

Spares Optimization Algorithms IHT and OMP

曹旭 16307110230

1. Introduction

压缩感知是近年来发展起来的关于信息获取与信息处理的一种新理论。根据压缩感知，在采集数据的时候，将直接采集有效的 M 个测量值，而非满足 Nyquist 采样定理的 N 个采样值 ($M < N$)。如果信息可压缩，我们就可以通过线性投影获得信号的低维形式。所得的数据能够以无失真或较低失真地方式重建原始的数字信号。

$$\Phi x = y$$

其中， y 就是压缩后的信号表示， Φ 表示采集的测量矩阵，可以是一个随机矩阵， x 代表原始的数字信号。

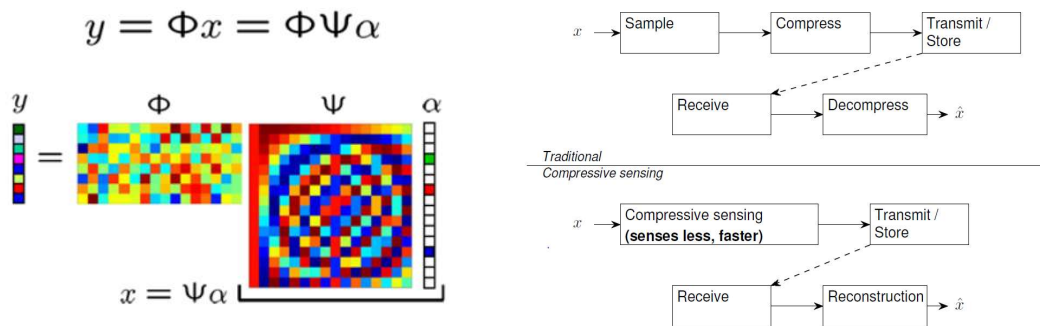


图 1. 压缩感知理论和应用示意图

从上面的采集公式 $\Phi x = y$ 可以得出压缩感知的三个必要条件：1、 x ：信号，满足稀疏性（在某个变换域内是稀疏的）；2、 Φ ：测量矩阵，满足一定的不相关性；3、已知 y ，如何得到 x ：使用恢复算法。

2. Iterative Hard Thresholding (IHT) Algorithm

以下部分为 IHT 算法代码函数部分：（实现过程请见附件）

```
function [x] = IHT(A, y, s, u, iterations)
```

```
%IHT
```

```
x0 = zeros(256,1);
```

```
for k = 0:iterations
```

```
    x = x0 + u*A'*(y - A*x0);
```

```
    [num, index] = sort(x,1,'descend');
```

```
    x(index(s+1:end))=0;
```

```
    x0 = x;
```

```
end
```

```
end
```

利用 IHT 算法压缩图像获得稀疏解，经过恢复后，得到的图像和原图像比较，效果如下：

3. Orthogonal Matching Pursuit (OMP) Algorithm

以下部分为 OMP 算法代码函数部分：（实现过程请见附件）

```
function [x] = OMP(A, y, s)
%OMP

x = zeros(256,1);
r = zeros(size(y,1),1);
r = y ;
I = [];
for k =1:s
    [num, index] = max(abs(A'*r));
    I = [I, A(:,index)];
    A(:,index) = zeros(size(A,1),1);
    r = y - I*pinv(I)*y;
    array(k) = index;
end
x(array,1) = pinv(I)*y;
end
```

利用 OMP 算法压缩图像获得稀疏解，经过恢复后，得到的图像和原图像比较，效果如下：

图 3. 1-4 分别为原图像，矩阵 Φ 图像，矩阵 ϕ 图像，恢复图像

4. Comparison among IHT, OMP, and Also Other Algorithm

我在写 IHT 和 OMP 代码时为了保证可比性，将 IHT 的迭代次数与 OMP 的 S 均设置为 128，这样能更直观地分析两个算法的好坏。

由图 2，图 3 可观察发现，OMP 在恢复效果上远好于 IHT，通过 100 次运行所得的柱形图（图 4，图 5）可发现 OMP 与原图像之间的差异基本上在 10^1 数量级，而 IHT 会达到 10^3 — 10^4 数量级（选用的图像 256×256 ，使用 im2double 函数将每一项置为 0—1 之间的数值）。

