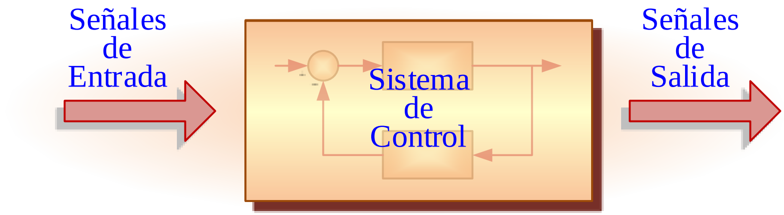
INTRODUCCIÓN

Sistema de Control:

Conjunto de elementos relacionados entre sí, que proporcionan determinadas señales de respuesta de acuerdo a determinadas señales de entrada y acciones de control.



Componentes de un Sistema de Control:

En un sistema de control es frecuente encontrar determinados elementos o dispositivos característicos, aunque en muchas veces no es tan claro identificarlos dado que pueden cumplir funciones traslapadas.

Comparador:

Dispositivo que realiza una comparación, generalmente a través de una sustracción algebraica, entre una señal de entrada y una señal de realimentación del sistema. La señal resultante denominada **señal de error**. En algunos casos el comparador forma parte del componente denominado controlador.

Controlador:

Dispositivo que procesa la señal de error y entrega una señal de respuesta llamada normalmente **variable manipulada**. El controlador se considera el bloque inteligente del sistema de control. Ejemplos: PLC, PID, PAC, etc.

Actuador:

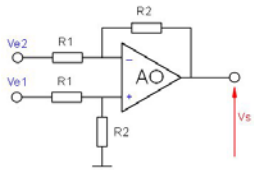
Dispositivo que cumple la función de interfaz entre el controlador y la planta del sistema, es decir, permite conectar una etapa de baja potencia con una de mayor potencia y distinta naturaleza. Ejemplos: válvulas, contactores, relés, variadores de frecuencia, amplificadores de potencia.

Planta:

Estructura física más representativa del proceso a controlar. Es la que proporciona la señal de salida, de respuesta o **variable controlada** del sistema. Ejemplos: hornos, motores, estanques, etc.

Sensor:

Dispositivo de medición que transforma una variable física (presión, temperatura, velocidad, etc.) en una variable útil (generalmente eléctrica) para el proceso del sistema de control. Se denomina habitualmente **señal de realimentación**. Ejemplos: termocuplas, tacómetros, manómetros, etc.



Sistema LTI:

Un sistema Lineal e Invariable en el Tiempo LTI (*Linear and Time-Invariant*) es aquel que satisface las propiedades de:

- Linealidad
- Invariabilidad en el tiempo

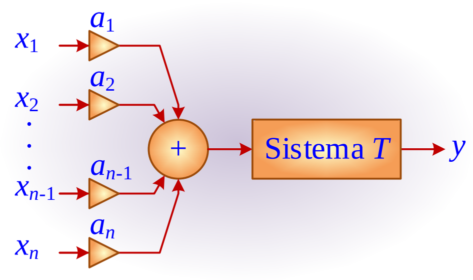
Sea y la señal de salida proporcionada por el operador $T[\cdot]$ (operador que denota la transformación hecha por el sistema) que se aplica a la señal de entrada x:

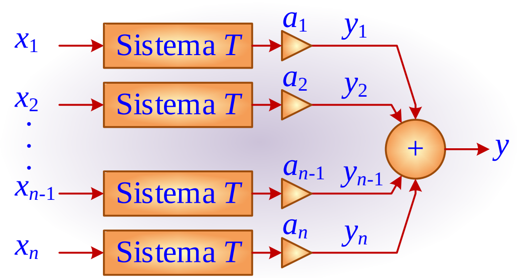
De acuerdo al enunciado, se definen los conceptos de linealidad (homogeneidad y aditividad) y de invariabilidad en el tiempo.

Linealidad:

Un sistema es lineal si cumple con el principio de superposición, es decir, que satisface las propiedades de:

- Homogeneidad (proporcionalidad o escalamiento)
- Aditividad





$$T\left[\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right] = \sum_{i=1}^{n} a_i T\left(x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i y_i = y$$

Donde $a_1 \ldots a_n$ corresponden a valores escalares (ganancias).

Invariabilidad:

Un sistema es invariable en el tiempo si la salida es siempre la misma ante una misma entrada, y no depende del momento en que se produce.

$x(t) \rightarrow$ Sistema T $\rightarrow y(t)$ $\qquad$ $x(t\text{-}t_0) \rightarrow$ Sistema T $\rightarrow y(t\text{-}t_0)$

$$y(t)=T\left[x(t)\right] \quad \Rightarrow \quad y(t-t_0)=T\left[x(t-t_0)\right]$$

Es importante señalar que la invariabilidad temporal de un sistema establece que la ecuación diferencial lineal que lo define sea de coeficientes constantes, pues dichos coeficientes están definidos por los componentes físicos del sistema (resistencias, inductores, masas, resortes, amortiguadores, etc.).

