

物理知識叢書

— by Iris

运动与力

2.1 牛顿运动定律

仅适用于惯性参考系

| | | |
|----------|----------|---------|
| 一 (惯性定律) | 二 $F=ma$ | 三 相互作用力 |
|----------|----------|---------|

2.2 常用的力

重力、弹力、摩擦力、流体曳力、表面张力。

$$F = \gamma l \quad (\text{泡泡有内外两层膜})$$

(l 为边界线长度)

半个肥皂泡合力

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{大气压强, 合力} \leftarrow F_{ext} = p_0 \pi R^2 \\ \text{泡内压强, 合力} \rightarrow F_{in} = p_{in} \pi R^2 \\ \text{另半泡泡表面张力} \Rightarrow F = ② \gamma \cdot 2\pi R \end{array} \right.$$


2.3 非惯性系与惯性力

旋转参考系中要补 2 个力

惯性离心力 (由于旋转) : $m\omega^2 r$
“坐车摇晃时甩出去”

科里奥利力 (不考)

动量和角动量

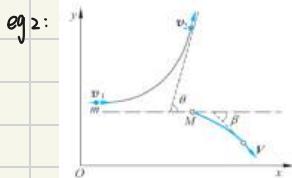
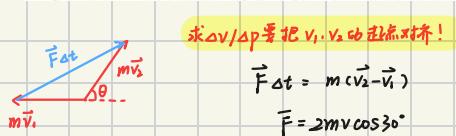
3.1 冲量与动量定理

平均冲力 $\bar{F}_{\Delta t} = \Delta p$

$$\vec{I} = \int_{t_0}^{t'} \vec{F} dt \quad \text{冲量矢量}$$

$$\vec{I} = \vec{p}' - \vec{p}_0 \quad (\text{动量定理})$$

eg1: 一个质量 $m=140 \text{ g}$ 的垒球以 $v=40 \text{ m/s}$ 的速率沿水平方向飞向击球手, 被击后它以相同速率沿 $\theta=60^\circ$ 的仰角飞出. 求垒球受棒的平均打击力. 设球和棒的接触时间 $\Delta t=1.2 \text{ ms}$.



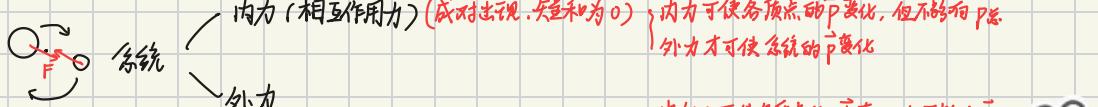
二维碰撞. 列分式成方程组

$$\begin{cases} mv_2 \cos \theta + M V \cos \beta = mv_1 \\ mv_2 \sin \theta - M V \sin \beta = 0 \end{cases}$$

质心参考系中, 系统动量差为0

$$v_c = 0$$

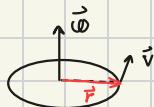
$$\downarrow$$
$$p_{x1} = mv_c = 0$$



质心 (的位矢) $\vec{r}_c = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m} = \frac{\int \vec{r} dm}{m}$

质心运动定理: $F_{G合} = m a_c$

角速度: $\vec{\omega}$



$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

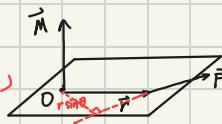


角动量: $\vec{L} \triangleq \vec{r} \times \vec{p}$ 对于 \vec{L} , 平行于 \vec{r} 垂直的部分 (若 $\vec{v} \parallel \vec{r}$, 则角速度不变)

大小: $|L| = m r \sin\theta v$
方向: 同 $\vec{\omega}$

\vec{r} 取决于固定点的选择 $\Rightarrow \vec{L}$ 是相对于某个固定点的 (\vec{r} 的原点.)

力矩: $\vec{M} \triangleq \vec{r} \times \vec{F}$ 大小: $r \sin\theta F$
(r 只看与 F 垂直的部分)
方向: 同 $\vec{\omega}$ 同 \vec{r}



动量定理: $Fdt = dp \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$

$$\left| \begin{array}{l} \vec{F} = 0 \\ \vec{p} \text{ 不变} \end{array} \right. \quad (\vec{F}_1 + \vec{f})dt = d\vec{p}_1 \rightarrow (\vec{F}_1 + \vec{F}_2)dt = d(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) \quad \text{在一个系统中, 内力被抵消}$$

$$(\vec{F}_2 + \vec{f}')dt = d\vec{p}_2$$

动量守恒定律 (eg: 碰撞, 爆炸) **非应用分量式** **适用于惯性系 (from牛顿定律)**

孤立系统: 不受外力作用 (外力矢量和 = 0) \Rightarrow 总动量守恒

角动量定理: $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

质点系中

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

$$\left| \begin{array}{l} \vec{M} = 0, \vec{L} \text{ 不变} \\ \vec{F} = 0 \\ \vec{F} \neq 0 \text{ 而 } \vec{F} \parallel \vec{r} \end{array} \right.$$

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \vec{r}_i \times (\vec{F}_i + \sum_{j \neq i} \vec{f}_{ij})$$

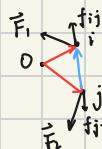
累加 $\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_i \vec{r}_i \times \sum_{j \neq i} \vec{f}_{ij} = \vec{M} + \vec{M}_{in}$

角动量守恒定律 (对于某一固定点.)

$$L = mr\nu \sin\theta = mr \frac{dr}{dt} \sin\theta$$

$$\Delta S \approx \frac{1}{2} r dr \sin\alpha$$

$$\frac{dS}{dt} = \text{const}$$



$$\begin{aligned} \text{对于 } i, j \text{ 两质点: } M_{i,in} + M_{j,in} &= \vec{r}_i \times \vec{f}_{ij} - \vec{r}_j \times \vec{f}_{ij} \\ &= (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{f}_{ij} \\ &= 0 \end{aligned}$$

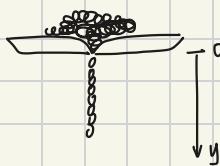
在一个系统中, 内力矩被抵消

质心系中 $\Rightarrow \vec{L} = \vec{r}_c \times \vec{p}_c + L_c$
 (对地的) (质心的) (质心转动的)

链条问题

(其实不会考这么难...)

① 支持下落型



求(1) y 与 v 的关系

(2) 采面对 链条的最大支持力

(3) 垂直部分链条加速度

(2)



(1) (3)

$$\lambda y g \cdot dt = d(\lambda y \cdot v)$$

$$y g dt = d(y v)$$

不考求 $\frac{d(yv)}{dt}$
因为有 F_N , a
不考求 F_N

$$y g \frac{dy}{dt} dt = dy \frac{dv}{dt}$$

$$y^2 g dy = y v dv$$

$$\text{积分: } g - \frac{1}{3} y^3 = \frac{1}{2} v^2$$

$$\therefore v = \sqrt{\frac{2g}{3} y}$$

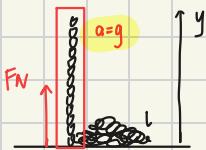
对t求导

$$a = \frac{dv}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{3}} \frac{1}{2} \frac{1}{y} \cdot v = \sqrt{\frac{2g}{3}} \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{y} \sqrt{\frac{2g}{3}} \frac{1}{y} = \frac{g}{3}$$

$$y_{\min} = 0$$

② 自由下落型

求下落长度为 l 时，对地面的作用力



(初状态时下端刚好接触地面)

这段选取“还未接触地面”的链条，故无 F_N

对整根链条：

$$F_N - mg = \frac{d(\frac{m}{2} \cdot y^2)}{dt}$$

$$F_N - mg = \frac{m}{2} (v^2 - yg)$$

$$a = g \text{ 自由落体} \Rightarrow v^2 = 2yl$$

特色：有“ F ”不能积分。

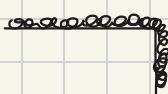
且要用到运动学关系式 ($t=0, 2al=v^2$)

$$= \frac{m}{2} [2gl - (L - ly)g]$$

$$= \frac{m}{2} [3gl - gL]$$

$$\therefore F_N = 3mg \frac{l}{2}$$

③ 普通类：



用能量即可

① 不要用能量视角 (机械能守恒, 动能定理)
而应用 $F = \frac{dmv^2}{dt}$

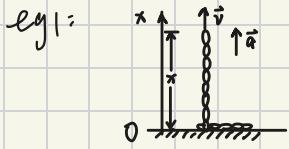
② 要对整根链条分析, 而不是下落的那一部分
整根链条的合外力就等于下落部分的重力

(链条接头拉力、采面支持力都用考虑, 3)

