

MATH2007

Première partie

Formulaire

1 Dérivées et primitives directes

$f(x)$	$Df(x)$	$F(x)$
C	0	Cx
x	1	$\frac{x^2}{2}$
x^n	nx^{n-1}	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$(x-a)^n$	$n(x+a)^{n-1}$	$\frac{(x+a)^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{(x+a)^n}$	$-\frac{n}{(x+a)^{n+1}}$	
$\frac{1}{x+a}$		$\ln(x+a)$
$\ln(x+a)$	$\frac{1}{x+a}$	
e^x	e^x	e^x
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\sin(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$	
$\cotg(x)$	$\frac{-1}{\sin^2(x)}$	
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\arccos(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	
$\arctan(x)$	$\frac{-1}{1+x^2}$	

2 Calcul vectoriel : notions analytiques

Propriété 2.1 (Produit scalaire).

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y$$

Propriété 2.2 (Projection orthogonale).

$$\vec{u}' = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v}$$

Propriété 2.3 (Produit vectoriel).

Voici une méthode pour calculer le produit vectoriel :

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \wedge \\ \times \\ \wedge \end{matrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ \\ \end{pmatrix}$$

$u_1 \quad v_1$ $u_1 \quad v_1$

$$\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \wedge \\ \times \\ \wedge \end{matrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \wedge \\ \times \\ \wedge \end{matrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$$

$u_1 \quad v_1$ $u_1 \quad v_1$
 $u_2 \quad v_2$ $u_2 \quad v_2$

3 Coniques

3.1 Ellipses

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Intersections avec les axes : $(a, 0); (0, b)$

3.1.1 $a > b$

L'excentricité $e = \frac{c}{a}$
Les foyers F sont $(c, 0); (-c, 0)$
où $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

3.1.2 $a < b$

L'excentricité $e = \frac{c}{b}$
Les foyers F sont $(0, c); (0, -c)$
où $c = \sqrt{b^2 - a^2}$

3.2 Hyperboles

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \quad (2)$$

Intersection avec l'axe des x : (1) $(a, 0)$ ou (2) $(0, a)$

L'excentricité $e = (1) \frac{c}{a}$ ou (2) $\frac{c}{b}$

Les foyers F sont (1) $(c, 0); (-c, 0)$ ou (2) $(0, c); (0, -c)$

où $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ Les asymptotes sont : $y = (1) \pm \frac{b}{a}x$ ou (2) $\pm \frac{a}{b}x$

3.3 Paraboles

$$y = 2px^2 \quad (3)$$

$$x = 2py^2 \quad (4)$$

L'excentricité est 1

Le foyer est $(p/2, 0)$ pour (3) ou $(0, p/2)$ pour (4)

Deuxième partie

Théorie

4 Monotonie et extrema

Propriété 4.1 (Monotonie et dérivation). *Soit f une fonction réelle dérivable sur $I =]a, b[$. On a, f est croissant (resp. décroissant) sur I ssi Df est une fonction positive (resp. négative) sur I .
(Si Df l'est strictement sur I , alors f également. (réciproque fausse))*

Propriété 4.2 (Extrema et dérivation). *Soit f une fonction dérivable sur $I =]a, b[$ et soit $x_0 \in I$.*

1. *Si x_0 est un extremum local de f sur I , alors $Df(x_0) = 0$.*
2. *Lorsque la fonction appartient à $C_2(I)$, pour caractériser un extremum, on peut donner un critère utilisant la valeur de la dérivée seconde :*
 - *si $Df(x_0) = 0$ et $D^2f(x_0) < 0$ alors x_0 est un maximum local ;*
 - *Si $Df(x_0) = 0$ et $D^2f(x_0) > 0$ alors x_0 est un minimum local.*

5 Primitivation

Définition 5.1. *Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I de \mathbb{R} . On appelle primitive de f sur I toute fonction dérivable F sur I telle que $DF(x) = f(x)$, $x \in I$*

Propriété 5.1. *Une fonction continue sur $]a, b[$ admet toujours une primitive sur cet intervalle.*

Propriété 5.2 (Unicité). *Soient F_1 et F_2 deux primitives de f sur $]a, b[$ qui vérifient $F_1(x_0) = r = F_2(x_0)$. Comme la dérivée d'une constante est nulle, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $F_1(x) = F_2(x) + c$ pour tout $x \in]a, b[$*

6 Continuité et dérivabilité

Définition 6.1 (Continuité). x_0 est un point de continuité pour f si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existe.

Définition 6.2 (Dérivabilité). f est dérivable en x_0 si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et est finie.

Propriété 6.1 (Lien entre dérivabilité et continuité). *Soit f une fonction dérivable sur $]a,b[$, alors f est continue sur $]a,b[$.*

Preuve.

Soit f une fonction dérivable sur $I =]a,b[$ et soit $x_0 \in I$. Alors pour tout $x \in I$, $x \neq x_0$, on a

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= (x - x_0) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ \text{comme } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= Df(x_0) \\ \text{on obtient } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - f(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= 0 \cdot Df(x_0) = 0 \end{aligned}$$