彭 · 高数期末真题

作者
彭康学导团

日期：2023.12

2022年期末真题

一、选择题

1. 设函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-\cos x$, 则当 $x\to 0$ 时, 有 ( )

(A) $f(x)$ 与 x 是等价无穷小;

(B) $f(x)$ 与 x 是同阶但非等价无穷小;

(C) $f(x)$ 是比 x 高阶的无穷小;

(D) $f(x)$ 是比 x 低阶的无穷小.

2. 设函数 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内有定义, $f(0)=0$. 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导的一个充要条件是 ( )

(A) $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}f(1-\cos h)$ 存在.

(B) $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}f\left(1-\mathrm{e}^h\right)$ 存在.

(C) $\lim_{h\to 0}\frac{f(2h)-f(h)}{h}$ 存在.

(D) $\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(-h)}{2h}$ 存在.

3. 设函数 $f(x)$ 的导函数是 $\sin(2x)$, 则 $f(x)$ 的一个原函数是 ( )

(A) $-\frac{1}{2}\cos(2x)$.

(B) $\frac{1}{2}\sin(2x)+1$.

(C) $-\frac{1}{2}\cos(2x)-x$.

(D) $\frac{1}{2}\sin(2x)-x$.

4. 若线性微分方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 有三个解 $\mathrm{e}^{-x},\mathrm{e}^x,\mathrm{e}^{2x}$, 则该方程的通解是 ( )

(A) $C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^x+C_3\mathrm{e}^{2x}$.

(B) $C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}$.

(C) $C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^x-\left(C_1+C_2\right)\mathrm{e}^{2x}$.

(D) $C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^x-\left(C_1+C_2-1\right)\mathrm{e}^{2x}$.

5. 设函数 $f(x)$ 连续, 则 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x t^2 f\left(x^3-t^3\right)\mathrm{d}t=(\quad)$

(A) $x^2 f(0)$.

(B) $x^2 f\left(x^3\right)$.

(C) $-x^2 f\left(x^3\right)$.

(D) $3x^2 f\left(x^3\right)$.

二、填空题

1. 曲线 $\ln\left(x^2+y\right)=x^3y+\sin x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程为

2. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\sin\frac{3\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right)=$

3. 若函数 $f(x)=\ln\left(1-x^2\right)$, 则 $f^{(3)}(0)=$

4. 设 $f(x)=\sin x^2+\int_{-\pi}^{\pi}xf(x)\mathrm{d}x$, 则 $f(x)=$

5. 一阶线性常微分方程 $y'+\frac{1}{x}y=\frac{\cos x}{x}$ 的通解为

三、计算题

1. 求极限 $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x+\frac{\sin x}{x}\right)$.

2. 设 $x=t+\ln(1+t), y=t^2+2t$, 计算 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0}$ 及 $\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}$.

3. 计算不定积分 $\int x^2\arctan x\,\mathrm{d}x$.

4. 求常微分方程 $y^{(4)}-2y'''+5y''=0$ 的通解.

四、解答题

1. (7 分)设函数 $f(x)=\begin{cases}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}, & x>0,\\ e^a, & x\le 0\end{cases}$ (a 为常数), a 取何值时函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续?

2. (7 分)讨论函数 $f(x)=x-2\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ 的单调性、极值点, 函数 $f(x)$ 图像的凹凸性及拐点.

3. (7 分) 证明反常积分 $I=\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$ 收敛, 并求其值.

4. (7 分) 求微分方程组 $\frac{d\vec{x}}{dt}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 3\\ -3 & 0 & 2\end{pmatrix}\vec{x}+\begin{pmatrix}0\\ t\\ 0\end{pmatrix}$ 的通解.

5. (7 分) 求曲线 $y=x^2-2x$ 与 x 轴所围封闭图形的面积, 并求该平面图形绕 x轴旋转一周所得旋转体的体积.

6. (6 分) 若函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上可导, 且 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=2$, 证明:

(1) 至少存在一点 $x_0\in(0,2)$ 使得 $f(x_0)=1$;

(2) 至少存在一点 $\xi\in(0,2)$ 使得 $\xi f'(\xi)+(1+\xi)f(\xi)=1+\xi$.

2021年期末真题

一、选择题

1. 若 $\forall x \in \mathbb{R}$, 总有 $\varphi(x) \le f(x) \le g(x)$, 且 $\lim_{x\to\infty}(g(x)-\varphi(x))=0$, 则以下关于 $\lim_{x\to\infty} f(x)$ 的论述正确的是

A. 存在且为 0

B. 存在但不一定为 0

C. 一定不存在

D. 不一定存在

2. 使不等式 $\int_1^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t > \ln x$ 成立的 x 的范围是

A. $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$

B. $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

C. $(0, 1)$

D. $(\pi, +\infty)$

3. 设 $f(x), g(x)$ 是恒大于零的可导函数, 且 $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)<0$, 则当 $a<x<b$ 时, 有 (　)

A. $f(x)g(b) > f(b)g(x)$

B. $f(x)g(a) > f(a)g(x)$

C. $f(x)g(x) > f(b)g(b)$

D. $f(x)g(x) > f(a)g(a)$

4. 设函数 $f(x) \in C[-1,1]$, 则 $x=0$ 是函数 $g(x)=\dfrac{\int_0^x f(x)\mathrm{d}x}{x}$ 的