Sistema LTI:

Por lo tanto, combinando las propiedades anteriores se obtiene un sistema lineal e invariante en el tiempo LTI:

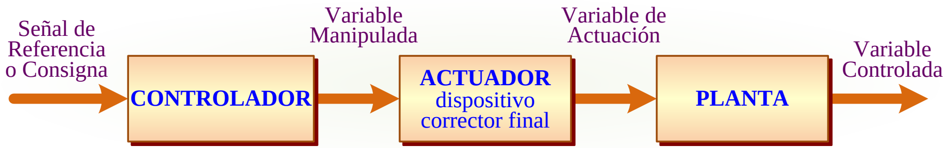
$$\boxed{T\left[\sum_{i=1}^{n} a_i x_i(t-t_0)\right] = \sum_{i=1}^{n} a_i T\left(x_i(t-t_0)\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i y_i(t-t_0) = y(t-t_0)}$$

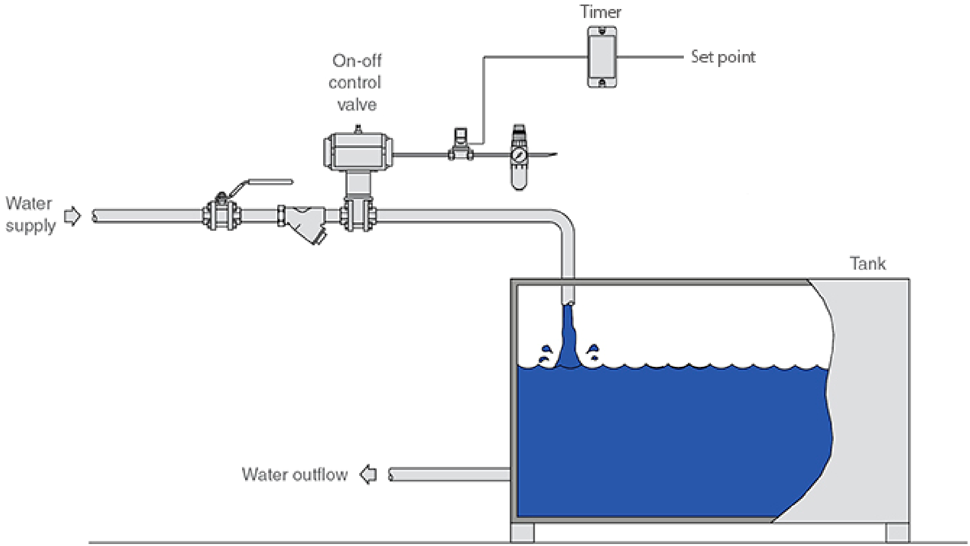
Lazos de Control

Sistema en Lazo Abierto:

Es un sistema que no tiene realimentación, es decir, la señal de salida no influye sobre la señal de entrada. Este sistema no posee la capacidad de autocorrección, es ampliamente afectado por perturbaciones externas.

- Fácil instalación y mantenimiento.
- No hay problema de estabilidad.
- Bajo costo.
- Depende de la experiencia del operador.
- No corrige el efecto de las perturbaciones ni los cambios de carga.
- No tiene precisión.

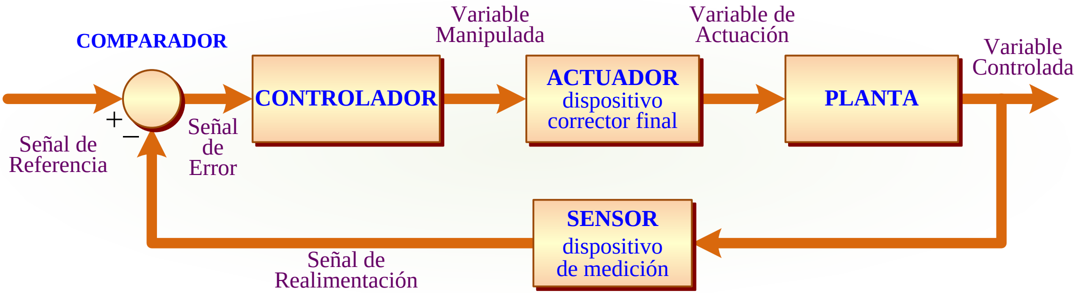



Timer
Set point
On-off
control
valve
Water
supply
Tank
Water outflow

Sistema en Lazo Cerrado:

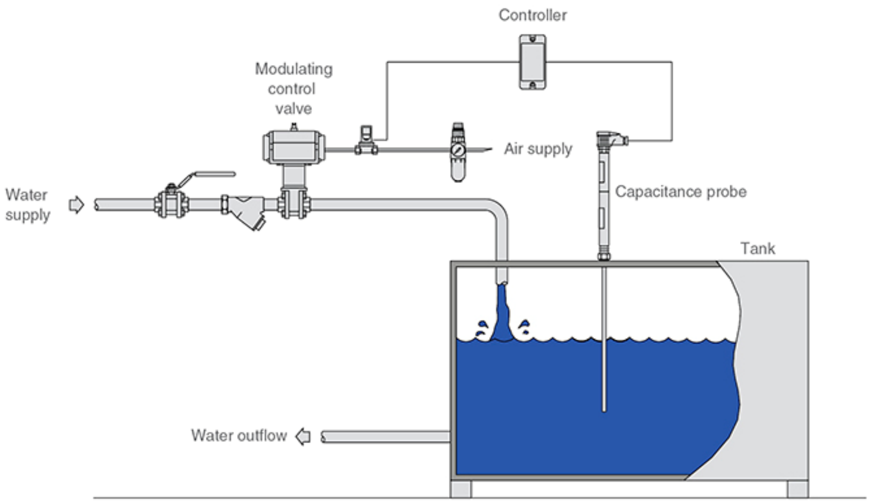
Es un sistema que tiene realimentación (negativa) y por lo tanto posee la capacidad de autocorrección. Es poco afectado por perturbaciones internas (envejecimiento o desgaste de componentes) y externas (carga en el eje de un motor, reducción de la temperatura ambiental alrededor de un horno, etc.).

- Corrige el efecto de las perturbaciones.
- Es más preciso que el lazo abierto.
- Respuesta rápida.
- Tiende a presentar tiempo muerto.
- Es más costoso y su instalación es más compleja.
- Pueden presentar inestabilidad.



Regulador: Su función principal es mantener esencialmente constante la variable controlada a pesar de las perturbaciones inconvenientes que pudieran actuar sobre el sistema. Ejemplo: sistema automático de calefacción.

Seguidor *(Follow-up System)*: Consiste en mantener la variable controlada en correspondencia muy próxima con una variable de referencia, la cual es cambiada frecuentemente. Ejemplo: trazador de un torno automático.



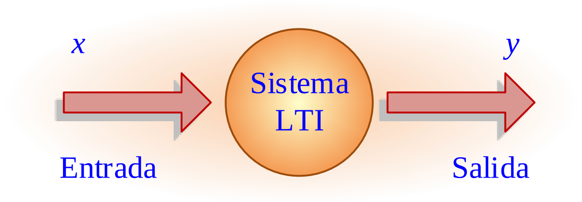
MODELOS DE SISTEMAS

Un sistema físico puede modelarse utilizando diferentes herramientas tanto matemáticas como gráficas, como por ejemplo:

- Ecuaciones diferenciales
- Funciones de transferencia
- Espacio de estado
- Diagramas de bloque
- Gráfico de flujo se señales
- Etc.

ECUACIÓN DIFERENCIAL

Es posible representar un sistema LTI mediante una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes. Consideremos un sistema con entrada x y salida y ambas, dependientes del tiempo:



Dicho sistema puede escribirse como:

$$\boxed{a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y = b_0 \frac{d^m x}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \ldots + b_{m-1} \frac{dx}{dt} + b_m x} \quad *$$

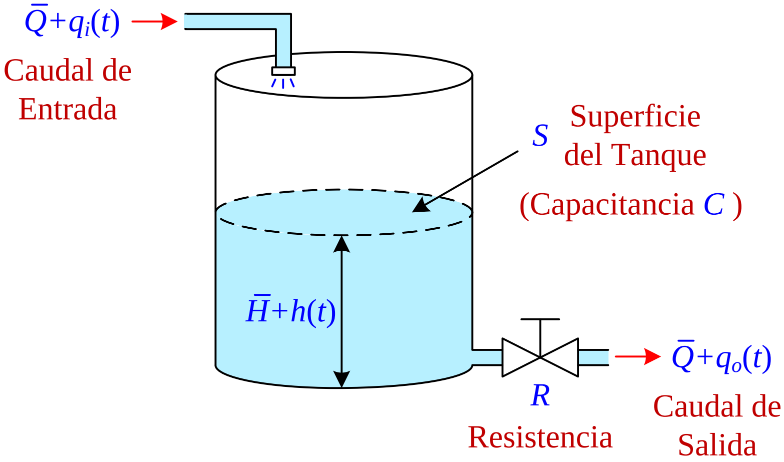
Donde $\left.\begin{matrix} a_0 \ldots a_n \\ b_0 \ldots b_m \end{matrix}\right\}$ coeficientes constantes del sistema

Ejemplo:

Obtener un modelo aproximado (lineal), a través de ecuaciones diferenciales, para un sistema de nivel de líquido se según se indica en la figura.

