Xử lý Tín hiệu số **Sinh viên:** *Ngô Phù Hữu Đại Sơn*
Học kỳ Xuân 2022, Bài tập 1 **Mã số:** *18120078*
Hạn nộp: 11h59PM - 20/03/2022

---

1. Xác định các hàm sau đây có phải hàm tuần hoàn không?
   (a) $x_1(t) = 2e^{j(t+\pi/4)}u(t)$
   Ta có:
$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow x_1(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 2e^{j(t+\pi/4)} & t \geq 0 \end{cases}$$
   $\Rightarrow x_1(t)$ không phải hàm tuần hoàn
   (a) $x_2[n] = u[n] + n[-n]$
   Ta có:
$$u[n] \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow x_2[n] = 1, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$
   $\Rightarrow x_2[n]$ là hàm tuần hoàn
   (a) $x_3[n] = \sum_{\{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-4k] - \delta[n-1-4k]\}$
   Ta có:
$$\begin{aligned} x_3[n+4] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{\delta[(n+4)-4k] - \delta[(n+4)-1-4k]\} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{\delta[n+(4-4k)] - \delta[n-1+(4-4k)]\} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{\delta[n-4(k-1)] - \delta[n-1-4(k-1)]\} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{\delta[n-4k] - \delta[n-1-4k]\} \\ &= x_3[n](\forall n \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$
   $\Rightarrow x_3[n]$ là hàm tuần hoàn

2. Phát biểu phần thực của các tính hiệu sau đây ở dạng $Ae^{-at}\cos(\omega t + \phi)$, trong đó A, a, ω và ϕ là các số thực với $A > 0$ và $-\pi < \phi \leq \pi$:
   (a) $x_1(t) = -2$
$$\mathcal{R}e(x_1(t)) = -2 = 2e^{-0t}cos(0t + \pi)$$
   (b) $x_2(t) = \sqrt{2}e^{j\pi/4}cos(3t + 2\pi)$
$$x_2(t) = \sqrt{2}(\cos\pi/4 + j\sin\pi/4)\cos(3t + 2\pi)$$

$$\Rightarrow \mathcal{R}e(x_2(t)) = \sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}cos(3t) = e^{0t}cos(3t+0)$$

(c) $x_3(t) = e^{-t}sin(3t+\pi)$

$$\mathcal{R}e(x_3(t)) = e^{-t}sin(3t+\pi) = e^{-t}cos(3t+\frac{\pi}{2})$$

(d) $x_4(t) = je^{(-2+100j)t}$

$$\begin{aligned} x_4(t) &= je^{-2t}e^{100jt} \\ &= je^{-2t}(cos(100t) + jsin(100t)) \\ &= e^{-2t}(jcos(100t) - sin(100t)) \\ &\Rightarrow \mathcal{R}e(x_4(t)) = e^{-2t}sin(100t+\pi) = e^{-2t}cos(100t+\frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

3. Xác định các tín hiệu sau đây có tuần hoàn hay không? Nếu có, xác định chu kì:

(a) $x_1(t) = je^{j10t}$

$$\begin{aligned} x_1(t) &= j(cos(10t) + jsin(10t)) \\ &= jcos(10t) - sin(10t) \\ &= jsin(10t+\frac{\pi}{2}) + cos(10t+\frac{\pi}{2}) \\ &= e^{j(10t+\pi/2)} \end{aligned}$$

Vậy $x_1(t)$ có dạng tín hiệu tuần hoàn với chu kì $T = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}$

(b) $x_2(t) = e^{(-1+j)t}$
$x_2(t)$ có dạng của hàm *Complex Exponential* nên không phải hàm tuần hoàn

(c) $x_3[n] = e^{j7\pi n}$

$$x_3[n] = e^{j7\pi n} = e^{j\pi n}$$

Vậy $x_3[n]$ là tín hiệu hoàn tuần với chu kì $T = \frac{2\pi}{\pi} = 2$

(d) $x_4[n] = 3e^{j3\pi(n+1/2)/5}$

$$\begin{aligned} x_4[n] &= 3e^{j(\frac{3}{5}\pi n+\frac{\pi}{2})} \\ &= 3e^{j\frac{\pi}{2}}e^{\frac{3\pi}{5}n} \\ &= 3je^{\frac{3\pi}{5}n} \end{aligned}$$

$x_4[n]$ là tín hiệu tuần hoàn và do x_4 là tín hiệu rời rạc nên chu kì được xác định là:

$$T = k\frac{2\pi}{\frac{3\pi}{5}} = k\frac{10}{3}(k \in \mathbb{Z})$$

Chọn k = 3, ta được $T = 10$

(e) $x_5[n] = 3e^{j3/5(n+1/2)}$ Tương tự câu d, ta có:

$$x_5[n] = 3e^{\frac{3}{10}}e^{j\frac{3n}{5}}$$

Tuy nhiên với:

$$T = k\frac{2\pi}{\frac{3}{5}} = k\frac{10\pi}{3}(k \in \mathbb{Z})$$

Ta không thể tìm được một số nguyên k thỏa mãn nên tín hiệu trên không tuần hoàn

4. Cho tín hiệu sau:

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le 1 \\ -2, & 1 < t < 2 \end{cases}$$