A. 第一类跳跃间断点

B. 第一类可去间断点

C. 第二类无穷间断点

D. 连续点

5. 如下图所示, 曲线段的方程为 $y=f(x)$, 且函数 $f(x)$ 在区间 $[0,a]$ 上有连续的导数, 则定积分 $\int_0^a x f'(x)\mathrm{d}x$ 表示的是

A. 曲边梯形 $ABOD$ 的面积

B. 梯形 $ABOD$ 的面积

C. 曲边三角形 ACD 的面积

D. 三角形 ACD 的面积

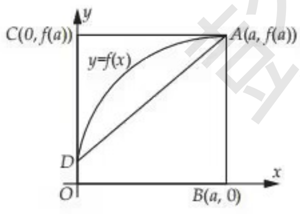

图 1: 5题图

二、填空题

1. 设 $f(x+1)=\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+x}{n-2}\right)^n$, 则 $f(x)=$

2. 设 $f(x)=\lim_{t\to+\infty}\dfrac{x^2e^{t(x-2)}+ax-1}{e^{t(x-2)}+1}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续, 则常数 $a=$

3. $\int_0^{\pi}(f(x)+f''(x))\sin x\,\mathrm{d}x=5, f(\pi)=2$, 则 $f(0)=$

4. 设 $f(x)=\int_0^{x^2}\left(e^{-t^2}+6\right)\mathrm{d}t$, 则 $\lim_{\alpha\to 0}\frac{f(x+\alpha)-f(x-\alpha)}{\alpha}=$

5. $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=$. 其中常数 $p>0$.

三、计算题

1. 计算极限 $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x-x-x^2}{(e^x-1)\sin^2 x}$.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}\sin x+2ae^x, & \\ 9\arctan x+2b(x-1)^3, & x\geq 0\end{cases}$, 试确定常数 a,b 的值, 使得函数 $f(x)$ 在其定义域上可导.

3. 求函数 $f(x)=x-2\arctan x$ 的单调区间、极值和其对应曲线的凹凸区间以及渐近线, 并画出此函数的简单示意图.

4. 计算定积分 $\int_0^3\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}\,\mathrm{d}x$.

5. 计算不定积分 $\int\dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$.

6. 设 $f(x)=\dfrac{(x+1)^2(x-1)}{x^3(x-2)}$, 计算 $I=\int_{-1}^3\dfrac{f'(x)}{1+f^2(x)}\mathrm{d}x$.

7. 假设由抛物线 $y=x^2, y=4x^2$ 以及直线 $y=H(H>0)$ 围成的平面图形绕 y 轴旋转一周形成的旋转抛物面型容器内盛满水, 若将水全部抽出, 需要作多少功?

四、

求微分方程 $(2x-1)^2y''+4(2x-1)y'-8y=4x-3$ 的通解.

五、

求微分方程组 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&1&3\end{pmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{pmatrix}t\\1\\0\end{pmatrix}$ 的通解.

六、

设函数 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上连续, 在 $(0,2\pi)$ 内可导, 且 $f(0)=1, f(\pi)=3, f(2\pi)=2$ 试证明在 $(0,2\pi)$ 内至少存在一点 ξ, 使得 $f'(\xi)+f(\xi)\cos\xi=0$.

七、

设函数 $f(x),g(x)$ 是 $[-a,a]$ 上的连续函数, $g(x)$ 是偶函数, $f(-x)+f(x)=A$ (A 是常数).

(1) 证明: $\int_{-a}^a f(x)g(x)\mathrm{d}x=A\int_0^a g(x)\mathrm{d}x$;

(2) 计算定积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\arctan e^x\,\mathrm{d}x$.

2020年期末真题

一、填空题

1. 函数 $y=\ln\dfrac{1-x}{1+x^3}$ 的麦克劳林展开式中 x^{2021} 的系数为

2. 极限 $\lim_{x\to 0}\left[\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin}{|x|}\right]=$

3. 反常积分 $\int_1^3 \ln\sqrt{\dfrac{\pi}{|2-x|}}\mathrm{d}x=$

4. 设 $\left\{\begin{array}{c} x=3t^2+2t+3 \\ \mathrm{e}^y\sin t-y+1=0 \end{array}\right.$, 则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}=$

5. 极限 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\left(k+\dfrac{1}{n}\right)^2\tan\dfrac{1}{n^3}=$

二、单选题

1. 函数 $f(x)=\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\mathrm{e}^x-1}{2x}, x\neq 0 \\ \dfrac{1}{2}, x=0 \end{array}\right.$, 在 $x=0$ 处

(A) 连续且取极大值

(B) 凑数选项

(C) 可导且导数不为 0

(D) 可导且导数为 0

2. 函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某领域内连续且 $f(0)=0$, 已知 $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2$, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处

(A) 不可导

(B) 可导且导数不为 0

(C) 取得极大值

(D) 取得极小值

3. 微分方程 $y''-y=\mathrm{e}^x+1$ 的一个特解可设为 (a, b 为常数) (A) $a\mathrm{e}^x+b$

(B) $ax\mathrm{e}^x+b$

(C) $a\mathrm{e}^x+bx$

(D) $ax\mathrm{e}^x+bx$

4. 函数 $y=\dfrac{e^{\frac{1}{x-1}}\ln|1+x|}{(\mathrm{e}^x-1)(x-2)}$ 的间断点个数是

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

5. 当 $x\to 0$ 时, 函数 $y=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 是

(A) 有界的但不是无穷大量

(B) 无穷大量

(C) 有界的但不是无穷小量

(D) 无穷小量

三、计算题

1. 计算极限 $\lim_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\left(t\sin t+\tan^3 t\cdot\ln t\right)\mathrm{d}t}{\cos x\int_0^x\ln^2(1+t)\mathrm{d}t}$ 的值.

