彭 · 高数真题解析-2023版

作者
彭康学导团

日期：2023.12

2022年期末真题解析

一、选择题

1. A

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}e^x+\sin x=1$$

故本题答案选 A

2. B

令 $1-\mathrm{e}^h=t$, 则 $h=\ln(1-t)$, 当 $h\to 0$ 时, $t\to 0$, 故

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}f\left(1-\mathrm{e}^h\right)&=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{\ln(1-t)}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)-f(0)}{t}\cdot\frac{t}{\ln(1-t)}\\&=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)-f(0)}{t}\cdot(-1),\end{aligned}$$

由导数的定义知, 应选 (B). 关于其他三个选项的排除, 可用反例说明.

3. A

因为f(x) 的导函数为 $\sin 2x$

$$\begin{aligned}&\int\sin 2x dx\\=&\frac{1}{2}\int\sin 2x d2x\\=&-\frac{1}{2}\cos 2x+C\end{aligned}$$

$\therefore$ 原函数为 $-\frac{1}{2}\cos 2x$，故答案选A

4. C 解题思路设 $y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x)$ 为定义在区间I上的 n 个函数, 如果存在 n 个不全为零的常数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$, 使得当 x ∈ 时有恒等式

$$k_1y_1+k_2y_2+\cdots+k_ny_n=0 \text{ 成立,}$$

那么称这 n 个函数在区间I上线性相关; 否则称线性无关。对于两个函数的情形, 如果它们的比为常数, 那么它们就线性相关; 否则它们是线性无关的。如果 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是方程的两个线性无关的特解, 那么 $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 就是方程的通解。由此不难得到答案,故本题选C

5. B

若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 则

$$\left(\int_a^x f(t)dt\right)'=f(x);\left(\int_{g(x)}^b f(t)dt\right)'=-g'(x)f(g(x));$$

$$f(x)=\int_0^x t^2f\left(x^3-t^3\right)dt=-\frac{1}{3}\int_0^x f\left(x^3-t^3\right)d\left(x^3-t^3\right)$$

令 $x^3-t^3=ut\in\left[x^3,0\right]$

$$f(x)=\int_0^x t^2f\left(x^3-t^3\right)dt=-\frac{1}{3}\int_0^x f\left(x^3-t^3\right)d\left(x^3-t^3\right)=-\frac{1}{3}\int_{x^3}^0 f(u)d(u)$$

$$f'(x)=x^2f\left(x^3\right)$$

二、填空题

1. $y=x+1$

【解析】方程两端同时对 x 求导,得 $(2x+y')/\left(x^2+y\right)=3yx^2+\left(x^3\right)y'+\cos x$ y' 表示 y 的导数. 把 $x=0,y=1$ 带入解得 $y'=1$, 所以在 $(0,1)$ 处切线的斜率为 1 , 即切线方程为 $y=x+1$

2. $\frac{2}{\pi}$

$$\text{解:}\quad \text{原式} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\sin\frac{i\pi}{n} = \int_0^1 \sin\pi x\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}.$$

$$\text{或}\quad \text{原式} = \frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\sin\frac{i\pi}{n} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}.$$

3. $f(x) = \sin x^2$

由题意, 已知函数 $f(x) = \sin x^2 + \int_{-\pi}^{\pi} x f(x)dx$

$$\text{设 } A = \int_{-\pi}^{\pi} x f(x)dx$$

$$\therefore f(x) = \sin x^2 + A$$

将等式两边同时乘 x, 得

$$x f(x) = x\sin x^2 + Ax$$

将等式两边同时对 x 从一 π 到 π 上积分, 得

$$\int_{-\pi}^{\pi} x f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} x\sin x^2 dx + \int_{-\pi}^{\pi} Axdx$$

$$A = \int_{-\pi}^{\pi} x\sin x^2 dx + A\int_{-\pi}^{\pi} xdx$$

$\therefore$ 积分区间关于原点对称, 且有 $x\sin x^2$ 和 x 均为关于 x 的奇函数根据定积分的对称性和奇偶性, 得

$$\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} xdx = 0$$

$$\therefore A = 0 + A\times 0 = 0$$

$$\therefore f(x) = \sin x^2$$

4. 0

$$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} - \frac{2}{(1-x)^3}.$$

将 $x = 0$ 代入上式

$$\Rightarrow f^{(3)}(0) = 0.$$

5. $y = (\sin x + C)x$

首先, 我们考虑一阶线性微分方程

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{\cos x}{x}\text{。}$$

为了求解该微分方程的通解，我们可以使用常数变易法。设通解为 $y = C(x)y_1$, 其中 C(x) 为待定的函数, y_1 为对应的齐次线性微分方程 $y' + \frac{1}{x}y = 0$ 的通解。对于齐次线性微分方程 $y' + \frac{1}{x}y = 0$, 我们可以求解得到 $y_1 = C_1x$, 其中 C_1 为常数。将 y_1 代入原方程, 得到

$$C'(x)x + C(x)\cdot\frac{1}{x}\cdot x = C(x)\cdot\frac{\cos x}{x}$$

化简后得到 $C'(x) = \cos x$, 然后对 C′(x) 进行积分, 得到 $C(x) = \sin x + C$, 其中C为常数。将C (x) 代入通解 $y = C(x)y_1$, 得到 $y = (\sin x + C)x$, 其中C为任意常数。

因此, 正确的是答案$y = (\sin x + C)x$,

三、计算题

1. $\frac{1}{2}$

解 : $\lim_{x\to 0}\ln\frac{\sin x}{x} = \ln\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right) = \ln 1 = 0.$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)}+1}=\frac{1}{2}.$$

2.

$$\dot{x}=\frac{dx}{dt}=\frac{2+t}{1+t}\quad \ddot{x}=-\frac{1}{(1+t)^2}$$
$$\dot{y}=\frac{dy}{dt}=\frac{2(t+2)}{}\quad \ddot{y}=2$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{2(1+t)^2}{(2+t)}$$
$$\frac{d^2y}{dx}=\frac{(1+t)^3}{(2+t)^3}\left(\frac{6+2t}{1+t}\right)$$
$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}=1,\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{3}{4}$$

3.$\frac{x^3}{3}arctanx-\frac{1}{6}\left(1+x^2-\ln\left|1+x^2\right|\right)+C$

解答: 我们要求不定积分 $\int x^2\arctan x\,\mathrm{d}x$ 。我们可以使用分部积分法来简分部积分法公式为 $\int u\,\mathrm{d}v=uv-\int v\,\mathrm{d}u$, 其中 u 和 v 是可微函数。选择 $u=\arctan x$ 和 $\mathrm{d}v=x^2\,\mathrm{d}x$, 我们可以得到 :

$$\mathrm{d}u=\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x, v=\frac{x^3}{3}\ 。$$

将上述结果代入分部积分公式,我们得到:

$$\int x^2\arctan x\,\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}\arctan x-\int\frac{x^3}{3}\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

现在,我们要求解 $\int\frac{x^3}{3}\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ 这个积分。我们可以使用代换法, 令因此, $\mathrm{d}t=2x\,\mathrm{d}x$, 并且 $x^2=t-1$ 。将上述结果代入原积分,我们

得到:

$$\int\frac{x^3}{3}\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\int\frac{(t-1)x}{3}\frac{1}{t}\frac{\mathrm{d}t}{2x}=\frac{1}{6}\int\left(\frac{t-1}{t}\right)\mathrm{d}t.$$

化简上述积分,我们得到:

$$\frac{1}{6}\int\left(\frac{t}{t}-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{6}\int\left(1-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{6}(t-\ln|t|)+C,$$

其中 C 是积分常数。将代换结果和之前的分部积分结果结合, 我们得到最终的结果:

$$\int x^2\arctan x\,\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}\arctan x-\frac{1}{6}\left(1+x^2-\ln\left|1+x^2\right|\right)+\mathrm{C}$$

其中 C 是积分常数。 4.$y=C_1+C_2x+\mathrm{e}^x\left(C_3\cos 2x+C_4\sin 2x\right)$.

解: 所给方程的特征方程为

$$r^4-2r^3+5r^2=0,$$

它的根是

$$r_1=r_2=0, r_{3,4}=1\pm 2\mathrm{i}.$$

因此所求通解为

$$y=C_1+C_2x+\mathrm{e}^x\left(C_3\cos 2x+C_4\sin 2x\right).$$

四、解答题

1. $a=-\frac{1}{6}$

由已知有: 函数

$$f(x)=\begin{cases}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}, & x>0\\ e^a, & x\le 0\end{cases}$$

当函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续时, 有:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=f(0)$$

$$\text{又}\ \lim_{x\to 0^-} f(x)=f(0)=e^a,$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln\left(\frac{\sin x}{x}-1+1\right)}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\frac{\sin x}{x}-1}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\sin x-x}{x^3}}=e^{\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x-x}{x^3}}$$

$$=e^{\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x-x}{x^3}}=e^{\lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{6}x^3}{x^3}}$$

$$=e^{\lim_{x\to 0^+}-\frac{1}{6}}=e^{-\frac{1}{6}}$$

故

$$e^a=e^{-\frac{1}{6}}$$

故 $a=-\dfrac{1}{6}$

2.

$$f'(x)=1-\frac{2}{\sqrt{x^2+1}}, f''(x)=\frac{4x}{x^2+1}$$

单调性: 在 $(-\infty,-\sqrt{3})$ 和 $(\sqrt{3},+\infty)$ 上单调道增在 $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$ 上单调送减

极大值点: $x=-\sqrt{3}$，极小值点 $x=\sqrt{3}$ 拐点: $(0,0)$ $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上为凸函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为凹函数

3. $\dfrac{\pi}{2}$

解: $x=1$ 为瑕点，

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{(1-x)^{\frac{2}{3}}}{(2-x)\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(1-x)^{\frac{1}{6}}}{2-x}=0$$

$\therefore \int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}6[$

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(2-x)\sqrt{1-x}}\overset{t=\sqrt{1-x}}{=}\int_1^0\frac{-2t\ \mathrm{d}t}{\left[2-\left(1-t^2\right)\right]t}$$

$$=\int_0^1\frac{2\ \mathrm{d}t}{1+t^2}=2\arctan t\big|_0^1=\frac{\pi}{2}.$$

4. 首先，考虑对应齐次方程组$\frac{d\vec{x}}{\mathrm{d}t}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&3\\-3&0&2\end{pmatrix}\vec{x}$ 的通解. 个方程组的特征值可以通过求解特征方程来找到.

特征方程为：$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}-1-\lambda&0&0\\0&2-\lambda&3\\-3&0&2-\lambda\end{vmatrix}=0$

特征值为 $\lambda=-1$ 时，特征向量为 $\vec{v}_1=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$

特征值为 $\lambda=2$ 时，特征向量为 $\vec{v}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ 和 $\vec{v}_3=\begin{bmatrix}3\\0\\2\end{bmatrix}$

为了找到非齐次方程的特解，我们假设特解形式为一个常数乘以一个与右侧项形式相似的向量，即 $\vec{x}_p(t)=\vec{u}t$，其中 $\vec{u}$ 是待定常数向量。

将 $\vec{x}_p(t)=\vec{u}t$ 代入非齐次方程组，得到 $\frac{d\vec{x}_p}{dt}=\vec{u}$，代入方程后得到:

$$\vec{u}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&2&3\\-3&0&2\end{bmatrix}\vec{u}t+\begin{bmatrix}0\\t\\0\end{bmatrix}$$

解方程得到 $\vec{u}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$。因此，非齐次方程的一个特解为 $\vec{x}_p(t)=\begin{bmatrix}0\\t\\0\end{bmatrix}$。

综合齐次和非齐次方程的通解为:

$$\vec{x}(t)=\vec{x}_h(t)+\vec{x}_p(t)=c_1e^{-t}\vec{v}_1+c_2e^{2t}\vec{v}_2+c_3e^{2t}\vec{v}_3+\begin{bmatrix}0\\t\\0\end{bmatrix}$$

其中 c_1,c_2,c_3 是任意常数.

5. (1)$S=\dfrac{4}{3}$ (2)$V=\dfrac{16}{15}\pi$

解: 令 $f(x)=x^2-2x=0$ 则 $x=0$ 或 $x=2$ (确定积分上下限) $\therefore$ 与x 轴的两交点为 $(0,0)$ $(2,0)$

$$\therefore S=\left|\int_0^2\left(x^2-2x\right)dx\right|=\left|\left(\frac{1}{3}x^3-x^2\right)\right|_0^2|=\frac{4}{3}$$

(2)

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_0^2\left(x^2-2x\right)^2dx\\&=\pi\int_0^2\left(x^4-4x^3+4x^2\right)dx\\&=\pi\cdot\left(\frac{1}{5}x^5-x^4+\frac{4}{3}x^3\right)\Big|_0^2\\&=\frac{16}{15}\pi\end{aligned}$$

6. (1) $\because f(x)$ 在 $[0.2]$ 上可导, 且 $\int_0^2 f(x)dx=2$ $\therefore$ 由积分中值定理得，存在 $\xi\in[0,2)$, 使得

$$\int_0^2 f(x)dx=f(\xi)(2-0)=2$$

$$\Rightarrow X(f(\xi)=1$$

即证存在 $\xi\in[0,2)$, 使得 $f(x_0)=1$；（2）

$$\text{设 } F(x)=xe^x(f(x)-1)$$

$$F'(x)=e^x\left[xf'(x)+(x+1)(f(x)-1)\right].$$

$$\text{当 } x=0 \text{ 时 } F(0)=1$$

由(1)知在 $(0,2)$ 上存在 x_0 便 $f(x_0)=1$

$$\text{即 } F(x_0)=0$$

由罗尔中值定理得：至少存在一点 $\xi \in (0,2)$ 使得 $\xi f'(\xi) + (1+\xi) f(\xi) = 1+\xi$.

2021年期末真题解析

一、选择题

1. D.

令$\varphi(x)=\sqrt{x^2+1}, f(x)=\sqrt{x^2+2}, g(x)=\sqrt{x^2+3}$,则$\varphi(x)<f(x)<g(x)$,且

$$\lim_{x\to\infty}(g(x)-\varphi(x))=0, F\lim_{x\to\infty}f(x)\text{fl}X($$

2. C.

令 $f(x)=\int_1^x\frac{\sin t}{t}dt-\ln x$, 则 $f'(x)=\frac{\sin x-1}{x}\leq 0$. 即 f 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减. 又

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left[\int_1^x\frac{\sin t}{t}dt-\ln x\right]=+\infty, f(1)=0, \text{故在 } (0,1) \text{ 上 } f(x)>0$$

3. A.

设 $\mathrm{h}(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$, 则 $h'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}<0$, 故 h(x) 在 (a, b) 单调递减有 $h(b)<h(x)<h(a)$, 即 $\frac{f(b)}{g(b)}<\frac{f(x)}{g(x)}<\frac{f(a)}{g(a)}$, 于是

$$f(x)g(a)<f(a)g(x)$$

4. B.

因为 $\lim_{x\to 0}g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x}=\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$, 又 $g(x)$ 在 $x=0$ 处无定义, 故 $x=0$ 是 $g(x)$ 的可去间断点.

