高次幂公式

④ 分块矩阵行列式

$\begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ D & B \end{vmatrix} = |A||B| \xrightarrow{\text{变体}} \begin{vmatrix} O & A_{n\times n} \\ B_{m\times m} & O \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} O & A \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} D & A \\ B & O \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|A||B|$

$\begin{vmatrix} A & & \\ & B & \\ & & C \end{vmatrix} = |A||B||C|$　$\begin{vmatrix} & & A \\ & B & \\ C & & \end{vmatrix} \neq (-1)^{n_1n_2n_3}|A||B||C|$　(降阶.套二阶做)
✓ $n_1n_2 + n_1n_3 + n_2n_3$

⑤ 分块矩阵的逆　主不变.副对调. 左乘同行右乘同列. 再添负号 (C不变)
2条都调

$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}$　$\begin{cases} \begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{pmatrix} \end{cases}$

$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$　$\begin{cases} \begin{pmatrix} C & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} O & A \\ B & C \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix} \end{cases}$

本质：$\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AX & AY \\ CX+BZ & CY+BW \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & O \\ O & E \end{pmatrix}$

解方程 (easy) $\begin{cases} AX = E \\ AY = O \\ CX + BZ = O \\ CY + BW = E \end{cases}$

⑥ 分块矩阵的秩 (重复)

$\begin{cases} r\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = r(A) + r(B) \\ r\begin{pmatrix} O & B \\ A & O \end{pmatrix} = r(A) + r(B) \end{cases}$　$\begin{cases} r\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} \geq r(A) + r(B) \\ \text{同理} \cdots \end{cases}$　若A/B可通过行列变换消去C. 则=　若消不掉. 则秩增加

⑦ 分块矩阵的伴随　行列式×逆矩阵

$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^* = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1}$

12. 运用矩阵乘法

eg1:

找到相似矩阵B

(2019) 设 A 为3阶矩阵, 三维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 且 $\begin{cases} A\alpha_1 = \alpha_1 \\ A\alpha_2 = \alpha_1 - \alpha_2 \\ A\alpha_3 = \alpha_1 - \alpha_3 \end{cases}$

向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，令可逆矩阵 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$

$AP = A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = PB$

$AP = PB$，又因为 P 可逆

所以 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$，$A \sim B$

13. 乘法拆分

$A\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & \\ c_2 & \\ c_3 & 3 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} A\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \\ A\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \end{cases}$

[相似专题]

1. 推导

可逆矩阵 P $\xrightarrow[\text{列分块}]{P=(\xi_1,\cdots,\xi_n)}$ $A(\xi_1,\cdots,\xi_n)=(\xi_1,\cdots,\xi_n)\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases}A\xi_1=\lambda_1\xi_1\\ \vdots\\ A\xi_n=\lambda_n\xi_n\end{cases} \longrightarrow |A-\lambda E|=0\cdots$

$AP=PD$

2. 计算技巧

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda&-1&-1\\-1&2-\lambda&-1\\-1&-1&2-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-\lambda&-1&-1\\-2&2-\lambda&-1\\1-\lambda&-1&2-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-\lambda&-1&-1\\-2&2-\lambda&-1\\0&0&1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda&-1\\-2&2-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(\lambda-3)^2=0$$

往往需要一次行变换和一次列变换

3. 特征值与特征向量

①

2012

设 A 为3阶矩阵，P 为3阶可逆矩阵，且 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$

若 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$Q=(\alpha_1-2023\alpha_2,2024\alpha_2,\alpha_3)$，$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$

同一个特征值的特征向量的线性组合，仍是该特征值的特征向量

$\alpha_1-2023\alpha_2$ 仍是特征值2的特征向量

$2024\alpha_2$ 也仍是特征值2的特征向量

上题表示相似变换矩阵P并不唯一，但特征值与特征向量必须一一对应

若 $Q=(\alpha_1-2023\alpha_2,\alpha_3,2024\alpha_2)$ $Q^{-1}AQ=\text{diag}(2,-1,2)$

②

快速判断矩阵能否相似对角化

1.相似对角化充要条件(代数重数=几何重数)

①特征值全都不同

②k重特征值，都具有k个无关的特征向量(共n个)

③总共有n个无关的特征向量

2.是否存在长相特殊的矩阵，直接就确定可以相似对角化呢？

①实对称矩阵(不证)

②秩一矩阵，且迹不为零(单独出视频证)

③上(下)三角矩阵，主对角线元素全不同(特征值全不同)

$A^2-(a+b)A+abE=0$

若 $A^2-(a+b)A+abE=0\to(A-aE)(A-bE)=0$ 的形式，且 $a\neq b$，则A一定可以相似对角化

1.代数重数 ≥ 几何重数

$n\geqslant n-r(A-aE)+n-r(A-bE)$

$r(A-aE)+r(A-bE)\geqslant n$

2.$AB=O\Longrightarrow r(A)+r(B)\leqslant n$

$(A-aE)(A-bE)=0$

$r(A-aE)+r(A-bE)\leqslant n$

因此，代数重数=几何重数，只要能分解为两个单因式，就一定可以相似对角化

$f(A)$

③

eg1:

1992

$A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k\\k\\k\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

A 为3阶矩阵，A 的每行元素均为2(之和)，且 $A\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-2\\0&0\\1&-2\end{pmatrix}$，写出 A 的特征值与特征向量

$A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$A\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=-1\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$，$A\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\0\\-2\end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

eg2:

1997

能得方程！

已知 $\xi=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ 是矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}$ 的一个特征向量，求参数 a,b 及该特征向量对应的特征值

$$A\xi=\lambda\xi\Longrightarrow\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\lambda_0\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{cases}2-1-2=\lambda_0\\5+a-3=\lambda_0\\-1+b+2=-\lambda_0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}\lambda_0=-1\\a=-3\\b=0\end{cases}$$

④ A与λ的推算

情况一：已知 λ_j 为A的特征值，则 $f(\lambda_j)$ 就是 $f(A)$ 的特征值 (f为多项式)

情况二：仅已知 $f(A)=0$，则 λ 必须满足 $f(\lambda)=0$，但解出来的λ不一定就是特征值

eg: A是4阶，$A^2-A=0$，$r(A)=3$，求A的特征值

$f(\lambda)=\lambda^2-\lambda=0$，$\lambda=1$ 或 0

$\dim A=1\Rightarrow\lambda=0$ 为一重，A的特征值为 1,1,1,0

A特征值与特征向量的推广

A的相似类

矩阵	A	$aA+bE$	A^n	$f(A)$	A^{-1}	A^*	A^T	$P^{-1}AP$
特征值	λ	$a\lambda+b$	λ^n	$f(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{\|A\|}{\lambda}$	λ	λ
特征向量	ξ	ξ	ξ	ξ	ξ	ξ	β	$P^{-1}\xi$

特征向量不同！

$$A\xi=\lambda\xi\begin{cases}(aA+bE)\xi=aA\xi+bE\xi=(a\lambda+b)\xi\\A^n\xi=\lambda^n\xi\\f(A)\xi=f(\lambda)\xi\\A^{-1}\xi=\frac{1}{\lambda}\xi\\|A|A^{-1}\xi=\frac{|A|}{\lambda}\xi,\ A^*\xi=\frac{|A|}{\lambda}\xi,\ |A|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n\end{cases}$$

$|A^T-\lambda E|=|(A-\lambda E)^T|=|A-\lambda E|$

设 $B=P^{-1}AP$，

$BP^{-1}=P^{-1}A$ 需证明！

$BP^{-1}\xi=P^{-1}A\xi$

$B(P^{-1}\xi)=\lambda(P^{-1}\xi)$

eg1:

2008

求行列式就是求特征值之积！

设3阶矩阵 A 的特征值是1，2，2，E 为3阶单位矩阵，则 $|4A^{-1}-E|=$

$(4A^{-1}-E)$ 的特征值是： $|4A^{-1}-E|=$

eg2:

2008改编

设3阶矩阵 A 的特征值是1，2，2，E 为3阶单位矩阵

则 $(A^{-1}-E)^*$ 的特征值 $\lambda_{Bj}=\frac{1}{\lambda_{Aj}}-1$

令 B= $(A^{-1}-E)$ 的特征值： $0,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}$

B: $(A^{-1}-E)^*$ 的特征值： $B^*=|B|B^{-1}$

$\lambda_{B^*}=\frac{|B|}{\lambda_B}=\frac{0}{0},\ \frac{0}{-\frac{1}{2}},\ \frac{0}{-\frac{1}{2}}$

换法：$\frac{\prod\lambda_{Bj}}{\lambda_{B1}}=\lambda_{B2}\lambda_{B3}=\frac{1}{4}$

矩阵乘法的运用：

2008

[经典题型]

错题

设 A 是2阶矩阵，α_1,α_2 为线性无关的2维列向量 $A\alpha_1=0,A\alpha_2=2\alpha_1+\alpha_2$，则 A 的非零特征值为

$A(\alpha_1,\alpha_2)=(A\alpha_1,A\alpha_2)=(0,2\alpha_1+\alpha_2)=(\alpha_1,\alpha_2)\begin{pmatrix}0&2\\0&1\end{pmatrix}$，记 $P=(\alpha_1,\alpha_2)$，$B=\begin{pmatrix}0&2\\0&1\end{pmatrix}$ (代入) (提系数阵)