2. 讨论函数 $f(x)=|x|^{\frac{1}{20}}+|x|^{\frac{1}{21}}-2\cos x$ 的零点个数.

3. 求微分方程 $(y+1)y''+(y')^2=(1+2y+\ln y)y'$ 满足 $y(0)=1, y'(0)=\dfrac{1}{2}$ 的解.

4. 计算积分 $\int_{-1}^{1}\dfrac{2x^2+x^2\sin x}{1+\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

5. 将圆周 $x^2+y^2=4x-3$ 绕 y 轴旋转一周, 求所得旋转体体积.

6. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} a\sin^2 x+b\sin x+c, & ,x<0 \\ 0 & ,x=0 \\ x^k\sin\frac{1}{k} & ,x>0 \end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续可微, 讨论常数 a,b,c 以及 k 的取值.

7. 求函数 $f(x)=\int_1^{x^2}\left(x^2-t\right)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ 的单调区间与极值.

8. 求线性微分方程组 $\dfrac{dx}{dt}=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}x+\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 的通解.

四、证明题

1. 已知等式两端的两个积分都收敛, 且 $a,b>0$, 求证: $\int_0^{+\infty}f\left(ax+\dfrac{b}{x}\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{a}\int_0^{+\infty}f\left(\sqrt{t^2+4ab}\right)\mathrm{d}t$.

2. 设 $0<x_1<3, x_{n+1}=\sqrt{x_n\left(3-x_n\right)}(n=1,2,\ldots)$. 求证: 数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求其极限.

3. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导, 且 $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1, \lim_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=2$. 求证:

(1) $\exists\xi\in(0,1)$, 使得 $f(\xi)=0$;

(2) $\exists\eta\in(0,1)$, 使得 $f''(\eta)=f(\eta)$.

2019年期末真题

一、填空题

1. 极限 $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3}{x}\sin x+\frac{2x^2+x+1}{x^2-1}\right)$ 的值为

2. 极限 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\cdots\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right)=$

3. 设函数 $f(x)=\left(x^2+x+2\right)\sin x$, 则 $f^{10}(0)=$

4. 若当 $x\to 0$ 时, 两个函数 $f(x)=\int_0^{\sin x}\sin\left(t^2\right)dt$ 与 $g(x)=x^k\left(e^x-1\right)$ 是同阶的无穷小量, 则常数 k 的值为

5. 曲线 $y=x+\frac{1}{e^x-1}$ 的渐近线有　条.

二、计算题

1. 求极限 $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\sin x-\cos x}{\ln\left(1+x^2\right)}$.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}1+x^2 & x\le 0\\ e^{-2x} & x>0\end{cases}$, 计算定积分 $\int_{\frac{1}{2}}^{2}f(x-1)dx$.

3. 设曲线 L 的参数方程为 $\begin{cases}x=t^2-t\\ te^y+y+1=0\end{cases}$, 求该曲线在 $t=0$ 处的切线方程.

4. 设函数 $f(x)$ 连续, 且满足 $\int_0^x(x-t)f(t)dt=x(x-2)e^x+2x$, 求:

(1) $f(x)$ 的表达式.

(2) $f(x)$ 的单调区间与极值.

5. 计算反常积分 $I=\int_0^{+\infty}\dfrac{xe^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^2}dx$.

6. 求微分方程 $y''+2y'+y=e^{-x}+x$ 的通解.

7. 求初值问题 $\begin{cases}\left(1+x^2\right)y''=2xy'\\ y(0)=1, y'(0)=3\end{cases}$ 的解.

8. 求线性微分方程组 $\dfrac{dx}{dt}=\begin{bmatrix}-1&1&0\\0&-1&4\\1&0&-4\end{bmatrix}x$ 的通解.

三、解答题

1. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续, 在 $(0,1)$ 内大于 0 , 并满足 $xf'(x)=f(x)-3x^2$, 曲线 $y=f(x)$ 与直线 $x=1, y=0$ 所围图形 D 的面积为 2 , 求:

(1) 函数 $f(x)$.

(2) D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

2. 已知 $f(x)=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin t|dt$.

(1) 证明: $f(x)$ 是以 π 为周期的函数.

(2) 求函数 $f(x)$ 的值域.

(3) 求由 $y=f(x), x=0, x=\pi, y=0$ 所围图形的面积.

3. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上具有二阶连续导数, 且 $f(1)=0$.

试证: 存在 $\xi\in[0,2]$, 使得 $f''(\xi)=3\int_0^2 f(x)dx$.

4. (1) 设 n 是正整数, 计算 $\int_0^{n\pi}x|\sin x|dx$.

(2) 证明对任意正实数 p, 函数极限 $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}\int_0^x t|\sin t|^p dt$ 存在.

