物理知识归纳

—— by Iris

运动与力

2.1 牛顿运动定律

仅适用于惯性参考系
- 一 (惯性定律)
- 二 $F=ma$
- 三 相互作用力

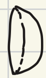
2.2 常见的力

重力、弹力、摩擦力、流体曳力、表面张力。

$F=\gamma l$ (泡泡有内外两层膜)

(l为边界线长度)

半个肥皂泡受力
- 大气压强，合力 ← $F_{ext}=p_0\cdot\pi R^2$
- 泡内压强，合力 → $F_{in}=p_{in}\cdot\pi R^2$
- 另一半泡的表面张力 → $F=2\gamma\cdot 2\pi R$



2.5 非惯性系与惯性力

旋转参考系中另补2个力
- 惯性离心力 (由于旋转)：$m\omega^2 r$
  "坐车拐弯时甩出去"
- 科里奥利力 (不考)

动量和角动量

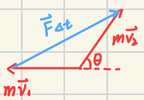
3.1 冲量与动量定理

平均冲力 $\bar{F}\Delta t=\Delta p$

$\vec{I}=\int_{t_0}^{t'}\vec{F}dt$ 冲量是矢量

$\vec{I}=\vec{p}'-\vec{p}_0$ （动量定理）

eg1：一个质量 $m=140$ g 的垒球以 $v=40$ m/s 的速率沿水平方向飞向击球手，被击后它以相同速率沿 $\theta=60°$ 的仰角飞出，求垒球受棒的平均打击力。设球和棒的接触时间 $\Delta t=1.2$ ms。

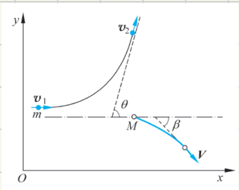


求 $\Delta v/\Delta p$ 要把 v_1、v_2 的起点对齐！

$\vec{F}\Delta t=m(\vec{v_2}-\vec{v_1})$

$\bar{F}=2mv\cos30°$

eg2：



二维碰撞，列分量式成方程组

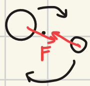
$$\begin{cases} mv_2\cos\theta+MV\cos\beta=mv_1 \\ mv_2\sin\theta-MV\sin\beta=0 \end{cases}$$

质心参考系中，系统总动量为0

$v_c=0$

$\downarrow$

$p_{总}=mv_c=0$



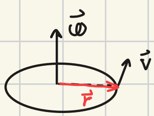
系统
- 内力（相互作用力）（成对出现，矢量和为0）
  - 内力可使各质点的$\vec{p}$变化，但不影响$p_{总}$
  - 外力才可使系统的$\vec{p}$变化
- 外力

- 内力矩可使各质点的$\vec{L}$变化，但不影响$\vec{L}_{总}$
- 外力矩才可使系统的$\vec{L}_{总}$变化

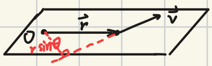
质心（的位矢） $\vec{r}_c = \dfrac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{m} = \dfrac{\int \vec{r}\,dm}{m}$

质心运动定理： $F_{合外} = m a_c$

角速度： $\vec{\omega}$



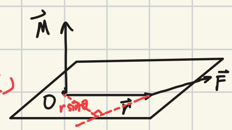
$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$



角动量： $\vec{L} \triangleq \vec{r} \times \vec{p}$
- 大小： $|\vec{L}| = m r \sin\theta v$
- 对于$\vec{L}$，$\vec{r}$只看与$\vec{v}$垂直的部分（若$\vec{v} \parallel \vec{r}$，则角动量不变）
- 方向：同$\vec{\omega}$

$\vec{r}$取决于固定点的选择 ⇒ $\vec{L}$是相对于某个固定点的（$\vec{r}$的原点）

力矩： $\vec{M} \triangleq \vec{r} \times \vec{F}$
- 大小： $r\sin\theta F$
  （r只看与F垂直的分量）
- 方向：同$\vec{L}$同$\vec{\omega}$



动量定理： $F dt = dp \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$

$\vec{F}=0$
$\vec{p}$不变

$(\vec{F}_1 + \vec{f})dt = d\vec{p}_1$
$(\vec{F}_2 + \vec{f}')dt = d\vec{p}_2$
$\rightarrow (\vec{F}_1+\vec{F}_2)dt = d(\vec{p}_1+\vec{p}_2)$ 在一个系统中，内力被抵消

动量守恒定律 (eg：碰撞、爆炸) 常应用分量式　　适用于惯性系 (from 牛顿定律)

孤立系统：不受外力作用 (外力矢量和 $=0$) $\Rightarrow$ 总动量守恒

角动量定理： $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ $\xrightarrow{\text{质点系中}}$ $\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$

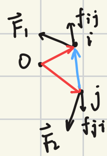
$\vec{M}=0$, $\vec{L}$不变 $\begin{cases} \vec{F}=0 \\ \vec{F}\neq 0 \text{ 而 } \vec{F} \parallel \vec{r} \end{cases}$

角动量守恒定律 (对于某一固定点)

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \vec{r}_i \times \left(\vec{F}_i + \sum_{j\neq i} f_{ij}\right)$$

累加 $\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_i \vec{r}_i \times \sum_{j\neq i} f_{ij} = \vec{M} + \vec{M}_{in}$

对于 i,j 两质点： $M_{i,in} + M_{j,in} = \vec{r}_i \times \vec{f}_{ij} - \vec{r}_j \times \vec{f}_{ij}$
$= (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{f}_{ij}$
$= 0$

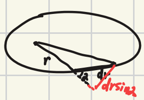


在一个系统中，内力矩被抵消

$L = mrv\sin\theta = mr\frac{dr}{dt}\sin\theta$

$\Delta S \approx \frac{1}{2} r\,dr\sin\alpha$

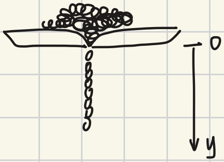
$\frac{dS}{dt} = const$



质心系中 $\rightarrow$ $\vec{L} = \vec{r}_c \times \vec{p}_c + L_c$
(对地的) (质心的) (质心系中的)

链条问题 (其实不会考这么难...)

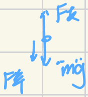
① 支持下落型



求(1) y与v的关系
(2) 桌面对链条的最大支持力
(3) 竖直部分链条加速度

① 不需用能量视角（机械能守恒、动能定理）
而应用 $F=\frac{d(mv)}{dt}$
② 要对整根链条分析，而不是下落的那一部分
整根链条的合外力就是下落部分的重力
（链条接触的拉力、桌面支持力都不用考虑了）
③ 求出y与v的关系后，其他（a、F冲、…）就容易求了

(2)



$\lambda y g - F_冲 = \lambda y\cdot\frac{1}{3}g$

$F_冲 = \frac{2}{3}\lambda y g$

$F_支 = \frac{2}{3}\lambda y g + (L-y)\lambda g$

$= (L-\frac{1}{3}y)\lambda g$

$y_{min}=0$

(1)(3) $\lambda y g\cdot dt = d(\lambda y\cdot v)$

$yg\,dt = d(yv)$

不去求 $\frac{d(yv)}{dt}$
因为有F冲、a
不好求！故凑yv

$yg\,dy\,dt = dy\,d(yv)$

用 $\frac{dy}{dt}$ 凑出v

$yg\,dy = yv\,d(yv)$

积分： $g\cdot\frac{1}{3}y^3 = \frac{1}{2}y^2v^2$

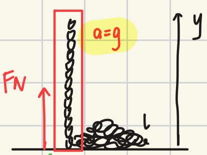
$\therefore v=\sqrt{\frac{2yg}{3}}$

对t求导

$a=\frac{dv}{dt}=\sqrt{\frac{2g}{3}}\,\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{y}}\cdot v=\sqrt{\frac{2g}{3}}\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{y}}\sqrt{\frac{2g}{3}}\sqrt{y}=\frac{g}{3}$

特色：$F=\frac{dp}{dt}$ 里全是微分，最后靠配凑积分

② 自由下落型



（初始状态下端刚好接触地面）
这段选取"还未接触地面"的链条，故无F支

求下落长度为l时，对地面的作用力

对整根链条：

$F_N - mg = \frac{d(\frac{m}{L}\cdot y\vec{v})}{dt}$

$F_N - mg = \frac{m}{L}(v^2 - yg)$

a=g 自由落体 ⇒ $v^2=2gl$

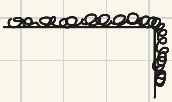
$=\frac{m}{L}[2gl-(L-l)g]$

$=\frac{m}{L}[3gl-gL]$

$\therefore F_N = 3mg\frac{l}{L}$

特色：有"F"不能积分。
且要用到运动学关系式（如 $2ax=v^2$）

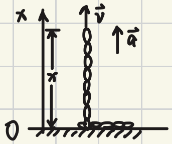
③ 普通类：



用能量即可

类②补例:

eg1:



一长为l，密度均匀的柔软链条，其单位长度的质量为λ，将其卷成一堆放在地面上，如图所示。若用手握住链条的一端，以加速度a从静止匀加速上提。当链条端点离地面的高度为x时，求手提力的大小。

