

Índice

1. Introducción a las Microondas	3
1.1. Definición	3
1.2. El Espectro Electromagnético	4
1.2.1. Rango del espectro	5
1.2.2. Tipos de radiación	6
1.3. Propiedades Y Aplicaciones De Las Microondas	10
1.4. Evolución Histórica	12
1.4.1. Primeros descubrimientos	12
1.4.2. El desarrollo de la guía de onda	13
1.4.3. Desarrollo del radar	14
1.4.4. Desarrollo de los tubos de microondas	14
1.4.5. Dispositivos de ferrita	14
1.4.6. Comunicaciones por satélite	15
1.4.7. Dispositivos de estado sólido	15
1.5. Problemas Asociados a Las Frecuencias de Microondas	15
2. La Guía de Onda Rectangular y Circular. El Cable Coaxial	17
2.1. La guía de onda como línea de transmisión	17
2.2. Ec. de Maxwell en la guía de onda (Modos TE, TM, y TEM) .	17
2.3. Método de análisis de guías de onda	19
2.3.1. Modos TEM	19
2.3.2. Modos TE	20
2.3.3. Modos TM	21
2.4. La Guía de Onda Rectangular	22
2.4.1. Modos TE en la Guía de Onda Rectangular	22
2.4.2. Modos TM en la Guía de Onda Rectangular	25
2.4.3. Propagación de Modos TE y TM en la Guía de Onda Rectangular	27
2.4.4. Potencia transmitida por modos TE y TM. Pérdidas en la guía	28
2.5. La Guía de Onda Circular	30
2.5.1. Modos TE en la Guía de Onda Cilíndrica	31
2.5.2. Modos TM en la Guía de Onda Circular	34
2.5.3. Propagación de Modos TE y TM en la Guía de Onda Circular	35

2.5.4.	Potencia, Pérdidas y Atenuación en la Guía Circular	35
2.6.	El Cable Coaxial	36
2.6.1.	Funcionamiento como LT	36
2.6.2.	Modos TEM en el Cable Coaxial	37
2.6.3.	Modos TM en el Cable Coaxial	37
2.6.4.	Modos TE en el Cable Coaxial	37
3.	Resonancia	37
3.1.	Introducción	37
3.1.1.	El Factor de Calidad (Q)	38
3.2.	La Cavity Rectangular	38
3.2.1.	Factor de Calidad	40
3.3.	La Cavity Circular	42
3.3.1.	Factor de Calidad	43
4.	Análisis de Redes	43
4.1.	Matriz de Dispersión $[S]$	43
4.1.1.	Ejemplos	45
4.2.	Propiedades de la Matriz de Dispersión	45
4.2.1.	Red Pasiva	45
4.2.2.	Red sin Pérdidas	46
4.2.3.	Red Recíproca	46
4.2.4.	Red Simétrica	46
4.3.	Redes de dos Accesos	47
4.3.1.	Atenuadores	49
4.3.2.	Inversores de Impedancia y Admitancia	50
4.4.	Propiedades de Simetría	52
5.	Divisores de Potencia y Acopladores direccionales	52
5.1.	Redes de 3 Accesos	52
5.1.1.	Propiedades	52
5.1.2.	Divisores de Potencia	55

1. Introducción a las Microondas

1.1. Definición

La definición del término Microondas se puede enfocar básicamente desde dos perspectivas. Una primera, más exacta, que está relacionada con el espectro de frecuencias que abarca, en este caso entre 300 MHz y 300 GHz (en la actualidad esta definición se ha extendido hasta 1 THz). También es habitual encontrar esta definición en términos de longitudes de onda. Frecuencia, longitud de onda y velocidad de propagación en un medio homogéneo caracterizado por su permitividad eléctrica (ε) y magnética (μ) se relacionan según las fórmulas:

$$\lambda = \frac{v}{f} \quad v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

De modo que las microondas quedan comprendidas, en términos de λ , entre 1 m y 1 mm (0,3 mm en el caso de 1 THz). A las señales con longitudes de onda del orden de milímetros se las conoce como ondas milimétricas.

La otra definición, menos precisa, es: “aquella porción del espectro electromagnético en el que las dimensiones de los circuitos son comparables a las longitudes de onda que manejan”. En este sentido, lo que entendemos por teoría de circuitos es un caso especial de la teoría electromagnética descrita mediante las ecuaciones de Maxwell. En Microondas no es válida la aproximación de elementos discretos o puntuales (concentrados), como en teoría de circuitos. Las componentes de microondas normalmente son elementos distribuidos, donde la fase de una tensión o de una corriente cambia apreciablemente a lo largo del dispositivo, debido a que sus dimensiones son comparables con la longitud de onda. Esta definición tiene en cuenta que el cambio de fase de las componentes de una señal es inversamente proporcional a la longitud de onda:

$$V(t) = a(t) \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} z \right)$$

por lo que a frecuencias bajas (longitudes de onda grandes), si el tamaño del circuito es pequeño, $z_{max}/\lambda \ll 1$, el cambio de fase es irrelevante. Sin embargo a frecuencias de microondas es un factor fundamental.

En el otro extremo del espectro se encuentra la ingeniería óptica, donde la longitud de onda es mucho más pequeña que las dimensiones de los componentes. En este caso las ecuaciones de Maxwell se pueden simplificar mediante la geometría óptica. Estas técnicas se utilizan algunas veces con ondas milimétricas y se las conoce como cuasiópticas.

En microondas, por tanto, se deberá trabajar con las ecuaciones de Maxwell y con sus soluciones. Esto significa que existirá en muchos casos una complejidad matemática importante, apareciendo derivadas sobre funciones vectoriales y operaciones con integrales de campos vectoriales, donde estos a su vez dependen de las coordenadas espaciales. Una de las finalidades en microondas será reducir esta complejidad matemática y encontrar soluciones expresadas en términos de teoría de circuitos. Generalmente la solución de teoría de campos presenta una descripción completa del campo electromagnético en cada punto del espacio, resultando más información de la que realmente se necesita. Será preferible poder expresar las soluciones en términos de teoría de circuitos como potencia, impedancia, tensión, corriente, etc.

1.2. El Espectro Electromagnético

Se denomina espectro electromagnético a la distribución energética del conjunto de las ondas electromagnéticas. Referido a un objeto, se denomina espectro electromagnético o simplemente espectro a la radiación electromagnética que emite (espectro de emisión) o absorbe (espectro de absorción) una sustancia. Dicha radiación sirve para identificar la sustancia de manera análoga a una huella dactilar. Los espectros se pueden observar mediante espectroscopios que, además de permitir observar el espectro, permiten realizar medidas sobre éste, como la longitud de onda, la frecuencia y la intensidad de la radiación.

El espectro electromagnético se extiende desde las bajas frecuencias usadas para la radio moderna (extremo de la onda larga) hasta los rayos gamma (extremo de la onda corta), que cubren longitudes de onda de entre miles de kilómetros y una fracción del tamaño de un átomo. Se piensa que el límite de la longitud de onda corta está en las cercanías de la longitud de Planck, mientras que el límite de la longitud de onda larga es el tamaño del universo mismo, aunque en principio el espectro sea infinito y continuo.

1.2.1. Rango del espectro

El espectro cubre la energía de ondas electromagnéticas que tienen longitudes de onda diferentes. Las frecuencias de 30 Hz y más bajas pueden ser producidas por ciertas nebulosas estelares y son importantes para su estudio. Se han descubierto frecuencias tan altas como $2,9 \cdot 10^{27}$ Hz a partir de fuentes astrofísicas.

La energía electromagnética en una longitud de onda particular (en el vacío) tiene una frecuencia asociada f y una energía fotónica E . Así, el espectro electromagnético puede expresarse en términos de cualquiera de estas tres variables, que están relacionadas mediante ecuaciones

De este modo, las ondas electromagnéticas de alta frecuencia tienen una longitud de onda corta y energía alta, y las ondas de frecuencia baja tienen una longitud de onda larga y energía baja.

Siempre que las ondas de luz (y otras ondas electromagnéticas) se encuentran en un medio (materia), su longitud de onda se reduce. Las longitudes de onda de la radiación electromagnética, sin importar el medio por el que viajen, son, por lo general, citadas en términos de longitud de onda en el vacío, aunque no siempre se declara explícitamente.

Generalmente, la radiación electromagnética se clasifica por la longitud de onda: ondas de radio, microondas, infrarrojo y región visible, que percibimos como luz, rayos ultravioletas, rayos X y rayos gamma.

El comportamiento de la radiación electromagnética depende de su longitud de onda. Las frecuencias más altas tienen longitudes de onda más cortas, y las frecuencias inferiores tienen longitudes de onda más largas. Cuando la radiación electromagnética interacciona con átomos y moléculas, su comportamiento también depende de la cantidad de energía por cuanto que transporta. La radiación electromagnética puede dividirse en octavas (como las ondas sonoras).

La espectroscopia puede descubrir una región mucho más amplia del espectro que el rango visible de 400 nm a 700 nm. Un espectroscopio de laboratorio común puede descubrir longitudes de onda desde 2 nm a 2500 nm. Con este tipo de aparatos puede obtenerse información detallada sobre

las propiedades físicas de objetos, gases o incluso estrellas. La espectrometría se usa sobre todo en astrofísica. Por ejemplo, muchos átomos de hidrógeno emiten ondas de radio que tienen una longitud de onda de 21,12 cm.

1.2.2. Tipos de radiación

Aunque el esquema de clasificación suele ser preciso, en realidad existe algo de trasposición entre tipos vecinos de energía electromagnética. Por ejemplo: las ondas de radio a 60 Hz pueden ser recibidas y estudiadas por astrónomos, o pueden ser conducidas a lo largo de cables como energía eléctrica. También, algunos rayos gamma de baja energía realmente tienen una longitud de onda más larga que algunos rayos X de gran energía. Esto es posible porque “rayo gamma” es el nombre que se le da a los fotones generados en la descomposición nuclear u otros procesos nucleares y subnucleares, mientras que los rayos X son generados por transiciones electrónicas que implican electrones interiores muy energéticos. Por lo tanto, la diferencia entre rayo gamma y rayo X está relacionada con la fuente de radiación más que con la longitud de onda de la radiación. Generalmente, las transiciones nucleares son mucho más energéticas que las transiciones electrónicas, así que los rayos gamma suelen ser más energéticos que los rayos X.

1.2.2.1 Radiofrecuencia

Las ondas de radio suelen ser utilizadas mediante antenas del tamaño apropiado (según el principio de resonancia), con longitudes de onda en los límites de cientos de metros a aproximadamente un milímetro. Se usan para la transmisión de datos, a través de la modulación. La televisión, los teléfonos móviles, las resonancias magnéticas, o las redes inalámbricas y de radioaficionados, son algunos usos populares de las ondas de radio.

Las ondas de radio pueden transportar información variando la combinación de amplitud, frecuencia y fase de la onda dentro de una banda de frecuencia. El uso del espectro de radio está regulado por muchos gobiernos mediante la asignación de frecuencias. Cuando la radiación electromagnética impacta sobre un conductor, se empareja con él y viaja a lo largo del mismo, induciendo una corriente eléctrica en la superficie de ese

conductor mediante la excitación de los electrones del material de conducción. Este efecto (el efecto piel) es usado en las antenas. La radiación electromagnética también puede hacer que ciertas moléculas absorban energía y se calienten, una característica que se utiliza en los microondas.

1.2.2.2 Microondas

La frecuencia super alta (SHF) y la frecuencia extremadamente alta (EHF) de las microondas son las siguientes en la escala de frecuencia. Las microondas son ondas lo suficientemente cortas como para emplear guías de ondas metálicas tubulares de diámetro razonable. La energía de microondas se produce con tubos klystron y tubos magnetrón, y con diodos de estado sólido como los dispositivos Gunn e IMPATT. Las microondas son absorbidas por la moléculas que tienen un momento dipolar en líquidos. En un horno microondas, este efecto se usa para calentar la comida. La radiación de microondas de baja intensidad se utiliza en Wi-Fi.

El horno microondas promedio, cuando está activo, está en un rango cercano y bastante poderoso como para causar interferencia con campos electromagnéticos mal protegidos, como los que se encuentran en dispositivos médicos móviles y aparatos electrónicos baratos.

1.2.2.3 Radiación Infrarroja

La parte infrarroja del espectro electromagnético cubre el rango desde aproximadamente los 300 GHz (1 mm) hasta los 400 THz (750 nm). Puede ser dividida en tres partes:

- Infrarrojo lejano: desde 300 GHz (1 mm) hasta 30 THz (10 m). La parte inferior de este rango también puede llamarse microondas. Esta radiación es absorbida por los llamados modos rotatorios en las moléculas en fase gaseosa, mediante movimientos moleculares en los líquidos, y mediante fotones en los sólidos. El agua en la atmósfera de la Tierra absorbe tan fuertemente esta radiación que confiere a la atmósfera efectividad opaca. Sin embargo, hay ciertos rangos de longitudes de onda (“ventanas”) dentro del rango opaco que permiten la transmisión parcial, y pueden ser usados en astronomía.
- Infrarrojo medio: desde 30 a 120 THz (10 a 2,5 μm). Los objetos calientes (radiadores de cuerpo negro) pueden irradiar fuertemente en

este rango. Se absorbe por vibraciones moleculares, es decir, cuando los diferentes átomos en una molécula vibran alrededor de sus posiciones de equilibrio.

- Infrarrojo cercano: desde 120 a 400 THz (2500 a 750 nm). Los procesos físicos que son relevantes para este rango son similares a los de la luz visible.

