

# MATH2007

## Première partie Formulaire

### 1 Dérivées et primitives directes

$f(x)$	$Df(x)$	$F(x)$
$C$	0	$Cx$
$x$	1	$\frac{x^2}{2}$
$x^n$	$nx^{n-1}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$(x - a)^n$	$n(x + a)^{n-1}$	$\frac{(x+a)^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{(x+a)^n}$	$-\frac{n}{(x+a)^{n+1}}$	
$\frac{1}{x+a}$		$\ln( x + a )$
$\ln(x + a)$	$\frac{1}{x+a}$	
$e^x$	$e^x$	$e^x$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\sin(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$	
$\cotg(x)$	$\frac{-1}{\sin^2(x)}$	
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\arccos(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	
$\operatorname{arctan}(x)$	$\frac{-1}{1+x^2}$	

## 2 Calcul vectoriel : notions analytiques

**Propriété 2.1** (Produit scalaire).

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y$$

**Propriété 2.2** (Projection orthogonale).

$$\vec{u}' = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v}$$

**Propriété 2.3** (Produit vectoriel).

*Voici une méthode pour calculer le produit vectoriel :*

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_1 \\ u_2 \end{array} \right) \quad \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$$

## 3 Coniques

### 3.1 Ellipses

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Intersections avec les axes :  $(a, 0); (0, b)$

#### 3.1.1 $a > b$

L'excentricité  $e = \frac{c}{a}$   
Les foyers F sont  $(c, 0); (-c, 0)$   
où  $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

#### 3.1.2 $a < b$

L'excentricité  $e = \frac{c}{b}$   
Les foyers F sont  $(0, c); (0, -c)$   
où  $c = \sqrt{b^2 - a^2}$

### 3.2 Hyperboles

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \quad (2)$$

Intersection avec l'axe des x : (1)  $(a, 0)$  ou (2)  $(0, a)$

L'excentricité  $e = (1)\frac{c}{a}$  ou  $(2)\frac{c}{b}$   
Les foyers F sont (1)  $(c, 0); (-c, 0)$  ou (2)  $(0, c); (0, -c)$   
où  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$  Les asymptotes sont :  $y = (1) \pm \frac{b}{a}x$  ou  $(2) \pm \frac{a}{b}x$

### 3.3 Paraboles

$$y = 2px^2 \quad (3)$$

$$x = 2py^2 \quad (4)$$

L'excentricité est 1

Le foyer est  $(p/2, 0)$  pour (3) ou  $(0, p/2)$  pour (4)

## Deuxième partie

# Théorie

### 4 Monotonie et extrema

**Propriété 4.1** (Monotonie et dérivation). Soit  $f$  une fonction réelle dérivable sur  $I = ]a, b[$ . On a,  $f$  est croissant (resp. décroissant) sur  $I$ ssi  $Df$  est une fonction positive (resp. négative) sur  $I$ .  
(Si  $Df$  l'est strictement sur  $I$ , alors  $f$  également. (réiproque fausse))

**Propriété 4.2** (Extrema et dérivation). Soit  $f$  une fonction dérivable sur  $I = ]a, b[$  et soit  $x_0 \in I$ .

1. Si  $x_0$  est un extremum local de  $f$  sur  $I$ , alors  $Df(x_0) = 0$ .
2. Lorsque la fonction appartient à  $C_2(I)$ , pour caractériser un extremum, on peut donner un critère utilisant la valeur de la dérivée seconde :
  - si  $Df(x_0) = 0$  et  $D^2f(x_0) < 0$  alors  $x_0$  est un maximum local;
  - Si  $Df(x_0) = 0$  et  $D^2f(x_0) > 0$  alors  $x_0$  est un minimum local.

### 5 Primitivation

**Définition 5.1.** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle ouvert  $I$  de  $\mathbb{R}$ . On appelle primitive de  $f$  sur  $I$  toute fonction dérivable  $F$  sur  $I$  telle que  $DF(x) = f(x)$ ,  $x \in I$

**Propriété 5.1.** Une fonction continue sur  $]a, b[$  admet toujours une primitive sur cet intervalle.

**Propriété 5.2** (Unicité). Soient  $F_1$  et  $F_2$  deux primitives de  $f$  sur  $]a, b[$  qui vérifient  $F_1(x_0) = r = F_2(x_0)$ . Comme la dérivée d'une constante est nulle, il existe  $c \in \mathbb{R}$  tel que  $F_1(x) = F_2(x) + c$  pour tout  $x \in ]a, b[$

### 6 Continuité et dérivabilité

**Définition 6.1** (Continuité).  $x_0$  est un point de continuité pour  $f$  si  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  existe.

**Définition 6.2** (Dérivabilité).  $f$  est dérivable en  $x_0$  si  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  existe et est finie.

**Propriété 6.1** (Lien entre dérivabilité et continuité). *Soit  $f$  une fonction dérivable sur  $]a,b[$ , alors  $f$  est continue sur  $]a,b[$ .*

**Preuve.**

*Soit  $f$  une fonction dérivable sur  $I = ]a,b[$  et soit  $x_0 \in I$ . Alors pour tout  $x \in I$ ,  $x \neq x_0$ , on a*

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= (x - x_0) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ \text{comme } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= Df(x_0) \\ \text{on obtient } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - f(x_0) &= \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= 0 \cdot Df(x_0) = 0 \end{aligned}$$