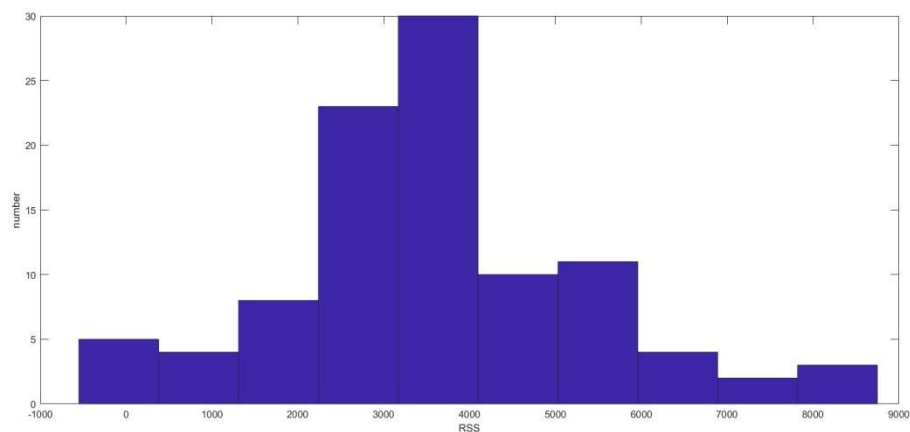


图 4. 运行 100 次 IHT 的 RSS 柱形图分布

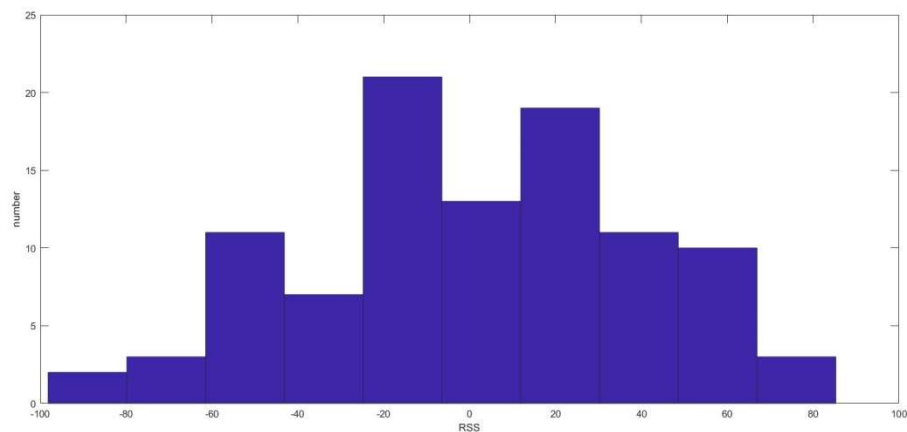


图 5. 运行 100 次 OMP 的 RSS 柱形图分布

在图像上，OMP 的恢复效果也远高于 IHT，可以看出，OMP 算法处理得到的稀疏解在恢复成图像时除了背景有噪声外，基本上恢复出了我本人证件照的脸部轮廓、发型、服饰和表情，而 IHT 处理后的效果就比较糟糕，不仅背景中出现了条纹状的噪声信号，我的面部也较难识别出来。

OMP 虽然获得了不错的恢复效果，但是与此同时 OMP 的时间复杂度也远高于 IHT，OMP 运行 1 次的时间大约为 IHT 的 10 倍，这与 OMP 函数中我使用了多于 IHT 的矩阵处理代码有关。这是因为 OMP 算法在每步迭代中都要计算信号残差在字典矩阵中的每一列上的投影，计算量大，收敛速度也比较慢。

与 OMP 相比，压缩采样匹配追踪 (Compressive Sampling Matching Pursuit, CoSaMP 提供了更全面的理论保证，并且能在采样过程中对噪声鲁棒；除了极端稀疏的情形，CoSaMP 会比 OMP 更快更有效。Dai 等基于回溯策略提出一个相似的算法叫子空间追踪 (Subspace Pursuit, SP)，但该算法不是自适应于信号稀疏度的，因此其重构精度仍然不够理想。为了进一步提高重构精度，Thong 提出了稀疏自适应匹配追踪 (Sparsity Adaptive Matching Pursuit, SAMP) 算法。该算法自适应于信号稀疏度，重构精度也得到了相应提高^[3]。

5. Conclusion

作为稀疏优化的两种经典算法，IHT 和 OMP 都能实现对稀疏解的构建以及对恢复的实现，但是从图像效果上来看，OMP 要略优于 IHT 的优化效果。

参考文献：

- [1] Blumensath T, Davies M E . Iterative Hard Thresholding for Compressed Sensing[J]. Applied & Computational Harmonic Analysis, 2009, 27(3):265-274.
- [2] Tropp J, Gilbert A. Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit [J]. Transactions on Information Theory, 2007, 53 (12) : 4655-4666.
- [3] 于春梅. 稀疏优化算法综述[J]. 计算机工程与应用, 2014, 50(11):210-217.