En este modelo se considera la superficie del estanque como la capacidad, $S = C$. Se definen dos conceptos que tienen aplicación en la obtención de analogías mecánico-eléctricas:

Capacitancia: Es la razón entre el cambio en la cantidad de líquido acumulado y el cambio de nivel.	**Resistencia:** Es la razón entre el cambio en la diferencia de niveles y el cambio en el caudal.



$$C = \frac{\Delta \text{ líquido acumulado}}{\Delta \text{ nivel del líquido}}$$

$$R = \frac{\Delta \text{ diferencia de nivel}}{\Delta \text{ caudal}}$$

Donde:

C : Capacitancia del estanque (m^3/m)
R : Resistencia al caudal ($m/(m^3/s)$)
$\bar{Q}$: Caudal en estado estacionario (m^3/s)
q_i : Variación del caudal de entrada (m^3/s)
q_o : Variación del caudal de salida (m^3/s)
$\bar{H}$: Altura del fluido en estado estacionario (m)
h : Variación de la altura del fluido (m)

El volumen que se acumula en el estanque corresponde a la integral en el tiempo del caudal entrante menos el caudal saliente. Por lo tanto, un diferencial de volumen puede escribirse como:

$$dV = C dh = \left[\left(\bar{Q} + q_i \right) - \left(\bar{Q} + q_o \right) \right] dt$$

$$C \frac{dh}{dt} = q_i - q_o \quad \Rightarrow \quad C \frac{dh}{dt} + q_o = q_i$$

De acuerdo a la definición de resistencia, se tiene:

$$q_o = \frac{h}{R}$$

La ecuación diferencial del modelo, en función de *h* como salida, se obtiene como:

$$\boxed{C\frac{dh}{dt} + \frac{h}{R} = q_i}$$

y en función de q_o como salida corresponde a :

$$\boxed{C\frac{dq_o}{dt} + \frac{q_o}{R} = \frac{q_i}{R}}$$

La ecuación * modela un sistema LTI, sin embargo, resulta complejo realizar análisis de las propiedades del sistema como por ejemplo la estabilidad. Una representación que despliega mayor interés corresponde a un modelo dependiente de la frecuencia compleja *s* que se obtiene luego de aplicar la transformación matemática denominada Transformada de Laplace:

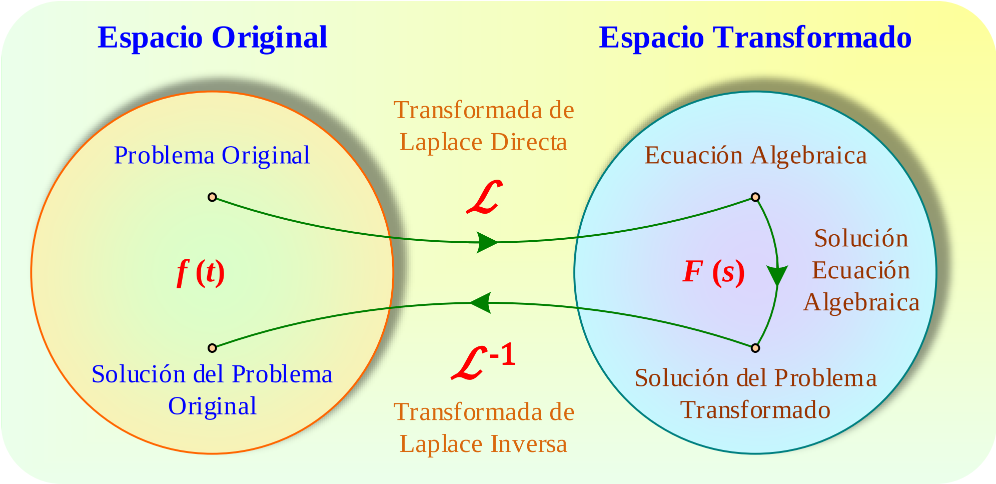
$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st}ds$$

$$s = \sigma + j\omega$$

Donde:

s : Frecuencia compleja (seg $^{-1}$)
σ : Frecuencia neperiana (Neper/seg)
ω : Frecuencia angular (rad/seg)


Espacio Original
Espacio Transformado
Transformada de Laplace Directa
$\mathcal{L}$
Problema Original
$f(t)$
Solución del Problema Original
Ecuación Algebraica
$F(s)$
Solución Ecuación Algebraica
Solución del Problema Transformado
$\mathcal{L}^{-1}$
Transformada de Laplace Inversa

FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA

Se define como el cociente entre la transformada de Laplace de la salida del sistema y la transformada de Laplace de la entrada del mismo, con condiciones iniciales nulas.