P 可逆，$AP=PB$，$P^{-1}AP=B$，A 与 B 相似

相似的性质

对于方阵 A 和 B，若存在可逆矩阵 P，

使得 $P^{-1}AP=B$，则称 A 和 B 相似，$A\sim B$

1.所有数值型性质都相等

$$\Rightarrow\begin{cases}tr(A)=tr(B)\\|A|=|B|\\r(A)=r(B)\\\lambda_A=\lambda_B\\|A-\lambda E|=|B-\lambda E|\end{cases}$$

2.三大重要矩阵对应相似

$$\Rightarrow\begin{cases}A^T\sim B^T\\A^{-1}\sim B^{-1}\\A^*\sim B^*\\f(A)\sim f(B)\end{cases}$$

需证

除了转置，都是用同一个P，可以大胆用

3.相似的传递性

若 $\begin{cases}A\sim C\\B\sim C\end{cases}$，则 $A\sim B$

这里的 C 一般为对角矩阵

证明两个矩阵不相似

1.存在数值型性质不同

$$\begin{cases}tr(A)\neq tr(B)\\|A|\neq|B|\\r(A)=r(B)\\A\text{和}B\text{的特征值不相等}\\|A-\lambda E|\neq|B-\lambda E|\end{cases}$$

2.三大重要矩阵不相似

$$\begin{cases}A^T\nsim B^T\\A^{-1}\nsim B^{-1}\\A^*\nsim B^*\\f(A)\nsim f(B)\end{cases}$$ (逆否命题)

3.相似的传递性

若 $\begin{cases}A\sim C\\B\nsim C\end{cases}$，则 $A\nsim B$

这里的 C 一般为对角矩阵

判断相似，第一反应是对比数值量。

再不行找看看 A-kE会不会更easy.

没招了才进行对角化

eg:

2018

下列矩阵与 $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ 相似的是(A) r=2

(A) $\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

r=2 r=1 r=1 r=1

大部都减E

[秩一矩阵]

秩一阵的性质

定义：$A_{n\times n}$，$r(A)=1$，矩阵各列(行)成比例

矩阵：$A=\alpha\beta^T=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}(1,2,3)=$ 秩一阵

$1a+2b+3c$

$A=\begin{pmatrix}a&2a&3a\\b&2b&3b\\c&3c&3c\end{pmatrix}=\alpha\beta^T=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}(1,2,3)$

可分解为一列×一行 ⇔ 秩一矩阵

(转置迹不变)

矩阵的迹：$\text{tr}(A)=\beta^T\alpha=\sum_{i=1}^n a_{ii}=(1,2,3)\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=$ 行列式(数) $=\alpha^T\beta=(a,b,c)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$，$A^T=\beta\alpha^T$

迹的特征向量：$\begin{cases}A=\alpha\beta^T\\A\alpha=\alpha\beta^T\alpha\end{cases}$，$A\alpha=\text{tr}(A)\alpha$，$\alpha$ 是 A 的属于特征值迹的特征向量

高次幂：$A^n=[\text{tr}(A)^{n-1}]A\Rightarrow\lambda^n=[\text{tr}(A)^{n-1}]\lambda$ $\lambda=0/\text{tr}(A)$，$\exists\lambda=\text{tr}(A)$，$\text{tr}(A)=\sum\lambda_j$

特征值：$\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n-1}=0$，$\lambda_n=\text{tr}(A)$

相似对角化：$\text{tr}(A)\neq0$(充要条件)

证明见下

秩一矩阵的相似对角化

已知 $r(A)=1$，则 $\begin{cases}\lambda=0\text{或}tr(A)\\\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=tr(A)\end{cases}$，所以 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n-1}=0$，$\lambda_n=tr(A)$

$(A-0E)x=0\begin{cases}r(A)=1\\\text{基础解系中向量个数}=\text{无关的特征向量个数}=n-r(A)=n-1\end{cases}$

$(A-\text{tr}(A)E)x=0\begin{cases}①\text{若}tr(A)=0\text{，则特征值0是}n\text{重根，仅有}n-1\text{个无关的特征向量，不可对角化}\\②\text{若}tr(A)\neq0\begin{cases}\text{特征值0提供}n-1\text{个特征向量}\\\text{特征值}tr(A)\text{提供1个特征向量}(\alpha)\end{cases}\text{，共}n\text{个无关的特征向量，可对角化}\end{cases}$

秩一矩阵的应用

1.计算秩一矩阵的特征值以及对角化矩阵Λ

2.计算(秩一矩阵 ± E)的特征值以及对角化矩阵Λ

3.利用相似的传递性证明相似

算特征值可以：拆成 秩一阵 ± kE

秩都为1
tr(A) 相等

实对称矩阵

实对称矩阵一定可以相似对角化(特征值均为实数)

并且一定存在正交矩阵 Q(一定可逆)，使得 $Q^TAQ=\Lambda$

A 为实对称，则 A 的三大重要矩阵 A^*,A^{-1},A^T 以及 $f(A)$ 也为实对称

正交矩阵Q

定义：$QQ^T=Q^TQ=E$，即 $Q^{-1}=Q^T$(正交矩阵的逆很好求)

特点：$Q=(e_1,e_2,\ldots,e_n)$

正交矩阵是由两两正交的单位列(行)向量拼成的矩阵

性质：
- $|Q|=1$ 或 -1
- 特征值为1或 -1 "旋转/反射"
- 元素均小于等于1，若存在1，则该列该行其余元素均为0
- Q^T,Q^{-1},Q^* 均是正交矩阵
- A,B 均为正交矩阵，则 AB 和 BA 也是正交矩阵
- $\beta=Q\alpha$ 为正交变换，且 $||\alpha||=||\beta||$ (不改变向量长度)
- A 是正交矩阵，则 A^T 是 $AX=E$ 的解

$$\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$|QQ^T|=|E|$

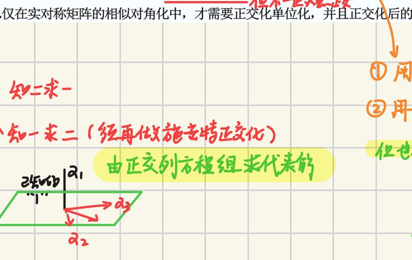
根据行列式是1或 -1 记住即可

单位向量

$XX^T=E,\begin{cases}QQ^T=E\\Q^{-1}(Q^{-1})^T=Q^TQ=E\\Q^*(Q^*)^T=Q^TQ=E\end{cases}$

$(AB)(AB)^T=ABB^TA^T=E$

实对称矩阵的相似对角化



相比普通矩阵的相似对角化

我们不用判断实对称矩阵是否可以相似对角化了

但正交化、单位化会耗费我们的时间

可能你很好奇

为什么还需要正交化、单位化？

实际上，这是为了二次型做铺垫

实对称矩阵的特有性质

1.不同特征值的特征向量一定线性无关，并且天然正交 → 可推导。

2.属于同一特征值的特征向量也一定线性无关，但我们需要把它们化为彼此正交(为二次型做铺垫) 但不一定天然正交

3.仅在实对称矩阵的相似对角化中，才需要正交化单位化，并且正交化后的向量仍然是特征向量

① 用于检验计算

② 用于 知二求一 (已知2个特征向量，n=3，可直接求出第三个)

但也不是"唯一解"，而是代表解！

eg: $\alpha_1=(-1,-1,1)^T$ $\alpha_2=(1,-2,-1)^T$

可列方程组 $\begin{cases}-x_1-x_2+x_3=0\\x_1-2x_2-x_3=0\end{cases}\to\begin{pmatrix}-1&-1&1\\1&-2&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$

$\to\alpha_3=(1,0,1)$

正交向量 知二求一
知一求二 (经再做施密特正交化)

由正交列方程组求代表解

〔二次型专题〕

其他形式

二次型的其他形式

理解：含多个变量，不含常数的二次齐次函数

普通形式：$\begin{cases} f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{nn}x_n^2 \\ \quad +2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+\cdots+2a_{1n}x_1x_n \\ \quad \vdots \\ \quad +2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

循环形式：$f(x_1,x_2,x_3)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} ijx_ix_j$（类似于for循环语句）

$f=\sum\sum ij x_i x_j \to a_{ij}=i\times j$

$i=1\begin{cases} j=1, & x_1x_1 \\ j=2, & 2x_1x_2 \\ j=3, & 3x_1x_3 \end{cases}$，$i=2\begin{cases} j=1, & 2x_2x_1 \\ j=2, & 4x_2x_2 \\ j=3, & 6x_2x_3 \end{cases}$，$i=3\begin{cases} j=1, & 3x_3x_1 \\ j=2, & 6x_3x_2 \\ j=3, & 9x_3x_3 \end{cases}$

$\begin{array}{c|c} & x_1 \quad x_2 \quad x_3 \\ \hline \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \end{array}$

内积形式：$\alpha_1=(1,2)^T,\alpha_2=(a,1)^T,x=(x_1,x_2)^T$，求二次型函数$f(x_1,x_2)=\sum_{i=1}^{2}(\alpha_i,x)^2$

$(\alpha_1,x)^2+(\alpha_2,x)^2=\left[(1,2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right]^2+\left[(a,1)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right]^2=(x_1+2x_2)^2+(ax_1+x_2)^2$