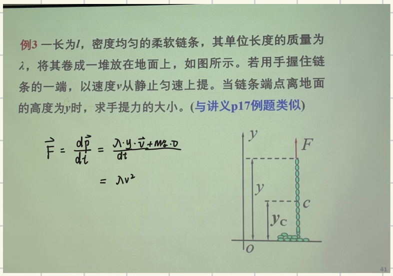
$$F-\lambda xg=\frac{d(\lambda xv)}{dt} \qquad 2ax=v^2$$

$$F=\underline{\lambda\cdot v^2}+\lambda x(a+g)$$

$$=\lambda(2ax)+\sim$$

$$=\lambda(3ax+g)$$

eg2:



功和能

4.1 功

$dA = \vec{F}\cdot|d\vec{r}|\cdot\cos\varphi$

题型. 给 $F(x,y)$ 求做功 (easy)

4.2 动能定理

$A_{外} + A_{内} = \Delta E_k$

柯尼希定理: $E_k = E_{kc} + E_{k,in}$ → 完全非弹性碰撞全损失

相对惯性系的总动能 = 质心动能 + 内动能 (质点系相对于质心系的总动能)

4.3 势能 (仅保守力)

重力势能 $E_p = mgh$ 属于物体和地球; E_{pG} 的值 $\begin{cases}\text{与参考系无关}\\ \text{与势能零点选取有关}\end{cases}$

弹簧弹性势能 $E_p = \frac{1}{2}kx^2$

系统势能与参考系无关

4.4 引力势能

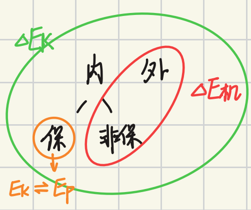
引力势能 $E_p = -\frac{Gm_1m_2}{r}$ ($E_p = \int_a^{\text{"0"}} \vec{F_c}\cdot d\vec{r}$, a点势能即把它搬运到零点所做的功)

4.5 由势能求保守力

$F_l = -\frac{dE_p}{dl} \Rightarrow F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x},\ F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y},\ F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}$

4.6 功能原理和机械能守恒定律

功能原理: $A_{外} + A_{内非保} = \Delta E_{机}$ (与动能定理对比知: $A_{内保} = -\Delta E_p$)
$A_{外} + A_{内} = \Delta E_k$



保守系统: 无内非保力, $A_{内非保} = 0$, 有 $A_{外} = \Delta E_{机}$ (高中)

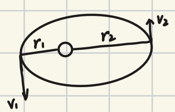
质心系: 保守系统中, $A'_{外} = \underbrace{\Delta E_{k,in}}_{\text{"内动能"}} + \Delta E_p = \Delta E_{in}$ "内能"
相对于质心系 (势能在质心系中表达式不变!)

封闭系统: $A_{外} = 0$;

封闭的保守系统. $\Delta E = 0$ (机械能守恒定律)

典题. 天体运动

有 r_1, r_2, 可求 v_1, v_2



$\begin{cases} L\text{守恒}: v_1r_1 = v_2r_2 \\ E_{机}\text{守恒}: \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GMm}{r_1} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{GMm}{r_2} \end{cases}$

4.7 碰撞

完全非弹： $v_{共} = v_c = \frac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}$

$$\Delta E_{损} = \Delta E_{k,in} = \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(v_1-v_2)^2$$

一动一静弹碰：

$$\begin{cases} v_1' = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}v_1 \\ v_2' = \frac{2m_1}{m_1+m_2}v_1 \end{cases}$$

二维弹碰

$$\begin{cases} P\text{守恒}: & m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2' \\ E_k\text{守恒}: & m_1\vec{v}_1^2 + m_2\vec{v}_2^2 = m_1\vec{v}_1'^2 + m_2\vec{v}_2'^2 \end{cases}$$

4.10～4.11 流体

稳流的连续性方程： $S_1v_1 = S_2v_2$

伯努利方程： $p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2$

（针对同一体积段的水）

刚体的转动

5.1 描述

$$\begin{cases}\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}\\ a_\tau=r\alpha\\ a_n=\omega^2 r=\frac{v^2}{r}=\omega r\end{cases}$$

$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{\alpha}\times\vec{r}-\omega^2\vec{r}$

$=\vec{a_\tau}+\vec{a_n}$

注意 $\vec{\alpha}$ 方向同 $\vec{\omega}$

匀加速转动 $\begin{cases}\omega=\omega_0+\alpha t\\ \theta=\omega_0 t+\frac{1}{2}\alpha t^2\\ \omega^2-\omega_0^2=2\alpha\theta\end{cases}$

5.2~5.3 刚体定轴转动定律：

$$\begin{cases}\vec{M}=J\cdot\vec{\alpha}\\ \vec{L}=J\cdot\vec{\omega}\end{cases}$$

M, L, J, r 都相对于一个固定转轴 ⇒ $\vec{M}, \vec{L}, \vec{r}$ 本质是对点"定义的，但也常用对轴的定义（沿轴分量/到轴距离）

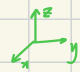
推广至质心系（不论过质心的轴运动状态如何）： $M_c=J_c\alpha$

转动惯量： $J=\int r^2dm$ （质量分布离轴越远，J越大）

$$\begin{cases}\text{圆环/薄壁圆筒}: & J=mR^2\\ \text{圆盘/实心圆柱}: & J=\frac{1}{2}mR^2\\ \text{细杆对中点轴}: & J=\frac{1}{12}mL^2\\ \text{细杆对端点轴}: & J=\frac{1}{3}mL^2\\ \text{薄球壳}: & J=\frac{2}{3}mR^2\\ \text{球体}: & J=\frac{2}{5}mR^2\end{cases}$$

平行轴定理（质心轴）： $J=J_c+md^2$

垂直轴定理 ： $J_z=\int r^2dm=\int(r_x^2+r_y^2)dm=J_y+J_x$

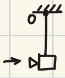


5.5 角动量守恒

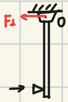
$M_z=\frac{dL_z}{dt}=0$ （对固定轴/过质心的轴）合外力矩为零　（动量守恒：合外力为零； 机械能守恒： $W_{非保}=0$ ）

辨析：

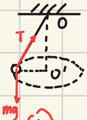
（系统包括：弹、球、绳）



$\begin{cases}\text{水平 } p \text{ 守恒}\\ \text{（对O点）} L \text{ 守恒}\end{cases}$



$\begin{cases}\text{水平 } p \text{ 不守恒（}F_1\text{）}\\ \text{（对O点）} L \text{ 守恒}\end{cases}$



$\begin{cases}\text{对O'点/对OO'轴}: L \text{ 守恒}\\ \text{对O点}: L \text{ 不守恒}\end{cases}$

即作原点（$\vec{r}$）

5.6 转动能量分析

刚体 $E_K = \frac{1}{2}J_c\omega^2 + \frac{1}{2}mv_c^2$

绕质心轴转动动能　质心平动动能

eg：抛出的旋转篮球 $\begin{cases}\text{质心自由平动} \\ \text{绕质心轴转动}\end{cases}$

$= \frac{1}{2}J_o\omega^2$

绕非质心轴转动动能

eg：物体绕固定轴转动（当然包括质心）

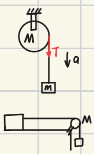
（推导：$\frac{1}{2}mv_c^2$ 被合并成 J_o 中的 $+md^2$ 了）

刚体 $E_p = \begin{cases} mgh_c & \text{（刚体不太大时，等效为集中于质心）} \\ \sum -\frac{GMm}{r_i} & \text{（太大则积分）}\end{cases}$

做功：$W = \int M d\theta$

题目：

①



$TR = \frac{1}{2}MR^2 \cdot \alpha$

$\Leftrightarrow T = \frac{1}{2}Ma$

定滑轮等效质量：$\frac{1}{2}M$

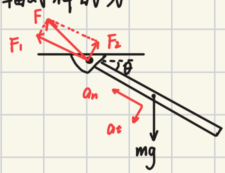
② 已知初状态与受力，必能求末状态、

$mg \cdot \frac{l}{2}\cos\theta = \frac{1}{3}mL^2 \cdot \alpha$，求角为θ时的ω

$3g\cos\theta = 2l\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta} \cdot \omega$ 移项，积分

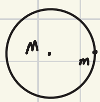
③ 求重力的M，相当于重力集中于质心

④ 轴对棒的力



$\begin{cases} ma_n = F_1 - mg\sin\theta = m\omega^2 L \\ ma_t = mg\cos\theta - F_2 = mR\alpha \end{cases}$

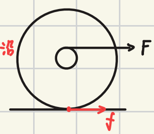
⑤



人在盘上走一圈：$\theta_人 + \theta_盘 = 2\pi$

相对运动

⑥ 纯滚动（主动轮）



静摩擦f方向详解：

自行车后轮 / 走路时脚蹬地

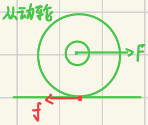
法①

运动学 $\begin{cases} v_c = \frac{ds}{dt} = R \cdot \omega \\ \Downarrow \\ a_c = R\alpha \end{cases}$