Với chu kì $T = 2$. Đạo hàm của tín hiệu này có quan hệ với "impulse train"

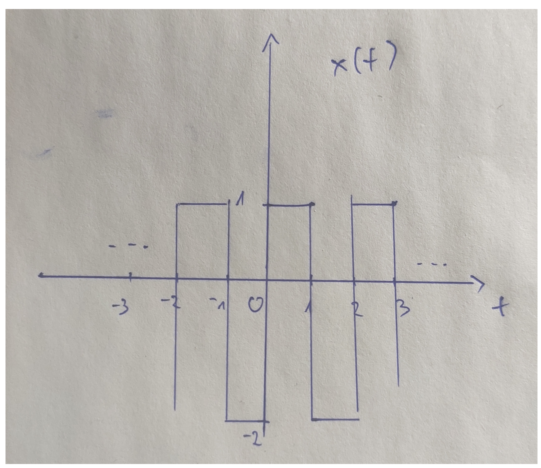
$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - 2k)$$

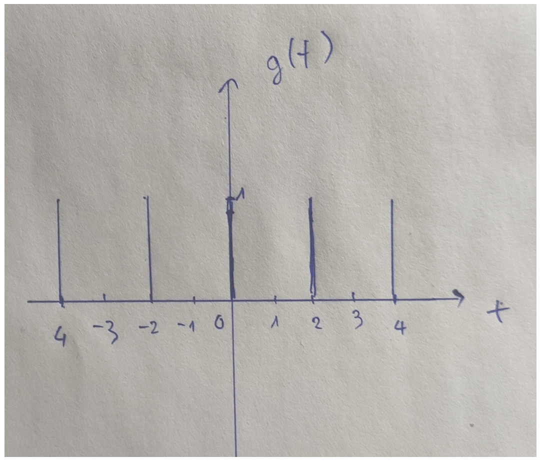
Với chu kì $T = 2$. Có thể thấy rằng:

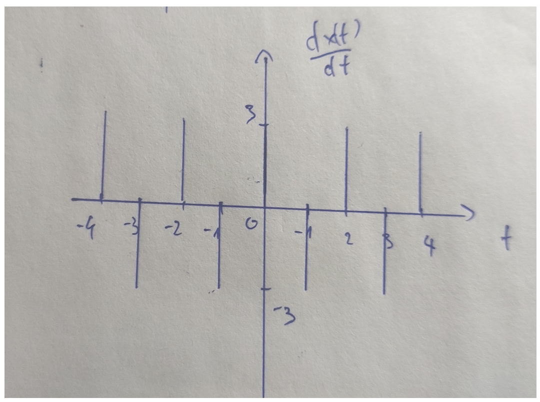
$$\frac{dx(t)}{dt} = A_1 g(t - t_1) + A_2 g(t - t_2)$$

Hãy xác định các giá trị A_1, t_1, A_2 và t_2

Đồ thị của hàm $x(t), g(t)$ và $dx(t)/dt$ như sau:







Từ đó, có thể dễ dàng thấy được:

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= 3\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-2k) - 3\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-2k-1)\\ &= 3g(t) - 3g(t-1)\end{aligned}$$

Vậy $A_1 = 3, t_1 = 0, A_2 = -3$ và $t_2 = 1$

5. Xét hệ thống rời rạc thời gian với đầu vào $x[n]$ và đầu ra $y[n]$ như sau:

$$y[n] = \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x[k]$$

Với n_0 là một số nguyên dương xác định

(a) Hệ thống trên có linear không? Xét 2 tín hiệu input bất kì $x_1[n]$ và $x_2[n]$.

$$x_1[n] \to y_1[n] = \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x_1[k]$$

$$x_2[n] \rightarrow y_2[n] = \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x_2[k]$$

Đặt $x_3[n]$ là tổ hợp tuyến tính của 2 tín hiệu $x_1[n]$ và $x_2[n]$:

$$x_3[n] = ax_1[n] + bx_2[n]$$

Với a và b là 2 số bất kì. Đưa $x_3[n]$ vào hệ thống ta được:

$$\begin{aligned} x_3[n] \rightarrow y_3[n] &= \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x_3[k] \\ &= \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} (ax_1[n] + bx_2[n]) \\ &= a \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x_1[n] + b \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x_2[n] \\ &= ay_1[n] + by_2[n] \end{aligned}$$

Vậy hệ thống trên có tính linear

(b) Hệ thống trên có time-invariant không? Xét tín hiệu đầu vào $x_1[n]$ bất kì, ta có

$$x_1[n] \rightarrow y_1[n] = \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x_1[k]$$

Xét $x_2[n] = x_1[n - n_1]$, ta lại có:

$$y_2[n] = \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x_2[k] = \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x_1[k - n_1] = \sum_{k=n-n_0-n_1}^{n+n_0-n_1} x_1[k]$$

