

# 高数(上)笔记

by 25-Iris



# 第一章 函数与极限

① 数域：对加减乘除封闭 ( $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$  是,  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$  不是)

证明  $\sqrt{2}$  不是有理数：反证法 设  $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ ,  $(m, n) = 1$  (最大公约数)

$2n^2 = m^2 \Rightarrow m$  为偶数. 设  $m = 2k$

$n^2 = 2k^2 \Rightarrow n$  为偶数, 矛盾

② 实数域具有完备性 (对极限运算封闭), 但  $\mathbb{Q}$  没有

✓ 在数轴上连续 / 在  $\mathbb{R}$  中, 单调有界一定有极限存在

③ 绝对值不等式： $|x+y| \leq |x| + |y|$  (折绝对值加法时)

$$\Rightarrow |x| = |x-y+y| \leq |x-y| + |y| \Rightarrow ||x|-|y|| \leq |x-y| \quad \begin{matrix} \text{○} & \text{x} & \text{○} \\ \text{x} & \text{o} & \text{y} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{+} & \text{x} & \text{+} \\ \text{x} & \text{o} & \text{y} \end{matrix}$$

(折绝对值减法时)

三角不等式： $|a-c| \leq |a-b| + |b-c| \quad \begin{matrix} \text{c} & \text{a} & \text{b} \\ \text{a} & \text{b} & \text{c} \end{matrix}$   
(构造时)

④ 邻域： $(a-r, a+r)$ ,  $a$  为  $r$  邻域,  $U_r(a)$

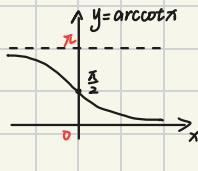
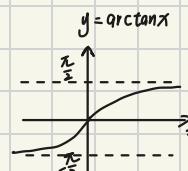
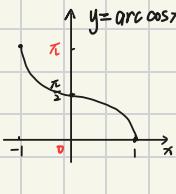
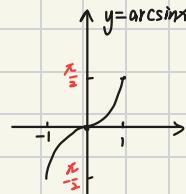
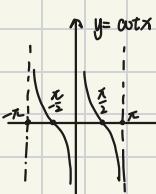
去心邻域： $U_r(a) \setminus \{a\}$ ,  $\tilde{U}_r(a)$

⑤ 函数： $f: X \rightarrow Y$ ,  $X$  为定义域, 值域  $f(X) \subseteq Y$

基本初等函数

$y = x^n$ $y = x^m$ $y = a^x$ $y = \sin x$ $y = \cos x$ $y = \tan x$ $y = \cot x$ $y = \arcsin x$ $y = \arccos x$ $y = \arctan x$ $y = \operatorname{arccot} x$	常数函数		
	幂函数	$y = x^{\frac{n}{m}}$ ( $n, m \in \mathbb{Z}$ )	$\begin{cases} m \text{ 为偶, 定义域全负} \\ \frac{n}{m} < 0, x \neq 0 \end{cases}$
	指数函数	$y = a^x$ ( $a > 0, a \neq 1$ )	
	对数函数	$y = \log_a x$ ( $a > 0, a \neq 1$ )	

[注]  $\frac{\pi}{2} - \arccos x = \arcsin x = \arctan \frac{1}{x}$



⑥ 复合函数： $f: X \rightarrow Y$ ,  $g: Y^* \rightarrow Z$ ,  $g(f(x))$  要求  $f(x) \in Y^*$   $\Rightarrow$  复合时要注意定义域

变量替换： $\sin(\arcsin x) = x$

$$\arcsin(\sin x) \neq x \Rightarrow \text{即 } y = \sin x, \sin(\arcsin y) = \sin x$$

$\arcsin y \neq x$  ) 周期性，仅在  $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  时成立

识别  $\arcsin$  /  $\sin$  有周期性，故  $\arcsin(\sin x)$  卡顿



e.g. 对于  $x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ ,  $\pi - x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ,  $\arcsin(\sin x) = \arcsin(\sin(\pi - x)) = \pi - x$

$$\text{且 } \sin(\pi - x) = \sin x$$

对于  $x \in [\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}]$ ,  $\pi - x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ,  $\arcsin(\sin x) = \arcsin(\sin(\pi - x)) = -\pi + x$

$$\text{且 } \sin(-\pi + x) = \sin x \quad (\text{若写 } \pi + x, \sin(\pi + x) = -\sin x \text{ 很不下去!})$$

⑦ 符号函数： $y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

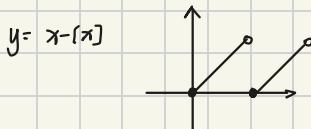
⑧ 双曲正弦： $y = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ , 双曲余弦  $y = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$$1^\circ \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1 \quad (\text{不同})$$

$$2^\circ \operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y \quad (\text{同})$$

$$3^\circ \operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y \quad (\text{与 } \cos \text{ 相反})$$

⑨ 向下取整函数： $y = \lceil x \rceil$



⑩ 狄利克雷函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数} \\ 0, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$$

⑪ 映射： $E \rightarrow F$

"F被填满"  $\rightarrow$  满射

"结果不重合"  $\rightarrow$  单射 (一一映射)

有逆映射 (反函数)

求反函数： $y = \frac{x}{2} - \frac{2}{x} \quad (x > 0)$   
 $\rightarrow 2xy = x^2 - 4 \rightarrow$  配方程

⑫ 若  $\forall x \in X$ , 有  $f(x) \leq M$ , 称  $M$  为  $f$  的一个上界

若  $\forall x \in X$ , 有  $f(x) \geq N$ , 称  $N$  为  $f$  的一个下界

有界函数：既有上界又有下界  $\Rightarrow N \leq f(x) \leq M, \forall x \in X$

$$\Leftrightarrow |f(x)| \leq C$$

(13) 序列极限:  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists N \in \mathbb{N}_+$ , 使得  $|a_n - l| < \varepsilon$ , 只要  $n > N$

注意取整除0  $\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$   
 $N = [\dots] + 1$

可以一开始缩小E范围(避免讨论):  $n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln q}$  设  $0 < \varepsilon < 1$   $\Rightarrow N = \lceil \frac{\ln \varepsilon}{\ln q} \rceil + 1$

放缩时可以加条件:  $\left| \frac{n+2}{n^2+1} \right| < \frac{n+n}{n^2} < \varepsilon$  加条件: N可以很大, ε可以很小  
分子分母化简: 统一为变量/常数: 元条件 上越大  
 $\frac{10n+28}{3(3n^2-n+2)} < \frac{10n+10n}{3 \cdot 2n^2}$  下缩小

补充技巧: ①  $\sin n < 1 < n$  利用方程

②  $q^n (|q| < 1) \Rightarrow \lim q = \frac{1}{1+h}$  或  $q = 1-h$

(14) 夹逼定理:  $c_n \leq a_n \leq b_n, \forall n \geq N_0$  格式 注意不要漏带 l 极限!

$\lim c_n = \lim b_n = l \Rightarrow \lim a_n = l$  见习题集, 简便直接写定积分

常用技巧: ① ( $a > 1$  时)  $a^n = (1+h)^n = 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2 + \dots + h^n$

② 取整函数放缩:  $x-1 < [x] \leq x / [x] \leq x < [x]+1$

(15) 增速:  $n < a^n < n!$

(16) 极限不等式: 设  $\lim a_n = l_1, \lim b_n = l_2$

$l_1 > l_2 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}_+$  使得  $a_n > b_n$ , 只要  $n > N$

$a_n \geq b_n \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}_+$  使得  $l_1 \geq l_2$ , 只要  $n > N$   
( $a_n > b_n$  也能推出  $l_1 > l_2$ )

(17) 极限的四则运算  $\Rightarrow$  有限次可用

(18) 有理化求  $\frac{0}{0}$  极限 (尤其根号)

eg:  $\frac{\sqrt{1+x}-1}{2 \sin x} = \frac{x}{2 \sin x (\sqrt{1+x}+1)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{4}$

(19) 若  $\{a_n\}$  的极限为 l, 则其子序列的极限也为 l

证明极限不存在: 找两个相邻不相等的子序列 / 一个发散的子序列

(/ 左极限 ≠ 右极限) / 极端极值



(20) 单侧极限

$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a$	右	$ f(x) - a  < \varepsilon, 0 < x - a < \delta$
$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = a$	左	$ f(x) - a  < \varepsilon, 0 < a - x < \delta$

双侧极限： $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \exists \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \exists = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \exists$

可以取  $\delta = 1 / \varepsilon = 0$  / ... 使某一部分展现其有界性(近似值), 从而与无穷小相乘等于0

eg:  $|x - a| < \delta \rightarrow \text{取 } \delta = 1 \rightarrow |x| < |a| + 1$



(21) 重要极限:  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$  (1+0)^\infty

[证明]  $(1 + \infty)^0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$

[凑1法] eg:  $\lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x)^{\frac{1}{x}} \Rightarrow (0+1)^\infty$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + e^{x+\ln-1}\right)^{\frac{1}{e^{x+\ln-1}}} \cdot \frac{e^{x+\ln-1}}{x} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x+\ln-1}-1}{x}} \\ &= e^2 \end{aligned}$$