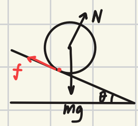
动力学 $\begin{cases} F + f = ma_c \\ Fr - fR = \frac{1}{2}mR^2\alpha \end{cases}$

可求 $a_c, \alpha \rightarrow$ 算 v_c, ω

另：从动轮



eg：



法② 能量：$mgh = \frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{1}{2}mv_c^2$

（f不做功）

振动

6.1 描述

$$\begin{cases} x = A\cos(\omega t+\varphi) \\ \theta = \theta_0\cos(\Omega t+\varphi) \end{cases}$$

$\rightarrow$ $\omega t+\varphi$ 为相位（相）

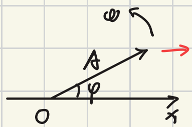
ω（常写为 Ω）角频率，与角速度 的不同

与频率 ν 也不同（$\Omega = 2\pi\nu$）

（注意角位移 $\theta \neq$ 相 $\Omega t+\varphi$，角振幅 $\theta_0 \neq$ 初相 φ_0）

简谐运动 = 匀速圆周运动在 x 轴上的投影

相量图：



$\rightarrow$ 振幅矢量

夹角为相位

三个特征量：$A.\ \omega.\ \varphi$

相差 $|\Delta\varphi| < \pi$ $\begin{cases} \text{同相：} \Delta\varphi = 0 \\ \text{反相：} \Delta\varphi = \pi \end{cases}$

6.2 动力学

（定义：固有角频率）$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$. $a = -\omega^2 x$ （代入 $kx=ma$ 推 ω 公式）

已知 $x_0.\ v_0.\ k.\ m$. 求特征量：

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$$

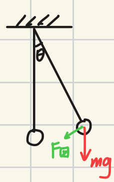
另法：$\frac{1}{2}kx_0^2 + \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}kA^2$ 求A

$$\varphi = \arctan\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right)$$

$\rightarrow$ 用 $\begin{cases} x_0 = A\cos\varphi \\ v_0 = -A\omega\sin\varphi \end{cases}$

有2个 需根据 x_0 正负做取舍

单摆：



$F_回 = F_切 = -mg\sin\theta$ （$\theta \to 0$）

动力学方程：$F = -mg\theta$，$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$

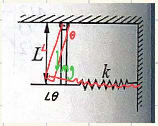
质点在稳定平衡位置的微小振动 $\rightarrow$ 简谐运动 $\xrightarrow{特点}$ $\begin{cases} F = -\left(\frac{dE_p}{dx}\right)_{x=0} = 0 \\ \left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x=0} = k > 0 \end{cases}$

等效参数法求 ω/T

做法：写动力学方程，对比得 k_{eff}. m_{eff}　（优先用角动量定理）

eg1:

1. 一个质量为 M、长为 L 的均匀细杆，上端挂在无摩擦的水平轴上，杆下端用一个弹簧连在墙上，如图 5 所示. 弹簧的劲度系数为 k. 当杆竖直静止时弹簧处于水平原长状态，求杆做微小振动的周期(杆绕过一端点且垂直杆的轴的转动惯量为 $ML^2/3$).



角动量定理：$mg\frac{L}{2}\sin\theta + kL\theta = -\frac{1}{3}ML^2\cdot\frac{a}{L}$

$\Rightarrow L(\frac{mgL}{2}+kL)\theta = -\frac{1}{3}ML^2\cdot a$

$kx = -ma$

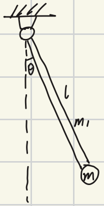
$k_{eff} = (\frac{mg}{2}+k)L^2$

$m_{eff} = \frac{1}{3}ML^2$

$T = 2\pi\sqrt{\frac{k_{eff}}{m_{eff}}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{mg}{2}+k}{\frac{1}{3}ML^2}}$

参数对比，标准统一
- 要么 $kx = -ma$　（列牛二）
- 要么 $k\theta = -ma$　（列 $M=J\alpha$）

eg2:



求系统的固有频率（微幅摆动）

角动量定理：

$m_1 g\cdot\frac{l}{2}\sin\theta + mg\cdot l\sin\theta = -(\frac{1}{3}m_1 l^2\cdot a + l^2 m a)$

$\sin\theta\approx\theta$

$(\frac{m_1}{2}+m)gl\theta = (\frac{m_1}{3}+m)l^2\cdot a$

$-k\theta = ma$

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{\frac{m_1}{2}+m}{\frac{m_1}{3}+m}\frac{g}{l}}$

$\sqrt{\frac{3(m_1+2m)}{2(m_1+3m)}\frac{g}{l}}$

$E_k = \frac{1}{2}mv^2$. $E_p = \frac{1}{2}kx^2$

动能：$\frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}m(l\frac{d\theta}{dt})^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot m_1 l^2\cdot(\frac{d\theta}{dt})^2$

$= \frac{1}{2}(m+\frac{m_1}{3})l^2\cdot(\frac{d\theta}{dt})^2$

m_{eff}

势能：$mgl(1-\cos\theta) + m_1 g\cdot\frac{1}{2}l(1-\cos\theta)$

对比得出：$\cos\theta = 1-\frac{\theta^2}{2}$　泰勒展开

$= \frac{1}{2}mgl\theta^2 + \frac{1}{4}m_1 gl\theta^2$

$= \frac{1}{2}(m+\frac{m_1}{2})gl\cdot\theta^2 \Rightarrow k_{eff} = (m+\frac{m_1}{2})gl$

其他补充题目：

1. 圆锥摆（小角度）也算简谐运动（就是单摆了）
2. 写动力学方程：$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$
3. 考虑弹簧质量：

[定性] 惯性↑ → 周期↑

[定量] $E_{k弹簧} = \frac{1}{2}dm' v_i^2$　（对一段质量为 dm'，长度为 l 的弹簧元）

$= \frac{1}{2}dm'(\frac{l}{L}v)^2$

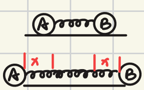
$= \frac{1}{6}m'v^2$

（新方法）求系统 ω'：$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = Const$

对 t 求导：$mv\frac{dv}{dt}\frac{dt}{dx} = ma = -kx$

4. *6.13　在水平光滑桌面上用轻弹簧连接两个质量都是 0.05 kg 的小球(图 6.23)，弹簧的劲度系数为 1×10^3 N/m。今沿弹簧轴线向相反方向拉开两球然后释放，求此后两球振动的频率。

不是角频率！



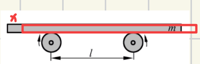
对一个球而言，其位移是弹簧伸长量的一半

$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k(2x)$

$\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$

$\nu = \frac{\omega}{2\pi}$

5.



N与位置有关：简谐运动　$F = f_1 - f_2 = -\mu mg\frac{\frac{l}{2}+x}{l} + \mu mg\frac{\frac{l}{2}-x}{l}$

6. 改变 g → 等效重力场　　7. 注意 v 的方向正负号

6.3 能量

$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}kA^2$

$\begin{cases} E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi) \\ E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t+\varphi) \end{cases} \Rightarrow \overline{E_p} = \overline{E_k} = \frac{1}{2}E = \frac{1}{4}kA^2$

6.4 阻尼振动

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, $2\beta = \frac{\gamma}{m}$ ($f = -\gamma v$)

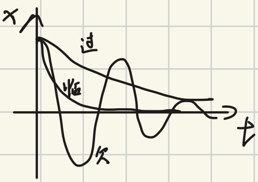
ω_0为固有角频率　　β为阻尼系数

E减为$\frac{1}{e}E$，所经时间 $\tau = \frac{1}{2\beta}$ 为时间常量/鸣响时间（"算得上在响/振动"的时间）

品质因数 $Q = 2\pi\frac{\tau}{T} = \omega\tau$ （鸣响次数的2π倍）　（Q越大，振动衰减越慢）

欠阻尼（$\beta<\omega_0$）时，$x = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t+\varphi_0)$

$\omega = \sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$



过阻尼（$\beta>\omega_0$）.

