Вариант 4

Дифференциальное уравнение первого порядка для функции $u(x)$:

$$\frac{du}{dx} = u' = f(x,u), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \tag{1}$$

Здесь $f(x,u) = \phi'(x) + p(u - \phi(x))^3$, $\phi(x) \in C([0,1])$; p — произвольный положительный параметр. Начальное условие для дифференциального уравнения (1):

$$u(0) = 0. \tag{2}$$

Найти численное решение задачи Коши (1)–(2), тремя методами:

1. явным методом Эйлера

$$u_{i+1} = u_i + hf(x_i, u_i), \quad i = 0, \dots, N-1. \tag{3}$$

2. методом Рунге–Кутты четвертого порядка:

$$\begin{aligned} &k_1 = hf(x_i, u_i),\\ &k_2 = hf(x_i + h/4, u_i + k_1/4),\\ &k_3 = hf(x_i + h/2, u_i + k_2/2),\\ &k_4 = hf(x_i + h, u_i + k_1 - 2k_2 + 2k_3),\\ &u_{i+1} = u_i + (k_1 + 4k_3 + k_4)/6. \end{aligned} \tag{4}$$

3. неявным методом Адамса четвертого порядка:

$$u_{i+3} = u_{i+2} + \frac{h}{24}\left(9f(x_{i+3}, u_{i+3}) + 19f(x_{i+2}, u_{i+2}) - 5f(x_{i+1}, u_{i+1}) + f(x_i, u_i)\right). \tag{5}$$

Для решения нелинейного уравнения, возникающего в каждом следующем узле сетки $i+1$, использовать метод, разработанный в третьем семестре.

В качестве функции $\phi(x)$ при тестировании взять функции $\sin(\pi x)$ и $\ln(x+1)$. Рассмотреть не менее двух значений параметра p. Вычисления вести с двойной точностью.

Показать сходимость методов путем построения на одном графике точного решения и серии приближенных решений на последовательно измельчающихся сетках (например: $N = 5, 10, 20, \dots$). Численно определить порядок аппроксимации путем построения таблицы и графика изменения относительной ошибки численного решения в зависимости от количества узлов N сетки. Сравнить точность перечисленных методов. Оценить их эффективность.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хакимзянов Г. С., Черный С. Г. Методы вычислений: учеб. пособие: в 4 ч. Ч. 1. Численные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений — Новосибирск: НГУ, 2003. — 160 с.

2. Михайлов А. П. Учебные задания вычислительной практики в компьютерном классе: учеб. пособие. — Новосибирск: НГУ, 2003 — 86 с.