彭·线代

线性代数期末答案详解

（2022 版）

彭康书院学业辅导与发展中心

2021 线代期末试题解析

彭康学导团

1 填空题

1. 26.

注意到

$$B = [\alpha_1, 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 5\alpha_3, \alpha_2 + 6\alpha_3] = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]\begin{pmatrix} 1 & 2 & \\ & 3 & 1 \\ & 5 & 6 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \\ & 3 & 1 \\ & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

故

$$|B| = |A|\left|\begin{pmatrix} 1 & 2 & \\ & 3 & 1 \\ & 5 & 6 \end{pmatrix}\right| = 26$$

2. -2.

由于实对称矩阵属于不同特征值的特征向量相互正交，故

$$\langle\alpha_1, \alpha_2\rangle = -1 + 3 + x = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x = -2$$

3. $\begin{pmatrix} c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$.

$A^{15}C$ 是将 C 的 $1, 2$ 行交换 15 遍，即交换 C 的 $1, 2$ 行。CB^{16} 是将 C 的 $1, 3$ 列交换 16 遍，即不变。故总体的作用是将 C 的 $1, 2$ 行交换。

4. $(1, 0, -1)$.

设 $\frac{x}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}=t$，即

$$\begin{cases} x=-1 \\ y=t+1 \\ z=2t+1 \end{cases}$$

带入平面方程有

$$-2t+t+1-2t-4=0 \quad \Longrightarrow \quad t=-1 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=-1 \end{cases}$$

5. $t\in(0,2)$.

实二次型的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} t & & \\ & 1 & t \\ & t & 4 \end{pmatrix}$$

由正惯性指数为 3 可知 A 是正定矩阵，故各阶顺序主子式大于 0，即

$$\begin{cases} \Delta_1=t>0 \\ \Delta_2=t>0 \\ \Delta_3=4t-t^3>0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad t\in(0,2)$$

2 选择题

1. B

解的解构：齐次通解 + 非齐次特解

$$\frac{1}{2}A(X_1+X_2)=\frac{1}{2}\cdot 2\beta=\beta$$

为方程的特解，$k_1(\alpha_1+\alpha_2)$ 与 $k_2\alpha_2$ 线性无关。又 $\mathrm{r}(A)=2$ 因此 $k_1(\alpha_1+\alpha)$ 与 $k_2\alpha_2$ 是 $Ax=0$ 的基础解系。

2. A

(1) 由于相似矩阵的迹相同，故

$$-2+1=y+2-2 \quad \Longrightarrow \quad y=-1$$

(2) 有

$$|A+E|=\begin{vmatrix} -1 & x & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}=0 \quad \Longrightarrow \quad x=0$$

3. B

(1) $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})=\boldsymbol{E}^2-\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$，正确;

(2) 令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 0\end{pmatrix}$ 则 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，但 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$，错误;

(3) 由于 $\boldsymbol{A}$ 可逆，故

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}\quad\Longrightarrow\quad\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}\quad\Longrightarrow\quad\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$$

正确;

(4) 由于 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 在一般情况下是不成立的，故错误.

4. C

由于 $\boldsymbol{a}=-(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$，故

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$$

5. B

由题目有：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1$ 线性相关，而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关，故 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关（整体线性无关则部分组线性无关）。

3

设 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的增广矩阵, 则

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\left[\begin{array}{c:c}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{b}\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccccc:c}1 & -2 & 1 & 1 & -5 & 3\\ 2 & -4 & 3 & 1 & -11 & 6\\ 1 & -2 & 2 & 3 & -12 & 6\\ 3 & -6 & 3 & 2 & -13 & t\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccccc:c}1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 9-t\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 9-t\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 9-t\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t-8\end{array}\right]$$

要使线性方程组组有解, 则 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})$, 此时 $t=8$.

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\left[\begin{array}{ccccc:c}1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

由此得方程组由自由未知量表示的通解为

$$\begin{cases}x_1=2x_2+1\\ x_3=3x_5+1\\ x_4=2x_5+1\end{cases}$$

于是得方程组的结构式通解为

$$
\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\0\\3\\2\\1\end{pmatrix}
$$

其中 c_1,c_2 为任意常数.

4

由题意有 $\det(\boldsymbol{A})=4$, 故 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{AXA}^*=8\boldsymbol{XA}^{-1}+12\boldsymbol{E}_4 &\Rightarrow \boldsymbol{XA}^*=8\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{XA}^{-1}+12\boldsymbol{A}^{-1}\\
&\Rightarrow \det(\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{A}^{-1}=8\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{XA}^{-1}+12\boldsymbol{A}^{-1}\\
&\Rightarrow 4\boldsymbol{X}=8\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}+12\boldsymbol{E}_4\\
&\Rightarrow (\boldsymbol{E}_4-2\boldsymbol{A}^{-1})\boldsymbol{X}=3\boldsymbol{E}_4\\
&\Rightarrow \boldsymbol{X}=3(\boldsymbol{E}_4-2\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}
\end{aligned}
$$

于是解得

$$
\boldsymbol{X}=3\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\-2&0&-1&0\\0&-3&0&2\end{pmatrix}
$$

5

设 $\boldsymbol{I}_1=\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix},\boldsymbol{I}_2=\begin{pmatrix}-1&1\\0&-1\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_1&0\\0&\boldsymbol{I}_2\end{pmatrix}$, 故对正整数 n, 有 $\boldsymbol{A}^n=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_1^n&0\\0&\boldsymbol{I}_2^n\end{pmatrix}$.

因为

$$
\boldsymbol{I}_1^2=\begin{pmatrix}2&-2\\-2&2\end{pmatrix}=-2\boldsymbol{I}_1
$$

故 $\boldsymbol{I}_1^n=(-2)^{n-1}\boldsymbol{I}_1$.

又

$$
\boldsymbol{I}_2^2=\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{I}_2^3=\begin{pmatrix}-1&3\\0&-1\end{pmatrix}
$$

由归纳法可得,

$$I_2^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & n\cdot(-1)^{n-1} \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$$

于是

$$A^{2014} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}^{2014} = \begin{pmatrix} I_1^{2014} & 0 \\ 0 & I_2^{2014} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{2013} & -2^{2013} & 0 & 0 \\ -2^{2013} & 2^{2013} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2014 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

故 $\det\left(A^{2014}\right) = \det(I_1^{2014}) = 0$.

6

1. 由题意有 $b\alpha_1 + c\alpha_2 + \alpha_3 = \beta$, 即

$$\begin{cases} b + c + 1 = 1 \\ 2b + 3c + a = 1 \\ b + 2c + 3 = 1 \end{cases}$$

解得 $a = 3, b = 2, c = -2$.

2. 设 $A = \begin{pmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 & \beta \end{pmatrix}$, 则有 $r(A) = 3$, 故 $\alpha_2, \alpha_3, \beta$ 线性无关, 可作为 $\mathbb{R}^3$ 的一个基. 考虑非齐次线性方程组 $Ax = \alpha_1$, 解得 $\alpha_1 = \alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha_3 + \frac{1}{2}\beta_1$. 故其过渡矩阵为

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

7

由题意有

$$T(\alpha) = (x-y, y-z, z)^{\mathrm{T}} = A\alpha = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

设 T 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的矩阵为 B, 则

$$T(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

即

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2&1\\-2&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

设 $\mathbb{R}^3$ 中的一组基 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$. 则 T 的值域即为 $\operatorname{span}\{T(\boldsymbol{\beta}_1),T(\boldsymbol{\beta}_2),T(\boldsymbol{\beta}_3)\}$. 且

$$\begin{pmatrix}T(\boldsymbol{\beta}_1)&T(\boldsymbol{\beta}_2)&T(\boldsymbol{\beta}_3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$$

于是 T 的秩为 3.

8

1.

$$L:\begin{cases}x-y-4z+12=0\\2x+y-2z+3=0\end{cases}\implies\begin{cases}x+5=2z\\7-y=2z\end{cases}\implies\frac{x+5}{2}=\frac{7-y}{2}=z$$

2. $\forall\, M\in L$，M 可以表示成如下形式

$$M(2t-5,7-2t,t)\implies\overrightarrow{PM}=(2t-7,7-2t,t+1)$$

由于直线的方向向量 $\boldsymbol{n}=(2,-2,1)$，故由几何关系

$$\overrightarrow{PM}\cdot\boldsymbol{n}=(2t-7,7-2t,t+1)\cdot(2,-2,1)=0\implies t=3\implies M(1,1,3)$$

其中 M 就是过点 P 在直线 L 上的垂足。设对称点为 $P_1(x,y,z)$，那么 M 是 PP_1 的中点，故

$$\begin{cases}2+x=2\\y=2\\1+z=6\end{cases}\implies\begin{cases}x=0\\y=2\\z=5\end{cases}$$

故对称点为 $(0,2,5)$.

9

二次型的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&-1&3\\-1&3&-3\\3&-3&1\end{pmatrix}$$

令 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=0$，解得

$$\lambda_1=2,\qquad \lambda_2=-2,\qquad \lambda_3=7$$

将 λ_i 代入 $\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}$ 中求解特征向量有

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\qquad \boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\qquad \boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

故令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)$，那么

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$$

其中

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}2 & & \\ & -2 & \\ & & 7\end{pmatrix}$$

因此线性变换为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$，标准型为

$$f=2y_1^2-2y_2^2+7y_3^2$$

规范型为

$$f=z_1^2-z_2^2+z_3^2$$

10

1. 由于

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^2&=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})=\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\\&=\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}-(2-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$ 可以提出来是因为 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$ 是一个数。故

$$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}\qquad\Longleftrightarrow\qquad \boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}-(2-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\qquad\Longleftrightarrow\qquad \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=1$$

2. 由 1 知，

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\qquad\Longleftrightarrow\qquad \boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$$

我们断言：$\boldsymbol{A}$ 是降秩矩阵。若不然，反设 $\boldsymbol{A}$ 满秩，从而可逆。那么

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}\qquad&\Longrightarrow\qquad \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}\qquad\Longrightarrow\qquad \boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}\\&\Longrightarrow\qquad \boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}\qquad\Longrightarrow\qquad \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=0\end{aligned}$$

这与 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=1$ 矛盾，故 $\boldsymbol{A}$ 是降秩矩阵。

2020 线代期末答案

一、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1:B　　2:A　　3:D　　4:C　　5:B

解析：1：$P=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},P^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$。对 A 作行变换相当于左乘初等矩阵，而列变换则是右乘初等矩阵。对 A 行变换，将 A 的第 2 行加到第 1 行得到的 B 就相当于左乘 P ,即 $B=PA$ 再对 B 列变换，将 B 的第 1 列的-1 倍加到第 2 列就相当于再右乘 P^{-1} 得到 C 。所以 $C=PAP^{-1}$,故选 B

2：直线 $\frac{x-1}{a_1-a_2}=\frac{y-2}{b_1-b_2}=\frac{z-3}{c_1-c_2}$ 的方向向量是 $\overrightarrow{v_1}=\left(a_1-a_2,b_1-b_2,c_1-c_2\right)$，恒过点 $P_1:\left(1,2,3\right)$ ；而直线 $\frac{x-a_1}{a_2-1}=\frac{y-b_1}{b_2-2}=\frac{z-c_1}{c_3-3}$ 的方向向量是,$\overrightarrow{v_2}=(a_2-1,b_2-2,c_2-3)$,恒过点 $P_2:\left(a_1,b_1,c_1\right)$。

则混合积 $\overrightarrow{P_1P_2}\bullet\left(\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2}\right)=\begin{vmatrix}a_1-1&b_1-2&c_1-3\\a_1-a_2&b_1-b_2&c_1-c_2\\a_2-1&b_2-2&c_2-3\end{vmatrix}=0$，所以两条直线共面。又因为矩阵 $\begin{bmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\1&2&3\end{bmatrix}$ 可逆，故可得 $\overrightarrow{v_1}$ 和 $\overrightarrow{v_2}$ 线性无关，即不平行（共线），因此两条直线相交于一点，故选 A

3：A 是 $m\times n$ 阶的，B 是 $n\times m$ 阶的，所以 BA 是 $n\times n$ 阶的。首先有条件 $BA=I_n$，事实上此处暗示了 $n\le m$ 。因为如果反过来 $n>m$ ，由于矩阵相乘后 $r(BA)\le\min\{r(A),r(B)\}$ ，而 $n>m$, 则导致 $r(A)\le m,r(B)\le m$ ，从而 $r(BA)\le\min\{r(A),r(B)\}\le m<n$ ，但是 $r(I_n)\equiv n$ ，故得不到 $BA=I_n$。所以必须是 $n\le m$ 。由行秩等于列秩，$r(A),r(B)$ 都满足 $\le\min\{m,n\}=n$ 另外若 $r(A),r(B)$ 中有一个小于 n，则同样由 $r(BA)\le\min\{r(A),r(B)\}<n=r(I_n)$，同样得不到 $BA=I_n$。所以只可能是 $r(A)=r(B)=n$ ，故选 D