临界阻尼（$\beta=\omega_0$）$\Rightarrow$ 最快回到平衡位置

6.5 受迫振动：

ω为驱动力的角频率

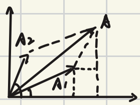
$$x = A_0 e^{-\beta t}\cos(\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}\,t + \varphi_0) + A\cos(\omega t+\varphi)$$

减幅振动 ＋ 等幅振动

弱阻尼时不区分 $\begin{cases} \text{取 } \omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \text{ 时，} A \text{ 达到最大（位移共振）（}\omega_r\text{略小于}\omega_0\text{）} \\ \text{取 } \omega_r = \omega_0 \text{ 时，速度最大（速度共振）} \end{cases}$

6.6~6.7 合成

ω同φ不同 ⇒ 相量图求合振动



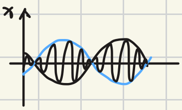
A（余弦定理），A介于 A_1+A_2 与 $|A_1-A_2|$ 间

$$\tan\varphi=\frac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2}$$（考据方法）

ω不同φ同 ⇒ $x_1=A\cos(\omega_1+\varphi)$　$x_2=A\cos(\omega_2+\varphi)$

$$x=x_1+x_2=2A\cos\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\,\cos\left(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}t+\varphi\right)$$

当 $\omega_2-\omega_1\ll\omega_2+\omega_1$ 时，近似视为：振幅为 $\left|2A\cos\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right|$，角频率为 $\frac{\omega_1+\omega_2}{2}$ 的振动



↓

合振动忽强忽弱 ⇒ 拍

拍频为两个分振动频率之差　$\nu=\nu_2-\nu_1$

用于：测频率

6.8 谐振分析（把一个复杂振动分解为各简谐运动之和）（不考）

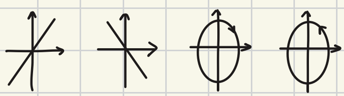
- 周期性振动（分立的线状谱）：最低的频率（即合振动频率）为基频
  其余分振动频率为基频的整数倍（谐频）
- 非周期振动（连续谱）

6.9 垂直合成（不考）

李萨如图：在x.y方向上做简谐运动的合成轨迹

两分运动频率有简单整数比时 ⇒ 封闭的稳定的运动轨迹

$\omega_x=\omega_y$时，轨迹因相差而不同



波动

7.1 分类

① $\begin{cases}\text{行波}\\ \text{驻波}\end{cases}$　② 质元运动方向 & 扰动传播方向 $\begin{cases}\text{横波}\\ \text{纵波}\end{cases}$　③ 波形 $\begin{cases}\text{简谐波}\\ \text{复杂波}\end{cases}$

（脉冲波：只有一次扰动的传播）

7.2 简谐波

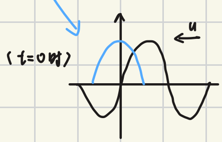
波函数：$y=A\cos\omega(t-\frac{x}{u})=A\cos(\omega t-kx)$

以 $\varphi_0=0$ 处为原点。 $=A\cos(\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}x)$

若向左传播 $\rightarrow$ $y=A\cos\omega(t+\frac{x}{u})$

波速/相速度：u $\begin{cases}\lambda=uT\\ u=\lambda\nu\end{cases}$ 波速＝波长×频率

波数：$k=\frac{2\pi}{\lambda}$



波函数：$y=A\cos(\omega t-\frac{\pi}{2})$

按 $A\cos(\omega t+kx)$ 画出参考波形，

对比 $t=0$ 的新起始点，相当于比参考波形晚出发 $\frac{\pi}{2}$

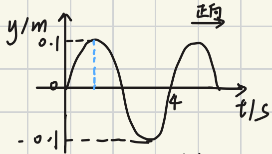
振动速度 $v=\frac{\partial y}{\partial t}$

平面简谐波：同相面（波面）为平面

波线：波传播方向

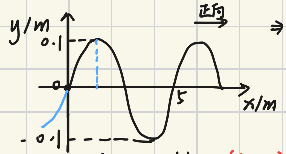
eg：求下列波动方程

〔总结〕 $y(x=3,t)$ 可以直接推 $y(x,t)$，但 $y(x,t=2)$ 不含时间演化，不能直接推出 $y(x,t)$，还得先 $\rightarrow y(x=0,t)\rightarrow y(x,t)$



（$x=3$ 处的质点）

$\Rightarrow u=20$



（$t=2s$ 时刻）$=(t=0s)$

$\Rightarrow T=1s,\ u=5$

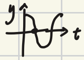
$\rightarrow y(x,t=2)=0.1\cos(2\pi x-\frac{\pi}{2})$

解：$y(x=3,t)=0.1\cos(\frac{\pi}{2}t-\frac{\pi}{2})$

晚启动 $\frac{x-3}{20}$ 的时间

$y(x,t)=0.1\cos\left[\frac{\pi}{2}(t-\underbrace{\frac{x-3}{20}})-\frac{\pi}{2}\right]$

解：$t=2$ 时，$x=0$ 处质点：平衡位置，即将向下振动



$y(x=0,t)=0.1\cos(2\pi t+\frac{\pi}{2})$

$y(x,t)=0.1\cos\left[2\pi(t-\frac{x-0}{5})+\frac{\pi}{2}\right]$

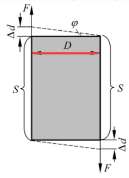
7.3 弹性形变 (以下公式不用背)

线变(胡克定律): $\frac{F}{S}=E\frac{\Delta l}{l}$, 单位体积内的弹性势能 $w_p=\frac{1}{2}E(\frac{\Delta l}{l})^2$

eg: 纵波

$\frac{F}{S}$为应力, $\frac{\Delta l}{l}$为线应变, E为杨氏模量, $k=\frac{ES}{l}$为劲度(系数)

剪切形变: 侧面受到与侧面平行、大小相等方向相反的力



eg: 横波

$\frac{F}{S}=G\varphi=G\frac{\Delta d}{D}$, 单位体积内的弹性势能 $w_p=\frac{1}{2}G\varphi^2=\frac{1}{2}G(\frac{\Delta d}{D})^2$

$\frac{F}{S}$为剪应力, $\varphi=\frac{\Delta d}{D}$为剪应变, G为剪切模量

体变: 周围压强改变 → 体积改变

$\Delta p=-K\frac{\Delta V}{V}$, 单位体积内的弹性势能 $w_p=\frac{1}{2}K(\frac{\Delta V}{V})^2$

K为体弹模量, 压缩率 $k=\frac{1}{K}$

7.4 弹性介质内的波速 （不用背公式）

横波：$u=\sqrt{\frac{G}{\rho}}$ 纵波：$u=\sqrt{\frac{E}{\rho}}$

$G<E \Rightarrow u_横<u_纵$

细绳横波：$u=\sqrt{\frac{F}{\rho_l}}$ $\left(\frac{G\cdot S}{\rho\cdot S}\right)$ 液/气体纵波 $u=\sqrt{\frac{K}{\rho}}$ 声波（纵波）$u=\sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}=\sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$ （γ为常量）

7.5 能量 （这些公式很好推，不用背）

在平面简谐波中，每一质元的 $E_k=E_p$（同相）$=\frac{1}{2}\rho\Delta V A^2\omega^2\sin^2(\omega t-\frac{x}{u})=\frac{1}{2}E_机$

平衡位置 $E_{机max}$. E_{kmax}. E_{pmax}
波峰波谷 $E_{机min}$. E_{kmin}. E_{pmin}

① 能量密度（单位体积）

$$w=\rho\omega^2A^2\sin^2\omega(t-\frac{x}{u})$$

$\frac{E}{\Delta V}$

② 平均能量密度（一个周期内）

$$\bar{w}=\frac{1}{2}\rho\omega^2A^2$$

③ 通过面积S的能流（单位时间内）

$$P=wuS=\rho u\omega^2A^2S\sin^2\omega(t-\frac{x}{u})$$

“能流” → $\frac{E}{\Delta t}$

能流是瞬时功率
宏观功率指能流的时间平均值

“能流密度” → $\frac{E}{\Delta t\cdot S}$ （能量密度才是 $\frac{E}{V}$）

↓平均值

④ 波的强度（通过垂直于波的方向的单位面积的能流的时间平均值）

$$I=\frac{\bar{P}}{S}=\bar{w}u=\frac{1}{2}\rho\omega^2A^2u$$

以此研究球面波振幅：

能量守恒：1T内有：$I_1S_1T=I_2S_2T$

$$\frac{1}{2}\rho\omega^2A_1^2u\cdot4\pi r_1^2T=\frac{1}{2}\rho\omega^2A_2^2u\cdot4\pi r_2^2T$$

$$A_1r_1=A_2r_2$$

球面波波函数：$y=\frac{A_1}{r}\cos\omega(t-\frac{r}{u})$ （取A_1为距波源单位长度的振幅）

7.6 惠更斯原理

波阵面上的各点可视为波源（找包迹）

借此可证：反射. 折射. 衍射

折射：$\frac{\sin i}{\sin r}=\frac{u_1}{u_2}=n_{21}$ （$n_1\sin i=n_2\sin r$）（$u=\frac{c}{n}$）

全反射：从光密到光疏

临界角 $\sin A=\frac{\sin i}{\underset{=1}{\sin r}}=\frac{u_1}{u_2}=\frac{n_2}{n_1}=n_{21}$

7.7 驻波

波的叠加原理：在波强较小时才成立　　[易错] 算叠加特殊位置时，相差要带绝对值（左减右/右减左）

驻波：　eg: 一列波撞到墙面上与其反射波叠加形成驻波

① $y_1=A\cos(\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}x)$

$y_2=A\cos(\omega t+\frac{2\pi}{\lambda}x)$　　A振幅必须相同!