2018年期末真题

一、选择题

1. 若 $\lim_{x\to\infty}\frac{ax^3+bx^2+2}{x^2+2}=1$ (其中 a,b 为常数), 则 ( )

A. $a=0, b\in \mathrm{R}$

B. $a=0, b=1$

C. $a\in \mathrm{R}, b=1$

D. $a\in \mathrm{R}, b\in R$

2. 若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上皆可导, 且 $f(x)<g(x)$, 则必有

A. $f(-x)>g(-x)$

B. $f'(x)<g'(x)$

C. $\lim_{x\to x_0} f(x) < \lim_{x\to x_0} g(x)$

D. $\int_0^x f(t)dt < \int_0^x g(t)dt$

3. 若函数 $f(x)$ 的一个原函数是 $(x-2)e^x$, 则 $f'(x+1)=$

A. xe^x

B. xe^{x+1}

C. $(x+1)e^{x+1}$

D. $(x+1)e^x$

4. 下列广义积分中, 发散的是（）

A. $\int_0^1 \ln x dx$

B. $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}$

C. $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$

D. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x\cos x}$

5. 设 $f(t)=\begin{cases}\sin\frac{1}{t}, & t\neq 0\\ 0, & t=0\end{cases}$, $F(x)=\int_0^x f(t)dt$, 则 $F(x)$ 在 $x=0$ 处 ( )

A. 不连续

B. 连续但不可导

C. 可导且 $F'(0)\neq 0$

D. 可导且 $F'(0)=0$

6. 微分方程 $y''+3y'+2y=(ax+b)e^{-x}$ 的特解形式为 ( )

A. $y=Axe^{-x}$

B. $y=(Ax+B)e^{-x}$

C. $y=(Ax+B)xe^{-x}$

D. $y=Ax^2e^{-x}$

二、填空题

1. 已知函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=\frac{t}{1+t^2}\\ y=\frac{t^2}{1+t^2}\end{cases}$ 所确定, 则曲线 $y=f(x)$ 在 $t=2$ 处的切线方程为

2. 设 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 则定积分 $\int_0^{2018}(x-[x])dx$ 的值是

3. 已知 $y_1=e^{3x}-xe^{2x}, y_2=e^x-xe^{2x}, y_3=-xe^{2x}$ 是某二阶非齐次线性微分方程的三个解, 则该方程的通解是 $y=$

4. 极限 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left(\sin\frac{1}{n}+2\sin\frac{2}{n}+3\sin\frac{3}{n}+\ldots+n\sin\frac{n}{n}\right)=$

5. 设 $f(x)=(x-1)\ln(2-x)(x<2)$, 则 $f(x)$ 的最大值点是 $x=$

三、计算积分

1. 计算积分 $\int \frac{1}{\sin^2 x + 9\cos^2 x} dx$.
2. 计算积分 $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx$, 其中 $f(x) = \int_1^x \frac{\ln(t+1)}{t} dt$.
3. $\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2} dx$

四、解答题

1. 求微分方程 $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}(x-3)y^4 = 0$ 的通解.
2. 已知 $y_1 = x, y_2 = x + e^x, y_3 = 1 + x + e^x$ 是 $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = Q(x)$ 的解, 试求此方程的通解.
3. 求曲线 $y = 3\left(1 - x^2\right)$ 与 x 轴围成的封闭图形绕直线 $y = 3$ 旋转一周所得的旋转体的体积.
4. 对 t 取不同的值, 讨论函数 $f(x) = \frac{1+2x}{2+x^2}$ 在区间 $[t, +\infty)$ 上是否有最大值或者最小值? 若存在最大值或者最小值, 则求出相应的最大值和最大值点, 或者最小值和最小值点.
5. 求微分方程 $x'' + 2x' + 2x = te^{-t}\cos t$ 的通解.
6. 设 $f'(x)$ 是连续函数, $F(x) = \int_0^x f(t)f'(2a-t)dt$, 证明: $F(2a) - 2F(a) = f^2(a) - f(0)f(2a)$.
7. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上具有连续导数, 且 $f(0) = f(1) = 0$, 求证:

(1) $\forall t \in \mathbf{R}, \int_0^1 xf(x)dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 \left(x^2 - t\right) f'(x)dx$.

(2) $\left(\int_0^1 xf(x)dx\right)^2 \le \frac{1}{45}\int_0^1 (f'(x))^2 dx$, 等号当且仅当 $f(x) = A\left(x^3 - x\right)$ 时成立, A 为常数.

2017年期末真题

一、计算题

1. 求极限 $\lim_{x\to 0}\dfrac{x-\ln(1+\tan x)}{\sin^2 x}$.

2. 设 $f(x)=\dfrac{x(x+1)}{|x|\left(x^2-1\right)}$, 试讨论函数 $f(x)$ 的间断点及类型.

3. 设 $f(x)=\begin{cases} x, & x<0 \\ 2^x, & x\geq 0 \end{cases}$, 求导函数 $f'(x)$.

4. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\arctan\frac{x}{y}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ 所确定, 求 $\mathrm{d}y$.

5. 求不定积分 $\int\sqrt{e^x+1}\mathrm{d}x$.

6. 设 $f(x)=\int_0^x e^{-t}\cos t dt$, 试求 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的最大值和最小值.

7. 求由曲线 $x^2+(y-5)^2=16$ 所围成的平面图形绕 x 轴旋转所产生的旋转体的体积.

8. 求微分方程 $y'''-y''+2y'-2y=0$ 的通解.

9. 求微分方程 $\frac{d^2y}{dx^2}=1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ 的通解.

二、解答题

1. 设函数 $f(x)$ 具有连续的一阶导数, 且满足 $f(x)=\int_0^x\left(x^2-t^2\right)f'(t)dt+x^2$, 求 $f(x)$ 的表示式.

2. 设函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 在某邻域 $U(a)$ 内有定义, 且 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^k}=l\quad(l>0,k$ 为正整数),试讨论函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处是否取得极值.

