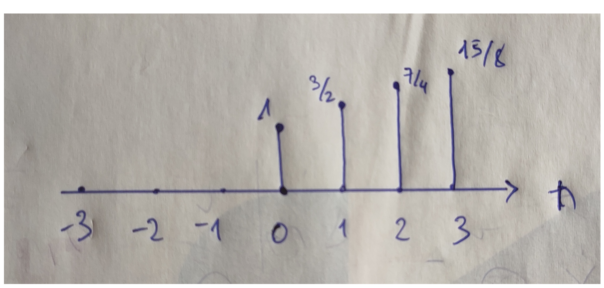
Xử lý Tín hiệu số **Sinh viên:** *Ngô Phù Hữu Đại Sơn*
Học kỳ Xuân 2022, Bài tập 2 **Mã số:** *18120078*
Hạn nộp: 11h59PM - 16/04/2022

---

1. Câu 2.2
   Ta có:
$$h[u] = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{u-1}, & -3 \leq u \leq 9 \\ 0, & elsewhere \end{cases}$$
   Đặt $u = n - k$:
$$h[n-k] = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k-1}, & n-9 \leq k \leq n+3 \\ 0, & elsewhere \end{cases}$$
   Vậy $A = n - 9$ và $B = n + 3$

2. Câu 2.3
   Đặt:
$$x_1[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$
$$h_1[n] = u[n]$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x[n] = x_1[n-2] \\ h[n] = h_1[n+2] \end{cases}$$
   Ta có:
$$y[n] = x[n] * h[n] = x_1[n-2] * h_1[n+2] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k-2]h_1[n-k+2]$$
   Đặt $m = k - 2$
$$\Rightarrow y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1[m]h_1[n-m]$$
$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^m u[m]u[n-m]$$
$$\Rightarrow y[n] = \begin{cases} 2(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}), & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$



3. Câu 2.7

   (a) Ta có:
   $$x[n] = \delta[n-1]$$
   $$\Rightarrow y_a[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]g[n-2k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[k-1]g[n-2k] = g[n-2] = u[n-2] - u[n-6]$$

   (b) Tương tự (a):
   $$y_b[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]g[n-2k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[k-2]g[n-2k] = g[n-4] = u[n-4] - u[n-8]$$

   (c) Đầu vào của (b) chính là đầu vào của (a) được dịch sang phải 1 đơn vị. Nếu hệ thống trên là LTI thì đầu ra của (a) dịch phải 1 đơn vị phải bằng đầu ra của câu b. Tuy nhiên có thể thấy:
   $$y_a[n-1] = u[n-3] - u[n-7] \neq y_b[n]$$
   Do đó, hệ thống trên không phải là một hệ thống LTI

   (d) Ta có:
   $$y_d[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]g[n-2k] = \sum_{k=0}^{\infty} g[n-2k]$$

4. Câu 2.9

   Ta có:
   $$h(k) = e^{2k}u(-k+4) + e^{-2k}u(k-5) = \begin{cases} e^{2k}, & k < 4 \\ e^{-2k}, & k > 5 \\ 0, & 4 < k < 5 \end{cases}$$
   Đặt $k = t - \tau$:
   $$\Rightarrow h(t-\tau) = \begin{cases} e^{2(t-\tau)}, & \tau > t-4 \\ e^{-2(t-\tau)}, & \tau < t-5 \\ 0, & t-5 < \tau < t-4 \end{cases}$$
   Vậy $A = t-5$ và $B = t-4$

5. Câu 2.13

   (a) Ta có:
   $$\left(\frac{1}{5}\right)^n u[n] - A\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} u[n-1] = \delta[n]$$
   Gán $n = 1$, ta được:
   $$\frac{1}{5} - A = 0 \Rightarrow A = \frac{1}{5}$$