③ 求出 y 与 v 的关系后, 其他 (a, F, ...)
就容易求了

特色: $F = \frac{dp}{dt}$ 里全微分, 最后算功法微分

类②示例：



一长为 l , 密度均匀的柔软链条, 其单位长度的质量为 λ , 将其卷成一堆放在地面上, 如图所示。若用手握住链条的一端, 以加速度 a 从静止匀加速上提。当链条端点离地面的高度为 x 时, 求手提力的大小。

$$F - \lambda x g = \frac{d(\lambda x v)}{dt} \quad 2ax = v^2$$

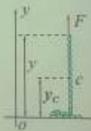
$$\begin{aligned} F &= \frac{\lambda \cdot v^2 + \lambda x (a + g)}{l} \\ &= \lambda x (2ax) + \lambda \\ &= \lambda (3ax + g) \end{aligned}$$

eg2:

例3 一长为 l , 密度均匀的柔软链条, 其单位长度的质量为 λ , 将其卷成一堆放在地面上。如图所示。若用手握住链条的一端, 以速度 v 从静止匀速上提。当链条端点离地面的高度为 y 时, 求手提力的大小。(与讲义 p.17 例题类似)

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(\lambda y \vec{v} + \lambda y \vec{g})}{dt}$$

$$= \lambda v^2$$



功和能

4.1 功

$$d\vec{A} = \vec{F} \cdot d\vec{r} \cdot \cos\varphi$$

题型：给 $F(x,y)$ 求做功 (easy)

4.2 动能定理

$$A_{\text{外}} + A_{\text{内}} = \Delta E_K$$

柯尼希定理： $E_K = E_{K0} + A_{\text{内},in}$ 完全非弹性碰撞全损失

相对惯性系的总动能 = 质心动能 + 内动能 (质点系相对于质心系的总动能)

4.3 势能 (仅保守力)

重力势能 $E_p = mgh$ 属于物体和地球； E_p 的值 与参考系无关
与势能零点选取有关

$$\text{弹簧弹性势能 } E_p = \frac{1}{2}kx^2$$

系统势能 与参考系无关

4.4 引力势能

$$\text{引力势能 } E_p = -\frac{Gm_1m_2}{r} \quad (E_p = \int_a^{\infty} \vec{F}_c \cdot d\vec{r}, a \text{ 点势能即把它搬到零点所做的功})$$

4.5 由势能求保守力

$$F_i = -\frac{dE_p}{dr} \Rightarrow F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}, F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y}, F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}$$

4.6 功能原理和机械能守恒定律

功能原理： $A_{\text{外}} + A_{\text{内非保}} = \Delta E_{\text{机}}$ (与动能定理对比知： $A_{\text{内保}} = -\Delta E_p$)
 $A_{\text{外}} + A_{\text{内}} = \Delta E_K$

保守系统：无内非保守， $A_{\text{内非保}} = 0$ ，有 $A_{\text{外}} = \Delta E_{\text{机}}$ (高中)

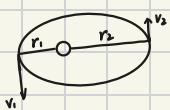
质心系：保守系统中， $A'_{\text{外}} = \Delta E_{K,in} + \Delta E_p = \Delta E_{in}$ “内能”
相对于质心系 (势能在质心系中表达式不变！)

封闭系统 $A_{\text{外}} = 0$;

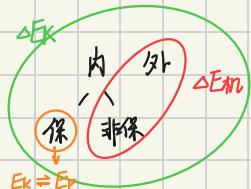
封闭的保守系统 $\Delta E = 0$ (机械能守恒定律)

典题·天体运动

有 r_1, r_2 , 可求 v_1, v_2



$$\begin{cases} \text{动量守恒} : v_1 r_1 = v_2 r_2 \\ \text{机械能守恒} : \frac{1}{2}m(v_1^2 - \frac{GMm}{r_1}) = \frac{1}{2}m(v_2^2 - \frac{GMm}{r_2}) \end{cases}$$



4.7 碰撞

完全非弹性： $v_{共} = v_c = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$

$$\Delta E_{\text{损}} = \Delta E_{k,\text{in}} = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2$$

一动一静碰撞： $\begin{cases} v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \\ v'_2 = -\frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \end{cases}$

二维碰撞 $\begin{cases} p \text{ 守恒} : m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2 \\ E_k \text{ 守恒} : m_1 \vec{v}_1^2 + m_2 \vec{v}_2^2 = m_1 \vec{v}'_1^2 + m_2 \vec{v}'_2^2 \end{cases}$

4.10 ~ 4.11 流体

稳定的连续性方程： $S_1 v_1 = S_2 v_2$



伯努利方程： $p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g h_2$



(针对同一体积段的水)

刚体的转动

5.1 描述



$$\begin{cases} \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \\ \alpha_z = r\dot{\omega} \\ a_n = \omega^2 r = \frac{v^2}{r} = \omega r \\ \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\alpha} \times \vec{r} - \omega^2 \vec{r} \\ = \vec{\alpha}_z + \vec{a}_n \end{cases}$$

注意 方向同面

| | |
|-------|--|
| 匀加速转动 | $\omega = \omega_0 + \alpha t$ |
| | $\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$ |
| | $\omega^2 - \omega_0^2 = 2 \alpha \theta$ |

5.2 ~ 5.3 刚体定轴转动定律: $\begin{cases} \vec{M} = J \cdot \vec{\alpha} \\ \vec{L} = J \cdot \vec{\omega} \end{cases}$



M, L, J, r 都相对于一个固定转轴 \Rightarrow M, L, r 本质是“对点”定义的，但也可用对轴的定义（沿轴分量 / 到轴距离）

推广至质心系（不论质心的轴运动状态如何）: $M_c = J_c \alpha$

转动惯量: $J = \int r^2 dm$ (质量分布离轴越远, J越大)



圆环/薄壁圆筒: $J = mR^2$

平行轴定理 (质心轴): $J = J_c + md^2$

圆盘/实心圆柱: $J = \frac{1}{2}mR^2$

垂直轴定理: $J_{\perp} = \int r^2 dm = \int (x_i^2 + z_i^2) dm = J_y + J_z$

细杆对中点轴: $J = \frac{1}{12}mL^2$



细杆对端点轴: $J = \frac{1}{3}mL^2$

薄球壳: $J = \frac{2}{3}mR^2$

椭体: $J = \frac{2}{5}mR^2$

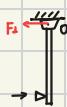
5.5 角动量守恒

$$M_{\Sigma} = \frac{dL_{\Sigma}}{dt} = 0 \quad (\text{对固定轴 / 过质心的轴})$$

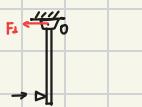
(动量守恒: 外力为零; 机械能守恒: $W_{非保}=0$)

分析:

(系统包括: 斜、球、地)



水平 P 守恒
(对 O 点) L 守恒



水平 P 不守恒 (F_z)
(对 O 点) L 守恒



对 O 点 / 对 O' 点: L 守恒
对 O 点: L 不守恒

即作原点 (F_z)

5.6 转动能量分析



$$\text{刚体 } E_k = \frac{1}{2} J_c \omega^2 + \frac{1}{2} m v_c^2 \quad \text{eg: 抛出的旋转篮球} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{质心自由平动} \\ \text{绕质心轴转动} \end{array} \right.$$

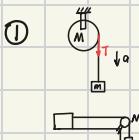
$$= \frac{1}{2} J_o \omega^2 \quad \text{eg: 滚动圆柱运动 (当然包括质心)} \\ \text{绕非质心轴转动动能}$$

(推导: $\frac{1}{2} m v_c^2$ 被舍弃成 $J_o \omega^2 + m v_c^2$)

$$\text{刚体 } E_p = \left\{ \begin{array}{l} mgh_c \quad (\text{刚体不太大时, 等效为集中于质心}) \\ \sum -\frac{GMm}{r_i} \quad (\text{太大规模}) \end{array} \right.$$

做功: $W = \int M d\theta$

题目:



$$TR = \frac{1}{2} MR^2 \cdot \alpha$$

$$\Leftrightarrow T = \frac{1}{2} M \alpha$$

定滑轮等效质量: $\frac{1}{2} M$



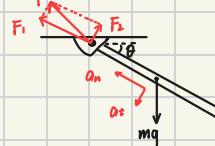
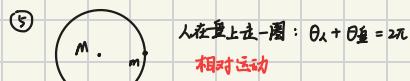
② 已知初状态与受力, 必能求末状态.

$$mg \cdot \frac{1}{2} \cos \theta = \frac{1}{2} mL^2 \cdot \alpha, \text{ 求角速度时的 } \alpha$$

$$3g \cos \theta = 2L \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta} \text{ 两边移项, 积分}$$

③ 求重力的M, 相当于重力集中于质心

④ 轴对棒的力



$$\begin{cases} m a_n = F_1 - mg \sin \theta = m \omega^2 L \\ m a_z = mg \cos \theta - F_2 = m R \alpha \end{cases}$$

⑥ 纯滚动 (主动轮)



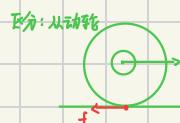
法①

$$\begin{cases} \text{运动学: } V_c = \frac{ds}{dt} = R \cdot \omega \\ \alpha_c = R \alpha \end{cases}$$

