高数(上)笔记

by 25-Iris

第一章 函数与极限

① 数域：对加减乘除封闭（$\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ 是，$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ 不是）

证明 $\sqrt{2}$ 不是有理数：反证法　设 $\sqrt{2}=\frac{m}{n}$，$(m,n)=1$（最大公约数）

$2n^2=m^2 \Rightarrow m$ 为偶数，设 $m=2k$

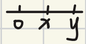
$n^2=2k^2 \Rightarrow n$ 为偶数，矛盾

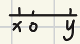
② 实数域具有完备性（对极限运算封闭），但 $\mathbb{Q}$ 没有

在数轴上连续 / 在 $\mathbb{R}$ 中，单调有界一定有极限存在

③ 绝对值不等式：$|x+y| \le |x|+|y|$（拆绝对值加法时）

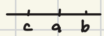
$\Rightarrow |x| = |x-y+y| \le |x-y|+|y| \Rightarrow ||x|-|y|| \le |x-y|$

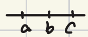




（拆绝对值减法时）

三角不等式：$|a-c| \le |a-b|+|b-c|$





（构造 b 时）

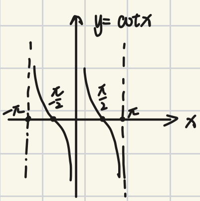
④ 邻域：$(a-r, a+r)$，a 的 r 邻域，$U_r(a)$

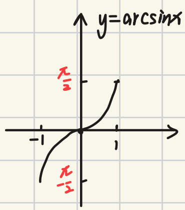
去心邻域：$U_r(a)\setminus\{a\}$，$\mathring{U}_r(a)$

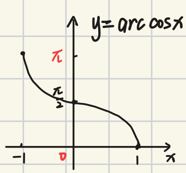
⑤ 函数：$f: X\to Y$，X 为定义域，值域 $f(X)\subseteq Y$

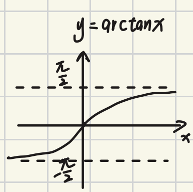
基本初等函数
- 常数函数
- 幂函数　$y=x^{\frac{n}{m}}$　$(n,m)=1$，$\begin{cases} m\text{ 为偶，定义域全负} \\ \frac{n}{m}<0,\ x\ne 0 \end{cases}$
- 指数函数
- 对数函数　（$a>0$，$a\ne 1$）
- 三角函数　$y=\tan x$ 与 $y=\sec x$（$x\ne n\pi+\frac{\pi}{2}$）、$y=\cot x$ 与 $y=\csc x$（$x\ne n\pi$）> 分母不为0
- 反三角函数

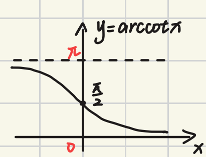
[补] $\frac{\pi}{2}-\arctan x = \operatorname{arccot} x = \arctan\frac{1}{x}$











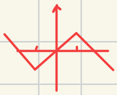
⑥ 复合函数：$f: X \to Y$, $g: Y^* \to Z$, $g(f(x))$ 要求 $f(x) \subset Y^*$ ⇒ 复合时要注意定义域

变量替换：$\sin(\arcsin x) = x$

$\arcsin(\sin x) \neq x$ ⇒ 记 $y=\sin x$. $\sin(\arcsin y) = \sin x$

$\arcsin y \neq x$ } 周期性，仅在 $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 时成立

识别 { $\arcsin x$ ↗ 故 $\sin(\arcsin x)$ 流畅；$\sin x$ 有周期性．故 $\arcsin(\sin x)$ 卡顿



eg: 对于 $x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, $\underline{\pi - x} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\arcsin(\sin x) = \arcsin[\sin(\pi - x)] = \pi - x$

且 $\sin(\pi - x) = \sin x$

对于 $x \in [-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}]$, $\underline{-\pi - x} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\arcsin(\sin x) = \arcsin[\sin(-\pi - x)] = -\pi - x$

且 $\sin(-\pi - x) = \sin x$（若写 $\pi + x$, $\sin(\pi + x) = -\sin x$ 做不下去！）

⑦ 符号函数：$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

⑧ 双曲正弦：$y = \operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$，双曲余弦 $y = \operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

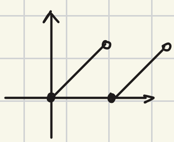
1° $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$（不同）

2° $\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$（同）

3° $\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$（与 cos 相反）

⑨ 向下取整函数：$y = [x]$

$y = x - [x]$



⑩ 狄利克雷函数

$D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数} \\ 0, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$

⑪ 映射：$E \to F$

"F被填满" → 满射

"结果不重合" → 单射（一一映射）

} → 有逆映射（反函数）

求反函数：$y = \frac{x}{2} - \frac{2}{x}$ $(x > 0)$

→ $2xy = x^2 - 4$ → 解方程

⑫ 若 $\forall x \in X$，有 $f(x) \leq M$，称 M 为 f 的一个上界

若 $\forall x \in X$，有 $f(x) \geq N$，称 N 为 f 的一个下界

有界函数：既有上界又有下界 ⇒ $N \leq f(x) \leq M$, $\forall x \in X$

⇔ $|f(x)| \leq C$

⑬ 序列极限： $\forall \varepsilon>0$，$\exists N\in N_+$，使得 $|a_n-l|<\varepsilon$，只要 $n>N$

注意取整避0　　$\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$

$N=[\cdots]+1$

可以一开始缩小ε范围(避免讨论)： $n>\frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|} \xrightarrow{设\ 0<\varepsilon<1}$ 取 $N=\left[\frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}\right]+1$

加条件：N可以很大，ε可以很小

放缩时可以加条件： $\left|\frac{n+2}{n^2+1}\right| \underset{无条件}{\overset{+\,n>2}{<}} \frac{n+n}{n^2} < \varepsilon$　　数字替换为字母

分子分母化简：统一为变量/常数： $\frac{10n+28}{3(3n^2-n+2)} \underset{下缩小}{\overset{上放大}{<}} \frac{10n+10n}{3\cdot 2n^2}$

补充技巧：① $\sin n<1<n$　别放太狠

② $q^n\ (|q|<1) \Rightarrow$ 令 $q=\frac{1}{1+h}$ 或 $q=1-h$

⑭ 夹逼定理： $c_n\le a_n\le b_n,\ \forall n\ge N_0$　　格外注意：不等式不带 lim 极限！

$\lim c_n=\lim b_n=l \Rightarrow \lim a_n=l$　　见n项和，先夹逼后定积分

常用技巧：°1 $(a>1时)\ a^n=(1+h)^n=1+nh+\frac{n(n-1)}{2}h^2+\cdots+h^n$

°2 取整函数放缩： $x-1<[x]\le x$ / $[x]\le x<[x]+1$

⑮ 增速： $n<a^n<n!$

⑯ 极限不等式： 设 $\lim a_n=l_1$，$\lim b_n=l_2$

$l_1>l_2 \Rightarrow \exists N\in N_+$ 使得 $a_n>b_n$，只要 $n>N$

$a_n\ge b_n \Rightarrow \exists N\in N_+$ 使得 $l_1\ge l_2$，只要 $n>N$

($a_n>b_n$ 也只能推出 $l_1\ge l_2$)

⑰ 极限的四则运算 ⇒ 有限次可用

⑱ 有理化求 $\frac{0}{0}$ 极限　(尤其根号)

eg: $\frac{\sqrt{1+x}-1}{2\sin x} = \frac{x}{2\sin x(\sqrt{1+x}+1)} \overset{x\to 0}{=} \frac14$

⑲ 若 $\{a_n\}$ 的极限为 l，则其子序列的极限也为 l

证明极限不存在：找两个极限不相等的子序列 / 一个发散的子序列

(/ 左极限 ≠ 右极限) / 某侧极限 ∄

⑳ 单侧极限

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=a & 右 \quad |f(x)-l|<\varepsilon,\ 0<x-a<\delta \\ \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=a & 左 \quad |f(x)-l|<\varepsilon,\ 0<a-x<\delta \end{cases}$$

双侧极限：$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)\ \exists \iff \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\ \exists = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\ \exists$

可以取 $\delta=1$ / $\delta=a$ /… 使某一部分展现出有界性（定值），从而与无穷小相乘等于0

eg: $|x-a|<\delta \to$ 取 $\delta=1 \to |x|<|a|+1$

㉑ 重要极限：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$，$\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ $\quad (1+0)^\infty$

[区分] $(1+\infty)^0$ $\lim\limits_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e^0=1$

[凑1法] eg: $\lim\limits_{x\to0}(x+e^x)^{\frac{1}{x}} \Rightarrow (0+1)^\infty$

$$= \lim_{x\to0} \underbrace{\boxed{(1+e^x+x-1)^{\frac{1}{e^x+x-1}}}}_{=e}{}^{\frac{e^x+x-1}{x}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x+x-1}{x}}$$

$$\cdots$$

$$= e^2$$

㉒ 无穷大量：$|f(x)|>M$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时（或 $|x|>\delta$ 时）

没有极限 $\quad \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty \qquad \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$