3. 求微分方程 $y''-2y'+2y=e^x\sin x$ 满足 $y(0)=1,y'(0)=1$ 的特解.

4. (学习高数I者做 (1), 学习高数II者做 (2))

(1) 求解微分方程组 $\frac{d\vec{x}}{dt}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\vec{x}$.

(2) 设曲线积分 $\int_{(C)}\left[f''(x)+9f(x)+2x^2-5x+1\right]ydx+2f'(x)dy$ 与路径无关, 求 $f(x)$.

5. 已知曲线 L 的方程为 $\begin{cases} x=t^2+1 \\ y=4t-t^2 \end{cases}\ (t\geq 0)$.

(1) 讨论曲线 L 的凹凸性.

(2) 过点 $(-1,0)$ 引曲线 L 的切线, 求切点坐标 (x_0,y_0), 并求切线的方程.

(3) 求此切线与曲线 L (对应于 $x\leq x_0$ 的部分) 及 x 轴所围成的平面图形的面积 S.

6. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上满足: $|f''(x)|\leq M$, 且在 $(0,1)$ 内 $f(x)$ 取得最大值, 试证:

$$|f'(0)|+|f'(1)|\leq M$$

2016年期末真题

一、填空题

1. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^3}\int_0^x \sin t^3 dt & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 则 $a=$

2. 设 $f(x)$ 的一个原函数是 $x\ln x$, 则 $f'(x)=$

3. 若 $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^4}=2$, 则 $f(x)$ 在 $x=$? 处取得极值.

4. 定积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x}{1+x^4}+\cos^3 x\right)dx=$

5. 微分方程 $x\left(1+y^2\right)dx-y\left(1+x^2\right)dy=0$ 的通解为

6. 微分方程 $xdy+(y-\sin x)dx=0$ 满足 $y|_{x=\pi}=1$ 的特解 $y=$

二、选择题

1. 下列结果中不成立的是 ( )

A. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}=1$

B. $\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=1$

C. $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$

D. $\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$

2. 设 $y=f(x)$ 满足 $f'(x)>0, f''(x)>0, \Delta x$ 为自变量 x 在 x_0 处的增量, Δy 与 dy 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分, 若 $\Delta x>0$, 则 ( )

A. $0<dy<\Delta y$

B. $0<\Delta y<dy$

C. $\Delta y<dy<0$

D. $dy<\Delta y<0$

3. 设函数 $f(x)$ 连续, 则下列函数中, 必为偶函数的是 ( )

A. $\int_0^x t[f(t)-f(-t)]dt$

B. $\int_0^x t[f(t)+f(-t)]dt$

C. $\int_0^x f\left(t^2\right)dt$

D. $\int_0^x f^2(t)dt$

三、计算题

1. 求极限 $l=\lim_{x\to\infty}\left(x+e^x\right)^{\frac{1}{x}}$.

2. 设 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=1-t^2\\ y=t-t^3\end{cases}$ 所确定, 求 $\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}$.

3. 设 $y=y(x)$ 由方程 $y=1-xe^y$ 确定, 求曲线 $y=y(x)$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程.

4. 计算反常积分 $I=\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx$.

5. 求函数 $f(x)=\frac{x\ln|x|}{|x-1|}$ 的间断点, 并说明间断点类型.

四、解答题

1. 设 $f(x)$ 满足 $\int_0^x f(t-x)dt=-\frac{x^2}{2}+e^{-x}-1$, 求曲线 $y=f(x)$ 的斜渐近线.

2. (学习高数I者做 (1), 学习高数II者做 (2))

(1) 求解微分方程组 $\dfrac{dx}{dt} = Ax$ 的通解, 其中 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(2) 求方程 $y'' + 2y' + y = 2xe^{-x}$ 的通解.

3. 已知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且满足 $xf'(x) = f(x) + 3x^2$, 求 $f(x)$, 使由曲线 $y = f(x)$ 与 $x = 0, x = 1$, $y = 0$ 所围的平面图形绕 x 轴旋转一周所得的旋转体体积最小.

4. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,c]$ 上具有单调减小的导函数 $f'(x)$, $f(0) = 0$, 证明: 对于满足不等式 $0 < a < b < a + b < c$ 的 a, b, 有 $f(a) + f(b) \geq f(a + b)$.

2015年期末真题

一、填空题

1. 计算 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\ln\frac{2-x}{2+x}+\cos^2 x\right)dx=$

2. 设函数 $y=x2^x$ 在 $x=x_0$ 点处取得极小值, 则 $x_0=$

3. 计算极限 $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n\sqrt{n+1}}+\frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{n+\frac{1}{2}}}+\cdots+\frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n+\frac{1}{n}}}\right]=$

4. 设函数 $y=y(x)$ 满足方程 $\int_0^x xydx=x^2+y$, 则 $y(x)=$

5, 设函数 $y=\varphi(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上有连续的二阶导数, $\varphi(0)=b, a>0$ 且 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处取得极大值 $\varphi(a)=0$, 则积分 $\int_0^a x\varphi''(x)dx=$

二、选择题

1. 设函数 $f(x)$ 连续, $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数, 则 ( )

A. 当 $f(x)$ 为奇函数时, $F(x)$ 必为偶函数
B. 当 $f(x)$ 为偶函数时, $F(x)$ 必为奇函数
C. 当 $f(x)$ 为周期函数时, $F(x)$ 必为周期函数
D. 当 $f(x)$ 为单调递增函数时, $F(x)$ 必为单调递增函数