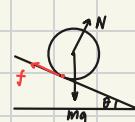
静摩擦力方向的: 自由平动 / 速度 / 动力学

可求 $a_c, \alpha \rightarrow$ 并 V_c, ω

$$\begin{cases} F + f = mac \\ Fr - fR = \frac{1}{2} m R^2 \alpha \end{cases}$$



eg:



eg:

法② 能量: $mgh = \frac{1}{2} J(\omega^2) + \frac{1}{2} m v_c^2$
(f不做功)

振动

6.1 描述



$$\begin{cases} x = A \cos(\omega t + \varphi) \rightarrow \omega t + \varphi \text{ 为相位(相)} \\ \theta = \theta_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad (\text{注意角位移 } \theta \neq \text{相 } \omega t + \varphi, \text{ 角振幅 } \theta_0 \neq \text{初相 } \varphi) \end{cases}$$

ω (常写为 ω) 角频率, 与角速度 $\dot{\theta}$ 不同
 与频率 v 也不同 ($\omega = 2\pi v$)

简谐运动 = 匀速圆周运动在 x 轴上的投影



三个特征量: A, ω, φ

相差 $|\Delta\varphi| < \pi$ | 同相: $\Delta\varphi = 0$
 反相: $\Delta\varphi = \pi$

6.2 动力学

(定义: 固有角频率) $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$. $a = -\omega^2 x$ (代入 $kx = ma$ 得出公式)

已知 x_0, v_0, k, m , 求特征量: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

方法: $\frac{1}{2} k x_0^2 + \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} k A^2 + \frac{1}{2} m A^2 \omega^2$ ↗
 $\omega = \sqrt{\frac{v_0^2}{m x_0} + \frac{x_0^2}{m^2}}$ ↗ 用 $\begin{cases} x_0 = A \cos \varphi \\ v_0 = -A \omega \sin \varphi \end{cases}$
 $\varphi = \arctan(-\frac{v_0}{\omega x_0})$
 ↗ 有2解, 需根据 ω 正负做取舍



单摆:



$F_{\text{合}} = F_T - mg \sin \theta \quad (\theta \gg 0)$

动力学方程: $F = -mg \theta, T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$

质点在稳定平衡位置附近做小振动 \Rightarrow 简谐运动

特点 $\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F = -\left(\frac{dE_p}{dx}\right)_{x=0} = 0 \\ \left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x=0} = K > 0 \end{array} \right.$



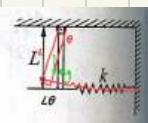
等效参数法求 W/T

做法：写动力学方程，对比得 k_{eff} , M_{eff}

(优先用角动量定理)

eg1:

1. 一个质量为 M 、长为 L 的均匀细杆，上端挂在无摩擦的水平轴上，杆端用一个弹簧连在墙上，如图 5 所示。弹簧的劲度系数为 k 。当杆竖直静止时弹簧处于水平原长状态，求杆做微小振动的周期(杆绕过一端点且垂直杆的轴的转动惯量为 $ML^2/3$)。



$$\text{角动量定理: } mg \frac{L}{2} \sin\theta + kL\theta = -\frac{1}{3}ML^2 \cdot \alpha$$

$$\Rightarrow L(\frac{mgL}{2} + kL) \theta = -\frac{1}{3}ML^2 \cdot \alpha$$

$$k\theta = -M\alpha$$

$$\therefore k_{eff} = \frac{mg}{L^2} + k$$

$$M_{eff} = \frac{1}{3}ML^2$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{k_{eff}}{M_{eff}}} = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{mg}{L^2} + k}{\frac{1}{3}ML^2}}$$

参数对比，标准统一，
要么 $k\theta = -ma$ (列牛二)
要么 $k\theta = -M\alpha$ (列 $M=Ja$)

eg2:



求系统的固有频率 (微幅摆动)

角动量定理：

$$mg \cdot \frac{L}{2} \sin\theta + mg \cdot l \sin\theta = (\frac{1}{3}ml^2) \cdot \dot{\theta} + (l^2 \alpha)$$

$$\sin\theta \approx \theta$$

$$(\frac{1}{3}ml^2) \cdot g \cdot \theta = (\frac{1}{3}ml^2) \cdot l^2 \cdot \ddot{\theta}$$

$$-k\theta = ma$$

$$\omega = \sqrt{\frac{\frac{1}{3}m + m}{\frac{1}{3}ml^2}} \cdot g$$

$$\sqrt{\frac{3(m+3m)}{2m+3m}} \cdot g$$

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2, E_p = \frac{1}{2}kx^2$$

$$\text{动能: } \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}m(l\frac{d\theta}{dt})^2 + \frac{1}{2}\cdot \frac{1}{3}ml^2(\frac{d\theta}{dt})^2 \\ = \frac{1}{2}(m+\frac{m}{3})l^2 \cdot (\frac{d\theta}{dt})^2$$

势能

$$\text{势能: } mg(l(1-\cos\theta)) + mg \cdot \frac{1}{2}l(1-\cos\theta)$$

势能变化: $\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}$ 势能展开

$$= \frac{1}{2}mg(l^2 + \frac{1}{2}\theta^2)$$

$$= \frac{1}{2}(m+\frac{m}{3})g(l^2) \Rightarrow k_{eff} = (m+\frac{m}{3})gl$$

其他补充题目：

1. 圆锥摆 (小角度) 也算简谐运动 (就选单摆了)

2. 写动力学方程: $m \frac{d^2\theta}{dt^2} = -k\theta$

3. 考虑弹簧质量:

[定性] 惯性 \uparrow \rightarrow 周期 \uparrow

[定量] $E_{k\text{弹簧}} = \frac{1}{2}dm \cdot v_i^2$ (对一段质量为 dm 、长度为 l 的弹簧元)

$$= \frac{1}{2}dm \cdot (\frac{l}{L}v)^2$$

$$= \frac{1}{2}m'v^2$$

(新方法) 求系统 W': $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{Const}$

对方求导: $mv \frac{dv}{dx} \frac{dt}{dx} = ma = -kx$

4.

* 5.13 在水平光滑桌面上用轻弹簧连接两个质量都是 0.05 kg 的小球(图 6.23)，弹簧的劲度系数为 1×10^3 N/m。今沿弹簧轴线向相反方向拉开两球然后释放，求此后两球振动的频率。

Ⓐ Ⓑ

对一个球而言，其位移及弹簧伸长量的一半

不足角频率！

Ⓐ Ⓑ

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -k(2x)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$v = \frac{\omega x}{2}$$



N 与位移有关：简谐运动

$$F = f_1 - f_2 = -kxmg \frac{\frac{1}{2}+x}{L} + kxmg \frac{\frac{1}{2}-x}{L}$$

6. 改变 $g \rightarrow$ 等效重力场

7. 注意 v 的方向正负号

6.3 能量

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2} kA^2$$

$$\begin{cases} E_p = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi) \\ E_k = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi) \end{cases} \Rightarrow \boxed{E_p = E_k = \frac{1}{2} E = \frac{1}{4} kA^2}$$


6.4 阻尼振动

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad 2\beta = \frac{\gamma}{m} \quad (\gamma = -\gamma v)$$

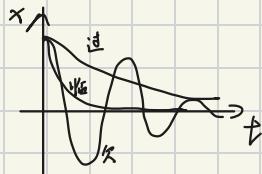
ω_0 为固有角频率 β 为阻尼系数

E 成为 $\frac{1}{2}E$, 所经时间 $T = \frac{1}{2\beta}$ 为时间常量 / 周期 (实际上在响/振动的时间)

品质因数 $Q = 2\pi \frac{2}{T} = \omega T$ (周期次数的 2π 倍) (Q 越大，振动衰减越慢)

无阻尼 ($\beta < \omega_0$) 时, $x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0)$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$



过阻尼, $\beta > \omega_0$.

