彭 · 高数2023版 大一上期中高数试题

2022年——————————————————————————第2页
2021年——————————————————————————第3页
2020年——————————————————————————第5页
2019年——————————————————————————第6页
2018年——————————————————————————第8页
2017年——————————————————————————第9页
2016年—————————————————————————-第11页
2015年—————————————————————————-第12页
2014年—————————————————————————-第14页
2013年—————————————————————————-第15页

2022年高数期中考试题

一、单选题

1. 下列命题正确的是( )

(A)任何两个无等小量之比的极限必存在 (极限值为有限实数或 ∞).

(B) 若数列 $\{a_{2k-1}\}$ 和 $\{a_{2k}\}$ 都收敛, 则数列 $\{a_n\}$ 必收敛.

(C) 若数列 $\{a_n\}$ 收敛, 数列 $\{b_n\}$ 发散, 则数列 $\{a_n b_n\}$ 必发散.

(D) 若数列 $\{a_n\}$ 单调增，数列 $\{b_n\}$ 单调减，且 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

2. 当 $x \to 0$ 时, $x-\sin ax$ 与 $x^2\ln(1-bx)$ 是等价无穷小, 则( )

(A) $a=1, b=-\dfrac{1}{6}$

(B) $a=1, b=\dfrac{1}{6}$

(C) $a=-1, b=-\dfrac{1}{6}$

(D) $a=-1, b=\dfrac{1}{6}$

3. 设 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^2}=2$, 则在 x_0 处 $f(x)$ ( )

(A) 可导且 $f'(x_0)\neq 0$

(B) 不可导

(C) 取得极小值

(D) 取得极大值

4. 设 $f(x)=\begin{cases} ae^x, & x<0, \\ b+\ln(1+x), & x\geq 0,\end{cases}$ 若 f 在 $x=0$ 处可导, 则( )

(A) $a=-1, b=-1$

(B) $a=1, b=1$

(C) $a=2, b=2$

(D) $a=2, b=1$

5. 设函数 f 在 $[a,b]$ 上连续, 则 f 在 $[a,b]$ 上具有的性质是( )

(A) 存在 $\xi\in(a,b)$, 使 $f(b)-f(a)=f\prime(\xi)(b-a)=0$.

(B) 存在 $\xi\in(a,b)$, 使 $f'(\xi)=0$.

(C) 存在 $\xi \in [a,b]$，使 $f(x) \leqslant f(\xi)$，$x \in [a,b]$.

(D) 存在 $\xi \in (a,b)$，使 $f(x) > f(\xi), x \in [a,b]$.

二、填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. 设 $y=\sqrt{x}+\frac{1}{2x-1}$, 则 $\mathrm{d}y=$ ______
2. 函数 $f(x)=\frac{|x|^{x}-1}{x(x+1)\ln|x|}$ 的可去间断点的个数为______
3. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\sin x}-\sqrt{1-x}}{x^2-x\ln(1+x)}=$ ______.
4. 设 $y=x^2\ln(1+x)$, 则其麦克劳林公式中 x^n 项的系数是______
5. 设 $x=g(y)$ 是 $y=\ln x+\arctan x$ 的反函数, 则 $g'\left(\frac{\pi}{4}\right)=$ ______

三、解答题(每小题 8 分, 共 48 分)

1.已知 $y=e^{\sin x^2}\arctan\sqrt{x^2-1}$, 求 y'.

2.求曲线 $f(x)=\sqrt[3]{6x^2-x^3}$ 的凹区间和拐点.

3.已知 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+c}{x-c}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)]$, 且 $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=e$. 求 c 的值.

4.设 $f(x)=\frac{1}{\pi x}+\frac{1}{\sin\pi x}-\frac{1}{\pi(1-x)'}, x\in\left[\frac{1}{2},1\right)$. 补充定义 $f(1)$ 使 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上连续.

5.设 $f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{x}{2+x^2-e^{tx}}$, 讨论 $f(x)$ 的可导性, 并在可导点处求 $f'(x)$.