2. 曲线 $y=(x-1)^4(x-2)^3(x-3)^2(x-4)$ 的拐点是 ( )

A. $(1,0)$
B. $(2,0)$
C. $(3,0)$
D. $(4,0)$

3. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 有连续导数, 且 $f(0)=0$, 令 $M=\max_{x\in[0,1]}|f'(x)|$, 则必有 (   )

A. $M\le\int_0^1|f(x)|dx\le 3M$
B. $\frac{M}{2}\le\int_0^1|f(x)|dx\le M$
C. $\int_0^1|f(x)|dx\le\frac{M}{2}$
D. $\int_0^1|f(x)|dx\ge 3M$

4. 设 $f(x)$ 是以 T 为周期的函数, 下列函数中以 T 为周期的函数是 ( )

A. $\int_0^x f(t)dt$
B. $\int_0^x f(t)dt-\int_{-x}^0 f(t)dt$
C. $\int_{-x}^0 f(t)dt$
D. $\int_0^x f(t)dt+\int_{-x}^0 f(t)dt$

5. 设函数 $f(x)=\int_0^{x^2}\ln(2+t)dt$, 则 $f'(x)$ 的零点个数为 (   )

A. 0
B. 2
C. 1
D. 4

三、解答题

1. 求曲线 $y=\frac{1}{x}+\ln\left(e^{-x}+1\right)$ 的渐近线.

2. 设函数 $F(x)=\int_0^{x^2}e^{-t^2}dt$, 试求:

(1) $F(x)$ 的极值.

(2) 曲线 $y=F(x)$ 的拐点的横坐标.

(3) 计算 $\int_{-2}^{3} x^2F'(x)dx$.

3. 求解初值问题 $\begin{cases} y''-e^{2y}=0 \\ y|_{x=0}=0,\ y'|_{x=0}=1 \end{cases}$.

4. 求一个以四个函数 $y_1=e^x, y_2=2xe^x, y_3=\cos 2x, y_4=3\sin 2x$ 为特解的齐次线性微分方程, 并求方程的通解.

5. 求微分方程 $y''-5y'+6y=2xe^{2x}$ 的通解.

6. 过曲线 $y=\sqrt[3]{x}(x\geq 0)$ 上点 A 作切线, 使该切线与曲线 $y=\sqrt[3]{x}$ 及 x 轴所围平面图形 D 的面积 $S=\frac{3}{4}$.

(1) 求点 A 的坐标.

(2) 求平面图形 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

7. 设 a,b 均为常数且 $a>-2, a\neq 0$, 问 a,b 为何值时, 有:

$$\int_1^{+\infty}\left[\frac{2x^2+bx+a}{x(2x+a)}-1\right]dx=\int_0^1\ln\left(1-x^2\right)dx$$

2014年高数期末真题

一、计算题

1. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$.

2. 已知 $\int_1^{\cos x} f(t)dt=\cos 2x$, 其中 $f(t)$ 连续, 求 $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

3. $y=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}-\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\quad(|x|<1)$, 求 dy.

4. 求不定积分 $\int\dfrac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$.

5. 求定积分 $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$.

6. 求微分方程 $(1+y)dx+\left(x+y^2+y^3\right)dy=0$ 的通解.

7. 求微分方程 $x''+3x'+2x=e^{-2t}$ 的通解.

8. (学习高数I者做 (1), 学习高数II者做 (2))

(1) 验证微分方程组 $\dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos^2 t & \frac{1}{2}\sin 2t-1 \\ \frac{1}{2}\sin 2t+1 & \sin^2 t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ 通解

$$\vec{x}=C_1\begin{pmatrix} e^t\cos t \\ e^t\sin t \end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, t\in R$$

(2) 验证 $y_1=e^x, y_2=e^x\ln|x|$ 是微分方程 $xy''-(2x-1)y'+(x-1)y=0$ 的解, 并求其通解.

9. 计算反常积分 $\int_1^{+\infty}\dfrac{\ln x}{x^3}dx$.

二、解答题

1. 当 $x\in[-1,1]$ 时, 确定函数 $f(x)=\dfrac{\tan\pi x}{|x|\left(x^2-1\right)}$ 的间断点及其类型.

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases} \left(\sin\frac{1}{x}\right)\int_0^x \sin t^2 dt & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$, 求 $f'(x)$, 并讨论 $f'(x)$ 在 $x=0$ 点的连续性.

3. (学习高数I者做 (1), 学习高数II者做 (2))

(1) 求线性微分方程组 $\frac{d\vec{x}}{dt}=A\vec{x}$ 的通解, 其中 $A=\begin{pmatrix} 8 & 4 & -1 \\ 4 & -7 & 4 \\ -1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$.

(2) 已知函数 $y=e^{2x}+(x+1)e^x$ 是二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''+ay'+by=ce^x$ 的一个特解, 试确定 a,b,c, 并求该方程的通解.

4. 设曲线 l_1 的方程为 $y=a\ln x$ (其中常数 $a>0$), 曲线 l_1 的一条切线 l_2 过原点.

(1) 求曲线 l_1, 切线 l_2 以及 x 轴围成的平面图形的面积.

(2) 求此平面图形绕 y 轴旋转所成的旋转体的体积.

5. 设函数 $f(x)$ 在 $[-l,l]$ 上连续, 在 $x=0$ 处可导, 且 $f'(0)\neq 0$.