临界阻尼 ($\beta = \omega_0$) \Rightarrow 快速回到平衡位置



6.5 复阻振幅:

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t + \varphi_0) + A \cos(\omega t + \varphi) \quad (\omega \text{ 为驱动力的角频率})$$

减幅振动 + 等幅振动

取 $\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ 时, A 达到最大 (位移共振) (ω_r 小于 ω_0)

取 $\omega_r = \omega_0$ 时, 速度最大 (速度共振)

6.6~6.7 合成



④ 同 φ 不同 \Rightarrow 相量图求合振动



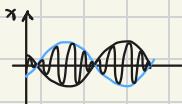
A (余弦正弦), A介于 A_1+A_2 与 $|A_1-A_2|$ 之间

$$\tan \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2} \quad (\text{等幅方法})$$

$$\text{⑤ 不同 } \varphi \text{ 同} \Rightarrow x_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \quad x_2 = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$x = x_1 + x_2 = 2A \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \cos \left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t + \varphi \right)$$

当 $\omega_2 - \omega_1 \ll \omega_2 + \omega_1$ 时, 近似视为: 振幅为 $|2A \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t|$, 角频率为 $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ 的振动



合振动 周期简谐 \Rightarrow 拍

拍频为两个分振动频率之差 $v = v_2 - v_1$



用于: 测频率

6.8 谱振分析 (把一个复杂振动分解为各简谐运动之和) (不考)

周期性振动 (分立的纯状谱): 最低的频率 (即合振动频率) 为基频
其余分振动频率为基频的整数倍 (谐频)
非周期振动 (连续谱)

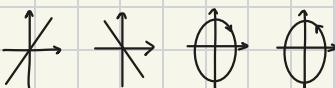
6.9 垂直合成 (不考)

李萨如图: 在 x, y 方向上做简谐运动的合成轨迹

两分运动频率有简单整数比时 \Rightarrow 封闭的稳定的运动轨迹

$\omega_x = \omega_y$ 时, 轨迹

固相差而不同



波动

7.1 分类

① 行波
驻波

② 质元运动方向 & 振动传播方向
横波
纵波

③ 波形
简谐波
衰减波

(脉冲波：只有一次振动的传播)

7.2 简谐波

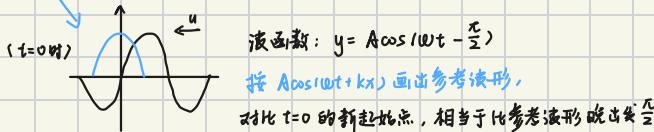


波函数: $y = A \cos(\omega(t - \frac{x}{u})) = A \cos(\omega t - kx)$
以 $y_0=0$ 处为原点, $= A \cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x)$

若向左传播 $y = A \cos(\omega(t + \frac{x}{u}))$

波速/相速度: $u \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda = uT \\ u = \lambda v \end{array} \right. \quad \text{波速} = \text{波长} \times \text{频率}$

波数: $k = \frac{2\pi}{\lambda}$



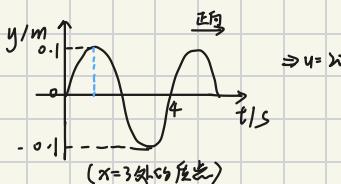
振动速度 $v = \frac{\partial y}{\partial t}$

平面简谐波: 同相面(波面)为平面

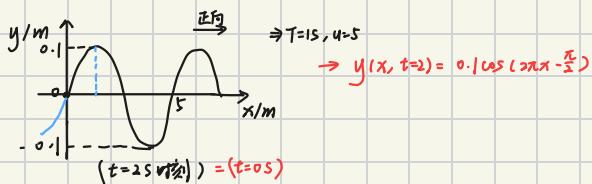
波线: 波传播方向

eg: 求下列振动方程

[总结] $y(x=3, t)$ 可以直接推 $y(x, t)$, 但 $y(x, t=2)$ 不含时间演化, 不能直接推出 $y(x, t)$, 还得先 $\rightarrow y(x=0, t) \rightarrow y(x, t)$



解: $y(x=3, t) = 0.1 \cos\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{2}\right)$
 $y(x, t) = 0.1 \cos\left[\frac{\pi}{2}\left(t - \frac{x-3}{20}\right) - \frac{\pi}{2}\right]$



解: $t=2$ 时, $x=0$ 处位置: 平衡位置. 即将向下振动
 $y(x=0, t) = 0.1 \cos(\pi t + \frac{\pi}{2})$
 $y(x, t) = 0.1 \cos\left[2\pi\left(t - \frac{x-5}{5}\right) + \frac{\pi}{2}\right]$

7.3 弹性形变 (WT/式不用背)

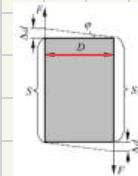
线变 (胡克定律): $\frac{F}{S} = E \frac{\Delta l}{l}$, 单位体积内的弹性势能 $W_p = \frac{1}{2} E (\frac{\Delta l}{l})^2$

eg: 纵波 $\frac{F}{S}$ 为应力, $\frac{\Delta l}{l}$ 为线应变, E 为杨氏模量, $k = \frac{ES}{l}$ 为劲度(系数)

剪切形变: 侧面受到与侧面平行、大小相等方向相反的力

eg: 横波 $\frac{F}{S} = G\varphi = G \frac{\Delta d}{D}$, 单位体积内的弹性势能 $W_p = \frac{1}{2} G\varphi^2 = \frac{1}{2} G (\frac{\Delta d}{D})^2$

$\frac{F}{S}$ 为剪应力, $\varphi = \frac{\Delta d}{D}$ 为剪应变, G 为剪切模量



体变: 周围压强改变 → 体积改变

$\Delta p = -K \frac{\Delta V}{V}$, 单位体积内的弹性势能 $W_p = \frac{1}{2} K (\frac{\Delta V}{V})^2$

K 为体弹模量, 压缩率 $k = \frac{1}{K}$

7.4 弹性介质内的波速 (不用背公式)

$$\text{横波: } u = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad \text{纵波: } u = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

$$G < E \Rightarrow u_{\text{横}} < u_{\text{纵}}$$

$$\text{细绳横波: } u = \sqrt{\frac{F}{\rho L}} \quad \text{液体/气体纵波: } u = \sqrt{\frac{F}{\rho}} \quad \text{声波(纵波) } u = \sqrt{\frac{Yp}{\rho}} = \sqrt{\frac{YRT}{M}} \quad (Y \text{为常量})$$

$\left(\frac{G \cdot S}{R \cdot S}\right)$

7.5 能量 (这些公式很好推, 不用背)

在平面简谐波中, 每一质元的 $E_k = E_p$ (同相) = $\frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - \frac{x}{u}) = \frac{1}{2} E_{\text{机}}$

(平衡位置 $E_{\text{kin max}}, E_{\text{kin min}}, E_{\text{pot max}}, E_{\text{pot min}}$)
(波峰/波谷 $E_{\text{kin min}}, E_{\text{kin max}}, E_{\text{pot max}}, E_{\text{pot min}}$)

① 能量密度 (单位体积)

$$w = \rho \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t - \frac{x}{u})$$

$$> \frac{E}{AV}$$

② 平均能量密度 (一个周期内)

$$\bar{w} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2$$

③ 通过面积S的能量流 (单位时间内)

$$P = wuS = \rho \omega^2 A^2 S \sin^2(\omega t - \frac{x}{u})$$

"能流" $\rightarrow \frac{E}{At}$ | 能流是瞬时功率
"能流密度" $\rightarrow \frac{E}{At \cdot S}$ (能流密度才是 $\frac{E}{V}$)
↓ 平均值

④ 波的强度 (通过垂直于波的方向的单位面积的能量流的时间平均值)

$$I = \frac{P}{S} = \bar{w}u = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 u$$

以此研究球面波振幅:

能量守恒: 1T内有: $I_1 S_1 T = I_2 S_2 T$

$$\frac{1}{2} \rho \omega^2 A_1^2 u_1 \cdot 4\pi r_1^2 T = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A_2^2 u_2 \cdot 4\pi r_2^2 T$$

$$A_1 r_1 = A_2 r_2$$

$$\text{球面波波函数: } y = \frac{A_1}{r} \cos(\omega(t - \frac{r}{u})) \quad (\text{取 } A_1 \text{ 为距波源单位长度的振幅})$$

7.6 惠更斯原理

波阵面上的各点可视为波源 (找包迹)

借此可证: 反射、折射、衍射

$$\text{折射: } \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{u_1}{u_2} = n_2 \quad (n_1 \sin i = n_2 \sin r) \quad (u = \frac{c}{n})$$

全反射: 从光密到光疏

$$\text{临界角 } \sin A = \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}$$

7.7 驻波

波的叠加原理：在波弦较小时才成立

[易错] 算量加特殊位置时，相差要带绝对值（左减右/右减左）

驻波：eg：一列波遇到界面上与其反射波叠加形成驻波

$$\textcircled{1} \quad y_1 = A \cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x)$$

$$\rightarrow y = y_1 + y_2 = 2A \cos \frac{2\pi}{\lambda} x \cos \omega t \quad (\text{非行波, 不传播振动状态/能量})$$

A振幅加倍相同！

$$y_2 = A \cos(\omega t + \frac{2\pi}{\lambda} x)$$

振幅

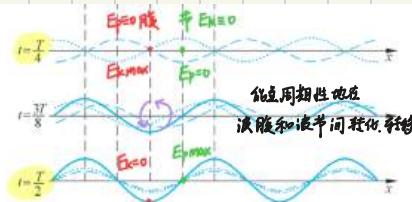
因为驻波振幅大半相等，方向相反，抵消

波腹：振幅最大点 $|\cos \frac{2\pi}{\lambda} x| = 1 \rightarrow x = k \frac{\lambda}{2}$

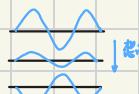
波节：振幅为零 $x = (2k+1) \cdot \frac{\lambda}{4}$

相邻的两个波节间距为 $\frac{\lambda}{2}$
(或波长)

| 波腹处质元始终无势能 (大半个同相, 无形变)
| 波节处质元始终无动能



③ “一段”即相邻两波节间的区域



同一段上振动同相 (仅振幅不同)
相邻段上振动反相

④ 绳两端固定, 为波节 \rightarrow 故形成驻波要求振幅能使绳长 $L = n \cdot \frac{\lambda}{2}$ (半波长整数倍)