Consideremos el modelo en el tiempo de un sistema LTI dado por la ecuación:

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y = b_0 \frac{d^m x}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \ldots + b_{m-1} \frac{dx}{dt} + b_m x$$

Se transformará al dominio de la frecuencia compleja s asumiendo condiciones iniciales iguales a cero ($CI = 0$), es decir, se aplicarán las transformaciones:

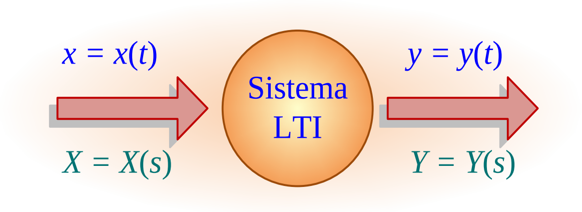
$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = sF(s) \underbrace{- f(0)}_{FT \;\Rightarrow\; CI = 0}$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right\} = s^2 F(s) \underbrace{- s f(0) - \dot{f}(0)}_{FT \;\Rightarrow\; CI=0}$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right\} = s^n F(s) \underbrace{- s^{n-1} f(0) - \cdots - s\overset{n-2}{f}(0) - \overset{n-1}{f}(0)}_{FT \;\Rightarrow\; CI=0}$$

Así, el modelo en el dominio de la frecuencia compleja es:

$$a_0 s^n Y + a_1 s^{n-1} Y + \ldots + a_{n-1} s Y + a_n Y = b_0 s^m X + b_1 s^{m-1} X + \ldots + b_{m-1} s X + b_m X$$



Luego, aplicando la definición de función de transferencia se obtiene:

$$\boxed{FT = \frac{Y}{X} = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \ldots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s + a_n} \Bigg/_{CI=0}}$$

Función de Transferencia de un Sistema LTI

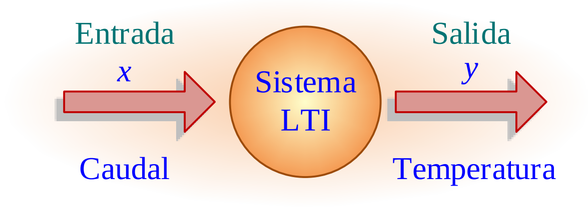
La función de transferencia (FT) proporciona toda la información de la dinámica del sistema independientemente de la naturaleza de la entrada que se le aplique. El modelo representa un **sistema causal** (causa-efecto), es decir, un sistema físicamente realizable, si se cumple que:

$$n \geq m$$

Ejemplo:

Un sistema de control de temperatura de un horno, cuya entrada x corresponde a un caudal de combustible, se modela mediante la siguiente ecuación diferencial donde y representa la temperatura de salida del sistema. Determinar la función de transferencia.

$$4\frac{d^3y}{dt^3} + 6\frac{d^2y}{dt^2} - 8\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} - 2\frac{dy}{dt} + 100x - y$$



Aplicando transformada de Laplace (CI=0), se tiene:

$$4s^3Y + 6s^3Y - 8s^2X = sX - 2sY + 100X - Y$$

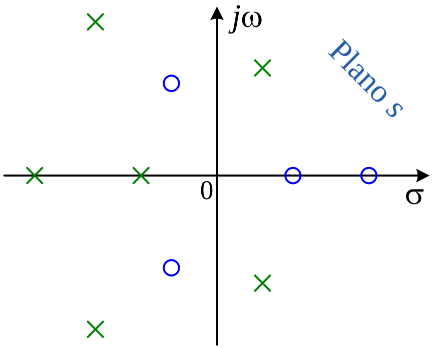
$$Y\left(4s^3 + 6s^2 + 2s + 1\right) = X\left(8s^2 + s + 100\right)$$

$$\boxed{FT = \frac{Y}{X} = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{8s^2 + s + 100}{4s^3 + 6s^2 + 2s + 1}}$$

Diagramas de Polos y Ceros

Corresponde a una representación gráfica de las raíces de la función de transferencia de lazo cerrado en el plano complejo s. Las raíces del numerador expresan los Ceros (z_j: círculos en el diagrama) y las raíces del denominador (raíces de la ecuación característica) señalan los Polos (p_i : cruces en el diagrama).