4：因为 α_1,α_2 是从属于特征值 1 的线性无关的向量，即 $A\alpha_1=\alpha_1,A\alpha_2=\alpha_2$ ，所

以 $A(\alpha_1+\alpha_2)=\alpha_1+\alpha_2$，即 $\alpha_1+\alpha_2$ 也是从属于 1 的特征向量。此外 $A\alpha_3=-\alpha_3$，则 $A(-\alpha_3)=-A\alpha_3=\alpha_3=-(-\alpha_3)$，则 $-\alpha_3$ 是从属于特征值-1 的特征向量。需要注意的是，因为 α_1（或者 α_2）和 α_3 是从属于不同特征值的向量，此时 $\alpha_1+\alpha_3$（或者 $\alpha_2+\alpha_3$）将不再是 A 的任何特征向量。我们以列向量考虑 $P=[P_1,P_2,P_3]$，即 $P^{-1}AP=D,AP=PD,D=diag\{1,-1,1\}$，从而 $A[P_1,P_2,P_3]=[P_1,-P_2,P_3]$，则由选项可知只有 $[\alpha_1+\alpha_2,-\alpha_3,\alpha_2]$ 满足条件，故选 C

5：二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化简展开得到 $2x_2^2+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3$，故其系数矩阵为 $A=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&2&1\\1&1&0\end{bmatrix}$。由特征多项式 $\det(\lambda I-A)=\lambda^3-2\lambda^2-3\lambda=\lambda(\lambda+1)(\lambda-3)=0$ 的根 0、-1、3，得到其特征值为 0、-1、3，均为 1 重。因为特征值中有一个正特征值和一个负特征值，故正，负惯性指数均为 1，故选 B

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1：$k\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}$（$k$ 为常数） 2：16 3：$(1,2,3,4)$ 4：$\frac{1}{3}$ 5：4

解析：1：因为 α_1,α_2 线性无关，因此 $A\vec{x}=0$ 的解系中只有 $3-2=1$ 个向量。因为 $\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$，即 $\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3=0$，所以 $A\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}=\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3=0$，因此 $\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}$ 是方程 $A\vec{x}=0$ 的一个解。而因为基础解系仅有一个向量，故 $k\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}$ 就是该方程的通解。

2：$\det A=1\times4-2\times3=-2,\det(2A)=2^2\det A=-8$。由伴随矩阵性质，$\det(A^*)=\det(A)^{2-1}=\det A=-2$。所以 $\begin{vmatrix}O&2A\\A^*&O\end{vmatrix}=(-1)^{2\times2}\det(2A)\bullet\det(A^*)=16$。最后一步是"$A$ 为 $m\times m$ 阶方阵，B 为 $n\times n$ 阶方阵，则 $\begin{vmatrix}O&A\\B&O\end{vmatrix}=(-1)^{mn}\det A\bullet\det B$"的结

论。

3：首先观察右下角元素4，因为只有$\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$矩阵与右下角元素的值有关，故$\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$的系数为$4$；再观察左下角元素$7$，在余下三个$\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}$中只有$\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}$与左下角元素的值有关，故$\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}$的系数为$7-4=3$；其次对右上角元素 9，在$\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}$中又只有$\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}$与右上角元素有关，故$\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}$的系数为$9-3-4=2$，则最后$\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$的系数为$10-2-3-4=1$，因此$\begin{bmatrix}10&9\\7&4\end{bmatrix}$在该基下的表示为$\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}+4\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$，即坐标为$(1,2,3,4)$

4：$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix},A^*=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{bmatrix},A^*A=\det(A)\bullet I_3=\begin{bmatrix}2&&\\&2&\\&&2\end{bmatrix}$，考虑$A^*$的第一行与$A$的三列作用，即有$a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31}=2$ 以及有$a_{12}A_{11}+a_{22}A_{21}+a_{32}A_{31}=0$ $a_{13}A_{11}+a_{23}A_{21}+a_{33}A_{31}=0$。其中$A_{ij}$是$a_{ij}$的代数余子式。

（事实上对行列式$\det(a_{ij})_{n\times n}$有$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=\sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=\{\begin{matrix}\det(A)(i=j)\\0(i\neq j)\end{matrix}$，表明了当选定一行或者一列展开求行列式时，如果代数余子式是用的与之不同的另外一行（列），那么得到的值将始终为 0，,而$AA^*=A^*A=\det A\bullet I$公式也是由此推出的）

由于A每一行元素和为6，故将以上式子加在一起就可以得到：

$A_{11}(a_{11}+a_{12}+a_{13})+A_{21}(a_{21}+a_{22}+a_{23})+A_{31}(a_{31}+a_{32}+a_{33})=6(A_{11}+A_{21}+A_{31})=2$,所以$A_{11}+A_{21}+A_{31}=\frac{1}{3}$，即$A^*$的第一行元素之和为$\frac{1}{3}$

5：令$A\vec{x}=\lambda\vec{x}(\vec{x}\neq\vec{0})$，则$A^2\vec{x}=\lambda^2\vec{x}$，$A^2+A=2I,A^2\vec{x}+A\vec{x}-2\vec{x}=(\lambda^2+\lambda-2)\vec{x}=0$，则解$\lambda^2+\lambda-2=0$有$\lambda_1=1,\lambda_2=-2$，故该矩阵其中两个特征值是$1$、$-2$。又因为$\det(A)=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=4$，则$\lambda_3=-2$，即$A$的特征值是$1$、$-2$、$-2$，故$A+3I$的特征值是

4、1、1，因此 $\det(A+3I)=4\times1\times1=4$.

三、解答题

1. $(\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4)=\begin{pmatrix}1&2&0&2\\1&3&3&4\\-1&-2&0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0&2\\0&1&3&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}$,

故所有的极大无关组为：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4;\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4;\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$.

2.在旋转曲面上任取一点(x, y, z)，设其由直线 l 上点(x_0, y_0, z_0)绕 y 轴旋转而得，

则 $\begin{cases}y=y_0\\x^2+z^2={x_0}^2+{z_0}^2\end{cases}$,

由(x_0, y_0, z_0)在直线 l 上知 $x_0=1, y_0=z_0$，代入上式得 $x^2+z^2=1+y^2$.

3. (1) $\alpha=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$;

(2) 由 A 的秩为 r 可知存在可逆矩阵 P，Q 使得 $A=P\begin{pmatrix}I_r&O\\O&O\end{pmatrix}Q$，于是 $A=P\begin{pmatrix}I_r&O\\O&O\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_r&O\\O&O\end{pmatrix}Q$，令 $B=\begin{pmatrix}I_r&O\\O&O\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}I_r&O\\O&O\end{pmatrix}Q$，则 B，C 都是秩为 r 的 n 矩阵，且 $A=BC$.

4. $A=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix},\Rightarrow B=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$

$\beta=\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\Rightarrow\beta=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$,

由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关可知 $AX=\beta\Rightarrow BX=\gamma$.

由 $(B|\gamma)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&1\\1&1&0&2\\0&1&1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&1\\0&1&1&1\\0&1&1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&1\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{array}\right)$,

得 $BX=\gamma$ 的通解为 $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$，其中 k 为任意常数，这也是原方程组的解.

5.设线性变换 T 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 和基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的矩阵分别为 A,B.

则 $(T(\alpha_1),T(\alpha_2),T(\alpha_3))=(\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3)B$，

即 $\begin{pmatrix}-5&0&-5\\0&-1&-1\\3&6&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}B\Rightarrow B=\begin{pmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}-5&0&-5\\0&-1&-1\\3&6&9\end{pmatrix}$，

由 $(\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3)=(\varepsilon_1\quad\varepsilon_2\quad\varepsilon_3)C$，得由基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 到基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的过渡矩阵为

$C=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}$.

由 $C^{-1}AC=B$，得

$$A=CBC^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}-5&0&-5\\0&-1&-1\\3&6&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&-10&-5\\-1&-1&-1\\14&22&14\end{pmatrix}$$

6. (1)由 A^* 为零矩阵知 $r(A)<2$，再由 A 的各行元之和为 6 知 $r(A)>0$，
所以 $r(A)=1$.

(2)由 A 的各行元之和为 6 知其有一个特征值 6，又 $r(0I-A)=1=3-2$，故 0 至少是 A 的 2 重特征值，因此 A 的全部 3 个特征值为 6，0，0.

(3) 由 A 的各行元之和为 6 知特征值 6 有一个特征向量为 $\alpha=(1,1,1)^T$

注意到 A 实对称，与 α 正交的非零向量都是 A 的特征值 0 的特征向量，解得 A 有两个线性无关的特征向量 $\beta=(1,-2,1),\gamma=(1,0,1)$，

令 $C=(\frac{1}{\|\alpha\|}\alpha,\frac{1}{\|\beta\|}\beta,\frac{1}{\|\gamma\|}\gamma)=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}\sqrt{2}&1&\sqrt{3}\\\sqrt{2}&-2&0\\\sqrt{2}&1&\sqrt{3}\end{pmatrix}$，

则 $AC=C\begin{pmatrix}6&&\\&0&\\&&0\end{pmatrix}=\sqrt{12}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$，

于是

$$A=\sqrt{12}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}C^{-1}=\sqrt{12}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}C^{T}=\sqrt{12}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{2}&1&\sqrt{3}\\\sqrt{2}&-2&0\\\sqrt{2}&1&-\sqrt{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix}$$

另解：由 A 的各行元之和为 6 知特征值 6 有一个特征向量为 $\alpha=(1,1,1)^T$，单位化得 $\xi_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T$，设特征值 0 的两个单位正交矩阵特征向量为 ξ_2,ξ_3，

令 $P=[\xi_1,\xi_2,\xi_3]$，则 P 为正交矩阵，

且 $P^TAP=\begin{pmatrix}6&&\\&0&\\&&6\end{pmatrix}\Rightarrow A=P\begin{pmatrix}6&&\\&0&\\&&6\end{pmatrix}P^T=6\xi_1\xi_1^T=\begin{pmatrix}2&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix}$.

7.(1)由题设知 $A(A-I)=O$，所以 $r(A)+r(A-I)\le n$.

又 $r(A)+r(A-I)\ge r(A-(A-I))=r(I)=n$，所以 $r(A)+r(A-I)=n$.

(2)由 $A^2=A$ 得 A 的特征值只能是 0 和 1，

又因为 $[n-r(0I-A)]+[n-r(1I-A)]=n$，所以 A 有 n 个线性无关的特征向量，故 A 可以相似对角化.

(3)由(2)知 A 相似于对角阵 $\begin{pmatrix}I_r&\\&0\end{pmatrix}$，其中 $r=r(A)$，又注意到相似矩阵具有相同的特征值，于是也有相同的迹，所以 $\mathrm{tr}(A)=\mathrm{tr}\begin{pmatrix}I_r&\\&0\end{pmatrix}=r=r(A)$.

8.(1)设 r (I) = r (II) = r，考虑向量组(III) $\alpha_1,\alpha_1,...,\alpha_n,\beta_1,\beta_2,...,\beta_s$，

由于 $\beta_1,\beta_2,...,\beta_s$ 可由 $\alpha_1,\alpha_1,...,\alpha_n$ 线性表示，所以 r (III) = r.

所以 $\alpha_1,\alpha_1,...,\alpha_n$ 可由 $\beta_1,\beta_2,...,\beta_s$ 线性表示，于是(I)与(II)等价.

(2) AB 的列向量可由 A 的列向量组线性表示，且 $r(AB)=r(A)$，由(1)知，A 的列向量组可以由 AB 的列向量组线性表示，即存在 $s\times n$ 矩阵 C，使得 $A=ABC$.

2019 年线性代数期末答案

一、填空题（每题 3 分，共 30 分）

1. $-1,\begin{bmatrix}-3 & -1\\ 6 & 2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-3 & -1\\ 6 & 2\end{bmatrix}$

解析：$\alpha\beta^T=[-1,2]\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}=-3+2=-1$，$\alpha^T\beta=\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}[3\quad 1]=\begin{bmatrix}-3 & -1\\ 6 & 2\end{bmatrix}$。另外有

$\alpha\beta^T=\beta\alpha^T=-1$。

由矩阵乘法的结合律可得$(\alpha^T\beta)^2=\alpha^T\beta\alpha^T\beta=\alpha^T(\beta\alpha^T)\beta=\alpha^T(-1)\beta=-\alpha^T\beta$，同理：$(\alpha^T\beta)^n=\alpha^T\beta\alpha^T\beta\cdots\cdots\alpha^T\beta\alpha^T\beta=\alpha^T(\beta\alpha^T)(\beta\alpha^T)\cdots(\beta\alpha^T)\beta=(-1)^{n-1}\alpha^T\beta$，所以$(\alpha^T\beta)^{99}=\alpha^T\beta=\begin{bmatrix}-3 & -1\\ 6 & 2\end{bmatrix}$。此外，需要注意的是这里$\alpha$和$\beta$都是行向量，不是列向量，因为题中$\alpha$和$\beta$括号右上方无“T”转置标志，故为行向量，不要按习惯误认为列向量。

2. $-\frac{1}{70}$

解析：将A按最后一列展开有$\det A=(-1)\times1\times(1\times3-1\times2)=-1$，$\det B=2\times5\times7=70$，所以$det(AB^{-1})=det(A)det(B^{-1})=\frac{det(A)}{det(B)}=-\frac{1}{70}$

3. -1

解析：令$A=[\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3]$，由于$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，$A$可逆。

$[\alpha_1+\alpha_2\quad k\alpha_2-\alpha_3\quad \alpha_3-\alpha_1]=[\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3]\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & k & 0\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}=[\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3]T$，A 可逆，

故$\alpha_1+\alpha_2,k\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$线性相关当且仅当$[\alpha_1+\alpha_2\quad k\alpha_2-\alpha_3\quad \alpha_3-\alpha_1]=$

$[\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3]Tx=ATx=0$有非零解，即$AT$不可逆。又因为$A$可逆，故$ATx=0$有非0解当且仅当矩阵$T$不可逆。故$\det T=k+1=0$，即$k=-1$.