[注意] ∞ 一定无界，无界不一定 ∞

eg: $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin x$ 在 $(-\infty,\infty)$ 振荡，不是一直都是 ∞

㉓ 连续：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$（要求 x_0 处有定义） ε-δ 说法：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$，只要 $|x-x_0|<\delta$

右连续：$\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0)$

左连续：$\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0)$

㉔ 连续函数：在 (a,b) 上连续 + 在a点右连续，在b点左连续

在 $[a,b]$ 上连续

㉕ 初等函数在其定义域内连续

㉖ 复合函数：最内层可以不连续，只有极限；其余层都要连续

㉗ 单射满射 + 严格单调 ⇒ 连续 且 反函数也连续

单射满射 + 连续 ⇒ 严格单调

㉘ 间断点

- 第一类间断点 (左、右都∃)
  - 可去间断点 (左∃ = 右∃)
  - 跳跃间断点 (左∃ ≠ 右∃)
- 第二类间断点 (左、右至少一个不∃)
  - 无穷间断点
  - 振荡间断点
  - 其它 …

㉙ 介值定理：

1° 中间值可达

$f(x)$ 在 闭区间 $[a,b]$ 上连续，$f(a)\neq f(b)$. 则 $\forall \eta$: $f(b)<\eta<f(a)$，$\exists \xi\in(a,b)$ 使 $f(\xi)=\eta$

2° 零点存在定理

$f(x)\in C[a,b]$，且 $f(a)f(b)<0$，则 $\exists \xi\in(a,b)$ 使 $f(\xi)=0$

3° 有界性定理

$f(x)\in C[a,b]$，$\forall \eta$: $\min<\eta<\mathrm{Max}$，$\exists \xi\in(a,b)$ 使 $f(\xi)=\eta$

应用：任意奇数次实系数多项式至少有一个实根

eg: 花里胡哨的组合值可达：$f(\xi)=\dfrac{m_1 f(x_1)+m_2 f(x_2)}{m_1+m_2}$

用有界性定理

第二章 微积分的基本概念

① 导数： $f'(x)=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

② 闭区间上可导： 在(a,b)可导 + $x=a$处右导数∃ + $x=b$处左导数∃

③ 极限∃ ⟵ 连续 ⟵ 可导

④ 导函数在x_0的极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$ ≠ 导函数在x_0的值 $f'(x_0)$

当 $x=x_0$ 处导数不连续时（导数存在 则原函数必连续，故此特指 $f(x)$连续 而 $f'(x)$不连续）

此时求导要用定义求

⑤ 复合函数写法注意

$$[g(f(x))]'=\frac{d}{dx}g(f(x))=g'(f(x))f'(x)=\frac{dg(f(x))}{df(x)}\cdot\frac{df(x)}{dx}$$

⑥ 函数在某点的导数 · 其反函数在该点的导数 $=1$

⑦ $\begin{cases}\tan'x=\sec^2x\\ \cot'x=-\csc^2x\end{cases}$ $\begin{cases}\sec'x=\tan x\sec x\\ \csc'x=-\cot x\csc x\end{cases}$ $\begin{cases}\sec^2x=1+\tan^2x\\ \csc^2x=1+\cot^2x\end{cases}$

$\begin{cases}(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\\ (\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\end{cases}\Rightarrow \arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$ $\begin{cases}(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}\\ (\operatorname{arccot}x)'=-\frac{1}{1+x^2}\end{cases}\Rightarrow \arctan x+\operatorname{arccot}x=\frac{\pi}{2}$

⑧ 极限与无穷小写法替换

$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$ 且 $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$

⑨ 等价无穷小： $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$

同阶无穷小： $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=l\ (l\neq0)$

高阶无穷小： $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0 \Leftrightarrow \alpha(x)=\eta(x)\beta(x)$ 且 $\lim\limits_{x\to a}\eta(x)=0$

记作：$\alpha(x)=o(\beta(x))\ (x\to a)$

⑩ $o(x)$的运算

$o(x)\pm o(x)=o(x)$

$o(x^n)\cdot o(x^m)=o(x^{n+m})$

⑪ 微分：函数增量的线性主要部分

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)\ (\Delta x \to 0) \Rightarrow dy = A\Delta x = f'(x)dx$$

四则运算：$d(x+y) = dx + dy$

$d(xy) = xdy + ydx$

$d\frac{x}{y} = \frac{xdy + ydx}{y^2}$

一元函数：可微 $\Leftrightarrow$ 可导

⑫ 一阶微分的形式不变性 （实际用起来和复合函数求导没啥区别）

对于 $z = g(y)$，有 $dz = g'(y)dy$，不论 y 是自变量还是中间变量

⑬ 隐函数求导： eg: $e^{xy} + x^2y = 1$

1° 两边都直接对 x 求导

$$e^{xy}(y + xy') + (2xy + x^2y') = 0 \Rightarrow y' = \cdots$$

2° 两边各自微分

$$d(e^{xy}) + d(x^2y) = 0$$

$$e^{xy}dxy + ydx^2 + x^2dy = 0$$

$$e^{xy}(xdy + ydx) + y\cdot 2xdx + x^2dy = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \cdots$$

eg: $y = \sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$

见根号与乘积 ⇒ 先取对数 （再求导/微分）

⑭ 参数方程求导

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d(\frac{dy}{dx})}{dx} = \frac{\frac{d(\frac{dy}{dx})}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \neq \frac{\psi''(t)}{\varphi'(t)}$$

⑮ 微分与近似计算

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

⑯ 高阶导数

1° $(\sin x)^{(n)} = \sin(x + \frac{n\pi}{2})$

$(\cos x)^{(n)} = \cos(x + \frac{n\pi}{2})$

eg: $(e^x\sin x)^{(n)} = ?$ 三角函数n阶导，用诱导公式合并后找规律

$n=1$, $e^x(\sin x + \cos x) = \sqrt{2}e^x\sin(x + \frac{\pi}{4})$

$n=2$, $2e^x\sin(x + \frac{\pi}{2})$

$\vdots$

$n=n$, $(\sqrt{2})^n\sin(x + \frac{n\pi}{4})$

（易推） 2° $(\frac{1}{ax+b})^{(n)} = \frac{(-1)^n\cdot n!\,a^n}{(ax+b)^{n+1}}$

$\ln(ax+b)^{(n)} = a\cdot(\frac{1}{ax+b})^{(n-1)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!\cdot a^n}{(ax+b)^n}$

莱布尼茨公式：$[f(x)g(x)]^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$

求复合函数的高阶导数，只能一阶一阶求，没有公式捷径

⑰ 高阶微分

1° 写法

$d(dx)=0$ ， $(dx)'=1$ 　 $dx = \overset{f(x)}{1} \cdot dx$ ， $d(C)=0$

$d(dy)$ 记为 d^2y ，$(dx)^2$ 记为 dx^2

$\frac{d^n f}{dx^n} = f^{(n)}(x)$

$d(h(x)\,dx)$

$= dx\, d(h(x)) + h(x)\, d(dx)$

2° 高阶微分不具有形式不变性 ， $d^2y \neq f''(u)du^2$（当 u 为中间变量时）

微分运算易错点：只有一阶微分才有 $\frac{dy}{dx} = f(x) \Leftrightarrow dy = f(x)dx$

否则，$\frac{d}{dx}$ 是不可视为除法的

eg：$dz = h(x)\,dx$，求二阶微分，不能用 $d^2z = [h(x)dx]'dx$ ，而得用微分的运算规则 $d^2z = d[h(x)dx] = dx\,dh(x) + h(x)\cdot d^2x$
$= h'(x)dx^2 + 0$

建议：隐函数求二阶导老实用求导算，别用微分，易错

⑱ 不定积分

$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$

eg：分段函数求不定积分注意接口连续

$f(x) = |x| + 2$ 求不定积分

$$\int f(x)dx = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + 2x + C_1 , & x>0 \\ -\frac{1}{2}x^2 - 2x + C_2 , & x \le 0 \end{cases}$$

$F(x)+C$ 可导，则连续 $\Rightarrow$ $x=0$ 处 $C_1 = C_2 = C$

⑲ 定积分：黎曼和

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \triangleq \int_a^b f(x)dx \qquad (\lambda(T) 为 \Delta x_i\ max)$$

eg：利用定义求 $\int_0^1 2^x dx$

n 等分

$x_0=0$ 　 $x_n=1$

$x_i = \frac{i}{n}$

$$\int_0^1 2^x dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2^{\frac{i}{n}} \cdot \frac{1}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} 2^{\frac{i}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot 2^{\frac{1}{n}} \frac{1-2^{\frac{n}{n}}}{1-2^{\frac{1}{n}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{2^{\frac{1}{n}}-1} \cdot 2^{\frac{1}{n}}$$

$$= \frac{1}{\ln 2}$$

补：$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

⑳ 一定可积

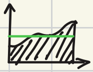
一定可积 $\begin{cases} \text{闭区间，连续} \\ \text{闭区间，单调} \\ \text{闭区间，有限个间断点，有界} \end{cases}$ $\Rightarrow$ 可积函数一定有界