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K\prod_{j=1}^{m}(s+z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s+p_i)} = \frac{K(s+z_1)(s+z_2)(s+z_3)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)(s+p_3)\cdots(s+p_n)}$$



Ejemplo: Dibuje el diagrama de polos y ceros de la función de transferencia:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{10(s+3)(s-4)}{(s+5)\left(s^2+4s+20\right)}$$

La función tiene dos ceros: en s = -3 y en s = 4, y tres polos: en s = -5 y en s = -2 ± j2. Por consiguiente, el diagrama de polos y ceros se expresa por:

Ceros:

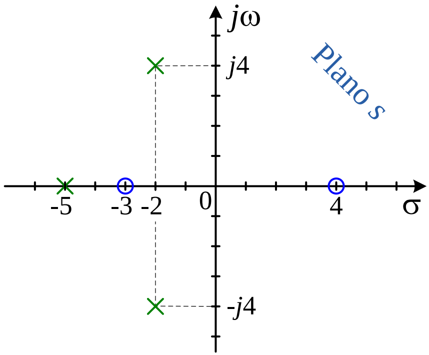
$$10(s+3)(s-4)=0$$

$$s_1 = -3 \quad \wedge \quad s_2 = 4$$

Polos:

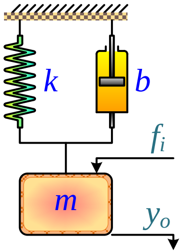
$$(s+5)\left(s^2+4s+20\right)=0$$

$$s_1 = -5 \quad \wedge \quad s_{2,3} = -2 \pm j4$$



Ejemplo:

Determinar la función de transferencia de un sistema mecánico: masa-resorte-amortiguador.

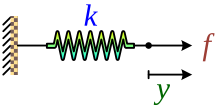
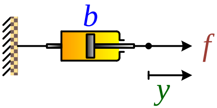
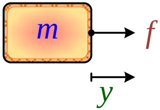


Donde:

f_i : Fuerza de entrada
y_o : Desplazamiento de salida

Las formas básicas funcionales de los sistemas mecánicos se expresan a través de los componentes: resortes, amortiguadores y masas. Los resortes representan las fuerzas de oposición al desplazamiento (rigidez, elasticidad), los amortiguadores constituyen las fuerzas de oposición a la velocidad del desplazamiento (fricción, viscosidad) y las masas establecen las fuerzas de oposición a la aceleración (inercia) (segunda ley de Newton).

Las relaciones de fuerzas para los diferentes componentes se expresan en la siguiente tabla:

	$f = k\,y$	k : Constante de rigidez (elasticidad) (N/m)
	$f = b\dfrac{dy}{dt}$	b : Constante de fricción (viscosidad) (Nseg/m)
	$f = m\dfrac{d^2y}{dt^2}$	m : Constante de masa (inercia) (kg)

La ecuación diferencial de este sistema se obtiene aplicando la segunda ley de Newton para la fuerza desarrollada en la masa (f_m). Además de la fuerza exterior aplicada f_i la masa está afecta a las fuerzas que ejercen el amortiguador (f_b) y el resorte (f_k), es decir:

$$f_m = f_i - f_b - f_k \quad \Rightarrow \quad f_i = f_m + f_b + f_k$$

$$f_i = m\frac{d^2 y_o}{dt^2} + b\frac{dy_o}{dt} + ky_o \Big/ \mathcal{L}$$

$$F_i = ms^2 Y_o + bsY_o + kY_o$$

$$F_i = Y_o\left(ms^2 + bs + k\right)$$

$$\frac{Y_o}{F_i} = \frac{1}{ms^2 + bs + k} \Big/ \cdot \frac{1/m}{1/m}$$

$$\boxed{\frac{Y_o}{F_i} = \frac{\frac{1}{m}}{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}}}$$

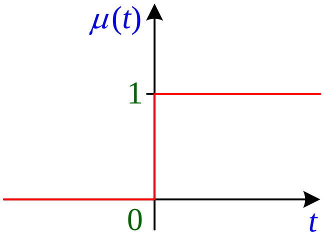
Función de transferencia

Ejemplo:

A partir de la función de transferencia del sistema mecánico obtenido, determine la posición de la masa en el tiempo (y_o) aplicando una entrada de fuerza f_i de 100 N tipo escalón. Los datos son: b = 8 Nseg/m, k = 50 N/m, m = 2 kg.

La fuerza de entrada de tipo escalón tiene la forma: $f_i = A\mu(t)$, donde:

Función Escalón Unitario



$$\mu(t) = \begin{cases} 0 & \forall \;\; t < 0 \\ 1 & \forall \;\; t \geq 0 \end{cases}$$

Despejamos Y_o en la función de transferencia y transformamos la entrada f_i al dominio de la frecuencia:

$$Y_o = Y_o(s) = F_i \cdot \frac{\frac{1}{m}}{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}}$$

Respuesta en la Frecuencia

$$f_i(t) = A\mu(t) \quad \Leftrightarrow \quad F_i(s) = \frac{A}{s}$$

$$Y_o = \frac{A\frac{1}{m}}{s\left(s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}\right)}$$

Reemplazando los valores numéricos, se tiene:

$$Y_o = \frac{50}{s\left(s^2 + 4s + 25\right)} \quad = \quad 2 \cdot \frac{25}{s\left(s^2 + 4s + 25\right)}$$