四、(12 分) 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0<x_1<\pi, x_{n+1}=\sin x_n(n=1,2,\cdots)$.

(1)证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,并求该极限;

(2) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

五、(10 分) 设 $y=f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内具有二阶连续导数, 且 $f''(x)\neq 0$, 证明:

(1) 对于 $(-1,1)$ 内的任意 $x\neq 0$, 存在唯一的 $\theta(x)\in(0,1)$,使 $f(x)=f(0)+xf'[\theta(x)x]$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\dfrac{1}{2}$.

2021 年高数上期中试题

一、选择题

1. 当 $x\to 0$ 时, 与 $\ln(1+2\sin x)$ 等价的无穷小是（）

$A.\,1+2\sin x$
$B.\,x$
$C.\,2x^2$
$D.\,2x$

2. 设 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{|x|}\sin\dfrac{1}{x^2} & ,x\neq 0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处 ( )

$A.$ 极限不存在
$B.$ 极限存在但不连续
$C.$ 连续
$D.$ 连续且可导

3. 设 $f(x)=\dfrac{1-e^{1/x}}{1+e^{1/x}}\arctan\dfrac{1}{x}$, 则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的 ( )

A. 可去间断点

B. 跳跃间断点

C. 无穷间断点

D. 振荡间断点

4. 设 $f(x)$ 可导, $F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$, 若 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 则必有 ( )

A. $f'(0)=0$

B. $f(0)=0$

C. $f(0)+f'(0)=0$

D. $f(0)-f'(0)=0$

5. 已知: $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内连续, 且 $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{1+x^2}-1}=2$, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处 ( )

A. 不可导

B. 可导且 $f'(0)\neq 0$

C. 取得极小值

D. 取得极大值

二、填空题

1. 设 $f(x)$ 可微, $y=f(\sqrt{x})e^{f(-x)}$, 则 $y'=$ ____

2. $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)=$ ____

3. 设 $y=\dfrac{x^4+x^2+x}{x^2-1}$, 则 $y'''(0)=$ ____

4. 函数 $y=-\dfrac{1}{2}x^2e^x$ 的一个极小值是____

5. 设 $y=y(x)$ 由方程 $xy+e^y=x+1$ 确定, 则 $dy=$ ____

三、

- 求函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x\left(x^{2}-4\right)}{\sin(\pi x)} & x<0 \\ \dfrac{x(x-1)}{x^{2}-1} & x \geqslant 0\end{cases}$ 的间断点, 并指出其类型.

四、计算题

1. 求极限 $\lim\limits_{x \rightarrow 0}(\cos 2x+2x \sin x)^{\frac{1}{x^{4}}}$.
2. 设 $y=\sqrt{\mathrm{e}^{\sin \left(\frac{1}{x}\right)} \sqrt{\mathrm{e}^{-x^{2}}+(\sin \sqrt{5})(\cos x)}}$, 求 y'.
3. 已知曲线方程为 $\begin{cases}x=2t+3+\arctan t \\ y=2-3t+\ln\left(1+t^{2}\right)\end{cases}$, 求曲线在 $t=0$ 处对应的切线方程和法线方程.
4. 设 $f(x)=(5-x)x^{\frac{2}{3}}$, 求 $f(x)$ 的极值.
5. 求曲线 $y=\left(x^{2}+1\right)\mathrm{e}^{-x}$ 的拐点及凹凸区间.

五、证明题

1. 设数列 $\{x_{n}\}$ 满足 $x_{1}=1, x_{n+1}=\frac{x_{n}+2}{x_{n}+1}(n \in \mathbb{N}_{+})$

   证明: $\lim\limits_{n \rightarrow \infty} x_{n}=\sqrt{2}$.
2. 已知函数 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内二阶可导, 且 $f(0)=f'(0)=0,|f''(x)| \leqslant|f(x)|+|f'(x)|$.

   证明: $\exists \delta>0$, 使得在 $(-\delta, \delta)$ 内 $f(x) \equiv 0$.

