# $\boxed{\text{MATH2007}}$

## Première partie
# Formulaire

## 1 Dérivées et primitives directes

| $f(x)$ | $Df(x)$ | $F(x)$ |
|---|---|---|
| $C$ | $0$ | $Cx$ |
| $x$ | $1$ | $\frac{x^2}{2}$ |
| $x^n$ | $nx^{n-1}$ | $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ |
| $(x-a)^n$ | $n(x+a)^{n-1}$ | $\frac{(x+a)^{n+1}}{n+1}$ |
| $\frac{1}{(x+a)^n}$ | $-\frac{n}{(x+a)^{n+1}}$ | |
| $\frac{1}{x+a}$ | | $ln(\|x+a\|)$ |
| $ln(x+a)$ | $\frac{1}{x+a}$ | |
| $e^x$ | $e^x$ | $e^x$ |
| $sin(x)$ | $cos(x)$ | $-cos(x)$ |
| $cos(x)$ | $-sin(x)$ | $sin(x)$ |
| $tan(x)$ | $\frac{1}{cos^2(x)}$ | |
| $cotg(x)$ | $\frac{-1}{sin^2(x)}$ | |
| $arcsin(x)$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | |
| $arcos(x)$ | $-\frac{1}{sqrt1-x^2}$ | |
| $arctan(x)$ | $\frac{1}{1+x^2}$ | |
| $arctan(x)$ | $\frac{-1}{1+x^2}$ | |

## 2 Calcul vectoriel : notions analytiques

**Propriété 2.1** (Produit scalaire)**.**

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = u_x.v_x + u_y.v_y$$

**Propriété 2.2** (Projection orthogonale)**.**

$$\vec{u'} = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{||\vec{v}||^2}\vec{v}$$

**Propriété 2.3** (Produit vectoriel)**.**
*Voici une méthode pour calculer le produit vectoriel :*

$$\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c}\begin{pmatrix}\cancel{u_1}\\u_2\\u_3\end{pmatrix}\\ u_1\end{array}\wedge\begin{array}{c}\begin{pmatrix}\cancel{v_1}\\v_2\\v_3\end{pmatrix}\\ v_1\end{array}=\begin{pmatrix}u_2v_3-u_3v_2\\ \quad \\ \quad\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c}\begin{pmatrix}\cancel{u_1}\\\cancel{u_2}\\u_3\end{pmatrix}\\ u_1\\ u_2\end{array}\wedge\begin{array}{c}\begin{pmatrix}\cancel{v_1}\\\cancel{v_2}\\v_3\end{pmatrix}\\ v_1\\ v_2\end{array}=\begin{pmatrix}u_2v_3-u_3v_2\\u_3v_1-u_1v_3\\ \quad\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c}\begin{pmatrix}\cancel{u_1}\\\cancel{u_2}\\\cancel{u_3}\end{pmatrix}\\ u_1\\ u_2\end{array}\wedge\begin{array}{c}\begin{pmatrix}\cancel{v_1}\\\cancel{v_2}\\\cancel{v_3}\end{pmatrix}\\ v_1\\ v_2\end{array}=\begin{pmatrix}u_2v_3-u_3v_2\\u_3v_1-u_1v_3\\u_1v_2-u_2v_1\end{pmatrix}$$

# 3 Coniques

## 3.1 Ellipses

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Intersections avec les axes : $(a, 0); (0, b)$

### 3.1.1 $a > b$

L'excentricité $e = \frac{c}{a}$
Les foyers F sont $(c, 0); (-c, 0)$
où $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

### 3.1.2 $a < b$

L'excentricité $e = \frac{c}{b}$
Les foyers F sont $(0, c); (0, -c)$
où $c = \sqrt{b^2 - a^2}$

## 3.2 Hyperboles

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (1)$$

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \qquad (2)$$

Intersection avec l'axe des x : $(1)(a, 0)$ ou (2) $(0, a)$
L'excentricité $e = (1)\frac{c}{a}$ ou $(2)\frac{c}{b}$
Les foyers F sont (1) $(c, 0); (-c, 0)$ ou (2) $(0, c); (0, -c)$
où $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ Les asymptotes sont : $y = (1) \pm \frac{b}{a}x$ ou $(2) \pm \frac{a}{b}x$

## 3.3 Paraboles

$$y = 2px^2 \qquad (3)$$

$$x = 2py^2 \qquad (4)$$

L'excentricité est 1
Le foyer est (p/2, 0) pour (3) ou (0, p/2) pour (4)

Deuxième partie

# Théorie

## 4 Monotonie et extrema

**Propriété 4.1** (Monotonie et dérivation)**.** *Soit f une fonction réelle dérivable sur I = ]a,b[. On a, f est croissant (resp. décroissant) sur I ssi Df est une fonction positive (resp. négative) sur I.*
*(Si Df l'est strictement sur I, alors f égalemment. (réciproque fausse))*

**Propriété 4.2** (Extrema et dérivation)**.** *Soit f une fonction dérivable sur I = ]a,b[ et soit* $x_0 \in I$.

1. *Si* $x_0$ *est un extremum local de f sur I, alors* $Df(x_0) = 0$.
2. *Lorsque la fonction appartient à* $C_2(I)$*, pour caractériser un extremum, on peut donner un critère utilisant la valeur de la dérivée seconde :*
   - *si* $Df(x_0) = 0$ *et* $D^2f(x_0) < 0$ *alors* $x_0$ *est un maximum local ;*
   - *Si* $Df(x_0) = 0$ *et* $D^2f(x_0) > 0$ *alors* $x_0$ *est un minimum local.*

## 5 Primitivation

**Définition 5.1.** *Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I de* $\mathbb{R}$*. On appelle primitive de f sur I toute fonction dérivable F sur I telle que DF(x) = f(x),* $x \in I$

**Propriété 5.1.** *Une fonction continue sur ]a,b[ admet toujours une primitive sur cet intervalle.*

**Propriété 5.2** (Unicité)**.** *Soient* $F_1 et F_2$ *deux primitives de f sur ]a,b[ qui vérifient* $F_1(x_0) = r = F_2(x_0)$*. Comme la dérivée d'une constante est nulle, il existe* $c \in \mathbb{R}$ *tel que* $F_1(x) = F_2(x) + c$ *pour tout* $x \in$ *]a,b[*

## 6 Continuité et dérivabilité

**Définition 6.1** (Continuité)**.** $x_0$ *est un point de continuité pour f si* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ *existe.*

**Définition 6.2** (Dérivabilité)**.** *f est dérivable en* $x_0$ *si* $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ *existe et est finie.*

**Propriété 6.1** (Lien entre dérivabilité et continuité)**.** *Soit $f$ une fonction dérivable sur $]a,b[$, alors $f$ est continue sur $]a,b[$.*

***Preuve**.*

*Soit $f$ une fonction dérivable sur $I = ]a,b[$ et soit $x_0 \in I$. Alors pour tout $x \in I$, $x \neq x_0$, on a*

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) = (x - x_0)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ \textit{comme} \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = Df(x_0) \\ \textit{on obtient} \lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) \\ = \lim_{x \to x_0}(x - x_0) \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ = 0.Df(x_0) = 0 \end{aligned}$$