(b) Từ (a), ta có:

$$h[n] - \frac{1}{5}h[n-1] = \delta[n]$$
$$\Rightarrow h[n] * (\delta[n] - \frac{1}{5}\delta[n-1]) = \delta[n]$$
$$\Rightarrow g[n] = \delta[n] - \frac{1}{5}\delta[n-1]$$

6. Câu 2.23

7. Câu 2.28

   (a) Ta có:
   - Hệ thống có tính nhân quả do $h[n] = 0, \forall n < 0$
   - Stable do $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = \frac{5}{4} < \infty$

   (b) Ta có:
   - Uncausal do $h[n] \neq 0$ với $n < 0$
   - Stable do $\sum_{n=-2}^{\infty} (0.8)^n = 5 < \infty$

   (c) Ta có:
   - Uncausal do $h[n] \neq 0$ với $n < 0$
   - Unstable do $\sum_{n=-\infty}^{0} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \infty$

   (d) Ta có:
   - Uncausal do $h[n] \neq 0$ với $n < 0$
   - Stable do $\sum_{n=-\infty}^{3} 5^n = \frac{625}{4} < \infty$

   (e) Ta có
   - Causal do $h[n] = 0, \forall n < 0$
   - Unstable do hạn tử thứ 2 sẽ $\rightarrow \infty$ khi $n \rightarrow \infty$

   (f) Ta có:
   - Uncausal do $h[n] \neq 0$ với $n < 0$
   - Stable do $\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] = \frac{625}{4} < \infty$

   (g) Ta có:
   - Causal do $h[n] = 0, \forall n < 0$
   - Stable do $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} < \infty$ (Sử dụng tiêu chuẩn Cauchy)

8. Câu 2.29

   (a) Ta có:
   - Causal do $h(t) = 0, \forall t < 0$
   - Stable do $\int_{2}^{\infty} e^{-4t} dt = \frac{e^{-8}}{4} < \infty$

   (b) Ta có:
   - Uncausal do $h(t) \neq 0, \forall t < 0$
   - Unstable do $\int_{-\infty}^{3} e^{-6t} dt = \infty$

   (c) Ta có:
   - Uncausal do $h(t) \neq 0, \forall t < 0$

- Stable do $\int_{-50}^{\infty} e^{-2t}dt = \frac{e^{100}}{2} < \infty$

(d) Ta có:

- Uncausal do $h(t) \neq 0, \forall t < 0$
- Stable do $\int_{-\infty}^{-1} e^{2t}dt = \frac{e^{-2}}{2} < \infty$

(e) Ta có:

- Uncausal do $h(t) \neq 0, \forall t < 0$
- Stable do $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-6|t|}dt = \frac{1}{3} < \infty$

(f) Ta có:

- Causal do $h(t) = 0, \forall t < 0$
- Stable do $\int_{0}^{\infty} \frac{t}{e^t}dt = 1 < \infty$

(g) Ta có:

- Causal do $h(t) = 0, \forall t < 0$
- Unstable do $\int_{0}^{\infty} e^{(t-100)/100}dt = \infty$

9. Câu 2.40

(a) Ta có:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)}x(\tau - 2)d\tau$$

Đặt $\tau' = \tau - 2$, ta có:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t-2} e^{-(t-\tau'-2)}x(\tau')d\tau' = \left[e^{-(t-2)}u(t-2)\right] * x(t)$$

Vậy đáp ứng xung $h(t) = e^{-(t-2)}u(t-2)$

10. Câu 2.49

11. Câu 3.1
Ta có:

$$\begin{aligned} x(t) &= a_1e^{j(2\pi/T)t} + a_{-1}e^{-j(2\pi/T)t} + a_3e^{3j(2\pi/T)t} + a_{-3}e^{-3j(2\pi/T)t} \\ &= 2e^{j(2\pi/T)t} + 2e^{-j(2\pi/T)t} + 4je^{3j(2\pi/T)t} - 4je^{-3j(2\pi/T)t} \\ &= 4cos(\frac{\pi}{4}t) - 8sin(\frac{6\pi}{8}t) \\ &= 4cos(\frac{\pi}{4}t) + 8cos(\frac{6\pi}{8}t + \frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