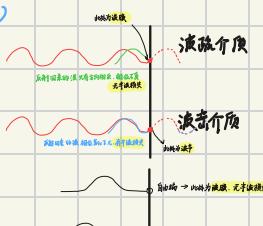
基频 二次谐频 \Rightarrow 本征频率 $v_n = n \frac{u}{2L}$ ($u = \sqrt{\rho E}$) $\Rightarrow v_n$ 为驻波系统的固有频率 (多个)

最低频率 ($n=1$) 为基频 $v_1 = \frac{u}{2L}$, $v_2, v_3 \dots$ 为二次、三次...谐频

(基频决定音调, 谐频与强度决定音色)



从 ρu 小 (波疏介质) \rightarrow ρu 大, 有半波损失
(介质张紧x速度)



eg: 已知入射波波函数 $y_1 = A \cos(2\pi vt - \frac{2\pi v}{\lambda} x - \frac{\pi}{2})$
求反射波波函数; 指出波节位置



疏-密, π 的相位改变

$$y_2 = A \cos[2\pi vt - \frac{2\pi v}{\lambda} \cdot \frac{3\lambda}{4} - \frac{\pi}{2} - \pi - \frac{2\pi v}{\lambda} \cdot (\frac{3}{4}\lambda - x)]$$

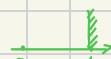
以P为新原点,
前时差计算

P点一定为波节 \Rightarrow 两波节相距 $\frac{\lambda}{2}$, 在 $x = \frac{\lambda}{4}$ 处

eg: 已知入射波方程 $y_1 = A \cos(\omega t + \frac{2\pi x}{\lambda})$ 在 $x=L$ 处反射, 反射端为固定端 ($y_2=0$) /自由端, 求驻波方程

$$y_2 = A \cos[\omega t + \frac{2\pi L}{\lambda} - (\omega t + \frac{2\pi x}{\lambda}) + \pi] = 0$$

$$\therefore y = y_1 + y_2 = 2A \cos \frac{\omega t + \pi}{2} \cos \frac{\omega t - \omega t + \pi}{2}$$



7.8 声波 (不用背)

$$\text{声级 } L = 10 \lg \frac{I}{I_0} (\text{dB})$$

(I 为声强, 即强度) $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$

[注意] 2个波刚相叠加后: $A \rightarrow 2A$, $I \geq 4I$

7.11 多普勒效应



频率公式 $v_R = \frac{v \pm v_R}{v \pm v_s} v_s$ (源动, 分离; 人动, 分子要) (加速度远离/靠近)

(v_R 与 v_s 是相对于空气的速度, 不必用相对于彼此的)
/地面

e.g1: 铜笛(左动)后方空气中声波的频率 ≠ 后方追赶的人接收到的频率
相当于一个静止的人

(远) 后方空气 $\downarrow \uparrow \times$ $v_R = u$ 有风时, 相当于介质运动 \rightarrow 换算

(远) 前方空气 $\uparrow \downarrow \times$

(光: c 不变) 波速 $u = u_{\text{在静止介质中}} + u_{\text{风}}$

$\sqrt{\frac{G}{\rho}}, \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \sqrt{\frac{RT}{M}}$... 不变

e.g2: 有风无风对 v_R 的影响 $\Rightarrow v_R = \frac{u \pm v_R}{u \pm v_s} \cdot v_s = \frac{\vec{u} - \vec{v}_R}{\vec{u} - \vec{v}_s} \cdot v_s$

有风 $\Rightarrow u$ 会改变

当 R 与 S 都静止时, $v_R = \frac{u'}{u'} \cdot v_s = v_s$ 仍不变

e.g3: 发射 100kHz 的超声波测车速, 车反射回来的声波频率为 110 kHz, 求车速

$$v_{\text{车接}} = \frac{u + v_{\text{车}}}{u} v_0$$

$$v_{\text{车反}} = \frac{u}{u - v_{\text{车}}} v_{\text{车接}} \rightarrow v_{\text{车反}} = \frac{u + v_{\text{车}}}{u - v_{\text{车}}} \cdot v_0$$

相对论

(不考公式, 25.24都考了概念)

(25考了2个基本假设, 这什么)

洛伦兹变换 (不同参考系下同一物体的坐标)

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad y' = y \quad z' = z \quad t = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

洛伦兹因子 (< 1) $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} > 1$

速度变换式: 在自己(u)系内看他者的速度

$$v_x' = \frac{v_x - u}{1 - \frac{u v_x}{c^2}}$$

$$u_x' = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u v_x}{c^2}} = \frac{-0.9c - 0.9c}{1 - \frac{0.9c \cdot (-0.9c)}{c^2}} = -\frac{1.8}{1.81} c$$

时间延缓: $\Delta t \times \gamma$

长度收缩: $L \div \gamma$

质量膨胀: $m \times \gamma$

相对论能量: $E = mc^2 = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot c^2$

相对论动量: $p = mv = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot v$

质能方程: $\Delta E = \Delta m \cdot c^2$

动量和能量的关系: $\begin{cases} E = mc^2 \\ p = mv \end{cases} \rightarrow v = \frac{c^2}{E} p \rightarrow \text{代入 } E = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot c^2 \Rightarrow E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4$

$$E = \sqrt{(pc)^2 + (m_0 c^2)^2} \quad \text{动量 静能}$$

$$E^2 = (pc)^2 + (m_0 c^2)^2 = E_k^2 + m_0^2 c^4 + 2 E_k m_0 c^2$$

$$E_k = \frac{p^2}{2m_0} \quad (\text{牛顿力学})$$

不同参考系间动量-能量变换

两个等价向量 $(x, y, z, ct) \Leftrightarrow (pxc, pyc, pzc, E)$

参照洛伦兹变换得: $p'_x c = \frac{pxc - v \cdot E}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad p'_y = p_y \quad p'_z = p_z \quad E' = ct' = \frac{E - \frac{v}{c} \cdot p_x c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

温度和气体动理论

☆这些公式全部要自己推下来(背!)

9.1 平衡态

一个系统的各种性质不随时间改变的状态

9.2 温度的概念

温度 定性定义：共处平衡态的物体，温度相等

热力学第三定律：A与C能共处平衡态，B与C能共处平衡态，则A与B也能共处平衡态

9.3 理想气体温标

标准温度定点：水的三相点、 $T_3 = 273.16\text{ K}$

理想气体温标、热力学温度、国际温标 不作区分

热力学第三定律：绝对零度不能达到

9.4 理想气体状态方程

$$\text{常用化简: } \frac{V}{M} = \frac{m}{M} \cdot \frac{1}{V} = \frac{\rho}{M}$$



$$PV = \nu RT, \quad pV = \frac{m}{M}RT, \quad PV = NkT, \quad p = nkT$$

ν 为物质的量，气体分子数密度 $n = \frac{N}{V}$ ，下式中的道罗常数 $NA = 6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ (背)

普适气体常量 $R = 8.31 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ，玻耳兹曼常量 $k \equiv \frac{R}{NA} = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$

(背)

(背)

9.5 气体分子的无规则运动

平均自由程 $\bar{\lambda}$ ：连续两次碰撞之间路程平均值

平均碰撞频率 $\bar{\nu}$ ：单位时间内平均碰撞次数

$$\bar{\lambda} = \frac{V}{\bar{\nu}}$$



$$\bar{\nu} = n \times \sigma \times \bar{v} \Rightarrow \bar{\lambda} = \frac{1}{12\pi d^3 n} = \frac{kT}{12\pi d^3 p} \quad (\text{勿推导})$$

(n 为气体分子数密度, $\sigma = \pi d^2$, 相对速率 $\bar{v} = T_2 \bar{v}$)

9.6 理想气体的压强



$$P = \frac{1}{3} n m \bar{v}^2 = \frac{2}{3} n \bar{\epsilon}_t \quad (\bar{\epsilon}_t = \frac{1}{2} m \bar{v}^2 \text{ 为平均平动动能})$$



$$F \cdot \Delta t = (2mV)(nV) \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3} n m v^2$$

记吧

相对于原点参考系，与宏观场无关

9.7 温度的微观意义

分子平均平/转动动能仅由温度决定

$$\left\{ \begin{array}{l} P = n k T \text{ 热力学} \\ P = \frac{2}{3} n \bar{\epsilon}_t \text{ 统计力学} \end{array} \right. \rightarrow \bar{\epsilon}_t = \frac{3}{2} k T$$



系统内动能：系统内所有分子的 平动动能 的总和

$$\text{气体分子的平均根速率: } V_{rms} = \sqrt{\bar{v}^2} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

9.8 能量均分定理



$$\left\{ \begin{array}{l} \text{单原子分子 } i=3 \text{ (仅平动 3)} \\ \text{双原子分子 } i=5 \text{ (平动 3 + 转动 2)} \\ \text{(非直线型多原子分子)} \\ \text{多原子分子 } i=6 \text{ (平 3 + 转 3)} \\ \text{(非直线型)} \end{array} \right.$$