㉑ 定积分的性质

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

㉒ 积分中值定理

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$



㉓ 变上限的定积分

$\int_a^x f(t)dt$ ，是一个关于x的函数，连续可导

［辨析］

$x\int_a^x f(x)dx \neq \int_a^x xf(x)dx$

$\downarrow$ 应写成 $x\int_a^x f(t)dt$ 或 $\int_a^x xf(t)dt$

（x对积分而言是常数）

$\searrow$ 可写成 $\int_a^x tf(t)dt$

求导： eg1： $F(x)=\int_0^{2x+1} e^t \sin 5t\,dt$，求$F'(x)$

复合函数 令$2x+1=y$

$F'(x) = F'(y)\cdot y'(x)$

$= \int_0^y e^t \sin 5t\,dt \cdot y'(x)$

$= e^y \sin 5y \cdot y'(x)$

$= e^{2x+1}\cdot \sin(2x+1)\cdot 2$

eg2： $F(x)=\int_{x^2}^x \sqrt{1+t}\,dt$，求$F'(x)$

拆积分区域

$= \int_0^x \sqrt{1+t}\,dt - \int_0^{x^2}\sqrt{1+t}\,dt$

eg3： $G(x)=\int_0^x (e^t\int_0^t \sin z\,dz)dt$，求$G''(x)$

复杂时做变量替换

令 $u(t)= e^t\int_0^t \sin z\,dz$

$G(x)= \int_0^x u(t)dt$

$G'(x) = u(x)$

$= e^x\int_0^x \sin z\,dz$

$G''(x) = e^x\int_0^x \sin z\,dz + e^x \sin x$

$= \cdots$

eg4： 利用积分中值定理

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_{\cos^2 x}^1 \sqrt{1+t^2}\,dt}{x^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ \xi\to 1}}\frac{\sqrt{1+\xi^2}\,(1-\cos^2 x)}{x^2} = \sqrt{2}$$

见x要提，不能混淆其与t！$\rightarrow$ 提不出去就换元

易错 eg1： $\frac{d}{dx}\int_{x^2}^0 x\cos t^2 dt$

$= \frac{d}{dx}\left(x\cdot\int_{x^2}^0 \cos t^2 dt\right)$

eg2： 不能直接提积分上下限的负号，必须用换元

$F(-x)=\int_0^{-x}(-x-2t)f(t)dt$

令 $u=-t$ （$t: 0\to -x$，$u: 0\to x$）

eg3： 别忘了加法可拆 ---！

$F(x)=\int_0^x (x-t)\cos t\,dt$．求$F'(x)$

复杂则拆

$= x\int_0^x \cos t\,dt - \int_0^x t\cos t\,dt$

$= \cdots$

㉔ 牛顿-莱布尼茨公式：$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$

eg1：$\int_{-1}^{2} |x|[x]dx = \int_{-1}^{0} |x|[x]dx + \int_{0}^{1} |x|[x]dx + \int_{1}^{2} |x|[x]dx$

$= \int_{-1}^{0} (-x)(-1)dx + \int_0^1 x\cdot 0\, dx + \int_1^2 x\cdot 1\cdot dx$

$= 1$

间断函数 → 去有限个断点

分段函数 → 拆积分区域

㉕ 定积分应用：求n项和的极限

凑出 $\sum f(\xi_i)\cdot\frac{1}{n}$

eg1：令 $S=\lim\limits_{n\to\infty}\left[(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})\cdots(1+\frac{n}{n})\right]^{\frac{1}{n}}$

$\ln S = \lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\ln(1+\frac{i}{n})\frac{1}{n}$

$= \int_0^1 \ln(1+x)dx$

eg2：令 $S=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$

$\ln S = \lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{i}{n}\cdot\frac{1}{n}$

$= \int_0^1 \ln x\, dx$

㉖ 构造二次函数证明不等式

eg：$f(x),g(x)\in C[a,b]$. 证明：$\left(\int_a^t f(x)g(x)dx\right)^2 \le \int_a^t f^2(x)dx\cdot\int_a^t g^2(x)dx$

构造 $\int_a^t (f(x)+g(x)t)^2dt = \int_a^t f^2(x)dt + \int_a^t 2f(x)g(x)t\,dt + \int_a^t g^2(x)t^2dt$

则命题 ⇔ $(\frac{b}{2})^2 \le ac$ ⇔ 二次函数恒正

第三章 积分的计算及应用

① 第一换元法：$dF(x) = f(x)dx$ 凑微分

② 第二换元法：令 $x=\varphi(t)$ 三角换元 / 根号换元

$dx = \varphi'(t)dt$ eg: $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}dx$ 可令 $x=2\sin t$ 或 $u=\sqrt{4-x^2}$

③ 分部积分法：$\int u(x)\,dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)\,du(x)$

eg: $I_n = \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}$. $\sec^n x dx$. $\int \arctan x dx$. 反对幂指三相乘/除

次序：反.对.幂.三/指，靠后的先放进d里

易漏：解完方程要 + C

④ 不可积：$\int \frac{\sin x}{x}dx$. $\int e^{-x^2}dx$. $\int \sin x^2 dx$. $\int \cos x^2 dx$

$\int \frac{\cos x}{x}dx$. $\int \frac{1}{\ln x}dx$. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}$ $\int \sqrt{1-k^2\sin^2 x}\,dx$

⑤ 有理式积分：假→真，真拆分

1° 假→真：长除法

2° 真分式拆解

分子不动，分母降幂

$$\begin{cases} (ax+b) \Rightarrow \frac{A}{ax+b} \\ (ax+b)^k \Rightarrow \frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(ax+b)^k} \\ (ax^2+bx+c) \Rightarrow \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} \\ (ax^2+bx+c)^k \Rightarrow \frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{A_kx+B_k}{(ax^2+bx+c)^k} \end{cases}$$

3° 求 A.B.C.D …

法① 待定系数

法② 代入 $x=0.\pm1.\cdots$

4° 求 $\int \frac{Bx+D}{x^2+px+q}dx$

eg: $\int \frac{x}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1-1}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}dx$

按分母配凑分子

5° 求 $\int \frac{Bx+D}{(x^2+px+q)^n}dx$ 分部积分递推

eg: $\int \frac{dx}{(x^2+2)^2} = -\int \frac{1}{2x}d\left(\frac{1}{x^2+2}\right) = -\frac{1}{2x(x^2+2)} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2(x^2+2)} = \cdots$

6° 可化为有理式的积分

- 三角函数有理式 ⇒ 万能替换 $t=\tan\frac{x}{2}$，$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$. $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

常见：$\int \frac{dx}{a+b\sin x + c\cos x}$

[拓] 一切三角函数一次有理式的不定积分法

$$\int \frac{a\cos x + b\sin x}{c\cos x + d\sin x}\,dx$$ 令分子 = A·分母 + B·分母一阶导，求A·B

$$= Ax + B\int \frac{du}{u}$$

$$= Ax + B\ln|分母| + C$$

- 某些根式 $\Rightarrow$ $t = \sqrt[n]{ax+b}$ 或 $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$

eg: $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}} = \int \frac{dx}{(x^2-1)\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}}$ 令 $\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}} = u$

⑥ 定积分的分部积分法

点火公式：$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx = \begin{cases} n为正偶数：\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} \\ n为大于1的奇数：\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1} \end{cases}$ (用 !! 表示)

eg1: 求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t\cdot\sin^2 t\,dt$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t\,(1-\cos^2 t)\,dt$

$= I_4 - I_6 = \frac{\pi}{32}$

eg2: 求 $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 (1-x^2)^n dx$ $\rightarrow$ 转为 $\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{2n+1} dt = I_{2n+1}$

求 $\lim_{n\to\infty} I_{2n+1}$：$I_{2n+1}^2 < I_{2n+1}\cdot I_{2n+2} = \frac{\pi}{4(n+1)}$

$\quad = 0$ (消掉大部分项)

[换元合并法：技巧性强，不通用]

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx \quad (令\ x = \pi - t)$$

eg1: $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{1+e^x}dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\sin^2 x}{1+e^x}dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{1+e^x}dx$

令 $x = -t$，化为 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x\sin^2 x}{1+e^x}dx$

原式 $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx$

eg2: $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\cos x}}{e^{\sin x}+e^{\cos x}}dx$

令 $x = \frac{\pi}{2} - t$，$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\sin t}}{e^{\sin t}+e^{\cos t}}dt$

但化简可用此思想：拆上下限 → 统一上下限

$$\int_0^{2\pi} e^{\sin t}\sin t\,dt = \int_0^{\pi} e^{\sin t}\sin t\,dt + \int_{\pi}^{2\pi} e^{\sin t}\sin t\,dt = \int_0^{\pi}(e^{\sin t} - e^{-\sin t})\sin t\,dt > 0$$

⑦ 定积分的换元法 不定积分不能随便换元，定积分才可以!!!