12. Câu 3.2
Ta có:

$$\begin{aligned} x(t) &= a_0 + a_2e^{2j(2\pi/N)n} + a_{-2}e^{-2j(2\pi/N)n} + a_4e^{4j(2\pi/N)n} + a_{-4}e^{-4j(2\pi/N)n} \\ &= 1 + e^{j\pi/4}e^{2j(2\pi/N)n} + e^{-j\pi/4}e^{-2j(2\pi/N)n} + 2e^{j\pi/3}e^{4j(2\pi/N)n} + 2e^{-j\pi/3}e^{-4j(2\pi/N)n} \\ &= 1 + 2cos(\frac{4\pi}{5}n + \frac{\pi}{4}) + 4cos(\frac{8\pi}{5}n + \frac{\pi}{3}) \\ &= 1 + 2sin(\frac{4\pi}{5}n + \frac{3\pi}{4}) + 4sin(\frac{8\pi}{5}n + \frac{5\pi}{6}) \end{aligned}$$

13. Câu 3.3

Ta có:

$$x(t) = 2 + \frac{1}{2}e^{j(2\pi/3)t} + \frac{1}{2}e^{-j(2\pi/3)t} - 2je^{j(5\pi/3)t} + 2je^{-j(5\pi/3)t}$$

Từ khai triển trên, ta kết luận chu kì cơ bản $T = 6$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_0 = 2 \\ a_2 = a_{-2} = \frac{1}{2} \\ a_5 = -2j \\ a_{-5} = 2j \end{cases}$$

14. Câu 3.6

(a) Xét:

- Ta có:

$$a_k = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^k, & 0 \le k \le 100 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

Do $a_k \neq a^*_{-k}$ nên $x_1(t)$ không phải hàm thực

- Tương tự:

$$a_k = \begin{cases} cos(k\pi), & -100 \le k \le 100 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

Do $a_k = a^*_{-k}$ nên $x_2(t)$ là hàm thực

- Tương tự:

$$a_k = \begin{cases} jsin(k\pi/2), & -100 \le k \le 100 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

Do $a_k = a^*_{-k}$ nên $x_3(t)$ là hàm thực

(b) Ta có, tín hiệu tuần hoàn là tín hiệu chẵn nếu hệ số của dãy Fourier biễu diễn tín hiệu đó là hàm chẵn. Do đó, chỉ có $x_2(t)$ là tín hiệu chẵn

15. Câu 3.13

Do $x(t)$ là hàm thực và là hàm lẻ nên các hệ số a_k có giá trị thuần ảo (vì vậy $a_0 = 0$) và cũng là hàm lẻ. Ta có:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{8}\int_0^8 x(t)e^{-j(2\pi/8)kt}dt \\ &= \frac{1}{8}\int_0^4 e^{-j(2\pi/8)kt}dt - \frac{1}{8}\int_4^8 e^{-j(2\pi/8)kt}dt \\ &= \frac{1}{j\pi k}\left(1 - e^{-j\pi k}\right) \\ &= \begin{cases} 0, & k = 2u \\ \frac{2}{j\pi k}, & k = 2u+1 \end{cases} u \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Ta có:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k H(jk\omega_0)e^{jk\omega_0 t}$$

Với $k = 2u (u \in \mathbb{Z})$, ta có:

$$a_k = 0 \Rightarrow a_k H(jk\omega_0)e^{jk\omega_0 t} = 0$$

Với $k = 2u + 1 (u \in \mathbb{Z})$, ta có:

$$H(jk\omega_0) = H(jk(\pi/4)) = \frac{sin(k\pi)}{k(\pi/4)} = \frac{sin(\pi)}{(2u+1)(\pi/4)} = 0$$