$=(a^2+1)x_1^2+5x_2^2+(2a+4)x_1x_2$

$\begin{array}{c|c} & x_1 \quad\quad x_2 \\ \hline \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} a^2+1 & a+2 \\ a+2 & 5 \end{pmatrix} \end{array}$

除了正常的二次型

老师们还会在二次型的其他表示形式上难为同学们

最经典的，也是最近两年爱考的，就是写成求和符号的形式

但实际上我们把它当作一个for循环来看就可以了

标准形与坐标变换

1.二次型的标准形：$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{nn}x_n^2$

特点：只含平方项，不含交叉项的二次型函数，标准形有无数种

2.坐标变换：$x=Py$

$x=Py\Leftrightarrow\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases} x_1=a_{11}y_1+a_{12}y_2+a_{13}y_3 \\ x_2=a_{21}y_1+a_{22}y_2+a_{23}y_3 \\ x_3=a_{31}y_1+a_{32}y_2+a_{33}y_3 \end{cases}$（换元）

特点：P可逆的情况下，坐标之间可以一一对应，变换才有意义（旧变量在左侧）

3.二次型与可逆线性变换

$f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx$，经过可逆线性变换$x=Py$

$f=x^TAx=(Py)^TA(Py)=y^T(P^TAP)y=y^TBy$，$P^TAP=B$，则称$A$和$B$合同

另外，变量和图像都发生了改变，所以用$g(y_1,y_2,y_3)=y^T(P^TAP)y$更合适

特殊的，若B是一个对角阵，即$P^TAP=\Lambda$，则称为合同对角化

可以得到标准型$g(y_1,y_2,y_3)=k_1y_1^2+k_2y_2^2+k_3y_3^2$

要研究复杂的二次型函数，我们需要有一定可行的切入点

而可逆线性变换可以保证图像的类型不变（但图像本身会变）

通过化为标准型，我们就可以对二次型进行归类

任何一个双曲线，在经过一个可逆的线性变换后，依旧是一个双曲线

这就是研究合同的意义所在

而正交变换不改变向量的长度，内积，夹角…所以进行的是同等变换

也就是说图像不变，仅位置改变

二次型的规范形

定义：规范形是特殊的标准形，平方项前面的系数只取$1,-1,0$，标准形不唯一，但规范形唯一

标准形：$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=k_1x_1^2+k_2x_2^2+\cdots+k_nx_n^2$（按照正负零排序）

规范形：$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\underbrace{d_1x_1^2+d_2x_2^2}_{p}+\underbrace{\cdots}_{q}+d_nx_n^2\ (d_i=1或-1或0)$

惯性指数：$\begin{cases} 正惯性指数p=标准形正平方项的个数=正特征值的个数=规范形“1”的个数 \\ 负惯性指数q=标准形负平方项的个数=负特征值的个数=规范形“-1”的个数 \end{cases}$

二次型矩阵的秩：$r(A)=p+q$

惯性定理：二次型经过多次可逆线性变换，正负惯性指数恒不变，正负特征值个数不变，秩不变

因为图像类型不变

那么不同的标准形

平方项前的正负不会发生改变

这就是惯性定理

eg:

2014改编

二次型$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+ax_3)^2-(x_2-2x_3)^2+(4-a^2)x_3^2$的负惯性指数为1

(1)找到可逆变换矩阵P化为标准形 (2)a的取值范围 (3)若正惯性指数也为1，求a的取值范围

$\begin{cases} y_1=x_1+ax_3 \\ y_2=x_2-2x_3 \\ y_3=x_3 \end{cases}$，$y=Cx$，$C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，上三角矩阵显然可逆，变换合法

而坐标变换应该是旧变量(x)在左侧，所以$x=C^{-1}y$，$P=C^{-1}$　得$g(y_1,y_2,y_3)=y_1^2-y_2^2+(4-a^2)y_3^2$

$\begin{cases} 一负：4-a^2\geqslant0，a\in[-2,2] \\ 一正一负：4-a^2=0，a=2或-2 \end{cases}$

妙！不用求逆矩阵。直接用$x=Py$定义

2004改编

已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3+x_1)^2$，求二次型的秩　求秩不用化标准型。直接求A的秩就行

~~$\begin{cases} y_1=x_1+x_2 \\ y_2=x_2-x_3 \\ y_3=x_3+x_1 \end{cases}$，$y=Cx$，$C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & -1 \\ 1 & & 1 \end{pmatrix}$，$|C|=0$，$C$不可逆，所以换元不合法~~

$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3+x_1)^2=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$

$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$r(A)=2$

很多时候对比矩阵即可

2020改编

$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2ax_1x_3+2ax_2x_3$经过可逆线性变换$x=Py$，

化为$g(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+y_2^2+4y_3^2+2y_1y_2$，试求$a$

$P^TAP=B$，A和B合同，正负惯性指数都相同，秩也相同

$A=\begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$，因为经过的是可逆变换，显然$A$和$B$合同$\Rightarrow r(A)=r(B)$

$|B|=0$，所以$|A|=0\Longrightarrow a=1$或$-\frac{1}{2}$，当$a=1$时$r(A)=1\neq r(B)$，所以$a=-\frac{1}{2}$

2020改编

$f(x_1,x_2)=x_1^2-4x_1x_2+4x_2^2$经过正交线性变换$x=Qy$，

化为$g(y_1,y_2)=ay_1^2+4y_1y_2+by_2^2$，其中$a\geqslant b$，试求$a,b$

$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} a & 2 \\ 2 & b \end{pmatrix}$，因为$Q$为正交矩阵$\begin{cases} Q^TAQ=B \\ Q^{-1}AQ=B \end{cases}$　A和B合同且相似，一切数值型性质都相等

$\begin{cases} tr(A)=tr(B) \\ |A|=|B| \end{cases}\Longrightarrow\begin{cases} a=4 \\ b=1 \end{cases}$或$\begin{cases} a=1 \\ b=4 \end{cases}$(舍)，所以$\begin{cases} a=4 \\ b=1 \end{cases}$

正交变换化标准形

将二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2+x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3$通过正交变换$Q_0$化为标准形

(1)试求正交矩阵Q_0 (2)求正交变换$x=Qy$将$g(x_1,x_2,x_3)=x^T(A+A^*)x$化为标准形

(3)$f(A)+bA^*+cA^{-1}$化为标准形也是用Q_0

$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\longrightarrow|A-\lambda E|=0$得特征值$0,2,3\longrightarrow$解特征方程组$(A-\lambda E)x=0$得特征向量

特征向量正交单位化后拼成正交矩阵$Q_0\longrightarrow$正交变换$x=Q_0y$得$f=3y_1^2+2y_2^2+0y_3^2$

矩阵	A	$aA+bE$	A^n	$f(A)$	A^{-1}	A^*	A^T	$P^{-1}AP$
特征值	λ	$a\lambda+b$	λ^n	$f(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{\lvert A\rvert}{\lambda}$	λ	λ
特征向量	ξ	ξ	ξ	ξ	ξ	ξ	β	$P^{-1}\xi$

(2)$A\xi=\lambda\xi\Longrightarrow A^*\xi=\frac{|A|}{\lambda}\xi$

特征向量相同，$Q=Q_0$

（这一排的组合）特征向量一样 → 正交变换矩阵 P一样！

特征向量：2015

二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx$在正交变换$x=Py$下的标准形为$2y_1^2+y_2^2-y_3^2$，其中$P=(e_1,e_2,e_3)$

若$Q=(e_1,-e_3,e_2)$，则f在另一个正交变换$x=Qy$下的标准形是＝

$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$，$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix} 2 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

因此，Q可看作对P进行列交换与列取反得到，对应的变换矩阵为：

$Q=P\cdot C$

其中C是正交矩阵（列交换与取反不改变正交性），具体形式为：

$C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

步骤2：计算$Q^{-1}AQ$

由于$Q=PC$，且P,C均为正交矩阵（正交矩阵的逆等于转置），因此：

$Q^{-1}=C^{-1}P^{-1}=C^TP^T$（正交矩阵的逆等于转置，且$C$是正交矩阵，故$C^{-1}=C^T$）。

代入$Q^{-1}AQ$得：

$Q^{-1}AQ=C^TP^TAPC$

已知$P^TAP=\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$（记为$\Lambda$），因此：

$Q^{-1}AQ=C^T\Lambda C$

步骤3：计算$C^T\Lambda C$

先写出C和C^T：

$C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$，$C^T=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

计算$C^T\Lambda C$：

$C^T\Lambda C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$（先算$\Lambda C$）

$=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$（再算$C^T(\Lambda C)$）

步骤4：确定标准形

二次型在正交变换$x=Qy$下的标准形由$Q^{-1}AQ$的对角元决定，因此标准形为：

$\boxed{2y_1^2-y_2^2+y_3^2}$

对应的矩阵$Q^{-1}AQ=\boxed{\begin{pmatrix} 2 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}}$

已知$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，$\Lambda=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，求可逆矩阵$C$，使得$C^TAC=\Lambda$

其实一开始我们就不该考虑正交变换，但如果你不放心，发现$|A|\neq|\Lambda|$

所以A和Λ不相似，所以不存在正交矩阵Q使得二者合同，即$C^TAC=\Lambda$不可能成立

配方法：$f=x_1^2+(x_1+x_2)^2+(x_1+x_2+x_3)^2=2\left(\frac{x_1}{\sqrt{2}}\right)^2+3\left(\frac{x_1+x_2}{\sqrt{3}}\right)^2+(x_1+x_2+x_3)^2$