积分上下限极易忘记变更

⑧ 算定积分，首先判断奇偶性

⑨ 周期函数：$\int_{a+T}^{b+T} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$

经验：

°1 $\int \sin nx \sin mx \, dx$ ⇒ 积化和差

°2 仅含 $\sin x \cos x$ 的分式 ⇒ 直接除 $\cos x$ 化成 $\tan x$ 和 $\sec x$

$\frac{\sec^{\alpha} x}{\tan^{\beta} x}$ ⇒ 化为 $\sin x$ 与 $\cos x$，若有奇就能做

°3 见根号 ⇒ 思换元

°4 e^x 系列积分 ⇒ 分子分母常同乘 e^{kx}

eg: $\int \frac{dx}{(1+e^x)^2} = \int \frac{1+e^x-e^x}{(1+e^x)^2} dx = \int \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1} dx - \int \frac{de^x}{(1+e^x)^2}$

°5 分子自由拆配

eg: $\int \frac{x^3+x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{x^2+1}{\sqrt{1-x^2}} dx^2 = \frac{1}{2} \int \frac{x^2-1+2}{\sqrt{1-x^2}} dx^2$

°6 令 $x = a\sec t$ 的换元要分类讨论

eg: $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} dx$ $(a>0)$

① $x>a$：令 $x = a\sec t$. $(0<t<\frac{\pi}{2})$

$\sim = \int \frac{a\tan t}{a\sec t} \cdot a\sec t \cdot \tan t + C$

$= \sqrt{x^2-a^2} - a \cdot \arccos\frac{a}{x} + C$

② $x<-a$：令 $x=-t$ $(t>a)$

$\sim = \int \frac{\sqrt{t^2-a^2}}{t} dt$

$= \sqrt{t^2-a^2} - a \cdot \arccos\frac{a}{t} + C$

$= \sqrt{x^2-a^2} - a \cdot \arccos\frac{a}{-x} + C$

综上：$\sqrt{x^2-a^2} - a \cdot \arccos\frac{a}{|x|} + C$

$x>a$ 时，$t \in (0, \frac{\pi}{2})$，正常做

$x<-a$ 时，若仍令 $x = a\sec t$，$t \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$.

回代时极麻烦，故令 $x=-t$ 套用上种情况

°7 $\sin^{\alpha} x \cos^{\beta} x$ → 有奇拆奇．全偶降次至奇

°8 $\tan^{n} x \sec^{偶} x$ → 化为 $\tan x$

$\tan^{奇} x \sec^{n} x$ → 化为 $\sec x$

$\tan^{偶} x \sec^{奇} x$ → 分部积分

°9 $\tan^{n} x \, dx$ → $n=1.2$ easy

$n \geq 3$. $\tan^2 = \sec^2 - 1$ 降次

°10 都在分母 → 倒代换

eg: $\frac{1}{x^4(1+x^2)} dx$，令 $t = \frac{1}{x}$

°11 长除法剥离分式

eg: 由长除法：$t^4 = (t^2+1)(t^2-1)+1$

$\frac{t^4}{t^2+1} = t^2 - 1 + \frac{1}{t^2+1}$

°12 分子配凑

eg: $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \int \frac{x^2-a^2+a^2}{\sqrt{a^2-x^2}} dx$

°13 $\int \frac{x^2+1}{x^4+1} dx = \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}} dx = \int \frac{d(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+2}$

（此法远快于有理式积分）

°14 三角函数乘 $(x-1)$ → 诱导公式凑

背/熟推：

1° $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \int (\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x}) dx = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$

2° $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \arctan\frac{x}{a} + C$

3° $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$

4° $\int \sec x \, dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$

$\int \csc x \, dx = \ln|\csc x - \cot x| + C = \ln|\tan\frac{x}{2}| + C$

5° $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$

6° $\frac{1}{2\sqrt{x}} dx = d\sqrt{x}$. $\frac{1}{x} dx = d\ln x$

易错：

1° $\int_0^x f(t) dt$ 洛导完分子极易忘记导分母

⑩ 定积分的应用

1° 曲线弧长

$$s=\int_\alpha^\beta \sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt \xrightarrow{y=f(x)} \int_\alpha^\beta \sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx$$

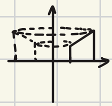
$$\xrightarrow{r=r(\theta)} \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\theta)+[r'(\theta)]^2}\,d\theta$$

2° 旋转体体积

! 别混. 一个dx / 一个ds

$V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx$ (以绕x轴转为例) / 柱壳法: $V=\int_a^b y\cdot 2\pi x\,dx$

(仅适用于边缘垂直)



3° 旋转体侧面积

$$F=2\pi\int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt \xrightarrow{y=f(x)} 2\pi\int_\alpha^\beta f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

$$\xrightarrow{r=r(\theta)} 2\pi\int_\alpha^\beta r\sin\theta\sqrt{r^2(\theta)+[r'(\theta)]^2}\,d\theta$$ (绕极轴旋转)

4° 曲线弧的质心与转动惯量

质心(以x轴为例): $\bar{x}=\dfrac{\int x\rho_l\,ds}{\int \rho_l\,ds}$

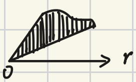
(ρ_l, $\rho(t)$为线密度) 同理, $dJ_x=y^2(t)\rho(t)\,ds$, $dJ_y=x^2(t)\rho(t)\,ds$

质量分布均匀的曲线绕同平面内不通过它的直线旋转一周所得 $S_{旋转面}=C_{质心(周长)}\cdot S_{(弧长)}$

累加 ← 线元

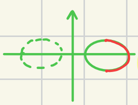
5° 平面极坐标下的图形面积

$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)\,d\theta$



→ 对称性判断: 算r=0, 再算r>0

补例: ①

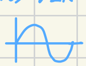


绕y轴转一周求体积 (面积同法)
= V右半圆 − V左半圆

② 极坐标, 算一周期内 r≥0 对应的有效θ区间 (一周期: 先至少保证θ取遍[0,2π], 再根据表达式的周期性

eg: 求 $r=a\sin^3\frac{\theta}{3}$ (a>0) 的全长

一周期 [$0<\frac{\theta}{3}<\pi$ $r>0$ ✓
$\pi<\frac{\theta}{3}<2\pi$ $r<0$ ×



其中, $\frac{\theta}{3}\in(0,\frac{\pi}{2})$与$(\frac{\pi}{2},\pi)$对称 ⇒ 故求 $2\int_0^{\frac{3\pi}{2}} ds$

③ 椭圆、圆 ⇒ 别用直角坐标系, 换成参数方程

第四章 微分中值定理与泰勒公式

① 罗尔中值定理：闭区间连续 & 开区间可导，若 $f(a)=f(b)$，则 ∃ $\xi\in(a,b)$ 使 $f'(\xi)=0$

② 拉格朗日中值定理：闭区间连续 & 开区间可导，则 ∃ $\xi\in(a,b)$ 使 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

另形式：$f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0)$

$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f'(x_0+\theta\Delta x)\Delta x$

应用：1° 证明不等式

eg：证明 $\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$

$\dfrac{\ln(1+x)-\ln 1}{x}=f'(\xi)=\dfrac{1}{\xi}\in\left(\dfrac{1}{1+x},1\right)$

2° 求极限（出现 $f(b)-f(a)$ 形式时，尤其嵌套）

eg：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-\sin(\tan x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(x-\tan x)\cos\xi}{x^3}$ $\xi\in(x,\tan x)$，$\xi\to0$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\tan x}{x^3}$（洛）

$=-\dfrac{1}{3}$

③ $f'(x)>0\to$ 严格递增（逆命题不一定成立）

应用：要证常函数 ⇒ 导数恒为0

eg：$\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}$

④ 柯西中值定理：闭区间连续 & 开区间可导 & $g'(x)\neq0$，则 ∃ $\xi\in(a,b)$ 使 $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

⑤ 洛必达法则：$\lim\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在 $\to$ $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 存在且等于前者

（否命题不成立）$\lim\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在 $\not\to$ $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 不存在

类型：$0\cdot\infty$ 型：$\dfrac{0}{\frac{1}{\infty}}$ 或 $\dfrac{\infty}{\frac{1}{0}}$

$\infty-\infty$ 型：通分，有理化

$0^\infty/1^\infty/\infty^0$ 型：翻上去

☆"翻上去"相减的先提 $e^{\square}$！

eg：$(2+x)^x-2^x=e^{x\ln(2+x)}-e^{x\ln2}$

$=e^x\cdot e^{\ln2}\left[e^{\ln(2+x)-\ln2}-1\right]$

推论：$\lim\limits_{x\to0^+}x^\alpha(\ln x)^\beta=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

⑥ 泰勒公式

$f(x)=f(x_0)+\dfrac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n\to R_n=\begin{cases}o((x-x_0)^n)，x\to x_0 & \text{“x趋于…”}\\ \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}，\xi\text{介于}x_0\text{与}x\text{之间} & \text{“使n+1阶可导的x的范围”}\end{cases}$

麦克劳林公式：$f(x)=f(0)+\dfrac{f'(0)}{1!}x+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\begin{cases}o(x^n)，x\to0\\ \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}，\xi\text{介于0与x之间 或 }\dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}，\theta\in(0,1)\end{cases}$