(1) 证明:对 $\forall x\in(0,l), \exists\theta\in(0,1)$, 使 $\int_0^x f(t)dt+\int_0^{-x} f(t)dt=x[f(\theta x)-f(-\theta x)]$.

(2) 求极限 $\lim_{x\to 0^+}\theta$.

2013年期末真题

一、计算题

1.求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x sinx - x(x+1)}{1-cosx}$

2.设 $x \ge 0, \int_0^{x^2+x} f(t)\mathrm{d}t = x^2$ 其中 $f(x)$ 连续，求 $f(2)$

3.设 $y = \sin^2 3x + \cos\dfrac{x^2}{5} + \tan\sqrt{x}$,求 y'.

4.求不定积分 $\int x^3 \ln x \mathrm{d}x$

5.求定积分 $\int_{-3}^{3}(|x|+x)e^{-|x|}\mathrm{d}x$

6.求微分方程 $xy' - y = x^3\cos x$ 的通解.

7.求微分方程 $y'' - 2y' + 5y = 0$ 的通解.

8.计算反常积分 $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

二、解答题

1. 讨论函数

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x(x+1)}{\cos\dfrac{\pi}{2}x}, & x < 0 \\ \sin\dfrac{\pi}{x^2-4}, & x > 0 \end{cases}$$

的间断点及其类型

2.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{g(x) - e^{-x}}{x}, & x \ne 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

其中 $g(x)$ 具有二阶连续导数，且 $g(0) = 1, g'(0) = -1$。试求：

(1) $f'(x)$

(2) 讨论 $f'(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 处的连续性

3. (学习高数 I 者做(1)，学习高数 II 者做(2))

(1) 求线性微分方程组 $\dfrac{d\overrightarrow{x}}{dt} = A\overrightarrow{x}$ 的通解，其中 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(2) 设函数 u 的全微分 $du = [3f(x) + e^x]\,ydx + [2f'(x) + f(x)]\,dy$，其中 $f(x) \in C^{(2)}$，且 $f(0) = 1$, $f'(0) = \dfrac{1}{5}$，求 $f(x)$

4. 以椭圆 $x = a\cos t, y = b\sin t (0 \le t \le 2\pi, 0 < b < a)$ 的长轴为底，作一个与上半椭圆内接的等腰梯形，试求它的面积的最大值

5. 设函数 $f \in C^{(1)}[a,b],\check{\ } f'(x) \le M$ (M 为常数)，且 $f(a) = 0$，证明：

(1) $\int_a^b f(x)dx \le \dfrac{1}{2}M(b-a)^2$

(2) $\int_a^b f^2(x)dx \le \dfrac{(b-a)^2}{2}\int_a^b [f'(x)]^2 dx$

2012年期末真题

一、填空题

1.函数 $F(x)=\int_1^x(2-\frac{1}{\sqrt{t}})dt(x>0)$ 的单调递减区间为:( )

2.若$f(x)$在x=0处连续且 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=2$，则 $f(0)=()$, $f'(0)$ =( )

3.若$f(x)=\begin{cases}\frac{\cos x}{x+2} & x\geq0\\ \frac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a}}{x} & x<0\end{cases}$ 有可去间断点x=0,则a=:( )

4.设$f(x)=\begin{cases}e^{ax} & x\leq0\\ b(1-x^2) & x>0\end{cases}$ $((-\infty,+\infty)$可微，则a=:( ), b=:( )

5.设$x\to0$时，$f(x)=\ln(1+ax^2)$与 $g(x)=\sin^2 3x$ 是等价无穷小，则 $a=()$

二、计算题

1.求极限$\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\frac{\pi}{2}x}$

2.求函数 $f(x)=\frac{x^2-5}{x-3}+\int_{-1}^1(\sqrt{1-x^2}+x)^2dx$ 的单调性和极值

3.求定积分 $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}dx$

4.求微分方程$\frac{dy}{dx}+xy=x^3y^3$的通解

5.求微分方程$\ddot{x}+4\dot{x}+5x=0$的通解

6.设由曲线 $y=\cos x$（其中 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$）及x轴，y轴所围成平面图形的面积被曲线 $y=a\sin x(a>0)$ 二等分

(1)确定 a 的值

(2)求曲线 $y=\cos x, y=a\sin x$ 及x=0所围平面图形绕x轴旋转一周所成的立体的体积

7.设函数$F(x)=\begin{cases}\frac{\int_0^x tf(t)dt}{x^2} & x\neq0\\ a & x=0\end{cases}$,其中 $f(x)$ 具有二阶连续导数，且$f(0)=0$,问：

(1)a:U<fi$F(x)(x=0\Xi$

(2)$F'(x)((-\infty,+\infty)\Omega'$

8.(f‘pIΠZ(1)fi$f$‘pIIΠZ(2))

(1)求线性微分方程组$\frac{d\overrightarrow{x}}{dt}=A\overrightarrow{x}$,其中$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 4 & -2\\ -3 & -3 & 5\end{pmatrix}$

(2)求微分方程$\ddot{x}-3\dot{x}+2x=4e^t$的通解

9.$f(x)([a,b]\Omega(a>0,b>0)$, 且满足方程 $2\int_a^{\frac{a+b}{2}}e^{\lambda(x^2-b^2)}f(x)dx=(b-a)f(b)$ 证明：存在$\xi\in(a,b)$,使$2\lambda\xi f(\xi)+f'(\xi)=0$