5. C.

因为 $\int_0^x xf'(x)dx=\int_0^x xdf(x)=xf(x)|_0^x-\int_0^x f(x)dx$, 其中第一个式子代表 OBAC 面积, 第二个式子代表 OBAD 面积.

二、填空题

1. e^{x+1}

因为

$$\begin{aligned}f(x+1)&=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x+2}{n-2}\right)^n\\&=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x+2}{n-2}\right)^{\frac{n-2}{x+2}}(x+2)\cdot\frac{n}{n-2}\\&=e^{x+2}\end{aligned}$$

于是 $f(x)=e^{x+1}$

2. $\frac{5}{2}$

因为

$$f(x)=\begin{cases}x^2, x>2\\ a+\frac{3}{2}, x=2\\ ax-1, x<2\end{cases}$$

故 $f(x)$ 在 $x=2$ 处连续 $\Leftrightarrow\lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^+}f(x)=f(2)\Rightarrow a=\frac{5}{2}$

3. 3

因为

$$\begin{aligned}\int_0^\pi f''(x)\sin x dx &= \int_0^\pi \sin x df'(x)\\ &= f'(x)\sin x|_0^\pi - \int_0^\pi f'(x) d\sin x\\ &= -\int_0^\pi f'(x)\cos x dx = -f(x)\cos x|_0^\pi + \int_0^\pi f(x) d\cos x\\ &= f(\pi) + f(0) - \int_0^\pi f(x)\sin x dx\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\int_0^\pi [f(x)+f''(x)]\sin x dx &= \int_0^\pi f(x)\sin x dx + \int_0^\pi f''(x)\sin x dx\\ &= \int_0^\pi f(x)\sin x + f(\pi) + f(0) - \int_0^\pi f(x)\sin x dx\\ &= f(\pi)+f(0)\end{aligned}$$

故 $f(\pi)+f(0)=5, f(0)=3$

4. $4x(e^{-x^4}+6)$

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha\to 0}\frac{f(x+\alpha)-f(x-\alpha)}{\alpha} &= \lim_{\alpha\to 0} f'(x+\alpha)+f'(x-\alpha) = 2f'(x)\\ &= 4x(e^{-x^4}+6)\end{aligned}$$

5. $\dfrac{1}{p+1}$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{n})^p\\ &= \int_0^1 x^p dx\\ &= \frac{1}{p+1}x^{p+1}|_0^1\\ &= \frac{1}{p+1}\end{aligned}$$

三、计算题

1. 对原式泰勒展开, 得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x - x - x^2}{(e^x-1)\sin^2 x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)\left(x-\frac{x^3}{6}\right)-x-x^2+o\left(x^3\right)}{x^3}\\ &= \frac{x+x^2+\frac{x^3}{2}-\frac{x^3}{6}-x-x^2+o\left(x^3\right)}{x^3}\\ &= \frac{\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)}{x^3}\\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

2. 容易发现 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, 且在 $x\neq 0$ 时 $f(x)$ 可导, 故只需考虑分段点处的情况. 若使 f 在 $x=0$ 处可导, 则 f 在 $x=0$ 处连续, 有

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0), \text{又} \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\sin x + 2ae^x = 2a$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 9\arctan x + 2b(x-1)^3 = -2b$$

因此 a = −b. 因为 f 在 $x=0$ 处可导, 有 $f'_-(0)=f'_+(0)$, 又

$$f'(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{\sin x+2ae^x-2a}{x}=2a+1$$

$$\begin{aligned}f'_+(0)&=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}\\&=\lim_{x\to0^\pi}\frac{9\arctan x+2b(x-1)^3+2b}{x}\\&=\lim_{x\to0^+}9+2b\cdot\left(x^2-3x+3\right)\\&=9+6b\end{aligned}$$

即 2a + 1 = 9 + 6b 解得 $a=1,b=-1$

3. 因为 $f'(x)=1-\frac{2}{1+x^2}$ 解得驻点为 $x=\pm1$, 又 $f''(x)=\frac{4x}{\left(1+x^2\right)^2}$ 拐点为 x = 0, 故 f 的单调增区间是

$$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$$

单调减区间是

$$(-1,1)$$

$$f_{\max}=f(-1)=\frac{\pi}{2}-1,f_{\min}=f(1)=1-\frac{\pi}{2}$$

f 的图像在 $(-\infty,0)$ 下凹, 在 $(0,+\infty)$ 上凸, $(0,,0)$ 是拐点

渐进线: $x\to+\infty$ 为 $y=x-\pi,x\to-\infty$ 方向为 $y=x+\pi$

4.

$$\begin{aligned}\int_0^3\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}dx&=\int_0^3\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}d(1+x)\\&=(1+x)\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}\Big|_0^3-\int_0^3(1+x)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}dx\\&=\frac{4\pi}{3}-\int_0^3\frac{dx}{2\sqrt{x}}=\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}\int\frac{x^3dx}{\sqrt{1+x^2}}&=\frac12\int\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}\left(1+x^2\right)\\&=\frac12\int\frac{1+x^2-1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}\left(1+x^2\right)\\&=\frac12\int\left(\left(1+x^2\right)^{\frac12}-\left(1+x^2\right)^{-\frac12}\right)\mathrm{d}\left(1+x^2\right)\\&=\frac13\left(1+x^2\right)^{\frac32}-\left(1+x^2\right)^{\frac12}+C\end{aligned}$$

6. 设被积函数为 $g(x)$, 则 $g(x)$ 有奇点 $x=0,x=2$, 设

$$I=\int_{-1}^3g(x)dx=\int_{-1}^0g(x)dx+\int_0^2g(x)dx+\int_2^3g(x)dx=I_1+I_2+I_3$$

又 $f(0-0)=-\infty,f(0+0)=+\infty,f(2-0)=-\infty,f(2+0)=+\infty$,故

$I_1=\arctan f(x)|_{-1}^0=\arctan(f(0-0))-\arctan(f(-1))=-\frac{\pi}{2}-0=-\frac{\pi}{2}$

$I_2=\arctan f(x)|_0^2=\arctan(f(2-0))-\arctan(f(0+0))=-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=-\pi$

$I_3=\arctan f(x)|_2^3=\arctan(f(3))-\arctan(f(2+0))=\arctan\frac{32}{27}-\frac{\pi}{2}$

于是 $I=\arctan\frac{32}{27}-2\pi$

7.

$$dW=\pi(y-\frac{y}{4})g(H-y)dy=\frac34\pi g(Hy-y^2)dy$$

故

$$W=\frac34\pi g\int_0^H(Hy-y^2)dy=\frac18\pi gH^3$$

四、

令 $t=\ln(2x-1)$, 则

$$\frac{dt}{dx}=\frac{2}{2x-1}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{2}{2x-1}\frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{4}{(2x-1)^2}\frac{dy}{dt}+\frac{4}{(2x-1)^2}\frac{d^2y}{dt^2}$$

代入原式，化简得

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}-2y=\frac{e^t}{2}-\frac{1}{4}$$

因此

$$\lambda^2+\lambda-2=0\quad\Rightarrow\quad\lambda_1=-2,\lambda_2=1$$

齐次通解

$$\tilde{y}=c_1e^{-2t}+c_2$$

$$e^t\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}-2y=\frac{e^t}{2}$$

设特解为 $y_1^*=Ate^t$, 解得

$$y_1'=\frac{t}{6}e^{t^2y}+\frac{dy}{dt^2}+\frac{dy}{dt}-2y=-\frac{1}{4}$$

易见特解为 $y_2^*=\dfrac{1}{8}$

通解为

$$y=c_1e^{-2t}+c_2e^t+\frac{t}{6}e^t+\frac{1}{8}=\frac{c_1}{(2x-1)^2}c_2(2x-1)+\frac{2x-1}{6}\ln(2x-1)+\frac{1}{8}$$

五、

解法略, 答案为

$$\begin{pmatrix} C_1e^{2t}+\left(C_2+\frac{1}{2}\right)te^{2t}-\frac{t}{2} \\ \left(C_2+\frac{1}{2}\right)e^{2t}-\frac{1}{2} \\ \left(C_2+C_3+\frac{1}{3}\right)e^{3t}-\left(C_2+\frac{1}{2}e^{2t}\right)+\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

六、

构造函数 $F(x)=e^{\sin(x)}g(x)$, 则$F'(x)=\cos(x)e^{\sin(x)}g(x)+e^{\sin(x)}g'(x)=(\cos(x))g'(x)+g'(x)e^{\sin(x)}$

由于 $g(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 可导, $e^{\sin x}$ 在 $(0,2\pi)$ 可导, 故 $F(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 可导,而 $g(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 连续, $F(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 连续 (2)$F(0)=1,F(\pi)=3,F(2\pi)=2$, 又由于 $F(x)$ 连续, 因此必有 a,b 满足 $0<a<\pi<b<2\pi$ 使得 $F(a)=F(b)$ 且 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可导.

故必存在 $\xi\in(0,2\pi)$ 使得 $F'(\xi)=e^{\sin(\xi)}(g'(\xi)+g(\xi)\cos(\xi))=0$, 而$e^{\sin(\xi)}\neq0$, 故在 $(0,2\pi)$ 上至少有一点ξ, 使得 $g'(\xi)+g(\xi)\cos(\xi)=0$

七、

(1) 考虑替换 $t=-x$, 有

$$\int_{-a}^{a}f(x)g(x)dx^r=x^{-k}-\int_{a}^{-a}f(-t)g(-t)dt$$

$$=\int_{-a}^{a}f(-t)g(t)dt$$

则 $\int_{-a}^{a} f(x)g(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-a}^{a} f(x)g(x)dx + \int_{-a}^{a} f(-x)g(x)dx$

$$= \frac{1}{2}\int_{-a}^{a}[f(x)+f(-x)]g(x)dx$$

$$= \frac{A}{2}\int_{-a}^{a} g(x)dx$$

$$= A\int_{0}^{a} g(x)dx$$

(2) 考虑到反正切函数的特殊性, 设 $h(x) = \arctan(e^x)$, 猜想 $h(x)+h(-x) = C$ 下面进行证明

$$\frac{d}{dx}[h(x)+h(-x)] = \frac{e^x}{1+e^{2x}} + \frac{-e^{-x}}{1+e^{-2x}} = 0$$

$$h(x)+h(-x) = C = 2h(0) = \frac{\pi}{2}$$

由 (1) 中的结论可得

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \cdot \tan(\tan)(e^x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx = \frac{\pi}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi^2}{32}$$

2020年期末真题解析

一、填空题

1. 应用麦克劳林展开$\ln(1+x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k-1}x^k}{k}$，$\ln\dfrac{1-x}{1+x^3}=\ln(1-x)-\ln(1+x^3)$,由于2021无法被3整除，所以后一项的展开中不带有x^{2021}项。第一项的展开中x^{2021}的系数为$-\dfrac{1}{2021}$

2. $x>0$时，

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to0^+}\left[\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right]&=\lim_{x\to0^+}\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}\\
&=\lim_{x\to0^+}\frac{2e^{-\frac{1}{x}}+1}{e^{-\frac{1}{x}}+e^{\frac{3}{x}}}+1\\
&=\lim_{x\to0^+}e^{-\frac{3}{x}}+1\\
&=0+1=1
\end{aligned}
$$

$x<0$时，

$$
\lim_{x\to0^-}\left[\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right]=\lim_{x\to0^-}\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\lim_{x\to0^-}\frac{\sin x}{x}=2-1=1
$$

3.

$$
\int_1^3\ln\sqrt{\frac{\pi}{|2-x|}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_1^3(\ln\pi-\ln|2-x|)\mathrm{d}x=\ln\pi-\frac{1}{2}\int_1^3\ln|2-x|\mathrm{d}x
$$

根据对称性

$$
\frac{1}{2}\int_1^3\ln|2-x|\mathrm{d}x=\int_2^3\ln(x-2)\mathrm{d}x=\int_0^1\ln x\mathrm{d}x=(x\ln x-x)|_0^1
$$

而$\lim\limits_{x\to0^+}xlnx=0$,所以结果为$1+\ln\pi$

4. $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=6t+2$，$y$看作$t$的函数，隐函数求导有$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}e^y\sin t+e^y\cos t-\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=0$,所以有$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\dfrac{e^y\cos t}{1-e^y\sin t}=\dfrac{e^y\cos t}{2-y}$。所以，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\dfrac{e^y\cos t}{(2-y)(6t+2)}$,取对数有$\ln\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y+\ln\cos t-\ln(6t+2)-\ln(2-y)$,两边对$t$求导有$\dfrac{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-\tan t-\dfrac{6}{6t+2}+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\dfrac{1}{2-y}$, 所以有$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\left(\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\right)\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-\tan t-\dfrac{6}{6t+2}+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\dfrac{1}{2-y}\right)$代入数值，得$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}|_{t=0}=\dfrac{2e^2-3e}{4}$

5. $n\to\infty$时，$\dfrac{1}{n}\to0$,利用等价无穷小并结合积分，得$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}(k+\dfrac{1}{n})^2\tan\dfrac{1}{n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}k^2.\dfrac{1}{n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{k}{n}\right)^2=\int_0^1x^2\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}$。

二、单选题

1. 首先$x\neq0$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x}{2}=\dfrac{1}{2}=f(0)$,故$f(x)$在0处连续。再利用导数定义，可得$f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-x-1}{2x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{2x^2}=\dfrac{1}{4}$,

故而函数在0处可导，导数值为$\dfrac{1}{4}$。

2. 由于

$$
1-\cos x\geq0
$$

故而依据题干的条件，可知$f(x)$在$x=0$的去心邻域内大于0，因此$f(x)$在$x=0$处取得极小值。

3. 特征方程为$\lambda^2-1=0$,可得特征根为±1,然后依据特征根与特解形式对应表，可得e^x对应的特解形式为axe^x,1对应的特解形式为b，故而特解可设为axe^x+b。

4. 由题意得：y（x）中$x=\pm1,x=0,x=2$处都没有定义，所以都是 $y(x)$ 的间断点，因此函数有4个间断点。

5. 取$x=\dfrac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$,则$y=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$,当$x\to0,n\to\infty$时，$y\to\infty$,故而y是无界，同时可以发现在三角函数中，自变量趋近于零的过程中会取正，负，零三种值，这就说明y是震荡的，不是无穷大量。

三、计算题

1.

$$\begin{aligned}原式&=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x(t\sin t+\tan^3t\cdot\ln t)\mathrm{d}t}{\int_0^x\ln^2(1+t)\mathrm{d}t}\\&=\lim_{x\to0}\frac{x\sin x+\tan^3x\cdot\ln x}{\ln^2(1+x)}\\&=1\end{aligned}$$

2. $f(x)$是偶函数，且$f(0)=-2$,因此只需要考虑函数在$(0,+\infty)$上的零点。

当$x>1$时，$f(x)>2-2\cos x\geq0$，因此函数在$(1,+\infty)$上没有零点：

当$x\in(0,1)$时，$f'(x)>0$,因此函数在$(0,1)$上严格单调递增，从而在该区间上至多有一个零点。由介值定理，$f(1)=2-2\cos1>0$,因此函数在$(0,1)$内有且仅有一个零点。

综上，函数在$(0,+\infty)$上有且仅有一个零点，从而在**R**内有且仅有2个零点。

3. 记$p=y'$，则$y''=p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$.方程可化为

$$(y+1)p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}+p^2=(1+2y+\ln y)p,$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}+\frac{p}{y+1}=\frac{1+2y+\ln y}{y+1}$$

$$p=\frac{1}{y+1}(y^2+y\ln y+C_1)$$

由初值条件知：$C_1=0$,即$y'=\dfrac{1}{y+1}(y^2+y\ln y)$, 进而 $\ln(y+\ln y)=x+C_2$,代入初值条件得$\ln(y+\ln y)=x$.