4. $I+A^{-1}$（或者可以写$A^{-1}(A+I),(A+I)A^{-1}$）

解析：$G=I-(A+I)^{-1}$，由A和$A+I$的可逆性，得$(A+I)G=G(A+I)=A+I-I=A$，故$G=A(A+I)^{-1}=(A+I)^{-1}$，故$G^{-1}=(A+I)A^{-1}=A^{-1}(A+I)=I+A^{-1}$.

5. $\frac{1}{6}$

解析：$\overrightarrow{AB}=(-1,1,3),\overrightarrow{AC}=(2,3,-4),\overrightarrow{AD}=(1,1,-2)$，则以 AB,AC,AD 为邻边的三棱锥的体积应为$\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}\right)\right|=\left|\frac{1}{6}\times\begin{vmatrix}-1&1&3\\2&3&-4\\1&1&-2\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{6}$

6. : $\begin{bmatrix}2\\-1\\-1\\1\end{bmatrix}$（只要是该向量的任意非 0 倍数即可）

解析：因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$线性无关，故$Ax=0$的基础解系里仅有 1 个向量。

$\alpha_3=2\alpha_1-\alpha_2+\alpha_4$，即$\begin{bmatrix}\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3&\alpha_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\-1\\-1\\1\end{bmatrix}=0$。故该方程组的基础解系就是$\begin{bmatrix}2\\-1\\-1\\1\end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix}1&&\\&2&\\&&-3\end{bmatrix}$（$1,2,-3$的顺序可换）

解析：因为$I-A,2I-A,3I+A$不可逆，故$I-A,2I-A,3I+A$三个矩阵都有 0 特征值。所以可得A有特征值$1,2,-3$，因此A相似于对角阵$\begin{bmatrix}1&&\\&2&\\&&-3\end{bmatrix}$，这里对$1,2,-3$的顺序没有要求。

8. : $\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$

解析：由题可知，向量α_1和α_2线性无关，而$\alpha_3=2\alpha_2-\alpha_1$，故该向量组的秩为$2$，从而其生成的空间的基仅有 2 个向量。取$\alpha_1,\alpha_2$为其中一个基，则将其正交化有

$\beta_1=\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$，$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$，最后再单位化，得到一组标准正交基

$\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$

9. $x^2+y^2-2z^2-2z-1=0$

解析：设直线上的点$\left(x_0,y_0,z_0\right)$，则满足$x_0-1=y_0=z_0=t$，再设曲面上的一点为$\left(x,y,z\right)$。由于是绕Z轴的旋转，则当两点处于同一纬圆时，有$z=z_0=t$，以及$x^2+y^2=x_0^2+y_0^2$即$x^2+y^2=(1+t)^2+t^2=(1+z)^2+z^2$，即旋转曲面的方程为$x^2+y^2-2z^2-2z-1=0$.

10. $(n+1)^r$

解析：因为$A^2=A$，所以$r(A)+r(A-I)=n$，A可对角化，因为$r(A)=r$，所以可得$A\sim\begin{bmatrix}I_r & O\\ O & O\end{bmatrix}$。此外由$A$的幂等性还有$A^n=A$，其中$n$为正整数。

则$\det(I+A+A^2+\cdots+A^n)=\det(I+nA)=\det\begin{bmatrix}(n+1)I_r & O\\ O & I_{n-r}\end{bmatrix}=(n+1)^r$

二（8 分）

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1+x & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1+x\\ 1-x & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1-x & 1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 2+x & 1\\ 0 & 0 & 0 & x\\ -x & 0 & -x & 0\\ 0 & -x & -x & 0\end{vmatrix}$$

$=-x\begin{vmatrix}1 & 1 & 2+x\\ -x & 0 & -x\\ 0 & -x & -x\end{vmatrix}=x^4$ ………………………………………………………………8 分

三（8 分）

$[\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4\ \alpha_5]\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 1 & -3 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & 5\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 8\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ ………………2 分

一个极大无关组为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ ………………………………………………………………………4 分

$\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2,\alpha_5=5\alpha_1-8\alpha_2-2\alpha_4$ ……………………………………………………8 分

四（8 分）

$x(A-2I)=B$ ………………………………………………………………………………………3 分

$(A-2I)^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ ……………………………………………………………………5 分

故$X=B(A-2I)^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\ 3 & 1 & -4\end{pmatrix}$ ………………………………………………………8 分

五（8 分）

联立三平面方程，得方程组$\begin{cases} x+y+2x=1 \\ x+\lambda y+z=2 \\ \lambda x+y+z=1 \end{cases}$

$\bar{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 2 \\ \lambda & 1 & 1 & 1+\lambda \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2\lambda & 2 \end{pmatrix}$……………………………………3 分

1、当$\lambda\neq 0$且$\lambda\neq 1$时，$r(A)=r(\bar{A})=3$，方程组有唯一解，从而三平面交于一点。4 分

2、当$\lambda=0$时，$r(A)\neq r(\bar{A})$，方程组无解，从而三平面无交点。………………5 分

3、当$\lambda=1$时，$r(A)=r(\bar{A})=2$，三平面交于一条直线。……………………6 分

此时 $\bar{A}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，方程组(1)的通解为$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$（参数方程），

或$\frac{x-3}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z+1}{0}$（对称式方程），或$\begin{cases} x+y+2z=1 \\ x+y+z=2 \end{cases}$h 或$\begin{cases} x+y=3 \\ z=1 \end{cases}$………………8 分

六（8 分）

（1） 由基$\{x^2,x,1\}$到基$\{x^2,x^2+x,x^2+x+1\}$的过渡矩阵为:

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ 2\text{ 分}$$

所以 T 在基$\{x^2,x^2+x,x^2+x+1\}$下的矩阵为

$D=C^{-1}AC=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ -3 & -4 & -6 \\ 2 & 3 & 8 \end{pmatrix}$…… …4 分

（2）由$3x^2-2x+1$在基$\{x^2,x,1\}$下的坐标为$x=\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$……………………………5 分

得$T(3x^2-2x+1)$在基$\{x^2,x,1\}$下的坐标为$y=Ax=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$…7 分

故$T(3x^2-2x+1)=2x^2+9$……………………… ……………………… ………8 分

七（10 分）

（1）$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda+1 & 0 & 0 \\ a & \lambda-2 & -a-3 \\ a+3 & 0 & \lambda-a-2 \end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-a-2)$… … … …2 分

1、若$\lambda=2$是二重根，则 a+2=2,a=0,此时$A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

而$2I-A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$\lambda=2$的几何重数是 1，不等于代数重数，

故 A 不可对角化。……………………………………………………………………………5 分

2、若$\lambda=-1$是二重根，则-2-a=2,a=-3，此时$A=\begin{pmatrix}-1&0&0\\3&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$

而$-I-A=\begin{pmatrix}0&0&0\\-3&-3&0\\3&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，所以$\lambda=2$的几何重数是也是 2，故 A 可对角化。……………………………………………………………………………………8 分

（2）解$(-I-A)x=0$,得$\lambda=-1$的两个线性无关的特征向量$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

解$(2I-A)x=0$,得$\lambda=2$的两特征向量$\xi_3=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

令$P=\begin{pmatrix}-1&0&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，则$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$……………………………………10 分

八（10 分）

（1）利用配方法，得：$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-2x_2)^2-(x_2-2x_3)^2+(4+k)x_3^2$……2 分
令$y_1=x_1-2x_2,y_2=x_2-2x_3,y_3=x_3$,得标准型$f=y_1^2-y_2^2+(4+k)y_3^2$

所用的可逆变换为$x=\begin{pmatrix}1&2&4\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}y$……………………………………………………5 分

（2）对二次型$g(z_1,z_2,z_3)=z_1z_3$,令$Z_1=y_1-y_2,z_2=y_3,z_3=y_1+y_2$，得标准型$g=y_1^2-y_2^2$，所用可逆变换为$\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$… ………… ……… ………… 8 分

由于二次型$g(z_1,z_2,z_3)=z_1z_3$的正负惯性指数均为 1，故当 k=-4 时,二次型 f 和 g 有相同的规范型，从而存在可逆线性变换将 f 化为 g。……… ………… ………… ……10 分

九（10 分）

（1）设 r(a)=r，则存在可逆矩阵 P,Q，使得 PAQ=$\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}$

即$A=P^{-1}\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}Q^{-1}=P^{-1}\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}PP^{-1}Q^{-1}$…………………………………………3 分

令$F=P^{-1}\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}P$，$U=P^{-1}Q^{-1}$，则 A=FU，其中$F^2=P^{-1}\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}PP^{-1}\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}P$
$=F$，U 可逆

（2）由于 A 为正交矩阵，得$AA^T=I$；

由于 A 为正定矩阵，得$A^T=A$，故$A^2=I$,即$(A-I)(A+I)=0$………………2 分

因为 A 正定，所以 A 的特征值均大于 0，于是 A+I 的特征值均大于 1，所以 A+I 可逆。

……………………………………………………………………………………………………4 分
等式$(A-I)(A+I)=0$左右两端同乘$(A+I)^{-1}$，得 A-I=0，即 A=I…………………5 分
（2）的另一种证法：
因为 A 正定，所以 A 为实对称矩阵，其全部特征值为正的实数……………1 分
设ξ为 A 的特征值，$\xi \in R^n$为对应的特征向量，则$\xi \neq 0, A\xi = \lambda\xi$,则$\xi^T A^T = \lambda\xi^T$，
从而$\xi^T A^T A\xi = \lambda^2 \xi^T \xi$.
又因为 A 为正交矩阵，所以$AA^T = I$,故$(\lambda^2-1)\xi^T\xi = 0$.而$\xi^T\xi > 0$,所以$\lambda^2 - 1 = 0, \lambda = 1$,即 A 的所有特征值均为 1……………………………………………3 分
又存在正交矩阵 Q，使得$Q^T AQ = \Lambda = I$,所以$A = QIQ^T = I$……………………5 分

2018 年线性代数期末答案

一、单选题

1. D

解析：$\begin{bmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & a_{13}+x \\ a_{21}+x & a_{22}+x & a_{23}+x \\ a_{31}+x & a_{32}+x & a_{33}+x \end{bmatrix} \xrightarrow[-r_1+r_2]{-r_1+r_3} \begin{bmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & a_{13}+x \\ a_{21}-a_{11} & a_{22}-a_{12} & a_{23}-a_{13} \\ a_{31}-a_{11} & a_{32}-a_{12} & a_{33}-a_{13} \end{bmatrix}$

2. C

解析：C 需经过单位阵的两次初等变换

3. A

解析：对 B 有 $\alpha_1+\alpha_2=(\alpha_2+\alpha_3)-(\alpha_3-\alpha_1)$　　对 C 有 $\alpha_1-\alpha_2=-(\alpha_2-\alpha_3)-(\alpha_3-\alpha_1)$

对 D 有 $\alpha_3-\alpha_1=(2\alpha_2+\alpha_3)-(2\alpha_2+\alpha_1)$

4. B

解析：对 A，令 $\vec{\alpha}_1=(0,0,-1)$，$\vec{\alpha}_2=(1,1,0)$ 则 $\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2=(1,1,-1)$ 不在 W_1 内

对 C，令 $\vec{\alpha}_1=(3,2,5)$，则 $k\vec{\alpha}_1=(3k,2k,5k)$ 不在 W_3 内

对 D，令 $\vec{\alpha}_1=(3,3,0)$，$\vec{\alpha}_2=(1,2,-3)$ 则 $k\vec{\alpha}_1=(4,5,-3)$ 不在 W_4 内

5. A

解析：$r(A)=r(B)=2\Rightarrow$ 等价　　$\lambda_A=\pm2$，$\lambda_B=\pm2$　　故相似

二、填空题

1. $\dfrac{(-1)^n 4^n}{5^{n-1}}$

解析：$\left|(A^*)^{-1}-A\right|=\left|\dfrac{A}{|A|}-A\right|=\left|-\dfrac{4}{5}A\right|=\dfrac{(-1)^n 4^n}{5^n}|A|=\dfrac{(-1)^n 4^n}{5^{n-1}}$

2. 2

解析：$\because 2$ 是特征值 $\therefore r(2E-A)\le 2$　若 $r(2E-A)=1\Rightarrow Ax=2x$ 有两个特征向量，则可以相似对角化