局部泰勒展开式的唯一性定理：可用间接 Taylor 展开反求高阶导数

间接展开用到的无穷小运算：$o(x^3)\cdot x=o(x^4)$，$o(x^3)+o(x^4)=o(x^3)$，$o\left(\dfrac{1}{x}\right)\cdot x=o(1)$

背：1° $e^x=1+x+\dfrac{1}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{1}{n!}x^n+o(x^n)$ $(x\to0)$

2° $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o(x^{2n})$ $(x\to0)$

3° $\dfrac{1}{1+x}=1-x+x^2+\cdots+(-1)^nx^n+o(x^n)$ $(x\to0)$

$\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}+o(x^n)$ $(x\to0)$

间接展开 eg1: $f(x)=\dfrac{1+x+x^4}{1-x+x^2}$ 在 $x=0$ 处展开至4阶：

有理式,先拔常数： $f(x)=1+2x\cdot\dfrac{1}{1-(x-x^2)}$

$$=1+2x\cdot\left[1+x-x^2+(x-x^2)^2+(x-x^2)^3+o((x-x^2)^4)\right]$$

$$=1+2x+2x^2-2x^4+o(x^4)\ ,\ x\to 0$$

eg2: $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)(x+3)}$ 在 $x=2$ 处展开至n阶，求 $f^{(n)}(2)$：

非 $x=0$ 展开 ⇒ 换元 令 $x-2=t$. $f(x)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t+5}\right)$

$$=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^k-\frac{1}{20}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{t^k}{5^k}+o(t^n)$$

$$=\underbrace{\boxed{\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{4}\left(1-\frac{1}{5^{k+1}}\right)}}_{\frac{f^{(n)}(2)}{k!}}(x-2)^k+o((x-2)^n)$$

eg3: 展开至4阶 $e^x\sin x=\left[1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right]\left[x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right]$

定阶依据：① 读出目标阶数的 x^n

② 确保所有无穷小量都能被 $o(x^n)$ 吸收

偷懒技巧：只要保证以上①②，可以随时舍去过高精度

泰勒展开求极限： eg1: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x-\frac{x}{2}\sin x}{\sin x-x\cos x}$ 判断展开到几阶 → 看分母是几阶无穷小量（展开先后）

$\sin x-x\cos x=\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)x^3+\left(\frac{1}{5!}-\frac{1}{4!}\right)x^5+\cdots$ ⇒ 是 x^3 的同阶无穷小量

（展开至3阶）

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}x^3+o(x^3)}{\frac{1}{3}x^3+o(x^3)}$$

$$=\frac{1}{2}$$

何时用？分母是 x 的高次幂时、一看就知用等替/洛必达很危险时

其他细节问题： 1° 算出 $[(-1)^n-1]$（一半的项为0）时，就得用 $2n-1$ 和 $2n$ 来表示了

2° 若结果与 n 的奇偶有关还要求展开到 n 阶. 算了别搞麻烦，写2遍行了

⑦ 极值问题

驻点/稳定点/临界点： $f'(x_0)=0$ 的点

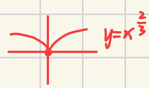
费马定理： 极值点 x_0 处 $f'(x_0)=0$ （必要条件） 加 → $f'(x_0)$ 两侧变号 / → 有二阶导时 $f''(x_0)<0$ 或 >0 ］充要条件

推广： $f'(x_0)=\cdots=f^{(2n-1)}(x_0)=0$，若 $f^{(2n)}(x_0)>0$，x_0 为极小值点、

$\cdots<0\quad\cdots$ 大 $\cdots$

$f'(x_0)=\cdots=f^{(2n)}(x_0)=0$，$f^{(2n+1)}(x_0)\neq 0$. x_0 不是极值点、

求极值点方法
- 可导点
  - 求出所有 $f'(x_0)=0$ 分段讨论 $f'(x)$ 在各区间上的正负 （高中习惯 ✓）
  - 无脑求导直至出现 $f^{(n)}(x_0)\neq 0$，看 n 是偶数则为极值点、
- 不可导点
  - 回到定义，在一小段区间内的最值
  - 看左右导数的正负性（$f(x)$ 单调性） eg:



求闭区间上最值：比较极值与端点值 ⇒ 若区间内只有一个极值点，则可直接确定它是一个最值点

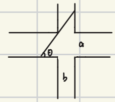
可导　不可导

⇒ 若区间必有极值点，且有唯一稳定点，则可直接确定该稳定点是一个极值点

eg: $x\to\infty$时, $f(x)\to+\infty$

必有极小值

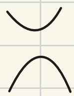
经典应用题：求能顺利转入另一条河的船的最大长度



$$l=f(\theta)=\frac{a}{\sin\theta}+\frac{b}{\cos\theta}\ \to 求\ l_{min}$$

⑧ 凸凹性

在(a,b)内恒有 $\begin{cases} f''(x)>0 & 下凸 \\ f''(x)<0 & 上凸 \end{cases}$

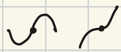


理解：$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(\xi)(x-x_0)^2$ $\quad f''(\xi)<0$

$f(x)<f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

曲线在切线下方 → 上凸

拐点：$f''(x_0)=0$ 且两侧凸凹性相反（$f''(x)$变号）



⑨ 渐近线

斜渐近线：$a=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ （$-\infty$同理），$b=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-ax)$

垂直渐近线：$x\to C$ 时（可单侧），$f(x)\to+\infty$（或$-\infty$）

水平渐近线：$x\to\infty$ 时，$f(x)\to$?

极易漏掉 x/y 轴 ☆

⑩ 函数作图

求一阶导（找极值点），二阶导（找拐点）

列表1：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	+	0	−	−	−	0	+
y''	−	−	−	0	+	+	+
y	↗ 上凸	极大值	↘ 上凸		↘ 下凸	极小值	↗ 下凸

↓

列表2：几个特殊函数值

x	0	1	2	3
y	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	0

↓

求渐近线

↓

画图

补：见函数差值 — 微中 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$

— 牛莱 $f(b)-f(a)=\int_a^b f'(x)dx$

第五章 向量代数与空间解析几何

① 单位向量，记作 $\vec{a}^\circ$ ， $\vec{a}^\circ = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

② 三角不等式 ： $|\vec{a}+\vec{b}| \le |\vec{a}| + |\vec{b}|$

③ 叉乘(外积)：

$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin<\vec{a},\vec{b}>$ $\vec{a}$与$\vec{b}$共线 $\Leftrightarrow$ $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$

几何意义：$S_{平四}$

$$\vec{a}_1\times\vec{a}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} \vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a} \\ \lambda(\vec{a}\times\vec{b}) = (\lambda\vec{a})\times\vec{b} = \vec{a}\times(\lambda\vec{b}) \\ (\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c} = \vec{a}\times\vec{c} + \vec{b}\times\vec{c} \end{cases}$$

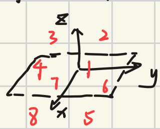
结合律不成立：$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} \ne \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$

混合积： $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$ 符号看次序(右手系为正)

(绝对值)几何意义：平行六面体体积 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$共面 $\Leftrightarrow$ $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = 0$

$$\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = \begin{vmatrix} x_3 & y_3 & z_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

④ 空间分为八卦限



⑤ $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$ ， $\vec{a}^\circ = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x,y,z)$

$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

⑥ 方向角 ： 与 x, y, z 轴正向的夹角 α, β, γ

方向余弦： $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$

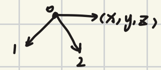
$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{i}}{|\vec{a}|}$ ， $\vec{a}^\circ = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k}$ (方向余弦就是单位向量的坐标分量)

$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ ， $\cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ ， $\cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ $\Rightarrow$ $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

⑦ 平面方程

点法式：$\overrightarrow{P_0P}\cdot\vec{n}=0$　　$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

三点式：三向量共面，混合积为零　$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix}=0$



一般式：$Ax+By+Cz+D=0$

$D=0 \Rightarrow$ 过$(0,0)$

$A=0 \Rightarrow$ 平行于x轴　垂直于yOz平面　$(A,B,C)\cdot(1,0,0)=A=0$，$\vec{n}\perp x$轴（要写过程）

$A=B=0 \Rightarrow$ 平行于xOy平面

$A=B=D=0 \Rightarrow$ 与xOy平面重合

截距式：$\dfrac{x}{-\frac{D}{A}}+\dfrac{y}{-\frac{D}{B}}+\dfrac{z}{-\frac{D}{C}}=1$　$(A,B,C,D\neq0)$

⑧ 两平面间

- 平行
  - 重合：$(A_1,B_1,C_1,D_1)=\lambda(A_2,B_2,C_2,D_2)$
  - 不重合：$\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}\neq\dfrac{D_1}{D_2}$
- 相交
  - 垂直：$(A_1,B_1,C_1)\cdot(A_2,B_2,C_2)=0$
  - 不垂直：平面夹角 = 法向量夹角（取小角）