4. 注意到$\sin x$为奇函数，因此

$$I=\int_{-1}^1\frac{2x^2+x^2\sin x}{1+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int_{-1}^1\frac{2x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=4\int_0^1\frac{x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x,$$

然后进行分母有理化结合积分的几何含义

$$I=4\int_0^1 1-\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x(根号中的式子可利用圆的面积快速得出)$$

所以，$I=4-\pi$.

5. 圆周的方程为$(x-2)^2+y^2=1$.

$V=\int_{-1}^1\pi(2+\sqrt{1-y^2})^2\mathrm{d}y-\int_{-1}^1\pi(2-\sqrt{1-y^2})^2\mathrm{d}y=8\pi\int_{-1}^1\sqrt{1-y^2}\mathrm{d}y=4\pi^2.$

6. 易见f在$(-\infty,0),(0,+\infty)$内均连续可微，只要讨论f在$x=0$处的性质。

由题意，$f(x)$连续可微，所以f本身连续。

而当$k\leq0$时，$f(0^+)$不存在，所以$k>0$.

而当$k>0$时，我们有$f(0^-)=c,f(0)=0,f(0^+)=0$，因此$c=0$.

又$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}x^{k-1}\sin\dfrac{1}{x}$,

因此，当$k \le 1$时，$f'_+(0)$不存在，从而有$k > 1$。当$k > 1$时，$f'_+(0) = 0$。另一方面，$f'_-(0) = b$，从而$b = 0$. 进一步，当$k > 1, b = 0, c = 0$时，可得

$$f(x) = \begin{cases} 2a\sin x\cos x & ,x < 0 \\ 0 & ,x = 0 \\ kx^{k-1}\sin\frac{1}{x} - x^{k-1}\cos\frac{1}{x} & ,x > 0 \end{cases}$$

当$k \le 2$时，$f'(0^+)$不存在，所以$k > 2$.

即$k > 2, b = 0, c = 0$是f在R上连续可微的必要条件。

7. $f(x)$的定义域为$(-\infty, +\infty)$,$f(x) = x^2\int_1^{x^2} e^{-t^2}\mathrm{d}t - \int_1^{x^2} te^{-t^2}\mathrm{d}t$，$f'(x) = 2x\int_1^{x^2} e^{-t^2}\mathrm{d}t + 2x^3e^{-x^4} - 2x^3e^{-x^4} = 2x\int_1^{x^2} e^{-t^2}\mathrm{d}t$,故$f(x)$的驻点为$x = 0, \pm 1$。

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	极小	↗	极大	↘	极小	↗

单调增区间：$(-1, 0), (1, +\infty)$；单调减区间：$(-\infty, -1), (0, 1)$; 极小值为$f(\pm 1) = 0$,极大值为$f(0) = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{e})$。

8. $det(A - \lambda E) = (\lambda + 2)^2(4 - \lambda = 0 \Longrightarrow)\lambda_1 = \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 4,$

$\lambda = -2:$

$$A + 2E = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to r_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, r_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$\lambda = 4:$

$$A - 4E = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -9 & 3 \\ 6 & -6 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to r_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix};$$

$X(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} & -e^{-2t} & e^{4t} \\ e^{-2t} & 0 & e^{4t} \\ 0 & e^{-2t} & 2e^{4t} \end{bmatrix}.$

对应的齐次微分方程组通解为：$x = X(t)C$。

$X(0) \ne E$, 计算得$X^{-1}(0) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

通解为$x(t) = X(t)X^{-1}(0)C + \int_0^t X(t-\tau)X^{-1}(0)f(\tau)\mathrm{d}\tau$。带入公式，得

$$\begin{aligned} x(t) = &\begin{bmatrix} e^{-2t} & -e^{-2t} & e^{4t} \\ e^{-2t} & 0 & e^{4t} \\ 0 & e^{-2t} & 2e^{4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} \\ &+ \int_0^1 \begin{bmatrix} e^{-2(t-\tau)} & -e^{-2(t-\tau)} & e^{4(t-\tau)} \\ e^{-2(t-\tau)} & 0 & e^{4(t-\tau)} \\ 0 & e^{-2(t-\tau)} & 2e^{4(t-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} & -e^{-2t} & e^{4t} \\ e^{-2t} & 0 & e^{4t} \\ 0 & e^{-2t} & 2e^{4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{8} - \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{1}{8}e^{4t} \\ \frac{1}{8} - \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{1}{8}e^{4t} \\ -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{4t} \end{bmatrix}.$$

四、证明题

1. 令$x=\frac{1}{2a}(t+\sqrt{t^2+4ab})$,则$\mathrm{d}x=\frac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{2a\sqrt{t^2+4ab}}\mathrm{d}t$。

$I=\int_0^{+\infty}f(ax+\frac{b}{x})\mathrm{d}x=\frac{1}{2a}(\int_{-\infty}^0+\int_0^{+\infty})f(\sqrt{t^2+4ab})\frac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{\sqrt{t^2+4ab}}\mathrm{d}t,$

令$t=-u$,则

$$
\begin{aligned}
I&=\frac{1}{2a}\int_0^{+\infty}f(\sqrt{u^2+4ab})\frac{-u+\sqrt{u^2+4ab}}{\sqrt{u^2+4ab}}\mathrm{d}u+\frac{1}{2a}\int_0^{+\infty}f(\sqrt{t^2+4ab})\frac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{\sqrt{t^2+4ab}}\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{a}\int_0^{+\infty}f(\sqrt{t^2+4ab})\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

2. 由均值不等式结合题干条件很容易得出$0<x_n<\frac{3}{2}$，$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\sqrt{\frac{3}{x_n}-1}>1$(结合上界易得)，所以数列单调递增且有上界，故收敛。对递推关系两边取极限得极限值为$\frac{3}{2}$。

3. (1) 由$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=1$，知$f(0)=0;$

且$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=1.$

故而$\exists a>0,f(a)>f(0)=0.$

同理，$f(1)=0,f'(1)=2,\exists b<1,f(b)<f(1)=0,$且$b\neq a.$

于是$f(a)f(b)<0,$由零点定理知，

$\exists\xi\in(a,b)\subset(0,1),$使得$f(\xi)=0.$

(2) 构造$F(x)=e^{-x}f(x),$可知$F(0)=F(\xi)=0.$

由罗尔定理得，$\exists\xi_1\in(0,\xi)$fi$F'(\xi_1)=0;\exists\xi_2\in(\xi,1),F'(\xi_2)=0.$

而$F'(x)=e^{-1}(f'(x)-f(x)),$故$\xi_1,\xi_2$分别是$f'(x)-f(x)=0$的两个根。

构造函数$G(x)=e^x(f'(x)-f(x)),$则$G(\xi_1)=G(\xi_2)=0$满足罗尔定理。

故而$\exists\eta\in(\xi_1,\xi_2)\subset(0,1),F'(\eta)=0.$

整理得$f'(\eta)-f(\eta)=0$。

2019年期末真题解析

一、填空题

1.

$$
\begin{aligned}
I &= 0 + \lim_{x\to+\infty} \frac{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}} \\
&= 0+2=2
\end{aligned}
$$

2.

$$
I = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{4-\frac{t^2}{n^2}}} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{6}
$$

3. 记$u = x^2+x+2, v = \sin x$,则，$u^{(n)} = \begin{cases} 2x+1 & ,n=1 \\ 2 & ,n=2 \\ 0 & ,n\ge 3 \end{cases}$，$v^{(n)} = \sin(x+\frac{n\pi}{2})$. $f^{(10)}(x) = (uv)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)} = uv^{(10)} + 10u^{(1)}v^{(9)} + 45u^{(2)}v^{(8)}$。将$x=0$带入可得$f^{(10)}(x) = 10$

4. 由题意得：

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{\sin x} \sin(t^2)\mathrm{d}t}{x^k(e^x-1)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{\sin x} \sin(t^2)\mathrm{d}t}{x^{k+1}} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x \sin(\sin^2 x)}{x^k(k+1)} \\
&= a(a\neq 0)
\end{aligned}
$$

比较阶数可知：$k=2$

5. $y' = 1 - \dfrac{1}{e^x+e^{-x}-2}$　　$x\to 0, y'\to+\infty$故而存在铅直渐近线$x=0$.
$x\to+\infty, y'\to 1$,所以存在斜渐近线$y=x$,
$x\to-\infty, y'\to 1$,此时得出另一条斜渐近线$y=x-1$，综上，有三条渐近线。

二、计算题

1.

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to 0} \frac{e^x-\sin x-\cos x}{x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{e^x-\cos x+\sin x}{2x} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

2. 原式$=\int_{-\frac{1}{2}}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} e^{-2x}\mathrm{d}x + \int_0^1 (1+x^2)\mathrm{d}x = \frac{e}{2}+\frac{5}{6}$。

3. 由题意得：

$$
\dot{x} = 2t-1 \qquad \dot{y}|_{t=0} = \frac{1}{e}
$$

$k = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = -e^{-1}$,又因为切线过$(0,-1)$，故切线方程为$y = -\frac{1}{e}x-1$。

4. (1)由$\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t = x(x-2)e^x+2x$得$x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - \int_0^x tf(t)\mathrm{d}t = x(x-2)e^2+2x$
求导得$\int_0^x f(t) = (x^2-2)e^x+2$ 再次求导：$f(x) = (x^2+2x-2)e^x$
(2)$f'(x) = (x^2+4x)e^x$ 易得:单调增区间为$(-\infty,-4)$, $(0,+\infty)$,单调减区间为（-4,0）故极大值为$f(-4) = 6e^{-4}$，极小值为$f(0)=-2$

5.

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \int_0^{+\infty} \frac{xe^x}{(1+e^x)^2}\mathrm{d}x \\
&= \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{(1+t)^2}\mathrm{d}t \\
&= \ln\frac{t}{1+t} - \frac{\ln t}{1+t}\Big|_1^{+\infty} \\
&= \ln 2
\end{aligned}
$$

6. $y''+2y'+y=0$可得通解为$y=(C_1+C_2x)e^{-x}$,对于x项，不难解出特解中需含有$x-2\Theta$ 对于e^{-x}项，可设$y^*=Cx^2e^{-x}$，带入原方程可解得$C=\dfrac{1}{2}$,

故而$y^*=\dfrac{1}{2}x^2e^{-x}+x-2$ 综上，通解为$y=(C_1+C_2x+\dfrac{1}{2}x^2)e^{-x}+x-2$

7. $(1+x^2)y''=2xy' \Longrightarrow \ln y'=\ln(x^2+1)+C_1 \Longrightarrow y'=C_1(x^2+1) \qquad y'(0)=3 \Longrightarrow C_1=3$

$y'=3x^2+3 \qquad y=x^3+3x+C_2 \qquad y(0)=1 \Longrightarrow C_2=1 \qquad y=x^3+3x+1$

8. 设 $A=\begin{bmatrix}-1&1&0\\0&-1&4\\1&0&-4\end{bmatrix}$ $\quad det(A-\lambda E)=0 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=-3,\lambda_3=0 \quad r(A+3E)=2$

故需求 $(A+3E)^2r=0$ 的基础解系 $\quad (A+3E)^2=\begin{bmatrix}4&4&4\\4&4&4\\1&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

从而 $(A+3E)^2r=0$ 两个线性无关的解向量 $r_0^{(1)}=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix},r_0^{(2)}=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$

$r_1^{(1)}=(A+3E)r_0^{(1)}=\begin{bmatrix}-1\\2\\-1\end{bmatrix},r_2^{(2)}=(A+3E)r_0^{(2)}=\begin{bmatrix}-2\\4\\-2\end{bmatrix}$

故对应 $\lambda_1=\lambda_3=-3$ 的两个线性无关特解 $x_1(t)=e^{-3t}\begin{bmatrix}-1-t\\1+2t\\-t\end{bmatrix},x_2(t)=e^{-3t}\begin{bmatrix}-1-2t\\4t\\-2t\end{bmatrix}$

对于 $\lambda_3=0$，其特征向量 $r=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$，对应特解 $x_3(t)=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$

$\therefore$ 原方程组解系：$x=C_1e^{-3t}\begin{bmatrix}-1-t\\1+2t\\-t\end{bmatrix}+C_2e^{-3t}\begin{bmatrix}-1-2t\\4t\\-2t\end{bmatrix}+C_3\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$

三、解答题

1. (1)解齐次微分方程$f'(x)-\dfrac{1}{x}f(x)=0$，得$f(x)=C_1x$ 再由常数变易法，得通解为$f(x)=-3x^2+Cx$ 由题意，得$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=2 \Longrightarrow C=6$ 从而$f(x)=-3x^2+6x$

(2)由$f(x)=0 \Longrightarrow x_1=0,x_2=0$，在区间$[0,2]$上取微元$\mathrm{d}x$ 则$\mathrm{d}V=\pi f^2(x)\mathrm{d}x \Rightarrow V=\int_0^2\pi f^2(x)\mathrm{d}x=\dfrac{48\pi}{5}$

2. （1）$f(x+\pi)=\int_{x+\pi}^{x+\frac{3\pi}{2}}|\sin t|\mathrm{d}t \xrightarrow{s=t+\pi} \int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin(s-\pi)|ds=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin s|ds \xrightarrow{x=s} f(x)$即函数以$\pi$为周期。

（2）由（1）可知函数以π为周期，故只需要讨论函数在$[0,\pi]$区间内的值域即可：$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$， $t\in$

$[0,\pi)$, $\sin t>0$ $\therefore f(x)=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}\sin t dt=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\in[1,\sqrt{2}]$ $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right)$， $t\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$

$f(x)=\int_x^{\pi}|\sin t|dt+\int_{\pi}^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin t|dt=\int_x^{\pi}\sin t dt-\int_{\pi}^{x+\frac{\pi}{2}}\sin t dt=\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+2\in[2-\sqrt{2},1]$

(3)由（2）可知：$S=\int_0^{\pi}f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left[\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+2\right]dx=\pi$

3. 设$f(x)$的原函数为$F(x)$，将原函数在$x=1$处泰勒展开：$F(x)=F(1)+(x-1)f(1)+\frac{1}{2}(x-1)^2f'(1)+\frac{1}{6}(x-1)^3f''(\xi)(\xi\in[1,x])$ 从而$F(0)=F(1)+\frac{1}{2}f'(1)-\frac{1}{6}f''(\xi_1)$

$$F(2)=F(1)+\frac{1}{2}f'(1)+\frac{1}{6}f''(\xi_2)\quad \therefore F(2)-F(0)=\frac{1}{6}\left[f''(\xi_1)+f''(\xi_2)\right]$$