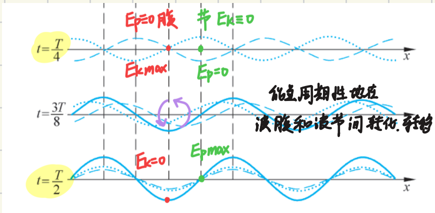
$\longrightarrow y=y_1+y_2=\underbrace{\left|2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\right|}_{\text{振幅}}\cos\omega t$ （非行波，不传播振动状态/能量）

因为能流密度大小相等，方向相反，抵消

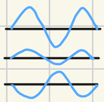
波腹：振幅最大点　$\left|\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\right|=1 \rightarrow x=k\frac{\lambda}{2}$

波节：振幅为零　$x=(2k+1)\cdot\frac{\lambda}{4}$　　相邻的两个波节间距为 $\frac{\lambda}{2}$（或波腹）

{ 波腹处质元始终无势能（大家都同相，无形变）
  波节处质元始终无动能

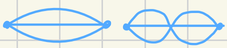


② "一段"即相邻两波节间的区域



同一段上振动同相（仅振幅不同）
相邻段上振动反相

③ 绳两端固定，为波节 → 故形成驻波要求振动频率能使 绳长 $L=n\cdot\frac{\lambda}{2}$（半波长整数倍）

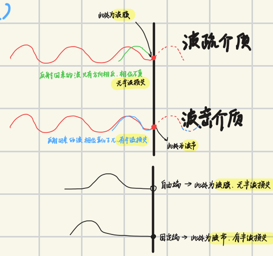


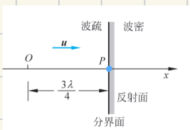
⇒ 本征频率 $\nu_n=n\frac{u}{2L}$　$(u=\sqrt{\frac{F}{\rho_l}})$ ⇒ ν_n 为驻波系统的固有频率（多个）

最低频率(n=1)为基频 $\nu_1=\frac{u}{2L}$．ν_2、ν_3…为二次、三次…谐频

（基频决定音调，谐频与强度决定音色）

从 ρu 小（波疏介质）→ ρu 大，有半波损失
（介质密度×波速）





eg: 已知入射波波函数 $y_1=A\cos(2\pi\nu t-\frac{2\pi\nu}{u}x-\frac{\pi}{2})$
求反射波波函数；指出波节位置

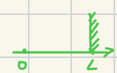
疏→密，π的相位跃变

$y_2=A\cos\left[2\pi\nu t-\frac{2\pi\nu}{u}\cdot\frac{3\lambda}{4}-\frac{\pi}{2}-\pi-\frac{2\pi\nu}{u}(\frac{3}{4}\lambda-x)\right]$
以P为新原点．　　　　　　　　　　前时差计算

P点一定是波节 ⇒ 另一波节相距 $\frac{\lambda}{2}$，在 $x=\frac{\lambda}{4}$ 处

eg: 已知入射波方程 $y_1=A\cos(\underbrace{\omega t+\frac{2\pi x}{\lambda}}_{=\theta_1})$ 在 $x=L$ 处
反射，反射端为固定端（y_2要加π）/自由端，求驻波方程

$y_2=A\cos(\underbrace{\omega t+\frac{2\pi L}{\lambda}-\omega\frac{L-x}{u}+\pi}_{=\theta_2})$



$\therefore y=y_1+y_2=2A\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}$

7.8 声波 (不用背)

声级 $L = 10\lg\frac{I}{I_0}$ (dB)

(I 为声强，即波强) $I_0 = 10^{-12}\ W/m^2$

[注意] 2个波同相叠加后：$A \to 2A$，$I \Rightarrow 4I$

7.11 多普勒效应

频率公式 $\nu_R = \frac{u \pm V_R}{u \pm V_S}\nu_S$ (源动，分母变；人动，分子变)(加减看远离/靠近)

(V_R 与 V_S 是相对于空气/地面 的速度，不能用相对于彼此的)

eg1: 警笛(在动)后方空气中声波的频率 ≠ 后方追赶的人接收到的频率

↳ 相当于一个静止的人

	ν	λ	$= u$
(远) 后方空气	↓	↑	×
(近) 前方空气	↑	↓	×

有风时，相当于介质运动 → 换系

(光：c 不变)

波速 u = u(在静止介质中) + $u_介$ 不咋考

↓

$\sqrt{\frac{G}{\rho}}$, $\sqrt{\frac{E}{\rho}}$, $\sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$ … 不变

eg2: 有风无风对 ν_R 的影响 ⇒ $\nu_R = \frac{u_{波\to R}}{u_{波\to S}} \cdot \nu_S = \frac{\vec{u} - \vec{V_R}}{\vec{u} - \vec{V_S}} \cdot \nu_S$

有风 ⇒ u 会改变

当 R 与 S 都静止时，$\nu_R = \frac{u'}{u'} \cdot \nu_S = \nu_S$ 仍不变

eg3: 发射 100kHz 的超声波测车速，车反射回来的声波频率为 110kHz，求车速

$\nu_{车接} = \frac{u + V_车}{u}\nu_0$

$\nu_{车反} = \frac{u}{u - V_车}\nu_{车接}$

→ $\nu_{车反} = \frac{u + V_车}{u - V_车} \cdot \nu_0$

相对论

（不考公式，25、24都没考了概念）

（25考了2个基本假设是什么）

洛伦兹变换（不同参考系下同一物体的坐标）

$$x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\ ,\ y'=y\ ,\ z'=z\ ,\ t'=\frac{t-\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

洛伦兹因子（<1） $\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}>1$

速度变换式： 在自己(u)系内看他者的速度

$$v_x'=\frac{v_x-u}{1-\frac{uv_x}{c^2}}$$

eg: $-0.9c \leftarrow \quad \rightarrow 0.9c$

$$u_x'=\frac{u_x-v}{1-\frac{v}{c^2}u_x}=\frac{-0.9c-0.9c}{1-\frac{0.9c}{c^2}(-0.9c)}=-\frac{1.8}{1.81}c$$

- 时间延缓： $\Delta t\times\gamma$
- 长度收缩： $l\div\gamma$
- 质量膨胀： $m\times\gamma$

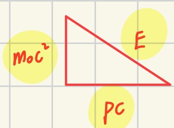
相对论能量： $E=mc^2=\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cdot c^2$

相对论动量： $p=mv=\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cdot v$

质能方程： $\Delta E=\Delta m\cdot c^2$

动量和能量的关系：

$$\begin{cases}E=mc^2\\ p=mv\end{cases}\rightarrow v=\frac{c^2}{E}p\rightarrow 代入E=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cdot c^2\ 得：E^2=p^2c^2+m_0^2c^4$$



$E=E_k+m_0c^2$

动能　静能

$\xrightarrow{v\ll c时}$

$$\cancel{(m_0c^2)^2}+(pc)^2=E_k^2+\cancel{(m_0c)^2}+2E_km_0c^2$$

$E_k=\frac{p^2}{2m_0}$（牛顿力学）

不同参考系间动量-能量变换

两个等价向量$(x,y,z,ct)\Leftrightarrow(p_xc,p_yc,p_zc,E)$

参照洛伦兹变换得： $p_x'c=\frac{p_xc-v\cdot\frac{E}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\ .\ p_y'=p_y\ .\ p_z'=p_z\ .\ E'=ct'=\frac{E-\frac{v}{c}\cdot p_xc}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

温度和气体动理论

★ 这些公式全部要记住下来(背!)

9.1 平衡态

一个系统的各种性质不随时间改变的状态

9.2 温度的概念

温度定性定义：共处平衡态的物体，温度相等

热力学第零定律： A与C能共处平衡态，B与C能共处平衡态，则A与B也能共处平衡态

9.3 理想气体温标

标准温度定点：水的三相点 $T_3 \equiv 273.16\,K$

理想气体温标、热力学温度、国际温标 不作区分

热力学第三定律： 绝对零度不能达到

9.4 理想气体状态方程

常用化简：$\frac{\nu}{V}=\frac{m}{M}\cdot\frac{1}{V}=\frac{\rho}{M}$

$pV=\nu RT$ ， $pV=\frac{m}{M}RT$ ， $pV=NkT$ ， $p=nkT$

ν 为物质的量，气体分子数密度 $n=\frac{N}{V}$ ，阿伏伽德罗常数 $N_A=6.02\times10^{23}\ mol^{-1}$ (背)

普适气体常量 $R=8.31\ J\cdot mol^{-1}\cdot K^{-1}$ (背)， 玻耳兹曼常量 $k\equiv\frac{R}{N_A}=1.38\times10^{-23}\ J/K$ (背)

9.5 气体分子的无规则运动

平均自由程 $\bar\lambda$ ： 连续两次碰撞之间路程平均值

平均碰撞频率 $\bar z$ ： 单位时间内平均碰撞次数

$\Rightarrow \bar\lambda=\frac{\bar v}{\bar z}$

$\bar z=n\times\sigma\times\bar u \Rightarrow \bar\lambda=\frac{1}{\sqrt2\pi d^2 n}=\frac{kT}{\sqrt2\pi d^2 p}$ (会推导)

(n 为气体分子数密度， $\sigma=\pi d^2$ ，相对速率 $\bar u=\sqrt2\,\bar v$)

9.6 理想气体的压强

$$p=\frac{1}{3}nm\overline{v^2}=\frac{2}{3}n\bar{\varepsilon}_t$$ （$\bar{\varepsilon}_t=\frac{1}{2}m\overline{v^2}$ 为平均平动动能）

相对于质心参考系，与宏观运动无关

$F\cdot\Delta t=(2mv)(n\cdot V)\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{3}nmv^2$