1.2.2.4 Radiación visible (luz)

La frecuencia por encima del infrarrojo es la de la luz visible. Este es el rango en el que el Sol y las estrellas similares a él emiten la mayor parte de su radiación. No es probablemente una coincidencia que el ojo humano sea sensible a las longitudes de onda que el sol emite con más fuerza. La luz visible (y la luz cercana al infrarrojo) son absorbidas y emitidas por electrones en las moléculas y átomos que se mueven desde un nivel de energía a otro. La luz que vemos con nuestros ojos es realmente una parte muy pequeña del espectro electromagnético. Un arco iris muestra la parte óptica (visible) del espectro electromagnético; el infrarrojo (si pudiera verse) estaría localizado justo a continuación del lado rojo del arco iris, mientras que el ultravioleta estaría tras el violeta.

La radiación electromagnética con una longitud de onda entre aproximadamente 400 nm y 700 nm es detectado por el ojo humano y percibida como luz visible. A otras longitudes de onda, sobre todo al infrarrojo cercano (más largo de 700 nm) y al ultravioleta (más corto que 400 nm) también se les llama luz a veces, sobre todo cuando la visibilidad para los humanos no es relevante.

Si la radiación que tiene una frecuencia en la región visible del espectro electromagnético se refleja en un objeto, como por ejemplo un plato hondo de fruta, y luego impacta en nuestros ojos, obtenemos una percepción visual de la escena. El sistema visual de nuestro cerebro procesa la multitud de frecuencias reflejadas en diferentes sombras y matices, y a través de este fenómeno psicofísico que todavía no se entiende completamente, es como percibiríamos los objetos.

En la mayor parte de las longitudes de onda, sin embargo, la información transportada por la radiación electromagnética no es

directamente descubierta por los sentidos humanos. Las fuentes naturales producen radiación electromagnética a través del espectro, y nuestra tecnología también puede manipular un amplio rango de longitudes de onda. La fibra óptica transmite luz que, aunque no es adecuada para la visión directa, puede transportar datos que luego son traducidos en sonido o imagen. La codificación usada en tales datos es similar a lo que se usa con las ondas de radio.

1.2.2.5 Luz Ultravioleta

La siguiente frecuencia en el espectro es el ultravioleta (o rayos UV), que es la radiación cuya longitud de onda es más corta que el extremo violeta del espectro visible.

Al ser muy energética, la radiación ultravioleta puede romper enlaces químicos, haciendo a las moléculas excepcionalmente reactivas o ionizándolas, lo que cambia su comportamiento. Las quemaduras solares, por ejemplo, están causadas por los efectos perjudiciales de la radiación UV en las células de la piel, y pueden causar incluso cáncer de piel si la radiación daña las moléculas de ADN complejas en las células (la radiación UV es un mutágeno). El Sol emite una gran cantidad de radiación UV, lo que podría convertir rápidamente la Tierra en un desierto estéril si no fuera porque, en su mayor parte, es absorbida por la capa de ozono de la atmósfera antes de alcanzar la superficie.

1.2.2.6 Rayos X

Después del ultravioleta vienen los rayos X. Se usan generalmente para ver a través de algunos objetos, así como para la física de alta energía y la astronomía. Las estrellas de neutrones y los discos de acreción alrededor de los agujeros negros emiten rayos X, lo que nos permite estudiarlos.

1.2.2.7 Rayos gamma

Después de los rayos X vienen los rayos gamma. Son los fotones más energéticos, y no se conoce el límite más bajo de su longitud de onda. Son útiles a los astrónomos en el estudio de objetos o regiones de alta energía, y son útiles para los físicos gracias a su capacidad penetrante y su producción de radioisótopos.

No hay ningún límite exactamente definido entre las bandas del espectro electromagnético. Algunos tipos de radiación tienen una mezcla de las propiedades de radiaciones que se encuentran en las dos regiones del espectro. Por ejemplo, la luz roja se parece a la radiación infrarroja en que puede resonar algunos enlaces químicos.

1.3. Propiedades Y Aplicaciones De Las Microondas

Las microondas presentan algunas propiedades que hacen interesante su utilización. Entre éstas se pueden destacar las siguientes:

- La ganancia de una antena es proporcional al tamaño eléctrico de la antena. Para frecuencias muy altas se consiguen, por tanto, antenas más directivas. Por esta razón, para enlaces punto a punto, las microondas presentan un buen compromiso ya que permiten estructuras físicas relativamente pequeñas para ganancias elevadas (haces estrechos) y no presentan graves problemas de apuntamiento como ocurriría en el caso de frecuencias ópticas.
- Mayor ancho de banda. En microondas se puede trabajar con anchos de banda relativamente pequeños y en cambio tratar con gran cantidad de información. Por ejemplo, un ancho de banda de 1 % a 500 MHz supone 5 MHz (el ancho de banda de un canal de televisión), mientras que a 50 GHz un ancho de banda de 1 % es de 500 MHz (cerca de 100 canales de televisión).
- Transparencia de la Ionosfera. Si bien la ionosfera se comporta como una capa reflectora para las frecuencias de onda corta, a las frecuencias de microondas esta capa es transparente, por lo que estas frecuencias de microondas son utilizadas para comunicaciones tierra-satélite. La radioastronomía utiliza también esta propiedad para estudiar las estrellas lejanas a través de sus radiaciones en la banda de microondas.
- Transparencia parcial de la atmósfera y propagación en línea recta. A frecuencias de microondas en la atmósfera se puede despreciar el fenómeno de refracción pudiéndose considerar propagación en línea recta. Sin embargo, si bien los distintos componentes atmosféricos (oxígeno, nitrógeno, vapor de agua, anhídrido carbónico) y las

partículas en suspensión en la atmósfera (gotas de agua, cristales de hielo, polvo, humo, etc.) no afectan a señales por debajo de 10 GHz, sí que afectan a señales de microondas por encima de esta frecuencia. Observando la figura 1.3 se distingue una serie de ventanas entre rayas de absorción que permiten comunicación.

- **Interacción con la materia.** Cuando una onda electromagnética incide sobre una muestra de material, ésta absorbe energía de la onda a frecuencias particulares que son las frecuencias de resonancia del material. Esta resonancia observada a frecuencias de microondas depende de la composición molecular de la materia. En particular, el agua absorbe frecuencias de microondas, lo que le confiere básicamente dos propiedades:
 - Calentamiento por microondas (Cocción de alimentos, descongelación, desinfección, hipertermia, o secado en procesos industriales, entre otros ejemplos).
 - Detección y medidas de mezclas contenidas en un material.
- **Radiación no ionizante.** Las microondas presentan además la ventaja de no ser ionizante. Significará esto que la energía de un fotón viene dada por $E = h \cdot f$, donde h es la constante de Planck: $h = 4,14 \cdot 10^{-15} \text{eV}$. Por lo tanto un fotón de microondas tiene una energía comprendida entre $1,2 \cdot 10^{-6} \text{eV}$ y $1,2 \cdot 10^{-3} \text{eV}$. Esta energía resulta insuficiente para romper un enlace químico y por lo tanto no puede extraer un electrón y producir la ionización. Otras frecuencias mayores sí que presentan problemas de ionización como son los rayos X o gamma.
- **Frecuencias de oscilación estables.** Las oscilaciones atómicas más estables conocidas hasta ahora, hidrógeno, cesio y rubidio presentan oscilaciones extraordinariamente estables dentro del rango de las microondas. Cuando un electrón hace una transición entre dos niveles de energía se absorbe o se emite un fotón, cuya frecuencia es directamente proporcional a la diferencia de energía entre los dos niveles.
- **Sección recta radar grande.** El área de reflexión efectiva (sección recta radar) de un blanco radar es proporcional normalmente al tamaño eléctrico del blanco. Este hecho, junto con la ganancia de las antenas,

hacen que a menudo las microondas se utilicen en aplicaciones de radar.

1.4. Evolución Histórica

Si bien puede parecer que las microondas sea un campo de investigación reciente, se debería situar sus orígenes en el siglo pasado, cuando James Clerk Maxwell (1873) formula los conceptos fundamentales del electromagnetismo. A continuación se enumeran alguno de los hechos más significativos en el desarrollo de las microondas.

1.4.1. Primeros descubrimientos

Como cabe esperar, el origen de unas ecuaciones que reciben el nombre de Maxwell no puede ser otro que el propio físico escocés James Clerk Maxwell. Antes que nada conviene ubicarse en el siglo XIX y repasar cuales eran las tendencias de las teorías eléctricas y magnéticas de aquella época. Una clasificación tradicional de todas las teorías existentes en esa época es la que establece dos tendencias, las de mentalidad electrodinámica y las de mentalidad de campo electromagnético. Dentro del primer grupo se encuentran André Marie Ampere, Wilhelm Eduard Weber y Hermann Helmholtz, el primero francés y los segundos alemanes. Mientras que el segundo grupo lo integrarían principalmente Michael Faraday, físico inglés, y el mencionado James Clerk Maxwell también británico. El origen de los científicos permite que a los del primer grupo se le denomine como los continentales y al segundo grupo de las islas británicas. Para los continentales la sede de los fenómenos eléctricos son las cargas y las corrientes o cargas en movimiento, mientras que para el segundo grupo lo es todo el espacio, aun el espacio vacío.

Tal y como se comentaba anteriormente, fue James Clerk Maxwell, quien demostró por investigaciones teóricas, que la luz era un fenómeno electromagnético y que la energía electromagnética se propagaba como ondas en el espacio. Por tanto, es a Maxwell a quien corresponde la gloria de ser el primero que demostró científicamente la existencia de ondas electromagnéticas.

En este marco otro físico alemán, Heinrich Hertz, evoluciona de las enseñanzas electrodinámicas recibidas entre otros del mismo Hermann von Helmholtz hacia una conversión en las teorías maxwellianas. Fueron bastantes los experimentos que desarrolló Hertz y que le fueron conduciendo hacia la teoría de Maxwell, pero sin duda los que más repercusión tuvieron en este camino fueron los que tuvieron lugar durante su época de profesor en la Universidad de Karlsruhe. Allí pudo hacer uso de la sala más grande, el aula magna, que utilizó durante épocas de vacaciones para montar sus experimentos. Su tamaño era de 15 m de largo, 14 m de ancho y 6 m de alto, y tenían seis columnas de hierro paralelas a las paredes longitudinales.

Haciendo uso de un dipolo resonante formado por dos varillas terminadas en cada uno de sus extremos por grandes esferas conductoras y esferas conductoras pequeñas en los otros extremos, y mediante un sistema de excitación constante, se hacía resonar aquella estructura a una frecuencia de unos 60 MHz.

En el otro extremo de la sala tenía ubicada una espira rectangular resonante a la misma frecuencia que tenía insertada un chispero, elemento formado por dos electrodos muy próximos que hacían saltar chispas cuando se le aplicaba una diferencia de potencial. Para poder ver estas chispas necesitaba oscurecer la sala dada su baja intensidad. Con este sistema de medida midió la velocidad de propagación de las ondas radiadas mediante la distancia entre los nulos de la onda estacionaria que aparecía al colocar una pared conductora en el extremo contrario de la antena transmisora.

1.4.2. El desarrollo de la guía de onda

Hertz nunca desestimó la posibilidad de propagar ondas electromagnéticas dentro de un tubo hueco de metal. O. Heaviside también consideró esta posibilidad, desechándola arguyendo que era necesario la existencia de dos conductores para la transferencia de energía electromagnética. En aquellos momentos sólo se contemplaba como solución los modos transversales electromagnéticos.

En 1897 Lord Rayleigh demostró matemáticamente que la propagación de ondas en guías era posible tanto para sección circular como para rectangular.

Aunque no se hicieron verificaciones experimentales de la teoría de Rayleigh, en 1894 Sir Oliver Lodge observó el carácter direccional de la señal radiada obtenida con un generador de chispa rodeado con un tubo metálico. Este efecto se consideró como una curiosidad de laboratorio y no pasó de ahí.

No fue hasta 1936 cuando la guía de ondas fue redescubierta de forma independiente por dos hombres: George C. Soutworth y Wilner L. Barrow. Estos experimentos se realizaron con cañerías metálicas para conducción de agua.

1.4.3. Desarrollo del radar

El gran avance de las microondas se debió sin duda al desarrollo del radar en la segunda guerra mundial. De hecho al magnetrón se le conocía como la válvula que ganó la guerra. Al final de la guerra, parte de la información pasó a ser no clasificada, publicándose por el Massachusetts Institute of Technology, constituyendo el primer cuerpo de doctrina de las microondas.

1.4.4. Desarrollo de los tubos de microondas

Los primeros generadores de microondas fueron los tubos de vacío. Entre ellos destacan el ya mencionado magnetrón y el klystron que fue inventado en 1937 por los hermanos Varian. Posteriormente se desarrollaron el B.W.O (Backward Wave Oscillator) y el tubo de ondas progresivas TWT (Travelling Wave Tube).

1.4.5. Dispositivos de ferrita

El primer dispositivo lineal, pasivo no recíproco apareció en 1956, un girador inventado por C. Lester Hogan. Los numerosos aisladores y circuladores desarrollados desde entonces son fundamentalmente utilizados como protección, desacoplo y control. En todos o casi todos los equipos de microondas pueden verse dispositivos de este tipo en la actualidad.