能量均分定理：在温度为T的平衡状态下，气体分子每个自由度的平均能量都相等，且等于 $\frac{1}{2} k T$



$$\text{理想气体内能} = \text{所有分子动能总和} = N \cdot \frac{i}{2} k T = \frac{i}{2} N R T \quad (\text{内能只与 } T \text{ 有关})$$

(分子间势能忽略)

(N为分子总数)

9.9 麦克斯韦速率分布律

$$\frac{dNv}{N} = f(v)dv \quad (\text{面积表示概率}, f(v) \text{表示概率密度})$$



$$\text{归一化条件: } \int_0^{\infty} \frac{dNv}{N} = \int_0^{\infty} f(v)dv = 1$$

$$\text{麦克斯韦速率分布函数 } f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \rightarrow m \text{为分子质量, } M \text{为摩尔质量}$$

$$M = \frac{M}{NA}, \quad k = \frac{R}{NA}$$

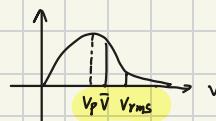
直接看哪种速率的粒子最多 最概然速率(峰值): $v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$

$$\bar{v} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i$$

$$\text{平均速率 } \bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N N v_i^2}$$

$$\text{方均根速率 } v_{rms} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$



[辨析] ① $\int f(v)dv$: 概率 / 百分比 ($v \sim v+dv$ 占总和) ⑦ $\int_0^{\infty} (\frac{1}{2}mv^2) f(v)dv$: 所有分子动能的平均值

② $N f(v)dv$: $v \sim v+dv$ 的分子数

⑧ $\int_0^{\infty} v^2 f(v)dv = \bar{v}^2$: 任一与速率有关物理量的平均值

③ $\int_{v_1}^{v_2} f(v)dv$: 概率 / 百分比 ($v_1 \sim v_2$ 占总和)

⑨ $\int_{v_1}^{v_2} N f(v)dv$: $v_1 \sim v_2$ 间所有分子速率之和

④ $\int_{v_1}^{v_2} N f(v)dv$: $v_1 \sim v_2$ 的分子数

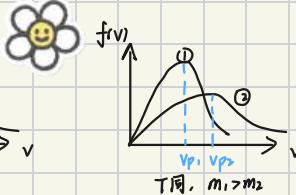
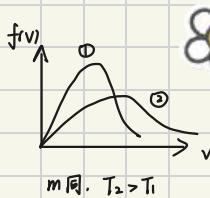
⑩ $\int_{v_1}^{v_2} N (\frac{1}{2}mv^2) f(v)dv$: $v_1 \sim v_2$ 间所有分子平均动能之和

⑤ $\int_{v_0}^{\infty} N f(v)dv$: $v > v_0$ 的分子数

⑪ $\frac{\int_{v_1}^{v_2} v f(v)dv}{\int_{v_1}^{v_2} f(v)dv} = \frac{N \int_{v_1}^{v_2} v f(v)dv}{N \int_{v_1}^{v_2} f(v)dv}$: $v_1 \sim v_2$ 间所有分子速率的平均值

⑥ $\int_{v_0}^{\infty} N f(v)dv$: $v < v_0$ 的分子数

⑫ $\int_{v_1}^{v_2} v^2 f(v)dv$: 无关物理量之和



m 为气体分子质量 (非气体总质量)

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \Rightarrow \text{气体速率分布取决定于 } \frac{m}{T} \text{ (比例值!)}$$

$$\bar{v}^2 = \frac{3}{2}kT = \frac{1}{2}mv^2 \quad \text{或} \quad v_p = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

eg:

例4 有N个粒子, 其速率分布函数为

$$f(v) = \begin{cases} a/v_0, & 0 \leq v \leq v_0 \\ 0, & v > 2v_0 \end{cases}$$

(1) 作速率分布曲线并求常数a;

① \rightarrow 归一化条件

$$\frac{1}{2}v_0 \cdot a + v_0 \cdot a = \frac{3}{2}v_0 \cdot a = 1$$

$$a = \frac{2}{3v_0}$$

(2) 求粒子的平均速率和方均根速率;

$$\bar{v} = \int_0^{\infty} v f(v)dv$$

$$= \int_0^{v_0} v \cdot \frac{2}{3v_0} \cdot v dv + \int_{v_0}^{2v_0} v \cdot \frac{2}{3v_0} \cdot v dv$$

$$= \frac{11}{9}v_0$$

(3) 分别求速率大于 v_0 和小于 v_0 的粒子数;

$$\bar{v}^2 = \int_0^{\infty} v^2 f(v)dv$$

$$= \int_0^{v_0} v^2 \cdot \frac{2}{3v_0} \cdot v dv + \int_{v_0}^{2v_0} v^2 \cdot \frac{2}{3v_0} \cdot v dv$$

$$= \frac{31}{18}v_0^2$$

(4) 求速率在 $0 \sim v_0$ 区间内的气体分子平均速率。

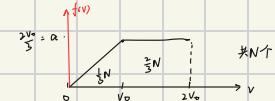
$$v_{rms} = \sqrt{\bar{v}^2} = \bar{v}$$

根据公式算:

易错以为 $f(v)$ 是 v , 但速率分布密度!

$f(v)-v$ 图的面积表示概率, 可直接用于计算

$$\bar{v}_{ave} = \frac{\int_0^{\infty} v N f(v)dv}{\int_0^{\infty} N f(v)dv} = \frac{\frac{2}{3}v_0}{\frac{1}{3}N} = \frac{2}{3}v_0$$



热力学第一定律

10.1 功 热 及 热-定律

对一个保守系统，在质心参考系内，外力对它做的功 = 内能增量
(分子间作用力 \rightarrow 保守力)

状态量：内能 ($\frac{1}{2}VRT$)
 过程量：
 功 (宏观) 改变系统热力学状态的两种方法 (做功/热传递) (相对的)
 热 (微观功)



$$\text{热-定律} : Q = \Delta E + A \quad (\text{对外}) \quad (\text{吸正: 吸热})$$

$$\Delta E = Q + A' \quad (\text{外对系})$$



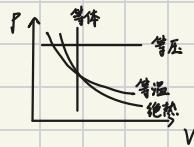
$$\text{求} \Delta E : \Delta E = \frac{1}{2}VR\Delta T = \frac{i}{2}(p_2V_2 - p_1V_1)$$

10.2 准静态过程

任意时刻，都可当作平衡态处理，可用状态图表示 (过程曲线)



体积功： $dA = pdV \rightarrow$ 即 $p-V$ 图面积 (膨胀 \Rightarrow 对外做正功)



$A=0$ 时，有 $Q = c_m \Delta T$ ， c 为比热

$$\Delta E=0 \text{ 时 (等温)} : Q = A = VRT \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}$$



10.3 热容

1mol 物质升温 ΔT 吸收的热量 \rightarrow 摩尔热容 $C_m \triangleq \frac{1}{V} \frac{dQ}{dT} \rightarrow$ 不仅等压/一体，可算任何过程

$$\text{定体热容} : C_{v,m} = \frac{1}{V} \left(\frac{dQ}{dT} \right)_V = \frac{1}{V} \frac{dE}{dT} = \frac{i}{2}R$$

$$\text{定压热容} : C_{p,m} = \frac{1}{V} \left(\frac{dQ}{dT} \right)_P = \frac{1}{V} \frac{dE + pdV}{dT} = \frac{i}{2}R + R$$

$$C_{p,m} - C_{v,m} = R$$

$$\text{比热比} \gamma = \frac{C_{p,m}}{C_{v,m}} = \frac{i+2}{i} > 1$$

$$\text{热-定律 (普遍)} : dQ = V C_{v,m} dT + p dV$$



$$(\text{仅}) \text{等压} : dQ = V C_{p,m} dT$$



10.4 绝热过程

1° 准静态绝热：

$$\text{过程方程: } PV^\gamma = C_1 \Leftrightarrow TV^{\gamma-1} = C_2 \Leftrightarrow P^{\gamma-1} T^{-\gamma} = C_3$$

$$\text{绝热求功: } ① A = \int_1^2 pdV = \int_1^2 \frac{C_1}{V^\gamma} dV = \frac{C_1}{1-\gamma} V^{1-\gamma}|_1^2$$

$$② Q=0 \Rightarrow dA = -dE = \frac{i}{2}(p_2V_2 - p_1V_1) \quad \left(\frac{i}{2} = \frac{1}{\gamma-1} \right) \quad (\text{更方便})$$





2° 绝热自由膨胀 (非准静态)