(22) 无穷大量:  $|f(x)| > M$ , 当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时 (或  $|x| > \delta$  时)

↓  
没有极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$   $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$

[注意]  $\infty$  一定无界, 无界不一定  $\infty$

eg:  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin x$  在  $(-\infty, \infty)$  振荡, 不是一直都是  $\infty$



(23) 连续:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  (要求  $x_0$  处有意义) ε-δ 语言:  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$

$$\text{使 } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \text{ 只要 } |x - x_0| < \delta$$

右连续:  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$

左连续:  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$

(24) 连续函数: 在  $(a, b)$  上连续  
在  $a$  点右连续, 在  $b$  点左连续  
在  $[a, b]$  上连续

(25) 初等函数在其定义域内连续

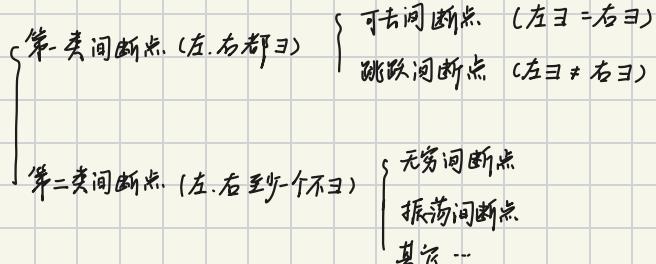
(26) 复合函数: 最内层可以不连续, 只有极限; 其余层都要连续

(27) 单射满射 + 严格单调  $\Rightarrow$  连续且反函数也连续

单射满射 + 连续  $\Rightarrow$  严格单调



(28) 间断点.



(29) 介值定理：

1° 中间值可达

$f(x)$  在闭区间  $[a,b]$  上连续,  $f(a) \neq f(b)$ . 则  $\forall \eta : f(b) < \eta < f(a)$ ,  $\exists \xi \in (a,b)$  使  $f(\xi) = \eta$

2° 零点存在定理

$f(x) \in C[a,b]$ , 且  $f(a)f(b) < 0$ , 则  $\exists \xi \in (a,b)$  使  $f(\xi) = 0$

3° 有界性定理

$f(x) \in C[a,b]$ ,  $\forall \eta : \min < \eta < \max$ ,  $\exists \xi \in (a,b)$  使  $f(\xi) = \eta$

应用：任意奇数次实系数多项式至少有一个实根

eg. 在区间  $[a,b]$  上任取  $m_1, m_2$  的组合值可达:  $f(\xi) = \frac{m_1 f(a) + m_2 f(b)}{m_1 + m_2}$

用有界性定理

## 第二章 微积分的基本概念



① 导数： $f'(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$



② 闭区间上可导：在  $(a, b)$  可导 +  $x=a$  处右导数  $\exists$  +  $x=b$  处左导数  $\exists$



③ 极限  $\exists \leftarrow$  连续  $\leftarrow$  可导



④ 导函数在  $a$  的极限  $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) \neq$  导函数在  $a$  的值  $f'(a)$

当  $x=a$  处导数不连续时 (导数存在则原函数必连续, 故此特指  $f'(a)$  连续而  $f'(x)$  不连续)

此时求导要用定义求

⑤ 复合函数写法注意

$$[g(f(x))]' = \frac{d}{dx} g(f(x)) = g'(f(x)) f'(x) = \frac{dg(f(x))}{df(x)} \cdot \frac{df(x)}{dx}$$

⑥ 函数在某点的导数。其反函数在该点的导数 = 1



$$\begin{aligned} \text{⑦ } & \begin{cases} \tan'x = \sec^2 x \\ \cot'x = -\csc^2 x \end{cases} \quad \begin{cases} \sec'x = \tan x \sec x \\ \csc'x = -\cot x \csc x \end{cases} \quad \begin{cases} \sec^2 x = 1 + \tan^2 x \\ \csc^2 x = 1 + \cot^2 x \end{cases} \\ & \begin{cases} (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{cases} \Rightarrow \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad \begin{cases} (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \\ (\text{arccot } x)' = -\frac{1}{1+x^2} \end{cases} \Rightarrow \arctan x + \text{arccot } x = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

⑧ 极限与无穷小量替换

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + o(x) \text{ 且 } \lim_{x \rightarrow a} o(x) = 0$$



⑨ 等价无穷小： $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x)}{p(x)} = 1$

同阶无穷小： $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x)}{p(x)} = l \quad (l \neq 0)$

高阶无穷小： $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x)}{p(x)} = 0 \Leftrightarrow o(x) = \eta(x)p(x) \text{ 且 } \lim_{x \rightarrow 0} \eta(x) = 0$



记作： $o(x) = O(p(x)) \quad (x \rightarrow 0)$

⑩  $O(x)$  的运算

$$O(x) \pm O(x) = O(x)$$

$$O(x^n) \cdot O(x^m) = O(x^{n+m})$$

## (11) 微分：函数增量的线性主要部分

$$\Delta y = A \Delta x + o(\Delta x) (\Delta x \rightarrow 0) \Rightarrow dy = A dx = f' dx$$

四则运算：  
 $d(x+y) = dx + dy$   
 $d(xy) = xdy + ydx$   
 $d\frac{y}{x} = \frac{xdy + ydx}{x^2}$

## (12) 一阶微分的形式不变性 (实际用起来和复合函数求导没啥区别)

对于  $z = g(y)$ ，有  $dz = g'(y) dy$ ，不论  $y$  是自变量还是中间变量



### (13) 隐函数求导：

$$eg: e^{xy} + x^2y = 1$$

1° 两边都直接对  $x$  求导

$$e^{xy} (y + xy') + (2xy + x^2y') = 0 \Rightarrow y' = \dots$$

2° 两边各自微分

$$d(e^{xy}) + d(x^2y) = 0$$

$$e^{xy} dy + ydx + x^2dy = 0$$

$$e^{xy}(-xdy + ydx) + y - 2xdx + x^2dy = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \dots$$

$$eg: y = \sqrt{\frac{(x-1)(x-3)}{(x-3)(x-4)}}$$

见根号与乘积  $\Rightarrow$  先取对数 (再求导 / 微分)



## (14) 参数方程求导

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} \neq \frac{\psi''(t)}{\varphi'(t)}$$

## (15) 微分与近似计算

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \Delta x$$

## (16) 高阶导数

$$\begin{aligned} 1^\circ (\sin x)^{(n)} &= \sin(x + \frac{n\pi}{2}) \\ (\cos x)^{(n)} &= \cos(x + \frac{n\pi}{2}) \end{aligned}$$

eg:  $(e^x \sin x)^{(n)} = ?$  三角函数  $n$  阶导，用诱导公式合并后找规律

$$n=1, e^x (\sin x + \cos x) = \sqrt{2} e^x \sin(x + \frac{\pi}{4})$$

$$n=2, 2e^x \sin(x + \frac{\pi}{2})$$

$$\vdots$$

$$n=n, (\sqrt{2})^n \sin(x + \frac{n\pi}{4})$$

$$(1^\circ) 2^\circ \left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n \cdot n! \cdot a^n}{(ax+b)^{n+1}}$$

$$\ln(ax+b)^{(n)} = a \cdot \left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(n+1)} = \frac{(-1)^{n+1} \cdot (n+1)! \cdot a^n}{(ax+b)^{n+1}}$$

$$\text{莱布尼茨公式: } [f(x)g(x)]^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

求复合函数的高阶导数，只能一阶一阶求，没有公式捷径

## ⑯ 高阶微分

1° 写法

$$d(dx) = 0, \quad (dx)^2 = 1 \quad dx \cdot dx = 0, \quad d(C) = 0$$

$$d(dy) + 2dy \cdot d^2y, \quad (dx)^2 + 2dy \cdot d^2x \quad d(h(x) dx)$$

$$\frac{d^n f}{dx^n} = f^{(n)}(x) \quad = dx \cdot d(h(x)) + h(x) d(dx)$$

2° 高阶微分不具有形式不变性， $d^2y \neq f''(u) du^2$  (当 u 为中间变量时)

微分运算易错点：只有一阶微分才有  $\frac{dy}{dx} = f'(x) \Leftrightarrow dy = f'(x) dx$   
否则， $\frac{d}{dx}$  是不可视为除法的

$$\text{eg: } dx = h(u) du, \text{ 求二阶微分, 不能用 } d^2x = [h(u) du]' du, \text{ 而得用微分的运算规则 } d^2x = d[h(u) du] = dx \cdot dh(u) + h(u) \cdot d^2u = h(u) du^2 + 0$$