1.4.6. Comunicaciones por satélite

En 1962 fue lanzado el Telstar, el primer satélite de comunicaciones situado en una órbita baja. Tres años más tarde, en 1965 se sitúa en órbita geoestacionaria el satélite Early Bird. Desde entonces sucesivas generaciones de satélites han jugado un papel importante en las comunicaciones, sobre todo en enlaces internacionales.

1.4.7. Dispositivos de estado sólido

Los dispositivos activos semiconductores aparecen en el mercado sobre los años 60, reemplazando a los tubos como fuentes de microondas para potencias medias y bajas. El primer dispositivo desarrollado de este tipo fue el diodo Gunn, basado en un fenómeno físico descubierto por J.B. Gunn en 1962. A finales de los años 70 se empezaron a utilizar los primeros transistores de microondas tanto bipolares como MESFETs. Esto se debió fundamentalmente a la mejora en la tecnología fotolitográfica que permitió metalizaciones muy estrechas. Este mismo avance permitió la sustitución parcial de las guías de onda por circuitos impresos de microondas, tales como la línea microstrip, la línea slot-line o la línea coplanar. En nuestros días se están desarrollando circuitos que integran líneas, dispositivos activos y otros componentes en un solo sustrato semiconductor, formando lo que se conoce por circuito monolítico integrado de microondas (MMIC: Monolithic Microwave Integrated Circuit). Esta tecnología permitirá abaratar la circuitería de microondas y reducir el tamaño de sus sistemas.

Es importante notar que este tipo de tecnología requiere un diseño más exacto y ajustado que los circuitos compuestos por elementos discretos, en los que era posible su ajuste a posteriori. Es por ello imprescindible para el correcto desarrollo de esta tecnología el disponer de técnicas de simulación fiables (CAD: Computer Aided Design).

1.5. Problemas Asociados a Las Frecuencias de Microondas

Sin duda podemos decir que el campo más valioso de aplicación de las microondas es el de las comunicaciones, desde las que pudiéramos denominar privadas, pasando por las continentales e intercontinentales,

hasta llegar a las extraterrestres. En este terreno, las microondas actúan generalmente como portadoras de información, mediante una modulación o codificación apropiada. En los sistemas de radar, cabe citar desde los empleados en armamento y navegación, hasta los utilizados en sistemas de alarma; estos últimos sistemas suelen también basarse en efecto DOPPLER o en cambios que sufre la razón de onda estacionaria (SWR) de una antena, pudiendo incluso reconocerse la naturaleza del elemento de alarma. Sistema automático de puertas, medida de velocidad de vehículos, etc

Otro gran campo de aplicación es el que se pudiera denominar científico, como el estudio de materiales, medicina y biología, sin embargo, un crecimiento incontrolado de la utilización de las microondas, puede dar lugar a problemas no solo de congestión del espectro, interferencias, etc., sino también de salud humana; este último aspecto no está lo suficientemente estudiado, como se deduce del hecho de que los índices de peligrosidad sean marcadamente diferentes de unos países a otros.

Centrándonos en la aplicación de las microondas a las comunicaciones, podemos decir que un enlace vía microondas consiste en tres componentes fundamentales: El Transmisor, El receptor y El Canal Aéreo. El Transmisor es el responsable de modular una señal digital a la frecuencia utilizada para transmitir y posee una antena con una corta y flexible guía de onda, El Canal Aéreo representa un camino abierto entre el transmisor y el receptor, y como es de esperar el receptor es el encargado de capturar la señal transmitida y llevarla de nuevo a señal digital. El factor limitante de la propagación de la señal en enlaces microondas es la distancia que se debe cubrir entre el transmisor y el receptor.

A estas frecuencias el camino entre el transmisor y el receptor ha de ser directo, ya que las microondas son muy sensibles a la presencia de obstáculos, ello implica que las antenas se tengan que instalar en torres. Otro problema muy importante asociado a las microondas son las condiciones atmosféricas, ya que pueden ocasionar desvanecimientos intensos y desviaciones del haz, lo que implica utilizar sistemas de diversidad y equipos auxiliares lo que supone un importante problema en diseño. Las interferencias a estas frecuencias también pueden llegar a ser inconveniente, ya que la proliferación de estos sistemas puede dar lugar a solapamiento entre las señales. Por último cabe destacar que las microondas son susceptibles a un fenómeno denominado

Desvanecimiento Multicamino (Multipath Fading) que se produce cuando una señal de radio se divide al ser transmitida en varias señales, y cada una de estas señales viaja a través de un camino distinto antes de llegar al receptor lo que puede causar una profunda disminución en la potencia de la señal recibida.

2. La Guía de Onda Rectangular y Circular. El Cable Coaxial

2.1. La guía de onda como línea de transmisión

La guía de onda es una línea de transmisión (sección constante a lo largo, simetría cilíndrica), formada por un dieléctrico (aire, por ejemplo) rodeado por un conductor, en forma rectangular o circular. Sus características de interés serán:

- Configuración espacial de los campos electromagnéticos (modos de propagación).
- Frecuencia de Corte: frecuencia mínima para la existencia de propagación de onda dentro de la guía.
- Longitud de onda de los modos.
- Constantes de propagación y atenuación.
- Impedancia de modo.

2.2. Ec. de Maxwell en la guía de onda (Modos TE, TM, y TEM)

Para conocer la distribución de campos E y H, las ecuaciones de Maxwell nos permiten emplear la densidad de corriente y carga (\vec{J} y ρ), así como las condiciones de contorno.

Por simplicidad, suponemos la no existencia de fuentes de corriente ni cargas. Esto particulariza las ec. de Maxwell como:

$$\nabla \vec{D} = 0 \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \begin{array}{ll} D = \varepsilon E & \varepsilon = \varepsilon_o \varepsilon_r \\ B = \mu H & \mu = \mu_o \mu_r \end{array}$$

$$\nabla \vec{B} = 0 \quad \nabla \times \vec{H} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \begin{array}{ll} \varepsilon_o = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{F/m} \\ \mu_o = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{F/m} \end{array}$$

Asumimos un régimen sinusoidal permanente, de forma que la variación temporal de los campos será de la forma $e^{j\omega t}$ (obviamos la demostración de que los campos electromagnéticos son ondas), por lo que los campos producen un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden.

$$\begin{array}{ll} \nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0 & k = \frac{2\pi}{\lambda} \\ \nabla^2 \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0 & \end{array}$$

Para resolverlos, asumimos que podemos descomponer los campos eléctrico y magnético en sus componentes¹ axial ($\vec{E}_z = E_z \cdot \hat{z}$ y $\vec{H}_z = H_z \cdot \hat{z}$) y transversal (\vec{E}_t y \vec{H}_t):

$$\begin{array}{l} \vec{E} = [\vec{E}_t(\tau_1, \tau_2) + E_t(\tau_1, \tau_2)\hat{z}]f(z) \\ \vec{H} = [\vec{H}_t(\tau_1, \tau_2) + H_t(\tau_1, \tau_2)\hat{z}]f(z) \end{array}$$

Donde $f(z) = e^{-\gamma z}$ representa la periodicidad espacial de los campos. De esta forma, obtenemos el sistema de 4 ecuaciones:

$$\begin{array}{l} \nabla_t^2 \cdot E_z + (k^2 + \gamma^2)E_z = 0 \\ \nabla_t^2 \cdot \vec{E}_t + (k^2 + \gamma^2)\vec{E}_t = 0 \\ \nabla_t^2 \cdot H_z + (k^2 + \gamma^2)E_z = 0 \\ \nabla_t^2 \cdot \vec{H}_t + (k^2 + \gamma^2)\vec{H}_t = 0 \end{array}$$

Las ecuaciones 1 y 3 son sobre campos escalares, y resolviendo sólo éstas podemos calcular los campos axiales, y, a partir de éstos, los transversales, según las fórmulas:

$$\begin{array}{l} \vec{E}_t = \frac{1}{k^2 + \gamma^2}(-j\omega\mu\nabla_t \times H_z \cdot \hat{z} - \gamma\nabla_t E_z) \\ \vec{H}_t = \frac{1}{k^2 + \gamma^2}(-j\omega\mu\nabla_t \times E_z \cdot \hat{z} - \gamma\nabla_t H_z) \end{array}$$

¹La dependencia de τ_1 y τ_2 se refiere a una función dependiente de las componentes transversales a z en coordenadas cartesianas o cilíndricas (x, y ó ρ, φ).

2.3. Método de análisis de guías de onda

Resolvemos la ecuación de Helmholtz (1 o 3), para E_z o H_z , asumiendo que conocemos su dependencia de z . A fin de cuentas, lo que haremos será aplicar las condiciones de contorno para obtener las constantes que caracterizan la solución, que es siempre “la misma”.

Las infinitas soluciones a las ecuaciones de onda se agrupan en 3 conjuntos disjuntos:

- TE (Transversal Eléctrico): El campo eléctrico tiene únicamente componente transversal ($E_z = 0$), pero sí componente axial magnética ($H_z \neq 0$)
- TM (Transversal Magnético): El campo magnético tiene únicamente componente transversal ($H_z = 0$), pero sí componente axial eléctrico ($E_z \neq 0$)
- TEM (Transversal Electromagnético): Los campos eléctrico y magnético tienen únicamente componente transversal ($E_z = 0$ y $H_z = 0$)

Una línea admite la propagación de modos TEM si contiene al menos 2 componentes no cortocircuitados a distinto potencial.

La constante de propagación γ se define como $\gamma = \pm jk\sqrt{\mu\varepsilon}$.

2.3.1. Modos TEM

Partiendo de $E_z = H_z = 0$, los campos que buscamos son:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_t(\tau_1, \tau_2)e^{j\omega t} \\ \vec{H} &= \vec{H}_t(\tau_1, \tau_2)e^{j\omega t}\end{aligned}$$

Aplicando las Ecuaciones de Maxwell, obtenemos:

$$\begin{aligned}\nabla_t \times \vec{E}_t = 0 &\rightarrow \nabla_t \vec{E}_t = 0 &\rightarrow \nabla_z \times \vec{E}_t = -j\omega\mu\vec{H}_t \\ \nabla_t \times \vec{H}_t = 0 &\rightarrow \nabla_t \vec{H}_t = 0 &\rightarrow \nabla_z \times \vec{H}_t = j\omega\vec{E}_t\end{aligned}$$

Puesto que el campo eléctrico se puede obtener a partir de la función potencial $\phi(\tau_1, \tau_2)$, podemos reescribir la primera ecuación como:

$$\nabla_n^2 \phi = 0$$

Resolviendo esta ecuación, obtenemos el campo ϕ , y calculamos \vec{E} como $\vec{E}_t = -\nabla_t \phi(\tau_1, \tau_2)$. El campo magnético se obtiene despejando \vec{H}_t como sigue:

$$\vec{H}_t = \frac{\gamma}{j\omega\mu}(\hat{z} \times \vec{E}_t)e^{-\gamma z} = \frac{1}{\eta}(\hat{z} \times \vec{E}_t)e^{-\gamma z}$$

Donde η denota la impedancia del medio: 120π Ohmios en aire o vacío.

El número de onda de corte de los modos TEM se define como:

$$k_c = k^2 + \gamma^2 = k^2 + (\pm jk^2) = k^2 - k^2 = 0$$

Esto quiere decir que los modos TEM se propagan a frecuencias de estática, sin una frecuencia mínima.

2.3.2. Modos TE

Los modos TE se caracterizan por $E_z = 0$, por lo que los campos en la guía se calculan como:

$$\vec{E} = \vec{E}_t(\tau_1, \tau_2)e^{-\gamma z} \quad \vec{H} = \vec{H}_t(\tau_1, \tau_2)e^{-\gamma z} + H_z(\tau_1, \tau_2)e^{-\gamma z}\hat{z}$$

Para ello, partimos de la ecuación:

$$\nabla_n^2 H_z + k_c^2 H_z = 0 \quad k_c^2 = k^2 - \beta^2 \neq 0, H_z \neq 0$$

Aplicando las condiciones de contorno, obtenemos la solución genérica de H_{zn} (donde n denota el índice del modo). A partir de H_{zn} , calculamos:

$$\vec{H}_{tn} = \frac{-\gamma_n}{k_{cn}^2 n} \nabla_t H_{zn} \quad \vec{E}_{tn} = \frac{j\omega\mu}{k_{cn}^2} \nabla_t \times (H_{zn}\hat{z}) = -\frac{j\omega\mu}{\gamma_n} \hat{z} \times \vec{H}_{tn}$$

Cada modo presenta una impedancia característica distinta, que se calcula como:

$$z_{TEn} = \frac{\hat{z} \times \vec{E}_{tn}}{\vec{H}_{tn}} = \frac{\vec{E}_{tn}}{\vec{H}_{tn} \times \hat{z}} = \frac{j\omega\mu}{\gamma_n}$$

La frecuencia de corte del modo n se define como:

$$f_{cn} = \frac{k_{cn}}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}}$$

2.3.2.1 Pared Eléctrica

Una condición de contorno que encontraremos habitualmente en las guías de onda es la de pared eléctrica. Se da cuando la guía se compone de paredes conductoras perfectas ($\sigma = \infty$). Las ecuaciones de Maxwell implican que la componente tangencial de campo eléctrico a lo largo del contorno de la guía ha de ser 0; expresando este requisito en términos de campo magnético, obtenemos:

$$E_z|_{\text{contorno}} = \frac{\partial H_z}{\partial n}|_{\text{contorno}} = 0$$

Donde n es la dirección normal al contorno considerado (si, por ejemplo, consideramos un contorno según la dirección de y , nuestra dirección normal será x).