Mặc khác:

$$y_1[n - n_1] = \sum_{k=(n-n_1)-n_0}^{(n-n_1)+n_0} x_1[k]$$

Từ đó, ta có:

$$y_2[n] = y_1[n - n_1]$$

Vậy hệ thống có tính time-invariant

(c) Nếu $x[n]$ thỏa $\forall n : |x[n]| < B$, với B là một số nguyên dương xác định, ta có thể tìm được một số nguyên dương C thỏa $\forall n : |y[n]| < C$. Biểu diễn C theo B và n_0 Ta có:

$$y[n] = \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x[k]$$

$$\Rightarrow |y[n]| = \left| \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x[k] \right| \leq \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} |x[k]| < \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} B = (2n_0 + 1)B$$

$$\Rightarrow y[n] < (2n_0 + 1)B$$

Vậy $C = (2n_0 + 1)B$

6. Với mỗi hệ thống sau đây, hãy xác định tính linear và time-invariant
   (a) $y(t) = t^2 x(t-1)$
      i. Cho 2 tín hiệu $x_1(t)$ và $x_2(t)$ bất kì, ta có:

      $$x_1(t) \to y_1(t) = t^2 x_1(t-1)$$

      $$x_2(t) \to y_2(t) = t^2 x_2(t-1)$$

      Xét $x_3(t)$ là một tổ hợp tuyến tính của $x_1(t)$ và $x_2(t)$, ta có:

      $$x_3(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$$

      Đưa $x_3(t)$ vào hệ thống, ta thu được:

      $$x_3(t) \to y_3(t) = t^2 x_3(t-1) = t^2(ax_1(t-1) + bx_2(t-1)) = ay_1(t) + by_2(t)$$

      Vậy hệ thống có tính linear
      ii. Xét tín hiệu đầu vào bất kì $x_1(t)$, ta có:

      $$y_1(t) = t^2 x_1(t-1)$$

      Đặt $x_2(t) = x_1(t - t_0)$, ta được:

      $$y_2(t) = t^2 x_2(t-1) = t^2 x_1(t - 1 - t_0)$$

      Lại có:
      $$y_1(t - t_0) = (t - t_0)^2 x_1(t - 1 - t_0) \neq y_2(t)$$
      Vậy hệ thống không có tính time-invariant
   (b) $y[n] = x^2[n-2]$
      i. Cho 2 tín hiệu $x_1[n]$ và $x_2[n]$ bất kì, ta có:

      $$x_1[n] \to y_1[n] = x_1^2[n-2]$$

      $$x_2[n] \to y_2[n] = x_2^2[n-2]$$

      Xét $x_3[n]$ là một tổ hợp tuyến tính của $x_1[n]$ và $x_2[n]$, ta có:

      $$x_3[n] = ax_1[n] + bx_2[n]$$

      Đưa $x_3[n]$ vào hệ thống, ta thu được:

      $$\begin{aligned} y_3[n] &= x_3^2[n-2] \\ &= (ax_1[n-2] + bx_2[n-2])^2 \\ &= a^2 x_1^2[n-2] + 2abx_1[n-2]x_2[n-2] + b^2 x_2^2[n-2] \\ &\neq ay_1[n] + by_2[n] \end{aligned}$$

      Vậy hệ thống có không tính linear

ii. Xét tín hiệu đầu vào bất kì $x_1[n]$, ta có:

$$y_1[n] = x_1^2[n-2]$$

Đặt $x_2[n] = x_1[n-n_0]$, ta được:

$$y_2[n] = x_2^2[n-2] = x_1^2[n-2-n_0]$$

Lại có:

$$y_1[n-n_0] = x_1^2[n-n_0-2] = y_2[n]$$

Vậy hệ thống có tính time-invariant

(c) $y[n] = x[n+1] - x[n-1]$

i. Cho 2 tín hiệu $x_1[n]$ và $x_2[n]$ bất kì, ta có:

$$x_1[n] \to y_1[n] = x_1[n+1] - x_1[n-1]$$

$$x_2[n] \to y_2[n] = x_2[n+1] - x_2[n-1]$$

Xét $x_3[n]$ là một tổ hợp tuyến tính của $x_1[n]$ và $x_2[n]$, ta có:

$$x_3[n] = ax_1[n] + bx_2[n]$$

Đưa $x_3[n]$ vào hệ thống, ta thu được:

$$\begin{aligned} y_3[n] &= x_3[n+1] - x_3[n-1] \\ &= (ax_1[n+1] + bx_2[n+1]) - (ax_1[n-1] + bx_2[n-1]) \\ &= a(x_1[n+1] - x_1[n-1]) + b(x_2[n+1] - x_2[n-1]) \\ &= ay_1[n] + by_2[n] \end{aligned}$$

Vậy hệ thống có tính linear

ii. Xét tín hiệu đầu vào bất kì $x_1[n]$, ta có:

$$y_1[n] = x_1[n+1] - x_1[n-1]$$

Đặt $x_2[n] = x_1[n-n_0]$, ta được:

$$y_2[n] = x_2[n+1] - x_2[n-1] = x_1[n+1-n_0] - x_1[n-1-n_0]$$

Lại có:

$$y_1[n-n_0] = x_1[(n-n_0)+1] - x_1[(n-n_0)-1] = y_2[n]$$

Vậy hệ thống có tính time-invariant

(d) $y(t) = \mathcal{O}d\{x(t)\}$

i. Cho 2 tín hiệu $x_1(t)$ và $x_2(t)$ bất kì, ta có:

$$x_1(t) \to y_1(t) = \mathcal{O}d\{x_1(t)\}$$

$$x_2(t) \to y_2(t) = \mathcal{O}d\{x_2(t)\}$$

Xét $x_3(t)$ là một tổ hợp tuyến tính của $x_1(t)$ và $x_2(t)$, ta có:

$$x_3(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$$

Đưa $x_3(t)$ vào hệ thống, ta thu được:

$$\begin{aligned} y_3(t) &= \mathcal{O}d\{x_3(t)\} \\ &= \mathcal{O}d\{ax_1(t) + bx_2(t)\} \\ &= a\mathcal{O}d\{x_1(t)\} + b\mathcal{O}d\{x_2(t)\} \\ &= ay_1(t) + by_2(t) \end{aligned}$$