由连续性可知：$\exists\xi\in[\xi_1,\xi_2]$ $f''(\xi)=\frac{1}{2}\left[f''(\xi_1)+f''(\xi_2)\right]$ 整理得$\exists\xi\in[\xi_1,\xi_2]\in[0,2]$ 使 $f''(\xi)=3\int_0^2 f(x)dx$

4. （1）$\int_0^{n\pi}x|\sin x|dx=\int_0^{\pi}x\sin xdx-\int_{\pi}^{2\pi}x\sin xdx+\cdots+(-1)^{n-1}\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}x\sin xdx$

$\because (-1)^{n-1}\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}x\sin xdx=(-1)^{n-1}(-n\pi\cos(n\pi)+(n-1)\pi\cos(n-1)\pi)=(2n-1)\pi$

$\therefore$ 原式 $=\pi+3\pi+\cdots+(2n-1)\pi=n^2\pi$

（2）设$f(x)=\dfrac{1}{x^2}\int_0^x t|\sin t|^P dt$。当$P>0$时，

$$f'(x)=\frac{1}{x^4}\left(x^3|\sin x|^P-2x\int_0^x t|\sin t|^P dt\right)=\frac{1}{x^4}\left[x^3|\sin x|^P-x\left(|\sin t|^P t^2\Big|_0^x-\int_0^x t^2 d|\sin t|^P\right)\right]=\frac{1}{x^3}\int_0^x t^2 d|\sin t|^P>0$$

而$f(x)=\dfrac{1}{x^2}\int_0^x t|\sin t|^P dt<\dfrac{1}{x^2}\int_0^x tdt=\dfrac{1}{2}$ 由单调有界准则知：函数极限存在。

2018年期末真题解析

一、选择题

1. 观察分子分母的阶数，为保证极限的结果为常数，分子的阶数应该不高于分母，所以$a=0$，同时根据极限的结果可以得出$b=1$。

2. A.$f(-x)>g(-x)$错误，举反例：$x=-2$

B.$f'(x)<g'(x)$错误，举反例：常函数

D.$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t<\int_0^x g(t)\mathrm{d}t$错误，举反例：$x=-1, f(x), g(x)$常函数

C.可导函数一定连续，故而：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)<f(x_0)$，所以C正确。

3. $f(x)=(x-1)e^x \quad f(x+1)=xe^{x+1} \quad f'(x+1)=(x+1)e^{x+1}$

4. A、$\int_0^1 \ln x\mathrm{d}x=(x\ln x-x)|_0^1=-1$

B、$\int_0^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x\ln^2 x}=-\dfrac{1}{\ln x}|_2^{+\infty}=\dfrac{1}{\ln 2}$

C、$\int_0^{+\infty}e^{-x}\mathrm{d}x=-e^{-x}|_0^{+\infty}=1$

D、$\int_{-1}^1\dfrac{\mathrm{d}x}{x\cos x}=\int_{0^+}^1\dfrac{\mathrm{d}x}{x\cos x}+\int_{-1}^{0^-}\dfrac{\mathrm{d}x}{x\cos x}$ 由三角函数的性质：$x>0, \dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{x\cos x}$,所以$\int_{0^+}^1\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$发散，则原函数发散。

5. $\lim\limits_{x\to0}F(x)=\lim\limits_{x\to0}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\lim\limits_{x\to0}f(\epsilon)x \quad \epsilon\in(0,x)$

$$\because f(\epsilon)=\sin\frac{1}{\epsilon}\text{有界}\ \therefore \lim_{x\to0}f(\epsilon)x=0\text{即}F(x)=F(0) \qquad F(x)\text{在}x=0\text{处连续}$$

$F'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(\epsilon)x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\sin\dfrac{1}{\epsilon}$由于$\lim\limits_{x\to0}\sin\dfrac{1}{\epsilon}$不存在因此，$F(x)$在$x=0$处不可导

6. $\lambda^2+3\lambda+2=0\Rightarrow\lambda_1=-1,\lambda_2=-2\because\mu$特征方程的单根

$\therefore y=x(Ax+B)e^{-x}$

二、填空题

1. $t=2\Rightarrow y=f(x)$经过$(\dfrac{2}{5},\dfrac{4}{5})$ $y'=\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}=\dfrac{2t}{1-t^2}$,带入参数值及切点坐标得切线方程为$y=-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{4}{3}$

2. 对于取整函数，有这样的性质: $x\in[n,n+1)$fi$[x]=n$ 故而，有：$I=\int_0^{2018}x\mathrm{d}x-(0+1+2+3+\cdots+2017)=1009$

3. $y_1-y_3=e^{3x}, y_2-y_3=e^x$,易得$e^{3x},e^x$为所求的两个线性无关的特解（比值即可判定）故而通解为$y=C_1e^{3x}+C_2e^x-xe^{2x}$

4. 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n}\sin\dfrac{k}{n}=\int_0^1 x\sin x\mathrm{d}x=\sin1-\cos1$

5. $f'(x)=\ln(2-x)-\dfrac{x-1}{2-x}$,令$f'(x)=0\Rightarrow x=1$ 当$x<1$时$f'(x)>0$,当$1<x<2$时$f'(x)<0$,故而$x=1$为极大值点。

三、计算积分

1.

$$
\begin{aligned}
\text{原式}&=\int\frac{1}{\tan^2 x+9}\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{3}\int\frac{1}{1+\frac{\tan^2}{9}}\mathrm{d}\frac{\tan x}{3}\\
&=\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{\tan x}{3}\right)+C
\end{aligned}
$$

2.

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= 2(f(x)\sqrt{x}|_0^1 - \int_0^1 f'(x))\sqrt{x}\mathrm{d}x) \\
&= 0 - 0 - 4\int_0^1 \ln(x+1)\mathrm{d}(\sqrt{x}) \\
&\overset{t=\sqrt{x}}{=} -4\int_0^1 \ln(t^2+1)\mathrm{d}t \\
&= 8 - 2\pi - 4\ln 2(\text{再用一次分部积分法})
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= -\int_0^{+\infty} x\mathrm{d}\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} \\
&= -x\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x \\
&\overset{t=e^{-x}}{=} \int_0^1 \frac{1}{1+t}\mathrm{d}t \\
&= \ln 2
\end{aligned}$$

四、解答题

1. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}(x-3)y^4 = 0 \Rightarrow y^{-4}y' + \frac{1}{3}y^{-3} + \frac{1}{3}(x-3) = 0$ 令$u = y^{-3}$,则$u' = -3y^{-4}y'$ 故而原微分方程可化为：$u' - u = x - 3$

求得其对应的齐次微分方程的通解为$u = C_0e^x$. 由常数变易法，得$u = 2 - x + Ce^x$

所以原方程的通解为$\frac{1}{y^3} = 2 - x + Ce^x$

2. 通解为：$y = C_1e^x + C_2 + x$

3. $V = \int_{-1}^{1}[9\pi - \pi(3-y)^2]dx = \int_{-1}^{1} 9\pi - [3-3(1-x^2)]^2\pi\mathrm{d}x = 18\pi - 18\pi\int_0^1 x^4\mathrm{d}x = \frac{72\pi}{5}$

4. $f'(x) = \frac{4-2x-2x^2}{(2+x^2)^2}$,令$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = -2$ 所以增区间为$(-2,1)$,减区间为$(-\infty,=2),(1,+\infty)$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0, \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

故而，讨论如下：（1）$t \le -2$时，最大值在$x = 1$处取得，$f(1) = 1$,最小值在$x = -2$处取得，$f(-2) = -\frac{1}{2}$;

（2）$-2 < t \le -\frac{1}{2}$时，最大值在$x = 1$处取得，最大值为$f(1) = 1$,最小值在$x = t$处取得，最小值为$f(t) = \frac{1+2t}{2+t^2}$;

（3）$-\frac{1}{2} < t \le 1$时，最大值在$x = 1$处取得，最大值为$f(1) = 1$,无最小值;

（4）$t > 1$时，最大值在$x = t$处取得，最大值为$f(t) = \frac{1+2t}{2+t^2}$,无最小值。

5. $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \pm i$ 故而方程的通解为$x = e^{-t}(C_1\cos t + C_2\sin t)$。设特解为$x^* = [(A_0 + A_1t)\cos t + (B_0 + B_1)\sin t]e^{-t}t$ 代入求得$x^* = (\frac{1}{4}\cos t + \frac{t}{4}\sin t)e^{-t}t$ 故原方程通解为$x = e^{-t}(C_1\cos t + C_2\sin t) + (\frac{1}{4}\cos t + \frac{t}{4}\sin t)e^{-t}t$。

6.

$$\begin{aligned}
F(2a) - F(a) &= \int_a^{2a} f(t)f'(2a-t)\mathrm{d}t \\
&\overset{u=2a-t}{=} \int_0^a f(2a-u)f'(u)\mathrm{d}u(\text{区间再现}) \\
&= f(2a-u)f(u)|_0^a - \int_0^a f(u)\mathrm{d}f(2a-u) \\
&= f^2(a) - f(2a)f(0) + \int_0^a f(u)f'(2a-u)\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

移项整理，得$F(2a) - 2F(a) = f^2(a) - f(0)f(2a)$

7. （1）

$$\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x^2 =-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2 f'(x)\mathrm{d}x$$

$$\because \int_0^1 tf'(x)\mathrm{d}x=t\int_0^1 \mathrm{d}f(x)=t[f(1)-f(0)]=0 \therefore -\frac{1}{2}\int_0^1 x^2 f'(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int_0^1 (x^2-t)f'(x)\mathrm{d}x$$

（2）由第一问知：$[\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x]^2=\frac{1}{4}[\int_0^1 (x^2-t)^2 f'(x)\mathrm{d}x]^2$ 由柯西不等式，得 $\frac{1}{4}[\int_0^1 (x^2-t)^2 f'(x)\mathrm{d}x]^2\le \frac{1}{4}\int_0^1 (x^2-t)^2\mathrm{d}x\int_0^1 (f'(x))^2\mathrm{d}x$

对照题干条件，得$(3t-1)^2=0\Rightarrow t=\frac{1}{3}$

故而$(\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x)^2\le\frac{1}{45}\int_0^1 (f'(x))^2\mathrm{d}x$

当且仅当$x^2-\frac{1}{3}=f'(x)$时取等号,代入条件得$A=\frac{1}{3}$。

2017年期末真题解析

一、计算题

1. 原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\ln(1+\tan x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\dfrac{\dfrac{1}{cos^2x}}{1+\tan x}}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\dfrac{1}{cos^2x+\sin x\cos x}}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x(\cos x-\sin x)}{2x(\cos x+\sin x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\sin x}{2(\cos x+\sin x)}=\dfrac{1}{2}$

2. $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x(x+1)}{-x(x^2-1)}=1\ \lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x(x+1)}{x(x^2-1)}=-1\ \therefore x=0$为跳跃间断点

3. 当$x<0$时$f'(x)=1$，当$x>0$时$f'(x)=2^x\ln2$，当$x=0$时，$\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x-1}{x}=\infty$ $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2^x-1}{x}=\infty$ $\therefore$在$x=0$处不可导 $f'(x)=\{\begin{matrix}1 & x<0\\ 2^x\ln2 & x>0\end{matrix}$

4. 两边同时求导：$\dfrac{\dfrac{y-xy'}{y^2}}{1+(\dfrac{x}{y})^2}=\dfrac{2x+2yy'}{2(x^2+y^2)}\Rightarrow y'=\dfrac{y-x}{x+y}\ \therefore dy=\dfrac{y-x}{x+y}dx$

5. 令$t=\sqrt{e^x+1}$，则$x=\ln(t^2-1)$ 原式$=\int t\cdot\dfrac{2t}{t^2-1}dt=\int 2+\dfrac{1}{t-1}-\dfrac{1}{t+1}dt=2t+\ln(t-1)-\ln(t+1)+C=2\sqrt{e^x+1}+\ln\dfrac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}+C.$

6. $f(x)=\int_0^x e^{-t}\cos tdt=-\int_0^x\cos tde^{-t}=-e^{-t}\cos t|_0^x+\int_0^x e^{-t}d\cos t=-e^{-t}\cos t|_0^x+\int_0^x\sin tde^{-t}$ $=-e^{-t}\cos t|_0^x+e^{-t}\sin t|_0^x-\int_0^x e^{-t}d\sin t=e^{-t}(\sin t-\cos t)|_0^x-\int_0^x e^{-t}\cos tdt=e^{-t}(\sin t-\cos t)|_0^x-f(x)$

$f(x)=\dfrac{1}{2}e^{-x}(\sin x-\cos x)+\dfrac{1}{2}\quad f(0)=0\quad f(\pi)=\dfrac{1}{2}e^{-x}+\dfrac{1}{2}$

$f'(x)=e^{-x}\cos x=0\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{2}\quad f(\dfrac{\pi}{2})=\dfrac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{2}}+\dfrac{1}{2}$

$\therefore$最大值为$\dfrac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}+\dfrac{1}{2}$，最小值为0

7. $\int_{-4}^4\pi[(\sqrt{16-x^2}+5)^2-(-\sqrt{16-x^2}+5)^2]dx=2\pi\int_0^4 10\cdot2\sqrt{16-x^2}dx=40\int_0^4\sqrt{16-x^2}dx$

令$x=4\sin\theta$，则原式$=40\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\cos\theta\cdot4\cos\theta d\theta=640\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta=160\pi^2$

8. 特征方程为$\lambda^3-\lambda^2+2\lambda-2=0\Rightarrow(\lambda^2+2)(\lambda-1)=0\Rightarrow\lambda_1=\sqrt{2}i,\lambda_2=-\sqrt{2}i,\lambda_3=1\therefore\ y=C_1\cos\sqrt{2}x+C_2\sin\sqrt{2}x+C_3e^x$

9. $y''=1+y'^2$ 令$t=y'$，则$t'=1+t^2\Rightarrow\dfrac{dt}{1+t^2}=dx\Rightarrow\arctan t=x+C_1$

$\therefore\dfrac{dy}{dx}=\tan(x+C_1)$

$dy=\tan(x+C_1)dx\Rightarrow y=-\ln[\cos(x+C_1)]+C_2$

二、解答题

1. 解析：$f(x)=x^2\int_0^x f'(t)dt-\int_0^x t^2f'(t)dt+x^2$

$f'(x)=2x\int_0^x f'(t)dt+x^2f'(x)-x^2f'(x)+2x=2x[f(x)-f(0)]+2x$

将$x=0$代入得$f(0)=0\ \therefore\ f'(x)=2xf(x)+2x$

即$\dfrac{dy}{dx}=2x(y+1)\Rightarrow\dfrac{dy}{y+1}=2xdx\Rightarrow\ln(y+1)=x^2+C\Rightarrow y=e^{x^2+C}-1$

又$f(0)=0\ \therefore\ C=0\ f(x)=e^{x^2}-1$

2. 解析：当 $k=1$ 时 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)=l$ 无极值

当 $k>1$ 时 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^k}=l\Rightarrow\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{(x-a)^{k-1}}\cdot\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=l\Rightarrow\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)=0$

若 k 为偶数，$\because l>0\ \lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{1}{(x-a)^{k-1}}<0\quad \therefore \lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'_-(a)<0$

$\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{1}{(x-a)^{k-1}}>0\quad \therefore \lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'_+(a)>0\ \therefore x=a$ 处取得极小值

若 k 为奇数，$\because l>0\ \lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{(x-a)^{k-1}}<0\quad \therefore \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}>0\Rightarrow f'_-(a)>0,f'_+(a)>0$

$\therefore x=a$处无极值

综上，k为偶数则取极小值，k为奇数则无极值.