2.3.3. Modos TM

Los modos TM se caracterizan por presentar $H_z = 0$, por lo que tenemos que hallar los campos de la forma:

$$\vec{E} = \vec{E}_t(\tau_1, \tau_2)e^{-\gamma z} + E_z(\tau_1, \tau_2)e^{-\gamma z}\hat{z} \quad \vec{H} = \vec{H}_t(\tau_1, \tau_2)e^{-\gamma z}$$

Partiendo de la ecuación:

$$\nabla_n^2 E_z + k_c^2 E_z = 0 \quad k_c^2 = k^2 - \beta^2 \neq 0, E_z \neq 0$$

Aplicamos las condiciones de contorno para hallar E_{zn} , y lo usamos para calcular:

$$\vec{E}_{tn} = -\frac{\gamma_n}{k_{cn}^2} \nabla_t E_z \quad \vec{H}_{tn} = \frac{j\omega\epsilon}{k_{cn}^2} \nabla_t \times (E_z \hat{z}) = -\frac{j\omega\epsilon}{k_{cn}^2} \hat{z} \times \nabla_t E_z$$

La frecuencia de corte del modo n se define como:

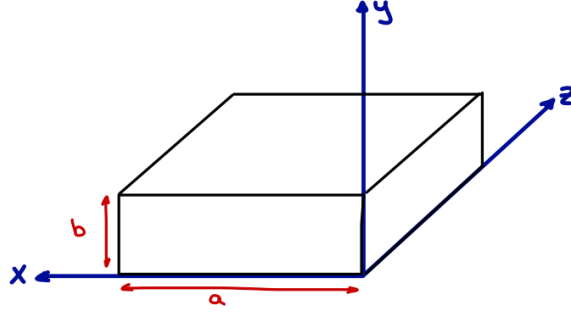
$$f_{cn} = \frac{k_{cn}}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}}$$

Cada modo presenta una impedancia característica distinta, que se calcula como:

$$z_{TMn} = \frac{\hat{z} \times \vec{E}_{tn}}{\vec{H}_{tn}} = \frac{\vec{E}_{tn}}{\vec{H}_{tn} \times \hat{z}} = \frac{\gamma_n}{j\omega\epsilon}$$

2.4. La Guía de Onda Rectangular

La guía de onda rectangular se compone de un dieléctrico perfecto (no habrá pérdidas) rodeado por un conductor perfecto ($\sigma = \infty$) que, en sección, forma un rectángulo de base a y altura b , tal que $a > b$. La dirección de propagación será, como de costumbre, z .



Para el análisis de esta guía, partimos de la ecuación de onda unidimensional (Donde A representa a E ó a H):

$$\nabla_t^2 A_z + (k^2 + \gamma^2) A_z = 0$$

Y descomponemos la función A_z en un producto de funciones de una única variable: $A_z(\tau_1, \tau_2) = X(\tau_1) \cdot Y(\tau_2)$. En coordenadas cartesianas, resulta:

$$A_z = [A_1 \cos(k_x x) + B_1 \sin(k_x x)][C_1 \cos(k_y y) + D_1 \sin(k_y y)]$$

Donde A_1 , B_1 , C_1 y D_1 serán constantes que se particularizarán según el campo que calculemos y las condiciones de contorno que queramos satisfacer.

2.4.1. Modos TE en la Guía de Onda Rectangular

Partiendo de que $E_z = 0$, nuestro objetivo es definir H_z con la expresión del apartado anterior:

$$H_z = [A_1 \cos(k_x x) + B_1 \sin(k_x x)][C_1 \cos(k_y y) + D_1 \sin(k_y y)]$$

Después, procedemos a aplicar las condiciones de pared eléctrica para los 4 contornos: $x = 0$, $x = a$, $y = 0$ e $y = b$, a fin de caracterizar A_1 , B_1 , C_1 y D_1 .

$$\blacksquare \quad x = 0, \hat{n} = \hat{x} \rightarrow \left. \frac{\partial H_z}{\partial x} \right|_{x=0} = 0$$

$$[-A_1 k_x \sin(k_x x) + B_1 k_x \cos(k_x x)] \cdot [C_1 \cos(k_y y) + D_1 \sin(k_y y)] \Big|_{x=0} = 0$$

$$[-A_1 k_x \sin(0) + B_1 k_x \cos(0)] \cdot [C_1 \cos(k_y y) + D_1 \sin(k_y y)] = 0$$

$$B_1 k_x \cdot [C_1 \cos(k_y y) + D_1 \sin(k_y y)] = 0$$

Como el segundo factor depende de y , que varía a lo largo de este contorno, sólo podemos manipular el primero.

$$B_1 k_x = 0, k_x \neq 0 \rightarrow B_1 = 0$$

$$\blacksquare \quad x = a, \hat{n} = \hat{x} \rightarrow \left. \frac{\partial H_z}{\partial x} \right|_{x=a} = 0$$

$$-A_1 k_x \sin(k_x x) [C_1 \cos(k_y y) + D_1 \sin(k_y y)] \Big|_{x=a} = 0$$

$$-A_1 k_x \sin(k_x a) [C_1 \cos(k_y y) + D_1 \sin(k_y y)] = 0$$

Como el segundo factor depende de y , que varía a lo largo de este contorno, sólo podemos manipular el primero.

$$-A_1 k_x \sin(k_x a) = 0$$

Puesto que $k_x \neq 0$ y anular A_1 supondría que no existe campo, tenemos que forzar $\sin(k_x a) = 0$, quedando:

$$k_x a = m\pi \rightarrow k_x = \frac{m\pi}{a} \quad m \in [0, 1, 2, \dots]$$

$$\blacksquare \quad y = 0, \hat{n} = \hat{y} \rightarrow \left. \frac{\partial H_z}{\partial y} \right|_{y=0} = 0$$

$$A_1 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot [-C_1 k_y \sin(k_y y) + D_1 k_y \cos(k_y y)] \Big|_{y=0} = 0$$

$$A_1 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot [-C_1 k_y \sin(0) + D_1 k_y \cos(0)] = 0$$

$$A_1 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot D_1 k_y = 0$$

Ingorando el primer factor, que depende de x , y teniendo en cuenta que $k_y \neq 0$, tenemos:

$$D_1 = 0$$

$$\blacksquare \quad y = b, \hat{n} = \hat{y} \rightarrow \left. \frac{\partial H_z}{\partial y} \right|_{y=b} = 0$$

$$A_1 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot -C_1 k_y \sin(k_y y) \Big|_{y=b} = 0$$

$$A_1 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot C_1 k_y \sin(k_y b) = 0$$

Ingorando la parte dependiente de x :

$$C_1 k_y \sin(k_y b) = 0$$

Como anular C_1 eliminaría el campo y $k_y \neq 0$, forzamos $\sin(k_y b) = 0$:

$$k_y b = n\pi \quad \rightarrow \quad k_y = \frac{n\pi}{b} \quad n \in [0, 1, 2, \dots]$$

Agrupamos A_1 y C_1 como A , la amplitud máxima, y la fórmula del campo queda:

$$H_z = A \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

Con este resultado podemos calcular H_t :

$$\vec{H}_t = -\frac{\gamma}{k_c^2} \nabla_t H_z \rightarrow \begin{cases} H_x = \frac{\gamma}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} A \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \\ H_y = \frac{\gamma}{k_c^2} \frac{n\pi}{b} A \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \end{cases}$$

Y \vec{E}_t :

$$\vec{E}_t = -\frac{j\omega\mu}{\gamma}\hat{z} \times \vec{H}_t = -\frac{j\omega\mu}{\gamma} \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 0 & 1 \\ H_x & H_y & 0 \end{vmatrix}$$

$$E_y = -\frac{j\omega\mu}{\gamma}H_x \quad E_x = \frac{j\omega\mu}{\gamma}H_y$$

La impedancia característica del modo y el número de onda de corte se calculan como:

$$z_{TE} = \frac{\mu}{\sqrt{1 - \frac{k^2}{k_c^2}}} \quad k_c = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$$

2.4.2. Modos TM en la Guía de Onda Rectangular

Puesto que $H_z = 0$, buscamos calcular:

$$E_z = [A_1 \cos(k_x x) + B_1 \sin(k_x x)][C_1 \cos(k_y y) + D_1 \sin(k_y y)]$$

Para ello, aplicamos las condiciones de contorno:

$$\blacksquare \quad x = 0 \rightarrow E_z|_{x=0} = 0$$

$$[A_1 \cos(k_x x) + B_1 \sin(k_x x)][C_1 \cos(k_y y) + D_1 \sin(k_y y)]|_{x=0} = 0$$

$$[A_1 \cos(0) + B_1 \sin(0)][C_1 \cos(k_y y) + D_1 \sin(k_y y)] = 0$$

$$A_1[C_1 \cos(k_y y) + D_1 \sin(k_y y)] = 0$$

Ignorando la parte que depende de y :

$$A_1 = 0$$

$$\blacksquare \quad x = a \rightarrow E_z|_{x=a} = 0$$

$$B_1 \sin(k_x x)[C_1 \cos(k_y y) + D_1 \sin(k_y y)]|_{x=a} = 0$$

$$B_1 \sin(k_x a)[C_1 \cos(k_y y) + D_1 \sin(k_y y)] = 0$$

Ignorando la parte que depende de y :

$$B_1 \sin(k_x a) = 0$$

Como anular B_1 eliminaría el campo, suponemos que $\sin(k_x a) = 0$:

$$k_x a = m\pi \rightarrow k_x = \frac{m\pi}{a} \quad m \in [0, 1, 2, \dots]$$

$$\blacksquare \quad y = 0 \rightarrow E_z|_{y=0} = 0$$

$$B_1 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) [C_1 \cos(k_y y) + D_1 \sin(k_y y)]|_{y=0} = 0$$

$$B_1 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) [C_1 \cos(0) + D_1 \sin(0)] = 0$$

Ignorando la parte que depende de x :

$$C_1 = 0$$

$$\blacksquare \quad y = b \rightarrow E_z|_{y=b} = 0$$

$$B_1 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) D_1 \sin(k_y y)|_{y=b} = 0$$

$$B_1 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) D_1 \sin(k_y b) = 0$$

Ignorando la parte que depende de x :

$$D_1 \sin(k_y b) = 0$$

Como no podemos anular D_1 sin eliminar el campo:

$$\sin(k_y b) = 0 \rightarrow k_y b = n\pi \rightarrow k_y = \frac{n\pi}{b} \quad n \in [0, 1, 2, \dots]$$

Finalmente, llamando A al producto de B_1 y D_1 , la expresión del campo queda:

$$E_z = A \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{b} y \right)$$

Una vez hallado E_z , procedemos a calcular \vec{E}_t :

$$\vec{E}_t = -\frac{\gamma}{k_c^2} \nabla_t E_z \rightarrow \begin{cases} E_x = -\frac{\gamma}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} A \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \cos \left(\frac{n\pi}{b} y \right) \\ E_y = -\frac{\gamma}{k_c^2} \frac{n\pi}{b} A \cos \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{b} y \right) \end{cases}$$

Y, calculando la impedancia característica del modo, podemos hallar fácilmente H_t :

$$z_{TM} = \mu \sqrt{1 - \frac{k_c^2}{k^2}} \quad k_c = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2}$$

$$\vec{H}_t = \begin{cases} H_x = -\frac{E_y}{z_{TM}} \\ H_y = \frac{E_x}{z_{TM}} \end{cases}$$

2.4.3. Propagación de Modos TE y TM en la Guía de Onda Rectangular

Las frecuencias de corte de los modos TE y TM en una guía rectangular se calculan ambas como:

$$f_c = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2}$$

Para minimizar la distorsión intermodal, nos interesa que sólo se propague un modo por nuestra guía, por lo que es habitual trabajar a una frecuencia que sólo supere la f_c de un modo, al que llamaremos modo fundamental.

Para una guía rectangular, la menor frecuencia de corte se obtiene para $m = 1$, $n = 0$ (puesto que $a > b$, por definición).

$$f_{\text{cmin}} = \frac{1}{2a\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

2.4.4. Potencia transmitida por modos TE y TM. Pérdidas en la guía

La potencia transmitida se calcula como:

$$P_{TE} = \frac{1}{2z_{TE}} \iint_S |\vec{E}_t|^2 dS = \frac{\eta^2}{2z_{TE}} \left(\frac{f}{f_c} \right)^2 \iint_S |\vec{H}_z|^2 dS$$

$$P_{TM} = \frac{z_{TM}}{2} \iint_S |\vec{H}_t|^2 dS = \frac{z_{TM}}{2\eta^2} \left(\frac{f}{f_c} \right)^2 \iint_S |\vec{E}_z|^2 dS$$

2.4.4.1 Pérdidas debido al conductor

Debido al empleo de conductores no ideales ($\sigma < \infty$), se produce el efecto pelicular: se da una corriente en la superficie del conductor, de espesor δ (profundidad de penetración). Puesto que el conductor presenta una resistencia no nula, se produce una pérdida de potencia en el conductor P_{LC} :

$$P_{LC} = \frac{R_s}{2} \int_{\text{contorno}} |\vec{J}_s|^2 dl$$

Donde \vec{J}_s y R_s son, respectivamente, corriente y resistencia superficiales del conductor, y se calculan como:

$$R_s = \frac{1}{\sigma\delta}, \quad \delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}} \quad \vec{J}_s = \hat{n} \times \vec{H}|_{\text{contorno}}$$

Con esto podemos definir el coeficiente de atenuación α_c como $\frac{P_{LC}}{P}$, medido en Np/m . Para un modo TE_{mn} :

$$\alpha_c = \frac{\frac{R_s}{2} \oint |\vec{J}_s|^2 dl}{\frac{\eta^2}{2z_{TE}} \left(\frac{f}{f_c}\right)^2 \iint_S |\vec{H}_z|^2 dS} =$$

$$\frac{2R_s}{k_m k_n b \eta \sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_c}\right)^2}} \left[\left(k_m + k_n \frac{b}{a}\right) \left(\frac{f}{f_c}\right)^2 + \left(1 - \frac{f}{f_c}\right)^2 \frac{\frac{b}{a} \left(n^2 + m^2 \frac{b}{a}\right)}{n^2 + m^2 \left(\frac{b}{a}\right)^2} \right]$$

Para un modo TE_{m0} :

$$\alpha_c = \frac{R_s}{b \eta \sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_c}\right)^2}} \left[1 + 2 \frac{b}{a} \left(\frac{f}{f_c}\right)^2 \right]$$

La función de atenuación presenta un mínimo en $f = (1 + \sqrt{2})f_c$, pero a esa frecuencia aparecen modos superiores, lo que introduce dispersión intermodal. Normalmente se opta por mantener una guía monomodo, a pesar de la mayor atenuación por conductor.