Vậy hệ thống có tính linear

ii. Xét tín hiệu đầu vào bất kì $x_1(t)$, ta có:

$$y_1(t) = \mathcal{O}d\{x_1(t)\} = \frac{x_1(t) - x_1(-1)}{2}$$

Đặt $x_2(t) = x_1(t - t_0)$, ta được:

$$\begin{aligned} y_2(t) &= \mathcal{O}d\{x_2(t)\} \\ &= \frac{x_2(t) - x_2(-t)}{2} \\ &= \frac{x_1(t - t_0) - x_1(-t - t_0)}{2} \end{aligned}$$

Lại có:

$$y_1(t - t_0) = \mathcal{O}d\{x_1(t - t_0)\} = \frac{x_1(t - t_0) - x_1(-t + t_0)}{2} \neq y_2(t)$$

Vậy hệ thống không có tính time-invariant

7. Cho hệ thống liên tục thời gian tuyến tính S với đầu vào $x(t)$ và đầu ra $y(t)$ như sau:

$$x(t) = e^{j2t} \rightarrow y(t) = e^{j3t}$$

$$x(t) = e^{-j2t} \rightarrow y(t) = e^{-j3t}$$

(a) Nếu $x_1(t) = cos(2t)$, xác định $y_1(t)$ là đầu ra qua S
Ta có:

$$cos(2t) = \frac{e^{j2t} + e^{-j2t}}{2}$$

Do S tuyến tính, nên:

$$x(t) = cos(2t) = \frac{e^{j2t} + e^{-j2t}}{2} \rightarrow y(t) = \frac{e^{j3t} + e^{-j3t}}{2} = cos(3t)$$

Vậy:

$$x_1(t) = cos(2t) \rightarrow y_1(t) = cos(3t)$$

(b) Nếu $x_2(t) = cos(2(t - \frac{1}{2}))$, xác định $y_2(t)$ là đầu ra qua S

Ta có:

$$cos(2(t-\frac{1}{2})) = \frac{e^{j2(t-\frac{1}{2})}+e^{-j2(t-\frac{1}{2})}}{2} = \frac{e^{-j}e^{j2t}+e^{j}e^{-j2t}}{2}$$

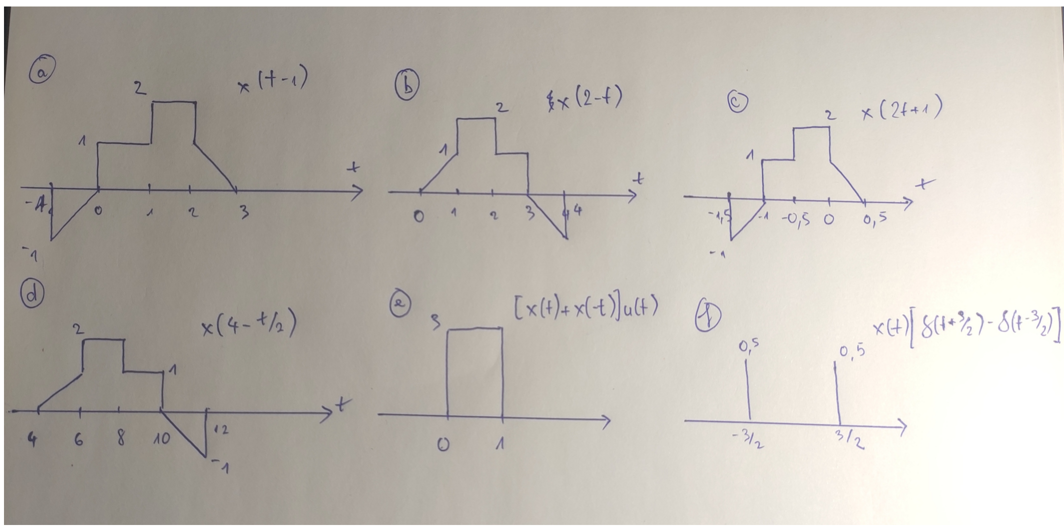
Do S tuyến tính, nên

$$x(t) = cos(2t) = \frac{e^{-j}e^{j2t}+e^{j}e^{-j2t}}{2} \rightarrow y(t) = \frac{e^{-j}e^{j3t}+e^{j}e^{-j3t}}{2} = cos(3t-1)$$