记忆

9.7 温度的微观意义

(宏观)统计学意义

may be 一个考点

$$\begin{cases} p=nkT & \text{热力学} \\ p=\frac{2}{3}n\bar{\varepsilon}_t & \text{统计力学} \end{cases} \rightarrow \bar{\varepsilon}_t=\frac{3}{2}kT$$

分子平均平/转动动能仅由温度决定

系统内动能：系统内所有分子的平动动能的总和

气体分子的方均根速率：$v_{rms}=\sqrt{\overline{v^2}}=\sqrt{\frac{3kT}{m}}=\sqrt{\frac{3RT}{M}}$

9.8 能量均分定理

自由度 i

- 单原子分子 $i=3$（仅平动3）
- 双原子分子 $i=5$（平动3+转动2）
  (& 直线型多原子分子)
- 多原子分子 $i=6$（平3+转3）
  (非直线型)

能量均分定理：在温度为T的平衡态下，气体分子每个自由度的平均能量都相等，且等于 $\frac{1}{2}kT$

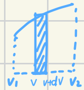
理想气体内能 = 所有分子动能总和 = $N\cdot\frac{i}{2}kT=\frac{i}{2}\nu RT$ （内能只与T有关）

（分子间势能为0）

（N为分子总数）

9.9 麦克斯韦速率分布律

$$\frac{dN_v}{N} = f(v)dv$$ （面积表示概率，f(v)表示概率密度）



归一化条件：$\int_0^N \frac{dN_v}{N} = \int_0^\infty f(v)dv = 1$

麦克斯韦速率分布函数 $f(v) = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$

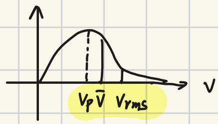
m为分子质量，M为摩尔质量

$m = \frac{M}{N_A}$. $k = \frac{R}{N_A}$

直接看哪种速率的粒子最多 最概然速率（峰值）：$v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$

$\bar{v} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} v_i$ 平均速率 $\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$

$v_{rms} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} N_i v_i^2}$ 方均根速率 $v_{rms} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$



［辨析］

① $f(v)dv$ ：概率/百分比（v~v+dv占总的）

② $Nf(v)dv$ ：v~v+dv的分子数

③ $\int_{v_1}^{v_2} f(v)dv$ ：概率/百分比（v_1~v_2占总的）

④ $\int_{v_1}^{v_2} Nf(v)dv$ ：v_1~v_2的分子数

⑤ $\int_{v_0}^{\infty} Nf(v)dv$ ：$v > v_0$的分子数

⑥ $\int_0^{v_0} Nf(v)dv$ ：$v < v_0$的分子数

⑦ $\int_0^\infty (\frac{1}{2}mv^2) f(v)dv$ ：所有分子动能的平均值

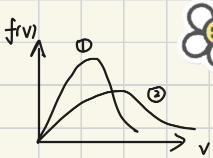
⑧ $\int_0^\infty \varphi(v) f(v)dv = \overline{\varphi(v)}$ ：任一与速率有关的量的平均值

⑨ $\int_{v_1}^{v_2} Nvf(v)dv$ ：v_1~v_2间所有分子速率之和

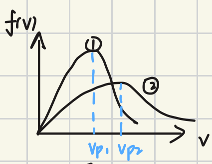
⑩ $\int_{v_1}^{v_2} N(\frac{1}{2}mv^2)f(v)dv$ ：v_1~v_2间所有分子平均动能之和

⑪ $\frac{\int_{v_1}^{v_2} vf(v)dv}{\int_{v_1}^{v_2} f(v)dv} = \frac{N\int_{v_1}^{v_2} vf(v)dv}{N\int_{v_1}^{v_2} f(v)dv}$ ：v_1~v_2间所有分子速率的平均值

⑫ $\int_{v_1}^{v_2} vf(v)dv$ ：无实际物理意义



m同，$T_2 > T_1$



T同，$m_1 > m_2$

$\bar{\varepsilon}_t = \frac{3}{2}kT = \frac{1}{2}mv^2$ 或 $v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$

m为气体分子质量（非气体总质量）

$f(v) = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$ ⇒ 气体速率分布仅取决于 $\frac{m}{T}$（比值！）

eg：

例4 有N个粒子，其速率分布函数为

$$f(v) = \begin{cases} av/v_0, & 0 \le v \le v_0 \\ a, & v_0 \le v \le 2v_0 \\ 0, & v > 2v_0 \end{cases}$$

(1)作速率分布曲线并求常数a；

(2)求粒子的平均速率和方均根速率；

(3)分别求速率大于v_0和小于v_0的粒子数；

(4)求速率在0~v_0区间内的气体分子平均速率。

(1) → 归一化条件

$\frac{1}{2}v_0 \cdot a + v_0 \cdot a$

$\frac{3}{2}v_0 a = 1$

$a = \frac{2}{3v_0}$

(2) $\bar{v} = \int_0^\infty vf(v)dv$

$= \int_0^{v_0} v \cdot \frac{2}{3} \cdot v dv + \int_{v_0}^{2v_0} v \cdot \frac{2v_0}{3} dv$

$= \frac{11}{9}v_0$

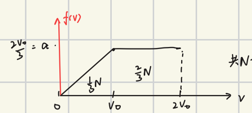
$\overline{v^2} = \int_0^\infty v^2 f(v)dv$

$= \int_0^{v_0} v^2 \frac{2v}{3v_0} dv + \int_{v_0}^{2v_0} v^2 \cdot \frac{2}{3} dv$

$= \frac{31}{18}v_0^2$

$v_{rms} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sim$

(4) $\bar{v}_{v<v_0} = \frac{\int_0^{v_0} vNf(v)dv}{\int_0^{v_0} Nf(v)dv} = \frac{\frac{2}{9}v_0}{\frac{1}{3}N} = \frac{2}{3}v_0$



根据公式算！

易误以为 f(v)是v，但这是概率密度！

f(v)-v图的面积是概率，可直接用于比例计算

热力学第一定律

10.1 功 热量 热一定律

对一个保守系统，在质心参考系内，外力对它做的功 = 内能增量

（分子间作用力→保守力）

状态量：内能 ($\frac{i}{2}\nu RT$)

过程量：功（宏观）；热（微观功） → 改变系统热力学状态的两种方法（做功/热传递）（相对的）

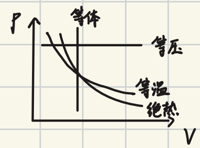
热一定律： $Q = \Delta E + A$（对外）　（Q正：吸热）

$\Delta E = Q + A'$（外对系）

求ΔE： $\Delta E = \frac{i}{2}\nu R\Delta T = \frac{i}{2}(p_2V_2 - p_1V_1)$

10.2 准静态过程

任意时刻，都可当作平衡态处理，可用状态图表示（过程曲线）



体积功： $đA = p\,dV$ → 即 p-V 图面积（膨胀→对外做正功）

$A=0$ 时，有 $Q = cm\Delta T$，c为比热

$\Delta E=0$ 时(等温)，有 $Q = A = \nu RT\cdot\ln\frac{V_2}{V_1}$

10.3 热容

1mol 物质升温 dT 吸收 $đQ$ 的热量 → 摩尔热容 $C_m \triangleq \frac{1}{\nu}\frac{đQ}{dT}$ → 不仅等压/体，可算任何过程

定体热容： $C_{V,m} = \frac{1}{\nu}\left(\frac{đQ}{dT}\right)_V = \frac{1}{\nu}\frac{dE}{dT} = \frac{i}{2}R$

定压热容： $C_{p,m} = \frac{1}{\nu}\left(\frac{đQ}{dT}\right)_p = \frac{1}{\nu}\frac{dE+p\,dV}{dT} = \frac{i}{2}R + R$

$C_{p,m} - C_{V,m} = R$

比热比 $\gamma = \frac{C_{p,m}}{C_{V,m}} = \frac{i+2}{i} > 1$

热一定律（普适）： $đQ = \nu C_{V,m}dT + p\,dV$

（仅）等压： $đQ = \nu C_{p,m}\,dT$

10.4 绝热过程

1° 准静态绝热：

过程方程： $pV^{\gamma} = C_1 \Leftrightarrow TV^{\gamma-1} = C_2 \Leftrightarrow p^{\gamma-1}T^{-\gamma} = C_3$

绝热求功：① $A = \int_1^2 p\,dV = \int_1^2 \frac{C_1}{V^{\gamma}}dV = \frac{C_1}{1-\gamma}V^{1-\gamma}\Big|_1^2$

② $Q=0 \Rightarrow dA = -dE = \frac{i}{2}(p_1V_1 - p_2V_2)$　$\left(\frac{i}{2} = \frac{1}{\gamma-1}\right)$　（更方便）

2° 绝热自由膨胀（非准静态）

向真空膨胀：$A=0$

$\Rightarrow \Delta E=0$（仅初末温度相等，而非等温过程）

绝热：$Q=0$

$pV=\nu RT$：$V\uparrow\ p\downarrow$

节流过程：非准静态、多孔塞

10.5~10.7 循环过程

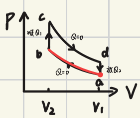
$\begin{cases}\text{正循环（热循环）} \\ \text{逆循环（致冷循环）}\end{cases}$