【注：此题只告诉 $f(x)$ 在某邻域内有定义，是否可导以及导函数是否连续都未知，故不能认为 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}f'(x)$，更不能使用洛必达法则直接求导】

3. $\lambda^2-2\lambda+2=0\Rightarrow\lambda=1+i\quad \therefore$ 通解为 $y=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)$

设特解$y^*=(A\cos x+B\sin x)e^x x$ 代入求得 $y^*=\frac{x}{2}e^x\sin x$ 故 $y=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)+\frac{x}{2}e^x\sin x$

又 $y(0)=1\quad y'(0)=1$ 故 $y=e^x\cos x+\frac{x}{2}e^x\sin x$

4. （1）见《工科数学分析》第三版上册P307例3.5

（2）$f''(x)+9f(x)+2x^2-5x+1=2f''(x)\Rightarrow f''(x)-9f(x)=2x^2-5x+1$

$\lambda^2-9=0\Rightarrow\lambda=\pm3\ \therefore$通解为$f(x)=C_1e^{3x}+C_2e^{-3x}$

设特解$f^*(x)=Ax^2+Bx+C$ 代入求得$f^*(x)=-\dfrac{2}{9}x^2+\dfrac{5}{9}x-\dfrac{13}{81}$

故$f(x)=C_1^{3x}+C_2e^{-3x}-\dfrac{2}{9}x^2+\dfrac{5}{9}x-\dfrac{13}{81}$

5. （1）定义域：$\{x|x\geq1\}\quad y''=\dfrac{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3}=\dfrac{2t\cdot(-2)-2\cdot(4-2t)}{(2t)^3}=-\dfrac{1}{t^3}$

$\because t\geq0$

$\therefore y''<0$ 故L在$[1.+\infty)$上是凸的

（2）$y'=\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}=\dfrac{4-2t}{2t}=\dfrac{2}{t}-1\ \therefore$切线：$y-y_0=(\dfrac{t}{2}-1)(x-x_0)$

即$y-4t+t^2=(\dfrac{2}{t}-1)(x-t^2-1)$

将$(-1,0)$代入得$t^2+t-2=0\Rightarrow t=-2$或$1$ 又$t\geq0$

$\therefore t=1\ \therefore$ 切点$(2,3)$ 切线方程为$y=x+1$

（3）$L:y=4\sqrt{x-1}-x+1\quad(x\geq1)$

5.

$S=\int_{-1}^{1}(x+1)dx+\int_1^2[(x+1)-(4\sqrt{x-1}-x+1)]dx=2+\dfrac{5}{2}-\int_1^2(4\sqrt{x-1}-x+1)dx=\dfrac{9}{2}-\int_0^1(4t-t^2)d(t^2+1)$

$=\dfrac{9}{2}-\int_0^1 2t^2(4-t)dt=\dfrac{7}{3}$

6. 设$f(x)$在$x=x_0$处取最大值，$x_0\in(0,1)$，则$x=x_0$必为极值点，即$f'(x_0)=0$

$|f'(0)|+|f'(1)|=|f'(x_0)-f'(0)|+|f'(1)-f'(x_0)|=|\int_0^{x_0}f''(x)dx|+|\int_{x_0}^1 f''(x)dx|$

$\leq|\int_0^{x_0}f''(x)dx+\int_{x_0}^1 f''(x)dx|=|\int_0^1 f''(x)dx|\leq\int_0^1|f''(x)|dx\leq\int_0^1 Mdx\leq M$

2016年期末真题解析

一、填空题

1. 解析：$\lim\limits_{x\to0} f(x) = \lim\limits_{x\to0} \frac{1}{x^3}\int_0^x \sin t^3 dt = \lim\limits_{x\to0} \frac{\sin x^3}{3x^2} = \lim\limits_{x\to0} \frac{x^3}{3x^2} = 0 = f(0) \quad \therefore a = 0$

2. 解析：$f(x) = \ln x + 1 \quad f'(x) = \frac{1}{x}$ 3. 解析：特值法，取$f(x) = 2(x - x_0)^4 + f(x_0)$满足题意，则易知$f(x)$在$x_0$处取极小值

4.$\frac{4}{3}$ 解析：$\because \frac{\sin x}{1+x^4}$为奇函数 $\therefore \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+x^4}dx = 0$ 原式$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x) d\sin x = \frac{4}{3}$

5. $y^2 = C(x^2+1) - 1$ 解析：$x(1+y^2)dx = y(1+x^2)dy \Rightarrow \frac{xdx}{1+x^2} = \frac{ydy}{1+y^2} \Rightarrow \frac{1}{2}\ln(x^2+1) = \frac{1}{2}\ln(y^2+1) + C_1$

6. $xdy + ydx = \sin dx \Rightarrow \int dxy = \sin x dx \Rightarrow xy = -\cos x + C$ 又 $y(\pi) = 1 \therefore C = \pi - 1$

二、选择题

1. A

解析：A：$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{cosx}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-\sin x}{1} = -1$

B：$\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1$

C：$\lim\limits_{x\to0} \frac{x}{\sin x} = 1$

D：$\lim\limits_{x\to0} x = 0$且$\lim\limits_{x\to0} \sin\frac{1}{x}$有界，$\therefore \lim\limits_{x\to0} x\sin\frac{1}{x} = 0$

2. A

解析：$dy = f'(x)dx \quad \because \Delta x > 0 \therefore dx > 0fidy > 0$

由泰勒展开：$\Delta y = f'(x)\Delta x + \frac{f''(x)}{2}(\Delta x)^2 + o\left[(\Delta x)^2\right] > f'(x)\Delta x > f'(x)dx = dy$

3. B

解析：$\int_0^{-x} t\left[f(t) + f(-t)\right] dt$ 令$a = -t$，则原式为$\int_0^x -a\left[f(-a) + f(a)\right]\cdot(-1)da = \int_0^x a\left[f(a) + f(-a)\right] da$

也可由偶函数的导数是奇函数，将各式求导后判断其是否为奇函数

三、计算题

1. $\lim\limits_{x\to\infty}(x + e^x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}\ln(x+e^x)} \quad \because \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(x+e^x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1+e^x}{x+e^x}}{1} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{1+e^x} = 1$

$\therefore$ ffl $= e$

2.$\dot{x} = -2t \quad \ddot{x} = -2 \quad \dot{y} = 1 - 3t^2 \quad \ddot{y} = -6t$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{1-3t^2}{-2t} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3} = \frac{-2t\cdot(-6t) - (-2)\cdot(1-3t^2)}{(-2t)^3} = -\frac{3t^2+1}{4t^3}$

3. $y' = -e^y - xe^y \Rightarrow y' = \frac{-e^y}{1+xe^y} = -e$ $\therefore$切线为 $y - 1 = -e(x - 0)$ 即 $y = -ex + 1$

4. 令 $t = \sqrt{x-1}$ 则 $x = t^2 + 1$

$I = \int_1^\infty \frac{1}{(t^2+1)t}\cdot 2tdt = \int_1^\infty \frac{2}{t^2+1}dt = 2\arctan t|_1^\infty = \frac{\pi}{2}$

5. $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-} \frac{x\ln x}{1-x} = \lim\limits_{x\to1^-} \frac{\ln x + 1}{-1} = -1 \quad \lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} \frac{x\ln x}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^+} \frac{\ln x + 1}{1} = 1$

$\therefore x = 1$为跳跃间断点

$\lim\limits_{x\to0} f(x) = \lim\limits_{x\to0} \frac{x\ln|x|}{1-x} = \lim\limits_{x\to0} \frac{\ln|x|}{\frac{1-x}{x}} = \lim\limits_{x\to0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-x-(1-x)}{x^2}} = \lim\limits_{x\to0} -x = 0$

四、解答题

1. 令 $a = t - x$ 则 $\int_{-x}^{0} f(a)da = -\dfrac{x^2}{2} + e^{-x} - 1$

两边同时求导：$-f(-x)\cdot(-1) = -x - e^{-x} \Rightarrow f(-x) = -e^{-x} - x \Rightarrow f(x) = x - e^{x}$

设渐近线为 $y = kx + b$ 则 $k = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x - e^{x}}{x} = 1 \quad \therefore k = 1$

$b = \lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - kx] = \lim\limits_{x\to-\infty} [x - e^{x} - x] = \lim\limits_{x\to-\infty} -e^{x} = 0$

2. (学习高数I者做 (1), 学习高数II者做 (2))

（1）$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda + 1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1$

$A - 2E = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} r_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$A + E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} r_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} r_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

$\therefore x(t) = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-t} + C_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t}$

（2）$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -1 \quad \therefore$通解为$y = e^{-x}(C_1 + C_2 x)$

设特解$y^* = x^2(Ax + B)e^{-x}$　代入求得$y^* = \dfrac{1}{3}x^3 e^{-x}$　故$y = e^{-x}(C_1 + C_2 x) + \dfrac{1}{3}x^3 e^{-x}$　$\therefore y = x$

3. $xy' = y + 3x^2 \Rightarrow y' - \dfrac{1}{x}y = 3x$

先求 $y' - \dfrac{1}{x}y = 0 \Rightarrow \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dx}{x} \Rightarrow \ln y = \ln x + C_1 \Rightarrow y = C_2 x$

令$y = h(x)x$代入得：$h'(x)x + h(x) - h(x) = 3x \Rightarrow h'(x) = 3 \Rightarrow h(x) = 3x + C_3 \therefore y = (3x + C)x$

$V = \int_0^1 \pi\,[(3x + C)x]^2\,dx = \pi\int_0^1 (3x^2 + Cx)^2 dx = \pi(\dfrac{9}{5}x^5 + \dfrac{6C}{4}x^4 + \dfrac{C^2}{3}x^3)|_0^1 = \pi(\dfrac{9}{5} + \dfrac{6}{4}C + \dfrac{C^2}{3})$ 当 $C = -\dfrac{9}{4}$时V最小 $\therefore f(x) = 3x^2 - \dfrac{9}{4}x$

4. 由中值定理：$\dfrac{f(a) - f(0)}{a - 0} = f'(\xi_1) \quad \xi_1 \in (0, a)$

$\dfrac{f(a+b) - f(b)}{a + b - b} = f'(\xi_2) \quad \xi_2 \in (b, a+b) \quad \therefore -f(a) + f(0) + f(a+b) - f(b) = -af'(\xi_1) + af'(\xi_2)$

即$f(a+b) - f(a) - f(b) = a\,[f'(\xi_2) - f'(\xi_1)] \quad \because \xi_2 > \xi_1 \quad \therefore f'(\xi_2) \le f'(\xi_1)$

【注：单调减不等同于严格单调减，可能出现$f'(x_1) = f'(x_2)$】

$f(a+b) - f(a) - f(b) \le 0 \quad f(a) + f(b) \ge f(a+b)$

2015年期末真题解析

一、填空题

1. $\because \ln\frac{2-x}{2+x}$为奇函数 $\therefore \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln\frac{2-x}{2+x}dx = 0$ 原式$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \frac{\pi}{2}$

2. $y' = 2^x + x2^x \ln 2 = 2^x(1 + x\ln 2) = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{\ln 2}$

当$x > -\frac{1}{\ln 2}$时$y' > 0$；当$x < -\frac{1}{\ln 2}$时$y' < 0$ $\quad x_0 = -\frac{1}{\ln 2}$为极小值点 3. $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}} + \frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{n+1}} + \cdots + \frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n+1}} < \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}} + \frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{n+\frac{1}{2}}} + \cdots + \frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n+\frac{1}{n}}} < \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} + \frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{n}} + \cdots + \frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$

右边$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(\sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{2}{n}} + \cdots + \sqrt{\frac{n}{n}}) = \int_0^1 \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}$

左边$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n+1}}(\sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{2}{n}} + \cdots + \sqrt{\frac{n}{n}}) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{n}(\sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{2}{n}} + \cdots + \sqrt{\frac{n}{n}}) = \int_0^1 \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}$ $\therefore$原式$= \frac{2}{3}$

4. 原式可等价为$\int_0^x ty(t)dt = x^2 + y \Rightarrow xy = 2x + y' \Rightarrow y' - xy = -2x$

$y' - xy = 0 \Rightarrow y = Ce^{\frac{1}{2}x^2}$ 令$y = g(x)e^{\frac{1}{2}x^2}$代入得$g(x) = 2e^{-\frac{1}{2}x^2} + C_1 \therefore y = C_1e^{\frac{1}{2}x^2} + 2$

又$x = 0$时$y = 0 \therefore y = 2 - 2e^{\frac{1}{2}x^2}$

5, $\int_0^a x\varphi''(x)dx = \int_0^a xd\varphi'(x) = x\varphi'(x)|_0^a - \int_0^a \varphi'(x)dx = a\varphi'(a) - 0 - [\varphi(a) - \varphi(0)]$

又$\varphi'(a) = 0$ $\varphi(a) = 0$ $\therefore$原式$= b$

二、选择题

1. $F(x) = \int f(x)dx + C$

对A：$f(x) = -f(-x) \quad F(-x) = \int f(-x)d(-x) + C = \int f(x)dx + C = F(x)$为偶函数

对B：$f(x) = f(-x) \quad F(-x) = \int f(-x)d(-x) + C = -\int f(x)d(x) + C \neq -F(x)$

对C：取$f(x) = \sin x + 1$则$F(x) = -\cos x + x + C$不为周期函数

对D：取$f(x) = -e^{-x}$则$F(x) = e^{-x} + C$为单调递减函数

2. $y'' = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 2$ 草图：![[Pasted image 20230805165240.png]]

拐点为凹凸区间分界点，由草图知$x = 1$不是分界点，$x = 2$可能是分界点，故选B 3.设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 有连续导数，且 $f(0) = 0$，令 $M = \max_{x\in[0,1]} |f'(x)|$，则必有（　）

A. $M \le \int_0^1 |f(x)|dx \le 3M$

B. $\frac{M}{2} \le \int_0^1 |f(x)|dx \le M$

C. $\int_0^1 |f(x)|dx \le \frac{M}{2}$

D. $\int_0^1 |f(x)|dx \ge 3M$

3. 由中值定理：$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(\xi) \le M \quad \xi \in (0, x) \quad \therefore f(x) \le Mx$

$\int_0^1 |f(x)|dx \le \int_0^1 |Mx|dx = M\int_0^1 xdx = \frac{M}{2}$ 4.设 $f(x)$ 是以 T 为周期的函数，下列函数中以 T 为周期的函数是（　）