2020 年高数上期中试题

一、填空题

1. $\lim\limits_{x \rightarrow 0}\left(1+2x e^{x}\right)^{\frac{1}{x}}=$ ____
2. $\lim\limits_{n \rightarrow \infty}\left(\dfrac{n+1}{n^{2}+1}+\dfrac{n+2}{n^{2}+2}+\cdots+\dfrac{n+n}{n^{2}+n}\right)=$ ____
3. 设 $y=\left(x+e^{-\frac{x}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}$, 则 $y'(0)=$ ____
4. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $x=y^{y}$ 确定, 则 $dy=$ ____
5. 函数 $y=x+2\cos x$ 在 $[0, \pi/2]$ 上的最大值为____

二、计算题

1. 求极限 $\lim\limits_{x \rightarrow \infty} \dfrac{\tan^{2}(3x)}{1-\cos(\sin x)}$.
2. 设 $y=e^{\sin \frac{1}{x}} \tan \frac{1}{x}$, 求 $y'\left(\dfrac{4}{\pi}\right)$.
3. 已知曲线 $\begin{cases}x=f(t)-1 \\ y=f\left(e^{2t}-1\right)\end{cases}$, 其中 f 可导, 且 $f(0)=2, f'(0) \neq 0$, 求 $t=0$ 处曲线的切线方程.
4. 设 $F(x)=\lim\limits_{t \rightarrow \infty} t^{2}\left[f\left(x+\frac{\pi}{t}\right)-f(x)\right] \sin\left(\dfrac{x}{t}\right)$, 其中 f 二阶可导, 求 $F(x), F'(x)$.
5. 当 $x \rightarrow 0^{+}$时, $\alpha(x)=\sqrt{a}-\sqrt{a+x^{3}}(a \geq 0)$ 是 x 的几阶无穷小? 说明理由.

6. 设 $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, x \neq 0 \\ 0, x=0 \end{cases}$, 证明其导函数 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

7. 求曲线 $y=x^4(12\ln x-7)$ 的凹凸区间及拐点.

三、 解答题

(本题 9 分) 讨论函数 $\begin{cases} \sin\dfrac{1}{x^2-1}, x<0 \\ \dfrac{x^2-1}{\cos\dfrac{\pi x}{2}}, x \geq 0 \end{cases}$ 的连续性; 若有间断点, 说明间断点的类型.

四、证明题

1. (本题 8 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上二阶可导, 且 $f(0)=0, f''(x)<0$,
证明: 对任意两点 $x_1>0$ 和 $x_2>0$, 有 $f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$.

2. (本题 7 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有三阶连续实导数, 且 $f(0)=1, f(1)=2, f'\left(\frac{1}{2}\right)=0$,
证明: 至少存 在一点 $\xi \in(0,1)$, 使得 $\left|f^{(3)}(\xi)\right| \geq 24$.

2019 年高数上期中试题

一、选择题

1. $x \to 0$ 时, 变量 $\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$ 是 ( )

A. 无穷小

B. 无穷大

C. 有界但非无穷小量

D. 无界但非无穷大

2. 设 $f(x)=\begin{cases} \sqrt{|x|}\sin\dfrac{1}{x^2}, x \neq 0 \\ 0, \quad x=0 \end{cases}$, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处 ( )

A. 极限不存在

B. 极限存在但不连续

C. 连续

D. 以上结论都不对

3. 已知 $f(x)$ 是奇函数且 $x<0$ 时单增, 则当 $x>0$ 时, $f(x)$ 是 ( )

A. 单增

B. 单减

C. 可能单增, 也可能单减

D. 既非单增也非单减

4. 设 $f(x), g(x)$ 都在 $x=a$ 处取得最大值, 则函数 $F(x)=f(x)g(x)$ 在 $x=a$ 处 ( )

A. 必取得极大值

B. 必取得极小值

C. 不可能取得极值

D. 是否取得极值不能确定

5. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某邻域内有定义, 则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导的一个充分条件是 ( )