2.4.4.2 Pérdidas debido al dieléctrico

Las pérdidas que aparecen al emplear dieléctricos no ideales se debe a que estos presentan una permitividad relativa con una parte compleja:

$$\varepsilon_r = \varepsilon' - j\varepsilon''$$

Donde ε'' es el factor de pérdidas. Operando a partir de la constante de propagación:

$$\gamma = \sqrt{k_c^2 - k^2} = \sqrt{k_c^2 - \omega^2 \mu (\varepsilon' - j\varepsilon'')} = \alpha_d + j\beta$$

Observamos α_d , el coeficiente de atenuación debido a dieléctrico. Para materiales de bajas pérdidas (como aire o teflón), su valor se puede aproximar como:

$$\alpha_d \approx \frac{k \cdot \tan(\delta)}{2\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} = \frac{k \cdot \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}}{2\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$$

Asumiendo $k_c^2 - \omega^2\mu\varepsilon \gg \omega^2\mu\varepsilon \tan(\delta)$, $\tan(\delta)$ se conoce como la tangente de pérdidas.

2.4.4.3 Pérdidas totales

El coeficiente total de pérdidas, α , se expresa como:

$$\alpha = \alpha_c + \alpha_d$$

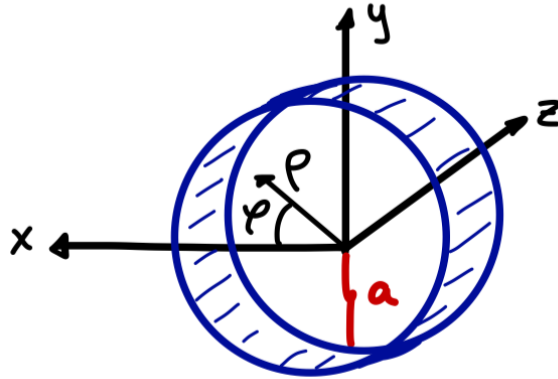
Con él, podemos calcular la potencia recibida a una distancia z como:

$$P(z) = P_0 e^{-2\alpha z}$$

2.5. La Guía de Onda Circular

Consideraremos la guía de onda circular como un dieléctrico perfecto rodeado de un conductor perfecto en forma de cilindro de radio a .

Por su geometría, realizaremos el análisis de la guía en coordenadas cilíndricas (ρ, φ, z) , siendo z la dirección de propagación.



Al igual que en la guía rectangular, podemos calcular E_z y H_z resolviendo la ecuación de onda, y después obtener \vec{E}_t y \vec{H}_t a partir de E_z y H_z . Es importante prestar atención a la inclusión de los factores de forma de este sistema de coordenadas, que en cartesianas se obviaba, por valer todos 1.

2.5.1. Modos TE en la Guía de Onda Cilíndrica

Partiendo de la condición $E_z = 0$, la ecuación de onda que buscamos resolver es:

$$\nabla^2 H_z + k^2 H_z = 0$$

Que, en coordenadas cilíndricas, queda como:

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 H_z}{\partial \varphi^2} + k_c^2 H_z = 0$$

Expresamos la función $H_z(\rho, \varphi)$ como producto $R(\rho) \cdot F(\varphi)$

$$F \frac{\partial^2 R}{\partial \rho^2} + F \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial R}{\partial \rho} + R \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + k_c^2 F \cdot R = 0$$

Multiplicando por $\frac{\rho^2}{R \cdot F}$ y reordenando:

$$\rho^2 \frac{1}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial \rho^2} + \rho \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial R}{\partial \rho} + k_c^2 \rho^2 = -\frac{1}{F} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}$$

Ahora los dos lados de la igualdad son ecuaciones diferenciales en variables ortogonales, por lo que la única forma de cumplirse es suponer que ambas expresiones toman un valor constante, al que llamaremos v^2 .

$$-\frac{1}{F} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} = v^2$$

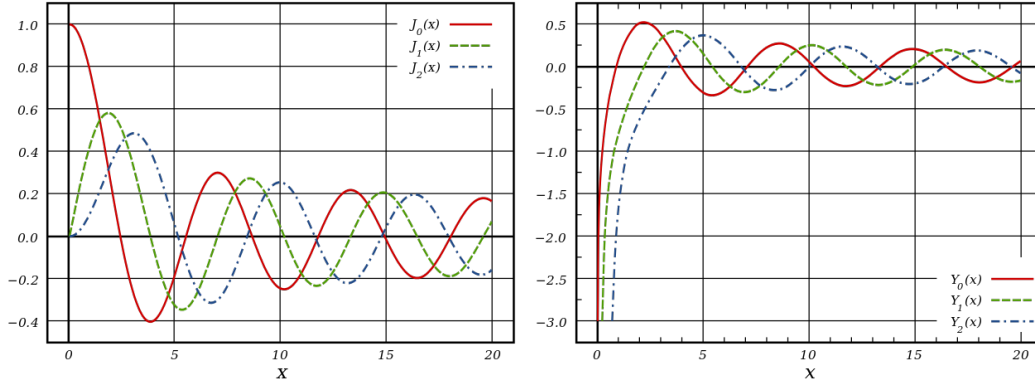
$$\rho^2 \frac{1}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial \rho^2} + \rho \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial R}{\partial \rho} + k_c^2 \rho^2 = v^2 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 R}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial R}{\partial \rho} + R \left(k_c^2 - \frac{v^2}{\rho^2} \right) = 0$$

La primera ecuación se puede resolver como:

$$F(\varphi) = A_1 \cos(n\varphi) + B_1 \sin(n\varphi) \quad n \in [0, 1, 2, \dots]$$

Mientras que la segunda es la llamada ecuación de Bessel, cuya solución es una combinación lineal de funciones de Bessel de 1ª y 2ª especie (J_u e Y_v , respectivamente):

$$R(\rho) = C_1 \cdot J_u(k_c \rho) + D_1 \cdot Y_v(k_c \rho)$$



La expresión del campo queda pues como:

$$H_z = [A_1 \cos(n\varphi) + B_1 \sin(n\varphi)] \cdot [C_1 \cdot J_u(k_c \rho) + D_1 \cdot Y_v(k_c \rho)]$$

Como se observa en las gráficas anteriores, las funciones de Bessel de 2ª especie (Y_v) divergen en el origen. Incluir cualquiera de estas funciones en nuestra expresión resultaría en un campo infinito en el centro de la línea, lo cual es imposible, conque:

$$D_1 = 0 \rightarrow H_z = C_1 [A_1 \cos(n\varphi) + B_1 \sin(n\varphi)] J_u(k_c \rho)$$

A continuación, observamos que la función seno y coseno interfieren en términos de máximos y mínimos, anular uno u otro dependerá de la elección del origen² para φ . Teniendo esto en cuenta y expresando los coeficientes restantes como producto, A , el campo queda:

$$H_z = A J_u(k_c \rho) \begin{pmatrix} \cos(n\varphi) \\ \sin(n\varphi) \end{pmatrix}$$

²Para el caso $n = 0$, se escogerá siempre anular el seno, a fin de no anular el campo. No importará el origen de para φ , ya que no habrá variación en esa dirección.

El siguiente paso es aplicar la condición de pared eléctrica en el contorno de la línea, expresada en términos de campo magnético:

$$\left. \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right|_{\rho=a} = A J'_u(k_c \rho) \begin{pmatrix} \cos(n\varphi) \\ \sin(n\varphi) \end{pmatrix} \bigg|_{\rho=a} = A J'_u(k_c a) \begin{pmatrix} \cos(n\varphi) \\ \sin(n\varphi) \end{pmatrix} = 0$$

Puesto que ni A ni k_c pueden valer 0, y podemos omitir la parte dependiente de φ :

$$J'_u(k_c a) = 0$$

La función J'_u se anula en los máximos y mínimos de la función de Bessel de la que procede; los valores de estos puntos se encuentran calculados en tablas, y se denotan como P'_{nl} , donde n representa el orden de la función de Bessel, y l es la ordinalidad del cero.

$$k_c a = P'_{nl} \rightarrow k_c = \frac{P'_{nl}}{a}$$

n	P'_{n1}	P'_{n2}	P'_{n3}
0	3,832	7,016	10,174
1	1,841	5,331	8,536
2	3,054	6,706	9,970

Teniendo esto en cuenta:

$$H_z = A J_u \left(\frac{P'_{nl}}{a} \rho \right) \begin{pmatrix} \cos(n\varphi) \\ \sin(n\varphi) \end{pmatrix} e^{-j\beta z}$$

Y a partir de H_z podemos calcular el resto de los campos:

$$\begin{aligned} H_\rho &= \frac{-j\beta a}{P'_{nl}} A J'_u \left(\frac{P'_{nl}}{a} \rho \right) \begin{pmatrix} \cos(n\varphi) \\ \sin(n\varphi) \end{pmatrix} e^{-j\beta z} \\ H_\varphi &= \frac{-j\beta a^2 n}{P'^2_{nl} \rho} A J_u \left(\frac{P'_{nl}}{a} \rho \right) \begin{pmatrix} -\sin(n\varphi) \\ \cos(n\varphi) \end{pmatrix} e^{-j\beta z} \\ E_\rho &= \frac{-j\omega \mu a^2 n}{P'^2_{nl} \rho} A J_u \left(\frac{P'_{nl}}{a} \rho \right) \begin{pmatrix} -\sin(n\varphi) \\ \cos(n\varphi) \end{pmatrix} e^{-j\beta z} \\ E_\varphi &= \frac{-j\omega \mu a}{P'_{nl}} A J'_u \left(\frac{P'_{nl}}{a} \rho \right) \begin{pmatrix} \cos(n\varphi) \\ \sin(n\varphi) \end{pmatrix} e^{-j\beta z} \end{aligned}$$

La constante de propagación $\gamma = j\beta$ se calcula como:

$$\gamma^2 = k_{cnl}^2 - k^2 = \left(\frac{P'_{nl}}{a} \right)^2 - \omega^2 \mu \varepsilon$$

Y la frecuencia de corte:

$$f_c = \frac{P'_{nl}}{2\pi a \sqrt{\mu \varepsilon}}$$

Consultando la tabla de P'_{nl} , vemos que la frecuencia de corte más baja es la del modo TE_{11} .

2.5.2. Modos TM en la Guía de Onda Circular

Partiendo de que $H_z = 0$, desarrollamos la ecuación $\nabla^2 E_z + k^2 E_z = 0$ (en coordenadas cilíndricas) para obtener:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 E_z}{\partial \varphi^2} + k_c^2 E_z = 0$$

Después de descomponer $E_z(\rho, \varphi)$ como el producto $R(\rho) \cdot F(\varphi)$, nos encontramos en la misma situación que en el análisis de modos TE . Aplicando la misma lógica, ignoramos las funciones de Bessel de 2ª especie, y escogemos seno o coseno (según convenga para el origen de coordenadas empleado). La expresión de E_z queda:

$$E_z = A J_u(k_c \rho) \begin{pmatrix} \cos(n\varphi) \\ \sen(n\varphi) \end{pmatrix}$$

Aplicando la condición de pared eléctrica en el contorno de la línea:

$$E_z|_{\rho=a} = A J_u(k_c \rho) \begin{pmatrix} \cos(n\varphi) \\ \sen(n\varphi) \end{pmatrix} \Big|_{\rho=a} = A J_u(k_c a) \begin{pmatrix} \cos(n\varphi) \\ \sen(n\varphi) \end{pmatrix} = 0$$

Puesto que ni A ni k_c pueden valer 0, y podemos omitir la parte dependiente de φ :

$$J_u(k_c a) = 0 \rightarrow k_c a = P_{nl} \rightarrow k_c = \frac{P_{nl}}{a}$$

Donde P_{nl} es el l -ésimo cero de la n -ésima función de Bessel de 1ª especie. Sus valores numéricos se pueden consultar en tablas.

n	P_{n1}	P_{n2}	P_{n3}
0	2,405	5,520	8,654
1	3,832	7,016	10,174
2	5,135	8,417	11,620

El modo TM con menor frecuencia de corte es el TM_{01} .