$x=Cy$

$C=\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$

理解：配方法和正交变换法都不改变图像类型 ⇒ 二次型的规范型唯一（惯性定理）

但配方法只保证 $C^TAC=\Lambda$，这个Λ不唯一，对角线元素也不一定是特征值

⇒ 二次型的标准型不唯一

而正交相似变换得到的Λ唯一（不计顺序），对角线元素就是特征值

真题理解

$f(x_1,x_2,x_3)=k_1x_1^2+k_2x_2^2+k_3x_3^2+交叉项_1$

↓经可逆变换$x=Py$，求P

$g(y_1,y_2,y_3)=l_1y_1^2+l_2y_2^2+l_3y_3^2+交叉项_2$

$\begin{cases} z=C_1x \\ z=C_2y \end{cases}$　$\begin{cases} x=P_1z \\ y=P_2z \end{cases}$，得$x=P_1C_2y$

$h(z_1,z_2,z_3)$

$k_1z_1^2+k_2z_2^2+k_3z_3^2$

$f(x_1,x_2,x_3)=k_1x_1^2+k_2x_2^2+k_3x_3^2+交叉项_1$

↓经正交变换$x=Qy$，求Q

$g(y_1,y_2,y_3)=l_1y_1^2+l_2y_2^2+l_3y_3^2+交叉项_2$

$\begin{cases} x=Q_1z \\ y=Q_2z \end{cases}$　$\begin{cases} z=Q_1^{-1}x \\ z=Q_2^{-1}y \end{cases}$，得$x=Q_1Q_2^{-1}y=Q_1Q_2^Ty$

换元法角度：

$f(x\cdots)$　　$x=Py$

$g(y\cdots)$　　$x=C_1z \to z=C_1^{-1}x$

标准 $h(z\cdots)$　　$y=C_2z \to z=C_2^{-1}y$

综上，$x=C_1C_2^{-1}y$，$P=C_1C_2^{-1}$

经典结论：

1.二次型经过正交变换，对应的新二次型的矩阵是一个单位矩阵，求原矩阵

因为$Q^TAQ=E$，那么$A=QEQ^T=QQ^T=E$，即原本的二次型矩阵就是单位矩阵

2.单位矩阵经过正交变换，结果也一定是单位矩阵

因为$Q^TEQ=Q^TQ=E$（数量矩阵亦成立）

0的与最值：

f(x1,x2,x3)=0的解

通过正交变换化为标准型，则所有平方项为0，再反求x

1.二次型$f(x_1,x_2,x_3)=k_1x_1^2+k_2x_2^2+k_3x_3^2+交叉项=0$的全部解(2023)

2.二次型$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2+(x_3-x_1)^2=0$的全部解(2021)

$a^2+b^2+c^2=0\longrightarrow\begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases}$　$\begin{cases} x_1+x_2=0 \\ x_2+x_3=0 \\ x_3-x_1=0 \end{cases}$　（人教版七年级）

这里凑成"配方"的形式即可

并没有用到坐标变化x=Py

所以也就不需要P可逆

f(x1,x2,x3)的最值

1.$x^Tx=1(x_1^2+x_2^2+x_3^2=1)$，求$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2$的最值

2.求$\frac{f(x_1,x_2,x_3)}{x^Tx}$的最值，什么时候取到最值？(2022)　$x_3^2=1$

设$=k$

如何投资，回报最多？

$a^2\to a^2$

$b^2\to 2b^2$

$c^2\to 3c^2$

$a^2+b^2+c^2=1$　（人教版九年级）

结合实际是，显然我们可以直接找到f的取值范围，

那如果求$\frac{f(x_1,x_2,x_3)}{x^Tx}$的取值范围呢？

其实很简单，设本金有k即可

〔辨析〕 相似：同一个线性变换（矩阵），不同基（坐标系）⟶ 数值不变（秩，行列式，特征值）

基变换：$P^{-1}AP$（描述空间的坐标系变了）

合同：同一个二次型（对应矩阵），不同基 ⟶ 类型不变（惯性指数）

坐标变换：$x=Cy$（描述空间的坐标系没变，但点的位置从x移动到y）

$B=C^TAC$

1.两个矩阵特征值相同，一定相似吗？

不一定，比如一个可对角化，另一个不可对角化

2.两个矩阵正负惯性指数相同，一定合同吗？

不一定，比如一个实对称矩阵，另一个不对称

3.相似一定合同吗？ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

对称性不同

4.合同一定相似吗？ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

特征值仅正负相同

eg: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$不相似 → 若特征值完全相同，且都可相似对角化，则相似

可对角化类似"松耦合""可独立拆分"

不可对角化类似"紧耦合"

实对称矩阵：AB相似 ⟶ AB合同（单向）（相似→特征值同→标准型同→规范形同）

延伸：

对判定条件的理解

惯性定理　A正定矩阵，则三大重要矩阵正定，$f(A)$不一定正定

$A^T\begin{cases} 对称性：A^T=A \\ 正定性：A^T与A的特征值相同 \end{cases}$，正定

$A^{-1}\begin{cases} 对称性：(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}=A^{-1} \\ 正定性：特征值\frac{1}{\lambda_i}均大于零 \end{cases}$，正定

$A^*\begin{cases} 对称性：(A^*)^T=(A^T)^*=A^* \\ 正定性：特征值\frac{\lambda_1\cdots\lambda_n}{\lambda_i}均大于零 \end{cases}$，正定

$\begin{cases} A的特征值：1,1,1 \\ A-2E的特征值：-1,-1,-1 \end{cases}$

$\begin{cases} A^T正定，则A正定 \\ A^{-1}正定，则A正定 \\ A^*正定，则A不一定正定 \end{cases}$

$\begin{cases} A的特征值：-1,-1,-1 \\ A^*的特征值：1,1,1 \end{cases}$

分解：

正定矩阵的分解

A是实对称矩阵，且A正定，则存在正交矩阵P，使得$\begin{cases} P^TAP=\Lambda \\ P^{-1}AP=\Lambda \end{cases}$

(1)计算A^2

(2)将A分解为B^2与C^TC

$A^2=(P\Lambda P^{-1})(P\Lambda P^{-1})=P\Lambda P^{-1}P\Lambda P^{-1}=P\Lambda^2P^{-1}=P\Lambda^2P^T$

（类似开方）

$A=P\Lambda P^{-1}=P\Lambda_0\Lambda_0P^{-1}$，$\Lambda=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$，$\Lambda_0=\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$

补回去

①$P\Lambda_0P^{-1}P\Lambda_0P^{-1}=(P\Lambda_0P^{-1})(P\Lambda_0P^{-1})\xlongequal{令B=P\Lambda_0P^T}B^2$

②$P\Lambda_0\Lambda_0P^{-1}=P\Lambda_0\Lambda_0P^T=P\Lambda_0^T\Lambda_0P^T=(\Lambda_0P^T)^T\Lambda_0P^T\xlongequal{令C=\Lambda_0P^T}C^TC$

两个转置

可知：n阶矩阵A正定 ⟺ 存在可逆P使 $A=P^TP$

对比发现，其实A分解为B^2的过程其实与求A^2的过程恰恰相反

观察整个过程，其实A半正定也可以进行这样的分解

但需要强调的是，我们得到的B和C都是不唯一的

除非加上其他限制条件

3B1B

01 向量是什么

"表示特定运动"

向量 $\begin{bmatrix}-4\\2\end{bmatrix}$ 表示：如何从原点走到 $(-4,2)$ 这个点 → 原点坐标轴辅助

↓ 与点 $(-4,2)$ 区分的写法

向量加法：运动（效果）的合成

向量数乘：缩放向量

02 线性组合、张成的空间和基

（二维） 任何一个向量都是对 $\hat{j}, \hat{i}$ 的缩放后的和 ⇒ "线性组合"

基向量

· 用向量的终点（点）代表该向量

二维 2个向量（一般）张成平面，三维 3个向量（一般）：缩放第3个向量，使前2个向量张成的平面平移，成为空间

03 矩阵与线性变换

线性变换：接收一个向量 $\xrightarrow[\text{(运动)}]{\text{线性变换}}$ 输出一个向量

⇓ 这里对所有点的，所以可以看作对空间的线性变换

线性的变换 { 直线仍直（包括✳）（网格线平行且等距） / 原点不变（变了就叫仿射变换…）

描述一个线性变换：仅需记录 $\hat{i}$ 与 $\hat{j}$（一组基）变换后的位置

"特定线性组合"（其他向量都可用基表示，而变换前后表出方式不变） $\vec{v} = a\hat{i} + b\hat{j}$（a,b不变）

eg: $\hat{i}$ 变为 $\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$　$\hat{j}$ 变为 $\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} \to x\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x+3y\\-2x+0y\end{bmatrix}$

一个二维线性变换仅由4个数字完全确定 ⇒ 用矩阵记录

$\begin{bmatrix}5\\7\end{bmatrix}$ 原向量（对基的伸缩）　$\begin{bmatrix}3 & 2\\-2 & 1\end{bmatrix}$ 变换后的 $\hat{i}$　变换后的 $\hat{j}$