向真空膨胀: $A=0 \Rightarrow \Delta E=0$ (仅初末温度相等, 而非等温过程)
绝热: $Q=0$

$$PV = uRT: V \uparrow P \downarrow$$

卡诺过程: 非准静态, 多变塞

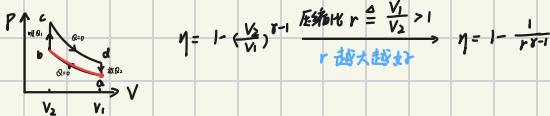
10.5 ~ 10.7 循环过程

正循环(热循环) 吸得多, 放得少 \rightarrow 用于做功
逆循环(致冷循环) (通过做功) 吸得少, 放得多 \rightarrow 用于吸热

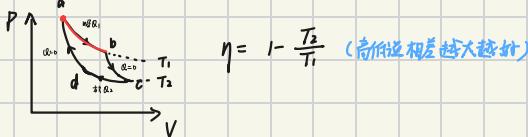
热循环: 循环效率 $\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$ (Q₂剩得越少, η越高)



空气标准奥托循环 $\left\{ \begin{array}{l} 2\text{个绝热} \\ 2\text{个等体} \end{array} \right.$ η 由 $\frac{V_1}{V_2}$ 决定



卡诺循环 $\left\{ \begin{array}{l} 2\text{个绝热} \\ 2\text{个等温} \end{array} \right.$ η 由 $\frac{T_2}{T_1}$ 决定 $(\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1})$



致冷循环: 致冷系数 $\omega_c = \frac{Q_2}{A} = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2}$



特别地, 卡诺致冷循环 $\omega_c = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$ $\left\{ \begin{array}{l} T_2 \rightarrow \text{低温 (吸)} \\ T_1 \rightarrow \text{高温 (放)} \end{array} \right.$

题目整理: ① 区分 $\left\{ \begin{array}{l} A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A \\ A \rightarrow B \Rightarrow C \end{array} \right.$

② V/L 单位要化成 m^3

热力学第二定律

11.1 自然过程的方向



孤立系统：与外界无物质交换也无能量交换 ($\Delta Q=0, A=0$)

eg: 宇宙

三个例子 { 功热转换
热传导
气体的绝热自由膨胀

11.2 不可逆性的相互依存

11.3 热二定律 (方向性)



克劳修斯表述：热量不能自动地从低温物体传向高温物体
开尔文表述：其唯一效果是将全部热量转化为功的过程是不可能的

微观本质：分子热运动无序性增大的方向



{ 第一类永动机：无输入
第二类永动机：单热源

11.4 热力学概率

该宏观状态的热力学概率 Ω : 任一宏观状态所对应的微观状态数



孤立系, 平衡态即只为最大值的宏观态 (无单位)

11.5 玻耳兹曼熵公式与熵增加原理

玻耳兹曼熵公式: $S = k \ln \Omega$ ($k = 1.38 \times 10^{-23}$)

熵具有可加性



热二 / 熵增原理: **孤立系**, 自然过程, 总沿 $\Delta S > 0$ 方向进行

11.6 可逆过程



要求更高 (准静态: 无限缓慢地变化, 每个中间态都可视为平衡态)

可逆: 无耗散 + 无非平衡态 \rightarrow 平衡态过渡. (理想的, 无耗散的准静态过程) $\Rightarrow \Delta S=0$ (孤立系, 可逆过程)



自然界一切过程都不可逆, 但单个少量微观粒子的力学过程可逆

不可逆不是不能反向进行, 而是进行后对外界影响无法消除

孤立系统熵增原理: $\Delta S \geq 0$

不可即错

eg: ① 准静态、无摩擦压缩气体 ② 准静态等温热传导 ③ 准静态卡诺循环

• 系统经循环过程后回到初态. $\Leftrightarrow \Delta S=0$ (环境熵变也要考虑)

11.7 ~ 11.8 克劳修斯熵公式

$$dS = \frac{dQ}{T} \quad (\text{仅适用于可逆过程}) \longrightarrow \text{热力学基本关系式: } TdS = dE + dA$$

但 ΔS 只与初末状态有关

(恒温系统) 绝热, 可逆 $\Leftrightarrow \Delta S = 0$

A: 可逆热温商积分, $\Delta S = \int dQ/T$.

B: 不可逆热温商积分

克劳修斯不等式:

$$\Delta S \geq \int \frac{dQ}{T} \quad \rightarrow \begin{cases} \Delta S \geq B & \text{可能发生 (= 可逆, > 不可逆)} \\ \Delta S < B & \text{一定不发生} \end{cases}$$

(eg: 水和冰、液体是一个孤立系统)

$$\text{孤立系统中, } dQ = 0, \text{ 则 } \int \frac{dQ}{T} = 0,$$

此时: $\Delta S > 0$: 能自发发生, 不可逆

$\Delta S = 0$: 能自发发生, 可逆

$\Delta S < 0$: 不可能发生

克劳修斯熵公式针对平衡态, 是玻耳兹曼熵公式的最大值



可逆过程选取: ① 冰等温熔化 \rightarrow 恒温热源、可逆吸热 $\Delta S = \int \frac{dQ}{T} = \frac{\Delta Q}{T}$

炉子作恒温热源 \rightarrow 可逆等温放热 $\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = -\frac{1}{T} C_m \Delta T$ (注意负正)

② 加热水升温 \rightarrow 把水依次与一系列温度逐渐升高, 但一次只升高无限小温度 dT 的热库接触

做功水升温 \rightarrow 设想一个等压/等体升温过程, 用比热求及

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{C_m dT}{T} = C_m \ln \frac{T_2}{T_1}, \text{ 算 } \Delta S \text{ 取初末态}$$



③ 理想气体 $\rightarrow \Delta S = \int_1^2 \frac{dE + pdV}{T} = \int_1^2 vC_v dm dT + vR \int_1^2 \frac{dV}{V} = vC_v m \ln \frac{T_2}{T_1} + vR \ln \frac{V_2}{V_1}$

④ 理想气体绝热自由膨胀 \rightarrow 可逆等温膨胀

(始末 T 相同)

$$\Delta S = \int \frac{dQ}{T} = vR \ln \frac{V_2}{V_1}$$

11.9 温熵图 (不考)

$$dS = \frac{dQ}{T}, \quad \int dQ = \int T dS = Q \Rightarrow \text{温熵图 (T-S) 面积即 } \Delta Q$$

以下是我考前复习的草稿，
无新内容，但有的整合可供参考 心

7

$$y = A \cos(\omega t - \frac{x}{a}) = A \cos(\omega t - kx) = A \cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x)$$

$$y(x, t) = A \cos[\omega(t - \frac{x}{a}) + \varphi_0]$$



$$y(x_0, t_0)$$



$$y(0, t)$$



$$y(x, t)$$

$$y(x_0, t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$



$$y(x, t) = A \cos[\omega(t - \frac{x_0}{a}) + \varphi_0]$$

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{\frac{k}{m}} \\ T &= 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \\ a &= -\omega^2 x \\ ma &= -kx \\ m\omega^2 &= k \\ \omega &= \sqrt{\frac{k}{m}} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x = A \cos(\omega t + \varphi) & F = -kx = ma \\ v = -A\omega \sin(\omega t + \varphi) & -k_{\text{eff}} \cdot x = m_{\text{eff}} \cdot a \\ a = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) & \\ \end{cases}$$

$$-k_{\text{eff}} \cdot \theta = m_{\text{eff}} \cdot \alpha$$

$$\alpha = -\omega^2 x$$

$$\begin{cases} \lambda = T \cdot u \\ \lambda u = u \end{cases}$$

$$v_R = \frac{u \pm u_R}{u \pm u_S} v_S$$

$$u = \lambda v_R$$

波传播速度 $\rightarrow u$

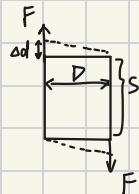
$$\frac{E_s}{s} = G \frac{\partial u}{\partial x}$$

线变 \rightarrow 斜伸缩 \rightarrow 纵 $\rightarrow E$ 材质模量

剪切形变 \rightarrow 绳子振动 \rightarrow 横 $\rightarrow G$ 剪切模量

体变 \rightarrow 空气压强改变

$$\begin{cases} u = \sqrt{\frac{F}{\rho}} \text{ 横 } & \sqrt{\frac{F}{\rho_1}} \\ u = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \text{ 纵 } & \sqrt{\frac{E}{\rho_1}} \\ u = \sqrt{\frac{GRT}{M}} \text{ 声速 } & \end{cases}$$



$$\text{振动物} \cdot E_{\text{总}} = E_k + E_p = \text{const} \quad \leftarrow \quad \begin{cases} E_k = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi) \\ E_p = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \varphi) \end{cases} \quad E_{\text{总}} = \frac{1}{2} k A^2 \Rightarrow E_k : E_p = \frac{1}{2} \frac{k}{m} A^2$$

$$\begin{cases} \pm A\dot{\theta}: E_p \text{ max}, E_k = 0 \\ 0: E_p = 0, E_k \text{ max} \end{cases}$$

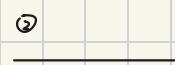
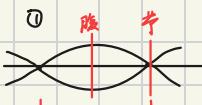
能量守恒

$$\text{滚动: } E_k = \frac{1}{2} \rho A V A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx) = E_p \Rightarrow E_{\text{总}} = \rho A V A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx)$$