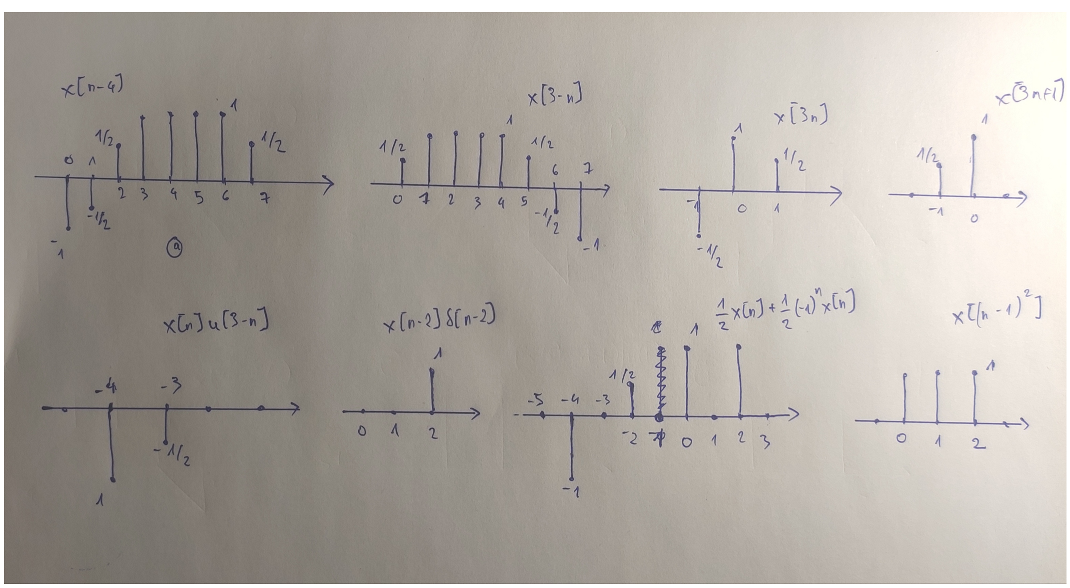
Vậy:

$$x_1(t) = cos(2(t-\frac{1}{2})) \rightarrow y_1(t) = cos(3t-1)$$

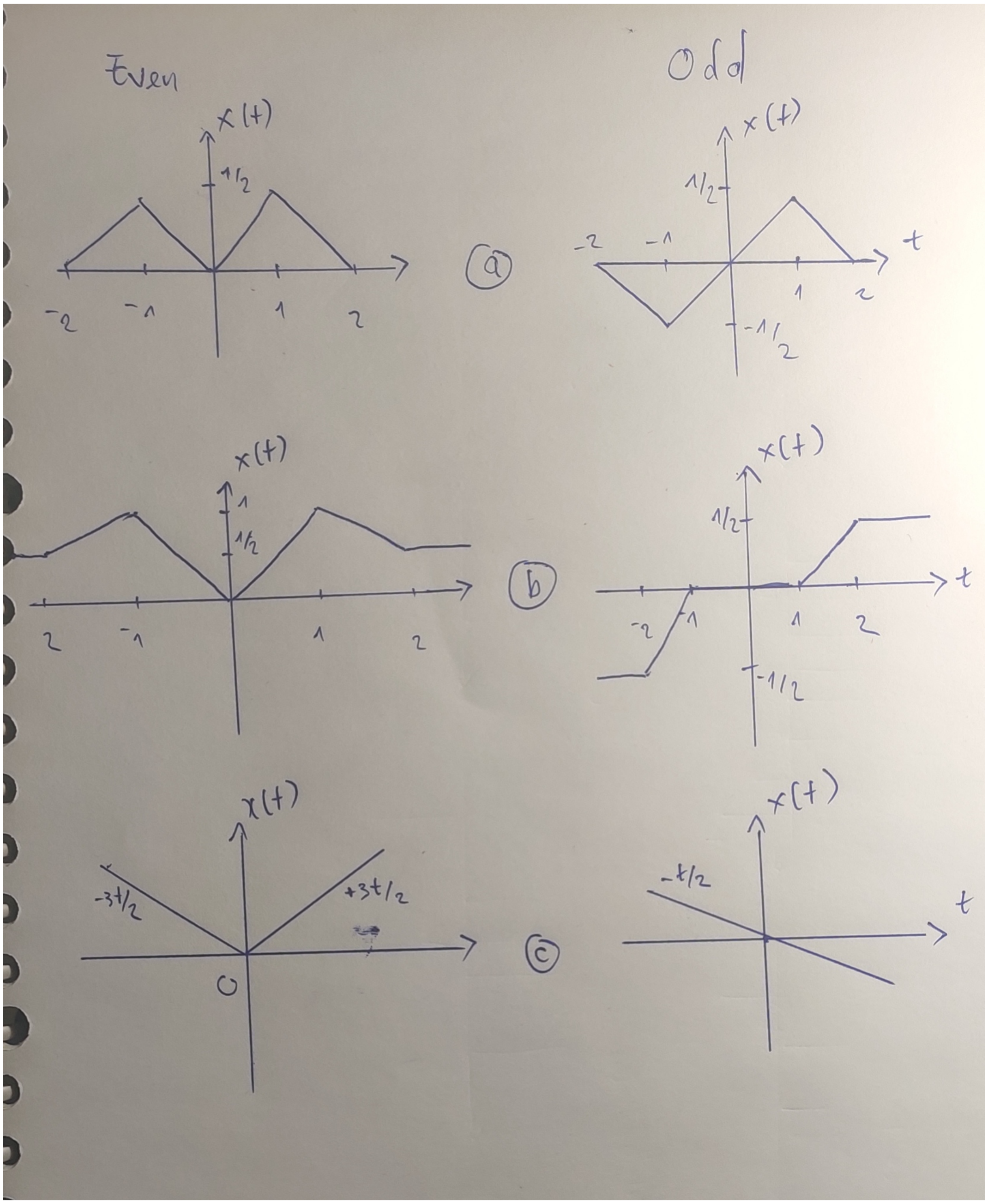
8. 1.21



9. 1.22 Vẽ hình



10. 1.23 Vẽ hình



11. Xác định xem các tín hiệu liên tục miền thời gian sau đây có phải là tín hiệu tuần hoàn hay không? Nếu có, xác định chu kì tuần hoàn
    (a) $x(t) = 3cos(4t + \frac{\pi}{3})$ Tín trên tuần hoàn, chu kì $T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$
    (b) $x(t) = e^{j(\pi t - 1)}$ Tín trên tuần hoàn, chu kì $T = \frac{2\pi}{\pi} = 2$
    (c) $x(t) = [cos(2t - \frac{\pi}{3})]^2$
    Ta có:
    $$x(t) = \frac{cos(4t - \frac{2\pi}{3}) - 1}{2}$$
    Do $cos(4t - \frac{2\pi}{3})$ tuần hoàn nên x(t) tuần hoàn. Chu kì $T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

(d) $x(t) = \mathcal{E}v\{cos(4\pi t)u(t)\}$
Ta có:

$$x(t) = \frac{cos(4\pi t)u(t) + cos(-4\pi t)u(-t)}{2} = \frac{cos(4\pi t)\left[u(t) + u(-t)\right]}{2} = \frac{cos(4\pi t)}{2}$$

Vậy x(t) là tín hiệu tuần hoàn. Chu kì $T = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$

(e) $x(t) = \mathcal{E}v\{sin(4\pi t)u(t)\}$

$$x(t) = \frac{sin(4\pi t)u(t) + sin(-4\pi t)u(-t)}{2} = \frac{sin(4\pi t)\left[u(t) - u(-t)\right]}{2}$$

$$x(t) = \begin{cases} \frac{sin(4\pi t)}{2}, & t \geq 0 \\ -\frac{sin(4\pi t)}{2}, & t < 0 \end{cases}$$

Vậy x(t) không tuần hoàn

(f) $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(2t-n)}u(2t-n)$ Chưa nghĩ ra cách làm

12. Xác định xem các tín hiệu rời rạc miền thời gian sau đây có phải là tín hiệu tuần hoàn hay không? Nếu có, xác định chu kì tuần hoàn

(a) $x[n] = sin(\frac{6\pi}{7}n + 1)$

(b) $x[n] = cos(\frac{n}{8} - \pi)$

(c) $x[n] = cos(\frac{\pi}{8}n^2)$

(d) $x[n] = cos(\frac{\pi}{2}n)cos(\frac{\pi}{4}n)$

(e) $x[n] = 2cos(\frac{\pi}{4}n) + sin(\frac{\pi}{7}n) - 2cos(\frac{\pi}{2}n + \frac{\pi}{6})$

13. 1.27

14. 1.28

15. (a) Cho một hệ thống rời rạc miền thời gian với đầu vào $x[n]$ và đầu ra $y[n]$, với $y[n] = \mathcal{R}e\{x[n]\}$ có tính cộng. Liệu tính cộng có còn được giữ lại nếu quan hệ được đổi thành $y[n] = \mathcal{R}e\{e^{j\pi n/4}x[n]\}$?
Xét 2 tín hiệu đầu vào bất kì $x_1[n]$ và $x_2[n]$, ta có:

$$x_1[n] \rightarrow y_1[n] = \mathcal{R}e\{x_1[n]\}$$

$$x_2[n] \rightarrow y_2[n] = \mathcal{R}e\{x_2[n]\}$$

Đặt $x_3[n] = x_1[n] + x_2[n]$, ta có:

$$\begin{aligned} y_3[n] &= \mathcal{R}e\{x_3[n]\} \\ &= \mathcal{R}e\{x_1[n] + x_2[n]\} \\ &= \mathcal{R}e\{x_1[n]\} + \mathcal{R}e\{x_2[n]\} \\ &= y_1[n] + y_2[n] \end{aligned}$$

Vậy hệ thống có tính additive. Chúng ta đổi quan hệ của hệ thống thành:

$$y[n] = \mathcal{R}e\{e^{j\pi n/4}x[n]\}$$

Xét 2 tín hiệu đầu vào bất kì $x_1[n]$ và $x_2[n]$, ta có:

$$x_1[n] \to y_1[n] = \mathcal{R}e\{e^{j\pi n/4}x_1[n]\}$$

$$x_2[n] \to y_2[n] = \mathcal{R}e\{e^{j\pi n/4}x_2[n]\}$$

Đặt $x_3[n] = x_1[n] + x_2[n]$, ta có:

$$\begin{aligned}
y_3[n] &= \mathcal{R}e\{e^{j\pi n/4}x_3[n]\} \\
&= cos(\frac{n\pi}{4})\mathcal{R}e\{x_3[n]\} - sin(\frac{n\pi}{4})\mathcal{I}m\{x_3[n]\} \\
&= \Big(cos(\frac{n\pi}{4})\mathcal{R}e\{x_1[n]\} - sin(\frac{n\pi}{4})\mathcal{I}m\{x_1[n]\}\Big) \\
&+ \Big(cos(\frac{n\pi}{4})\mathcal{R}e\{x_2[n]\} - sin(\frac{n\pi}{4})\mathcal{I}m\{x_2[n]\}\Big) \\
&= \mathcal{R}e\{e^{j\pi n/4}x_1[n]\} + \mathcal{R}e\{e^{j\pi n/4}x_2[n]\} \\
&= y_1[n] + y_2[n]
\end{aligned}$$

Vậy hệ thống có tính additive.