A. $\lim\limits_{h\to\infty} h\left[f\left(a+\frac{1}{h}\right)-f(a)\right]$ 存在

B. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}$ 存在

C. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{h}$ 存在

D. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a)-f(a-h)}{h}$ 存在

二、填空题

8. 设 $f(x)$ 定义域为 $[0,1]$, 则 $f(\ln x)$ 的定义域为_____

9. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^{x}=9$, 则 $a=$ _____

10. 设 $f(x)=\begin{cases}(1+2x)^{\frac{1}{x}}, & x<0\\ b+1, & x=0,\\ \dfrac{a\sin x}{x}, & x>0\end{cases}$ 当 $a=$ _____, $b=$ _____ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

11. 函数 $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{1-x}}\sin x}{|x|}$ 的第一类间断点 $x=$ _____ , 第二类间断点 $x=$ _____

12. 已知 $x\to 0$ 时, $\sin x$ 与 $\ln(1+ax)$ 是等价无穷小, 则 $a=$ _____

三、计算题

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}\sin x-x(x+1)}{1-\cos x}$

2. 设 $y=\sin^{2}\left(\frac{1-\ln x}{x}\right)$, 求 y'.

3. 设函数 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases}x-e^{t}\sin t+1=0\\ y=t^{3}+2t\end{cases}$ 确定, 求 $\dfrac{d^{2}y}{dx^{2}}$.

4. 方程 $\sin(xy)-\ln\dfrac{x+1}{y}=1$ 表示平面上一条曲线, 试求该曲线在 $x=0$ 处的切线方程与法线方程.

5. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n^{2}+1}+\dfrac{n+2}{n^{2}+2}+\cdots+\dfrac{n+n}{n^{2}+n}\right)$.

四、(本题 9 分)

设 $n\in N_{+}$, 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}x^{n}\sin\dfrac{1}{x}, & \mathrm{x}\neq 0\\ 0, & \mathrm{x}=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性与可导性以及 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

五、证明题 (每题 7 分)

1. 设 $x_1 < -1, x_{n+1} + \sqrt{1 - x_n} = 0$,
证明 $\{x_n\}$ 收敛并求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

2. 证明不等式: 当 $e < x_1 < x_2$ 时, 有 $\dfrac{\ln x_1}{\ln x_2} < \dfrac{x_2}{x_1}$.

2018 年高数上期中试题

一、选择题

1. $x = 2$ 是函数 $f(x) = \arctan \dfrac{1}{2-x}$ 的 ( )

A. 连续点

B. 可去间断点

C. 跳跃间断点

D. 第二类间断点

2. 设 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}} & x > 0 \\ x^2 g(x) & x \le 0 \end{cases}$, 其中 $g(x)$ 有界, 则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处 ( )

A. 极限不存在

B. 极限存在但不连续

C. 连续但不可导

D. 可导

3. 函数 $f(x) = \left(x^2 - x - 2\right)\left|x^2 - x\right|$ 不可导点的个数是 ( )

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

4. 设 $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{(x-a)^2} = -1$, 则在 $x = a$ 处 ( )

A. $f(x)$ 的导数存在, 且 $f'(a) \neq 0$

B. $f(x)$ 取得极大值

C. $f(x)$ 取得极小值

D. $f(x)$ 的导数不存在

5. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导, 周期为 4 , 且 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(1) - f(1-x)}{2x} = -1$, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(5, f(5))$ 处切线的斜率为 ( )

A. 2

B. -2

B. 1

D. -1

6. 在区间 (a, b) 内, $f'(x)>0, f''(x)<0$, 则 $f(x)$ 的图像在 (a, b) 内是 (　)