滚动位移的能量变化差

$$y = A \cos(\omega t - kx) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{平衡: } \rightarrow E_p \text{ max}, E_k \text{ max} \rightarrow y=0, \cos=0, \sin=\text{max} \\ \text{峰值: } \rightarrow E_p=0, E_k=0 \rightarrow y=\text{max}, \cos=\text{max}, \sin=0 \end{array} \right.$$

弦波:



$$\begin{array}{ll} \text{两个波节间} & \text{两个波腹间} \\ \text{波腹: } E_p=0, E_k & \begin{array}{l} \text{①: } 0 \\ \text{②: } \text{max} \end{array} \\ \downarrow & \uparrow \\ \text{波节: } E_k=0, E_p & \begin{array}{l} \text{①: } \text{max} \\ \text{②: } 0 \end{array} \end{array}$$

$$\text{波的一维能量公式: } \Delta E_{\text{总}} = \rho A V A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx)$$

$$\text{能量密度: } w = \frac{\Delta E_{\text{总}}}{\Delta V} = \rho A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx)$$

$$\hookrightarrow \text{平均能量密度: } \bar{w} = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2$$

$$\text{能流: } P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \rho u S A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx)$$

能流的传播速率
/功率

$$\text{能流密度: } \frac{\Delta E}{\Delta t \cdot S} = \rho u A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx)$$

$$\hookrightarrow \text{平均能流密度: } I = \frac{1}{2} \rho u A^2 u \quad (I = \frac{\bar{P}}{S})$$

$$\text{eg: 能量守恒: } IS_1 A_1 = I_2 S_2 A_2$$

$$A_1^2 R_1^2 = A_2^2 R_2^2 \quad (\text{球面波})$$

$$A_1 R_1 = A_2 R_2$$

反射 折射 ...

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

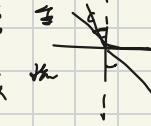
$$n_{21} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2}$$

$$U = \frac{c}{n}$$

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1}$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2}$$

$$\frac{\sin C}{l} = n_{21}$$



$$y_1 = A_1 \cos(\omega t - kx)$$

$$y_2 = A_2 \cos(\omega t + kx) \rightarrow y = y_1 + y_2 =$$

$$A_1 \cos(\omega t \cdot \cos kx + \sin kx \sin kx)$$

$$= 2A_1 \cos(\omega t \cdot \cos kx)$$

$$A_1 \cos(\omega t \cdot \cos kx - \sin kx)$$

$$A' = 2|\cos kx| A$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{波峰: } \frac{2\pi}{\lambda} x = n\pi \quad x = \frac{n\pi}{2} \lambda \\ \text{波谷: } \frac{2\pi}{\lambda} x = \frac{2n+1}{2}\pi \quad x = \frac{2n+1}{4}\pi \end{array} \right.$$

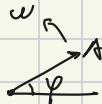
P·U 大 \rightarrow 滚弯，滚弯 \rightarrow 滚弯有无损失，有损失的端点称为滚节
未为圆柱端，有无损失

振动

$$x = A \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\theta = \theta_0 \cos(\Omega t + \varphi)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$



$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$F = -mg \sin \theta \approx -mg \dot{\theta}$$

$$mg \cdot l \cdot \dot{\theta} = m l^2 \cdot \ddot{\theta}$$

$$\begin{matrix} k_{\text{eff}} \cdot \theta = m_{\text{eff}} \cdot \ddot{\theta} \\ \downarrow \quad \downarrow \\ mgl \quad ml^2 \end{matrix}$$

$$l \cdot mg \dot{\theta} = l \cdot m \cdot a$$

$$\begin{matrix} mgx = mal \\ \downarrow \quad \downarrow \\ k_{\text{eff}} \quad m_{\text{eff}} \\ kx = ma \end{matrix}$$

稳定平衡: $\left(\begin{matrix} F = 0 \\ k > 0 \end{matrix} \right) \rightarrow -\frac{dE}{dx} = 0$

$$\left(\begin{matrix} k > 0 \end{matrix} \right) \rightarrow \frac{d^2E}{dx^2} > 0$$

周期时间: $T = \frac{1}{2\beta}$. 对应 $E' = \frac{1}{2} E$

频率 $\omega = 2\pi \cdot \frac{z}{T}$

$$y = A \cos(\omega t + \varphi)$$

- - - ω 同

ω' 不同, (φ) 同

$\omega' = \omega$

$$A' = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1 A_2 \cos \varphi}$$

$$\tan \varphi' = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}$$

$\omega' = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$

相速度 $v = |\nu_1 - \nu_2|$

热力学

$$\Delta E = \frac{i}{2} VR(T_2 - T_1) = \frac{i}{2}(P_2 V_2 - P_1 V_1)$$

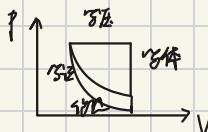
$$PV = vRT$$

等温 $\Delta E = 0, \Delta Q = A = vRT \ln \frac{V_2}{V_1}$

等压 $C_{p,m} = (\frac{i}{2} + 1)R \rightarrow \Delta Q = v C_{p,m} \Delta T = \frac{i+2}{2} v R \Delta T; A = P \Delta V, \Delta E = 0$

等体 $C_{v,m} = \frac{i}{2} R \rightarrow \Delta Q = v C_{v,m} \Delta T = \frac{i}{2} v R \Delta T; A = 0, \Delta E = R \Delta T$

绝热 $\left\{ \begin{array}{l} PV^{\gamma-1} = C_1 \\ TV^{\gamma-1} = C_2 \end{array} \right.$ $\Delta Q = 0; A = -\Delta E = -\frac{i}{2} VR(T_2 - T_1)$

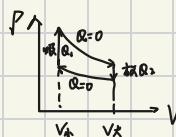


循环 (热机) $T_{高吸热} \rightarrow T_{低放热}$. 做功 $A = Q_{吸} - Q_{放}$. $\eta = \frac{A}{Q_{吸}} = 1 - \frac{Q_{放}}{Q_{吸}}$

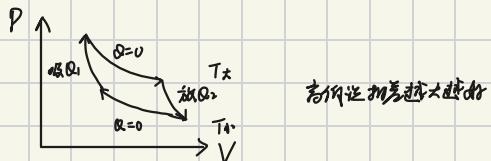
致冷 (逆) 被做功 $A \rightarrow T_{低吸热} \rightarrow T_{高放热}$. $A = Q_{放} - Q_{吸}$. $W = \frac{Q_{放}}{A} = \frac{Q_{吸}}{Q_{放} - Q_{吸}}$

热 空气标准莫比乌斯环：2个等体
2个绝热

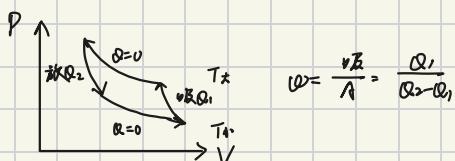
$\eta = 1 - \frac{V_1}{V_2}$



理想气体的效率



高阶进气量增加



$$\eta = \frac{vT_2}{A} = \frac{Q_1}{Q_2 - Q_1}$$

注意单位
 $L \rightarrow \text{升或 } m^3!$

孤立系

平衡态即 S_{max} 对应宏观态

自然过程 必沿 $\Delta S > 0$ 方向进行

可逆过程 $\Delta S = 0$

熵增加过程 $\Delta S \geq 0$

准静态 $\xrightarrow{+元素级数}$ 可逆

$$S = k \ln \Omega$$

平衡态下

$$\Delta S \geq \int \frac{dQ}{T} \quad \left\{ \begin{array}{l} \geq \text{可能发生} \rightarrow \text{不可逆} \\ < \text{不可能发生} \text{ (世上不存在!!!)} \end{array} \right. \rightarrow \text{可用于孤立系统. } dQ = 0.$$

$$dS = \frac{dQ}{T} \quad (\text{仅适用于可逆过程}) \rightarrow TdS = dE + dA$$

① 恒温吸放热. 放热 Q 为负

$$\Delta S = \frac{Q}{T}$$

② 无限平衡吸放热. $\Delta S = \frac{dQ}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{C_m dT}{T}$

③ 理想气体: $\Delta S = \int_1^2 \frac{dE + pdV}{T} = \int_1^2 \frac{\nu \cdot Cv,m dT}{T} + \int_1^2 \frac{\nu R dV}{V}$

$$= \nu C_{v,m} \ln \frac{T_2}{T_1} + \nu R \ln \frac{V_2}{V_1}$$

④ 理想气体 \rightarrow 可逆过程 \sim

$$\Delta S = \int \frac{dQ}{T} = \nu R \ln \frac{V_2}{V_1}$$

相对论

洛伦兹因子 $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ “ $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ ” > 1

{ 钟慢 : $t \uparrow$
R 等 : $l \downarrow$
质量膨胀 : $m \uparrow$

$$\Delta E = \Delta m \cdot c^2$$