Para obtener la respuesta en el tiempo se debe aplicar la transformada inversa de Laplace de acuerdo a:

$$\boxed{\begin{gathered} F(s) = \frac{\omega_n^{\,2}}{s\left(s^2 + 2\varepsilon\omega_n s + \omega_n^{\,2}\right)} \\ f(t) = 1 - \frac{e^{-\varepsilon\omega_n t}}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \sin\left(\omega_n \sqrt{1-\varepsilon^2} \cdot t + \phi\right); \quad \phi = \arctan\left(\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}\right) \end{gathered}}$$

Comparando con la expresión numérica, se tiene:

$$\left.\begin{aligned} \omega_n^{\,2} &= 25 \\ 2\varepsilon\omega_n &= 4 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} \omega_n &= 5 \\ \varepsilon &= 0.4 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la respuesta en el tiempo de la posición de la masa es:

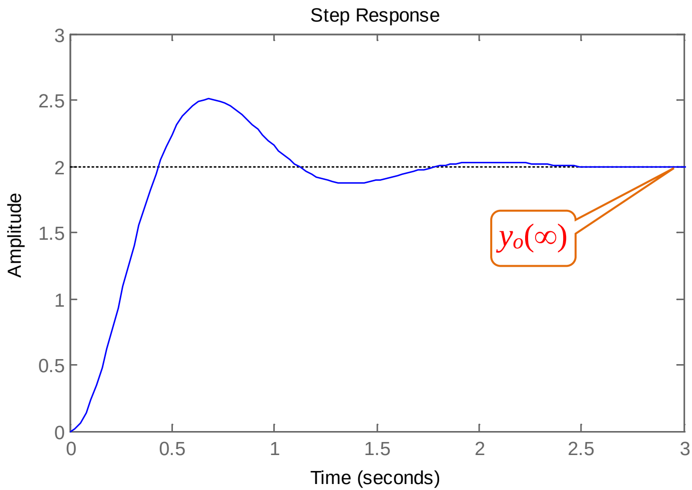
$y_o(\infty)$

$$\boxed{y_o(t) = 2\left(1 - \frac{e^{-2t}}{\sqrt{0.84}}\sin\left(5\sqrt{0.84}\cdot t + 1.1593\right)\right) \text{ m}} \quad \forall\ t \geq 0$$

La función $y_o(t)$ puede graficarse para diferentes valores de $t \geq 0$. Utilizando el *software* MatLab es posible obtener dicha gráfica ingresando directamente la función de transferencia y aplicando el comando *step*, de la siguiente forma:

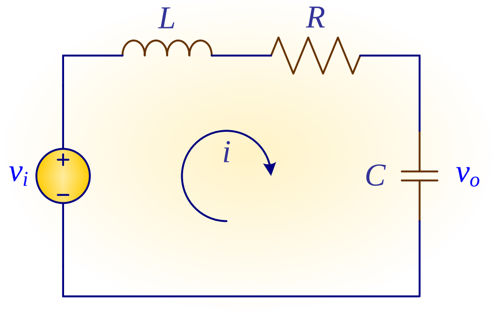
```
num = [50];
den = [1 4 25];
FT = tf(num,den)
step(FT)

Transfer function:
        50
------------------
s^2 + 4 s + 25
```



Ejemplo:

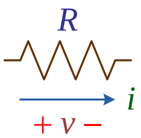
Determinar la función de transferencia de un sistema eléctrico: resistencia-bobina-condensador (Circuito RLC).

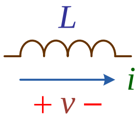
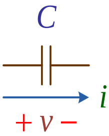


Donde:

v_i : Voltaje de entrada
v_o : Voltaje de salida

Los bloques funcionales básicos de los sistemas eléctricos pasivos son: inductores (bobinas), capacitores (condensadores) y resistores (resistencias). Para un inductor la tensión que desarrolla depende de la velocidad de cambio de su corriente, para un capacitor el voltaje en sus terminales es proporcional a la carga eléctrica que almacena en un tiempo considerado y para un resistor la diferencia de potencial, en cualquier instante, depende directamente de la corriente que fluye por él. La siguiente tabla indica las relaciones de voltajes y corrientes para los diferentes componentes eléctricos:

	$v = R\,i \quad i = \dfrac{v}{R}$	R : Resistencia (Ω)

	$v = L\dfrac{di}{dt} \quad i = \dfrac{1}{L}\int v\,dt$	L : Inductancia (H)
	$v = \dfrac{1}{C}\int i\,dt \quad i = C\dfrac{dv}{dt}$	C : Capacitancia (F)