A. 单增且凸

B. 单减且凸

B. 单增且凹

D. 单减且凹

二、解答题

1. 求极限 $\lim\limits_{x \rightarrow \infty}(\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \cdots \sqrt[2x]{2})$.
2. 设 $y=x \arctan x-\ln \sqrt{1+x^{2}}$, 求 dy.
3. 求极限 $\lim\limits_{x \rightarrow 0} \dfrac{1}{x}\left(\cot x-\dfrac{1}{x}\right)$.
4. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^{y}+6xy+x^{2}-1=0$, 求 $y'(0)$.
5. 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t^{3}+9t \\ y=t^{2}-2t\end{cases}$ 确定, 求 $\frac{d^{2}y}{dx^{2}}$.
6. 证明: 当 $x>0$ 时, $e^{x}-1<xe^{x}$.
7. 求函数 $f(x)=x+2\cos x$ 的最大值, 其中 $x \in\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
8. 设函数 $f(x)=\begin{cases}e^{2x}+b & x \leq 0 \\ \sin ax & x>0\end{cases}$, 问 a, b 为何值时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导？并求 $f'(x)$.
9. 设 $f(x)=\dfrac{x^{2}}{2(x+1)^{2}}$, 求:
   - 函数 $f(x)$ 的单调区间和极值.
   - 曲线 $y=f(x)$ 的凹凸区间、拐点及渐近线方程.
10. 设函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上三阶可导, 且 $f(-1)=0, f(0)=0, f(1)=1, f'(0)=0$,
    证明: 存 在 $\eta \in(-1,1)$, 使得 $f'''(\eta) \geq 3$.
11. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导, 且 $f(0)=0, f(1)=1$,
    证明: 在 $[0,1]$ 存在两点 x_{1}, x_{2}, 使得 $\dfrac{1}{f'\left(x_{1}\right)}+\dfrac{1}{f'\left(x_{2}\right)}=2$.

2017 年高数上期中试题

一、填空题

1. $\lim_{x \rightarrow 0}\left(1+2xe^{x}\right)^{\frac{1}{x}}=$ ____
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+2^{n}+3^{n}}=$ ____
3. 设 $y=\left(x+e^{-\frac{x}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}$, 则 $y'(0)=$ ____

4. 设 $f(x)=\begin{cases} e^{ax} & x\le 0 \\ b\left(1-x^2\right) & x>0\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导, 则 $a=$ ____ , $b=$ ____

5. 已知 $(1,2)$ 是曲线 $y=ax^3+bx^2$ 的拐点, 则 $a=$ ____ , $b=$ ____

二、选择题

1. 当 $x\to 0$ 时, $\ln(1+2\sin x)$ 与下列哪个表达式是等价无穷小 ( )

A. $1+2\sin x$

B. x

C. $2x^2$

D. $2x$

2. 设 $f(x)=\begin{cases} \sqrt{|x|}\sin\dfrac{1}{x^2} & x\ne 0 \\ 0 & x=0\end{cases}$, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处 ( )

A. 极限不存在

B. 极限存在但不连续

C. 连续

D. 以上结论都不成立

3. 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某领域内连续, 且 $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2$, 则在点 $x=0$ 处 $f(x)$

A. 不可导

B. 可导且 $f'(0)\ne 0$

C. 取得极大值

D. 取得极小值

4. 曲线 $y=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$ 的拐点是 ( )

A. $(1,0)$

B. $(2,0)$

C. $(3,0)$

D. $(4,0)$

三、解答题

1. 求极限 $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}{x\tan x}$.

2. 设 $y=arctan\sqrt{x^2-1}-\dfrac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}$,求$y'$.

3. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x(x+1)}{1-\cos x}$.

4. 设 $y^x=e^{x+y}$,求$\mathrm{d}y$.

5. 设 $\begin{cases} x=1+t^2 \\ y=\cos t \end{cases}$ \$,求 $\frac{d^2y}{dx^2}\ |_{t=\frac{\pi}{2}}$.

6. 求曲线$y=x^4(12\ln x-7)$的凹凸区间及拐点.

7. 讨论函数$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x(x+1)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)} & x\le 0 \\ \sin\dfrac{\pi}{x^2-4} & x>0 \end{cases}$ 的连续性，并确定其间断点类型.