A. $\int_0^x f(t)dt$

B. $\int_0^x f(t)dt - \int_{-x}^0 f(t)dt$

C. $\int_{-x}^0 f(t)dt$

D. $\int_0^x f(t)dt + \int_{-x}^0 f(t)dt$

4. 采用特值法，取$f(x)=\sin x+1$

对A：原式$=-\cos x+x+1$不是周期函数对B：原式$=2-2\cos x$是周期函数

对C：原式$=\cos x+x-1$不是周期函数对D：原式$=2x$不是周期函数

证明：令$F(x)=\int_0^x f(t)dt$ $f(t+T)=f(t)$

$F(x+T)=\int_0^{x+T} f(t)dt$，令$t=u+T$，$\int_0^{x+T} f(t)dt=\int_{-T}^{x} f(u+t)du=\int_{-T}^{x} f(u)du=\int_{-T}^{x} f(t)dt$故A和C错误

令$g(x)=\int_{-x}^{0} f(t)dt$，$g(x+T)=\int_{-x-T}^{0} f(t)dt$，令$t=u-T$，$\int_{-x-T}^{0} f(t)dt=\int_{-x}^{T} f(u-T)du=\int_{-x}^{T} f(t)dt$

故$\int_0^{x+T} f(t)dt-\int_{-x-T}^{0} f(t)dt=\int_{-T}^{x} f(t)dt-\int_{-x}^{T} f(t)dt=\int_{-T}^{0} f(t)dt+\int_0^x f(t)dt-\int_{-x}^{0} f(t)dt-\int_0^T f(t)dt$

$=\int_0^x f(t)dt-\int_{-x}^{0} f(t)dt=F(x+T)-g(x+T)$ 故B正确

5. $f'(x)=2x\ln(2+x^2)=0\Rightarrow x=0$

三、解答题

1. $\lim\limits_{x\to\infty} y=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{1}{x}+\ln(e^{-x}+1)\right]=0\Rightarrow$渐近线：$y=0$

$\lim\limits_{x\to 0} y=\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}+\ln(e^{-x}+1)\right]=\infty\Rightarrow$渐近线：$x=0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{1}{x}+\ln(e^{-x}+1)\right]=\infty\Rightarrow$设斜渐近线为$y=kx+b$

则$k=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{x}+\ln(e^{-x}+1)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln(e^{-x}+1)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-e^{-x}}{e^{-x}+1}=-1$

$b=\lim\limits_{x\to-\infty}(y-kx)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{x}+\ln(e^{-x}+1)+x\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}[\ln(e^{-x}+1)+x]$

令$t=e^{-x}+1$则$\lim\limits_{t\to+\infty}[\ln t-\ln(t-1)]=0$

$\therefore y=-x$ 故共有3条渐近线：$y=-x;x=0;y=0$

2. 1）$F'(x)=2xe^{-x^4}=0\Rightarrow x=0$

当$x<0$时$F'(x)<0$；$x>0$时$F'(x)>0\therefore F(0)=0$为极小值

（2）$F''(x)=2e^{-x^4}+(-4x^3)\cdot 2xe^{-x^4}=0\Rightarrow 2-8x^4=0\Rightarrow x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$F''(x)$在$x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$左右异号故拐点横坐标为$\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

（3）$\int_{-2}^{3} x^2F'(x)dx=\int_{-2}^{3} 2x^3e^{-x^4}dx=-\dfrac{1}{2}e^{-x^4}|_{-2}^{3}=\dfrac{e^{-16}-e^{-81}}{2}$

3. 令$y'=u$则$y''=u'$，$y''=u\dfrac{du}{dy}$

$y''=e^{2y}\Rightarrow u\dfrac{du}{dy}=e^{2y}\Rightarrow udu=e^{2y}dy\Rightarrow\dfrac{u^2}{2}=\dfrac{1}{2}e^{2y}+C_1$

又$x=0$时$u=1$fi$y=0\therefore C_1=0$ $u^2=e^{2y}\Rightarrow u=e^y$

$\dfrac{dy}{dx}=e^y\Rightarrow\dfrac{dy}{e^y}=dx\Rightarrow -e^{-y}=x+C_2$

$x=0$时$y=0\therefore C_2=-1$ 故$e^{-y}=1-x$即$y=-\ln(1-x)$

4. 通解$y=C_1e^x+C_2xe^x+C_3\cos 2x+C_4\sin 2x\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=2i,\lambda_4=-2i$

$\therefore(\lambda-1)^2(\lambda^2+4)=0\Rightarrow\lambda^4-2\lambda^3+5\lambda^2-8\lambda+4=0$ 故$y^{(4)}-2y^{(3)}+5y''-8y'+4y=0$

5. $\lambda^2-5\lambda+6=0\Rightarrow\lambda_1=2,\lambda_2=3$ $\therefore$通解为$y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$

设特解$y^*=x(Ax+B)e^{2x}$ 代入得$y^*=-x(x+2)e^{2x}$ 故$y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}-x(x+2)e^{2x}$

6. （1）$y'=\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ 切线：$y-\sqrt[3]{x_0}=\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}(x-x_0)$

$$S=\int_{-2x_0}^{0}\left[\frac{1}{3}x_0^{-\frac{2}{3}}(x-x_0)+x_0^{\frac{1}{3}}\right]dx+\int_0^{x_0}\left[\frac{1}{3}x_0^{-\frac{2}{3}}(x-x_0)+x_0^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}}\right]dx$$

$$=(\frac{1}{6}x_0^{-\frac{2}{3}}x^2+\frac{2}{3}x_0^{\frac{1}{3}}x)|_{-2x_0}^{x_0}-\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}|_0^{x_0}=\frac{3}{4}x_0^{\frac{4}{3}}=\frac{3}{4}\Rightarrow x_0=1\therefore A(1,1)$$

（2）切线：$y-1=\dfrac{1}{3}(x-1)\Rightarrow y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3}\Rightarrow$切线过$(-2,0)$

$V=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot1^2\cdot3-\int_0^1\pi(\sqrt[3]{x})^2dx=\frac{2}{5}\pi$

7. $\int_0^1\ln(1-x^2)dx=x\ln(1-x^2)|_0^1-\int_0^1\frac{x}{1-x^2}\cdot(-2x)dx=x\ln(1-x^2)|_0^1-\int_0^1\frac{2x^2}{x^2-1}dx$

$=x\ln(1-x^2)|_0^1-\int_0^1(2+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1})dx=\left[x\ln(1-x^2)-2x-\ln|x-1|\right]+\ln|x+1||_0^1$

$=\lim_{x\to1}\left[(x-1)\ln|x-1|+(x+1)\ln(x+1)-2x\right]=2\ln2-2$

$\int_1^{+\infty}\left[\frac{2x^2+bx+a}{x(2x+a)}-1\right]dx=\int_1^{+\infty}\frac{(b-a)x+a}{x(2x+a)}dx=\int_1^{+\infty}(\frac{1}{x}-\frac{2+a-b}{2x+b})dx$

$=\left[\ln x-\frac{2+a-b}{2}\ln(2x+a)\right]|_1^{+\infty}=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln x-\frac{2+a-b}{2}\ln(2x+a)\right]$

$\lim_{x\to+\infty}\left[\ln x-\frac{2+a-b}{2}\ln(2x+a)\right]=\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{x}{(2x+a)^{1+\frac{a}{2}-\frac{b}{2}}}$存在 $\therefore 1+\frac{a}{2}-\frac{b}{2}=1\Rightarrow a=b$

上式$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{2x+a}=-\ln2\therefore-\ln2+\ln(2+a)=2\ln2-2\Rightarrow a=\frac{8}{e^2}-2$

2014年高数期末真题解析

一、计算题

1.原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x})}{1+x\sin x-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x^2}{1+x\sin x-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x}{\sin x+x\cos x+\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4}{2\cos x+\cos x-x\sin x}=\dfrac{4}{3}$

2.两边对x求导：$-\sin xf(\cos x)=-2\sin 2x\Rightarrow f(\cos x)=4\cos x\Rightarrow f(x)=4x\therefore f(\dfrac{\sqrt{2}}{2})=2\sqrt{2}$

3.$y'=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{-1}{1-x})-\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-x^2}}-\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\arcsin x}{1-x^2}=-\dfrac{x\arcsin x}{(x^2-1)\sqrt{1-x^2}}\therefore dy=-\dfrac{x\arcsin x}{(x^2-1)\sqrt{1-x^2}}dx$

4.令$t=\sqrt{e^x+1}$则$x=\ln(t^2-1)$ 原式$=\int\dfrac{1}{t}\cdot\dfrac{2t}{t^2-1}dt=\int(\dfrac{1}{t-1}-\dfrac{1}{t+1})dt=\ln\dfrac{t-1}{t+1}+C=\ln\dfrac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}+C$

5.令 $x=\cos\theta$，则原式 $=\int_{\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}}^{0}\dfrac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\cdot(-\sin\theta)d\theta=\int_0^{\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}}\tan^2\theta d\theta=(\tan\theta-\theta)\big|_0^{\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}}=\sqrt{2}-\arctan\sqrt{2}$

6.令$u=x(1+y)$则$du=(1+y)dx+xdy$ 原方程变为$du+(y^2+y^3)dy=0\Rightarrow u=-\dfrac{y^4}{4}-\dfrac{y^3}{3}+C$
故$x(1+y)=-\dfrac{y^4}{4}-\dfrac{y^3}{3}+C$

7.$\lambda^2+3\lambda+2=0\Rightarrow\lambda_1=-1,\lambda_2=-2$ ∴通解为$x=C_1e^{-t}+C_2e^{-2t}$
设特解$x^*=Ate^{-2t}$ 代入得$x^*=-te^{-2t}$ 故$x=C_1e^{-t}+C_2e^{-2t}-te^{-2t}$

8.（1）见《工科数学分析》第三版上册P299例3.1
（2）将$y_1=e^x,y_2=e^x\ln|x|$代入方程成立
e^x与$e^x\ln|x|$线性无关，故其线性组合即为齐次方程的通解$y=C_1e^x+C_2e^x\ln|x|$

9.原式$=\int_1^{+\infty}(-\dfrac{1}{2}\ln x)d\dfrac{1}{x^2}=-\dfrac{\ln x}{2x^2}\big|_1^{+\infty}-\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^2}d(-\dfrac{1}{2}\ln x)=\dfrac{1}{2}\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^3}dx=\dfrac{1}{4}$

二、解答题

1. $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\tan\pi x}{x(x^2-1)}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\pi x}{x(x^2-1)}=-\pi$
$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\tan\pi x}{-x(x^2-1)}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\pi x}{-x(x^2-1)}=\pi\therefore x=0$为跳跃间断点
$\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\tan\pi x}{x(x^2-1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-\sin\pi x}{(x^2-1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-\pi\cos\pi x}{2x}=\dfrac{\pi}{2}\therefore x=1$为可去间断点
$\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\tan\pi x}{-x(x^2-1)}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{-\sin\pi x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-\pi\cos\pi x}{2x}=-\dfrac{\pi}{2}\therefore x=-1$为可去间断点
$\lim\limits_{x\to\pm\frac{1}{2}}f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\frac{1}{2}}\dfrac{\tan\pi x}{\frac{1}{2}(\frac{1}{4}-1)}=\infty\therefore x=\pm\dfrac{1}{2}$为无穷间断点

2.当$x\neq0$时，$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}\cos\dfrac{1}{x}(\int_0^x\sin t^2dt+\sin\dfrac{1}{x})\sin x^2$ 当$x=0$，$f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\frac{1}{x}\int_0^x\sin t^2dt}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\int_0^x\sin t^2dt+(\sin\frac{1}{x})\sin x^2}{1}=\lim\limits_{x\to0}-\dfrac{\cos\frac{1}{x}\int_0^x\sin t^2dt}{x^2}$
$\because\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x\sin t^2dt}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x^2}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{2x}=0$，且$\cos\dfrac{1}{x}$有界
$\therefore f'(0)=0$ 又$\because\lim\limits_{x\to0}f'(x)=0\therefore f'(x)$在$x=0$处连续

3.（1）$det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}8-\lambda&4&-1\\4&-7-\lambda&4\\-1&4&8-\lambda\end{vmatrix}=-\Phi\lambda+9)(\lambda-9)^2=0\Rightarrow\lambda_1=-9,\lambda_2=9$

$$A+9E=\begin{bmatrix}17&4&-1\\4&2&4\\-1&4&17\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&4\\0&0&0\end{bmatrix}\ r_1=\begin{bmatrix}1\\-4\\1\end{bmatrix}$$

$$A-9E=\begin{bmatrix}-1&4&-1\\4&16&4\\-1&4&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-4&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}r_2=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}\ r_3=\begin{bmatrix}0\\1\\4\end{bmatrix}$$

$$\therefore x(t)=C_1\begin{bmatrix}1\\-4\\1\end{bmatrix}e^{-9t}+C_2\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}e^{9t}+C_3\begin{bmatrix}0\\1\\4\end{bmatrix}e^{9t}$$

（2）将特解代入：$4e^{2t}+(x+3)e^x+a\left[2e^{2x}+(x+2)e^x\right]+b\left[e^{2x}+(x+1)e^x\right]=Ce^x$

$$\therefore\begin{cases}4+2a+b=0\\3+2a+b=c\\1+a+b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-3\\b=2\\c=-1\end{cases}\ y''-3y'+2y=-e^x\ \lambda^2-3\lambda+2=0\Rightarrow\lambda_1=1,\lambda_2=2$$

$\therefore$通解为$y=C_1e^x+C_2e^{2x}$ 由题知特解$y^*=xe^x$ 故$y=C_1e^x+C_2e^{2x}+xe^x$

4.（1）切线：$y-a\ln x_0=\frac{9}{x_0}(x-x_0)$过原点$\Rightarrow x_0=e$ 切点 (e,a)

$\therefore l_2: y=\frac{9}{e}x \quad S=\int_0^e\frac{a}{e}xdx-\int_1^e a\ln xdx=\frac{ea}{2}-1$

（2）$V=\int_0^a\pi\left[e^{\frac{2y}{a}}-(\frac{ey}{a})^2\right]dy=(\frac{ae^2}{2}-\frac{a}{2})\pi$

5.（1）令$F(x)=\int_0^x f(t)dt+\int_0^{-x}f(t)dt$ 由中值定理：$\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=F'(\theta x)(0<\theta<1)$ 即 $\int_0^x f(t)dt+\int_0^{-x}f(t)dt=x\left[f(\theta x)-f(-\theta x)\right]$

（2）对（1）中等式两边求导：$f(x)-f(-x)=f(\theta x)-f(-\theta x)+x\left[\theta f'(\theta x)+\theta f'(-\theta x)\right]\Rightarrow\frac{f(x)-f(-x)-f(\theta x)+f(-\theta x)}{x}=\theta\left[f'(\theta x)+f'(-\theta x)\right]$

即$\lim\limits_{x\to0^+}\theta\left[f'(\theta x)+f'(-\theta x)\right]=2f'(0)\lim\limits_{x\to0^+}\theta\ \lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(-x)-f(\theta x)+f(-\theta x)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\left[f'(x)+f'(-x)-\theta f'(\theta x)-\theta f'(-\theta x$