经过以上矩阵所述线性变换：$5\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}15+14\\-10+7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}29\\-3\end{bmatrix}$ 新向量

（应用到新的基上）

$\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}$ 线性变换 $\xrightarrow{\text{作用于}}$ $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ 原向量

即 $x\begin{bmatrix}a\\c\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}b\\d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}ax+by\\cx+dy\end{bmatrix}$

矩阵与向量乘法：$\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = x\begin{bmatrix}a\\c\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}b\\d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}ax+by\\cx+dy\end{bmatrix}$

一些特例：① 将空间逆时针旋转90° ⇒ 左乘 $\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}$

② 剪切（错切）变换：$\hat{i}$ 不变，$\hat{j}$ 移至 $(1,1)$ ⇒ $\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$

③ 变换后 $\hat{i}$ 与 $\hat{j}$ 线性相关：$\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & k\end{bmatrix}$ 或 $\begin{bmatrix}a & ka\\b & kb\end{bmatrix}$

eg:

04 矩阵乘法与线性变换复合

想对 $\vec{v}$ 向量做两次线性变换，可以先复合成一个线性变换 ⇒ 矩阵与矩阵的乘法

跟踪 $\hat{i}, \hat{j}$ 的变化就 OK

细节注意：$\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}$

剪切S　旋转R　复合C

顺序从右到左，先应用R，再做S ⇒ 类比函数记号 $f(x)$，f在左，x在右，故从右向左读

例：$\overset{M_2}{\begin{bmatrix}0 & 2\\1 & 0\end{bmatrix}}\overset{M_1}{\begin{bmatrix}1 & -2\\1 & 0\end{bmatrix}}$　变换1次后　第2次变换后

跟踪 $\hat{i}$：$\begin{bmatrix}0 & 2\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$

跟踪 $\hat{j}$：$\begin{bmatrix}0 & 2\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\-2\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e & f\\g & h\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e\\g\end{bmatrix}$　$\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f\\h\end{bmatrix}$

$= e\begin{bmatrix}a\\c\end{bmatrix} + g\begin{bmatrix}b\\d\end{bmatrix}$　$= f\begin{bmatrix}a\\c\end{bmatrix} + h\begin{bmatrix}b\\d\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}ea+gb\\ec+gd\end{bmatrix}$　$= \begin{bmatrix}af+hb\\fc+hd\end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix}ae+bg & af+bh\\ce+dg & cf+dh\end{bmatrix}$

矩阵乘法不适用交换律：

先 Shear　再 Rotate

先 Rotate　再 Shear

tip 要理解，线性变换的根源在空间（即 $\hat{i}, \hat{j}$ 坐标系）的变化，而仍未引的向量变化只是系数锁定后被动跟着变的，所以先要抓条向量变化的后面，得先想象一张网格平面的变化

一旦作了旋转变化，"左右推拉"变换（eg: shear）（不开"自动跟随"的）在旋转前后效果肯定不同 → 对应：$AB \neq BA$

若不作旋转变化……其实 这种变换若去后易一致，对初始相似度要求很严格的，感觉除了单纯旋转方向变换（不计顺序），其他没了吧…

矩阵乘法结合律：$(AB)C = A(BC)$

先做C，再做（B然后A） = 先做（C然后B），再做A

05 行列式

测量一个线性变换对空间有多少拉伸/挤压

⇒ 测量一个给定区域面积增大或缩小的比例（三维则是体积）

⇒ 只要知道 $\hat{i}\hat{j}$ 单位正方形面积变化比例即可（正方体 → 平行六面体）

（因为其他方格的变化都是等比例的，且可用方格拟合不规则形状）

线性变换改变面积的比例 ⇒ 线性变换的行列式（矩阵）

· 行列式 = 0 即该线性变换把平面压缩成线（even 点）了（拓：这些过原点的线、点，都为线性子空间）

⇒ 可用行列式 = 0 判断线性变换是否把空间维度压缩了（矩阵的列线性相关）

· 将一个区域缩放负数倍（将平面翻转 / "空间定向"改变）

可以用 $\hat{j}, \hat{i}$ 判断，正常是 $\hat{j}\hat{i}$，反过来是　三维同理（右手定则）

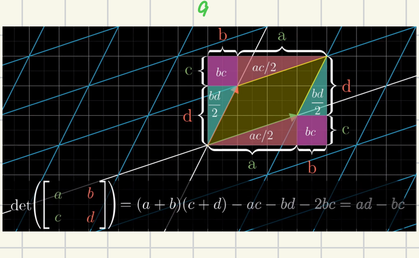
eg: $\det\left(\begin{bmatrix}1 & 2\\1 & -1\end{bmatrix}\right) = -3$　vs　$\det\left(\begin{bmatrix}2 & 1\\-1 & 1\end{bmatrix}\right) = 3$

· 行列式的计算：

$\det\left(\begin{bmatrix}a & 0\\0 & d\end{bmatrix}\right) = ad - 0\cdot0$

$\det\left(\begin{bmatrix}a & b\\0 & d\end{bmatrix}\right) = ad - b\cdot0$

$\det\left(\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}\right) = ad - bc$



行列式定义

$\sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$

符号 ⇔ 奇偶排列 ⇔ 最终翻转为左/右手系　"是向量边长分量和乘积"（反正算的是体积）

· $\det(M_1M_2) = \det(M_1)\det(M_2)$ 放缩倍率相乘

$|AB| = |A||B|$

06 逆矩阵、列空间与零空间

线性方程组 $\begin{cases}2x+5y+3z=-3\\4x+0y+8z=0\\1x+3y+0z=2\end{cases} \Rightarrow \overbrace{\begin{bmatrix}2 & 5 & 3\\4 & 0 & 8\\1 & 3 & 0\end{bmatrix}}^{A}\overbrace{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}}^{\vec{x}} = \overbrace{\begin{bmatrix}-3\\0\\2\end{bmatrix}}^{\vec{v}}$

$A\vec{x} = \vec{v}$

寻找一个向量x，使之经变换A后能与 $\vec{v}$ 重合

eg: $\begin{cases}2x+2y=-4\\1x+3y=-1\end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix}2 & 2\\1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-4\\-1\end{bmatrix}$

方程组解的个数

① 若 $\det(A) \neq 0$，则平面正常变形，可由 $\vec{v}$ 经A逆变换找到 $\vec{x}$，故有唯一解（向量求解的方法之一：乘逆矩阵）

逆变换　eg: Shear $\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$ A　$\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}$ A^{-1}

$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$

② 若 $\det(A) = 0$，则A将平面压缩为线/点 { 若A这个变换还能刚好使 $\vec{x}$ 与 $\vec{v}$ 重合，则也有解 / 若A若通，则无解

此时无逆变换，因为不能将直线压缩为平面

都是矩阵A的属性
$f(x) = k$
值域 → 列空间（值域，向量构成）/ 像空间
解集 → 零空间 / 解空间

三维 $\xrightarrow{A_1}$ 二维 / $\xrightarrow{A_2}$ 一维 / $\xrightarrow{A_3}$ 零维 ⇒ 不管几维，所有变换后可能的输出向量 $A\vec{v}$ 构成的集合，即基向量（列）张成的空间，叫作矩阵的列空间

⇒ 矩阵的秩 Rank：变换后空间的维数（列空间的维数）

当秩达到最大值（eg: 三维变三维，Rank_Max = 3）时，即秩与列数相等 ⇒ 满秩

"列空间"：何时有解

"零空间"：所有可能的解的集合是什么样

零向量一定在列空间中，因为线性变换必须保持原点不变

满秩变换：变换后落在原点的只有零向量本身

非满秩变换：会有一系列向量在变换后成为零向量 { 二维 → 一维：一条直线上的向量变为 $\vec{0}$ / 三维 → 二维：一条直线上的向量变为 $\vec{0}$ / 三维 → 一维：一个平面上的向量变为 $\vec{0}$

"那些消失的向量"

变换后落在原点的向量的集合 ⇒ 矩阵的"零空间"/"核"

⇒ 若 $A\vec{x} = \vec{v}$ 的 $\vec{v}$ 就是 $\vec{0}$，那么零空间（那些消失的向量 + $\vec{0}$）给出的就是方程所有可能的解

$A\vec{x} = 0$：$\vec{x}$ 经由TA变换，被压缩为0向量（或原本就是）⇒ $\vec{x}$ 构成了A的零空间

齐次线性方程组：$\det(A) = 0$ 则无穷解（+零解）　$\det(A) \neq 0$ 则唯一解（零解）

再次整合对比

齐次 $Ax = 0$：解空间就是零空间 $N(A)$ { $\det A \neq 0$，零空间只有零向量 ⇒ 唯一解 / $\det A = 0$，零空间维度 ≥ 1 ⇒ ∞解，这些解构成过原点的线性子空间，维数 = dim N(A)

非齐次 $Ax = v$：假设有特解 x_p，则任意一个解都可写为 $x = x_p + x_0$，而 $x_0 \in N(A)$ 正是 $Ax_0 = 0$ 的解

解空间是零空间 $N(A)$ 平移到经过一个特解 x_p 的位置 { $\det A \neq 0$：零空间只有零向量 ⇒ 无解/唯一解 / $\det A = 0$：无解 / 有 ∞解，且这些解构成一个仿射子空间，维数 = dim N(A)