建议：隐函数求二阶导老实用求导算，别用微分，易错



## ⑰ 不定积分

$$\int \frac{1}{x} dx = |\ln|x|| + C$$

eg: 分段函数求不定积分注意接口连续

$$f(x) = |x| + 2 \text{ 求不定积分}$$

$$\int f(x) dx = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + 2x + C_1 & x > 0 \\ -\frac{1}{2}x^2 - 2x + C_2 & x \leq 0 \end{cases}$$

$$F(x+C) \text{ 可导, 则连续} \Rightarrow x=0 \text{ 处 } C_1 = C_2 = C$$



## ⑲ 定积分：黎曼和

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \stackrel{\Delta}{=} \int_a^b f(x) dx \quad (\Delta x_i \text{ 为 } \Delta x_{\text{max}})$$

eg: 利用定义求  $\int_0^1 2^x dx$

$$\begin{aligned} \text{n等分} \quad \int_0^1 2^x dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n 2^{\frac{i}{n}} \cdot \frac{1}{n} \\ x_i &= \frac{i}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n 2^{\frac{i}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot 2^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1 - 2^{\frac{n}{n}}}{1 - 2^{\frac{1}{n}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{2^{\frac{1}{n}} - 1} \cdot 2^{\frac{1}{n}} \\ &= \frac{1}{2^{\frac{1}{n}}} \end{aligned}$$

$$\text{补: } \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

## ⑳ 一定可积

- | 闭区间, 连续
- | 闭区间, 单调
- | 闭区间, 有限个间断点, 有界

$\Rightarrow$  可积函数一定有界

## (21) 定积分的性质

$$|\int_a^b f(x) dx| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$



## (22) 积分中值定理

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$$



## (23) 变上限的定积分

$\int_a^x f(t) dt$ , 是一个关于  $x$  的函数, 连续可导

[解析]

$$x \int_a^x f(u) du \neq \int_a^x u f(u) du$$

↓ 在这成立

$$x \int_a^x f(u) du \text{ 或 } \int_a^x x f(u) du \quad \text{↓ 在这成立 } \int_a^x t f(t) dt \\ (\text{对被积与变量都换})$$

求导: eg1:  $F(x) = \int_0^{2x+1} e^t \sin 5t dt$ , 求  $F'(x)$

复合函数 全  $2x+1=y$

$$F(x) = F(y) \cdot y'_{\text{in}}$$

$$= \int_0^y e^t \sin 5t dt \cdot y'_{\text{in}}$$

$$= e^{2x+1} \cdot \sin(2x+1) \cdot 2$$

eg2:  $F(x) = \int_0^x \sqrt{1+t} dt$ , 求  $F'(x)$

拆积分区域

$$= \int_0^x \sqrt{1+t} dt - \int_0^x \sqrt{1+t} dt$$

eg3:  $G(x) = \int_0^x (e^t \int_0^t \sin z dz) dt$ , 求  $G''(x)$

复杂时做变量替换

$$\therefore u(t) = e^t \int_0^t \sin z dz$$

$$G(x) = \int_0^x u(x) dt$$

$$G(x) = u(x)$$

$$= e^x \int_0^x \sin z dz$$

$$G''(x) = e^x \int_0^x \sin z dz + e^x \sin x$$

= ...

eg4: 利用积分中值定理

$$\frac{\lambda}{x^2} \int_0^1 \cos x \sqrt{1+t^2} dt = \frac{\lambda \sqrt{1+\lambda^2} (1-\cos^2 x)}{x^2} = \frac{\lambda}{12}$$

见不要提, 不能消掉其与  $t$ ! → 提不出去就换元

$$\text{错例 eg1: } \frac{d}{dx} \int_x^0 \cos t dt$$

$$= \frac{d}{dx} (x \cdot \int_0^x \cos t dt)$$

eg2: 不能直接推积分上下限的负号, 必须用换元

$$F(-x) = \int_0^{-x} (-x-2t) f(t) dt \\ \therefore u=-t \quad (t: 0 \rightarrow -x) \quad (u: 0 \rightarrow x)$$

eg3: 别忘了加法可拆 --- !

$$F(x) = \int_0^x (x-t) \cos t dt \cdot \text{求 } F'(x)$$

复杂则拆

$$= x \int_0^x \cos t dt - \int_0^x t \cos t dt$$

= ...



②4 牛顿-莱布尼茨公式:  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

$$\text{eg1: } \int_{-1}^2 |x| [x] dx = \int_{-1}^0 |x| [x] dx + \int_0^1 |x| [x] dx + \int_1^2 |x| [x] dx$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{间断函数} \rightarrow \text{去有限个断点} \\ \text{分段函数} \rightarrow \text{拆成分区域} \end{array} \right\} = \int_{-1}^0 (-x) (-1) dx + \int_0^1 x \cdot 0 dx + \int_1^2 x \cdot 1 dx$$



②5 定积分应用: 求n项和的极限

$$\text{求出} \sum f\left(\frac{i}{n}\right) \cdot \frac{1}{n}$$

$$\text{eg1: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ (1 + \frac{1}{n})(1 + \frac{2}{n}) \cdots (1 + \frac{n}{n}) \right]^{\frac{1}{n}}$$

$$\begin{aligned} \ln S &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \ln(1 + \frac{i}{n}) \frac{1}{n} \\ &= \int_0^1 \ln(1+x) dx \end{aligned}$$

$$\text{eg2: } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$$

$$\begin{aligned} \ln S &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \ln \frac{i}{n} \cdot \frac{1}{n} \\ &= \int_0^1 \ln x dx \end{aligned}$$

②6 构造二次函数证明不等式

$$\text{eg: } f(x), g(x) \in C([a, b]). \text{ 证明: } \left( \int_a^b f(x) g(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \cdot \int_a^b g^2(x) dx$$

$$\text{构造 } \int_a^t (f(t) + g(t)) dt = \int_a^t f(t) dt + \int_a^t 2f(t)g(t) dt + \int_a^t g(t)g(t) dt$$

$$\text{则命题} \Leftrightarrow (\frac{b-a}{2})^2 \leq ac \Leftrightarrow \text{二次函数正}$$

### 第三章 积分的计算及应用



① 第一换元法 :  $dF(x) = f(x) dx$  演微分

② 第二换元法 : 令  $x = \varphi(t)$  三角换元 / 根号换元

$$dx = \varphi'(t) dt \quad \text{eg: } \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \text{ 可令 } x = 2 \sin t \text{ 或 } u = \sqrt{1-x^2}$$

③ 分部积分法 :  $\int u v' dx = u v - \int v u' dx$

$$\text{eg: } I_n = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{(t^2 + a^2)^n} \right) \cdot \sec^n x dx \cdot \int \arctan x dx \text{ 反对常数三相乘/除}$$

次序: 反、对、常、三/指, 非后的先放进里

遗漏: 解完方程要 + C

④ 不可积:  $\int \frac{\sin x}{x} dx, \int e^{-x^2} dx, \int \sin x^2 dx, \int \cos x^3 dx$

$\int \frac{\cos x}{x} dx, \int \frac{1}{\ln x} dx, \int \frac{dx}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 x}}, \int \sqrt{1-k^2 \sin^2 x} dx$



⑤ 有理式积分: 假 → 真, 真拆分

1° 假 → 真: 长除法

$$\begin{cases} (ax+b) \Rightarrow \frac{A}{ax+b} \\ (ax+b)^k \Rightarrow \frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \dots + \frac{A_k}{(ax+b)^k} \\ (ax^2+bx+c) \Rightarrow \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} \\ (ax^2+bx+c)^k \Rightarrow \frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \dots + \frac{A_kx+B_k}{(ax^2+bx+c)^k} \end{cases}$$

分子不动, 分母降幂

2° 求 A-B-C-D ...

法① 待定系数

法② 代入  $x=0, \pm 1, \dots$

3° 求  $\int \frac{Bx+D}{x^2+px+q} dx$

$$\text{eg: } \int \frac{x}{x^2+2x+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+1-1}{x^2+2x+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1} - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+x+1} dx$$

按分离配凑分子

4° 求  $\int \frac{Bx+D}{(x^2+px+q)^n} dx$  分部积分递推

$$\text{eg: } \int \frac{dx}{(x^2+2)^2} = - \int \frac{1}{2x} d\left(\frac{1}{x^2+2}\right) = -\frac{1}{2x(x^2+2)} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2(x^2+2)} = \dots$$

5° 可化为有理式的积分

• 三角函数有理式  $\Rightarrow$  不能替换  $t = \tan \frac{x}{2}, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

常见:  $\int \frac{dx}{a+b \sin x + c \cos x}$

[拓] -切三角函数一次有理式的不定积分方法

$$\int \frac{a \cos x + b \sin x}{c \cos x + d \sin x} dx \quad \text{全分子 = A 分母 + B 分母 - 隔离, 求 A, B}$$

$$= Ax + B \int \frac{dx}{u}$$

$$= Ax + B \ln |u| + C$$

$$\cdot \text{某些根式} \Rightarrow t = \sqrt{ax+b} \quad \text{或} \quad t = \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

$$\text{eg: } \int \frac{dx}{\sqrt{x+1}^2(x-1)^2} = \int \frac{dx}{(x+1)^2 \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}} \quad \text{令 } \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = u$$

## ⑥ 定积分的分部积分法

$$\text{点火公式: } I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \begin{cases} n \text{ 为正偶数: } \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \\ n \text{ 为大于1的奇数: } \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1} \end{cases} \quad (\text{用 } !! \text{ 表示})$$

$$\text{eg1: 求 } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \cdot \sin^2 t dt \\ = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t (1 - \cos^2 t) dt \\ = I_4 - I_6 = \frac{\pi}{32}$$

$$\text{eg2: 求 } \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-x^2)^n dx \rightarrow \text{转化为 } \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{2n+1} dt = I_{2n+1} \\ \text{求 } \int_0^{\frac{\pi}{2}} I_{2n+1}: \quad I_{2n+1} < I_{2n+1}, I_{2n+1} = \frac{\pi}{4(2n+1)} \\ (\text{消掉大部分项})$$