3. $k(-4,6,-1)^T+(3,-4,1)^T$，k 为任意值

解析：$Ay_1=b$　$Ay_2=b$　　$\therefore A(y_2-y_1)=0$　　$\therefore y_2-y_1=(-4,6,-1)^T$ 为其基础解系之一

又 $\because r(A)=2$　　$\therefore$ 通解有 $3-2=1$ 个　　选择其特解为 $y_2=(-1,2,0)^T$　　$\therefore x=(-1,2,0)^T+k(-4,6,-1)^T$

4. $x^2+y^2+z^2=1$

5. $\dfrac{1}{\sqrt{2018}}$，$\sqrt{\dfrac{3}{2018}}\left(\dfrac{x}{1009}-1\right)$

解析：设 $\vec{\alpha}_1=k_1$，$\vec{\alpha}_2=k_2(x+b)$

$<\alpha_1,\alpha_2>=\int_0^{2018}k_1^2dx=1\Rightarrow k_1=\dfrac{1}{\sqrt{2018}}$　　$<\alpha_1,\alpha_2>=\int_0^{2018}k_1k_2(x+b)dx=1\Rightarrow b=-1009$

$<\alpha_1,\alpha_2>=\int_0^{2018}k_2^2(x-1009)^2dx=1\Rightarrow k_2=\sqrt{\dfrac{3}{2\times1009^3}}$　　$\therefore \alpha_1=\dfrac{1}{\sqrt{2018}}$，$\alpha_2=\sqrt{\dfrac{3}{2018}}\left(\dfrac{x}{1009}-1\right)$

6. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

三、解答题

1. 当 $n\ne1$ 时 $D_n=(a_1+\cdots+a_n+x)\begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2+x & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+x \end{vmatrix}=(a_1+\cdots+a_n+x)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix}$

$=(a_1+\cdots+a_n+x)x^{n-1}$ 当 $n=1$ 时 $D_1=a_1+x$

2. $\lambda=1$，方程组有无穷多解，先讨论 $\lambda\neq 1$

$$\bar{A}=\left[\begin{array}{ccc:c}\lambda & \lambda+3 & 1 & -2\\ 1 & \lambda & 1 & \lambda\\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1 & \lambda & 1 & \lambda\\ \lambda-1 & 3 & 0 & -(\lambda+2)\\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1 & \lambda(\lambda-1)\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1 & \lambda+1 & 0 & 0\\ 0 & (2-\lambda)(2+\lambda) & 0 & -(\lambda+2)\\ 0 & -1 & 1 & \lambda\end{array}\right]$$

当 $\lambda\neq 1,\pm 2$ 时，方程组有唯一解；当 $\lambda=2$ 时，方程组无解；当 $\lambda=1$ 或 $\lambda=-2$ 时，方程组有无穷多解.
当 $\lambda=-2$ 时，令 $x_1=1,x_2=1,x_3=-1$ 是非齐次方程组的特解，此时系数矩阵的秩为 2，$[1,1,1]^T$ 是其基础解系，故通解为 $[x_1,x_2,x_3]^T=[1,1,-1]^T+c[1,1,1]^T$，$c$ 是任意数.

当 $\lambda=1$ 时，其增广矩阵作初等行变换 $\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 4 & 1 & -2\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}0 & 1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}0 & 1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 1 & 2\end{array}\right]$

通解 $[x_1,x_2,x_3]^T=[2,-1,0]^T+c[-1,0,1]^T$，$c$ 是任意数.

3. （1）此直线的对称式方程为 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{3}$

（2）将此直线方程写成一般式 $\begin{cases}2x=y\\ 3x=z\end{cases}$，由平面束方程知过直线 L 的平面方程具有形式 $\lambda(2x-y)+\mu(3x-z)=0$，于是其法向量为 $(2\lambda+3\mu,-\lambda,-\mu)$ 又平面 $x+2y+3z=4$ 的法向量为 $(1,2,3)$，而 $(2\lambda+3\mu,-\lambda,-\mu)\cdot(1,2,3)=0$，故结论成立.

（3）曲面方程 $x^2+y^2=\dfrac{5}{9}z^2$

4.（1）二次型对应的矩阵为 $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & t\\ 0 & t & 1\end{bmatrix}$ 其所有的顺序主子式分别是 $\Delta_1=1>0$，$\Delta_2=1>0$，$\Delta_3=1-t^2$

由顺序主子式大于零得 $t\in(-1,1)$，于是有当 $t\in(-1,1)$ 时，该二次型是正定的.

（2）当 $t=1$ 时，二次型对应的矩阵为 $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$ 求得其特征值为 $\lambda_1=0$，$\lambda_2=1$，$\lambda_3=2$

它们对应的特征向量分别为 $\alpha_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(0,1,-1)^T$，$\alpha_2=(1,0,0)^T$，$\alpha_3=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(0,1,1)^T$

令 $Q=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{bmatrix}$，则经正交变换 $\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{bmatrix}^T=Q\begin{bmatrix}y_1 & y_2 & y_3\end{bmatrix}^T$ 可得标准形为 $y_2^2+2y_3^2$

（3）此时 $f=1$ 表示圆柱面

5. 由题意有 $A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1$，$A\alpha_2=\lambda_2\alpha_2$

反证法：假设向量 $\alpha_1+\alpha_2$ 是 A 的特征向量，则存在 λ 使得 $A(\alpha_1+\alpha_2)=\lambda(\alpha_1+\alpha_2)$，于是可得：$A(\alpha_1+\alpha_2)=\lambda(\alpha_1+\alpha_2)\Rightarrow A\alpha_1+A\alpha_2=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2$，即 $(\lambda-\lambda_1)\alpha_1+(\lambda-\lambda_2)\alpha_2=\theta$

由属于不同特征值的特征向量线性无关可得 $\lambda_1=\lambda=\lambda_2$，这与 $\lambda_1\neq\lambda_2$ 矛盾.

6. $\begin{bmatrix}A & B\\ B & A\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}A & B\\ A+B & A+B\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}A-B & B\\ O & A+B\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}A-B & \\ & A+B\end{bmatrix}$ $\therefore r(M)=r(A+B)+r(A-B)$

7. 由伴随矩阵的定义可知：$\sum\limits_{i=1}^{n}A_{ii}=tr(A^*)$ $\because |A|=0$ $\therefore r(A)\leq n-1$ $r(A^*)=\begin{cases}n & r(A)=n\\ 1 & r(A)=n-1\\ 0 & r(A)<n-1\end{cases}$

若 $r(A)<n-1$ 则 $r(A^*)=0$，A^* 的特征值全为 0

若 $r(A)=n-1$ 则 $r(A^*)=1$，A^* 最多由 1 个非零特征值，设其为 λ

$\therefore tr(A^*)=\lambda+0+\cdots+0=\lambda$ $\therefore \sum_{i=1}^{n}A_{ii}=\lambda$

2017 年线性代数期末答案

一、单选题

1. C

解析：$P_2A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+a_{11} & a_{32}+a_{12} & a_{33}+a_{13} \end{bmatrix}$ $P_1P_2A=\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31}+a_{11} & a_{32}+a_{12} & a_{33}+a_{13} \end{bmatrix}$

2. C

解析：A 进行有限次初等变换后秩不变，并且与 A 本身等价

对 A，若用非零数 k 乘 A 的第 i 行，$|A|\neq|B|$

对 B，若对 A 进行初等列变换，$Ax=0$ 与 $Bx=0$ 显然不同解

对 D，$A=PBQ$ 说明 A 到 B 经过两次初等变换

3. D

解析：若方程个数多于未知量的个数，$Ax=b$ 可能无解

若 $Ax=0$ 有无穷多解，则 $x=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots$，$Ax=b$ 的解为 $x=x^*+k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots$，存在非零解

4. B

解析：$\because \lambda=2$ 时，$(2E-A)x=0$ 有两个线性无关的基础解系 故 $r(2E-A)=1\Rightarrow x=-2$

5. D

解析：$\beta_1=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$，$\beta_2=k_3\alpha_1+k_4\alpha_2$，$\beta_3=k_5\alpha_1+k_6\alpha_2$

设存在 m_1,m_2,m_3 使 $m_1\beta_1+m_2\beta_2+m_3\beta_3=0$（$m_1,m_2,m_3$ 不全为 0）

则 $\begin{cases} m_1k_1+m_2k_3+m_3k_5=0 \\ m_1k_2+m_2k_4+m_3k_6=0 \end{cases}\Rightarrow (m_1,m_2,m_3)$ 有无穷多解，故 β_1,β_2,β_3 线性相关

二、填空题

1. 1

解析：$\lambda_1=2,\lambda_2=\frac{1}{2},\lambda_3=-1$ $|A|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=-1$ $|A^*|=|A|^{n-1}=|A|^2=1$

2. $\frac{1}{3}(2I-A)$

解析：$A^2-2A=-3I\Rightarrow A(A-2)=-3I\Rightarrow A\left[\frac{1}{3}(2I-A)\right]=I\Rightarrow A$ 可逆且 $A^{-1}=\frac{1}{3}(2I-A)$

3. -3

解析：$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & t & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & t-8 & 11 \\ 0 & -7 & 7 \end{bmatrix}\Rightarrow r(A)\geq 2$

若 $r(A)=3$，则 $A\beta_i=0$（$i=1,2,3$）只有零解，则 $B=0\Rightarrow r(A)=2\Rightarrow t=-3$

4. 椭圆

解析：z 方向不受限制，且 $(x-y)^2+y^2=1$ 为椭圆方程，故为椭圆柱面

5. $2\sqrt{7}$

解析：$|2a-3b|=\sqrt{4a^2+9b^2-12|a||b|\cos\frac{\pi}{3}}=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$

三、解答题

1. 设 l 的方向向量为 (m,n,p)，则由 $l\parallel\pi_1$，可得 $3m-4n-p=0$

由 $A(-3,0,1)\in l$，$B(0,1,-1)\in l_1$ 且 l 与 l_1 相交，可得 $\begin{vmatrix} m & n & p \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}=0$ 即 $-m+n-p=0$

解方程组 $\begin{cases} 3m-4n-p=0 \\ -m+n-p=0 \end{cases}$ 可得 $m=-5p$，$n=-4p$，令 $p=1$，则 $s=(-5,-4,1)$

直线 l：$\dfrac{x+3}{-5}=\dfrac{y}{-4}=\dfrac{z-1}{1}$

2. 令 $k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(3\alpha_2+2\alpha_3)+k_3(\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3)=0$ 即 $(k_1+k_2)\alpha_1+(k_1+3k_2-2k_3)\alpha_2+(2k_2+k_3)\alpha_3=0$

由于 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，故 $\begin{cases} k_1+k_3=0 \\ k_1+3k_2-2k_3=0 \\ 2k_2+k_3=0 \end{cases}$ 因 $D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}=9\neq 0$

故齐次方程组只有零解，即 $k_1=k_2=k_3$ 故 $\alpha_1+\alpha_2,3\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3$ 线性无关

3. 对方程组的增广矩阵做初等行变换

$$\bar{A}=(A,b)=\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 & a \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & a-\lambda \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda^2 & a-\lambda+1 \end{bmatrix}$$

因 $Ax=b$ 存在两个不同的解，所以 $r(A)=r(\bar{A})<3$ 故 $\lambda=-1,a=-2$

当 $\lambda=-1,a=-2$ 时，$\bar{A}\to\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 故可得 $\begin{cases} x_1=\dfrac{3}{2}+x_3 \\ x_2=-\dfrac{1}{2}+x_3 \end{cases}$

令 $x_3=0$ 可得 $x_1=\dfrac{3}{2},x_2=-\dfrac{1}{2}$，故 $\eta=\dfrac{1}{2}(3,-1,0)^T$ 为该方程的一个特解

令 $x_3=1$ 可得 $x_1=1,x_2=0$，故 $\xi=(1,0,1)^T$ 对应齐次方程组的一个基础解系

故该方程组的通解为 $x=\eta+k\xi=\dfrac{1}{2}(3,-1,0)^T+k(1,0,1)^T$

4. 因 $A\alpha_i=i\alpha_i$（$i=1,2,3$）即 $A\alpha_1=\alpha_1$，$A\alpha_2=2\alpha_2$，$A\alpha_3=3\alpha_3$

故 $A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3)=(\alpha_1,2\alpha_2,3\alpha_3)\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{bmatrix}$

$$\therefore A=P\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{bmatrix}P^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

5. （1）二次型的矩阵为 $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & a \\ 0 & a & 3 \end{bmatrix}$ 因二次型正定 故 $D_1=2>0$

$D_2=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}=6>0$ $D_3=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & a \\ 0 & a & 3 \end{vmatrix}=2(9-a^2)>0$ $-3<a<3$ 又 $a>0$ 故 $0<a<3$

（2）记$\Lambda=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & 5\end{bmatrix}$，则$|A|=2(9-a^2)=10$　故$a=\pm 2$　又$a>0$ 故$a=2$　此时 $A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 2\\ 0 & 2 & 3\end{bmatrix}$