正循环（热循环）：吸得多、放得少 → 用于做功

逆循环（致冷循环）：（通过做功）吸得少，放得多 → 用于吸热

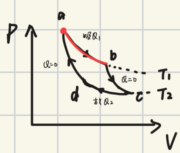
热循环：循环效率 $\eta=\dfrac{A}{Q_1}=\dfrac{Q_1-Q_2}{Q_1}=1-\dfrac{Q_2}{Q_1}$ （Q_2剩得越少，η越高）

空气标准奥托循环 $\begin{cases}\text{2个绝热}\\ \text{2个等体}\end{cases}$ η由 $\dfrac{V_1}{V_2}$ 决定



$\eta=1-\left(\dfrac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1} \xrightarrow[r\text{越大越好}]{\text{压缩比 } r\triangleq\frac{V_1}{V_2}>1} \eta=1-\dfrac{1}{r^{\gamma-1}}$

卡诺循环 $\begin{cases}\text{2个绝热}\\ \text{2个等温}\end{cases}$ η由 $\dfrac{T_1}{T_2}$ 决定 （$\dfrac{Q_2}{Q_1}=\dfrac{T_2}{T_1}$）



$\eta=1-\dfrac{T_2}{T_1}$ （高低温相差越大越好）

致冷循环：致冷系数 $\omega=\dfrac{Q_2}{A}=\dfrac{Q_2}{Q_1-Q_2}$ $\dfrac{\text{吸热}}{\text{做功}}$

特别地，卡诺致冷循环 $\omega_c=\dfrac{T_2}{T_1-T_2}$ $\begin{cases}T_2\to\text{低温（吸）}\\ T_1\to\text{高温（放）}\end{cases}$

题目总结：① 区分 $\begin{cases}A\to B\to C\to A\\ A\to B\to C\end{cases}$

② V/L 单位要化成 m^3

热力学第二定律

11.1 自然过程的方向

孤立系统：与外界无物质交换也无能量交换 ($Q=0, A=0$.)　eg：宇宙

三个例子
- 功热转换
- 热传导
- 气体的绝热自由膨胀

11.2 不可逆性的相互依存

11.3 热二定律（方向性）

- 克劳修斯表述：热量不能**自动**地从低温物体传向高温物体
- 开尔文表述：其**唯一效果**是热全部转变为功的过程是不可能的

微观本质：分子热运动无序性增大的方向

- 第一类永动机：无输入
- 第二类永动机：单热源

11.4 热力学概率

该宏观状态的热力学概率 Ω：任一宏观状态所对应的微观状态数

孤立系，平衡态即 Ω 为最大值的宏观态（无单位）

11.5 玻耳兹曼熵公式与熵增加原理

玻耳兹曼熵公式：$S = k\ln\Omega$　($k=1.38\times10^{-23}$)

熵具有可加性

热二 / 熵增原理：**孤立系**，**自然**过程，总沿 $\Delta S>0$ 方向进行

11.6 可逆过程

要求更高
- 准静态：无限平缓地变化，每个中间态都可视为平衡态
- 可逆：无耗散 + 无非平衡态 → 平衡态过渡.（理想的，无耗散的准静态过程） ⇒ $\Delta S=0$（孤立系，可逆过程）

∴ 孤立系统熵增原理：$\Delta S\geq 0$

不写即错

自然界一切过程都不可逆，但**单个/少量微观**粒子的力学过程可逆

不可逆不是不能反向进行，而是进行后对外界短时影响无法消除

eg：① 准静态，无摩擦压缩气体　② 准静态等温热传导　③ 准静态卡诺循环

- 系统经循环过程后回到初态 $\not\Leftrightarrow$ $\Delta S=0$（环境熵变也要考虑）

11.7~11.8 克劳修斯熵公式

$dS=\frac{dQ}{T}$ （仅适用于可逆过程） $\longrightarrow$ 热力学基本关系式：$TdS=dE+dA$

但ΔS只与初末状态有关

(任意系统) 绝热，可逆 $\Leftrightarrow$ $dS=0$

（eg: 水和炉，整体是一个孤立系统）

孤立系统中，$dQ=0$，则 $\int\frac{dQ}{T}=0$，

此时 $\begin{cases}\Delta S>0：\text{能自发发生，不可逆}\\ \Delta S=0：\text{能自发发生，可逆}\\ \Delta S<0：\text{不可能发生}\end{cases}$

A：可逆热温商积分，$A=\Delta S_{状态}$.

B：不可逆热温商积分

克劳修斯不等式：

$\Delta S\geq\int\frac{dQ}{T}$ $\rightarrow$ $\begin{cases}\Delta S\geq B\ \text{可能发生（=为可逆，>不可逆）}\\ \Delta S<B\ \text{一定不发生}\end{cases}$

克劳修斯熵公式针对平衡态，是玻耳兹曼熵公式的最大值

可逆过程选取：① 冰等温熔化 → 恒温热源可逆吸热 $\Delta S=\int\frac{dQ}{T}=\frac{Q}{T}$

炉子作恒温热源 → 可逆等温放热 $\Delta S=\int_1^2\frac{dQ}{T}=-\frac{1}{T}cm\Delta T$ （注意Q的正负）

② 加热水升温 → 把水依次与一系列温度逐渐升高，但一次只升高无限小温度dT的热库接触

做功水升温 → 设想一个等压/等体升温过程，用比热求Q

$$\Delta S=\int_1^2\frac{dQ}{T}=\int_{T_1}^{T_2}\frac{cmdT}{T}=cm\ln\frac{T_2}{T_1}$$

算ΔS只看初末态

③ 理想气体 → $\Delta S=\int_1^2\frac{dE+pdV}{T}=\int_1^2\frac{\nu C_{V,m}dT}{T}+\nu R\int_1^2\frac{dV}{V}=\nu C_{V,m}\ln\frac{T_2}{T_1}+\nu R\ln\frac{V_2}{V_1}$

④ 理想气体绝热自由膨胀 → 可逆等温膨胀

（始末T相同）

$$\Delta S=\int\frac{dQ}{T}=\nu R\ln\frac{V_2}{V_1}$$

11.9 温熵图 （不考）

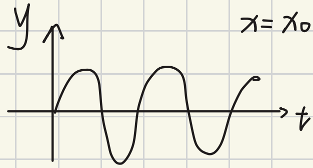
$dS=\frac{dQ}{T}$，$\int dQ=\int TdS=Q$ $\Rightarrow$ 温熵图(T-S)面积即ΔQ

以下是我考前复习的草稿。
无新内容，但有的整合可供参考

波

$$y = A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})] = A\cos(\omega t - kx) = A\cos(\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}x)$$

$$y(x,t) = A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]$$



$y(x,t_0)$

$\downarrow$

$y(0,t)$

$\downarrow$

$y(x,t)$

$$y(x_0,t) = A\cos(\omega t+\varphi_0)$$

$$\downarrow$$

$$y(x,t) = A\cos[\omega(t-\frac{x_0}{u})+\varphi_0]$$

$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$$\begin{cases} a = -\omega^2 x \\ ma = -kx \\ m\omega^2 = k \\ \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = A\cos(\omega t+\varphi) \\ v = A\omega\sin(\omega t+\varphi) \\ a = -A\omega^2\cos(\omega t+\varphi) \end{cases}$$

$$F = -kx = ma$$

$$-k_{eff}\cdot x = m_{eff}\cdot a$$

$$\Downarrow$$

$$-k_{eff}\cdot\theta = m_{eff}\cdot\alpha$$

$$a = -\omega^2 x$$

$$\begin{cases} \lambda = T\cdot u \\ \lambda\nu = u \end{cases}$$

$$\nu_R = \frac{u\pm u_R}{u\pm u_s}\nu_s$$

$$u = \lambda\nu_R$$

波的传播速度 → $u_介$

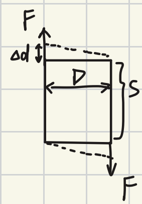
$$\begin{cases} u=\sqrt{\frac{G}{\rho}} \text{ 横 } = \sqrt{\frac{F}{\rho_l}} \\ u=\sqrt{\frac{E}{\rho}} \text{ 纵} \\ u=\sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \text{ 声波} \end{cases}$$

$$\frac{F}{S} = G\frac{\Delta d}{D}$$

线变 → 弹簧伸缩 → 纵 → E 杨氏模量

剪切形变 → 绳子振动 → 横 → G 剪切模量

体变 → 空气压强改变



能量变化

振动：$E_{机} = E_k + E_p = const$

$$\begin{cases} E_k = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t+\varphi) \\ E_p = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi) \end{cases}$$

$E_{机} = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow \bar{E}_k = \bar{E}_p = \frac{1}{4}kA^2$

$\pm A$处：$E_p\ max$. $E_k=0$

O点：$E_p=0$. $E_k\ max$

波动：$E_k = \frac{1}{2}\rho\Delta V A^2\omega^2\sin^2(\omega t-kx) = E_p \Rightarrow E_{机} = \rho\Delta V A^2\omega^2\sin^2(\omega t-kx)$