[换元分步法: 技巧性强, 不通用]

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx \quad (\because x = \pi - t)$$

$$\text{eg1: } \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{1+e^x} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\sin^2 x}{1+e^x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{1+e^x} dx \\ \text{令 } x = -t, \text{ 化为 } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x \sin^2 x}{1+e^x} dx \\ \text{后得: } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$$

$$\text{eg2: } A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\cos x}}{e^{\sin x} + e^{\cos x}} dx \\ \text{令 } x = \frac{\pi}{2} - t, A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\sin t}}{e^{\sin t} + e^{\cos t}} dt$$

但化简可用此思路: 换上下限  $\rightarrow$  统一上下限

$$\int_0^{2\pi} e^{\sin t} \sin t dt = \int_0^{\pi} e^{\sin t} \sin t dt + \int_{\pi}^{2\pi} e^{\sin t} \sin t dt = \int_0^{\pi} (e^{\sin t} - e^{-\sin t}) \sin t dt > 0$$

## ⑦ 定积分的换元法

积分上下限极易忘记变更

不定积分不能随便换元, 定积分才可以!!!

## ⑧ 算定积分, 首先判断奇偶性

$$\text{① 周期函数: } \int_{a+T}^{b+T} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

经验:  $\int \sin nx \sin mx dx \Rightarrow$  积化和差

• 2 仅含  $\sin mx \cos nx$  的分式  $\Rightarrow$  直接除  $\cos nx$  化成  $\tan nx$  和  $\sec nx$

$\frac{\sec^2 x}{\tan nx} \Rightarrow$  化为  $\sin nx \cdot \cos nx$ , 若奇奇就能做

• 3 见根号  $\Rightarrow$  换元

• 4  $e^x$  系列积分  $\Rightarrow$  分子分母常同乘  $e^{kx}$

eg:  $\int \frac{dx}{(1+e^{2x})^2} = \int \frac{1+e^{-x}-e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} dx = \int e^{-x} dx - \int \frac{dx}{(1+e^{-x})^2}$

• 5 分子自由拆配

eg:  $\int \frac{x^2+x}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{x^2+1}{1-x^2} dx^2 = \frac{1}{2} \int \frac{x^2-1+2}{1-x^2} dx^2$

• 6 全  $x = a \sec t$  的换元要分类讨论

eg:  $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} dx$  ①  $x>0: 1/2 x = a \sec t, 0 < t < \pi/2$   
( $a>0$ )  $\sim = \int \frac{a \tan t}{a \sec t} \cdot a \sec t \cdot \tan t + C$   
 $= \sqrt{x^2-a^2} - a \cdot \arccos \frac{a}{x} + C$

②  $x<-a: 1/2 x = -t (t>0)$

$\sim = \int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{-t} dt$

四代时很麻烦, 故令  $x=-t$  采用上种情况  
 $= \sqrt{t^2-a^2} - a \cdot \arccos \frac{a}{t} + C$   
 $= \sqrt{x^2-a^2} - a \cdot \arccos \frac{a}{x} + C$

综上:  $\sqrt{x^2-a^2} - a \cdot \arccos \frac{a}{|x|} + C$

• 7  $\sin^2 x \cos^2 x \rightarrow$  有奇拆奇, 全偶降次至奇

• 8  $\tan^n x \sec^m x \rightarrow$  化为  $\tan x$

$\tan^n x \sec^m x \rightarrow$  化为  $\sec x$

$\tan^n x \sec^m x \rightarrow$  分部积分

• 9  $\tan^n x dx \rightarrow n=1, 2$  easy

$n \geq 3, \tan^2 = \sec^2 - 1$  降次

• 10 都在分母  $\rightarrow$  倒代换

eg:  $\int \frac{1}{x^4(1+x^2)} dx, \text{令 } t=\frac{1}{x}$

• 11 长除法剥离分式

eg: 由长除法:  $t^4 = (t^2+1)(t^2-1) + 1$

$$\frac{t^4}{t^2+1} = t^2-1 + \frac{1}{t^2+1}$$

• 12 分子配凑

eg:  $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \int \frac{x^2-a^2+a^2}{\sqrt{a^2-x^2}} dx$

• 13  $\int \frac{x^2+1}{x^4+1} dx = \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}} dx = \int \frac{d(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+2}$

(想法选择 x 有理式数分)

背/熟推: 1°  $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \int \left( \frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x} \right) dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$

2°  $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$

3°  $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$

4°  $\int \sec x dx = \ln |\sec x + \tan x| + C$

$\int \csc x dx = \ln |\csc x - \cot x| + C = \ln |\tan \frac{x}{2}| + C$

5°  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2+a^2}| + C$

6°  $\frac{1}{2\sqrt{x}} dx = d\sqrt{x}, \frac{1}{\pi} dx = d\ln x$

易错: 1°  $\int x f(t) dt$  搞错先分子极点忘记存分母

## ⑩ 定积分的应用



### 1° 曲线弧长

$$s = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt \xrightarrow{y=f(x)} \int_a^b \sqrt{1+[y'(x)]^2} dx$$

$$\xrightarrow{r=r(\theta)} \int_a^b \sqrt{r^2(\theta) + [r'(\theta)]^2} d\theta$$



### 2° 旋转体体积

! 别漏了  $\frac{1}{2}dx$   
 $\frac{1}{2}ds$

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx \quad (\text{以绕 } x \text{ 轴转为例})$$

/ 柱壳法:  $V = \int_a^b y \cdot 2\pi x dx$   
 (仅适用于边缘垂直)



### 3° 旋转体侧面积

$$F = 2\pi \int_a^b y(t) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt \xrightarrow{y=f(x)} 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1+[f'(x)]^2} dx$$

$$\xrightarrow{r=r(\theta)} 2\pi \int_a^b r \sin \theta \sqrt{r^2(\theta) + [r'(\theta)]^2} d\theta \quad (\text{绕极轴旋转})$$

### 4° 曲线弧的质心与转动惯量

$$\text{质心 (以 } x \text{ 轴为例): } \bar{x} = \frac{\int x p_s ds}{\int p_s ds}$$

$$(p_s, p_s(t) \text{ 为线密度}) \quad \text{同理, } dJ_x = y^2(t) p_s(t) ds, \quad dJ_y = x^2(t) p_s(t) ds$$

质量分布均匀的曲线绕同一平面内不通过它的直线旋转一周所得  $S_{\text{旋转面}} = C_{\text{质心(周长)}} \cdot S_{\text{(周长)}}$

累加 ← 线元

### 5° 平面极坐标下的图形面积

$$S = \frac{1}{2} \int_a^b r^2(\theta) d\theta$$



→ 动力学判断: 每  $r=0$ , 再  $r>0$

病例:



② 极坐标: 一周期内  $r \geq 0$  对应的有效θ区间 (一周期: 先至少保证θ取遍  $[0, 2\pi]$ , 再根据表达式的周期转换)

eg: 求  $r = a \sin^2 \frac{\theta}{3} (a > 0)$  的全长

- 周期  $\begin{cases} 0 < \frac{\theta}{3} < \pi & r > 0 \vee \\ \pi < \frac{\theta}{3} < 2\pi & r < 0 \times \end{cases}$



其中,  $\frac{\theta}{3} \in (0, \pi)$  与  $(\pi, 2\pi)$  对称  $\Rightarrow$  故求  $2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} ds$

③ 椭圆、圆  $\Rightarrow$  别用直角坐标系, 换成参数方程

## 第四章 微分中值定理与泰勒公式



① 罗尔中值定理：闭区间连续 & 开区间可导，若  $f(a) = f(b)$ ，则  $\exists \xi \in (a,b)$  使  $f'(\xi) = 0$

② 拉格朗日中值定理：闭区间连续 & 开区间可导，则  $\exists \xi \in (a,b)$  使  $f'(b) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$$\text{等形式: } f(x) = f(x_0) + f'(x)(x-x_0)$$

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0 + \theta \Delta x) \Delta x$$

应用：1° 证明不等式

$$\text{eg: 证明 } \frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$$

$$\frac{\ln(1+x) - x}{x} = f\left(\frac{x}{x}\right) = \frac{1}{x} \in (-\frac{1}{1+x}, 1)$$

2° 求极限 (出现  $f(b)-f(a)$  形式时, 用其嵌套)

$$\text{eg: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin(\tan x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-\tan x) \cos x}{x^3} \quad \text{令 } x = \tan x, x \rightarrow 0$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan x}{x^3} \cdot \frac{1}{\cos x} \\ = -\frac{1}{3}$$

③  $f'(x) > 0 \rightarrow$  严格递增 (逆命题不一定成立)

应用：单增单函数  $\Rightarrow$  导数恒为0

$$\text{eg: } \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

④ 柯西中值定理：闭区间连续 & 开区间可导 &  $g'(x) \neq 0$ ，则  $\exists \xi \in (a,b)$  使  $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$