$I-A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & -2\\ 0 & -2 & -2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$　$\zeta_1=(0,1,-1)^T$为$\lambda_1=1$对应的特征向量

$2I-A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -2\\ 0 & -2 & -1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$　$\zeta_2=(1,0,0)^T$为$\lambda_2=2$对应的特征向量

$5I-A=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & -2 & -2\\ 0 & -2 & 2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$　$\zeta_3=(0,1,1)^T$为$\lambda_3=5$对应的特征向量

将ζ_1,ζ_2,ζ_3单位化，可得$\eta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1)^T$，$\eta_2=(1,0,0)^T$，$\eta_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)^T$

故所用的正交变换矩阵为$C=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$

6. 题一：（1）$\begin{bmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \beta_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\ 3 & 4 & 2\\ 1 & 1 & 3\end{bmatrix}$　因为$\det\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\ 3 & 4 & 2\\ 1 & 1 & 3\end{bmatrix}=-2\neq 0$

所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$与$\beta_1,\beta_2,\beta_3$等价

（2）基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$到基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$的过渡矩阵$C=\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\ 3 & 4 & 2\\ 1 & 1 & 3\end{bmatrix}$

故T在基β_1,β_2,β_3下的矩阵$B=C^{-1}AC=\begin{bmatrix}-6 & 5 & -2\\ 4 & -3 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}15 & -11 & 5\\ 20 & -15 & 8\\ 8 & -7 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\ 3 & 4 & 2\\ 1 & 1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$

题二：（1）$[x^2+x,x^2-x,x+1]=\begin{bmatrix}1 & x & x^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$　$\therefore$由基（I）到基（II）的过渡矩阵$A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$

（2）由f在基（I）下的坐标$x=(2,4,4)^T$，得f在基（II）下的坐标为$y=A^{-1}x=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 4\\ 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 1\\ 2\end{bmatrix}$

2016年线性代数期末答案

一、单选题

1. B

解析：$C=\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}, C^{-1}=\begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{bmatrix}$ $\therefore det(C)C^{-1}=\begin{bmatrix} \det(A)A^{-1}\det(B) & O \\ O & \det(A)\det(B)B^{-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} bA^{*} & O \\ O & aB^{*} \end{bmatrix}$

2. D

解析：$B=AP_1$ $\quad I=P_2B$ $\quad \therefore I=P_2AP_1$ $\quad A=P_2^{-1}P_1^{-1}=P_2P_1^{-1}$

3. D

解析：$Ax=0$ 的基础解析只有 1 个向量，故 A 的秩为 3

$\therefore A^{*}\neq 0 \quad r(A^{*})\geq 1 \qquad AA^{*}=|A|E=0 \qquad$ 故 $r(A)+r(A^{*})\leq 4 \quad r(A^{*})=1$

$\because \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}=0 \qquad \therefore \alpha_1-\alpha_3=0 \qquad \alpha_1$，$\alpha_3$线性相关　　故极大无关组为$\alpha_2$，$\alpha_3$，$\alpha_4$

4. C

解析：$A\alpha=\lambda\alpha \qquad (P^{-1}AP)^T=P^TA(P^{-1})^T=P^TA(P^T)^{-1}$

则 $(P^{-1}AP)^T(P^T\alpha)=P^TA\left[(P^T)^{-1}P^T\right]\alpha=P^TA\alpha=\lambda P^T\alpha$

5. A

解析：A 的特征值为-1,3　　　B 的特征值为-1,3　　　故 A,B 合同且相似

二、填空题

1. $(-1)^n5^{n-1}$

解析：$\det\left[A^{*}-(\frac{1}{10}A)^{-1}\right]=\det\left[5A^{-1}-10A^{-1}\right]=\det\left[-5A^{-1}\right]=(-5)^n\cdot\frac{1}{5}=(-1)^n5^{n-1}$

2. $\frac{I}{4}-\frac{A^3}{8}$

解析：$(A^2+2A+4I)(\frac{I}{4}-\frac{A}{8})=I-\frac{A^3}{8}=I$ 　　则 $(A^2+2A+4I)^{-1}=\frac{I}{4}-\frac{A^3}{8}$

3. $(1,0,-2)^T+k(1,2,-3)^T$

解析：$r(A)=2, Ax=0$ 的基础解系中含有解的个数为 1

$\therefore \eta_1+2\eta_2-(2\eta_2+\eta_3)=(1,2,-3)^T$ 为 $Ax=0$ 的一个通解，则 $Ax=b$ 的通解为 $(1,0,-2)^T+k(1,2,-3)^T$

4. $3y^2+4(z-x)^2=1$；$3y^2+4z^2=(1-x)^2$；$3(x+y)^2+4z^2=1$

5. 1；$x-\frac{1}{2}$；$x^2-x+\frac{1}{6}$

解析：$R[x_2]$有基$1,x,x^2$

$$\beta_1=\alpha_1=1 \qquad \beta_2=\alpha_2-\frac{\langle\alpha_2,\beta_1\rangle}{\langle\beta_1,\beta_1\rangle}\beta_1=x-\frac{\int_0^1 xdx}{\int_0^1 dx}\cdot 1=x-\frac{1}{2}$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{\langle\alpha_3,\beta_1\rangle}{\langle\beta_1,\beta_1\rangle}\beta_1-\frac{\langle\alpha_3,\beta_2\rangle}{\langle\beta_2,\beta_2\rangle}\beta_2=x^2-\frac{\int_0^1 x^2dx}{\int_0^1 dx}-\frac{\int_0^1 x^2(x-\frac{1}{2})dx}{\int_0^1 (x-\frac{1}{2})^2dx}(x-\frac{1}{2})=x^2-x+\frac{1}{6}$$

三、解答题

1. $D_n \overset{\substack{r_2-r_1\\ r_3-r_1\\ \vdots\\ r_n-r_1}}{=} \begin{vmatrix} 1+a & 2 & 3 & \cdots & n \\ -a & a & 0 & \cdots & 0 \\ -a & 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a & 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix} \overset{\substack{c_1+c_2\\ c_1+c_3\\ \vdots\\ c_1+c_n}}{=} \begin{vmatrix} a+\dfrac{n(n+1)}{2} & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix} = \left[a+\dfrac{n(n+1)}{2}\right]a^{n-1}$

2. $\det(A)=-2$ $\qquad A^*=\det(A)A^{-1}=-2A^{-1}\cdot(\frac{1}{2}A^*)^*=(-A^{-1})^*\det(-A^{-1})\cdot(-A^{-1})^{-1}=-\frac{1}{2}A$

$\therefore -2A^{-1}X(-\frac{1}{2}A)=A^{-1}XA=2A^{-1}X+I$ $\qquad$ 则 $XA=2X+A$ $\qquad X(A-2I)=A$

$$X=A(A-2Z)^{-1}=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

3. $A=\begin{pmatrix} 2\lambda-2 & -1 & \lambda-2 \\ 3 & 1-\lambda & 3 \\ \lambda-2 & \lambda-1 & \lambda-2 \end{pmatrix}$ $\qquad \det(A)=\lambda(1+\lambda)(1-\lambda)$

（1）当 $\lambda\neq 0$ 且 $\lambda\neq\pm 1$ 时，方程有唯一解.

（2）当 $\lambda=0$ 和 $\lambda=1$ 时，$r(A)=2, r(\overline{A})=3$ 方程组无解.

（3）当 $\lambda=-1$ 时，$r(A)=(\overline{A})=2<3$,方程组无穷多解. $\qquad$ 基础解系为 $\xi=(-\frac{3}{5},\frac{3}{5},1)^T$

特解 $\eta=(1,-1,0)^T$ [redacted] (c 为任意常数)

4.证明：设 $k_1\alpha_1+k_2\alpha$[redacted]$+k_3\alpha_3=0$ ① [redacted] $Ak_3\alpha_3=0$

$\because A\alpha_1=\alpha_1\ A\alpha_2=2\alpha_2$ [redacted] $=\alpha_2+2\alpha_3$ [redacted] $\alpha_2+2\alpha_3)=0$

$\therefore k_1\alpha_1+2k_2\alpha_2+k_3(\alpha_2$ [redacted] $k_1\alpha_1=0$

$\because \alpha_1,\alpha_2$ 线性无关 [redacted] 代入 ① 得 $k_2\alpha_2=0$

$\because \alpha_2\neq 0\ \ \therefore k_2=0$ $\qquad$ 故向量组线性无关 [redacted]

5.两个平面的法向量分别为 $\overrightarrow{n_1}=(1,2,3)$ [redacted]

直线的方向向量 $\overrightarrow{\alpha}$ 与 $\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}$ 垂直，则 $\overrightarrow{\alpha}=$ [redacted]

$\therefore$ 直线方程为 $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{-1}$

（2）$d=\dfrac{\left|\overrightarrow{OP}\times\overrightarrow{\alpha}\right|}{\left\|\overrightarrow{\alpha}\right\|}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\left\|\begin{matrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{matrix}\right\|=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{64}=\sqrt{14}$

（3）过 P 点 (x,y,z) 作平行于 oxy 面的平面，该平面与已知直线的交点为 $(z-2,8-2z,z)$

P,Q 到 z 轴的距离相等，则 $\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(z-2)^2+(8-2z)^2}$ $\qquad \therefore$ 方程为 $x^2+y^2-5z^2+36z-68=0$

6.（1）二次型的矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&-1&t\\-1&5&2\\t&2&1\end{bmatrix}$　　$\det(A)=-t(5t+4)>0$，则 $-\frac{4}{5}<t<0$

当 $-\frac{4}{5}<t<0$ 时，二次型正定

（2）$t=0$　　$A=\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&5&2\\0&2&1\end{bmatrix}$　　$\det(A-\lambda I)=-2\lambda(\lambda-1)(\lambda-6)$

$\therefore A$ 的特征值为 $0,1,6$　　对应的特征向量为 $P_1=(-1,-1,2)^T,P_2=(2,0,1)^T,P_3=(-1,5,2)^T$

$$\therefore\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{2}{\sqrt{5}}&-\frac{1}{\sqrt{30}}\\-\frac{1}{\sqrt{6}}&0&\frac{5}{\sqrt{30}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{5}}&\frac{2}{\sqrt{30}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}\qquad f=y_2^2+6y_3^2$$

（3）$t=0$ 时，$f=1$　　$f=1$ 表示椭圆柱面

7. 证明：若 $Ax=0$，则 $A^TAx=0$；若 $A^TAx=0$ 则 $x^TA^TAx=0$　$(Ax)^T(Ax)=0$

从而 $Ax=0$，则 $Ax=0$ 与 $A^TAx=0$ 同解，它们的基础解系所含的线性无关的解向量的个数相同

$n-r(A)=n-r(A^TA)$　　$r(A)=r(A^TA)$

2015 年线性代数期末答案

一、填空题

1. $\frac{2}{3}$

解析：$d=\frac{2}{\sqrt{2^2+2^2+1}}=\frac{2}{3}$

2. $\frac{27}{4}$

解析：$A^*=\det(A)A^{-1}$　　$|A^{-1}|=2$　　$\det(A)=\frac{1}{2}$　　$A^*=\frac{A^{-1}}{2}$

$3A^*=\frac{3A^{-1}}{2}$　　$|3A^*|=\left|\frac{3A^{-1}}{2}\right|=(\frac{3}{2})^3|A^{-1}|=\frac{27}{4}$

3. 3

解析：$r(A)=2$　　$n-r(A)=3$

4. 3

解析：$|D|=x^2(3+x)$　　$D-6x^2=0$　　则 $x^3-3x^2=0$ 且 $x\neq0$　　则 $x=3$

5. 2I

解析：$f(A)=A^3-A+2I$　　$\because(A+I)(A-I)(A)=0$　　则 $A^3-A=0$　　$\therefore f(A)=2I$

二、选择题

1. A

解析：$r(\overline{A})=3$　　$r(A)\neq r(\overline{A})$ 则无解

2. B

解析： $C^{-1}=BA^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&2&2\\0&1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$ $\therefore$第二行第三列为$\frac{2}{3}$

3. C

解析：直线方向向量$\vec{a}=(1,1,-2)$ 平面π法向量为$\vec{n}(1,-2,1)$

$\frac{\sin\theta\left|\vec{a}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=\frac{\left|1-2-2\right|}{\sqrt{6}}=\frac{1}{2}$ $\theta=\frac{\pi}{6}$

4. D

解析：原式A与B相似，则$\det(A)=\det(B)$ $a=2b-3$ A、B有相同的特征值，则$a=5,b=4$

5. B

解析：设λ为A的特征值，$\lambda^2-\lambda-6=0$，则$\lambda_1=3$，$\lambda_2=-2$

负惯性指数$q=1$，A只能有一个负特征值，故A的特征值为$3,3,-2$

则$x^TAx=6$经正交变换$\lambda=Qy$可化为标准型$3y_1^2+3y_2^2-2y_3^2=6$，即$\frac{y_1^2}{2}+\frac{y_2^2}{2}-\frac{y_3^2}{3}=1$