(b) Kiểm tra các tín hiệu dưới đây có tính additive và homogeneous hay không?

i. $y(t) = \frac{1}{x(t)}[\frac{dx(t)}{dt}]^2$

Xét 2 tín hiệu đầu vào bất kì $x_1(t)$ và $x_2(t)$, ta có:

$$x_1(t) \to y_1(t) = \frac{1}{x_1(t)}\left[\frac{dx_1(t)}{dt}\right]^2$$

$$x_2(t) \to y_2(t) = \frac{1}{x_2(t)}\left[\frac{dx_2(t)}{dt}\right]^2$$

Đặt $x_3(t) = x_1(t) + x_2(t)$, ta có:

$$\begin{aligned}
y_3(t) &= \frac{1}{x_3(t)}\left[\frac{dx_3(t)}{dt}\right]^2 \\
&= \frac{1}{x_1(t) + x_2(t)}\left[\frac{dx_1(t) + x_2(t)}{dt}\right]^2 \\
&\neq y_1(t) + y_2(t)
\end{aligned}$$

Vậy hệ thống không có tính additive

Đặt $x_4(t) = ax_1(t)$, ta lại có:

$$\begin{aligned}
y_4(t) &= \frac{1}{x_4(t)}\left[\frac{dx_4(t)}{dt}\right]^2 \\
&= \frac{1}{ax_1(t)}\left[\frac{d[ax_1(t)]}{dt}\right]^2 \\
&= \frac{a}{x_1(t)}\left[\frac{dx_1(t)}{dt}\right]^2 \\
&= ay_1(t)
\end{aligned}$$

Vậy hệ thống có tính homogeneous

ii. $y[n] = \begin{cases} \frac{x[n]x[n-2]}{x[n-1]}, & x[n-1] \neq 0 \\ 0, & x[n-1] = 0 \end{cases}$ Chưa biết làm

16. 1.30

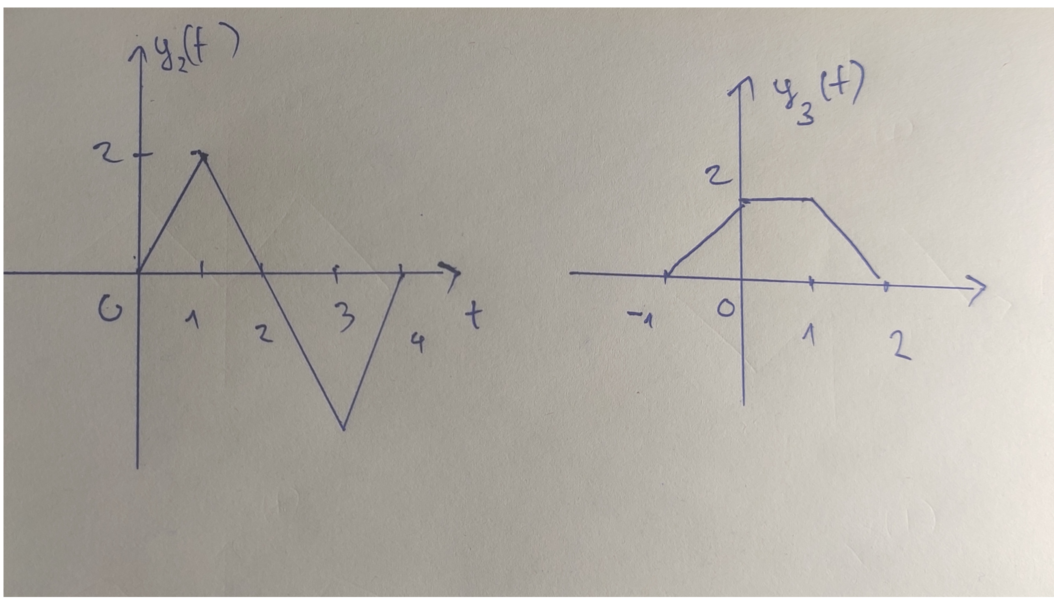
17. 1.31

(a) Ta có $x_2(t) = x_1(t) - x_1(t-2)$. Do hệ thống có tính tuyến tính:

$$y_2(t) = y_1(t) - y_1(t-2)$$

(b) Ta có $x_3(t) = x_1(t) + x_1(t+1)$. Do hệ thống có tính tuyến tính:

$$y_3(t) = y_1(t) + y_1(t+1)$$



18. 1.37

(a) Ta có:

$$\phi_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)y(\tau)d\tau$$

Đặt $u = t + \tau \Rightarrow du = d\tau$

$$\Rightarrow \phi_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)y(-t+u)du = \phi_{yx}(-t)$$