La ecuación diferencial que modela el circuito eléctrico se obtiene aplicando la ley de Kirchhoff de las tensiones que en este caso señala que la tensión de entrada aplicada es igual a la suma de las tensiones de la inductancia (v_L), de la resistencia (v_R) y del condensador (v_C). Además la tensión de salida es igual a la tensión del condensador:

$$v_i = v_L + v_R + v_C \quad \text{y} \quad v_o = v_C$$

$$v_i = L\frac{di}{di} + Ri + \frac{1}{C}\int i\,dt$$

$$v_o = \frac{1}{C}\int i\,dt$$

$$\mathcal{L}$$

$$\boxed{\begin{aligned} V_i &= LsI + RI + \frac{1}{Cs}I \\ V_o &= \frac{1}{Cs}I \end{aligned}} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} V_i &= I\left(Ls + R + \frac{1}{Cs}\right) \\ V_o &= \frac{1}{Cs}I \end{aligned}}$$

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{\frac{1}{Cs}}{Ls + R + \frac{1}{Cs}} \cdot \frac{s/L}{s/L}$$

$$\boxed{\frac{V_o}{V_i} = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}}$$

Tarea:

Para los siguientes casos, obtenga la respuesta en el tiempo y grafique en MatLab. Analice los resultados.

a) $v_i = 20\mu(t)$ V, $R = 200\ \Omega$, $L = 0.1$ H, $C = 13.33\ \mu$F

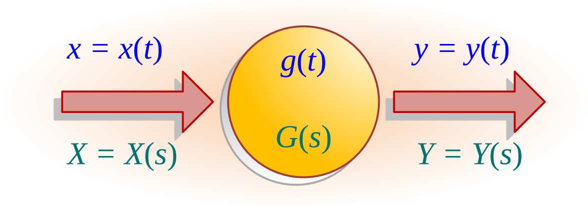
b) $v_i = 20\mu(t)$ V, $R = 200\ \Omega$, $L = 0.1$ H, $C = 10\ \mu$F

c) $v_i = 20\mu(t)$ V, $R = 200\ \Omega$, $L = 0.1$ H, $C = 1\ \mu$F

RESPUESTA IMPULSO Y CONVOLUCIÓN

La información que proporciona la función de transferencia (cuyo modelo se establece en el dominio de la frecuencia compleja s) es equivalente a la información que entrega la respuesta al impulso (cuyo modelo se constituye en el dominio del tiempo t) para un sistema LTI con condiciones iniciales nulas.

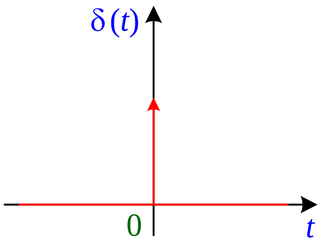
La respuesta en la frecuencia de un sistema LTI ($CI = 0$) corresponde al producto de su entrada $X(s)$ y de su función de transferencia $G(s)$, es decir:



$$\boxed{Y(s) = G(s) \cdot X(s)}$$

Sin embargo, la respuesta en el tiempo, no puede obtenerse mediante el producto algebraico, debe calcularse utilizando la **respuesta al impulso** y la **convolución**.

Función Impulso Unitario



$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \forall\ t \neq 0 \\ \infty & \forall\ t = 0 \end{cases}$$

Consideremos una entrada de tipo impulso cuya transformada de Laplace es uno:

$$x(t) = \delta(t) \quad \Leftrightarrow \quad X(s) = 1$$

las respuestas en la frecuencia y en el tiempo, serán:

$$Y(s) = G(s) \cdot X(s) = G(s) \cdot 1$$

$$\boxed{Y(s) = G(s)} \quad \Big/ \mathcal{L}^{-1}$$

Respuesta en la Frecuencia

$$\boxed{y(t) = g(t)}$$

Respuesta en el Tiempo

Por lo tanto:

$$\boxed{G(s) \quad \Leftrightarrow \quad g(t)}$$

Función de Transferencia

Respuesta Impulso

Si $g(t)$ representa la respuesta al impulso la respuesta del sistema en el tiempo puede escribirse como:

$$\boxed{y(t) = g(t) * x(t)}$$

Donde el símbolo * corresponde a la operación denominada convolución que está definida por:

$$\boxed{g(t) * x(t) = \int_0^t g(t-\tau)\cdot x(\tau)\, d\tau}$$

Convolución en el Tiempo

Haciendo el siguiente cambio de variable y reemplazando, se tiene:

$$u = t - \tau \quad \Rightarrow \quad \tau = t - u \quad \Rightarrow \quad d\tau = -du$$

$$g(t) * x(t) = -\int_{t}^{0} g(u) \cdot x(t-u)\,du = \int_{0}^{t} g(u) \cdot x(t-u)\,du$$

$$g(t) * x(t) = \int_{0}^{t} x(t-u) \cdot g(u)\,du$$

Por lo tanto,

$$\boxed{g(t) * x(t) \;=\; x(t) * g(t)}$$