10.设微分方程$y''+P(x)y'+Q(x)y=0$

(1)证明：若$1+P(x)+Q(x)=0$则方程有一特解$y=e^x$；　$P(x)+xQ(x)=0$则方程有一特解$y=x$

(2)根据(1)的结论，求$(x-1)y''-xy'+y=0$的通解和满足初始条件$y(0)=2, y'(0)=1$的特解

(3)求$(x-1)y''-xy'+y=1$满足初始条件 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln[y(x)-1]}{x}=-1$的特解

2011年期末真题

一、填空题

1.$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x}{x} & x<0\\ 3x^2-2x+k & x\geq 0\end{cases}$ 在x=0处连续，则常数k=( )

2.$\int_{-2}^{2}(1+x)\sqrt{4-x^2}dx$ =( )

3.微分方程$y^{(3)}+y=0$ 的通解是:( )

4.$\dfrac{d}{dx}\int_0^{x^2}\dfrac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt$ =( )

二、选择题

1.设周期函数$f(x)((-\infty,+\infty)$内可导，其周期为4，且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$, 则曲线$y=f(x)((5,f(5))$处的切线的斜率为 ( )

A. 2

B. -2

C. 1

D. -1

2.微分方程$y''-y=e^x+1$的一个特解应有形式(a,b为常数) ( )

A.ae^x+b

B.axe^x+bx

C.ae^x+bx

D.axe^x+b

3.$f(x)=\dfrac{(x^2+x)(\ln|x|)\sin\frac{1}{x}}{x^2-1}$的可去间断点的个数是( )

A.0

B.1

C.2

D.3

4.设$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\tan x}{x}dx$, $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{x}{\tan x}\mathrm{d}x$, 则以下说法中正确的有

A.$I_1>I_2>1$

B.$1>I_1>I_2$

C.$I_2>I_1>1$

D.$1>I_2>I_1$

三、计算题

1.求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-x}{\ln(1+2x^3)}$

2.计算积分 $\int\dfrac{x\sin x}{\cos^5 x}dx$

3.求定积分 $\int_1^4\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$

4.设$\begin{cases}x=\int_1^{t^2}udu\\ y=\int_{t^2}^{1}u^2\ln udu\end{cases}$ $t>1,\quad B\dfrac{d^2y}{dx^2}$

5.求微分方程的通解：$xy'-3y=x^4e^x$

6.(学习高数I者做(1)，学习高数II者做(2))

(1)求微分方程组$\frac{d\overrightarrow{x}}{dt}=A\overrightarrow{x}$的通解，其中A=$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix}$

(2).求$y''-4y'+4y=3e^{2x}$的通解

7.在抛物线$y=x^2(0\le x\le 8)$上求一点，使得过此点所作切线与直线x=8及x轴所围图形面积最大。

8.(学习高数 I者做(1)，学习高数 II者做(2)）

（1）设广义积分 $\int_1^{+\infty} f^2(x)dx$收敛，证明广义积分$\int_1^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx$绝对收敛

（2）计算 $\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^3}dx$

9.设$f''(x)$存在，且 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=0$，记 $\varphi(x)=\int_0^1 f'[1+(x-1)t]dt$ 求$\varphi(x)$在x=1的某个邻域内的导数，并讨论$\varphi'(x)(x=1$处的连续性

2010年期末真题

一、填空题

1.在抛物线$y=x^2$上与直线$x+2y=0$垂直的切线方程是:( )

2.若$y_1=3, y_2=3+x^2, y_3=3+x^2+e^x$ 都是微分方程$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的解（其中$p(x), q(x), f(x)$都是已知的连续函数），则此方程的通解为:( )

3.设$f(x)I:(0,+\infty)$,已知 $f(1)=1, f'(x^2)=x^3$则 $f(4)$=:( )

二、选择题

1.设 $f(x)$在 $x=a$ 处取得极值且满足 $f''(x)+2f'(x)=\int_a^{x+1} e^{f(t)}dt$,则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处 ( )

A.必取极大值

B.必取极小值

C.不可能取极值

D.是否取极值不能确定

2.设$f(x)=2x\ln(1-x), g(x)=\sin^2 x$, ßS$x\to 0$时 $f(x)/g(x)$的 ( )

A.同阶但非等价无穷小

B.等价无穷小

C.高阶无穷小

D.低阶无穷小

三、解答题

1.设 $y=\arctan(\sqrt{x^2-1})-\dfrac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}(x>1)$, $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{dy}{dx}$

2.设 $\begin{cases} x=\int_0^t e^{-u^2}du \\ y=e^{-t^2}(1+t^2) \end{cases}$ ，求 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}$

3.求不定积分 $\int e^x\ln(e^x+1)dx$

4.求微分方程$2xy'=y+2x^2$的通解

5.(学习高数I者做（1)，学习高数II者做(2)）

（1）求微分方程组 $\dfrac{d\vec{x}}{dt}=A\vec{x}$的通解，其中 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

（2）求微分方程$y''+y'-2y=e^x$的通解

6.计算反常积分 $I=\int_0^{+\infty}\dfrac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2}dx$

7.抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 通过 $(0,0),(1,2)$ 两点，且 $a<0$,确定 a,b,c 的值与 x 轴所围图形 D 的面积最小值，并求此图形 D 绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积

8.设函数$f(x)$(:$[a,b]$Ωfi(Γ:(a,b)内可导，且 $f'(x)>0$,若极限 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(2x-a)}{x-a}$存在，证明在 (a,b) 内存在点 ξfi¨$\dfrac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)dx}=\dfrac{2\xi}{f(\xi)}$