(b) Theo câu a, ta có $\phi_{xx}(t) = \phi_{xx}(-t)$

$$\mathcal{O}d\{\phi_{xx}(t)\} = \frac{\phi_{xx}(t) - \phi_{xx}(-t)}{2} = 0$$

(c) Ta có:

$$\begin{aligned}\phi_{xy}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)y(\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)x(\tau+T)d\tau\end{aligned}$$

Đặt $u = \tau + T \rightarrow du = d\tau$

$$\phi_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+u-T)x(u)du = \phi_{xx}(t-T)$$

Mặc khác:

$$\begin{aligned}\phi_{xy}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)y(\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} y(t+\tau-T)y(\tau)d\tau \\ &= \phi_{yy}(t-T)\end{aligned}$$

Vậy $\phi_{xy}(t) = \phi_{xx}(t-T)$ và $\phi_{xx}(t) = \phi_{yy}(t)$

19. 1.51

(a) $cos\theta = \frac{1}{2}(e^{j\theta} + e^{-j\theta})$
Ta có:

$$e^{j\theta} = cos\theta + jsin\theta \tag{1}$$

$$e^{-j\theta} = cos\theta - jsin\theta \tag{2}$$

Lấy (1) + (2), ta đưc

$$\Rightarrow cos\theta = \frac{1}{2}(e^{j\theta} + e^{-j\theta})$$

(b) $sin\theta = \frac{1}{2j}(e^{j\theta} - e^{-j\theta})$
Dựa vào câu a, lấy (1) - (2), ta được:

$$\sin\theta = \frac{1}{2j}(e^{j\theta} - e^{-j\theta})$$

(c) $cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + cos2\theta)$
Ta có:

$$e^{j(\theta+\phi)} = e^{j\theta}e^{j\phi}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow cos(\theta+\phi) + jsin(\theta+\phi) &= (cos\theta + jsin\theta)(cos\phi - jsin\phi) \\ &= (cos\theta cos\phi - sin\theta sin\phi) + j(sin\theta cos\phi + cos\theta sin\phi)\end{aligned} \tag{3}$$

Xét phần thực của 2 vế, với $\theta = \phi$, ta được:

$$cos2\theta = cos^2\theta - sin^2\theta = cos^2\theta - (1 - cos^2\theta) = 2cos^2\theta - 1$$

$$\Rightarrow cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + cos2\theta)$$

(d) $(sin\theta)(sin\phi) = \frac{1}{2}cos(\theta - \phi) - \frac{1}{2}cos(\theta + \phi)$
Dựa vào câu c, ta có:

$$cos(\theta + \phi) = cos\theta cos\phi - sin\theta sin\phi \tag{4}$$

$$cos(\theta - \phi) = cos\theta cos\phi + sin\theta sin\phi \tag{5}$$

Lấy (5) - (4), ta được:

$$sin\theta sin\phi = \frac{1}{2}cos(\theta - \phi) + \frac{1}{2}cos(\theta + \phi)$$

(e) $sin(\theta + \phi) = sin\theta cos\phi + cos\theta sin\phi$ Xét phần ảo ở 2 vế của (3), ta có:

$$sin(\theta + \phi) = sin\theta cos\phi + cos\theta sin\phi$$

20. 1.52

(a)

$$zz^* = re^{j\theta}re^{-j\theta} = r^2$$

(b)

$$\frac{z}{z^*} = \frac{re^{j\theta}}{re^{-j\theta}} = e^{j2\theta}$$

(c)

$$z + z^* = (x + jy) + (x - jy) = 2x = 2\mathcal{R}e\{z\}$$

(d)

$$z - z^* = (x + jy) - (x - jy) = 2x = 2j\mathcal{I}m\{z\}$$

(e)

$$\begin{aligned}(z_1 + z_2)^* &= (x_1 + jy_1 + x_2 + jy_2)^* \\ &= (x_1 + x_2) - j(y_1 + y_2) \\ &= (x_1 - jy_1) + (x_2 - jy_2) \\ &= z_1^* + z_2^*\end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned}(az_1z_2)^* &= (ae^{j\theta}e^{j\phi})^* \\ &= (ae^{j(\theta+\phi)})^* \\ &= ae^{-j(\theta+\phi)} \\ &= ae^{-j\theta}e^{-j\phi} \\ &= az_1^*z_2^*\end{aligned}$$

(g)

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \left(\frac{e^{j\theta}}{e^{j\phi}}\right)^* = \left(e^{j(\theta-\phi)}\right)^* = e^{-j(\theta-\phi)} = \frac{e^{-j\theta}}{e^{-j\phi}} = \frac{z_1^*}{z_2^*}$$

(h) Theo câu c, ta có:

$$\mathcal{R}e\{\frac{z_1}{z_2}\} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{z_1}{z_2}\right) + \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^*\right]$$

Theo câu g, lại có:

$$\mathcal{R}e\{\frac{z_1}{z_2}\} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{z_1}{z_2}\right) + \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^*\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_1^*}{z_2^*}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{z_1 z_2^* + z_1^* z_2}{z_2 z_2^*}\right]$$