⑤ 洛必达法则： $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$  存在  $\rightarrow \lim \frac{f(x)}{g(x)}$  存在且等于前者

(否命题不成立)  $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$  不存在  $\rightarrow \lim \frac{f(x)}{g(x)}$  不存在

类型：0.0型:  $\frac{0}{0}$  或  $\frac{\infty}{\infty}$

$\infty - \infty$  型: 通分、有理化

$0^\infty / 1^\infty / \infty^\infty$  型: 翻上去

$$\text{推论: } \lim_{n \rightarrow \infty} x^0 (\ln n) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

☆“翻上去”相消约完拉  $e^0$ ！

$$\text{eg: } (2+x)^x - 2^x = e^{x \ln(2+x)} - e^{x \ln 2}$$

$$= e^x \cdot e^{\ln(2+x)} [e^{\ln(2+x)-x} - 1]$$

⑥ 泰勒公式

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} (x-x_0)^m + R_n \rightarrow R_n = \begin{cases} O((x-x_0)^m), & x \rightarrow x_0 \quad "x 趋于..." \\ \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} (x-x_0)^{m+1}, & \text{多介于加号之间} \quad "使 m+1 阶可导的} \\ \text{不等范围"} \end{cases}$$

麦克劳林公式:  $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \begin{cases} O(x^n), & x \rightarrow 0 \\ \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}, & \theta \in (0,1) \end{cases}$

局部泰勒展开式的唯一性定理: 可用间接 Taylor 展开反求高阶导数

间插展开用到的无穷小运算:  $O(x^3) \cdot x = O(x^4)$ ,  $O(x^3) + O(x^4) = O(x^3)$ ,  $O(\frac{1}{x}) \cdot x = O(1)$



$$\text{背: } 1^\circ \quad e^x = 1 + x + \frac{1}{2!} x^2 + \cdots + \frac{1}{n!} x^n + O(x^n) \quad (x \rightarrow 0)$$

$$2^\circ \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + O(x^{2n}) \quad (x \rightarrow 0)$$

$$3^\circ \quad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + O(x^n) \quad (x \rightarrow 0)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + O(x^n) \quad (x \rightarrow 0)$$

间接展开 eg1:  $f(x) = \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$  在  $x=0$  处展开至 4 阶:

有理式先拆系数:  $f(x) = 1 + 2x \cdot \frac{1}{1-(x-x^2)}$

$$= 1 + 2x \cdot [1 + x - x^2 + (x-x^2)^2 + (x-x^2)^3 + o((x-x^2)^4)]$$
$$= 1 + 2x + 2x^2 - 2x^3 + o(x^4), x \rightarrow 0$$

eg2:  $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x+3)}$  在  $x=2$  处展开至 4 阶, 求  $f^{(n)}(2)$ :

非  $x=0$  展开  $\Rightarrow$  换元 令  $x-2=t$ .  $f(x) = \frac{1}{t} \left( \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1} \right)$

$$= \frac{1}{t} \sum_{k=0}^n (-1)^k t^k - \frac{1}{20} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{t^k}{5^k} + o(t^n)$$
$$= \boxed{\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{4} \left(1 - \frac{1}{5^{k+1}}\right) (x-2)^k} + o((x-2)^n)$$
$$\frac{f^{(n)}(2)}{k!}$$

eg3: 展开至 4 阶  $e^x \sin x = \left[1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right] \left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)$

定阶依据: ① 演出目标阶数的  $x^n$

② 确保所有无穷小量都能被  $o(x^n)$  吸收

偷懒技巧: 只要保证以上 ①②, 可以随时舍去进阶精度

泰勒展开求极限: eg1:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - \frac{x}{2} \sin x}{\sin x - x \cos x}$  判断展开到几阶  $\Rightarrow$  看分母及几阶无穷小量 (展开充分)

$$(展开至 3 阶)$$
$$\sin x - x \cos x = (\frac{1}{3!} - \frac{1}{1!})x^3 + (\frac{1}{5!} - \frac{1}{3!})x^5 + \dots \Rightarrow$$
 是  $x^3$  的同阶无穷小量

$$= \frac{0}{0}$$
$$= \frac{\frac{1}{2}x^3 + o(x^3)}{\frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}$$
$$= \frac{1}{2}$$

何时用? 分母是  $x$  的高次导时、一看就知用等价/局部很危险时

其他细节问题: 1° 算出  $(-1)^{n-1}$  (-半奇数为 0) 时, 就得用  $2n-1$  和  $2n$  来表示了

2° 若结果与  $n$  的奇偶有关还要求展开到  $n$  阶. 算了别嫌麻烦, 写 2 还行了

## ⑦ 极值问题

驻点/稳定点/临界点:  $f'(x_0)=0$  的点.

费马定理: 极值点  $\Rightarrow f'(x_0)=0$  (必要条件)  $\xrightarrow{\text{加 } f'(x_0) \text{ 两侧符号}}$  充要条件  
 $\xrightarrow{\text{有 } n \text{ 阶导时 } f''(x_0) < 0 \text{ 或 } > 0}$

推广:  $f'(x_0) = \dots = f^{(2n-1)}(x_0) = 0$ , 若  $f^{(2n)}(x_0) > 0$ ,  $x_0$  为极小值点.

$\dots < 0 \dots$  大 ...

$f'(x_0) = \dots = f^{(2n)}(x_0) = 0$ ,  $f^{(2n+1)}(x_0) \neq 0$ ,  $x_0$  不是极值点.



求极值点方法

可导点  $\begin{cases} \text{求出所求 } f(x_0) = 0 \\ \text{分段讨论 } f'(x) \text{ 在各区间上正负} \end{cases}$  (高中习惯  $\checkmark$ )

无脑求导直至出现  $f^{(m)}(x_0) = 0$ , 看几是偶数则为极值点.

不可导点  $\begin{cases} \text{回到定义, 在一小段区间内的最值} \\ \text{看左右导数的正负性} (f(x) \text{ 单调性}) \end{cases}$

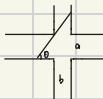
看左右导数的正负性 ( $f(x)$  单调性)

eg:  $y = x^{\frac{2}{3}}$

求闭区间上最值：比较极值与端点值  $\Rightarrow$  若区间内只有一个极值点，则可直接确定它是一个最值点  
 可导 不可导  $\Rightarrow$  若区间仅有极值点，且有唯一端点，则可直接确定该端点是一个极值点  
 eg:  $x \rightarrow +\infty$  时,  $f(x) \rightarrow +\infty$   
 为有极小值

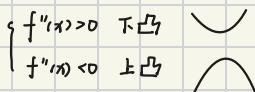
经典应用题：求能顺利转入另一条河的船的最大长度

$$l = f(\theta) = \frac{a}{\sin \theta} + \frac{b}{\cos \theta} \rightarrow \text{求 } l_{\min}$$



### ⑧ 凸凹性

在  $(a, b)$  内恒有



理解:  $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2$

$$f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

曲线在切线下方  $\rightarrow$  上凸

拐点:  $f''(x_0) = 0$  且两侧凸凹性相反 ( $f''(x_0)$  异号)



### ⑨ 渐近线

斜渐近线:  $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ ,  $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax)$   
 (-∞同理)

垂直渐近线:  $x \rightarrow C$  时,  $f(x) \rightarrow +\infty$   
 (左单侧) (或  $-\infty$ )

极值而隔掉  $x/y$  轴 \*

水平渐近线:  $x \rightarrow \infty$  时,  $f(x) \rightarrow ?$

### ⑩ 画函数作图

求一阶导（找极值点）、二阶导（找拐点）

列表1:

$x$	$(-\infty, -1)$	$-1$	$(-1, 0)$	$0$	$(0, 1)$	$1$	$(1, +\infty)$
$y'$	+	0	-	-	-	0	+
$y''$	-	-	-	0	+	+	+
$y$	$\nearrow$ 上凸	极值	$\searrow$ 上凸	$\searrow$ 下凸	极值	$\nearrow$ 下凸	

列表2: 几个特殊函数值

$x$	0	1	2	3
$y$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{8}$	0

求渐近线

↓  
画图

补充: 见 函数差值

微中  
牛顿

$$f(b) - f(a) = f'(\frac{1}{3})(b-a)$$

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x) dx$$

## 第五章 向量代数与空间解析几何

① 单位向量，记作  $\vec{a}^0$ ， $\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

② 三角不等式： $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$

③ 叉乘(外积)：

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$$

几何意义： $S_{平行四边形}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

$$\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b})$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$$

$\vec{a} \parallel \vec{b}$  共线  $\Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$

$$\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

结合律不成立： $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$

混合积： $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$  各与看次序 (右斜为正)

(纯对称) 几何意义：平行六面体体积

$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$  共面  $\Leftrightarrow \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$

$$\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \begin{vmatrix} x_3 & y_3 & z_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

④ 空间分为八卦限



$$⑤ \vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2, \quad \vec{a}^0 = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x, y, z)$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

⑥ 方向角：与 x, y, z 轴正向的夹角  $\alpha, \beta, \gamma$

方向余弦： $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{i}}{|\vec{a}|}, \quad \vec{a}^0 = \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k} \quad (\text{方向余弦就是单位向量的坐标分量})$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \cos \beta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \Rightarrow \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$