三、解答题

1.（1）$=AB=A+B+2E$，则$(A-E)(B-E)=3E$ $(B-E)^{-1}=\frac{1}{3}(A-E)^{-1}$

（2）$(A-E)^{-1}=\begin{bmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ $(B-E)^{-1}=\begin{bmatrix}0&-\frac{1}{3}&0\\\frac{1}{3}&0&0\\0&0&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$

$B-E=\begin{bmatrix}0&-3&0\\3&0&0\\0&0&3\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}1&-3&0\\3&1&0\\0&0&4\end{bmatrix}$

2.（1）$\left|\begin{pmatrix}\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3&\alpha_4\end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix}1&\lambda&0&0\\0&1&\lambda&0\\0&0&1&\lambda\\\lambda&0&0&1\end{vmatrix}=1-\lambda^4$，当$\lambda=\pm1$时$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关

（2）$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4;\beta]=\left[\begin{array}{cccc:c}1&\lambda&0&0&1\\0&1&\lambda&0&-1\\0&0&1&\lambda&0\\\lambda&0&0&1&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:c}1&\lambda&0&0&1\\0&1&\lambda&0&-1\\0&0&1&\lambda&0\\0&0&0&1-\lambda^4&-\lambda-\lambda^2\end{array}\right]$

当$\lambda=-1$时，向量β可以由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性表示，且表示不唯一，即$1-\lambda^4=0$而$-\lambda-\lambda^2\neq0$

3.（1）平面π_1的法向量$\vec{n}_1=(1,1,-1)$，平面π_2的法向量$\vec{n}_2=(1,2,1)$

设所求直线方向向量为$\vec{\alpha}$，则$\vec{\alpha}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=\begin{vmatrix}i&j&k\\1&1&-1\\1&2&1\end{vmatrix}=(3,-2,1)$

故过点 $P(1,2,1)$ 且与平面 π_1 和 π_2 的交线平行的直线的对称式方程为: $\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-1}{1}$

故所求平面方程为：$\pi=(x+y-z)+\lambda(x+2y+z)=0$，法向量 $\vec{n}=(1+\lambda,1+2\lambda,-1+\lambda)$

直线 L 的方向向量为：$(0,1,-1)$，$\vec{n}\perp\vec{a}$ 则 $\lambda=-2$　　所求平面方程为 $x+3y+3z=0$

4.（1）$\because AB=0$ 得 $r(A)+r(B)\le 3$　　$r(B)=2$ 则 $r(A)\le 1$

$\because tr(A)=1$　　$\therefore A\ne 0$　$r(A)\ge 1$　　$\therefore r(A)=1$

（2）记 $B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，由 $AB=(A\beta_1,A\beta_2,A\beta_3)=0$，则 $A\beta_1=0$　$A\beta_2=0$

因 β_1,β_2 线性无关，A 为对称矩阵，所以 $\lambda_1=\lambda_2=0$ 为 A 的二重特征值

$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ 为对应的特征向量，另一特征值为 $tr(A)$，即 λ_3=1

设 $\alpha_3=\left(x_1,x_2,x_3\right)^T$ 为对应于 λ_3 的特征向量 α_3 与 α_1,α_2 正交得 $\begin{cases}x_1+x_3=0\\x_2=0\end{cases}$　　$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$

5.（1）充分性：$r(A)=r(A|b)=2$ 则 $Ax=b$ 有无穷多解，且可以表示为 $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}l\\m\\n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}$

则 $\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$，三平面交于一直线

必要性：设三平面交于一直线，设为 $\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$，即 $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}l\\m\\n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}$

则方程 $Ax=b$ 有无穷多组解，$r(A)=r(A|b)\le 3$，基础解系由一个解向量组成，从而 $r(A)=r(A|b)=2$

（2）$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\1&a&2\end{bmatrix}$　　$(A|b)=\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\0&1&1&b\\1&a&2&2\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\0&1&1&b\\0&a-2&0&1-b\end{array}\right]$　$r(A|b)=2$　　$a=2,b=1$

6.（1）二次型矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&2&-1\\2&1&-1\\-1&-1&4\end{bmatrix}$

$|A-\lambda I|=\begin{bmatrix}1-\lambda&2&-1\\2&1-\lambda&-1\\-1&-1&4-\lambda\end{bmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-5)=0$ 得特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=-2,\lambda_3=5$

相应特征向量为 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$，$\beta_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix}$，$\beta_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$，$\beta_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$

$$\therefore Q=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$ 标准型为 $f(y_1,y_2,y_3)=-y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$

7.（1）设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$， $B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ 则 $B=AP$ $\beta_1=\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$

（2）设所求向量的坐标为 x，则 $Ax=APx$， $A(P-I)x=0$

$\because A$ 为可逆矩阵，故 $(P-E)x=0$ $P-I=\begin{bmatrix}0&1&2\\0&1&2\\-1&-1&-1\end{bmatrix}$

$\therefore x=k(1,-2,1)^T$ $\alpha=k(\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3)=k(1,-1,0)^T$

2014 年线性代数期末答案

一、单选题

1. A

解析：$\det(A)=20$ $|2A|=2^4|A|=16\times20=320$

2. C

解析：$\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}^{1896}=Z$ $\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}^{2015}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$

$$\therefore\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}^{1896}\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}^{2015}=\begin{bmatrix}c&b&a\\f&e&d\\i&h&g\end{bmatrix}$$

3. C

解析： $\delta=k_1\alpha+k_2\beta$ 当 $k_3=0$ 时， $\delta=k_1\alpha+k_2\beta+k_3\gamma$

4. B

解析：$\lambda=2$ 是二重特征根 $2I-A=\begin{bmatrix}1&1&-1\\-x&-2&-y\\3&3&-3\end{bmatrix}$

$r(2I-A)=1$ $\therefore -x=-2$ $-y=2$ $x=2$ $y=-2$

5. D

二、填空题

1. $A^*=|A|A^{-1}$ $(A^*)^{-1}=(|A|A^{-1})^{-1}=\frac{A}{|A|}$； $\frac{A}{|A|}$

解析：$r(\overline{A})=3$ $r(A)\neq r(\overline{A})$ 则无解

2. 3

解析： $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ $\alpha_4=-\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3$

3. $k_1(-1,-2,-3,0,1)^T+k_2(0,0,-1,1,0)^T$（不唯一）

解析：$\begin{cases} x_1+x_5=0 \\ x_2+2x_5=0 \\ x_3+x_4+3x_5=0 \end{cases}$　　$\begin{array}{l} r(A)=3 \\ n-r(A)=2 \end{array}$　　故含有两个解向量

4. $\dfrac{x^2+z^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$

解析：令 $x=\pm\sqrt{x^2+z^2}$ 代入即可

5. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$；2

解析：$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=x_1^2+5x_2^2+9x_3^2+6x_1x_2+10x_1x_3+14x_1x_3$

故二次型 $f=x^TBx$ 的矩阵为 $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$　　$r(A)=2$

三、解答题

1. （1）$A^2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$　　$A^3=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$　　$A^4=0$

（[redacted]可知当 $\alpha=(0,0,0,1)^T$ 时 $A^3\alpha\neq0$

（3）[redacted] 则 $\alpha, A\alpha, A^2\alpha, A^3\alpha, A^4\alpha$ 必然线性相关　　设 $k_1\alpha+k_2A\alpha+k_3A^2\alpha+k_4A^3\alpha=0$

则 $k_1A^3\alpha+$[redacted]$\alpha+k_3A^5\alpha+k_4A^6\alpha=0$，则 $k_1A^3=0$　　$\because A^3\alpha\neq0$　　故 $k_1=0$

① 左端依次[redacted]$A^2\cdot A$ 左乘得 $k_2=0$ $k_3=0$，故 $k_4=0$

则 $k_1=k_2$[redacted]$=k_4=0$，故 α，$A\alpha$，$A^2\alpha$，$A^3\alpha$ 线性无关.

[redacted] $\begin{bmatrix} & 2 & -2 \\ & 5-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 5-\lambda \end{bmatrix}$　　$\overline{A}=\left[\begin{array}{ccc|c} 2-\lambda & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 5-\lambda & -4 & 2 \\ -2 & -4 & 5-\lambda & -\lambda-1 \end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & -4 & 5-\lambda & -\lambda-1 \\ 0 & 5-\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda \\ 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda-10) & (\lambda-1)(\lambda-4) \end{array}\right]$

当 $\lambda\neq1$ 且 $\lambda\neq10$ 时，方程组有唯一解；当 $\lambda=10$ 时，方程组无解

当 $\lambda=1$ 时，方程组有无穷多解，结构解为：$x=(1,0,0)^T+k_1(-2,1,0)^T+k_2(2,0,1)^T$　　k_1,k_2 为任意常数

3.（1）直线 L 的方向向量 $\vec{a}=(1,-1,0)\times(3,-1,1)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}=(-1,1,2)$

在 L 上取一点 $(3,0,-8)$，故 L 的对称式方程为 $\dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+8}{2}$

（2）过点 M 且垂直于 L 的平面方程为 $-(x-1)-(y-0)+2(z+1)=0$，即 $x+y-2z=3$

$\begin{cases} \dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+8}{2} \\ x+y-2z=3 \end{cases}$，得 L 与该平面交点 $P=(\frac{1}{3},-\frac{8}{3},-\frac{8}{3})$

$\therefore$ M 到直线 L 的距离为 $d=MP=\sqrt{(1-\frac{1}{3})^2+(\frac{8}{3})^2-1+(-1+\frac{8}{3})^2}=\dfrac{\sqrt{93}}{3}$

4.证明：

（1）$W = span[\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4 \quad \alpha_5]$ 对 R^4 中线性运算封闭，故 W 是 R^4 的子空间

（2）$A=\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 13 & 5 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ $\therefore W$ 的一个基为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_5$ $\quad \dim W = 5$

（3）$\alpha_3 = 3\alpha_1 + \alpha_2 \quad \alpha_4 = 7\alpha_1 + 3\alpha_2$ $\quad \therefore \alpha_3$, α_4 在该基下的坐标分别为 $(3,1,0)^T \quad (7,3,0)^T$

5.（1）f 的矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1-a & 1+a & 0 \\ 1+a & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad \because r(A)=2 \quad |A|=0 \quad a=0$

（2）$\lambda - IA = \begin{bmatrix} \lambda-1+a & -1-a & 0 \\ -1-a & \lambda-1+a & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda-1 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{bmatrix}$ $\quad |\lambda I - A| = 0$

$\therefore (\lambda-2)^2\lambda = 0 \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 0$ 特征值 2 对应的特征向量为 $a_1 = (1,1,0)^T, a_2 = (0,0,1)^T$

属于 U 的特征向量 $a_3 = (1,-1,0)^T \quad a_1, a_2$ 已正交标准化

$P_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)^T \quad P_2 = (0,0,1)^T \quad P_3 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)^T$

$P = (P_1, P_2, P_3)^T \quad f$ 的标准形为 $f = 2y_1^2 + 2y_2^2$

6.（$A^T = (\alpha\beta^T + \beta\alpha^T)^T = \alpha^T\beta + \alpha\beta^T = A$ $\quad \because A$ 实矩阵，故 A 可对角化

$\alpha\alpha^T = 1 \quad \beta^T\beta = 1 \quad \alpha^T\beta = 0 \quad \beta^T\alpha = 0 \quad A\alpha = \alpha\beta^T\alpha + \beta\alpha^T\alpha = \beta$ 故 $A\beta = \alpha$

$\therefore A(\alpha+\beta) = \alpha+\beta \quad A(\alpha-\beta) = (\beta-\alpha) \quad \alpha, \beta$ 正交，故 α, β 线性无关

$\alpha+\beta \neq 0 \quad \alpha-\beta \neq 0$ 故 A 有特征值 $1, -1$ $\quad r(A) \le r(\alpha\beta^T) + r(\beta\alpha^T) = 2$

所以 A 还有特征值 0，A 可对角化，且其相似的对角阵 $D=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

2013 年线性代数期末答案

一、单选题

1. A
2. D

解析：$\alpha_3 = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 \quad k_1 + 2k_2 = -1 \quad 2k_1 = k \quad k_2 = 0 \quad k_1 = -1 \quad k = -2$

3. C

解析：$r(A) < n \quad Ar = 0$ 有无穷多解，必有非零解

4. A

二、解答题

1. $I - A^3 = I \quad (I-A)(I+A+A^2) = I \quad \therefore I-A$ 可逆，$(I-A)^{-1} = I + A + A^2$

2. $|A|=3 \quad A^* = 3A^{-1} \quad \because ABA^* = 2BA^* + 3A^{-1}A$

$\therefore 3AB = 6B + 3I \quad B = (A-2I)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3.证明：

$\because \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \beta$ 线性无关，故存在一组不全为零的实数 $k_1, k_2, \cdots, k_m, k$ 使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m + k\beta = 0$

若 $k=0$，则 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$ $\because \alpha_1,\alpha_2,\cdots$，$\alpha_m$ 线性无关，故 $k_1=k_2=\cdots k_m=0$，矛盾