2.5.3. Propagación de Modos TE y TM en la Guía de Onda Circular

Puesto que las frecuencias de corte de los modos TE y TM se calculan con los ceros de funciones diferentes (J'_u y J_u , respectivamente), no existirán modos degenerados.

$$f_{cTE} = \frac{P'_{nl}}{2\pi a \sqrt{\mu\epsilon}} \quad f_{cTM} = \frac{P_{nl}}{2\pi a \sqrt{\mu\epsilon}}$$

Puesto que el menor valor de P'_{nl} ó P_{nl} es P'_{11} , el primer modo en transmitirse, y por lo tanto el modo fundamental, es el modo TE_{11} . Para calcular su margen dinámico, empleamos el valor del siguiente modo en propagarse, el TM_{01} :

$$\frac{f_{cTM01}}{f_{cTE11}} = \frac{P_{01}}{P'_{11}} = \frac{2,405}{1,841} \approx 1,3$$

Las impedancias características de los modos vienen dadas por:

$$z_{TE} = \frac{?}{?} \quad z_{TM} = \frac{?}{?}$$

2.5.4. Potencia, Pérdidas y Atenuación en la Guía Circular

La potencia transmitida por los modos TE y TM se calcula como:

$$P_{TE} = \frac{1}{2z_{TE}} \iint_S |\vec{E}_t|^2 dS = \frac{\eta^2}{2z_{TE}} \left(\frac{f}{f_c} \right)^2 \iint_S |\vec{H}_z|^2 dS$$

$$P_{TM} = \frac{z_{TM}}{2} \iint_S |\vec{H}_t|^2 dS = \frac{z_{TM}}{2\eta^2} \left(\frac{f}{f_c}\right)^2 \iint_S |\vec{E}_z|^2 dS$$

Las componentes del coeficiente de pérdidas, $\alpha = \alpha_c + \alpha_d$ se obtienen de la forma:

$$\begin{aligned}\alpha_{cTE} &= \frac{R_S}{a\eta \sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_c}\right)^2}} \left[\left(\frac{f}{f_c}\right)^2 + \frac{n^2}{P_{nl}^2 - n^2} \right] \\ \alpha_{cTM} &= \frac{R_S}{a\eta \sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_c}\right)^2}} \\ \alpha_d &= \frac{k \tan(\delta)}{2 \sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_c}\right)^2}}\end{aligned}$$

2.6. El Cable Coaxial

El cable coaxial consta de 2 conductores cilíndricos concéntricos (el interno de radio b , y el externo de radio a). Asumiremos que la malla conductora externa tiene un espesor mucho mayor que la profundidad de penetración del conductor (δ), lo que evita radiación al exterior e interferencias en el interior. Al presentar 2 conductores a diferente potencial, puede transmitir modos TEM, por lo que se emplea desde frecuencias muy bajas.

Cable_coaxial.jpg

2.6.1. Funcionamiento como LT

Los valores de algunos parámetros de interés del cable coaxial:

- C?³

³Duda: ni puta idea de lo que significan (ni para qué se usan, pero eso es irrelevante) la mitad de estos parámetros.

- Impedancia característica
- Resistencia
- Coeficiente de pérdidas por conductor

2.6.2. Modos TEM en el Cable Coaxial

2.6.3. Modos TM en el Cable Coaxial

2.6.4. Modos TE en el Cable Coaxial

3. Resonancia

3.1. Introducción

Los circuitos resonantes son de vital importancia en multitud de aplicaciones, entre otras:

- Amplificadores
- Filtros
- Aisladores
- Frecuenciómetros

Pueden implementarse mediante elementos concentrados, líneas de transmisión, o cavidades resonantes. Estas últimas presentan beneficios tales como:

- Resonancias muy selectivas
- Factores de calidad elevados
- Anchos de banda muy estrechos

3.1.1. El Factor de Calidad (Q)

El factor de calidad es una medida del rendimiento con que un sistema almacena energía al ser recorrido por una corriente alterna, y es un parámetro que interesa aumentar.

$$Q = 2\pi \frac{U_{\text{MaxAlm}}}{U_{\text{dis}}}$$

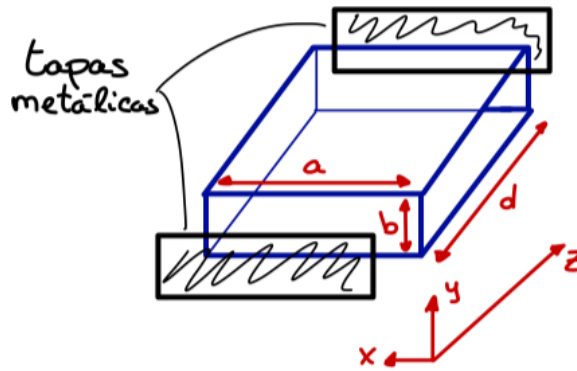
Donde U_{MaxAlm} es la energía máxima almacenada por el circuito, y U_{dis} es la energía disipada durante un período T . Llamando P_m a la potencia media disipada, queda:

$$Q = 2\pi \frac{U_{\text{MaxAlm}}}{P_m T} = \omega \frac{U_{\text{MaxAlm}}}{P_m}$$

El factor de calidad es inversamente proporcional al ancho de banda de resonancia, por lo que factores de calidad altos resultan en resonancias selectivas. Las líneas de transmisión típicamente presentan factores de calidad comprendidos entre 100 y 500, mientras que con las cavidades podemos esperar valores de 10000 a 20000.

3.2. La Cavity Rectangular

Se obtiene una cavidad resonante rectangular cuando se cortocircuitan los extremos de una guía rectangular de dimensiones a y b con placas conductoras separadas por una distancia d :



Partiendo de la función de campo del modo fundamental, TE_{10} , aplicaremos las nuevas condiciones de contorno impuestas por los nuevos

cortocircuitos ($z = 0$ y $z = d$).

$$E_y = A \operatorname{sen} \left(\frac{\pi x}{a} \right) e^{-\gamma z} \quad (E_z = E_x = 0)$$

Teniendo en cuenta que la variación según z se puede expresar como suma de la onda regresiva y progresiva:

$$E_y = (A^+ e^{-j\beta z} + A^- e^{j\beta z}) \operatorname{sen} \left(\frac{\pi x}{a} \right)$$

Aplicamos la condición de contorno $E_y|_{z=0} = 0$:

$$E_y|_{z=0} = (A^+ + A^-) \operatorname{sen} \left(\frac{\pi x}{a} \right) = 0$$

Puesto que no podemos manipular la parte que depende de x , $A^+ = -A^-$:

$$E_y = (A^+ e^{-j\beta z} - A^+ e^{j\beta z}) \operatorname{sen} \left(\frac{\pi x}{a} \right) = A^+ (e^{-j\beta z} - e^{j\beta z}) \operatorname{sen} \left(\frac{\pi x}{a} \right)$$

$$E_y = -2jA^+ \operatorname{sen}(\beta z) \operatorname{sen} \left(\frac{\pi x}{a} \right)$$

A esta expresión le aplicamos la segunda condición de pared eléctrica, $E_y|_{z=d} = 0$:

$$E_y|_{z=d} = -2jA^+ \operatorname{sen}(\beta d) \operatorname{sen} \left(\frac{\pi x}{a} \right) = 0$$

Ignorando la parte que depende de x , $\operatorname{sen}(\beta d) = 0$:

$$\beta d = p\pi \quad \rightarrow \quad \beta = \frac{p\pi}{d} \quad p = [1, 2, 3, \dots]$$

Esta restricción sobre la constante de fase (β) representa la selectividad en frecuencia de la cavidad: el campo sólo existe en las frecuencias que cumplan la condición anterior, en vez de aparecer a partir de una frecuencia

umbral, como en las guías no cortocircuitadas. Para hallar la(s) frecuencia(s) de resonancia del modo TE_{10} :

$$\beta^2 = k^2 - k_c^2 \rightarrow \left(\frac{p\pi}{d}\right)^2 = (2\pi f_r)^2 \mu \varepsilon - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2$$

$$f_r = \frac{1}{2\sqrt{\mu\varepsilon}} \sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 - \left(\frac{p}{d}\right)^2}$$

Los valores de p producen las frecuencias de resonancia del modo TE_{10} , $f_{rTE_{10}p}$. De forma general, para un modo mn en una cavidad rectangular, los números de onda de resonancia se calculan como:

$$k_{rmp} = \sqrt{\left(\frac{\pi m}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2 + \left(\frac{\pi p}{d}\right)^2}$$

3.2.1. Factor de Calidad

Para calcular el factor de calidad de una cavidad, debemos considerar las pérdidas provenientes de la utilización de conductores imperfectos ($\sigma < \infty$) y dieléctricos no ideales ($\sigma \neq 0$). Partiendo de la definición:

$$Q = \omega \frac{U_{\text{MaxAlm}}}{P_m}$$

La energía almacenada en la cavidad es la suma de las energías asociadas al campo eléctrico y al magnético ($U = U_E + U_M$), que en régimen de resonancia son iguales ($U = 2U_E = 2U_M$).

$$U_E = \frac{\varepsilon}{4} \iiint_V |\vec{E}|^2 dV \quad U_M = \frac{\mu}{4} \iiint_V |\vec{H}|^2 dV$$

Para la resonancia TE_{101} ($m = 1, n = 0, p = 1$), es más sencillo comenzar por el campo eléctrico:

$$U = 2U_E = \frac{\varepsilon}{2} \iiint_V |\vec{E}_y|^2 dV =$$

$$\frac{\varepsilon}{2} \int_0^a \int_0^b \int_0^d (2A^+)^2 \sin^2 \left(\frac{\pi x}{a} \right) \sin^2 \left(\frac{\pi z}{d} \right) dx dy dz = \frac{(A^+)^2 \varepsilon abd}{2}$$

Para calcular la potencia disipada, tenemos en cuenta la debida a las pérdidas en conductor (P_{lc}) y en dieléctrico (P_{ld}). Comenzando por P_{lc} :

$$P_{lc} = \frac{R_s}{2} \oint_{\text{contorno}} |\vec{J}_s|^2 dl = \frac{R_s}{2} \iint_S |\vec{H}_{tS}|^2 dS =$$

$$\frac{R_s}{2} \left[2 \int_0^a \int_0^b |\vec{H}_x|_{z=0}^2 dx dy + 2 \int_0^b \int_0^d |\vec{H}_z|_{x=0}^2 dy dz \right]$$

Lo cual⁵, suponiendo pérdidas bajas, se simplifica (de una forma que no demostraremos) para llegar a:

$$P_{lc} = \frac{(A^+)^2 R_s \lambda^2}{2\eta^2} \left[\frac{ab}{d^2} + \frac{bd}{a^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{d} + \frac{d}{a} \right) \right]$$

Las pérdidas en dieléctrico, P_{ld} , se calculan a partir de la conductividad del mismo, $\sigma_e = \omega \varepsilon' \varepsilon_0 \tan(\delta)$, que usamos en:

$$P_{ld} = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{J} \times \vec{E}^* dV = \frac{\sigma_e}{2} \iiint_V |\vec{E}_y|^2 dV = \frac{(A^+)^2 \varepsilon'' \varepsilon_0 abd}{2}$$

De forma genérica⁶, las contribuciones de los dieléctricos y conductores imperfectos a un factor de calidad real, no infinito, se pueden caracterizar descomponiendo Q de la forma:

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{Q_c} + \frac{1}{Q_d} \quad Q = \frac{Q_c Q_d}{Q_c + Q_d}$$

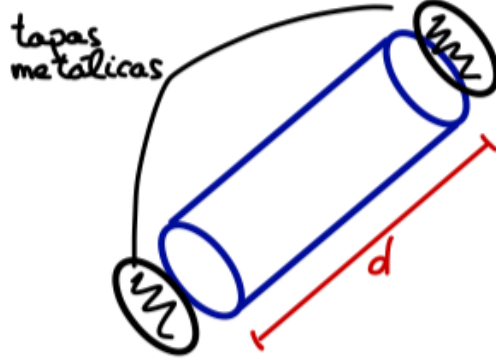
$$Q_c = \frac{\pi \eta}{2R_s} \cdot \frac{b(a^2 + d^2)3/2}{ad(a^2 + d^2) + 2b(a^3 + d^3)} \quad Q_d = \frac{1}{\tan \delta}$$

⁵En el caso genérico, habría que calcular la integral de superficie de $\hat{n} \times \vec{H}$ en todos los contornos de la guía, aunque aquí hemos obviado $\int_0^a \int_0^d |\vec{H}_y|_{y=0}^2$, ya que $E_y = 0$.

⁶Duda: Espero que sea genérico, porque jo-der.

3.3. La Cavity Circular

La cavidad circular se obtiene cortocircuitando los extremos de una guía circular a una distancia d , análogamente a la cavidad rectangular.