$2f'(0)-2f'(0)\lim\limits_{x\to0^+}\theta\ \therefore 2f'(0)\lim\limits_{x\to0^+}\theta=2f'(0)-2f'(0)\lim\limits_{x\to0^+}\theta\Rightarrow\lim\limits_{x\to0^+}\theta=\frac{1}{2}$

2013年期末真题解析

一、计算题

1.原式= $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\sin x+\cos x)e^x-2x-1}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\cos xe^x-2}{\cos x}=0$

2.两边求导 $(2x+1)f(x^2+x)=2x\Rightarrow f(x^2+x)=\dfrac{2x}{2x+1}\quad x=1,\quad$ ß$f(2)=\dfrac{2}{3}$

3.$y'=6\sin3x\cos3x-\dfrac{2}{5}x\sin\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}=3\sin6x-\dfrac{2}{5}x\sin\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{\sec^2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

4.原式 $=\dfrac{1}{4}\int\ln x\mathrm{d}x^4=\dfrac{1}{4}[x^4\ln x-\int x^4\cdot\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x]=\dfrac{1}{4}(x^4\ln x-\dfrac{x^4}{4})+c$

5.原式= $\int_{-3}^{3}|x|e^{-|x|}\mathrm{d}x=2\int_0^3xe^{-x}\mathrm{d}x=-2\int_0^3x\mathrm{d}e^{-x}=-2[xe^{-x}|_0^3-\int_0^3e^{-x}\mathrm{d}x]=-2(3e^{-3}+e^{-3}-1)=-8e^{-3}+2$

6.先求 $xy'-y=0\Rightarrow x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y\Rightarrow\dfrac{\mathrm{d}y}{y}=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}\Rightarrow y=C_1x$，设$y=h(x)x$ 带入原方程

$x[xh'(x)+h(x)]-xh(x)=x^3\cos x\Rightarrow x^2h'(x)=x^3\cos x\Rightarrow h(x)=x\sin x+\cos x+C_2$

7.$\lambda^2-2\lambda+5=0\Rightarrow\lambda=1\pm2i\Rightarrow y=e^x(C_1\cos2x+C_2\sin2x)$

8.令 $t=\sqrt{x}$ 则 $x=t^2$ 原式 $=\int_0^{+\infty}2te^{-t}\mathrm{d}t=-2\int_0^{+\infty}t\mathrm{d}e^{-t}=-2[te^{-t}|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}e^{-t}\mathrm{d}t]=-2[te^{-t}+e^{-t}]|_0^{+\infty}=-2$

二、解答题

1 $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x(x+1)}{\cos\frac{\pi}{2}x}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x+1}{-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}x}=-\dfrac{2}{\pi}\quad\Rightarrow x=-1$为可去间断点

$t=-3,-5,-7\cdots,-(2k+1),\quad\lim\limits_{x\to t}f(x)=\lim\limits_{x\to t}\dfrac{x(x+1)}{\cos\frac{\pi}{2}x}=\infty\quad\Rightarrow x=-3,-5,-7,\cdots,-(2k+1),k\in N^+$ 为无穷间断点

$\lim\limits_{x\to2}f(x)=\lim\limits_{x\to2}\sin\dfrac{\pi}{x^2-4}$ 不存在 $f(x)$ 在[1,-1]内振荡 $\Rightarrow$ x=2 为振荡间断点

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^\circ}\dfrac{\pi}{x^2-4}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\quad\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x(x+1)}{\cos\frac{\pi}{2}x}=0\Rightarrow x=0$ 为跳跃间断点

2.（1）当 $x\neq0$fi$f'(x)=\dfrac{x[g(x)+e^{-x}]-g(x)+e^{-x}}{x^2}$

当x=0时，

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{g(x)-e^{-x}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{g'(x)+e^{-x}}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{g''(x)-e^{-x}}{2}=\frac{g''(0)-1}{2}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}\dfrac{xg'(x)+(x+1)e^{-x}-g(x)}{x^2} & x\neq0\\ \dfrac{g''(0)-1}{2} & x=0\end{cases}$$

(2) $\lim\limits_{x\to0}f'(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xg'(x)+(x+1)e^{-x}-g(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g'(x)+xg''(x)+e^{-x}-(x+1)e^{-x}-g'(x)}{2x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xg''(x)-xe^{-x}}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g''(0)-1}{2}=f''(0)$

$\Rightarrow f'(x)(x=0\Xi\qquad Sx‘0\text{fi}f'(x)>6\quad Ef'(x)((-\infty\text{fi}+\infty)\Omega$

3.(1) $\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 1 & -2\\ 1 & -2-\lambda & 1\\ -2 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+3)(3-\lambda)=0\Rightarrow\lambda_1=0,\lambda_2=3,\lambda_3=-3$

$$A=\begin{bmatrix}1&1&-2\\1&-2&1\\-2&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}\quad r_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$A-3E=\begin{bmatrix}-2&1&-2\\1&-5&1\\-2&1&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\quad r_2=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$$

$$A+3E=\begin{bmatrix}4&1&-2\\1&1&1\\-2&1&4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&0\end{bmatrix}\quad r_3=\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x(t)=C_1\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}+C_2\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}e^{3t}+C_3\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}e^{-3t}$$

(2) $3f(x)+e^x=2f''(x)+f'(x)\Rightarrow 2f''(x)+f'(x)-3f(x)=e^x\quad 2\lambda^2+\lambda-3=0\Rightarrow\lambda_1=-\dfrac{3}{2},\lambda_2=1$

$\Rightarrow$通解为 $f(x)=C_1e^{-\frac{2}{3}x}+C_2e^x$ 设特解为 $f^*(x)=Axe^x$

带入得：$f^*(x)=\dfrac{x}{5}e^x\quad\Rightarrow f(x)=C_1e^{-\frac{2}{3}x}+C_2e^x+\dfrac{x}{5}e^x$

又$f(0)=1f'(0)=\dfrac{1}{5}\Rightarrow f(x)=\dfrac{2}{5}e^{-\frac{2}{3}x}+\dfrac{3}{5}e^x+\dfrac{x}{5}e^x$

4.设 $D(a\cos t,a\sin t),t\in(0,\dfrac{\pi}{2})$ 则 $S=\dfrac{(2a\cos t+2a)b\sin t}{2}=ab\sin t\cos t+ab\sin t$

$\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=ab(2\cos^2t+\cos t-1),\cos t\in(0,1),\quad\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=0\Rightarrow\cos t=\dfrac{1}{2}\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{3}$

故当 $0>t>\dfrac{\pi}{3}$ 时，$\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}<0$；当 $\dfrac{\pi}{3}>t>\dfrac{\pi}{2}$ 时，$\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}>0$

$\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{3}$ 时取最大值，$S_{max}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}ab$

5.(1)由中值定理：$\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(\xi)\le M$

其中 $\xi\in(a,x),f(a)=0\quad\Rightarrow f(x)\le M(x-a)\quad\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\le\int_a^b M(x-a)\mathrm{d}x\Rightarrow\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\le\dfrac{M}{2}(b-a)^2$

(2)由柯西不等式：$f^2(x)=\left[\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t\right]^2\le\int_a^x[f'(t)]^2\mathrm{d}t\int_a^x\mathrm{d}t=(x-a)\int_a^x[f'(t)]^2\mathrm{d}t\le(x-a)\int_a^b[f'(t)]^2\mathrm{d}t$

$\Rightarrow\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\le\int_a^b\left[(x-a)\int_a^b[f'(t)]^2\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x=\int_a^b[f'(t)]^2\mathrm{d}t\cdot\int_a^b(x-a)\mathrm{d}x=\dfrac{(b-a)^2}{2}\int_a^b[f'(x)]^2\mathrm{d}x$

2012年期末真题

一、填空题

1.$(0, \frac{1}{4})$

解析:$F'(x) = 2 - \frac{1}{\sqrt{x}} < 0 \Rightarrow 0 < x < \frac{1}{4}$

2.$f(0) = 0; f'(0) = 2$

解析:$\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = 2$

3.$a = 1$

解析: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\cos x}{x+2} = \frac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{(\sqrt{a+x} - \sqrt{a})(\sqrt{a+x} + \sqrt{a})}{x(\sqrt{a+x} + \sqrt{a})} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{(\sqrt{a+x} + \sqrt{a})} = \frac{1}{2\sqrt{a}} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 1$

4.$a = 0, b = 1$

解析:$f(x)$在 $x = 0$处连续: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} e^{ax} = 1$ $\quad \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} b(1 - x^2) = b \quad \therefore b = 1$

$f'(x)$在$x = 0$处连续: $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{e^{ax} - 1}{x} \quad \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{b(1 - x^2) - 1}{x} = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{e^{ax} - 1}{x} = 0 \Rightarrow a = 0$

5.$a = 9$

解析:$\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1 + ax^2)}{\sin^2 3x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{ax^2}{(3x)^2} = \frac{a}{9} = 1 \Rightarrow a = 9$

二、计算题

1.原式$= \lim\limits_{x\to 1} \frac{\cos(x-1) - 1}{1 - \sin\frac{\pi}{2}x} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{-\sin(x-1)}{-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{\cos(x-1)}{-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}x} = -\frac{4}{\pi^2}$

2.$\because$ 函数

$$f(x) = \frac{x^2 - 5}{x - 3} + \int_{-1}^{1}\left(\sqrt{1 - x^2} + x\right)^2 dx$$

$$\therefore x - 3 \neq 0 \text{ 且 } 1 - x^2 \geq 0$$

解得函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-1, 1]$ 又: 定积分 $\int_{-1}^{1}\left(\sqrt{1 - x^2} + x\right)^2 dx$ 是常数， $\therefore$ 它的导数为 0 .

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x(x-3) - (x^2 - 5)}{(x-3)^2} \\ &= \frac{x^2 - 6x + 5}{(x-3)^2} = \frac{(x-1)(x-5)}{(x-3)^2}. \\ &\because -1 \leq x \leq 1 \\ &\therefore x - 1 \leq 0, x - 5 < 0, (x-3)^2 > 0 \\ &\therefore f'(x) \geq 0. \end{aligned}$$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上单调递增, 故函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上无极值.

$x = 1$时取极大值$f(1) = 2 + \int_{-1}^{1}(1 + 2x\sqrt{1 - x^2})\mathrm{d}x = 2 + \int_{-1}^{1}\mathrm{d}x = 4; x = 5$时取极小值$f(5) = 12$

3.原式 $= \int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}} \overset{t=\frac{1}{x}}{=} \int_{t}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{t^2}{\sqrt{t^2 + 1}}(-\frac{1}{t^2})\mathrm{d}t = \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\mathrm{d}t$，令$t = \tan\theta$，则原式$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} \cdot$

$\frac{1}{\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta$

$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}\theta}{\cos\theta} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos\theta \mathrm{d}\theta}{\cos^2\theta} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\sin\theta}{1-\sin^2\theta} \overset{u=sin}{\rightarrow} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\mathrm{d}u}{1-u^2} = \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{(1-u)(1+u)}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u+1}{u-1}\right|\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} =$
$\ln\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

4.$y' + xy = x^3y^2 \Rightarrow y^{-3}y' + xy^{-2} = x^3$，令$u = y^{-2}$，则$u' = -2y^{-3}y'$

$\therefore -\frac{1}{2}u' + xu = x^3 \Rightarrow u' - 2xu = -2x^3$

先求$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - 2xu = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}u}{u} = 2x\mathrm{d}x \Rightarrow u = c_1e^{x^2}$ 设$u = h(x)e^{x^2}$，则$[h'(x) + 2xh(x)]\,e^{x^2} - 2xh(x)e^{x^2} = -2x^3$

$h'(x) = -2x^3e^{-x^2} \Rightarrow h(x) = (x^2+1)e^{-x^2} + c_2 \therefore u = x^2 + 1 + ce^{x^2}$

5.$\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \lambda = -2 \pm i \therefore x = e^{-2t}(C_1\cos t + C_2\sin t)$

6.(1)$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\mathrm{d}x = 1$ $\quad \begin{cases} y = \cos x \\ y = a\sin x \end{cases} \Rightarrow x = \arctan\frac{1}{a}$

$\therefore \int_0^{\arctan\frac{1}{a}} (\cos x - a\sin x)\mathrm{d}x = \sqrt{a^2+1} - a = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{3}{4}$

(2)$V = \int_0^{\arctan\frac{4}{3}} \pi(\frac{3}{4}\sin x)^2\mathrm{d}x + \int_{\arctan\frac{4}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \pi\cos^2 x\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{4} - \frac{7}{32}\pi\arctan\frac{4}{3} - \frac{3}{8}\pi$

7.(1)$\lim\limits_{x\to0} F(x) = \lim\limits_{x\to0} \frac{\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{x^2} = \lim\limits_{x\to0}\frac{xf(x)}{2x} = \frac{f(0)}{2} = 0$

(2)$F'(0) = \lim\limits_{x\to0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{x^3} = \lim\limits_{x\to0}\frac{x\int_0^x f(x)\mathrm{d}t}{3x^2} = \lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{3x} = \lim\limits_{x\to0}\frac{f'(x)}{3} = \frac{f'(0)}{3}$

当$x \neq 0$时，$F'(x) = \frac{x^3f(x) - 2x\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{x^4}$ $\quad \lim\limits_{x\to0}F'(x) = \lim\limits_{x\to0}\frac{x^2f(x) - 2\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{x^3} = \lim\limits_{x\to0}\frac{2xf(x) + x^2f'(x) - 2xf(x)}{3x^2}$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{f'(x)}{3} = \frac{f'(0)}{3} = F'(0) \therefore F'(x)((-\infty,+\infty)\Omega$

8.(1)$det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 2 & 4-\lambda & -2 \\ -3 & -3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2(6-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 6$

$A - 2E = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & -3 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad r_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$A - 6E = \begin{bmatrix} -5 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -3 & -3 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad r_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow x(t) = C_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t+}C_2\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{2t} + C_3\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} e^{6t}$

(2)$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2 \therefore$ æ:$x = C_1e^t + C_2e^{2t}$

设特解为$x^* = Ate^t$ 代入得:$x^* = -4te^t$ 故$x = C_1e^t + C_2e^{2t} - 4te^t$

9.由积分中值定理: $2 \cdot e^{\lambda(\eta - b^2)}f(\eta) \cdot (\frac{a+b}{2} - a) = (b-a)f(b) \Rightarrow f(\eta)e^{\lambda(\eta-b^2)} = f(b) \quad \eta \in (a, \frac{a+b}{2})$

令$g(x) = f(x)e^{\lambda(\eta^2-b^2)}$，则$g(\eta) = g(b)$又$g(x)\ [a,b]\ \exists\xi \in (\eta, b), g'(\xi) = 0$

即$[f'(\xi) + 2\lambda\xi f(\xi)]\,e^{\lambda(x^2-b^2)} = 0 \Rightarrow f'(\xi) + 2\lambda\xi f(\xi) = 0$

10.(1)将$y = e^x$代入得:$e^x + P(x)e^x + Q(x)e^x = 0 \Rightarrow 1 + P(x) + Q(x) = 0$