⑨ 直线方程

一般方程（两面式）：$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$　（不唯一）

参数方程：$\begin{cases} x-x_0=ta \\ y-y_0=tb \\ z-z_0=tc \end{cases}$

标准方程（点向式）：$\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$　$(a,b,c\neq0)$

两点式方程：$\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$

[形式互化]

一般 → 标准：取点 & $\vec{s}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}$

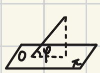
标准 → 一般：拆连等式 $\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b} \\ \dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c} \end{cases}$　分别整理为一般式

⑩ 夹角

两向量夹角 $\theta\in[0,\pi]$

$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$

直线与平面夹角 $\varphi\in[0,\frac{\pi}{2}]$



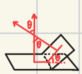
$\varphi=\frac{\pi}{2}-\langle\vec{n},\vec{s}\rangle$

$\sin\varphi=|\cos\langle\vec{n},\vec{s}\rangle|$

两直线夹角 $\varphi\in[0,\frac{\pi}{2}]$

$\cos\varphi=\dfrac{|\vec{s_1}\cdot\vec{s_2}|}{|\vec{s_1}||\vec{s_2}|}$

两平面夹角 $\varphi\in[0,\frac{\pi}{2}]$



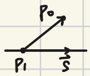
$\varphi=$ 法向量夹角取小值

$\cos\varphi=|\cos\langle\vec{n_1},\vec{n_2}\rangle|$

⑪ 距离

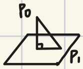
点到点 $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$

点到线 $d=\dfrac{|\overrightarrow{P_1P_0}\times\vec{s}|}{|\vec{s}|}$



$\dfrac{S_{平四}}{|\vec{s}|}$

点到面 $d=\dfrac{|\overrightarrow{P_0P_1}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\dfrac{|A(x_1-x_0)+B(y_1-y_0)+C(z_1-z_0)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\dfrac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$



线到线
- 平行：点到线
- 异面：$d=\dfrac{|\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\dfrac{|(\vec{s_1}\times\vec{s_2})\cdot\overrightarrow{P_1P_2}|}{|\vec{s_1}\times\vec{s_2}|}$

线到面 → 点到面

面到面 → 点到面 / $d=\dfrac{|D_1-D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

⑫ 解题经验

1° 平面只有三个参数（几何/代数意义都是）

直线有四个参数（用点向式看）（约束条件比平面多）

2° 平面束：

直线L（一般式） $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 & ① \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 & ② \end{cases}$

$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$ ③ 表示除②以外任一过L的平面

3° 过点A且与直线l（点向式）垂直相交的直线

求交点M $\begin{cases} M在l上 \ （参方设t） \\ AM\perp l \end{cases}$

4° 求直线l在平面π上的投影直线l'

↳ 化成两面式，用平面束 → 垂直得π → 表示为两面式

5° 投影曲线

eg：求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ z^2=2y \end{cases}$ 在Oxy平面上的投影曲线的方程

① 消去z得投影柱面方程 $x^2+y^2+2y=1$

② 令$z=0$得投影曲线方程 $\begin{cases} x^2+y^2+2y=1 \\ z=0 \end{cases}$

（投影柱面再与Oxy相交）

⑬ 二次曲面

- **椭圆锥面**： $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$　（z=0截只有一个点）

椭球面： $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$　（用球来记）

单叶双曲面： $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$　（两正一负）

双叶双曲面： $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$　（两负一正）

（单叶、双叶双曲面：）难得若不同统难转

抛圆抛物面： $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$

双曲抛物面： $z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$　**（马鞍面）**

椭圆柱面： $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

双曲柱面： $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

抛物柱面： $\frac{x^2}{a^2}-y=0$

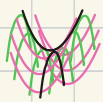
补充：1° 椭球面参数方程：
$$\begin{cases} x=a\sin\varphi\cos\theta \\ y=b\sin\varphi\sin\theta \\ z=c\cos\varphi \end{cases}$$

2° 双曲面与渐线锥面

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1/0/-1$

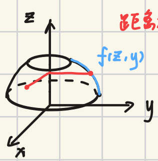
都能截出双曲线

3° 双曲抛物面（马鞍面）：



用z=0截：两直线

⑭ 旋转曲面



距离相等，坐标代换

$y \to \sqrt{x^2+y^2}$

$z \to z$

$f(z,\sqrt{x^2+y^2})$

⑮ 空间曲线

$r(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$

切向量 $r'(t)=x'(t)\vec{i}+y'(t)\vec{j}+z'(t)\vec{k}$

切线方程： $\frac{x-x(t_0)}{x'(t_0)}=\frac{y-y(t_0)}{y'(t_0)}=\frac{z-z(t_0)}{z'(t_0)}$

弧微分 $ds=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$

法平面： $x'(t_0)(x-x(t_0))+y'(t_0)(y-y(t_0))+z'(t_0)(z-z(t_0))=0$

求切线方程的三种方法：

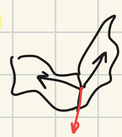
1° **化成参数方程，正常求**

2° 方程组确定隐函数，选x/y/z其一为参数

切向量即隐函数求导（但有的参不能选，有风险）

☆ 3° **利用两个曲面法向量（梯度）**

$\vec{s}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}$



第六章　多元函数微分学

① R^n 中的距离

$d(P,Q) \overset{def}{=} \sqrt{\sum_{j=1}^{n}(x_j - x_j^0)^2}$ → 仍有：三角不等式　$d(P,Q) \le d(P,R) + d(R,Q)$

② 点 P_0 的 r 邻域：$U_r(P_0) = \{P \in R^n \mid d(P_0,P) < r\}$　（开区间 / 开圆 / 开球）

R^n 中的点
- 内点　$\exists U_r(P) \subset E$
- 外点　$\exists U_r(P) \cap E = \phi$
- 边界点　$\forall P$，$U_r(P)$ 有 $\subset E$ 和 $\not\subset E$

③
- 开集：每一点都是内点
- 闭集：包含全部边界点
- 非开非闭：只包含部分边界点

连通：任意两点都可用 E 中曲线连接

- 区域：连通的非空开集　G
- 闭区域：区域 + 其边界　$\overline{G}$

有界集合：$\exists \rho$ 使 E 包含于以原点为中心，ρ 为半径的球内

④ 二元函数极限　$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = A$

空心圆　$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$ 使当 $0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$ 且 (x,y) 在 D 中时，有 $|f(x,y) - A| < \varepsilon$

空心正方形　$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$ 使当 $|x-x_0| < \delta$，$|y-y_0| < \delta$ 且 $(x,y) \ne (x_0,y_0)$ 且 (x,y) 在 D 中时，有 $|f(x,y) - A| < \varepsilon$

加条件：eg: $\left|\frac{\sin(x^3+y^4)}{x^2+y^2}\right| \le \frac{x^3+y^4}{x^2+y^2} \le \frac{x^2}{x^2+y^2}|x| + \frac{y^2}{x^2+y^2}y^2 \le |x| + y^2 < |x| + |y| < \varepsilon$

[经典] 放缩为 1　　需要 $|y| < 1$ → $\delta = \min\{\frac{\varepsilon}{2}, 1\}$

求极限，可用夹逼定理

⑤ $(x,y) \to (0,0)$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 \to 0$

$\Leftrightarrow x^{2n} + y^{2n} \to 0$

⑥
- 计算极限：夹逼定理 /（有限次）四则运算、复合
- 证明极限存在（已知极限）：定义 ε-δ
- 证明极限不存在　（判断极限是否存在，首先尝试证伪）

1° 先用直线 $y = kx$ 试证不存在

2° 若不行，再用 $y = kx^a$ 试，去证不存在

⑦ 多元函数的连续性 ： 二元初等函数在其有定义的区域内是连续的
(非边界)

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

⑧ 在有界闭区域上连续 → 有界 / 有最大小值 / 介值定理

[易错] $z=\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos y}$ 在哪里连续？

不是 $(k_1\pi, \frac{\pi}{2}+k_2\pi)$，而是 $x\neq k_1\pi$ 或 $y\neq\frac{\pi}{2}+k_2\pi$

一些点 一些线

⑨ 偏导数

$$z=f(x,y),\quad f_x(x_0,y_0)=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} \triangleq \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

1° 因为求x偏导，y视作常量，所以y是已知不如先代入 } 定义法 → 哪个都用不一定，具体分析!!!