Partiendo de la expresión del campo en coordenadas cilíndricas, añadimos las ondas progresiva y regresiva a la dependencia según z :

$$\vec{E} = (A^+ e^{-j\beta z} - A^- e^{j\beta z}) \vec{E}_t(\rho, \varphi)$$

Aplicando la condición de contorno en $z = 0$:

$$\vec{E}_t|_{z=0} = (A^+ + A^-) \vec{E}_t(\rho, \varphi) \rightarrow A^+ = -A^-$$

$$\vec{E} = -2jA^+ \sin(\beta z) \vec{E}_t(\rho, \varphi)$$

Y en $z = d$:

$$\vec{E}_t|_{z=d} \vec{E} = -2jA^+ \sin(\beta d) \vec{E}_t(\rho, \varphi) = 0 \rightarrow \sin(\beta d) = 0$$

$$\beta d = q\pi \rightarrow \beta = \frac{q\pi}{d} \quad q = [1, 2, 3, \dots]$$

Obtenemos la selectividad en frecuencia de la cavidad. La frecuencia de resonancia se obtiene empleando las frecuencias de corte de cada modo, por lo que para modos TE y TM genéricos:

$$f_{rTE_{nl}q} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{p'_{nl}}{a}\right)^2 + \left(\frac{q\pi}{d}\right)^2}$$

$$f_{rTM_{nl}q} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{p_{nl}}{a}\right)^2 + \left(\frac{q\pi}{d}\right)^2}$$

3.3.1. Factor de Calidad

Omitiendo los cálculos y demostraciones, las aportaciones de los conductores y dieléctricos al factor de calidad, Q_c y Q_d , son:

$$Q_d = \frac{1}{\tan \delta} \quad Q_c = \frac{(ka)^3 \eta a d^7}{4 p'_{nl} R_s} \cdot \frac{1 - \left(\frac{u?}{p'_{nl}} \right)^2}{\frac{ad}{2} \left[1 + \left(\frac{\beta a n}{p'_{nl}} \right)^2 \right] + \left(\frac{\beta a}{p'_{nl}} \right)^2 \left(1 - \frac{n^2}{p'_{nl}} \right)}$$

4. Análisis de Redes

4.1. Matriz de Dispersión $[S]$

La matriz de dispersión surge como respuesta a la necesidad de analizar circuitos en la banda de microondas. Consideraremos un circuito al que se podrán conectar n componentes, mediante líneas de transmisión, en cada uno de los denominados accesos.

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1n} \\ z_{21} & z_{22} & \cdots & z_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{n1} & z_{n2} & \cdots & z_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{pmatrix}$$

En cada una de dichas líneas de transmisión es necesario fijar un plano de referencia en el que medir las variables de interés (V , I), lo cual presenta problemas endémicos a la banda de microondas:

- La pequeña longitud de onda provoca variación sustancial de los parámetros medidos con desplazamientos pequeños en la dirección de propagación.
- Los circuitos abiertos y cortocircuitos empleados en mediciones presentan imperfecciones que tienden a funcionar como antenas, radiando energía y falseando la medición.

- Cuando se consiguen, estos cortocircuitos o circuitos abiertos estables tienden a no estar en el plano deseado.
- Incluso salvando los obstáculos anteriores, los componentes activos podrían dañar el dispositivo que queremos caracterizar.

Para poner solución a los problemas anteriores, se recurre a la medición de la amplitud de la onda progresiva en la LT conectada al acceso. Por convenio, y a lo largo de todo el tema, consideraremos como dirección positiva la de entrada a la red, y las variables se normalizarán respecto a la característica de la línea⁸ (z_{0i}). Algunos ejemplos:

$$\begin{aligned} a_i &= \bar{V}_i^+ = \frac{V_i^+}{\sqrt{z_{0i}}} & \bar{V}_i &= \frac{V_i}{\sqrt{z_{0i}}} & \bar{V}_i &= a_i + b_i \\ b_i &= \bar{V}_i^- = \frac{V_i^-}{\sqrt{z_{0i}}} & \bar{I}_i &= \sqrt{z_{0i}} \cdot I_i & \bar{I}_i &= a_i - b_i \end{aligned}$$

Asociadas a las ondas de tensión en las LT, se encuentran sus potencias:

$$P_i^+ = \frac{|V_i^+|^2}{2z_{0i}} = \frac{1}{2}|a_i|^2 \quad P_i^- = \frac{|V_i^-|^2}{2z_{0i}} = \frac{1}{2}|b_i|^2$$

Finalmente, la matriz de dispersión es la que relaciona los parámetros a y b como $[b] = [S][a]$:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & \cdots & S_{1n} \\ S_{21} & S_{22} & \cdots & S_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{n1} & S_{n2} & \cdots & S_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Individualmente, podemos definir S_{ji} como:

$$S_{ji} = \left. \frac{b_j}{a_i} \right|_{a_k=0} \quad \forall k \neq i$$

Anular a_k excepto en $k = i$ significa limitar las ondas incidentes únicamente al acceso i . Esto se consigue reemplazando las fuentes por impedancias iguales a la característica de la línea, z_{0k} , lo cual impide que las ondas regresivas b_k se transmitan por ella volviendo a la red como

⁸Normalmente la impedancia de todas las líneas de entrada a la red será la misma.

progresivas. Esto es lo que se conoce como un acceso terminado (es importante señalar que la condición de acceso terminado no depende del plano de referencia, ya que los cambios de fase no afectan a la onda que no se transmite).

La definición anterior implica que S_{ji} puede verse como el coeficiente de transmisión del acceso i al acceso j , y cuando $i = j$, S_{ii} corresponde al coeficiente de reflexión en el acceso i (siempre con los demás terminados).

A partir de la matriz de dispersión, las matrices de impedancia y admitancia (normalizadas) se pueden obtener como:

$$\overline{[z]} = (1 + [S])(1 - [S])^{-1} \quad \overline{[Y]} = (1 - [S])(1 + [S])^{-1}$$

Y a la inversa:

$$[S] = (\overline{[z]} + 1)(\overline{[z]} - 1)^{-1} \quad [S] = (1 - \overline{[Y]})(1 + \overline{[Y]})^{-1}$$

4.1.1. Ejemplos

4.2. Propiedades de la Matriz de Dispersión

En esta sección veremos qué relación hay entre las características físicas de una red y las características matemáticas de su matriz de dispersión.

4.2.1. Red Pasiva

Una red pasiva es aquella que no posee la capacidad de generar potencia, y su matriz de dispersión cumple que:

$$|S_{ji}| \leq 1 \quad \forall i, j$$

A esta condición se llega partiendo de la definición $b = sa$:

$$b_i = S_{ji}a_j \rightarrow |b_i| \rightarrow |S_{ji}||a_j| \rightarrow \left(\frac{1}{2}|b_i|^2\right) = |S_{ji}|^2 \left(\frac{1}{2}|a_j|^2\right)$$

Las expresiones entre paréntesis corresponden a las potencias saliente y entrante en los accesos i y j , respectivamente. Para que se cumpla que la potencia saliente sea siempre menor a la entrante, debe ocurrir que $|S_{ji}|^2 \leq 1$, lo que equivale a nuestra expresión inicial.

4.2.2. Red sin Pérdidas

Las redes sin pérdidas constituyen un subconjunto de las redes pasivas, al no generar potencia, y por lo tanto sus matrices de dispersión cumplen con las restricciones correspondientes, así como:

$$\frac{1}{2}|b_i|^2 = \frac{1}{2}|a_i|^2 \rightarrow \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}|b_i|^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}|a_i|^2$$

O lo que es lo mismo, que la potencia saliente es igual a la potencia entrante. Esto tiene consecuencias adicionales, como que el módulo de todos los vectores fila y columna de S ha de valer 1:

$$\sum_{j=1}^n |S_{ij}|^2 = 1 \quad \sum_{j=1}^n |S_{ji}|^2 = 1 \quad \forall i$$

Y que el producto de dos vectores fila o columna, habiendo conjugado uno de ellos, ha de ser 0:

$$\sum_{j=1}^n S_{ij}^* \cdot S_{kj} = 0 \quad \forall i \neq k$$

4.2.3. Red Recíproca

Se dice que una red es recíproca cuando su matriz de dispersión es simétrica respecto a su diagonal principal:

$$S_{ij} = S_{ji} \quad \forall i, j \quad S = S^t$$

Por la definición de la matriz de impedancias y admitancias, estas propiedades también se propagan⁹ a ellas ($[z] = [z^t]$, $[Y] = [Y^t]$).

4.2.4. Red Simétrica

Red simétrica es aquella cuyos accesos presentan una simetría física:

$$S_{ii} = S_{jj} \quad \forall i, j$$

Y por lo tanto, los elementos de su diagonal principal son iguales.

⁹Las operaciones de suma, producto, inversión y trasposición de matrices simétricas resultan en matrices simétricas.

4.3. Redes de dos Accesos

Las redes de dos accesos se corresponden al concepto de cuadripolo, familiar del análisis de curcuitos.

$$\text{Cuadripolo.jpg} \rightarrow S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix}$$

De su matriz de dispersión podemos extraer las matrices de impedancia y admitancia, y con sus elementos (z_{ji} e Y_{ji}) podemos implementar sus equivalentes en “ π ” y en “ τ ”:

$$\text{Cuadripolo-en-pi.jpg} \quad \text{Cuadripolo-en-tau.jpg}$$

Las matrices de impedancia y admitancia también son útiles para caracterizar agregaciones de cuadripolos: al conectar cuadripolos en serie, como en la imagen, su matriz de impedancia conjunta es la suma de las impedancias de los cuadripolos individuales:

$$\text{Cuadripolos-en-serie.jpg} \rightarrow [z_T] = [z_A] + [z_B]$$

La matriz, de admitancias, por su parte, nos permite caracterizar fácilmente una conexión de cuadripolos en paralelo:

$$\text{Cuadripolos-en-paralelo.jpg} \rightarrow [Y_T] = [Y_A] + [Y_B]$$

4.3.0.1 Análisis Básico del Cuadripolo

Consideremos un cuadripolo al que, en su primer acceso, se le conecta un generador (V_g, z_g), y en su segundo acceso se le conecta una carga z_L , como en la imagen:

$$\text{Cuadripolo-cableado.jpg}$$

De este análisis genérico buscamos obtener 3 características importantes del cuadripolo:

- Impedancia de entrada.
- Impedancia de salida.
- Ganancia de transferencia.

Para empezar, partimos de la definición de la matriz de dispersión, que relaciona las amplitudes de ondas entrantes y salientes:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} b_1 = a_1 S_{11} + a_2 S_{12} \\ b_2 = a_1 S_{21} + a_2 S_{22} \end{cases}$$

Puesto que en cada acceso hay una línea de transmisión conectando el elemento en cuestión a la red, tendremos que tener en cuenta 2 factores de reflexión en cada acceso. Llamando ρ_L al factor de reflexión en carga, ρ_g al de generador, y ρ_{in} / ρ_{out} a los factores de reflexión de los accesos a la red:

$$\begin{aligned} \rho_L &= \frac{a_2}{b_2} = \frac{z_L - z_{02}}{z_L + z_{02}} & \rho_{out} &= \frac{b_2}{a_2} = \frac{1}{\rho_L} \\ \rho_g &= \frac{a_1}{b_1} = \frac{z_g - z_{01}}{z_g + z_{01}} & \rho_{in} &= \frac{b_1}{a_1} = \frac{1}{\rho_g} \end{aligned}$$

Una vez definidos los coeficientes de reflexión, comenzamos el análisis dividiendo la primera ecuación, obtenida de la matriz de dispersión, entre a_1 :

$$\frac{b_1}{a_1} = S_{11} + S_{12} \frac{a_2}{a_1} \rightarrow \rho_{in} = S_{11} + S_{12} \frac{a_2}{a_1}$$

Y la segunda entre a_2 :

$$\frac{b_2}{a_2} = S_{21} \frac{a_1}{a_2} + S_{22} \rightarrow \rho_{out} = S_{21} \frac{a_1}{a_2} + S_{22}$$

De la 2ª ecuación podemos despejar $\frac{a_2}{a_1}$:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{\rho_{out} - S_{22}}{S_{21}} \rightarrow \frac{a_2}{a_1} = \frac{S_{21}}{\rho_{out} - S_{22}}$$

Y sustituir lo obtenido en la 1ª:

$$\rho_{in} = S_{11} + S_{12} \frac{S_{21}}{\rho_{out} - S_{22}} = S_{11} + S_{12} \frac{S_{21}}{\frac{1}{\rho_L} - S_{22}}$$

$$\rho_{in} = S_{11} + \frac{S_{21} S_{12} \rho_L}{1 - S_{22} \rho_L}$$

De esta forma obtenemos una definición de ρ_{in} que no depende de las características del generador. Teniendo en cuenta la impedancia de la línea de entrada, z_{01} , podemos calcular:

$$z_{in} = z_{01} \frac{1 + \rho_{in}}{1 - \rho_{in}}$$

Con un desarrollo similar, podemos definir ρ_{out} independientemente de la impedancia de carga, como:

$$\rho_{out} = S_{22} + \frac{S_{21}S_{12}\rho_g}{1 - S_{11}\rho_g}$$

Y usarlo para calcular la impedancia de salida:

$$z_{out} = z_{02} \frac{1 + \rho_{out}}{1 - \rho_{out}}$$

Finalmente, la ganancia de transferencia, se puede definir así:

$$G_T = \frac{P_L}{P_{avg}}$$

Donde P_L es la potencia entregada a la carga z_L , y P_{avg} es la potencia que entregaría a una carga z_g^* en su lugar. Omitiendo la demostración, se calcula:

$$G_T = \frac{|S_{21}|^2(1 - |\rho_L|^2)(1 - |\rho_g|^2)}{|(1 - \rho_g S_{11})(1 - \rho_L S_{22}) - S_{21}^2 \rho_L \rho_g|^2}$$

4.3.1. Atenuadores

Como su nombre permite adivinar, un atenuador es un sistema que reduce los niveles de señal en un valor constante y prefijado desde su diseño. Si queremos implementar un atenuador en una red de 2 accesos, debemos considerar 2 premisas:

- Tenemos que respetar las condiciones preexistentes de adaptación entre generador y carga.
- No debemos introducir desfases indeseados en la señal (sobre todo si es dependiente¹⁰ de la frecuencia).

