*2017.3.27~2017.3.28 星期一*

具体方向：普通kriging插值算法

**普通kriging插值公式推导**

# 1. 定义

kriging插值算法，国内翻译为克里金插值算法，也有叫克里格插值算法。

设为区域上的一系列观测点，为相应的观测值。区域化变量在处的值可以采用一个线性组合来估计：

（普通克里金）

其中：

：测量值数

：点()处的估计值，即

：第个位置处的测量值

：第个位置处的测量值的未知权重

这里是权重系数，它同样是用空间上所有已知点的数据加权求和来估计未知点的值。在反距离权重法中，权重仅取决于预测位置的距离。但是，使用kriging方法时，权重不仅取决于测量点之间的距离、预测位置，还取决于基于测量点的整体空间排列。要在权重中使用空间排列，必须量化空间自相关。因此，在普通克里金法中，权重取决于测量点、预测位置的距离和预测位置周围的测量值之间空间关系的拟合模型。

因此这里权重系数并非距离的倒数，而是能够满足点()处的估计值与真实值的差最小的一套最优系数。估计方差最小和无偏性被作为的选取标准，即：

同时满足无偏估计的条件：

Kriging插值法不仅考虑待估点位置已知数据位置的相互关系，而且还考虑变量的空间相关性。（应用随机函数理论）

# 2. 假设条件

不同的kriging插值方法的主要差异就是假设条件不同，普通kriging方法是最普通和应用最广的kriging方法，这里仅介绍普通kriging插值的假设条件与应用。

普通kriging插值的假设条件为：空间属性Z是均一的。对于空间任意一点，都有同样的期望c与方差。即对任意点都有：

换一种说法：任意一点处的值，都由区域平均值c和该点的随机偏差组成，即：

其中，表示点处的偏差，其方差均为常数：

# 3. 无偏约束条件

先分析无偏估计条件，将带入则有：

又因为对任意的Z都有，则：

可得到关系式：

这是的约束条件之一。

# 4. 优化目标/代价函数J

分析估计误差。为方便公式推理，用符号表示，即：

则有：

备注：推导公式倒数第二个到最后一次的第一项的转换，把写成了的形式，反正就是两个和里两个，如果我自己来变换公式的话，可能绝对想不到变成一个i为底另一个j为底，感觉对于这个变换似懂非懂。这里的转换结果是对的，中间的过程是我半猜着展开的，运用协方差与方差的转换关系式，应该是没有错的。

补充：上面推导过程中涉及方差与协方差的转换关系式：

，

以及方差的基本性质：设X是随机变量，C是常数，则。

为简化描述，定义符号，这里，即点处的属性值相对于区域平均属性值的偏差。所以：

# 5. 代价函数的最优解

定义半方差函数，带入中，有

考虑到，

我们的目标是寻找使最小的一组，且是的函数，因此直接将对求偏导数令其为0即可，即：

但是要注意的是，我们要保证求解出来的最优满足公式，这是一个带约束条件的最优化问题。使用拉格朗日乘数法求解，求解方法为构造一个新的目标函数：

其中是拉格朗日乘数。求解使这个代价函数最小的参数集，则能满足其在约束下最小化。即：

备注：带入得到上式，但是为什么这两个等式中的分子都把应有的去掉了呢？没想明白。

备注：式中对求导，等式左边只剩下，至于为什么会出现，这个，自己也是处于半懂半不懂的状态，感觉这个累加运算符的求导不太容易转过弯理解透；对求导，因为不含有关于的关系式，所以为0。

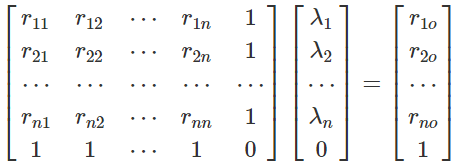
由于，因此同样地，，所以：

备注：也就是第一个等式的左边带入，并约去公因子2。

在以上计算中我们得到了对于求解权重系数的方程组，写成线性方程组的形式就是：

备注：将，，即，全部拆分开，下面再将该线性方程组转换为矩阵相乘的形式。

写成矩阵形式即为：



备注：写成矩阵时怎么没有了呀

对矩阵求逆即可求解，唯一未知的就是上文中定义的半方差函数。

# 6. 半方差函数

上文中对半方差函数的定义为：

其等价形式为：

这也是半方差函数名称的由来，接下来证明这二者是等价的：

根据上文定义，有，则

又因为

补充：上面两个公式的转换运用到了方差和协方差与期望的关系式：，。加之，在文中假设条件中提到：，，表示点处的偏差，其方差均为常数；在之后又定义符号，这里，即点处的属性值相对于区域平均属性值的偏差。带入这一系列公式即可。

于是有：

至此，便得证了，那么现在的问题是如何计算

这时需要用到地理学第一定律，空间上相似的属性相近。

表达了属性的相似度，空间的相似度就用距离来表达，定义与之间的集合距离：

Kriging插值假设与存在着函数关系，这种函数关系可以是线性、二次函数、指数、对数关系。为了确认这种关系，我们需要首先对观测数据集计算任意两个点的距离和半方差，这时会得到个的数据对。

将所有的d和r绘制成散点图，寻找一个最优的拟合曲线拟合d与r的关系，的导函数关系式：

那么对于任意两点，先计算其距离，然后根据得到的函数关系就可以得到这两点的半方差。

备注：本文中的推导公式我大部分都看懂了，但也存在有疑问的地方，我觉得后面需要看两三个例题应该理解得会更好些。本文中的灰色备注部分大都集中在公式推导之中，也是我耗费时间较多的部分，有的备注可能还未解释清楚，主要就是要带各种相关公式，尤其是方差、协方差与期望的转换关系式，我觉得很容易弄混淆，记不清楚。

# 参考：

克里金(Kriging)插值的原理与公式推导：<https://xg1990.com/blog/archives/222>

kriging基础知识：<https://wenku.baidu.com/view/3d142be827284b73f24250d7.html>

Kriging方法的公式推导：

<https://wenku.baidu.com/view/2827d58db7360b4c2f3f6461.html>

（备注：本文主要参考第一个网址，由于涉及到了方差、协方差、偏差、拉格朗日乘数法相关，所以同时我也整理另一份文档，主要是关于方差与协方差、期望之间的转换关系以及拉格朗日乘数法的应用。第二个网址和第三个网址是百度文库的PPT，其中第二个网址的PPT知识点比较丰富，但这两个PPT里面讲的公式推导过程没有第一个网址详细。两个PPT后面都有例题，我快速都浏览了一遍，例题中都涉及到变异函数的分类，在上文中并未谈及变异函数，尚不清楚变异函数什么情况，明天继续斗争。）