故 $k\neq 0$ $\beta=-\frac{k_1}{k}\alpha_1+(-\frac{k_2}{k})\alpha_2+\cdots+(-\frac{k_m}{k})\alpha_m$，即 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots$，α_m 线性表示且唯一

4. 证明：

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix} \qquad AA^T=\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=I$$

则 A 为正交矩阵，故 α_1, α_2, α_3 为 R^3 的一组标准正交基

$\alpha=(1,2,0)^T$ 在此组基下的坐标为 $\left(\langle\alpha,\alpha_1\rangle,\langle\alpha,\alpha_2\rangle,\langle\alpha,\alpha_3\rangle\right)^T=(2,0,-1)^T$

5. 在 xoy 平面上的投影的曲线方程为 $\begin{cases}x^2+y^2=2y\\ z=0\end{cases}$，消去 x 得 $\begin{cases}z=\sqrt{x^2+y^2}\\ x=0\end{cases}$ $(0\le y\le 2)$

则在 yoz 面上的投影的曲线方程为 $\begin{cases}z=\sqrt{4-2y}\\ x=0\end{cases}$ $(0\le y\le 2)$

消去 y 得 $\begin{cases}x^2+\frac{z^4}{4}-z^2=0\\ y=0\end{cases}$ $(|x|\le 1, 0\le |z|\le 2)$

则在 xoz 面上的投影的曲线方程为 $\begin{cases}x^2+\frac{z^4}{4}-z^2=0\\ y=0\end{cases}$ $(|x|\le 1, 0\le |z|\le 2)$

6.（1）$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & -1\\ -1 & 2 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & -1 & -1 & -1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 为该向量组的一个极大无关组 $\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2$

（2）$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta)=\left[\begin{array}{cccc:c}1 & -1 & 0 & -1 & -2\\ -1 & 2 & 1 & 3 & 6\\ 0 & 1 & 1 & 2 & a\\ 0 & -1 & -1 & -1 & 5\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:c}1 & 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-4\end{array}\right]$

当 a=4 时，β 可由该极大线性无关组表示 $\beta=-\alpha_1-2\alpha_2+3\alpha_4$

7. L_1 上一点 $P_1(1,2,0)$ 方向向量 $\overrightarrow{a_1}=(1,-1,1)\times(3,-1,-1)=(2,4,2)$

L_2 上一点 $P_2(3,3,-1)$ 方向向量 $\overrightarrow{a_2}=(2,1,-1)$ $\overrightarrow{P_1P_2}=(2,1,-1)$ $\overrightarrow{P_1P_2}=\begin{bmatrix}P_1 & P_2 & a_1 & a_2\end{bmatrix}=0$

$\because a_1 \nparallel a_2$ 故两条直线相交

平面方程的法向量 $\vec{n}=\overrightarrow{a_1}\times\overrightarrow{a_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 4 & 2\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix}=(-6,6,-6)$，可由直线 L_1,L_2 所确定的平面方程为 $x-y+z=\lambda$

P_2 在平面上，故 $\lambda=-1$ $\therefore$ 平面方程为 $x-y+z+1=0$

8. $A=\begin{bmatrix}3&-2&-4\\-2&6&-a\\-4&-a&3\end{bmatrix}$相似于对角矩阵$D=\begin{bmatrix}7&&\\&7&\\&&-2\end{bmatrix}$

$|7I-A|=0$或$|-2I-A|=0$，解得$a=2$

特征值 7 对应的特征向量为$\alpha_1=(1,0,-1)^T$ $\alpha_2=(1,-4,1)^T$

特征值-2 对应的特征向量为$\alpha_3=(2,1,2)^T$，单位化后$\beta_1=(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}})^T$，$\beta_2=(\frac{1}{3\sqrt{2}},-\frac{4}{3\sqrt{2}},\frac{1}{3\sqrt{2}})^T$

$\beta_3=(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3})^T$　　　故$\beta=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$

（2）$A=PDP^{-1}=P\begin{bmatrix}7&&\\&0&\\&&0\end{bmatrix}P^{-1}+P\begin{bmatrix}0&&\\&7&\\&&0\end{bmatrix}P^{-1}+P\begin{bmatrix}0&&\\&0&\\&&-2\end{bmatrix}P^{-1}=A_1+A_2+A_3$

$r(A_1)=r(A_2)=r(A_3)=1$

9.（1）$\because A$可逆　　　$\therefore r(B)=r(\alpha\alpha^T)=1$

（2）$BA\alpha=A\alpha\alpha^TA\alpha=\left(\alpha^TA\alpha\right)A\alpha$　　　$\therefore A\alpha$是 B 对应特征值$\alpha^TA\alpha$的特征向量

$r(B)=1$　　　$\therefore B$有$n-1$重特征值 0　　　则B的特征值为$\alpha^TA\alpha$

$B+2I$的特征值为$\alpha^TA\alpha+2,2$　　　$\therefore|B+2I|=2^{n-1}\left(\alpha^TA\alpha+2\right)$

（3）当$\alpha^TA\alpha\neq0$时B的特征值的几何重数等于代数重数，可对角化

当$\alpha^TA\alpha=0$时，B有n重特征值 0，代数重数为$n-1$，不可对角化

10.（1）A正定$\Leftrightarrow\forall x\in R^n,x\neq0,x^TAx>0$

A正定$\Leftrightarrow A$的所有特征值都大于 0

A正定$\Leftrightarrow A$的各阶顺序主子式都大于 0

（2）例如$A=\begin{bmatrix}2&-1\\-1&3\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}$都是正定阵　　$AB=\begin{bmatrix}2&-2\\-1&6\end{bmatrix}$不对称　　　故$AB$不是正定阵

（3）A,B正定　　$\therefore$存在可逆矩阵M,N使得$A=M^TM$，$B=N^TN$

$$AB=M^TMN^TN=N^{-1}\left(NM^TMN^T\right)N=N^{-1}\left(MN^T\right)^T\left(MN^T\right)N$$

$\therefore AB$与矩阵$\left(MN^T\right)^T\left(MN^T\right)$相似　　　$\left(MN^T\right)^T\left(MN^T\right)$是正定矩阵　　　$\therefore AB$正定

2012 年线性代数期末答案

一、选择题

1. C

解析：　C为n阶可逆矩阵，故$r\left(C\right)=n,B=AC$，C满秩，故$r(A)=r(B)$

2. A

3. C

解析：　$\overrightarrow{AB}=\left(6,x,2\right),\overrightarrow{AC}=\left(-9,6,3\right),\overrightarrow{AD}=\left(-3,6,3\right)$　　　$\begin{vmatrix}6&x&2\\-9&6&3\\-3&6&3\end{vmatrix}=0$，则$x=4$

4. A

解析：　$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，若 B 线性相关，则$k_1=-k_3,k_1=-k_2,k_2=-k_3$，则$k_1=k_2=k_3=0$，线性无关

同理 C、D 向量组亦线性无关

5.D

二、解答题

1. $2I-A=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ -2 & -2 & 2\\ 3 & 3 & 2-a\end{bmatrix}\because (2I-A)x=0$ 的基础解系含 2 个解向量

故 $r(2I-A)=1\qquad \therefore a=5$

2. A^* 的特征值为-4，-4，4 故 $\frac{1}{2}A^*+5I$ 的特征值为 3，3，7 故 $\left|\frac{1}{2}A^*+5I\right|=63$

3. $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}, A=P\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}P^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & -1\end{bmatrix}$

$P^{-1}A^5P=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}, A^5=A=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & -1\end{bmatrix}$， $A^2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

$\therefore f(A)=2A^5+2A^2-A=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

4. $\because AB+9I=A^2+3B, \therefore (A-3I)B=A^2-9I=(A-3I)(A+3I)$

$\det(A-3I)=-200\neq 0\qquad \therefore A-3I$ 可逆 $\quad B=A+3I=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}, |B|=-2$

5. 证明：直线 L_1 的方向向量 $\overrightarrow{a_1}=(1,0,1)\times(0,1,0)=(-1,0,1)$

直线 L_2 的方向向量 $\overrightarrow{a_2}=(1,2,3)\times(1,0,-1)=(-2,4,-2)$

L_1 上一点 $P_1(0,4,-3)$， L_2 上一点 $P_2(0,-1,2)$. $\overrightarrow{P_1P_2}=(0,-5,5),\left[\overrightarrow{P_1P_2}\quad \overrightarrow{a_1}\quad \overrightarrow{a_2}\right]=0$ 且 $\overrightarrow{a_1}\overrightarrow{a_2}$ 不平行

$\therefore L_1, L_2$ 相交，设它们所在平面的法向量为 $\vec{n}$， $\vec{n}=\overrightarrow{a_1}\times\overrightarrow{a_2}=(-2,-2,-2)$

P_1 在平面上，故平面方程为 $x+y+z-1=0$

6. $[A\,|\,b]=\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 0 & a_1\\ 0 & 1 & -1 & a_2\\ -1 & 0 & 1 & a_3\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 0 & a_1\\ 0 & 1 & -1 & a_2\\ 0 & 0 & 0 & a_1+a_2+a_3\end{array}\right]$ $r(A)=2$ 当方程有解时， $r(A)=r(\bar{A})=2$

故方程有解的条件为 $a_1+a_2+a_3=0$，此时 $\begin{cases}x_1-x_2=a_1\\ x_2-x_3=a_2\end{cases}\qquad \therefore\begin{cases}x_1=a_1+a_2+c\\ x_2=a_2+c\\ x_3=c\end{cases}\qquad c$ 为常数

7.（1）二次型的矩阵为 $\begin{bmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & 4 & -4\\ 2 & -4 & 4\end{bmatrix}$

（2） $\det(\lambda I-A)=0, \lambda I-A=\begin{bmatrix}\lambda-1 & 2 & -2\\ 2 & \lambda-4 & 4\\ -2 & 4 & \lambda-4\end{bmatrix}$

$\therefore A$ 的特征值为 $0,0,9$.特征值 $\lambda=0$ 对应的特征向量为 $\alpha_1=(2,1,0)^{\mathrm{T}}, \alpha_2=(-2,4,5)^{\mathrm{T}}$

特征值 $\lambda=9$ 对应的特征向量为 $\alpha_3=(1,-2,2)^{\mathrm{T}}$，单位化得 $\beta_1=\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}},0\right)^{\mathrm{T}}, \beta_2=\left(\frac{-2}{3\sqrt{5}},\frac{4}{3\sqrt{5}},\frac{5}{3\sqrt{5}}\right)^{\mathrm{T}}$

$\beta_3=\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)^{\mathrm{T}}$，令正交矩阵 $P=\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3}\\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}$，标准形为 $y=9y_3^2$　　正交变换为 $x=Py$

8. $A\times A+B\times B=A\times B+B\times A+I$，则 $A\times(A-B)+B\times(B-A)=I\Rightarrow(A-B)\times(A-B)=I$

$A-B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},|A-B|=-1\neq 0$，故 $A-B$ 可逆　　　$x=\left[(A-B)^{-1}\right]^2=\begin{bmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

9.（1）证明：$\forall b_1,b_2\in V,Ax=b_1,Ay=b_2$，则 $b_1+b_2=A(x+y)\in V$ 且 $\forall k\in R$ 则 $kb_1=A(kx)\in V$

故 $kb_1=A(kx)\in V$ 是 R^4 得子空间

（2）V 是由 A 的列向量生成，V 的基与维数分别是 A 的列向量组的极大无关组与秩

$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 1 & -1\\ 2 & 1 & -1 & 2\\ 3 & -2 & -1 & 1\\ 2 & -5 & 1 & -2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -2 & 1 & -1\\ 0 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -8 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$　　　$r(A)=3$

$\therefore V$ 的基为 $(1,2,3,2)^{\mathrm{T}}\,(-2,1,-2,-5)^{\mathrm{T}}\,(1,-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 的维数为 3

10.（1）α_1,α_2 分别是 A 的特征值 $-1,1$ 对应的特征向量　　　$\therefore\alpha_1,\alpha_2$ 线性无关

若 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，则 α_3 可由 α_1,α_2 线性表示　　　$\therefore\alpha_3=m\alpha_1+n\alpha_2,A\alpha_3=mA\alpha_1+nA\alpha_2=-m\alpha_1+n\alpha_2$

$\because\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3\ \therefore -m\alpha_1+n\alpha_2=\alpha_2+m\alpha_1+n\alpha_2$　　　$\therefore 2m\alpha_1+\alpha_2=0$

α_1,α_2 线性相关，矛盾　　　故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关

（2）$AP=\left[A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3\right]=\left[-\alpha_1,\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3\right]=\left[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right]\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

$AP=P\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$　　　$\therefore P^{-1}AP=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

2011 年线性代数期末答案

一、填空题

1. $k\neq 0$ 且 $k\neq 3$

解析：　$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，$\begin{vmatrix}1+k & 1 & 1\\ 1 & 1+k & 1\\ 1 & 1 & 1+k\end{vmatrix}\neq 0$，$-k^2-3k\neq 0,k\neq 0$ 且 $k\neq 3$

2. -5

解析：

$\langle\alpha+\beta,\alpha-\beta\rangle=\langle\alpha,\alpha-\beta\rangle+\beta\langle\alpha-\beta\rangle=\langle\alpha,\alpha\rangle-\langle\alpha,\beta\rangle+\langle\beta,\alpha\rangle-\langle\beta,\beta\rangle=\langle\alpha,\alpha\rangle-\langle\beta,\beta\rangle=4-9=-5$

3. $z_1^2+z_2^2+z_3^2-z_4^2$

4. $x^2+y^2=z$

解析：　令 $x=\pm\sqrt{x^2+y^2}$ 代入即得

5. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

二、填空题

1. A

解析：　A不可逆$|A|=0, r(A)<n$

2. D

3. A

解析：　A为正交矩阵，则$|A|=\pm 1, |A|^2=1, A^{\mathrm{T}}A=2,$ 则 $A^{\mathrm{T}}=A^{-1}$

正交矩阵的列（行）向量组为标准正交向量组

4. C

解析：　B、A不是正交矩阵　　D的各阶顺序主子式不全都大于 0

5. B

解析：$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$　　$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$为极大线性无关组.