## ⑦ 平面方程

点法式： $\vec{P_0P} \cdot \vec{n} = 0 \quad A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$

三点式：三向量共面，混合积为零  $\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix} = 0$

一般式： $Ax + By + Cz + D = 0$

$D=0 \Rightarrow$  过  $(0,0,0)$   $\rightarrow$  垂直于  $OZ$  平面

$A=0 \Rightarrow$  平行于  $xOy$  平面  $(A, B, C) \cdot (1, 0, 0) = A=0, \vec{n} \perp xOy$  (要与过线)

$A=B=0 \Rightarrow$  平行于  $xOy$  平面

$A=B=D=0 \Rightarrow$  与  $xOy$  平面重合

截距式： $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad (A, B, C, D \neq 0)$

重合： $(A_1, B_1, C_1, D_1) = \lambda (A_2, B_2, C_2, D_2)$

## ⑧ 两平面间

平行： $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$

不重合： $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$

垂直： $(A_1, B_1, C_1) \cdot (A_2, B_2, C_2) = 0$

相交  
不垂直：平面夹角 = 法向量夹角 (取小角)

## ⑨ 直线方程

一般方程 (两面式)： $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad (\text{不唯一})$

参数方程： $\begin{cases} x - x_0 = ta \\ y - y_0 = tb \\ z - z_0 = tc \end{cases}$

标准方程 (点向式)： $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c} \quad (a, b, c \neq 0)$

两点式方程： $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$

[形式互化]

一般  $\rightarrow$  标准：取点 &  $\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$

标准  $\rightarrow$  一般：拆连等式  $\begin{cases} \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} \\ \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c} \end{cases}$  分别整理为一般式

## ⑩ 夹角

两向量夹角  $\theta \in [0, \pi]$

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

两直线夹角  $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2|}{|\vec{s}_1||\vec{s}_2|}$$

直线与平面夹角  $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \langle \vec{n}, \vec{s} \rangle$$

$$\sin \varphi = |\cos \langle \vec{n}, \vec{s} \rangle|$$

两平面夹角  $\psi \in [0, \frac{\pi}{2}]$



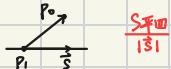
$\psi = \text{法向量夹角取小值}$

$$\cos \psi = |\cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle|$$

## ⑪ 距离

点到点  $\sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 + (z_1-z_2)^2}$

$$\text{点到线 } d = \frac{|\overrightarrow{P_0 P_1} \times \vec{s}|}{|\vec{s}|}$$



$$\text{点到面 } d = \frac{|\overrightarrow{P_0 P_1} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$



$$\begin{aligned} \text{线到线} &\leftarrow \text{平行 - 点到线} \\ \text{线到面} &\leftarrow \text{平面: } d = \frac{|\overrightarrow{P_0 P_1} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{|(\vec{s}_1 \times \vec{s}_2) \cdot \vec{P_1 P_2}|}{|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2|} \end{aligned}$$

线到面  $\rightarrow$  点到面

$$\text{面到面 } \rightarrow \text{点到面} / d = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

## ⑫ 解题经验

1° 平面只有三个参数 (几何/代数意义都正)

直线有四个参数 (用点向式) (约束条件比平面多)



2° 平面系:

$$\begin{array}{l} \text{直线 } L \\ (-\text{一般式}) \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} Ax + By + Cz + D_1 = 0 \quad ① \\ Ax + By + Cz + D_2 = 0 \quad ② \end{array} \right.$$

$$Ax + By + Cz + D_1 + \lambda(Ax + By + Cz + D_2) = 0 \quad ③ \text{ 表示除 } ② \text{ 以外任一过 } L \text{ 的平面}$$

3° 通过点 A 且与直线 l (点向式) 垂直相交的直线

$$\begin{cases} M \text{ 在 } l \text{ 上 (参数设 t)} \\ AM \perp l \end{cases}$$

4° 求直线 l 在平面 π 上的投影直线 l'

$\hookrightarrow$  化成两面式, 用平面系  $\rightarrow$  重直得方  $\rightarrow$  表示为两面式

5° 投影曲线

eg: 求曲线  $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ xy = 2y \end{cases}$  在 Oxy 平面上的投影曲线的方程

① 消去 z 得投影柱面方程  $x^2 + y^2 + 2y = 1$

② 令  $z=0$  得投影曲线方程  $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2y = 1 \\ z=0 \end{cases}$

(投影柱面再与 Oxy 相交)

### (13) 二次曲面

椭圆锥面:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$  ( $z=0$  截只有一个点)

椭球面:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  (用球来记)

单叶双曲面:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$  (两正一负)

双叶双曲面:  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$  (两负一正) ) 满足若不同绕谁转

抛圆抛物面:  $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

双曲抛物面:  $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$  (马鞍面)

椭圆柱面:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

双曲柱面:  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

抛物柱面:  $\frac{x^2}{a^2} - y = 0$

补充: 1° 椭球面参数方程:

$$\begin{cases} x = a \sin\varphi \cos\theta \\ y = b \sin\varphi \sin\theta \\ z = c \cos\varphi \end{cases}$$

2° 双曲面与渐近锥面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 / 0 / -1$$



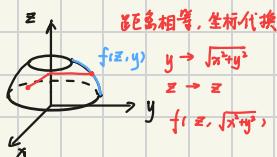
看能截出双曲线

3° 双曲抛物面(马鞍面):

用 $z=0$  截: 两条直线 ✗



### (14) 旋转曲面



### (15) 空间曲线

$$r(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

$$\text{切向量 } r'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}$$

$$\text{切线方程: } \frac{x-x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y-y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z-z(t_0)}{z'(t_0)}$$

$$\text{微分 } ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

$$\text{法平面: } x'(t_0)(x-x(t_0)) + y'(t_0)(y-y(t_0)) + z'(t_0)(z-z(t_0)) = 0$$

求切线方程的三种方法:

1° 化成参数方程, 正常求

2° 方程组确定隐函数, 选 $x/y/z$ 其一为参数

切向量即隐函数求导 (但有的步不能省, 有风险)

3° 利用两个曲面法向量 (梯度)

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$$



# 第六章 多元函数微分学

## ① $\mathbb{R}^n$ 中的距离

$$d(P, Q) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_j - y_j)^2} \quad \rightarrow \text{仍有: 三角不等式 } d(P, Q) \leq d(P, R) + d(R, Q)$$

② 点  $P_0$  的  $r$  邻域:  $U_r(P_0) = \{P \in \mathbb{R}^n \mid d(P_0, P) < r\}$  (开区间/开圆/开球)

$\mathbb{R}^n$  中的点:

- 内点:  $\exists U_r(P) \subset E$
- 外点:  $\exists U_r(P) \cap E = \emptyset$
- 边界点:  $\forall P \in U_r(P)$ ,  $U_r(P)$  有  $C_E$  和  $\bar{C}_E$

③ 开集: 每一点都是内点

闭集: 包含全部边界点

非开非闭: 只包含部分边界点

连通: 任意两点都可用  $E$  中曲线连接



区域: 连通的非空开集

$G$

闭区域: 区域 + 其边界

$\bar{G}$

有界集合:  $\exists R$  使  $E$  包含于以  $R$  为半径的球内



④ 二元函数极限  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A$

空心圆  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$  使当  $0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$  且  $(x, y)$  在  $D$  中时, 有  $|f(x, y) - A| < \varepsilon$

空心正方形  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$  使当  $|x-x_0| < \delta$ ,  $|y-y_0| < \delta$  且  $(x, y) \neq (x_0, y_0)$  且  $(x, y)$  在  $D$  中时, 有  $|f(x, y) - A| < \varepsilon$

加条件: eg:  $\left| \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \right| \leq \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} |x| + \frac{|y|}{x^2+y^2} y^2 \leq |x|+|y| < |x|+|y| < \varepsilon$

[证明] 被除数为 1'  $\overbrace{\text{被除数为 1'}}$   $\overbrace{\text{需要 } |y| < 1 \rightarrow \delta = \min\{\frac{\varepsilon}{2}, 1\}}$

求极限, 可用夹逼定理

⑤  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$

$\Leftrightarrow x^2+y^2 \rightarrow 0$

$\Leftrightarrow x^{2n}+y^{2n} \rightarrow 0$

⑥ 计算极限: 夹逼定理 / (有限次) 四则运算, 复合

证明极限存在(已知极限): 定义  $\varepsilon-\delta$

证明极限不存在 (判断极限是否存在, 首先要判证伪)



1° 先用直线  $y=kx$  试证不存在

2° 若不行, 再用  $y=kx^2$  试, 若证不存在

⑦ 多元函数的连续性：二元初等函数在其有定义的区域内是连续的  
(非边界)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

⑧ 在有界闭区域上连续  
→ 有界  
→ 有最大值  
→ 值域定理

[易错]  $Z = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos y}$  在哪里连续？

不是  $(k_1\pi, \frac{\pi}{2} + k_2\pi)$ , 而是  $x \neq k_1\pi$  或  $y \neq \frac{\pi}{2} + k_2\pi$