[再升级] 线性方程组 $Ax = b$（$A\vec{x} = \vec{b}$）

- 无解：目标向量 $\vec{b}$ 不在A的像空间（值域）里　eg: $A = \begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 4\end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ 像空间为直线 $\{(t,2t) \mid t \in R\}$，$b = \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$ 不在其上
- 唯一解：$\vec{b}$ 在A的像空间里，而每个像只有唯一原像（一一对应） 正常空间变形
- 无穷多解：$\vec{b}$ 在A的像空间里，但原像不止一个（维数若被压缩，则零空间/零空间+特解构成的仿射子空间里藏了很多原像）

系数矩阵A的秩小于未知量数目n ⇔ $s \overset{n}{\boxed{\text{阶梯形}}}$ 从n维压缩至s维，则一旦有解，便有无穷多（无穷个）解

b在A的像空间里 ⇔ $Ax = b$ 有解 ⇔ b 能用A的列向量线性表出

∴ 列空间 = 像空间 = 所有能被 Ax 表示的向量的集合

基础解系：A满秩 ⇔ $\det(A) \neq 0$ ⇔ 不压缩空间，零空间即 $\vec{0}$ 向量，维度为0

A不满秩 ⇔ $\det(A) = 0$ ⇔ 压缩空间至目标维数 Rank(A)，零空间包括 $\vec{0}$ 向量与被压缩为 $\vec{0}$ 的原向量，维度为 n − Rank(A)

$n = \text{Rank}(A) + \dim W$

附注：非方阵

eg: 2维向量 $\xrightarrow{A\text{为}3\times2\text{矩阵}}$ 3维向量（将二维空间映射到三维空间上）

$A = \begin{bmatrix}2 & 0\\-1 & 1\\-2 & 1\end{bmatrix}$　只有2列，代表原向量（基）是二维的，但列向量用3维坐标来表示

想象一个三维空间中孤单的新基 $\hat{i}(2,-1,-2)$，$\hat{j}(0,1,1)$，它们只能张成一个二维平面 ⇒ 列空间（列张成的空间）是二维平面

矩阵A仍然满秩，此变换并无压缩维度

eg: $A = \begin{bmatrix}3 & 1 & 4\\1 & 5 & 9\end{bmatrix}$　三维向量 $\xrightarrow{\text{映射至}}$ 二维平面

想象《三体》中二向箔的场景，不知道这一过程并不如意

eg: $A = \begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}$ ⇒ 点积

二维向量 $\xrightarrow{\text{映射至}}$ 一维空间（直线）

07 点积与对偶性

点积的标准引入：2个维数相同的向量，将坐标一一匹配，相乘再相加

几何意义：投影

点积与顺序无关：

线性变换视角：$\begin{bmatrix}1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = 1\cdot1 + -2\cdot2$ → 点积

像一个被放倒的向量 ⇒ 1×2矩阵 ⇔ 2维向量

由对偶性，可以几何上证明二者的联系：

数轴 l

一个函数：把二维向量投影为数轴 l 上得到一个数

⇕

1×2矩阵：寻找 $\hat{i}, \hat{j}$ 以求矩阵

由对偶性，$\hat{i}$ 的投影数正是 $\hat{u}_x$，同理，$\hat{j}$ 的投影数正是 $\hat{u}_y$ ⇒ 矩阵为 $[\hat{u}_x, \hat{u}_y]$

那么矩阵左乘向量 $\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} \to [\hat{u}_x, \hat{u}_y]\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} = u_x \cdot a + u_y \cdot b$

与 $\hat{u}$ 点积向量 $\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\hat{u}_x\\\hat{u}_y\end{bmatrix} = u_x \cdot a + u_y \cdot b$　形式相同

若 $\vec{u}$ 不为单位向量，如 $3\vec{u}$，则都放大3倍 ⇒ 点积的理解为 先投影，后相乘（缩放）

任何一个多维空间到一维空间的线性变换，都有某个该多维空间中的特定向量与之对应

（eg: 线性函数 $f(x,y,z)$（矩阵）可以表示为 $ax + by + cz$，即 (a,b,c) 与任意向量的点积）

对偶性：把复杂的维度压缩简化为两向量点乘

08 叉积

$\vec{v} \times \vec{w} = \pm S_{\text{平面}}$

$\vec{v} = \begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$　$\vec{w} = \begin{bmatrix}c\\d\end{bmatrix}$　$|\vec{v}\times\vec{w}| = \begin{vmatrix}a & c\\b & d\end{vmatrix}$（基向量张成的平面面积）

$\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{bmatrix} = \det\left(\begin{bmatrix}\hat{i} & v_1 & w_1\\\hat{j} & v_2 & w_2\\\hat{k} & v_3 & w_3\end{bmatrix}\right)$（转置与否是一样的）

（对偶性证明略）

09 基变换

向量的基变换 { 原网格 → 新网格 / 用新语言描述 → 用旧语言描述

理解：视为 将我们对她的向量的误解 $(-1,2)$ 给 转换为她真正想表示的向量

如何将一个线性变换，从用我们的语言描述，变换为用她的语言描述？（矩阵的基变换）

$\begin{bmatrix}2 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$

用我们的语言描述的新基

基变换矩阵（变回去）　线性变换A（in our language）　基变换矩阵　在新基描述下的任一向量

在旧基描述下的同一向量

在旧基描述下经A变换后的向量

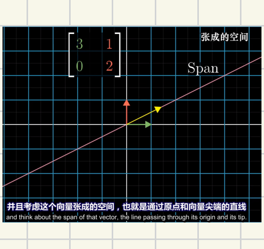
在新基描述下经A变换后的同一向量

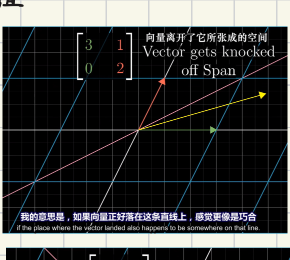
总结 ⟶ "相似" $P^{-1}AP = B$

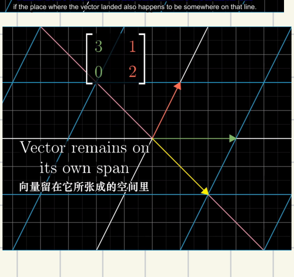
A与B是在不同基描述下的同一线性变换

10 特征向量与特征值

[概念]





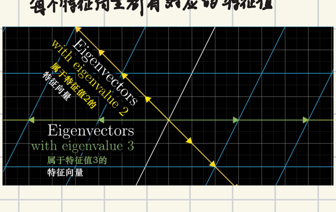


特征向量

某些向量 留在 它们张成的空间里，矩阵A对其作用 相当于仅拉伸（压缩）λ倍

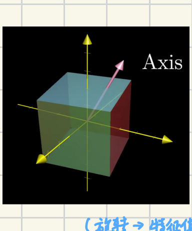
对矩阵A　特征值

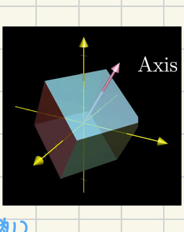
每个特征向量都有对应的特征值



[意义]

考虑一个三维空间中的旋转，其特征向量（留在它所张成的空间里的向量）就是旋转轴，这比用矩阵描述线性变换更直观





（旋转 → 特征值为1）

{ old view：用矩阵描述，依赖我们的特定坐标系，不符现实情况 / new view：用特征向量与特征值描述

[计算思想]

$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \Leftrightarrow (A - \lambda I)\vec{v} = 0$（求特征向量 ⇔ 找非零解）

特征矩阵

$|A - \lambda I| = 0$

有解时：

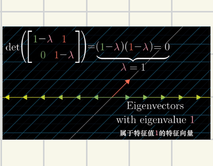
解特征方程只是求出了（所有）λ，要找 $\vec{v}$ 还得：

将 λ_j 代入特征矩阵，求出经此变换后落在零的非零向量，即为 λ_j 对应的特征向量（即解空间中的非零解）

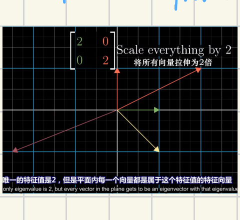
重根：不同特征向量有相同的特征值

eg1: Shear $\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}$ 有 $(1-\lambda)(1-\lambda) = 0$

意味着所有特征向量都属于 λ=1



eg2:



无解时：（二维）并非所有都有特征值，如 Rotation $\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}$

"特征矩阵" → $\begin{pmatrix}\lambda & -1\\1 & -\lambda\end{pmatrix}$ → $\det = \lambda^2 + 1 \neq 0$

根为 $\pm i$

↓

在实空间中无特征向量（但在复数空间中有）

（tips: 特征值出现复数 → 一般对应于变换中的某种旋转）

[特征基]

当基向量都是特征向量时，这个矩阵为对角矩阵（对角元即它们所属的特征值）

↓ 方便算矩阵的高次幂

当线性变换有许多特征向量，足以张成全空间时 ⟶ 可以变换坐标系使这些特征向量就是基向量

↳ $P^{-1}AP = D$（对角矩阵）

eg: $A = \begin{bmatrix}3 & 1\\0 & 2\end{bmatrix}$ 其全部特征向量为 $\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$

则 $P = \begin{bmatrix}-1 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$ → $P^{-1}AP = \begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}$