Vậy $y(t) = 0$

16. Câu 3.14
    Hệ số Fourier của $x[n]$ là:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} x[n]e^{-j(2\pi/4)kn} \\ &= \frac{1}{4} (\forall k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Ta thu được đầu ra $y[n]$ như sau:

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=0}^{3} a_k H(e^{j(2\pi/4)k})e^{jk(2\pi/4)kn} \\ &= \sum_{k=0}^{3} \frac{1}{4} H(e^{j(2\pi/4)k})e^{jk(2\pi/4)kn} \end{aligned}$$

Theo đề bài, ta có:

$$\begin{aligned} y[n] &= cos(\frac{5\pi}{2}n + \frac{\pi}{4}) \\ &= cos(\frac{\pi}{2}n + \frac{\pi}{4}) \\ &= \frac{1}{2}e^{j(\frac{\pi}{2}n+\frac{\pi}{4})} + \frac{1}{2}e^{-j(\frac{\pi}{2}n+\frac{\pi}{4})} \\ &= \frac{1}{2}e^{j(\frac{\pi}{2}n+\frac{\pi}{4})} + \frac{1}{2}e^{j(\frac{3\pi}{2}n-\frac{\pi}{4})} \end{aligned}$$

Vậy:

$$\begin{cases} H(e^{j0}) = H(e^{j\pi}) = 0 \\ H(e^{j\frac{\pi}{2}}) = 2e^{j\frac{\pi}{4}} \\ H(e^{j\frac{3\pi}{2}}) = 2e^{j\frac{-\pi}{4}} \end{cases}$$

17. Câu 3.15
    Ta có:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k H(jk\omega_0)e^{jk\omega_0 t}$$

Với $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 12$. Lại có:

$$H(jk\omega_0) = 0 \Rightarrow |k\omega_0| > 100 \Rightarrow k > 8$$

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{8} a_k H(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{8} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

Theo giả thuyết, ta có:

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) \\ \Leftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{8} a_k e^{jk\omega_0 t} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \\ \Leftrightarrow \sum_{k=9}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} &= 0 \\ \Rightarrow a_k &= 0 (k > 8) \end{aligned}$$

Vậy với $k > 8$ thì $a_k = 0$

18. Câu 3.21 Ta có:

$$\begin{aligned} x(t) &= a_1 e^{j(2\pi/T)t} + a_{-1} e^{-j(2\pi/T)t} + a_5 e^{5j(2\pi/T)t} + a_{-5} e^{-5j(2\pi/T)t} \\ &= je^{j(2\pi/T)t} - je^{-j(2\pi/T)t} + 2e^{5j(2\pi/T)t} + 2e^{-5j(2\pi/T)t} \\ &= -2sin(\frac{\pi}{4}t) + 4cos(\frac{5\pi}{4}t) \\ &= -2cos(\frac{\pi}{4}t - \frac{\pi}{2}) + 4cos(\frac{5\pi}{4}t) \end{aligned}$$

19. Câu 3.22

20. Câu 3.27 Ta có:

$$\begin{aligned} x[n] &= a_0 + a_2 e^{2j(2\pi/N)n} + a_{-2} e^{-2j(2\pi/N)n} + a_4 e^{4j(2\pi/N)n} + a_{-4} e^{-4j(2\pi/N)n} \\ &= 2 + 2e^{j\pi/6} e^{j(4\pi/5)n} + 2e^{-j\pi/6} e^{-j(4\pi/5)n} + e^{j\pi/3} e^{j(8\pi/5)n} + e^{-j\pi/3} e^{-j(8\pi/5)n} \\ &= 2 + 4cos(\frac{4\pi n}{5} + \frac{\pi}{6}) + 2cos(\frac{8\pi n}{5} + \frac{\pi}{3}) \\ &= 2 + 4sin(\frac{4\pi n}{5} + \frac{2\pi}{3}) + 2sin(\frac{8\pi n}{5} + \frac{5\pi}{6}) \end{aligned}$$