$\boxed{\textbf{MATH2007}}$

Première partie
Formulaire

1 Dérivées et primitives directes

$f(x)$	$Df(x)$	$F(x)$
C	0	Cx
x	1	$\frac{x^2}{2}$
x^n	nx^{n-1}	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$(x-a)^n$	$n(x+a)^{n-1}$	$\frac{(x+a)^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{(x+a)^n}$	$-\frac{n}{(x+a)^{n+1}}$	
$\frac{1}{x+a}$		$ln(\|x+a\|)$
$ln(x+a)$	$\frac{1}{x+a}$	
e^x	e^x	e^x
$sin(x)$	$cos(x)$	$-cos(x)$
$cos(x)$	$-sin(x)$	$sin(x)$
$tan(x)$	$\frac{1}{cos^2(x)}$	
$cotg(x)$	$\frac{-1}{sin^2(x)}$	
$arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$arcos(x)$	$-\frac{1}{sqrt1-x^2}$	
$arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	
$arctan(x)$	$\frac{-1}{1+x^2}$	

2 Calcul vectoriel : notions analytiques

Propriété 2.1 (Produit scalaire)**.**

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = u_x.v_x + u_y.v_y$$

Propriété 2.2 (Projection orthogonale)**.**

$$\vec{u'} = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{||\vec{v}||^2}\vec{v}$$

Propriété 2.3 (Produit vectoriel)**.**
Voici une méthode pour calculer le produit vectoriel :

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}
\qquad
\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} \cancel{u_1} \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} & \wedge & \begin{pmatrix} \cancel{v_1} \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \\ u_1 & & v_1 \end{array} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} \cancel{u_1} \\ \cancel{u_2} \\ u_3 \end{pmatrix} & \wedge & \begin{pmatrix} \cancel{v_1} \\ \cancel{v_2} \\ v_3 \end{pmatrix} \\ u_1 & & v_1 \\ u_2 & & v_2 \end{array} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ \\ \end{pmatrix}
\qquad
\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} \cancel{u_1} \\ \cancel{u_2} \\ \cancel{u_3} \end{pmatrix} & \wedge & \begin{pmatrix} \cancel{v_1} \\ \cancel{v_2} \\ \cancel{v_3} \end{pmatrix} \\ u_1 & & v_1 \\ u_2 & & v_2 \end{array} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$$

3 Coniques

3.1 Ellipses

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Intersections avec les axes : $(a, 0); (0, b)$

3.1.1 $a > b$

L'excentricité $e = \frac{c}{a}$
Les foyers F sont $(c, 0); (-c, 0)$
où $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

3.1.2 $a < b$

L'excentricité $e = \frac{c}{b}$
Les foyers F sont $(0, c); (0, -c)$
où $c = \sqrt{b^2 - a^2}$

3.2 Hyperboles

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$
$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \quad (2)$$

Intersection avec l'axe des x : (**??**)$(a, 0)$ ou (**??**) $(0, a)$
L'excentricité $e =$ (**??**)$\frac{c}{a}$ ou (**??**)$\frac{c}{b}$
Les foyers F sont (**??**) $(c, 0); (-c, 0)$ ou (**??**) $(0, c); (0, -c)$
où $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ Les asymptotes sont : $y =$ (**??**) $\pm \frac{b}{a}x$ ou (**??**)$\pm \frac{a}{b}x$

3.3 Paraboles

$$y = 2px^2 \quad (3)$$
$$x = 2py^2 \quad (4)$$

L'excentricité est 1
Le foyer est (p/2, 0) pour (**??**) ou (0, p/2) pour (**??**)

Deuxième partie

Théorie

4 Monotonie et extrema

Propriété 4.1 (Monotonie et dérivation). *Soit f une fonction réelle dérivable sur I =]a,b[. On a, f est croissant (resp. décroissant) sur I ssi Df est une fonction positive (resp. négative) sur I.*
(Si Df l'est strictement sur I, alors f égalemment. (réciproque fausse))

Propriété 4.2 (Extrema et dérivation). *Soit f une fonction dérivable sur I =]a,b[et soit* $x_0 \in I$.

1. *Si* x_0 *est un extremum local de f sur I, alors* $Df(x_0) = 0$.
2. *Lorsque la fonction appartient à* $C_2(I)$, *pour caractériser un extremum, on peut donner un critère utilisant la valeur de la dérivée seconde :*
   — *si* $Df(x_0) = 0$ *et* $D^2f(x_0) < 0$ *alors* x_0 *est un maximum local;*
   — *Si* $Df(x_0) = 0$ *et* $D^2f(x_0) > 0$ *alors* x_0 *est un minimum local.*

5 Primitivation

Définition 5.1. *Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I de* $\mathbb{R}$. *On appelle primitive de f sur I toute fonction dérivable F sur I telle que DF(x) = f(x),* $x \in I$

Propriété 5.1. *Une fonction continue sur]a,b[admet toujours une primitive sur cet intervalle.*

Propriété 5.2 (Unicité). *Soient* $F_1 et F_2$ *deux primitives de f sur]a,b[qui vérifient* $F_1(x_0) = r = F_2(x_0)$. *Comme la dérivée d'une constante est nulle, il existe* $c \in \mathbb{R}$ *tel que* $F_1(x) = F_2(x) + c$ *pour tout* $x \in\ ]a,b[$

6 Continuité et dérivabilité

Définition 6.1 (Continuité). x_0 *est un point de continuité pour f si* $\lim_{x \to x_0} f(x)$ *existe.*

Définition 6.2 (Dérivabilité). *f est dérivable en* x_0 *si* $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ *existe et est finie.*

Propriété 6.1 (Lien entre dérivabilité et continuité)**.** *Soit f une fonction dérivable sur $]a,b[$, alors f est continue sur $]a,b[$.*
Preuve*.*
Soit f une fonction dérivable sur $I =]a,b[$ et soit $x_0 \in I$. Alors pour tout $x \in I$, $x \neq x_0$, on a

$$\begin{aligned}
f(x) - f(x_0) &= (x - x_0)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\
\textit{comme} \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= Df(x_0) \\
\textit{on obtient} \lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) & \\
&= \lim_{x \to x_0} (x - x_0) \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\
&= 0.Df(x_0) = 0
\end{aligned}$$