（基变换矩阵，列向量为新基，即特征向量）

特征向量的个数：

λ无重根 → $|\lambda I - A| = 0$ 解出 λ = 2 或 3

λ=2 → $(2I - A)X = 0$ → $x_1 = 2x_2$ 取 $\alpha_1 = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ → 解空间为 $\{k_1\alpha_1 \mid k_1 \in K \text{且} k_1 \neq 0\}$

这无数个向量都是特征值为λ=2的特征向量，但彼此线性相关

λ=3 → $(3I - A)X = 0$ → $x_1 = x_2$ 取 $\alpha_2 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ → 解空间为 $\{k_2\alpha_2 \mid k_2 \in K \text{且} k_2 \neq 0\}$

"有效"（线性无关）的特征向量个数为2 → 足以张成整个空间 → A可对角化

λ有重根 → $|\lambda I - A| = 0 \Leftrightarrow (\lambda-3)^2(\lambda+6) = 0$ 解出 λ = 3（二重）或 −6

λ=3 → $(3I - A)X = 0$ → $x_1 = -2x_2 + 2x_3$ 取 $\alpha_1 = \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$ $\alpha_2 = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ → 解空间为 $\{k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 \mid k_1, k_2 \in K \text{且} k_1, k_2 \text{不全为}0\}$

二重根，在特征基中为 $\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\0 & 3 & 0\\0 & 0 & -6\end{pmatrix}$ 即特征值3对应的特征空间是 xy 平面，维度为2（原空间的一个平面）

但不是所有二重根都对应平面，还得用 解空间维度（λI−A的秩）作根本判据

λ=−6 → $(-6I - A)X = 0$ → $\begin{cases}x_1 = -\frac{1}{2}x_3\\x_2 = -x_3\end{cases}$ 取 $\alpha_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$ → 解空间为 $\{k_3\alpha_3 \mid k_3 \in K \text{且} k_3 \neq 0\}$

一重根，对应的特征空间是 z 轴（即原空间的一条直线），维度为1

矩阵（线性变换） → 行列式（线性变换对空间的压缩/拉伸程度）

已完成✓ 线性方程组的解（个数、结构）

$$\begin{array}{cc} i & j \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

→ 理解方法：三种初等行变换左乘矩阵，套式某种（三种之一）初等矩阵（单位~）乘上原矩阵

① $\begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix}$ → x、y轴互换

eg: $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

$E_1 \cdot A = A$（翻转）

"翻转"

② $\begin{bmatrix} ka & kb \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$E_2 \cdot A$ = 某根轴（方向上）拉伸压缩

③ $\begin{bmatrix} a+ck & b+dk \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$E_3 \cdot A$ = A加做一次剪切变换

⇒ 为什么初等行变换能解线性方程组

$Ax=b \Rightarrow A\vec{x}=\vec{v}$

做初等行变换 $\Rightarrow E_{1/2/3}A\vec{x} = E_{1/2/3}\vec{v}$

因为E一定可逆，故所有变换一一对应，不改变解集

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \cdots & & \vdots & b_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & \cdots & & a_{sn} & b_s \end{matrix}$$

可逆矩阵：没有压缩维度的变换 ⇔ $\det A \neq 0$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{转置} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

对调

转置 = 沿 $y=x$ 把 $\vec{i}\,\vec{j}$ 对称一下

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{T} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix}$

$v \cdot x = v^T x$

2个列向量点积　矩阵乘法

A^T（二维）：关于 $y=x$ 作对称

A为正交矩阵 $\xrightarrow{定义}$ 保留（内）点积 $\xleftrightarrow{可互推}$ $A^T = A^{-1}$

保留长度&角度

结论

旋转/翻转

$A^T = A^{-1} \Rightarrow AA^T = I$

补：定义：A^T 也作 A'

$|A|=0$ → 奇异矩阵

≠　非~

计算
- $A+B$：原空间分别做A、B变换再把结果相加
- AB：先做B，再做A

$AC=BC$
- C满秩（不压维）：可推出 $A=B$
- C压维：不可推出 $A=B$

eg: $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 投影至x轴

$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

AB对y分量作用是不同，但被C抹去了

A、B为n阶方阵：$|AB|=|BA|$

$$\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

- 初等行变换 ⇔ 左乘（一系列初等矩阵）　$(P_n \cdots P_2 P_1)A$
- 初等列变换 ⇔ 右乘（一系列初等矩阵）　$A(P_n \cdots P_1)$

对列向量（基）进行初等变换（线性组合）

初等行列变换，基变了，但不变的是线性变换的值空间维数、核空间维数…

相似变换、就是同一个线性变换，但基不同

① $(\alpha_1,\cdots\alpha_n)\begin{pmatrix}1 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_3\end{pmatrix}$

☆ $\beta_1=\alpha_1$

$\beta_2=C_{21}\cdot\alpha_1+1\cdot\alpha_2+0+0\cdots$

$\beta_3=\cdots$

②$(\text{上三角矩阵})^{-1}$仍是上三角矩阵

拓：上三角~的乘积仍是~

做题积累结论

1. 复数域：任何方阵都可相似于上三角矩阵
   实数域：特征值都为实数，即可相似于上三角矩阵

   上(下)三角矩阵的主对角元就是特征值

   $$\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ 0 & \lambda-a_{22} & & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}=(\lambda-a_{11})\cdots(\lambda-a_{nn})=0 \Rightarrow \lambda=a_{ii}$$

2. 幂零矩阵的所有特征值为 0 $(A^m=0)$

   $A=P^{-1}TP$ （T为上三角矩阵）

   $A^k=0=P^{-1}T^kP' \to T^k=0$ → 由"上三角×上三角还是上三角，且主对角元直接为积"得：T的主对角元全为0 → A的特征值全为0

3. A^TA 是实对称矩阵

4. 若 $AB=0$，则 $r(A)+r(B)\le n$ （非方阵：$A_{m\times n}$ $B_{n\times s}$，n取"n"）

   B的每个列向量都在A的零(核)空间中. $\mathrm{rank}(B)\le \dim(A)=n-\mathrm{rank}(A)$

常一起用！

5. $\mathrm{rank}(A+B)\le \mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B)$

   V_1的基与V_2的基合在一起，最多张成V_1+V_2，若还有重复部分结果只会更小

6. 幂等矩阵 $(A^2=A)$ 相似于对角元全由0.1组成的对角矩阵

   意义：投影变换 eg：三维空间向量投影到地面（$\lambda_z=0$，z分量消失；$\lambda_x=\lambda_y=1$，x.y分量不动）

   （投影n次 = 投影1次） ↑ 这是对角矩阵（标准形式）

7. $tr(A)=\sum\lambda_j$ （n元一次韦达一号与特征多项式系数结论）

   $\det(A)=\prod\lambda_j$ $(|A|=|D|)$ → 已知特征值（用 $A^m\alpha=\lambda^m\alpha$ 关联）可求行列式

   → $|A|=0$，λ_j必有0
   $|A|\ne0$，λ_j不为0

8. 对合矩阵 $(A^2=I)$，特征值为 ±1，行列式为 ±1

   意义：反射（镜面翻转） eg：$(x,y)\to(x,-y)$

9. $A\alpha=\lambda_0\alpha \Rightarrow A^m\alpha=\lambda_0^m\alpha$

   $A^2\alpha=A\lambda_0\alpha=\lambda_0\cdot A\alpha=\lambda_0^2\alpha$

10. 与特征值有关的探究 ⇒ 两条路都要试 $\begin{cases}A\alpha=\lambda_0\alpha\\ |\lambda I-A|=0\end{cases}$

11. 不会证就举例子！

12. $A^TA=0 \Rightarrow A=0$

14. 秩的运算

1° 初等变换（乘初等矩阵），秩不变

2° $R(A)+R(B)\le n+R(AB)$

$\quad n-1 \quad\quad n-1 \quad\quad n \quad\quad n-1$

3° $R(AB)\le \min\{R(A),R(B)\}$

4°

16. 分块矩阵

① 求逆

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}$$

同理 $\begin{pmatrix} O & D \\ C & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & C^{-1} \\ D^{-1} & O \end{pmatrix}$

② 见书本 P87~92 ☆

17. "不唯一"

线性代数中的不唯一

1.向量组的极大无关组

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\3\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

2.方程组的基础解系

解方程组 $Ax=0$, $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

得基础解系 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}5\\-4\\1\end{pmatrix}$

基础解系也可以是 $\alpha'_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\alpha'_2=\begin{pmatrix}-3\\-6\\5\end{pmatrix}$

3.相似变换矩阵P

$|A-\lambda E|=0\Longrightarrow\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=14$

1.求解 $Ax=0$ 的基础解系 不唯一

2.求解 $(A-14E)=0$ 的基础解系，得 α_3

$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$， $P'=(\alpha_1{}',\alpha_2{}',\alpha_3)$

4.得到的对角矩阵Λ Λ可换序

$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$， $\Lambda=\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&14\end{pmatrix}$

若 $P=(\alpha_1+2024\alpha_2,\alpha_1,\alpha_3)$， $\Lambda=\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&14\end{pmatrix}$

若 $P=(\alpha_1,\alpha_3,\alpha_2)$， $\Lambda=\begin{pmatrix}0&&\\&14&\\&&0\end{pmatrix}$