8. 设奇函数$f(x)$在上具有二阶导数,且$f(1)=1$,证明:

- 存在$\xi\in(0,1)$,使得$f'(\xi)=1$.
- 存在$\eta\in(-1,1)$,使得$f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

2016 年高数上期中试题

一、填空题

1. 若 $f(x)=\begin{cases} \frac{\cos x}{x+2}, & x\ge 0 \\ \frac{\sqrt{a}-\sqrt{a-x}}{x}, & x<0 \end{cases}$ 有可去间断点 $x=0$, 则 $a=$_____

2. 若 $f(x)=\begin{cases} \frac{\sin 2x+e^{2ax}-1}{x} & x\ne 0 \\ a & x=0 \end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续, 则 $a=$_____

3. 曲线 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=t^3+9t \\ y=t^2-2t \end{cases}$ 确定, 则 $y=y(x)$ 的凸区间是_____

4. 极限 $\lim_{x\to 1}\frac{x^x-1}{x\ln x}=$ _____

5. 曲线 $y=x\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)(x>0)$ 的渐近线方程为_____

二、选择题

1. 设 $f(x),\varphi(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义, $f(x)$ 为连续函数且 $f(x)\ne 0,\varphi(x)$ 有间断点, 则 (　)

A. $\varphi(f(x))$ 必有间断点

B. $(\varphi(x))^2$ 必有间断点

C. $f(\varphi(x))$ 必有间断点

D. $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ 必有间断点

2. 设 $f(x)$ 为可导函数且满足 $\lim_{x\to 0}\frac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$, 则过曲线 $y=f(x)$ 上点 $(1,f(1))$ 处的切线的斜率为 ( )

A. 2

B. -1

C. 1

D. -2

3. 若 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$, 则在点 $x=a$ 处 ( )

A. $f'(a)$ 存在, 且 $f'(a) \neq 0$

B. $f(x)$ 取得极大值

C. $f(x)$ 取得极小值

D. $f(x)$ 的导数不存在

4. 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{1-\cos x}{\sqrt{x}}, & x>0 \\ x^2 g(x), & x \leq 0\end{cases}$, 其中 $g(x)$ 是有界函数, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处 ( )

A. 极限不存在

B. 极限存在, 但不连续

C. 连续, 但不可导

D. 可导

5. 下列命题中正确的是 ( )

A. 若 $f''\left(x_0\right)=0$, 则 $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ 一定是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

B. 若 $f'\left(x_0\right)=0$, 则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极值

C. 若 $f(x)$ 可导, 且在 x_0 处取得极值, 则 $f'\left(x_0\right)=0$

D. 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上取得最大值, 则最大值一定是 $f(x)$ 在 (a, b) 内的极大值

三、计算题

1. 求极限 $\lim\limits_{x \rightarrow 0} \dfrac{\arctan x-x}{\ln \left(1+2 x^3\right)}$.

2. 设 $y=\tan 2x+2^{\sin x}$, 求 $\left.dy\right|_{x=\frac{\pi}{2}}$

3. 设函数 $y=y(x)$ 由 $e^y+6xy+x^2-1=0$ 确定, 求 $y''(0)$.

4. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{x(1+x)}{\cos \frac{\pi}{2} x}, & x<0 \\ \sin \frac{1}{x^2-4}, & x \geq 0\end{cases}$ 的连续性, 并确定其间断点的类型.

5. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{g(x)-e^{-x}}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x=0\end{cases}$, 其中 $g(x)$ 具有二阶连续导数, 且 $g(0)=1, g'(0)=-1$.

   - 求 $f'(x)$.
   - 讨论 $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续性.

6. 设 $f(x)=\frac{x^2}{2(x+1)^2}$, 求: (1) 函数 $f(x)$ 的单调区间和极值. (2) 曲线 $y=f(x)$ 的凹凸区间和拐点.

7. 设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上三阶可导, 且 $f(-1)=0, f(0)=0, f(1)=1, f'(0)=0$, 证明: 存在 $\xi \in(-1,1)$,使 $f'''(\xi) \geq 3$.

8. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $f(a)=f(b)=1$, 试证: 存在 $\xi, \eta \in(a, b)$, 使 $e^{\xi-\eta}\left(f(\eta)-f'(\eta)\right)=1$.