2° easy的直接摆住其他量求导，否则用定义求 } 直接求导法

高阶偏导数： $f_{xx}(x,y)$，$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$z_{xx}$

f_{xy}
f_{yx}] 二阶混合偏导数
f_{yy}

偏导数连续(在某区域内) ⟶ 混合偏导数可交换次序

⑩ 全微分

全增量： $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho),\quad \rho\to 0$$

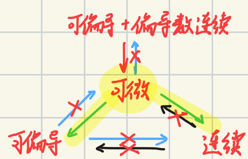
$$dz = A\Delta x + B\Delta y$$

全微分 dz 是全增量 Δz 的线性主要部分

或 $dz = f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy$

$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$

一元函数：极限∃ ← 连续 ← 可导/可微



[易错] 偏导数的连续 也要求二元的连续 而非单变量的连续
(证明时要小心)

$\lim_{x\to 0} f_x(x,0)=f_x(0,0)$ 不是偏导数连续，

$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f_x(x,y)=f_x(0,0)$ 才是

多元初等函数，在有定义的区域内(非边界)，只要偏导数存在，就一定可微 (没啥用)

定义法证可微：$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \dfrac{\Delta z - z_x\Delta x - z_y\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} = 0 \quad = \dfrac{f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) - f_x(x_0,y_0)\Delta x - f_y(x_0,y_0)\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$

(首选)

间接证明：
- 不连续一定不可微
- 不可偏导一定不可微
- 可偏导且偏导数连续，一定可微

eg1：已知全微分 dz 求 $z(x,y)$

已知 $\frac{\partial z}{\partial x}$、$\frac{\partial z}{\partial y}$.

↓

对 x 积分，但要加常数 $\varphi(y)$，得 $z(x,y)$

↓

再求导与 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 比对，得 $\varphi'(y)$，反推 $\varphi(y)$

eg2：隐函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F(x^2+y^2+z^2, xy-z^2)=0$ 确定，求全微分

法一：$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$ 分别求 x,y 偏导

法二：全微分，整理出 $dz = \cdots$

⑪ 复合函数求偏导

画变量关系图：

$$\begin{tikzcd} & u \arrow[r] \arrow[dr] & x \\ z \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "f"'] & & \\ & v \arrow[r] \arrow[ur] & y \end{tikzcd}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

可记为 f_1', f_2'

高阶复合偏导：注意 f_1'、$\frac{\partial f}{\partial u}$ ⋯ 是 u,v 的函数！

f_1' 对 x 求偏导：$f_{11}''\frac{\partial u}{\partial x} + f_{12}''\frac{\partial v}{\partial x}$

⑫ 一阶全微分的形式不变性：$dz = f_u du + f_v dv$ （u,v 可为自变量/中间变量）

eg: $dz = \frac{\partial u}{\partial(x^2+y^2)} d(x^2+y^2) + \frac{\partial v}{\partial(e^{xy})}\cdot d(e^{xy})$

$= \cdots$

$= \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$

可以此求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ （全微分法求复合偏导）

⑬ 高阶微分 （前提：n阶偏导数连续）

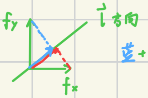
$$d^n f = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f \longrightarrow \text{三元：} d^n f = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y} + dz\frac{\partial}{\partial z}\right)^n f$$

eg: $d^3 f = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}dy^3$

⑭ 方向导数（任意方向射线上的变化率）

$(\cos^2\alpha+\cos^2\beta=1)$

单位向量 $\vec{e_l}=(\cos\alpha,\cos\beta)$ $\begin{cases}\Delta x=t\cos\alpha\\ \Delta y=t\cos\beta\end{cases}$ $t=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ [几何理解]



蓝+红 = l方向的变化率

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t\cos\alpha,\ y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{t}$$ （前提：可微）

（三元则）

$$=f_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)\cos\beta\ +f_z(x_0,y_0,z_0)\cos\gamma$$

偏导数存在 ⟶ 方向导数存在　eg: $x\to0^-$, $x\to0^+$ 的方向导数不同，则方向导数存在而偏导数不存在

- 当两方向相反时，两 $\frac{\partial f}{\partial l}$ 互为相反数
- 与坐标轴（三维）等角的方向：$\cos\theta=\pm\frac{\sqrt3}{3}$

⑮ 梯度（是一个向量）

（增加最快）

$\mathrm{grad}\,f|_{P_0}=(f_x(x_0,y_0),\ f_y(x_0,y_0))$，该方向为使方向导数达到最大值的方向，其模为 $\frac{\partial f}{\partial l}$ max

（与此反向则有最小值，负梯度：减少最快）

$\frac{\partial f}{\partial l}$ 可写作 $\mathrm{grad}\cdot\vec{e_l}$

梯度运算法则：±、×、÷、链式复合

⑯ 多元函数的微分中值定理

（拉格朗日中值公式）　$\varphi(1)-\varphi(0)=\varphi'(\theta)$

$$f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)=f(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta\Delta x,\ y_0+\theta\Delta y)\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+\theta\Delta x,\ y_0+\theta\Delta y)\Delta y$$

若 $z=f(x,y)$ 在 D 内满足 $\frac{\partial f}{\partial x}\equiv0$，$\frac{\partial f}{\partial y}\equiv0$，则 $f(x,y)$ 在 D 内为一常数

⑰ 多元函数的泰勒公式　$f(1)-f(0)=\frac{1}{1!}f'(0)+\frac{1}{2!}f''(0)+\dots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta)$

$$f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)=f(x_0,y_0)+\frac{1}{1!}df(x_0,y_0)+\frac{1}{2!}d^2f(x_0,y_0)+\cdots+\frac{1}{n!}d^nf(x_0,y_0)+\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(x_0+\theta\Delta x,\ y_0+\theta\Delta y)$$

$d^{(n)}f$ 即高阶微分，故要先求完所有偏导数　　或 $o(\rho^n)$，$\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$

eg: $f_x=\cos(\frac{\pi}{2}x^2y)\cdot\pi yx\xrightarrow{(1,1)}0$

$f_y=\cos(\frac{\pi}{2}x^2y)\cdot\frac{\pi}{2}x^2\xrightarrow{(1,1)}0$

$f_{xx}=-\sin(\frac{\pi}{2}x^2y)\cdot(\pi yx)^2+\cos(\frac{\pi}{2}x^2y)(\pi yx)'\xrightarrow{(1,1)}=-\pi$

$f_{xy}=-\sin(\frac{\pi}{2}x^2y)\cdot\frac{\pi}{2}x^2\cdot\pi yx+\cos(\frac{\pi}{2}x^2y)\cdot\pi x\xrightarrow{(1,1)}-\frac{\pi^2}{2}$

$f_{yy}=-\sin(\frac{\pi}{2}x^2y)\cdot(\frac{\pi}{2}x^2)^2+\cos(\frac{\pi}{2}x^2y)(\frac{\pi}{2}x^2)'\xrightarrow{(1,1)}-\frac{\pi^2}{4}$

$f(\underbrace{1+\Delta x}_{x},\underbrace{1+\Delta y}_{y})=f(1,1)+df(1,1)+\frac{1}{2}d^2f(1,1)+o(\rho^2)$

$=1+0+0+\frac{1}{2}[-\pi(\Delta x)^2-2\cdot\frac{\pi^2}{2}\cdot(\Delta x)(\Delta y)-\frac{\pi^2}{4}\cdot(\Delta y)^2]+o(\rho^2)$

$\Delta x=x-1$
$\Delta y=y-1$

$\sin(\frac{\pi}{2}x^2y)=1+\frac{1}{2}[-\pi(x-1)^2-2\cdot\frac{\pi^2}{2}(x-1)(y-1)-\frac{\pi^2}{4}(y-1)^2]+o(\rho^2)$

多元函数泰勒公式的唯一性：间接展开 ⟶ 合并：$o(x^2)$，$o(y^2)$，$o(xy)$ 都写 $o(\rho^2)$

eg: 针对多项式，$f(x,y)=x^2y-xy^2$ 在 $(2,1)$ 处展开至三阶

令 $x-2=u$，$y-1=v$，则 $f(x,y)=u^2v-uv^2+u^2-2v^2+2uv+3u+2$

$=\cdots(x-2)\cdots(y-1)\cdots$

⑱ 隐函数存在定理

1° 一个方程 （$F_y \neq 0$ 时存在，但我们都是先求再判断存在性）

eg: x, y, z 满足 $F(x,y,z)=0 \Rightarrow$ 可确定 $z=f(x,y)$

法一：对方程两边求偏导

法二：（非抽象函数才适用）全微分法 （二元函数推荐用）

2° 方程组

雅可比行列式：

$F(x,u,v), G(x,u,v)$ 关于 u, v 的雅可比行列式为 $J=\frac{D(F,G)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}$ from 方程组 $\begin{cases} \text{变量纵向一致} \\ \text{一行是一个方程} \end{cases}$

eg: $\begin{cases} x^2+y^2-uv=0 \\ xy+u^2-v^2=0 \end{cases} \to$ 确定 $\begin{cases} u(x,y) \\ v(x,y) \end{cases} \to$ 对 x, y 分别求偏导再解方程 $\to \begin{matrix} u_x=\checkmark \\ v_x=\checkmark \end{matrix}$

高阶，则要么对一阶结果求，要么对一阶方程组求再解方程

⑲ 逆映射的存在性定理

当 $J=\left.\frac{D(u,v)}{D(x,y)}\right|_{(x_0,y_0)} \neq 0$ 时，有逆映射 $x(u,v), y(u,v)$

J 类比一元函数的导数：$\left.\frac{D(u,v)}{D(x,y)}\right|_{(x_0,y_0)}=\left.\frac{1}{\frac{D(x,y)}{D(u,v)}}\right|_{(u_0,v_0)}$