5.正交变换矩阵Q

将 P 与 P' 单位化

$Q=\left(\dfrac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|},\dfrac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|},\dfrac{\alpha_3}{\|\alpha_3\|}\right)$ 正交向量组也不唯一

$Q'=\left(\dfrac{\alpha_1{}'}{\|\alpha_1{}'\|},\dfrac{\alpha_2{}'}{\|\alpha_2{}'\|},\dfrac{\alpha_3}{\|\alpha_3\|}\right)$

6.可逆变换矩阵C

二次型化标准型

Q 不唯一，自然 C 也不唯一

(Q 是特殊的 C)

配方法和正交变换得到 C

一般也不一样

【行列式题型】

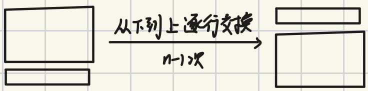
① $f(x)$ 代入法

eg: $f(x)=\begin{vmatrix} -x & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & x & 3 \\ x & -x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -3x \end{vmatrix}$ 求常数项

$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ 则代入 $x=0$ 可得 e

$e=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

② 行列式冒泡互换



③ 子式替换

$|A|=aA_{i1}+bA_{i2}+cA_{i3}+dA_{i4}$ $\begin{vmatrix} * & * & * & * \\ a & b & c & d \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{vmatrix}$

代数余子式只与位置有关、系数自由换

④ 伴随矩阵

普适 $AA^*=A^*A=\begin{pmatrix} |A| & & & \\ & |A| & & \\ & & \ddots & \\ & & & |A| \end{pmatrix}=|A|E$

1° 求 A^* 中所有元素之和，当 A 的某行元素全为 a 时 $(a\neq 0)$，$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}=\frac{|A|}{a}$

↓

求代数余子式之和

↓

重复 $|A|=1\cdot A_{i1}+1\cdot A_{i2}+\cdots+1\cdot A_{in}$ 的替换 → 只有那一行替换其结果不为0

2° $A^T=A^*$

则有 $a_{ij}=A_{ij}$

eg: 已知 $A^T=A^*$，A 为三阶非零矩阵，$|A^*|=|A|^{n-1}$，求 $|A|$

(其实这个式子恒成立)

$|A^*|=|A^T|=|A|^{n-1}$

$|A|=0$ 或 1

$\because$ A 非零，$|A|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2>0 \to |A|=1$

(设 $a_{11}\neq 0$)

⑤ 典型行列式求法

1° 爪型

↖ ↙ ↗ ↘ ⇒ 构造三角

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a_2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a_3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1-\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_4} & \boxed{0 \quad 0 \quad 0} \\ 1 & a_2 \quad 0 \quad 0 \\ 1 & 0 \quad a_3 \quad 0 \\ 1 & 0 \quad 0 \quad a_4 \end{vmatrix}$$

2° 加边法

：利用 $|A|=\begin{vmatrix} 1 & * \\ 0 & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ * & A \end{vmatrix}$，构造所需 $*$

$$D=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2+a_2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & \cdots & n+a_n \end{vmatrix}$$

想让大家都减去 1, 2, ⋯, n

$$=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2 & 2+a_2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n+a_n \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & a_1 & & & \\ 2 & & a_2 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ n & & & & a_n \end{vmatrix} \rightarrow \text{爪型}$$

3° 么型

⇙ ⇗ ⇘ ⇘ 按开口那一行/列展开 + 递推

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ & -1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & \ddots & 2 & 2 \\ & & & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2D_{n-1} + (-1)^{1+n} \cdot 2 \cdot (-1)^{n-1}$$

易漏!

$$D_n = 2D_{n-1} + 2$$

设 $D_n + a = 2(D_{n-1}+a)$，$a=2$

$$\therefore D_n + 2 = 2^{n-1}(D_1+2) = 2^{n+1}$$

$$D_n = 2^{n+1} - 2$$

4° 川型

⋱⋱ ⋰⋰ 先展一行，再展一列 + 第二数归法

$$D_n=\begin{vmatrix} 2a & 1 & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & \\ & a^2 & 2a & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}$$

证明 $D_n = (n+1)a^n$

相邻三项 → 第二数归法 ｛验证 $n=1$，$n=2$ 时成立；验证 $n<k$ 时成立可推出 $n=k$ 时成立

$$= 2a D_{n-1} - a^2 \cdot 1 \cdot D_{n-2}$$

证明：$n=1$，$n=2$ ✓

若 $n<k$ 时成立，$D_n = 2aD_{n-1} - a^2 \cdot D_{n-2} = (n+1)a^n$ ✓ 得证

5° 矩阵分块行列式

$$\begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ D & B \end{vmatrix} = |A||B| \xrightarrow{\text{变体}} \begin{vmatrix} O & A_{n\times n} \\ B_{m\times m} & O \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} O & A \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} D & A \\ B & O \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|A||B|$$

原：$|\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n|$

$m\times n$ 次 $\begin{cases} \beta_1 \text{ 插入 } \alpha_1 \text{ 前一位：} n \text{ 次} \\ \beta_2 \quad \sim \quad \text{：} n \text{ 次} \\ \vdots \\ \beta_m \quad \text{：} n \text{ 次} \end{cases}$

eg： $D = \begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{挪成}} \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{vmatrix}$

6° 范德蒙型

$V_n = \prod\limits_{1\le j<i\le n} (x_i - x_j)$ 后项(右)减前项(左) $\rightarrow (x_3 - x_2)(x_3 - x_1)(x_2 - x_1)$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$ $(c-b)(c-a)(b-a)$

[线性方程组]

- 初等行变换是同解变换（才能用于解线性方程组）
- 初等列变换不是同解变换，但求秩 Rank 可以混用行列变换

易错与验算

1. $E+\sim$ 的 E 是 $\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}$ 不是 $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$!

2. 对于下列实对称矩阵 A,求正交矩阵 T,使 $T^{-1}AT$ 为对角矩阵:

$$A=\begin{pmatrix}0&-2&2\\-2&-3&4\\2&4&-3\end{pmatrix};$$

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda&2&-2\\2&\lambda+3&-4\\-2&-4&\lambda+3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda&2&-2\\2&\lambda+3&-4\\0&\lambda-1&\lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda&4&-2\\2&\lambda+7&-4\\0&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+8)=0$$

$\lambda=1$(二重)或 -8

① 特征值验算: $tr(A)=\sum\lambda_j$　　$1+1-8=6$ ✓

(备选) $det(A)=\prod\lambda_j$　　$1\cdot1\cdot(-8)=-8$ ✓

对 $\lambda=1$, $(I-A)x=0$

$$\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&4&-4\\-2&-4&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

一般解为 $x_1=-2x_2+2x_3$. 一个基础解系为 $\alpha_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$ $\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$

(深入) [特征向量验算1] $(\lambda I-A)\alpha_i\overset{?}{=}0$

$\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&4&-4\\-2&-4&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}=0$ ✓　$\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&4&-4\\-2&-4&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}=0$ ✓

正交化: $\beta_1=\alpha_1=(-2,1,0)^T$

$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=(\frac{2}{5},\frac{4}{5},1)^T$

单位化: $\eta_1=(-\frac{2}{\sqrt5},\frac{1}{\sqrt5},0)^T$

$\eta_2=(\frac{2}{3\sqrt5},\frac{4}{3\sqrt5},\frac{\sqrt5}{3})^T$

对 $\lambda=-8$, $(-8I-A)=0$

$$\begin{pmatrix}-8&2&-2\\2&-5&-4\\-2&-4&-5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&\frac12\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$\begin{cases}x_1=-\frac12x_3\\x_2=-x_3\end{cases}$　一个基础解系为 $\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix}$. $\eta_3=(-\frac13,-\frac23,\frac23)^T$

(深入) [特征向量验算2] 不同 λ 的特征向量 α 正交　　$\alpha_1\cdot\alpha_3=0$ ✓ $\alpha_2\cdot\alpha_3=0$ ✓

$$\therefore T=\begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt5}&\frac{2}{3\sqrt5}&-\frac13\\\frac{1}{\sqrt5}&\frac{4}{3\sqrt5}&-\frac23\\0&\frac{\sqrt5}{3}&\frac23\end{pmatrix}\qquad T^{-1}AT=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-8\end{pmatrix}$$ 为对角矩阵

② 正交矩阵验算: $T^TT\overset{?}{=}I$

(不仅是1,0也要算!)

$$\begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt5}&\frac{2}{3\sqrt5}&-\frac13\\\frac{1}{\sqrt5}&\frac{4}{3\sqrt5}&-\frac23\\0&\frac{\sqrt5}{3}&\frac23\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt5}&\frac{1}{\sqrt5}&0\\\frac{2}{3\sqrt5}&\frac{4}{3\sqrt5}&\frac{\sqrt5}{3}\\-\frac13&-\frac23&\frac23\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

3. 初等变换法求逆矩阵,求完验算 $A^{-1}A$ 的主对角元 $\overset{?}{=}1$

4. 小题别只靠感觉,能写出过程就尽量严格证明!

5. 特征向量必须非零

6. 非方阵不讨论的概念：

行列式、可逆性、正交矩阵、相似性、特征值/向量、对角化、合同

7. 求二阶逆矩阵易忘记 $\times\frac{1}{|A|}$！