2015年高数上期中试题

一、填空题

1. 设 $f(x)=\begin{cases}a+bx^2 & x\le 0\\ \frac{\sin bx}{x} & x>0\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续, 则常数 a 与 b 应满足_____

2. $\lim_{x\to 0}\frac{(1+\tan x)^x-1}{x\sin x}=$ _____

3. 曲线 $y=\frac{x^2+1}{x+1}(x\neq -1)$ 的斜渐近线方程为_____

4. 函数 $y=xe^{-x}$ 的凸区间是_____

5. 若 $f(x)=\frac{e^x-a}{x(x-1)}$ 有无穷间断点 $x=0$ 和可去间断点 $x=1$, 则 $a=$ _____

二、选择题

1. 设 $f(x),\varphi(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义, $f(x)$ 为连续函数且 $f(x)\neq 0,\varphi(x)$ 有间断点, 则 (　)

A. $f(\varphi(x))$ 必有间断点

B. $\varphi(x)/f(x)$ 必有间断点

C. $\varphi(f(x))$ 必有间断点

D. $(\varphi(x))^2$ 必有间断点

2. 设函数 $f(x)$ 可导且满足 $\lim_{x\to 0}\frac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$, 则过曲线 $y=f(x)$ 上点 $(1,f(1))$ 处的切线的斜率为 ()

A. -2

B. -1

C. 1

D. 2

3. 设 $f(x)$ 有任意阶导数, 且 $f'(x)=[f(x)]^2$, 则 $f^{(n)}(x)=($　$),(n>2)$

A. $[f(x)]^{2n}$

B. $(n!)[f(x)]^{2n}$

C. $(n!)[f(x)]^{n+1}$

D. $n[f(x)]^{n+1}$

4. 函数 $f(x)=\left(x^2-x-2\right)\left|x^3-x\right|$ 不可导点的个数是 ()

A. 3

B. 2

C. 1

D. 0

5. 若 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$, 则在点 $x=a$ 处 ()

A. $f(x)$ 取得极小值

B. $f(x)$ 的导数不存在

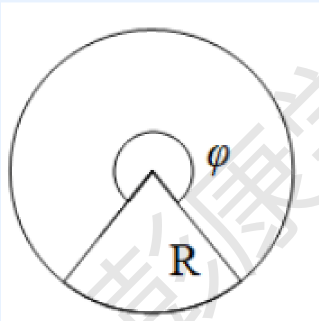
C. $f'(a)$ 存在, 且 $f'(a)\neq 0$

D. $f(x)$ 取得极大值

三、计算题

1. 求极限 $\lim_{n\to\infty}\left(n\sin\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.
2. 设 $y=\left(\arcsin\frac{1}{x}\right)^3$. 求 y'.
3. 求曲线 $\begin{cases} x=3t^2+2t+3 \\ e^y\sin t-y+1=0 \end{cases}$ 在 $t=0$ 处的切线方程.
4. 求由方程 $\arctan\frac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ 所确定的隐函数 $y=y(x)$ 的二阶导数.
5. 已知 $f(x)=e^{x^2}$, $f[\varphi(x)]=1-x$, 且 $\varphi(x)\geq 0$.
   - 求 $\varphi(x)$ 及其定义域:
   - 求 $\varphi'(-1)$.
6. 如图, 从半径为 R 的圆铁片上剪去一个扇形做成一个漏斗, 留下的扇形的中心角 φ 取多大时做成的漏斗的容积最大?

   Pasted image 20231020103344.png

7. 设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导, 且 $g''(x)\neq 0$, $f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$, 证明:
   - 在 (a,b) 内 $g(x)\neq 0$.
   - 存在 $\xi\in(a,b)$, 使 $\frac{f(\xi)}{g(\xi)}=\frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$.
8. 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上二阶可导, $f(a)>0, f'(a)<0, x>a$ 时 $f''(x)<0$, 证明: $f(x)=0$ 在 $(a,+\infty)$上有且只有一个实根.