将$y = x$代入得:$P(x) + Q(x)x = 0$

(2)$\because (x-1)y'' - xy' + y = 0$满足$1 + P(x) + Q(x) = 0, P(x) + Q(x)x = 0$ 由(1)知$y = e^x, y = x$为方程的特解故通解为$y = C_1e^x + C_2x$，

又$y(0) = 2, y'(0) = 1 \quad y = 2e^x - x$

(3)由(2)知通解为$y = C_1e^x + C_2x$ 观察得特解可取$y^* = 1$

$\therefore y = C_1e^x + C_2x + 1 \quad \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln[y(x)-1]}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{y'(x)}{y(x)-1} = -1 \Rightarrow \begin{cases} y(0) = 2 \\ y'(0) = -1 \end{cases} \quad \therefore y = e^x - 2x + 1$

2011年期末真题

一、填空题

1.$k=2$

解析:$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}-\dfrac{\sin 2x}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{2x}{x}=2\quad \lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(3x^2-2x+k)=k\therefore k=2$

2.2 π

解析:令$x=2\sin\theta$

原式$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+2\sin\theta)2\cos\theta 2\cos\theta d\theta=4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2\theta+2\sin\theta\cos^2\theta)d\theta=4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta=2\pi$

3.$y=C_1e^{-x}+e^{\frac{1}{2}x}(C_2\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t+C_3\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t)$

解析:$\lambda^3+1=0\Rightarrow(\lambda+1)(\lambda^2-\lambda+1)=0\Rightarrow\lambda_1=-1,\lambda_2=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i,\lambda_3=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

4.$\dfrac{2x\sin x^2}{1+\cos^2x^2}$

二、选择题

1.B

解析:$f'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(1-x)-f(1)}{-x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{x}=-2\therefore f'(5)=f'(5-4)=-2$

2.D

解析:$\lambda^2-1=0\Rightarrow\lambda=\pm1$

3.D

解析:$\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x(\ln x)\sin\frac{1}{x}}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x(x-1)\sin\frac{1}{x}}{x-1}=\sin 1\quad \lim\limits_{x\to-1}f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x\left[\ln(-x)\right]\sin\frac{1}{x}}{x-1}=0$

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x(\ln|x|)\sin\frac{1}{x}}{x-1}=\lim\limits_{x\to0}-x(\ln|x|)\sin\dfrac{1}{x}\because\lim\limits_{x\to0}x\ln|x|=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln|x|}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=0$

且$sin\dfrac{1}{x}$ 有界故上式极限为0　 $\therefore:\pm 1$fi0

4.B

解析:设$f(x)=\tan x-x,x\in(0,\dfrac{\pi}{4}),f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2x-1}>0\quad\therefore f(x)$单调增

$f(x)>f(0)=0\quad\therefore\tan-x>0\Rightarrow\tan x>x\Rightarrow\tan^2x>x^2\Rightarrow\dfrac{\tan x}{x}>\dfrac{x}{\tan x},x\in(0,\dfrac{\pi}{4})$

设$g(x)=\dfrac{\tan x}{x},x\in(0,\dfrac{\pi}{4})$，则$g'(x)=\dfrac{\frac{x}{\cos^2x}-\tan x}{x^2}=\dfrac{x-\sin x\cos x}{x^2\cos^2x}$

令$h(x)=x-\sin x\cos x$fiß$h'(x)=1-\cos 2x>0\therefore h(x)U\Lambda,h(x)>h(0)=0$

$\therefore g'(x)>0$fi$g'(x)U\Lambda\therefore g(x)<g(\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{4}{\pi}s\dfrac{\tan x}{x}<\dfrac{4}{\pi}$

故$\dfrac{4}{\pi}>\dfrac{\tan x}{x}>\dfrac{x}{\tan x}\therefore 1>I_1>I_2$

三、计算题

1.原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan x-x}{2x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{1+x^2}-1}{6x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-x^2}{6x^2(1+x^2)}=-\dfrac{1}{6}$

2.原式$=-\int\dfrac{x}{\cos^5x}d\cos x=\dfrac{1}{4}\int xd\cos^{-4}x=\dfrac{x\cos^{-4}x}{4}-\dfrac{1}{4}\int\cos^{-4}xdx=\dfrac{x}{4\cos^4x}-\dfrac{1}{4}\left[\int\tan^2xd\tan x+\int\dfrac{1}{\cos^2x}dx\right]$

$=\dfrac{x}{4\cos^4x}-\dfrac{1}{12}\tan^3x-\dfrac{1}{4}\tan x+C$

3.令$\sqrt{x}=t$，则原式$=\int_1^2 \frac{\ln t^2}{t}\cdot 2t\mathrm{d}t = 4\int_1^2 \ln t\mathrm{d}t = 4\ (t\ln t - t)|_1^2 = 4(2\ln 2 - 1)$

4.$\dot{x} = t^2\cdot 2t = 2t^3$，$\ddot{x} = bt^2, \dot{y} = -2t\cdot t^4\ln t^2 = -4t^5\ln t, \ddot{y} = --4t^4(5\ln t+1), \frac{d^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\ddot{y}}{\dot{x}^3} =$
$\frac{2t^3\left[-4t^4(5\ln t+1)-6t^2(-4t^5\ln t)\right]}{(2t^3)^3} = -\frac{2\ln t+1}{t^2}$

5.先求$xy'-3y=0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{3\mathrm{d}x}{x} \Rightarrow y = c_1x^3$ 令$y=h(x)x^3$

则$x\left[h'(x)x^3+3x^2h(x)\right]-3h(x)x^3 = x^4e^x \Rightarrow h'(x)=e^x$ 故$h(x)=e^x+c_2$ $\therefore y=(e^x+c)x^3$

6.(1) $\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 2 & 1-\lambda & 3 \\ 3 & 3 & 6-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(9-\lambda)(\lambda+1) = 0 \Rightarrow \lambda_1=0, \lambda_2=9, \lambda_3=-1$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad r_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A+E = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad r_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A-9E = \begin{bmatrix} -8 & 2 & 3 \\ 2 & -8 & 3 \\ 3 & 3 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad r_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore x(t) = C_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}e^{-t} + C_3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}e^{9t}$$

(2)$\lambda^2-4\lambda+4=0 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=2$ $\quad\therefore$ æ:$y=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}$

设特解为$y^*=Ax^2e^{2x}$ 代入得:$y^*=\frac{3}{2}x^2e^{2x}$ 故$y=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}+\frac{3}{2}x^2e^{2x}$

7.$y'=2x$ $\quad \Upsilon: y-x_0^2 = 2x_0(x-x_0)$ 切点:$(x_0$fi$x_0^2)$

$S=\int_{\frac{x_0}{2}}^{8}(2x_0x-x_0^2)\mathrm{d}x = \frac{x_0^3}{4}-8x_0^2+64x_0 \quad S'=\frac{3x_0^2}{4}-16x_0+64=0 \Rightarrow x_0=\frac{16}{x}$

当$0<x_0<\frac{16}{3}$时，$S'>0$;当$\frac{16}{3}<x_0<8$时，$S'<0$ $\quad\therefore x_0=\frac{16}{3}$时S最大，对应点为$(\frac{16}{3}，\frac{256}{9})$

8.(1)由柯西不等式:$|f(x)\cdot\frac{1}{x}| \le \frac{1}{2}\left[f^2(x)+\frac{1}{x^2}\right]$ $\because \int_1^{+\infty} f^2(x)\mathrm{d}x$和$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$均收敛

$\therefore \int_1^{+\infty}\frac{1}{2}\left[f^2(x)+\frac{1}{x^2}\right]\mathrm{d}x$收敛 $\therefore \int_1^{+\infty}\left|\frac{f(x)}{x}\right|\mathrm{d}x$6[$\quad E\ \int_1^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$绝对收敛

(2)原式 $=-\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\arctan x\mathrm{d}x^{-2} = -\frac{1}{2}\left[\frac{\arctan x}{x^2}\Big|_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}\arctan x\right] = \frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8}+$
$\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2+1})\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\ (-\frac{1}{x}-\arctan x)\Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{2}$

9.$\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=0 \Rightarrow f(1)=0 \therefore \lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=0$

当$x\neq1$时，$\varphi(x)=\int_0^1 f'\left[1+(x-1)t\right] = \frac{f\left[1+(x-1)\right]}{x-1}\Big|_0^1 = \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{f(x)}{x-1}$

当$x=1$时，$\varphi(1)=\int_0^1 f'(1)\mathrm{d}t=0$ $\quad$($x=1$的邻域内:$\varphi'(x)=\frac{(x-1)f'(x)-f(x)}{(x-1)^2}$

$\varphi'(1)=\lim\limits_{x\to1}\frac{\varphi(x)-\varphi(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to1}\frac{f'(x)}{2(x-1)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{f''(1)}{2}$

$\because \lim\limits_{x\to1}\varphi'(x)=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)f'(x)-f(x)}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to1}\frac{f'(x)+(x-1)f''(x-1)-f'(x)}{2(x-1)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{f''(x)}{2}=\frac{f''(1)}{2}=$
$\varphi'(1)$

$\therefore \varphi'$(x)在$x=1$处连续

2010年期末真题

一、填空题

1.$y-1=2(x-1)$

解析:设切点$(x_0 fi x_0^2)$,则$2x_0\cdot(-\frac{1}{2})=-1\Rightarrow x_0=1$ $\quad\therefore$ 切线：$y-1=2(x-1)\Rightarrow y=2x-1$

2.$y=C_1e^x+C_2x^2+3$

3.$\frac{19}{4}$

解析:令$t=x^2, f'(x^2)=\frac{\mathrm{d}f(x^2)}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}f(x^2)}{\mathrm{d}x^2}\cdot\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}x}\Rightarrow x^3=f'(t)\cdot 2x\Rightarrow f'(t)=\frac{t}{2}\Rightarrow f(t)=\frac{t^2+3}{4}$

$\therefore f(4)=\frac{19}{4}$

二、选择题

1.B

解析:$f'(a)=0$ 令$x=a$，则$f''(a)+2f'(a)=\int_a^{a+1}e^{f(t)}\mathrm{d}t>0\Rightarrow f''(a)>0\therefore x=a$处取极小值

2.A

解析:$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2x\ln(1-x)}{\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2x\cdot(-x)}{x^2}=-2$

三、解答题

1.$y'=\frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{1+x^2-1}-\frac{\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}-\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}\ln x}{x^2-1}=\frac{x\ln x}{(x-1)^{\frac{3}{2}}}\quad \lim\limits_{x\to1^-}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x\ln x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{\ln x+1}{3x\sqrt{x^2-1}}=$
$+\infty$

2.$\dot{x}=e^{-t^2}\quad \ddot{x}=-2te^{-t^2}\quad \dot{y}=\left[2t-2t(1+t^2)\right]e^{-t^2}=-2t^3e^{-t^2}\quad \ddot{y}=(-6t^2+4t^4)e^{-t^2}$

$\frac{d^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3}$ 则$\frac{d^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{e^{-t^2}\cdot(-6t^2+4t^4)e^{-t^2}-(-2te^{-t^2})(-2t^3e^{-t^2})}{e^{-3t^2}}=\frac{-6t^2}{e^{-t^2}}\therefore \left.\frac{d^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=1}=-6e$

3.原式$=\int\ln(e^x+1)de^x=(e^x+1)\left[\ln(e^x+1)-1\right]+C$

4.先求$2xy'=y\Rightarrow\frac{2\mathrm{d}y}{y}=\frac{\mathrm{d}x}{x}\Rightarrow y=C_1\sqrt{x}$ 设$y=h(x)\sqrt{x}$，则$2x\left[h'(x)+\frac{1}{2\sqrt{x}}h(x)\right]=h(x)\sqrt{x}+2x^2\Rightarrow$
$h'(x)=\sqrt{x}\Rightarrow h(x)=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C_2$

$\therefore y=(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C)\sqrt{x}=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C\sqrt{x}$

5.(1) $\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}1-\lambda&1&1\\1&3-\lambda&1\\1&1&1-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(\lambda-1)(\lambda-4)=0\Rightarrow\lambda_1=0,\lambda_2=1,\lambda_3=4$

$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&3&1\\1&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\quad r_1=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$

$A-E=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&2&1\\1&1&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}\quad r_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$

$A-4E=\begin{bmatrix}-3&1&1\\1&-1&1\\1&1&-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&-2\\0&0&0\end{bmatrix}\quad r_3=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$

$\therefore x(t) = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + C_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{4t}$

(2)$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1$ $\quad\therefore$ 通解为$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x$

设特解为$y^* = Axe^x$ $\quad$ 代入得:$y^* = \frac{1}{3} x e^x$ $\quad$ 故$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x + \frac{1}{3} x e^x$

6.$I = \int_0^{+\infty} x d \frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{x}{1+e^{-x}}\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+e^{-x}} dx = \frac{x}{1+e^{-x}}\Big|_0^{+\infty} - \ln(e^x+1)|_0^{+\infty} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[\frac{x}{1+e^{-x}} - \ln(e^x+1)\right] + \ln 2$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{xe^x - (e^x+1)\ln(e^x+1)}{e^x} + \ln 2 = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(x+1)e^x - [e^x + e^x \ln(e^x+1)]}{e^x} + \ln 2 = \lim\limits_{x\to+\infty} x - \ln(e^x + 1) + \ln 2$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \ln \frac{e^x}{e^x+1} + \ln 2 = \ln 2$

7.$\begin{cases} 0 = c \\ 2 = a+b+c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=2 \\ c=0 \end{cases}$ $\quad y = ax^2 + bx = x(ax+b) \Rightarrow x_1 = -\frac{b}{a}, x_2 = 0$

$\because a < 0, b = 2-a > 0 \quad \therefore x_1 > 0$

$S = \int_0^{-\frac{b}{a}} (ax^2+bx) dx = \frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2\Big|_0^{-\frac{b}{a}} = -\frac{b^3}{3a^2} + \frac{b^3}{2a^2} = \frac{b^3}{6a^2} = \frac{(2-a)^3}{6a^2}$

$\frac{ds}{da} = \frac{-3(2-a)^2a^2 - 2a(2-a)^3}{6a^4} = \frac{-(2-a)^2(a+4)a}{6a^4} = 0 \Rightarrow a = -4$

$\therefore a = -4, b = -6, c = 0 \quad y = x(-4x+6) \quad \dot{V} = \int_0^{\frac{9}{4}} \pi \frac{6\sqrt{36 - 4\cdot(-4)\cdot(-y)}}{(-4)^2} dy = \frac{3\pi}{4} \int_0^{\frac{9}{4}} \sqrt{9-4y} dy = \frac{27\pi}{8}$

8.$\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f(2x-a)}{x-a}$存在$f(a) = 0 \because f'(x) > 0 \therefore f(x) \geq f(a) = 0$ 设$g(x) = x^2$

$h(x) = \int_a^x f(t)dt$由柯西中值定理:$\frac{g(b)-g(a)}{h(b)-h(a)} = \frac{g'(\xi)}{h'(\xi)} \quad \xi \in (a,b)$

即$\frac{b^2-a^2}{\int_a^b f(t)dt - \int_a^a f(t)dt} = \frac{2\xi}{f(\xi)} \Rightarrow \frac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)dx} = \frac{2\xi}{f(\xi)}$