RATEFIARISON Harivony Lalatiana

UNIVERSITE D'ANTANANARIVO

FACUILTE DES SCIENCE

Mathématiques Informatique et
Statistiques Appliquées

- Optimisation de Cuthill-Mac Kee -

Algorithme
et
Résolution

RATEFIARISON Harivony Lalatiana

harivonyratefiarison@gmail.com

+261 34 93 851 83

I - Optimisation de Cuthill-Mac Kee

L'optimisation de Cuthill-Mac Kee consiste à résoudre le systeme de la forme $Ax = b$en optimisant le rangement et le nombre d'operation

On se propose de résudre le systeme suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 6 & & & & & & & & & \\ 0 & 4 & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 4 & & & & & & & \\ 1 & 1 & 0 & 4 & & & & & & \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 6 & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & & & \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & & \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 8 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \\ -4 \\ 5 \\ 18 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix}$$

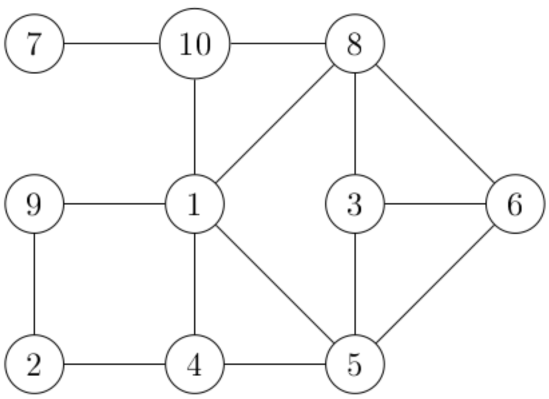
II - Algorithme de Résolution

a - Graphe correspondante à matrice A:

Pour obtenir le graphe correspondant à la matrice A, on a numérote les lignes de la matrice A, puis on récupère comme voisins tous les numéros de ligne non nul.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & & & & & & & & & \\ 0 & 4 & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 4 & & & & & & & \\ 1 & 1 & 0 & 4 & & & & & & \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 6 & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & & & \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & & \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Graphe correspondante à la matrice A



b - Recherche d'un sommet périphérique :

Prenons le sommet n = 9, et cherchons sont éxcentricité.

- n = 9

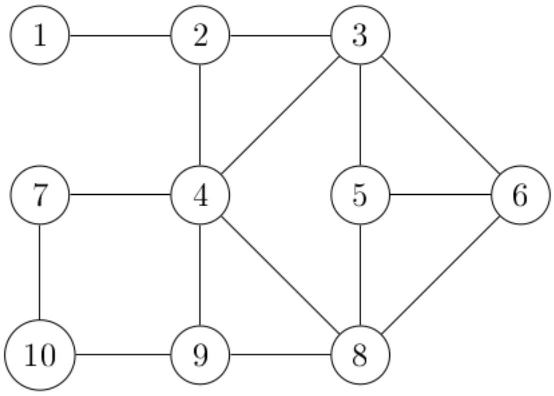
  $N_0 = \{9\}$
  $N_1 = \{1, 2\}$
  $N_2 = V(N_1) - N_0 = \{9, 4, 5, 8, 10, 9, 4\} = \{4, 5, 8, 10\}$
  $N_3 = V(N_2) - N_1 = \{ \cancel{2 , 5 , 1}, \cancel{1 , 4}, 3, 6, \cancel{3, 6, 10, 1, 8,} 7\} = \{3, 6, 7\}$
  $N_4 = V(N_3) - N_2 = \{\cancel{5 , 6, 8}$`, $\cancel{3 , 5, 8 , 10}\}$={}`

  D'où $e(9) = 3$

- $n = 3$,$n = 6, n = 7$

  On procède de la même manière et on obtient: e(3) = 3, e(6) = 3 et e(7) = 4.
  Comme e(7) > e(9) = e(3) = e(6), alors prenons 7 comme sommet périphérique .

Ainsi, on obtient le graphe suivante :



c - Recherche de sigma :

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
σ_i	7	10	8	1	6	3	5	9	4	2

NTF = 37

D'où la matrice correspondant à σ_i :

$$\begin{bmatrix} \times & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ \times & \times & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & \times & \times & . & . & . & . & . & . & . \\ . & \times & \times & \times & . & . & . & . & . & . \\ . & . & \times & . & \times & . & . & . & . & . \\ . & . & \times & . & \times & \times & . & . & . & . \\ . & . & . & \times & . & . & \times & . & . & . \\ . & . & . & \times & \times & \times & . & \times & . & . \\ . & . & . & \times & . & . & . & \times & \times & . \\ . & . & . & \times & . & . & \times & . & . & \times \end{bmatrix}$$

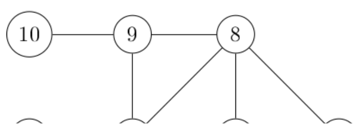
d - Recherche de sigma inverse :

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
σ_i	7	10	8	1	6	3	5	9	4	2
σI_i	4	1	3	10	5	8	6	2	7	9

NTF = 31

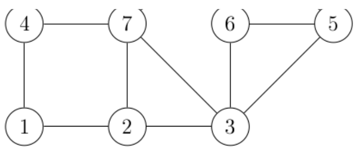
Sigma Inverse

Graphe correspondant:



Profil correspondant :

$$\begin{bmatrix} \times & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ \times & \times & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & \times & \times & . & . & . & . & . & . & . \\ \times & & & \times & & & & & & \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} \times & . & . & \times & . & . & . & . & . & . \\ . & . & \times & . & \times & . & . & . & . & . \\ . & . & \times & . & \times & \times & . & . & . & . \\ . & \times & \times & \times & . & . & \times & . & . & . \\ . & . & . & . & \times & \times & \times & \times & . & . \\ . & . & . & . & . & . & \times & \times & \times & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & \times & \times \end{bmatrix}$$

Cette graphe donne la matrice dont son profil est le plus optimisé possible.

e -Recherche de la matrice de passage P :

P est la matrice de passage de i vers σI i .
Pour retrouver les éléments de P :

$P_{ij} = \delta_{i\sigma I_i} = \begin{cases} 1 si \ i = \sigma Ij \\ 0 \quad si.non \end{cases}$

d'ou :

$$P = \begin{bmatrix} . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 \\ . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . \\ . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . \\ 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . \\ . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . \end{bmatrix}$$

Résultat

Résolution :

Posons A' la matrice $P^t.A.P$

Comme $Ax = b$,

- $A.\left(P.P^t\right)x = b$,
- $P^t.A.\left(P.P^t\right)x = P^t.b$,
- $\left(P^t.A.P\right).P^t x = P^t.b$,
- $\begin{cases} A' = P^t.A.P \\ b' = P^t.b \\ A'.x' = b' \\ P^t.x = x' \end{cases}$
- d'ou $x = P.x'$

Click to print

Aprés Calcul :

$$A' = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 6 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solution du système :

$b' = [5 \quad 11 \quad 18 \quad 11 \quad -4 \quad 2 \quad 4 \quad 7 \quad 0 \quad 8]$

$x' = [1 \quad 1 \quad 3 \quad 1 \quad -2 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \quad 2]$

$x = [1 \quad 2 \quad 0 \quad -1 \quad 1 \quad -2 \quad 1 \quad 3 \quad 1 \quad 1]$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$