¹⁰Duda: el desfase? la atenuación? la señal?

El atenuador que cumple estas 2 condiciones presenta una matriz de dispersión de la forma:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & e^{-\gamma} \\ e^{-\gamma} & 0 \end{pmatrix}$$

Forzar que γ sea un número real puro evita los desfases indeseados, y anular S_{11} y S_{22} nos permite conservar la adaptación de carga y generador, puesto que (teniendo en cuenta que ρ_L y ρ_g valen 0 en situación de adaptación):

$$\rho_{out} = S_{22} + \frac{S_{21}S_{12}\rho_g}{1 - S_{11}\rho_g} = 0 + \frac{S_{21}S_{12} \cdot 0}{1 - 0 \cdot 0} = 0$$

$$\rho_{in} = S_{11} + \frac{S_{21}S_{12}\rho_L}{1 - S_{22}\rho_L} = 0 + \frac{S_{21}S_{12} \cdot 0}{1 - 0 \cdot 0} = 0$$

Las impedancias de entrada y salida corresponden a la característica de cada línea:

$$z_{in} = z_{01} \frac{1 + \rho_{in}}{1 - \rho_{in}} = z_{01} \quad z_{out} = z_{02} \frac{1 + \rho_{out}}{1 - \rho_{out}} = z_{02}$$

Y la ganancia de transferencia queda:

$$G_T = \frac{|S_{21}|^2(1 - |0|^2)(1 - |0|^2)}{|(1 - 0S_{11})(1 - 0S_{22}) - S_{21}^2 \cdot 0|^2} = |S_{21}|^2 = e^{-2\gamma}$$

A partir de la ganancia, podemos calcular la atenuación (o pérdidas) en deciBelios:

$$L(\text{dB}) = -10 \log(G_T) = -20 \log(S_{21}) = -20 \log(e^{-\gamma}) = 20\gamma \log(e) \approx 8'686\gamma$$

4.3.2. Inversores de Impedancia y Admitancia

Los inversores de impedancia son circuitos muy importantes en microondas. Se definen como un cuadripolo que, al conectarle una impedancia z_L en un extremo, presentan en el otro la impedancia inversa (multiplicada por una constante). Lo mismo se puede decir de una admitancia.

$$z_{in} = \frac{k^2}{z_L} \quad Y_{in} = \frac{J^2}{Y_L} \quad k^2 = \frac{1}{J^2}$$

Siendo J y k números reales positivos. Para caracterizar este cuadripolo, partimos de su matriz de impedancia, que definimos como simétrica y recíproca:

$$z = \begin{pmatrix} 0 & z_{12} \\ z_{12} & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} V_1 = z_{12}I_2 \\ V_2 = z_{12}I_1 \end{cases}$$

Con estas ecuaciones y la definición del inversor, podemos aplicar que $z_{in} = \frac{V_1}{I_1}$ y que $z_{out} = -\frac{V_2}{I_2}$ para obtener:

$$\frac{V_1}{I_1} = \frac{-k^2}{V_2/I_2} \rightarrow -k^2 = z_{12}^2 \rightarrow z_{12} = \pm jk$$

Con un desarrollo similar se puede obtener que $Y_{12} = \pm jJ$. Se pueden, por lo tanto, implementar inversores en “ τ ” y “ π ” empleando únicamente reactancias (X) o susceptancias (B) puras, respectivamente. En el caso del cuadripolo en “ τ ”, $z_s = \mp jX$ y $z_p = \pm jX$; para en cuadripolo en “ π ”, $z_s = \mp jB$ y $z_p = \pm jB$.

Inversor_en_tau.jpg Inversor_en_pi.jpg

Para calcular su matriz de dispersión, S_{11} (que, por simetría, será igual a S_{22}) se obtiene de su fórmula (como factor de reflexión en el acceso 1, estando terminado el acceso 2), a la que se aplica la definición del inversor:

$$S_{11} = \frac{z_{in} - z_0}{z_{in} + z_0} = \frac{k^2/z_L - z_0}{k^2/z_L + z_0} = \frac{k^2/z_0 - z_0}{k^2/z_0 + z_0} = \frac{k^2 - z_0^2}{k^2 + z_0^2}$$

Mediante un proceso similar, se puede obtener S_{11} en términos de admitancias. Independientemente, llamaremos a este resultado γ :

$$S_{11} = \gamma = \frac{k^2 - z_0^2}{k^2 + z_0^2} = \frac{Y_0^2 - J^2}{Y_0^2 + J^2}$$

Una vez calculado S_{11} , la simetría implica que tenemos S_{22} , y la reciprocidad que sólo hace falta calcular un elemento más, S_{21} .

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12} & S_{11} \end{pmatrix}$$

Para obtenerlo, usaremos la ausencia de pérdidas, que implica que el módulo de filas y columnas ha de ser 1, y que el producto de una fila (o columna) por el conjugado de otra debe ser 0. Llamando γ al elemento que ya habíamos calculado, la matriz que cumple esto es:

$$S = \begin{pmatrix} \gamma & \pm j\sqrt{1-\gamma^2} \\ \pm j\sqrt{1-\gamma^2} & \gamma \end{pmatrix}$$

4.4. Propiedades de Simetría

5. Divisores de Potencia y Acopladores direccionales

5.1. Redes de 3 Accesos

5.1.1. Propiedades

Consideraremos estas redes (y en general, una red de cualquier tamaño) como completamente adaptadas cuando los elementos de su diagonal principal (S_{ii}) serán 0.

$$S = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & f & 0 \end{pmatrix}$$

Sin embargo, no puede existir una red pasiva, recíproca, sin pérdidas y completamente adaptada. Para demostrar esto, consideremos su existencia, con una matriz de dispersión de la siguiente forma:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$$

Considerando la propiedad de unietariedad:

$$\begin{aligned} |a|^2 + |b|^2 &= 1 \\ |a|^2 + |c|^2 &= 1 \\ |b|^2 + |c|^2 &= 1 \end{aligned}$$

Restando la primera y la segunda ecuación, obtenemos $|b|^2 - |c|^2 = 0$, por lo que b y c son iguales en módulo. Se puede obtener una expresión para cualquier combinación de a , b , $c \dots$ (y cualquier cantidad de parámetros de S , para cualquier tamaño N). Como todo valdrá lo mismo, obtenemos:

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Multiplicando la 1ª fila por la 2ª conjugada, queda:

$$(0, a, b) \cdot (a, 0, c)^* = b \cdot c^* = 0$$

Si este producto se anula, alguno de sus factores lo hace, lo cual es incompatible con el cálculo anterior. Por lo tanto queda demostrado que nuestra red no puede ser pasiva, recíproca, sin pérdidas y completamente adaptada.

5.1.1.1 Divisores de Potencia

Para los divisores de potencia, la propiedad menos prioritaria es la adaptación, por lo que algún elemento de su diagonal principal (S_{ii}) será no nulo. Considerando que, por diseño, un divisor de potencia sólo va a recibir potencia por un acceso (S_{11} , por convenio), los factores de reflexión en las salidas pueden desadaptarse sin inconvenientes. La matriz S , de forma genérica queda:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & c & d \\ b & d & e \end{pmatrix}$$

Por la definición de a y b como factores de transmisión, la expresión $|a|^2 + |b|^2 = 1$ expresa el reparto de potencia entrante que sale por los accesos 2 y 3. Considerando un divisor simétrico, el reparto de potencia es equitativo y los factores de reflexión han de ser iguales, por lo que:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ a & c & d \\ a & d & c \end{pmatrix}$$

Aplicando la propiedad de unitariedad a la 1ª fila:

$$|a|^2 + |a|^2 = 1 \rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Aplicando la propiedad de unitariedad al producto de la 2ª y 3ª fila (conjugada), y a la 2ª por sí sola:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & c & d \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & d & c \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} \frac{1}{2} + 2cd = 0 \\ \frac{1}{2} + c^2 + d^2 = 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} c = \frac{1}{2} \\ d = -\frac{1}{2} \end{array}$$

$$S = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

5.1.1.2 Combinadores de Potencia

Un combinador de potencia cuya salida se encuentre en el acceso 1 puede presentar desadaptación en él, por lo que, asumiendo que queremos una igual contribución de los accesos 2 y 3:

$$S = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & 0 & c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$$

Aplicando la condición de unitariedad al producto de las fila 2 y 3:

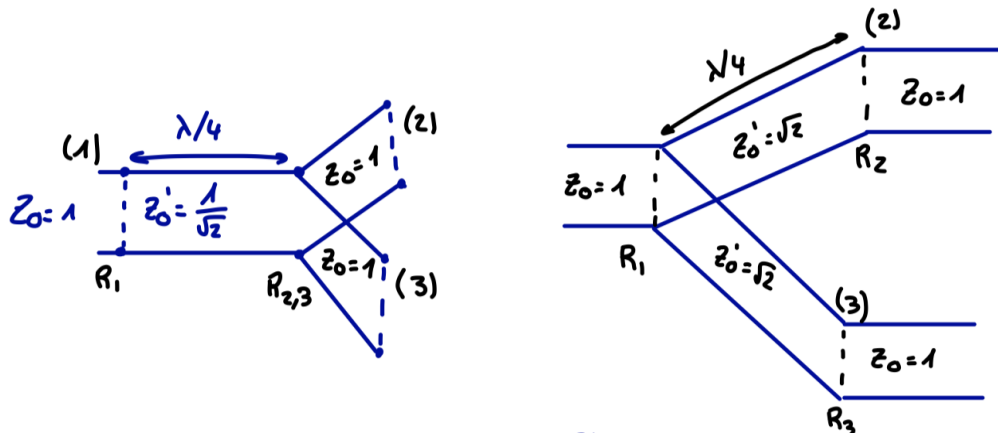
$$(b, 0, c) \cdot (b, c, 0)^* = b \cdot b^* = |b|^2 = 0 \rightarrow b = 0$$

Un coeficiente de transmisión nulo implica que los accesos 2 y 3 están aislados del 1, por lo que la red no puede funcionar como un combinador. Es, por lo tanto, inevitable que nuestro circuito combinador incurra en pérdidas.

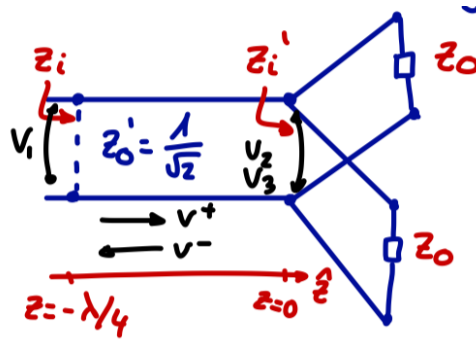
5.1.2. Divisores de Potencia

5.1.2.1 Divisores con Líneas en $\frac{\lambda}{4}$

En este apartado consideraremos 2 formas diferentes de implementar un divisor de potencia simétrico empleando líneas de transmisión en $\lambda/4$, como se indica en las ilustraciones:



Considerando una red con una única línea de transmisión, suponemos que el acceso 1 está adaptado y que su matriz de dispersión es simétrica y sin pérdidas.



$$a = b$$

Para que el acceso 1 esté perfectamente adaptado, la impedancia a la entrada de la red (z_i) debe ser igual a la de la línea (z_0). Empleando esta

condición para calcular la impedancia de la línea que debemos emplear:

$$S_{11} = \frac{z_i - z_0}{z_i + z_0} = 0 \rightarrow z_i = \frac{z_0'^2}{z_i'} = \frac{z_0'^2}{z_0 || z_0} = 1 \rightarrow z_0' = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Para calcular S_{21} (que, por la simetría de nuestro divisor de potencia equivale a S_{31} , y por reciprocidad a S_{12} y S_{13}), partimos de su definición como factor de transmisión en la red cuando los accesos están acabados¹¹:

$$S_{21} = \frac{b_2}{a_1} \Big|_{a_2=a_3=0} = \frac{V_2^-}{V_1^+} = \frac{V_2}{V_1}$$

Puesto que los accesos 1 y 2 están en los extremos de una línea ($V(z) = V^+e^{-j\beta z} + V^-e^{j\beta z}$), podemos expresar sus tensiones de la forma:

$$V_2 = V_{z=0} = V^+e^{j0} + V^-e^{-j0} = V^+ + V^-$$

$$V_1 = V_{z=\frac{\lambda}{4}} = V^+e^{j\pi/2} + V^-e^{-j\pi/2} = jV^+ - jV^-$$

Relacionando las ondas progresiva y regresiva según el factor de reflexión en $z = 0$:

$$V^- = \rho V^+ \quad \rightarrow \quad \frac{V_2}{V_1} = \frac{V^+(1 + \rho)}{jV^+(1 - \rho)} = -\frac{j}{\sqrt{2}}$$

$$\rho = \frac{z_i' - z_0'}{z_i' + z_0'} = \frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}$$

5.1.2.2 Divisores Resistivos

Cuando abordamos el análisis de divisores de potencia basados en elementos resistivos, hay que tener en cuenta que las pérdidas inherentes a este tipo de componentes nos impiden aplicar la condición de unitariedad, por lo que nos vemos obligados a considerar sólo la pasividad y la reciprocidad.

¹¹De forma general, esto quiere decir que no hay onda entrante en el acceso 2 ($a_2 = 0 \rightarrow V_2 = V_2^-$). En este caso, además, encontramos que el factor de reflexión en el acceso 1 (S_{11}) es 0, por lo que no hay onda saliente ahí ($b_1 = 0 \rightarrow V_1 = V_1^+$).