-一些点

-一些线



### ⑨ 偏导数

$$z = f(x, y), f_x(x_0, y_0) = \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} \stackrel{\triangle}{=} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

- 1° 因为求某偏导数， $y$ 视作常量，所以  $y$ 若已知不如先代入  
2° easy 的直接根据其他量求导，否则用定义求

{ 定义法  
直接求导法

→ 哪个都用不着，具体分析!!!

$$\begin{matrix} \text{高阶偏导数: } & f_{xx}(x, y), \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, z \\ & xy \\ & yy \end{matrix}$$

】二阶混合偏导数

偏导数连续 (在某区域内) → 混合偏导数可交换次序



### ⑩ 全微分

$$\text{全增量: } \Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

$$\Delta z = A \Delta x + B \Delta y + o(\rho), \rho \rightarrow 0$$

$$dz = A \Delta x + B \Delta y$$

$$或 dz = f_x(x, y) dx + f_y(x, y) dy$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

一元函数: 极限  $\Rightarrow$  连续  $\Rightarrow$  可导/可微

[易错] 偏导数的连续也要求二元的连续而非单变量的连续

(证明时要小心)

可微  $\Rightarrow$  偏导数连续



$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = f_x(0, 0) \text{ 不是偏导数连续,}$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = f_y(0, 0) \text{ 才是}$$

多元初等函数，在有定义的区域内（非边界），只要偏导数存在，就一定可微（没啥用）

定义法证明可微：

$$\frac{\Delta z - z + \Delta x - z_0 dy}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0) \Delta x - f_y(x_0, y_0) \Delta y$$

$\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$

间接证明：

- $\left. \begin{array}{l} \text{不连续一定不可微} \\ \text{不可偏导一定不可微} \end{array} \right\}$
- 可偏导且偏导数连续，一定可微

eg1：已知全微分  $dz$  求  $z(x, y)$

已知  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ .

对  $x$  偏导，但要加常数  $\phi(y)$ . 得  $z(x, y)$

再求导，与  $\frac{\partial z}{\partial y}$  对，得  $\phi'(y)$ . 反推  $\phi(y)$

eg2：隐函数  $z = z(x, y)$  由方程  $F(x^2 + y^2 + z^2, xy - z^3) = 0$  确定，求全微分

法一： $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$  分别求  $x, y$  偏导

法二：全微分，整理出  $dz = \dots$



## (1) 复合函数求偏导

画变量关系图：

```

    graph LR
      Z --> U
      Z --> V
      U --> X
      U --> Y
      V --> Y
  
```

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

可记为  $f'_1, f'_2$

高阶复合偏导：注意  $f'_1, f''_{11}, \frac{\partial f}{\partial u}$  … 是  $u, v$  的函数！

$$f''_{11} \text{ 表示 } \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + f''_{12} \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}$$

(2) 一阶全微分的形式不变性： $dz = f_u du + f_v dv$  ( $u, v$  可为自变量/中间量)

$$eg: dz = \frac{\partial u}{\partial (x^2+y^2)} dx + \frac{\partial v}{\partial (e^{xy})} \cdot d(e^{xy})$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy$$

可以此求  $\frac{\partial z}{\partial x}$  [全微分法求复合偏导]



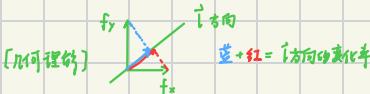
## (3) 高阶微分 (前提：n阶偏导数连续)

$$d^n f = (dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y})^n f \rightarrow \text{三元: } d^3 f = (dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} + dz \frac{\partial}{\partial z})^3 f$$

$$eg: d^3 f = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} dx^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} dx dy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} dy^3$$

#### ⑭ 方向导数 (任意方向射线上的变化率)

$$\text{单位向量 } \vec{e}_t = (\cos\alpha, \cos\beta) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta x = t \cos\alpha \\ \Delta y = t \cos\beta \end{array} \right. \quad t = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$



蓝+红=「方向导数变化率」

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t \cos\alpha, y_0 + t \cos\beta) - f(x_0, y_0)}{t} \quad (\text{前提: 可微})$$

(三元则)

$$= f_x(x_0, y_0) \cos\alpha + f_y(x_0, y_0) \cos\beta + f_z(x_0, y_0, z_0) \cos\gamma$$

偏导数存在  $\rightarrow$  方向导数存在

eg:  $x \rightarrow 0^-, x \rightarrow 0^+$  时 方向导数不同，则方向导数存在而偏导数不存在

- 当两方向相反时，两  $\frac{\partial f}{\partial t}$  互为相反数
- 与坐标轴(三维)夹角的方向:  $\cos\theta = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$

#### ⑮ 梯度 (是一个向量)

$\text{grad } f|_{P_0} = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0))$ , 该方向为使方向导数达到最大值的方向，其模为  $\frac{\partial f}{\partial t} \max$

(与此反向则有最小值，负梯度：减少最快)

$\frac{\partial f}{\partial t}$  可写作  $\text{grad}\cdot \vec{e}_t$

梯度运算法则:  $\pm \cdot \times \cdot \div \cdot$  链式复合

#### ⑯ 多元函数的微分中值定理

(拉格朗日中值公式)  $\Psi(1) - \Psi(0) = \Psi'(0)$

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y) \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y) \Delta y$$

若  $z = f(x, y)$  在  $D$  内满足  $\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ ，则  $f(x, y)$  在  $D$  内为一常数

⑰ 多元函数的泰勒公式:  $f(1) - f(0) = \frac{1}{1!} f'(0) + \frac{1}{2!} f''(0) + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta)$

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!} df(x_0, y_0) + \frac{1}{2!} d^2f(x_0, y_0) + \dots + \frac{1}{n!} d^n f(x_0, y_0) + \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y)$$

$d^{(n)}f$  即高阶微分，故要先求完所有偏导数

$\approx O(\rho^n), \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\text{eg: } f_x = \cos(\frac{\pi}{2}xy) \cdot ny \xrightarrow{(1,0)} 0$$

$$f_{xx} = \cos(\frac{\pi}{2}xy) \cdot \frac{\pi}{2}x^2 \xrightarrow{(1,0)} 0$$

$$f_{xy} = -\sin(\frac{\pi}{2}xy) \cdot (ny)^2 + \cos(\frac{\pi}{2}xy) \cdot ny \xrightarrow{(1,0)} -\pi$$

$$f_{yy} = -\sin(\frac{\pi}{2}xy) \cdot (nx)^2 + \cos(\frac{\pi}{2}xy) \cdot nx \xrightarrow{(1,0)} -\frac{\pi^2}{4}$$

$$f(1+\Delta x, ny) = f(1,0) + df(1,0) \frac{1}{2}d^2f(1,0) + O(\rho^3)$$

$$\begin{aligned} &= 1 + 0 + 0 + \frac{1}{2}(-\pi ny^2) - 2 \cdot \frac{\pi^2}{4} \cdot (ny)^2 - \frac{\pi^2}{4} \cdot (ny)^2 + O(\rho^3) \\ &\text{设 } x=1+\Delta x, y=ny \Rightarrow 1 + \frac{1}{2}(-\pi(nx)^2) - 2 \cdot \frac{\pi^2}{4} \cdot (nx)^2 - \frac{\pi^2}{4} \cdot (nx)^2 + O(\rho^3) \end{aligned}$$

多元函数泰勒公式的唯一性: 展开  $\rightarrow$  合并:  $O(x^2), O(y^2), O(xy)$  都算  $O(\rho^2)$

eg: 令  $x=1+\Delta x, y=1+\Delta y$  在  $(1,1)$  处展开至三阶

$$\begin{aligned} f(x-2, y-1) &= f(x, y) - 2f_x(x, y) + \frac{1}{2}f_{xx}(x, y) + 2f_y(x, y) - 2f_y(x, y) + \frac{1}{2}f_{yy}(x, y) + 2f_{xy}(x, y) \\ &= \dots \end{aligned}$$

$$= \dots - (x-1) - (y-1) - \dots$$



## (8) 隐函数存在定理

1° 一个方程 ( $F_y \neq 0$  时存在, 但我们都先求再判断存在性)

eg:  $x, y, z$  满足  $F(x, y, z) = 0 \Rightarrow$  可确定  $z = f(x, y)$

法一: 对方程两边求偏导

法二: (非抽象函数才适用) 全微分法 (二元函数推导用)

2° 方程组

雅可比行列式:

$$F(x, u, v), G(x, u, v) \text{ 关于 } u, v \text{ 的雅可比行列式为 } J = \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix} \quad \text{from 方程组} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{变量数目一致} \\ \text{一行及一个方程} \end{array} \right.$$

eg:  $\begin{cases} x^2 + y^2 - uv = 0 \\ xy + u^2 - v^2 = 0 \end{cases} \rightarrow$  确定  $\begin{vmatrix} u & v \\ x & y \end{vmatrix} \rightarrow$  对  $x, y$  分别求偏导再解方程  $\rightarrow \begin{cases} u = v \\ v = v \end{cases}$

商阶, 则要后对一阶结果求, 要么对一阶方程组求再解方程

## (9) 逆映射的存在性定理

当  $J = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \Big|_{(x_0, y_0)} \neq 0$  时, 有逆映射  $x(u, v), y(u, v)$