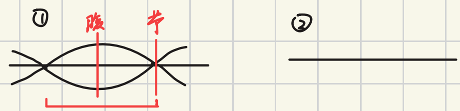
波动位移与能量变化差 $\frac{\pi}{2}$

$y = A\cos(\omega t-kx)$

平衡： // $E_p\ max$, $E_k\ max$ $\rightarrow$ $y=0$. $\cos=0$. $\sin=max$

峰谷： = $E_p=0$, $E_k=0$ $\rightarrow$ $y=max$. $\cos=max$. $\sin=0$

弦波：



两个波节间E机守恒

波腹：$E_p=0$. E_k ①：0 ②：max

波节：$E_k=0$. E_p ①：max ②：0

波的一般能量公式：$\Delta E_{机} = \rho\Delta V A^2\omega^2\sin^2(\omega t-kx)$

能量密度：$w = \frac{\Delta E_{机}}{\Delta V} = \rho A^2\omega^2\sin^2(\omega t-kx)$

↳ 平均能量密度：$\bar{w} = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2$

能流：$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \rho u S A^2\omega^2\sin^2(\omega t-kx)$

能量的传输速率/功率

能流密度：$\frac{\Delta E}{\Delta t\cdot S} = \rho u A^2\omega^2\sin^2(\omega t-kx)$

↳ 平均能流密度：$I = \frac{1}{2}\rho\omega^2A^2u$ （$I = \frac{\bar{P}}{S}$）

eg：能量守恒：$I_1S_1\Delta t_1 = I_2S_2\Delta t_2$

$A_1^2R_1^2 = A_2^2R_2^2$ （球面波）

$A_1R_1 = A_2R_2$

反射 折射 ...

$$n_1\sin\theta_1 = n_2\sin\theta_2$$

$$n_{21} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}$$

$$u = \frac{c}{n}$$

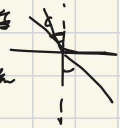
$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}$$

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}$$

$$\frac{\sin C}{1} = n_{21}$$

n大 θ小 密

n小 θ大 疏



$$y_1 = A\cos(\omega t - kx)$$

$$y_2 = A\cos(\omega t + kx)$$

$$\rightarrow y = y_1 + y_2 =$$

$A(\cos\omega t \cdot \cos kx + \sin\omega t \sin kx)$

$A(\cos\omega t \cdot \cos kx - \sin - \sin)$

$= 2A\cos\omega t \cdot \cos kx$

$$A' = 2|\cos kx|A$$

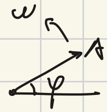
$$\begin{cases} \text{波腹}: \frac{2\pi}{\lambda}x = n\pi & x = \frac{n}{2}\lambda \\ \text{波节}: \frac{2\pi}{\lambda}x = \frac{2n+1}{2}\pi & x = \frac{2n+1}{4}\lambda \end{cases}$$

$\rho \cdot u$ 大 → 波密， 波疏 → 波密，有π损失，有损失的端点为波节

相为固定端，有π损失

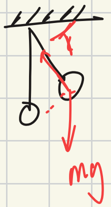
振动

$x = A\cos(\omega t+\varphi)$



$\theta = \theta_0 \cos(\Omega t+\varphi)$

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$



$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$

$F = mg\sin\theta \approx -mg\theta$

$mg\,\theta \cdot l = m l^2 \cdot \ddot{\theta}$

$k_{eff} \cdot \theta = m_{eff} \cdot \ddot{\theta}$

$k_{eff} \downarrow mgl$, $m_{eff} \downarrow ml^2$

$lmg\theta = lma$

$mgx = mal$

$\underset{k_{eff}}{\downarrow}$ $\underset{m_{eff}}{\downarrow}$

$kx = ma$

稳定平衡：

$F = 0 \rightarrow -\frac{dE}{dx} = 0$

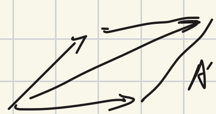
$k > 0 \rightarrow \frac{d^2E}{dx^2} > 0$

弛豫时间：$\tau = \frac{1}{2\beta}$. 对应 $E' = \frac{1}{e}E$

品质因数 $Q = 2\pi \cdot \frac{\tau}{T}$

$y = \underline{A}\cos(\underline{\omega} t+\underline{\varphi})$

ω同



$\omega' = \omega$

$A' = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2\cos}$

$\tan\varphi' = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$

ω异、(φ同)

A忽大忽小 → 拍

$\omega' = \frac{\omega_1+\omega_2}{2}$

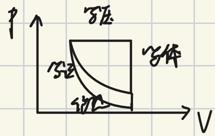
拍频(|A|的频率) $\nu = |\nu_1 - \nu_2|$

热学

$\Delta E = \frac{i}{2}\nu R(T_2-T_1) = \frac{i}{2}(p_2V_2-p_1V_1)$ $pV=\nu RT$

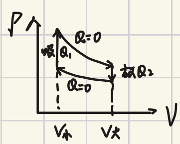
$\Delta Q = \Delta E + A$

- 等温 $\Delta E=0$. $\Delta Q = A = \nu RT\ln\frac{V_2}{V_1}$
- 等压 $(\gamma>1)$ $\gamma=\frac{i+2}{i}$
  $C_{p,m}=(\frac{i}{2}+1)R \to \Delta Q = \nu C_{p,m}\Delta T = \frac{i+2}{2}\nu R\Delta T$; $A=p\Delta V$ $=\Delta Q-\Delta E$. $\Delta E=$ 见上
- 等体 $C_{v,m}=\frac{i}{2}R \to \Delta Q = \nu C_{v,m}\Delta T = \frac{i}{2}\nu R\Delta T$; $A=0$. $\Delta E=$ 见上
- 绝热 $\begin{cases} pV^{\gamma}=C_1 \\ TV^{\gamma-1}=C_2 \end{cases}$ $Q=0$; $A=-\Delta E = -\frac{i}{2}\nu R(T_2-T_1)$



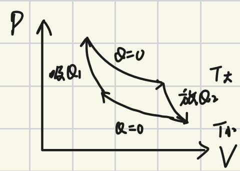
循环
- 热(正) T高吸热 → T低放热. 做功 $A = Q_{吸}-Q_{放}$. $\eta = \frac{A}{Q_{吸}} = 1-\frac{Q_{放}}{Q_{吸}}$
- 致冷(逆) 被做功A → T低吸热 → T高放热. $A = Q_{放}-Q_{吸}$. $\omega = \frac{Q_{吸}}{A} = \frac{Q_{吸}}{Q_{放}-Q_{吸}}$

热
- 空气标准奥托循环：$\begin{cases} 2个等体 \\ 2个绝热 \end{cases}$ $\eta = 1-\frac{V_{小}}{V_{大}}$

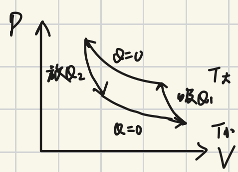


压缩比越大越好

- 卡诺循环：$\begin{cases} 2个等温 \\ 2个绝热 \end{cases}$ $\eta = 1-\frac{T_{低}}{T_{高}}$



高低温差越大越好



$\omega = \frac{吸}{A} = \frac{Q_1}{Q_2-Q_1}$

注意单位
L → 化成 m^3!

孤立系
- 平衡态即 Ω_{max} 对应宏观态
- 自然过程总沿 $\Delta S>0$ 方向进行
- 可逆过程 $\Delta S=0$
- 熵增原理 $\Delta S\geq 0$

准静态 $\xrightarrow{+\text{无耗散}}$ 可逆

$S=k\ln\Omega$

平衡态下 $\Delta S \geq \int \frac{\text{đ}Q}{T}$
- $>$ 可能发生 → 不可逆
- $=$ → 可逆
- $<$ 不可能发生(世上不存在!!!)

→ 可用于孤立系统. $\text{đ}Q=0$.

$dS=\frac{\text{đ}Q}{T}$ (仅适用于可逆过程) → $TdS=dE+\text{đ}A$

① 恒温吸放热，放热Q为负 $\quad \Delta S=\frac{Q}{T}$

② 无限平缓吸放热，$\Delta S=\frac{\text{đ}Q}{T}=\int_{T_1}^{T_2}\frac{cm\,dT}{T}$

③ 理想气体：$\Delta S=\int_1^2\frac{dE+p\,dV}{T}=\int_1^2\frac{\nu\cdot C_{V,m}\,dT}{T}+\int_1^2\frac{\nu R\,dV}{V}$

$$=\nu C_{V,m}\ln\frac{T_2}{T_1}+\nu R\ln\frac{V_2}{V_1}$$

④ 绝热自由膨胀 → 可逆等温 ~

$$\Delta S=\int\frac{\text{đ}Q}{T}=\nu R\ln\frac{V_2}{V_1}$$

相对论

洛伦兹因子 $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$　　"$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$" >1

- 钟慢：$t \uparrow$
- 尺缩：$l \downarrow$
- 质量膨胀：$m \uparrow$

$$\Delta E = \Delta m \cdot c^2$$