⑳ 二元函数的极值（闭区域内）

极值点的必要条件（稳定点） $\begin{cases} f_x(x_0,y_0)=0 \\ f_y(x_0,y_0)=0 \end{cases}$

极值点的充分条件：稳定点 + $B^2<AC$ $\begin{cases} A>0. \text{ 极小值} \\ A<0. \text{ 极大值} \end{cases}$

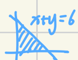
若 $B^2>AC$. 必无极值

若 $B^2=AC$. 无法判断，回到定义

$A=f_{xx}(x_0,y_0)$ $B=f_{xy}(x_0,y_0)$ $C=f_{yy}(x_0,y_0)$

判断极值 $\begin{cases} \text{稳定点} \\ \text{不可导点} \end{cases}$

㉑ 二元函数最值（闭区域）

法 1° 把所有极值与边界上的值（最值）做比较 eg: 

边界 $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ x+y=6 \end{cases}$

法 2° 根据实际情况断言 $f(x,y)$ 在 D 内必有最大（小）值，而在 D 内只求出唯一极值点 $\rightarrow$ 即为最值

若开区域（如 R），有时也要算边界（如 ∞）来说明函数无最大/小值

㉒ 条件极值：拉格朗日乘数法

$z=f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的极值 (本质是一元函数极值问题)

构造 $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)+\lambda_2\varphi_2(x,\cdots,x_n)$ (若有多个约束条件)

创方程 $\begin{cases}F_x=0\\F_y=0\\F_\lambda=0\end{cases}$ 消λ得稳定点

再判断稳定点是否为条件极值点：

- 由实际情况断言 $f(x,y)$ 在D内必有最大(小)值，而在D内只求出唯一稳定点，则此为极大(小)值点。
- 若有多个稳定点，直接比较函数值可知最大/小情况

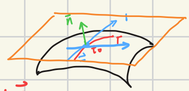
问题翻译：求椭圆周 $5x^2+8xy+5y^2=9$ 的长短半轴 ⇒ 到原点距离最近/远的点

㉓ 曲面论

参数个数 $\begin{cases}\text{直/曲线：1个}\\\text{直/曲面：2个}\end{cases}$

曲面的表示
- 显函数 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$
- 隐函数 $x^2+y^2+z^2-R^2=0$
- 参方 $\begin{cases}x=R\sin\varphi\cos\theta\\y=R\sin\varphi\sin\theta\\z=R\cos\varphi\end{cases}$ (向量表示) $\vec{r}=\vec{r}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$

曲面处处有切平面要求
法向量不为0
- 参方：$\vec{r}_u\times\vec{r}_v\neq\vec{0}$
- 隐函数：$\operatorname{grad}F\neq\vec{0}$



$\vec{r}_u$ 与 $\vec{r}_v$ 不可共线

曲面的切平面与法向量：

隐函数
- 法向量 $\vec{n}=\operatorname{grad}F(x_0,y_0,z_0)=(F_x,F_y,F_z)$
- 切平面方程：点法式 $\vec{n}\cdot\overrightarrow{PP_0}=0$
- 法线方程：点向式：$\dfrac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=---=---$

(形式参数!)

显函数→隐函数：$z=f(x,y)\longrightarrow f(x,y)-z=0$，$\vec{n}=(f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0),-1)$

参方：$\vec{n}=\vec{s}_1\times\vec{s}_2$ (2个切向量) $=\begin{vmatrix}i&j&k\\x_u&y_u&z_u\\x_v&y_v&z_v\end{vmatrix}$

$\begin{cases}x=x(u,v)\\y=y(u,v)\\z=z(u,v)\end{cases}$

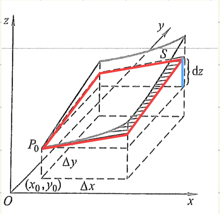
固定u $\begin{cases}x=x(u_0,v)\\y=y(u_0,v)\\z=z(u_0,v)\end{cases}\to\vec{r}_v=(x_v,y_v,z_v)\big|_{u=u_0,v=v_0}$

固定v $\begin{cases}x=x(u,v_0)\\y=y(u,v_0)\\z=z(u,v_0)\end{cases}\to\vec{r}_u=(x_u,y_u,z_u)\big|_{u=u_0,v=v_0}$

切平面：$(\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot\vec{n}=0$ 或 $\begin{vmatrix}x-x_0&y-y_0&z-z_0\\x_u&y_u&z_u\\x_v&y_v&z_v\end{vmatrix}=0$

㉔ 全微分的几何意义

当自变量 x,y 分别有增量 $\Delta x,\Delta y$ 时，函数的全微分就等于切平面上对应的立坐标 z 的增量



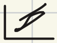
[专题复习]

先说"闭区间连续，开区间可导"

方程存在根

① 构造辅助函数

② 选合适的区间

- 介值定理 "不含导数"
- 积分中值定理  $\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$ "积分区域的大小"
- 罗尔定理 / 微分中值定理  $f(a)=f(b)\Rightarrow f'(\xi)=0$，$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$ "含有导数"
- 柯西中值定理 $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

难在构造： $F(x)$ 从最终证明存在根的方程中积分得到，利用初始条件确定 C

格式注意：$F(x)$ 在…连续可导

易错

不写就扣分!

eg1: 存在 $\xi\in(0,1)$ 使 $f(\xi)+f'(\xi)=e^{1-\xi}$

$f(x)+f'(x)=e^{1-x}$

$e^x f(x)+e^x f'(x)-e=0$

$[e^x f(x)-ex+C]'=0$ 令 $F(x)=e^x f(x)-ex+C$

$\because f(0)=0,\ f(1)=1$

$F(0)=C,\ F(1)=C \rightarrow$ 可取 $C=0$

eg2: $f''(x)+[f(x)f'(x)]^2=0$ 至少有一根 $\xi\in(0,1)$. $f'(0)=f'(1)=0$

提示： $F(0)=F(1)=0 \Rightarrow$ 求 $f'(x)$

尝试法： $f'(x)e^{f(x)} = f''(x)e^{f(x)}+[f'(x)]^2e^{f(x)} \rightarrow$ 缺 $f^2(x)$

$f'(x)e^{\frac{1}{3}f^3(x)} = f''(x)e^{\frac{1}{3}f^3(x)}+[f'(x)]^2e^{\frac{1}{3}f^3(x)}\cdot[f^2(x)]$ ✓

推测法： 大方向确定为"前导后不导+前不导后导"

$f''(x)+[f'(x)f(x)]^2$

$[f'(x)]' + f'(x)\cdot\underbrace{[f'(x)f^2(x)]}$ → 某个函数的导数 → $e^{g(x)}$

不导

算术平均值

eg3: $f(x)$ 在 $[0,3]$ 连续，$(0,3)$ 可导. $f(1)+f(2)+f(3)=0$. $f(0)=0$.

证：(1) $\exists\ \eta\in[1,3]$ 使 $f(\eta)=0$

(2) $\exists\ \xi\in(0,3)$ 使 $f(\xi)+2f'(\xi)=0$

(1) 介值定理：$m\leq\dfrac{f(1)+f(2)+f(3)}{3}\leq M$

(2) $F(x)=e^{\frac{x}{2}}f(x)$

$F(0)=0$. $F(\eta)=0$.

经验：① 何时只给一个值？ → 来保证 $F(x)$ 可由 x 决定 从而与 $f(x)$ 无关

如：$F(0)=0$

② 模板：

$f'(x)+f(x)=0 \rightarrow F(x)=e^{x}f(x)$

$f'(x)+2f(x)=0 \rightarrow F(x)=e^{2x}f(x)$

$f'(x)+xf(x)=0 \rightarrow F(x)=e^{\frac{1}{2}x^2}f(x)$

和 $f(x)$ 在一起 ⇒ e 的指数做手脚

① $f'(x)+g'(x)f(x)=0 \Rightarrow F(x)=e^{g(x)}f(x)$

甚至：$xf'(x)+2f(x)=0 \Rightarrow F(x)=x^2f(x)$

也可转为 $f'(x)+\frac{2}{x}f(x)=0 \Rightarrow F(x)=f(x)e^{\int\frac{2}{x}dx}=x^2f(x)$

孤立 $f'(x)$

② $f''(x)g(x)-f(x)g''(x)=0 \Rightarrow F(x)=f'(x)g(x)-f(x)g'(x)$. $\Rightarrow H(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$

或 $\dfrac{f''(x)}{g''(x)}=\dfrac{f(x)}{g(x)}$（和柯西很像但不是！）

③ 分组思想：不是两大坨 → 分成两大坨

eg: $f'(x)-\lambda(f(x)-x)=1$

$f'(x)-1-\lambda(f(x)-x)=0 \Rightarrow F(x)=e^{-\lambda x}[f(x)-x]$

eg: $f'(x)(b-x)=f(x)-f(a)$

$f'(x)(b-x)-[f(x)-f(a)]=0 \Rightarrow F(x)=e^{\int\frac{1}{x-b}dx}[f(x)-f(a)]$