2014年高数上期中试题

三、判断题（命题正确需给出证明, 命题错误需举出反例）

1. 设 $a<b$ 若 $\forall\delta\in\left(0,\frac{b-a}{2}\right)$, 有 f 在 $[a+\delta,b-\delta]$ 上一致连续, 则 f 在 (a,b) 上一致连续.
2. 设可微函数 f 在 $[a,b]$ 上是凸函数, 则函数 f 的图形必位于曲线过 $(a,f(a))$ 切线的上方, 即对任意 $x\in(a,b]$ 有 $f(x)\geq f(a)+f'(a)(x-a)$.

四、计算题

1. 设 $x_1=\frac{1}{2L}, L>0, x_{n+1}=x_n(2-Lx_n), n=1,2,\cdots$ 求 $\lim_{n\to\infty}x_n$.
2. 设方程 $e^{xy}+\sin x-y=0$ 确定了函数 $y=y(x)$, 求 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}$ 和 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}$.
3. 试确定常数 a,b, 使极限 $\lim_{x\to 0}\frac{1+a\cos 2x+b\cos 4x}{x^4}$ 存在, 并求出极限值.

五、证明题

1. 当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时, $\frac{2}{\pi}<\frac{\sin x}{x}<1$.

2. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 上可导, 且 $f(0)=f(1)=0, f\left(\frac{1}{2}\right)=1$, 证明:
   - $\exists \xi \in\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, 使得 $f(\xi)=\xi$.
   - 对 $\forall \lambda \in R$, 必 $\exists \eta \in(0, \xi)$, 使得 $f^{\prime}(\eta)-\lambda[f(\eta)-\eta]=1$.

3. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导, 且 $f(x)$ 的每一个零点都是简单零点 (简单零点: 若 $f\left(x_0\right)=0$, 则 $f^{\prime}\left(x_0\right) \neq 0$), 证明: $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上只有有限个零点.

2013 年高数上期中试题

一、填空题

1. 已知 $\lim_{x \rightarrow \infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x=9$, 则 $a=$ ____

2. 设 $f(x)=\begin{cases}(1-2x)^{\frac{1}{x}}, & x<0 \\ b+1, & x=0 \\ \dfrac{\sin ax}{x}, & x>0\end{cases}$ 当 $a=$ ____, $b=$ ____ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

3. 函数 $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{1-x}} \sin x}{|x|}$ 的第一类间断点 $x=$ ____ , 第二类间断点 $x=$ ____

4. 已知当 $x \rightarrow 0, \sin x$ 与 $\ln(1+ax)$ 是等价无穷小, 则 $a=$ ____

5. 设 $y=\log_a[x(\sec x+\tan x)]$, 则 $dy=$ ____

6. $\lim_{n \rightarrow \infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right) \cdot \dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n+1}=$ ____

7. 函数 $y=x+2 \cos x$ 在 $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值为____

二、计算题

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \dfrac{1-\cos \left(x^2\right)}{x^3 \sin x}$.

2. 已知$\lim_{x \rightarrow 0} \dfrac{\sqrt{1+f(x) \sin x-1}}{e^x-1}=A$,求$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

3. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1=1, x_{n+1}=\dfrac{x_n+2}{x_n+1}(n \in N_{+})$, 试证明 $\lim_{x \rightarrow \infty} x_n=\sqrt{2}$.

4. 设 $\begin{cases}x=a(\cos t+t \sin t) \\ y=a(\sin t-t \cos t)\end{cases}$, 求 $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2 y}{dx^2}$.

5. 设 $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, x \neq 0 \\ 0, x=0\end{cases}$ 说明其导函数 $f^{\prime}(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

6. 当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时, 试证明 $\sin x>\dfrac{2}{\pi} x$.

7. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶导数, 且满足条件 $|f(x)| \leq a,\left|f^{\prime \prime}(x)\right| \leq b$, 其中 a, b 都是非负常数, c 是 $(0,1)$ 内任意一点, 证明: $\left|f^{\prime}(x)\right| \leq 2a+\dfrac{b}{2}$.

8. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的领域内二阶可导, 且 $f^{\prime}(0)=0$, 试计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \dfrac{f(x)-f(\ln(1+x))}{x^3}$.

9. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界且可导, 证明: 方程 $f^{\prime}(x)\left(1+x^2\right)=2x f(x)$ 至少有一个实根.