$J$  类比一元函数的导数:  $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \Big|_{(x_0, y_0)} = \frac{1}{\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \Big|_{(u_0, v_0)}}$



## (10) 二元函数的极值 (闭区域内)

极值点的必要条件 (稳定点):  $\begin{cases} f_x(x_0, y_0) = 0 \\ f_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$

极值点的充分条件: 稳定点 +  $B^2 < AC$   $\begin{cases} A > 0, \text{ 极小值} \\ A < 0, \text{ 极大值} \end{cases}$

$$A = f_{xx}(x_0, y_0), B = f_{xy}(x_0, y_0), C = f_{yy}(x_0, y_0)$$

判断极值  $\begin{cases} \text{稳定点} \\ \text{不可导} \end{cases}$



## (11) 二元函数极值 (闭区域)

法 1° 把所有极值与边界上的值 (最值) 做比较 eg:  边界  $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ x+y=6 \end{cases}$

法 2° 根据实际情况断言  $f(x, y)$  在  $D$  内必有最大 (小) 值. 而在  $D$  内只求出唯一极值点  $\rightarrow$  即为最值

若开区域 (如  $R$ ), 有时也需要算边界 ( $\partial R$ ) 来说明函数无最大 (小) 值



## ② 条件极值：拉格朗日乘数法

$Z = f(x, y)$  在约束条件  $\varphi(x, y) = 0$  下的极值 (本质是一元函数极值问题)

构造  $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y) + \lambda_2 \psi_2(x, \dots, x_m)$  (若有多个约束条件)

$$\begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = 0 \\ F_\lambda = 0 \end{cases} \quad \text{→ 寻找稳定点}$$

再判断稳定点是否为条件极值点：

由实际情况断言  $f(x, y)$  在  $D$  内必有最大(小)值。而在  $D$  内只求出唯一稳定点，则判别大小值点。

若有多个稳定点，直接比较函数值可知最大/小情况

问题翻译：求椭圆周  $5x^2 + 8xy + 5y^2 = 9$  的长短半轴  $\Rightarrow$  到原点距离最近/远的点

## ③ 曲面论

参数个数  
直曲线：1个  
直曲面：2个

曲面的表示  
显函数  
隐函数  
参数

$$Z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

$$x^2 + y^2 + Z^2 - R^2 = 0$$

$$x = R \sin \varphi \cos \theta$$

$$y = R \sin \varphi \sin \theta$$

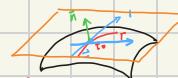
$$z = R \cos \varphi$$

(向量表示)

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

曲面处处有切平面要求  
参数： $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq \vec{0}$

法向量不为 0



$\vec{r}_u$  与  $\vec{r}_v$  不共线

$$\text{法向量 } \vec{n} = \text{grad } F(x_0, y_0, z_0) = (F_x, F_y, F_z)$$

隐函数  
切平面方程：点法式  $\vec{n} \cdot \vec{PP_0} = 0$

$$\text{法线方程：点向式: } \frac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \dots = \dots$$

(形式参数!)

曲面的切平面与法向量：

$$\text{显函数} \rightarrow \text{隐函数: } Z = f(x, y) \rightarrow f(x, y) - Z = 0, \vec{n} = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), -1)$$

$$\text{参数: } \vec{n} = \vec{s}_1 \times \vec{s}_2 \quad (2\text{个切向量}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{array} \right. \rightarrow \vec{r}_v = (x(v, y, z), y(v, y, z), z(v, y, z))$$

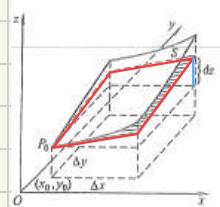
$$\left\{ \begin{array}{l} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{array} \right. \rightarrow \vec{r}_u = (x(u, y, z), y(u, y, z), z(u, y, z))$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{array} \right. \rightarrow \vec{r}_v = (x(v, y, z), y(v, y, z), z(v, y, z))$$

$$\text{切平面: } (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{或} \quad \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = 0$$

## ② 全微分的几何意义

当自变量  $x, y$  分别有增量  $\Delta x, \Delta y$  时, 函数的全微分就等于切平面上对应点坐标三的增量



## [专题复习]

先说“闭区间连续, 开区间可导”

例题存在根 ① 构造辅助函数 ② 选合适的区间	<div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div style="width: 45%;"> <p>介值定理 “不含导数”</p> <p>积分中值定理 </p> <p>罗尔定理 / 微分中值定理 </p> <p>柯西中值定理 <math>\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}</math></p> </div><div style="width: 45%;"> <p><math>\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a)</math> “积分区域的大小”</p> <p><math>f(a)=f(b) \rightarrow f'(\xi)=0</math> “含导数”</p> <p><math>f(b)-f(a) = f'(\xi)(b-a)</math></p> </div></div>
-------------------------------	--

难点构造:  $F(x)$  从最终证明存在根的方程中积分得到. 利用初值条件确定  $C$  格式注意:  $F(x)$  在... 连续可导

e.g1: 存在  $ξ ∈ (0, 1)$  使  $f(ξ) + f'(ξ) = e^{-1/ξ}$

$$f(x) + f'(x) = e^{-1/x}$$

$$e^x f(x) + e^x f'(x) - e = 0$$

$$(e^x f(x) - ex + C)' = 0 \quad \text{令 } F(x) = e^x f(x) - ex + C$$

$$\therefore f(0) = 0, f(1) = 1$$

$$F(0) = C, F(1) = C \rightarrow \text{取 } C = 0$$

e.g2:  $f''(x) + [f(x)f'(x)]^2 = 0$  至少有一根  $ξ ∈ (0, 1)$ .  $f(0) = f(1) = 0$

提示:  $F(0) = F(1) = 0 \Rightarrow$  乘  $f'(x)$

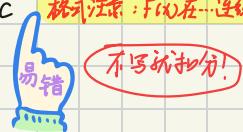
尝试法:  $f''(x)e^{f(x)} = -f'(x)e^{f(x)} + [f(x)]^2 e^{f(x)} \rightarrow$  缺  $f''(x)$

$$f''(x)e^{\frac{1}{2}f(x)} = f''(x)e^{\frac{1}{2}f(x)} + [f(x)]^2 e^{\frac{1}{2}f(x)} \cdot [f'(x)]^2 \quad \checkmark$$

推测法: 大方向确定为 “前导后乘 + 前不带导”

$$f''(x)e^{\frac{1}{2}f(x)} + [f(x)f'(x)]^2$$

$$[f(x)]' + f'(x)[f(x)f'(x)] \Rightarrow \text{某个函数倍数} \rightarrow e^{f(x)}$$



不写就扣分!

### 等价平均值

eg3:  $f(x)$  在  $[0,3]$  连续,  $(0,3)$  可导,  $f(1)+f(2)+f(3)=0$ ,  $f(0)=0$ .

证: (1)  $\exists \eta \in [1,3]$  使  $f(\eta)=0$

(2)  $\exists \xi \in (0,3)$  使  $f(\xi)+2f(\xi)=0$

(1) 介值定理:  $m \leq \frac{f(1)+f(2)+f(3)}{3} \leq M$

$$(2) F(x) = e^{\frac{x}{3}} f(x)$$

$$F(0)=0, \quad F(3)=0.$$

经验: ① 何时只给一个值?  $\rightarrow$  某点  $F(x)$  可由  $x$  决定从而与  $f(x)$  无关

$$\text{如: } F(0)=0$$

$$② \text{ 模板: } f'(x) + f(x) = 0 \rightarrow F(x) = e^x f(x)$$

$$f'(x) + 2f(x) = 0 \rightarrow F(x) = e^{2x} f(x)$$

$$f'(x) + xf(x) = 0 \rightarrow F(x) = e^{\frac{x^2}{2}} f(x)$$

和  $f(x)$  在一起  $\rightarrow e$  的指数做手柄

$$① f'(x) + g(x) f(x) = 0 \Rightarrow F(x) = e^{g(x)} f(x)$$

$$\text{甚至: } xf'(x) + 2f(x) = 0 \Rightarrow F(x) = x^2 f(x)$$

$$\text{也可转为 } f'(x) + \frac{2}{x} f(x) = 0 \Rightarrow F(x) = f(x) e^{\int \frac{2}{x} dx} = x^2 f(x)$$

孤立  $f(x)$

$$② f''(x)g(x) - f(x)g''(x) = 0 \Rightarrow F(x) = f(x)g(x) - f(x)g'(x) \Rightarrow H(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$\text{或 } \frac{f''(x)}{g''(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} \quad (\text{和柯西很像但不是!})$$

③ 分组思想: 不是两大块  $\rightarrow$  分成两小块

$$\text{eg: } f'(x) - \lambda(f(x)-x) = 1$$

$$f(x)-1 - \lambda(f(x)-x) = 0 \Rightarrow F(x) = e^{-\lambda x} [f(x)-x]$$

$$\text{eg: } f'(x)(b-x) = f(b) - f(a)$$

$$f'(x)(b-x) - [f(b) - f(a)] = 0 \Rightarrow F(x) = e^{\int \frac{1}{x-b} dx} [f(x) - f(a)]$$