三、解答题

1．证明：

法一：$|A|<0$.则A的特征值λ_1, λ_2异号，故A的特征值互不相同，A不与对角矩阵相似.

法二：$\det(\lambda I-A)=0$,设$A=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}, \lambda I-A=\begin{bmatrix} \lambda-x_1 & -x_2 \\ -x_3 & \lambda-x_4 \end{bmatrix}$，则$|\lambda I-A|=\lambda^{-}\left(x_1+x_2\right)\cdot\lambda+|A|=0$，

$\Delta>0$，故A有两不同的特征值，A与对角矩阵相似.

2．证明：

设存在一组常数k_1, k_2使$k_1\alpha+k_2A\alpha=0$，则$k_1A\alpha+k_2A^2\alpha=0$

$\because A\alpha\neq 0 \therefore k_1=0$，则$k_2=0, \therefore A\alpha, \alpha$线性无关

3．$AA^*=|A|I.|A^*|=8$ 故$|A|=2, \because AXA^{-1}=XA^{-1}+3I, \therefore A^{-1}AXA^{-1}=A^{-1}AA^{-1}+3A^{-1}$

$\therefore XA^{-1}A=A^{-1}XA^{-1}A+3I$　　$\therefore X=A^{-1}X+3I$　　又$\because A^{-1}=\dfrac{A^*}{2}$　　$\therefore\left(I-\dfrac{A^*}{2}\right)X=3I$

$\therefore X=b\left(2I-A^*\right)^{-1}$　　$2I-A^*=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \end{bmatrix}$　　$|2I-A^*|\neq 0$

$\therefore\left(2I-A^*\right)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$　　$\therefore X=\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

4．（1）二次型的矩阵为$A=\begin{bmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & t \end{bmatrix}$　　$\because r(A)=2$　　$\therefore t=3$

（2）$A=\begin{bmatrix}5&-1&3\\-1&5&-3\\3&-3&3\end{bmatrix},\det(\lambda I-A)=0\Rightarrow\lambda_1=0,\lambda_2=4,\lambda_3=9$

特征值 $\lambda_1=0$ 对应的特征向量为 $(-1,1,1)^{\mathrm{T}}$　　特征值 $\lambda_2=4$ 对应的特征向量为 $(1,1,0)^{\mathrm{T}}$

特征值 $\lambda_3=9$ 对应的特征向量为 $(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$　　单位化得 $\beta_1=\left(-\frac{1}{\sqrt6},\frac{1}{\sqrt6},\frac{2}{\sqrt6}\right)^{\mathrm{T}},\beta_2=\left(\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2},0\right)^{\mathrm{T}}$

$\beta_1=\left(\frac{1}{\sqrt3},-\frac{1}{3},\frac{1}{\sqrt3}\right)^{\mathrm{T}}$，令 $[x_1,x_2,x_3]^{\mathrm{T}}=P[\beta_1,\beta_2,\beta_3]$，得 $f=4y_2^2+9y_3^2$

5. $A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5]=\begin{bmatrix}1&0&3&1&2\\-1&3&0&-2&1\\2&1&7&2&5\\4&2&14&0&10\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&3&0&2\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$

$\therefore\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 是极大线性无关组　　$\alpha_3=3\alpha_1+\alpha_2,\alpha_5=2\alpha_1+\alpha_2$

6. （1）平面 π_1 的法向量为 $\overrightarrow{n_1}=(1,1,2)$，平面 π_2 的法向量 $\overrightarrow{n_2}=(1,\lambda,1)$，平面 π_3 的法向量 $\overrightarrow{n_3}=(\lambda,1,1)$

设 $A=\begin{bmatrix}1&1&2\\1&\lambda&1\\\lambda&1&1\end{bmatrix}$，$\bar{A}=\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&2&1\\1&\lambda&1&2\\\lambda&1&1&1+\lambda\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&2&1\\0&\lambda-1&-1&1\\0&1-\lambda&1-2\lambda&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&2&1\\0&\lambda-1&-1&1\\0&0&\lambda&1\end{array}\right]$

当 $\lambda\neq0$ 且 $\lambda\neq1$ 时，方程有唯一解，三个平面交于一点 $\left(\frac{\lambda+1}{\lambda},\frac{1}{\lambda},-\frac{1}{\lambda}\right)$

当 $\lambda=0$ 时，方程无解，三个平面没有公共点.

当 $\lambda=1$ 时，方程有无穷多解，三个平面交于一条直线.

（2）当 $\lambda=1$ 时，$\begin{cases}x+y+2z=1\\-z=1\end{cases}$，$\therefore$ 直线方程为 $\begin{cases}x+y=3\\z=-1\end{cases}$

7. 证明：必要性：$B^{\mathrm{T}}AB$ 正定，则 $\forall x\neq0\in R^n$ 均有 $x^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}ABx=(Bx)^{\mathrm{T}}ABx>0$　　$\therefore Bx\neq0$

$\therefore$ 方程组 $Bx=0$ 仅有零解，$r(B)=n$.

充分性：$r(B)=n,\forall x\neq0\in R^n$ 有 $Bx\neq0$ 由 A 的正定性和 $x^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}ABx=(Bx)^{\mathrm{T}}A(Bx)>0$

从而 $B^{\mathrm{T}}AB$ 为正定矩阵.

2010 年线性代数期末答案

一、单选题

1. D

解析：A 线性无关　若 B 线性相关则 $(k_1+k_2+k_3)\alpha_1+(k_2+k_3)\alpha_2+k_3\alpha_3=0$　　$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关

$k_1=-k_2-k_3$　　$-k_2=k_3$　　$k_1=0$ 则 B 线性无关　　同理 C 线性无关

2. C

解析：$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n$ 线性无关　　则 $Ax=0$ 只有零解 $\Leftrightarrow r(A)=n$

3. A

解析：A 为 3 阶实对称矩阵，故 A 有 3 个特征值　　$x=Cy$ 变换后 $f=y_1^2+2y_2^2$，则 A 必有特征值 0

4. B

解析：$r(A)=2$　　含有 2 个基础解系　　η_1,η_2,η_3 为三个线性无关的解向量

$\therefore$ 通解 $x=k_1(\eta_2-\eta_1)+k_2(\eta_3-\eta_1)+\eta_1$

5. A

解析：L_1L_2 相交于一点 $\Leftrightarrow L_1L_2$ 共面且 $\vec{a}_1\nparallel\vec{a}_2$

二、填空题

1. $\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$

2. $-3y+2z=0$

3. $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=1 \\ z=0 \end{cases}$

解析：消去$\vec{a}_1$即可

4. $\dfrac{A}{4}$

解析：$A^2+A=4I \qquad A(A+I)=4I \qquad (A+I)^{-1}=\dfrac{A}{4}$

5. 0

三、解答题

1. （1）$A=\begin{bmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1+\lambda \end{bmatrix} \qquad \bar{A}=\left[\begin{array}{ccc:c} 1+\lambda & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1+\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda \end{array}\right] \qquad |A|=\lambda^2(\lambda+3)$

当$\lambda\neq 0$且$\lambda\neq 3$时有唯一解；当$\lambda=0$时$\bar{A}=\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ $r(A)\neq r(\bar{A})$方程组无解

当$\lambda=-3$时$\bar{A}=\left[\begin{array}{ccc:c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad r(A)=r(\bar{A})=2$方程组有无穷多个解

（2）当$\lambda=-3$时$\begin{cases} x_3-x_1=1 \\ x_2-x_3=2 \end{cases}$ 当$x=\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}+C_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\therefore$通解为$x=[-1,2,0]^T+C_1[1\quad 1\quad 1]^T$ （C_1为常数）

2. f的矩阵$A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \det(A-\lambda I)=0\Rightarrow\lambda_1=5,\lambda_2=2,\lambda_3=2$

特征值$\lambda_1=5$对应的特征向量$\vec{a}_1=[1\quad 1\quad 1]^T$

特征值$\lambda=2$对应的特征向量$\vec{a}_2=[1\quad 1\quad -2]^T$，$\vec{a}_3=[1\quad -1\quad 0]^T$

单位化得$\vec{\beta}_1=\left[\dfrac{1}{\sqrt{3}}\quad \dfrac{1}{\sqrt{3}}\quad \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right]^T$，$\vec{\beta}_2=\left[\dfrac{1}{\sqrt{6}}\quad \dfrac{1}{\sqrt{6}}\quad -\dfrac{2}{\sqrt{6}}\right]^T$，$\vec{\beta}_3=\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}}\quad -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\quad 0\right]^T$

令$P=[\beta_1\quad \beta_2\quad \beta_3]$ 正交变换$x=Py$

得出二次型f的标准型为$f=5y_1^2+2y_2^2+2y_3^2 \qquad f=y^TMy \qquad M=\begin{bmatrix} 5 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{bmatrix}$

3.（1） $A^*=\det(A)A^{-1}=6A^{-1}$ $\qquad (A^*)^{-1}=\frac{1}{6}A=\begin{bmatrix}\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6}\\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6}\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$

（2） $AX+6\left(A^*\right)^{-1}X=B\Rightarrow AX+AX=B\Rightarrow X=\frac{A^{-1}B}{2}$

$A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6}\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6}\\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$ $\qquad X=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ 0 & \frac{1}{4}\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

4. 证明： $B^T=\left(A^TA\right)^T=A^TA$ $\quad\therefore B$为对称矩阵 $\quad$ 对任意非零向量x， $x^TA^TAx=\left(Ax\right)^TAx>0$

$\because r(A)=n$ $\quad\therefore Ax=0$仅有零解 $\quad$ 又$\because x\neq 0$ $\quad\therefore Ax>0$

$\therefore$对于任意非零向量x， $x^TBx>0$ $\quad$ 即B为正定矩阵

5. 证明：$\because\det(A)=0$ $\quad\therefore r(A)\le n-1$ $\quad$ 若$r(A)\le n-2$则$A_{21}=0$与$A_{21}\neq 0$矛盾 $\quad\therefore r(A)=n-1$

$\therefore Ax=0$的基础解系有 1 个向量，由行向量的性质：$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{kj}=\begin{cases}\det(A) & i\neq k\\ 0 & i=k\end{cases}$

$\therefore (A_{21},A_{22}\cdots A_{2n})^T$为基础解系 $\quad\therefore Ax=0$的通解为$x=k\begin{bmatrix}A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n}\end{bmatrix}^T$

6. 设存在一组常数$k,k_1,k_2\cdots k_r$使得$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r+k\beta=0$

$\because\beta$是线性方程组$Ax=0$的实非零解向量 $\quad\therefore A\beta=0$ $\quad\therefore\alpha_i^T\beta=0\quad i=(1,2\cdots r)$

$\left(\alpha_i^T\beta\right)^T=\beta^T\alpha_i=0$ $\quad\therefore k_1\beta^T\alpha_1+k_2\beta^T\alpha_2+\cdots+k_r\beta^T\alpha+k\beta^T\beta=0$ $\quad$ 又$\because\beta^T\beta\neq 0$ $\quad\therefore k=0$

$\because\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_r$线性无关 $\quad$ 将$k=0$代入上式得$k_1\beta^T\alpha_1+k_2\beta^T\alpha_2+\cdots+k_r\beta^T\alpha_r=0$

$\therefore k_1=k_2=\cdots k_r=0$ $\quad\therefore\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_r,\beta$线性无关

200 9 年线性代数期末答案

一、单选题

1. B

解析：$B=PA$ $\qquad C=PAP^{-1}$

2. A

3. C

二、填空题

1. $\frac{3}{4}$

解析：$\frac{1}{3}A^2$的特征值为$\frac{4}{3}$，则$\left(\frac{1}{3}A^2\right)^{-1}$的特征值为$\frac{3}{4}$

2. $\begin{bmatrix}2 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0\end{bmatrix}$

解析： $f(x)=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=2x_1^2+x_1x_2$

3. $\begin{bmatrix}2 & 2 & 2 & 2\end{bmatrix}^T + C\begin{bmatrix}3 & 2 & 1 & 0\end{bmatrix}^T$

解析：$r(A)=3$则$Ax+b$的通解的基础解系中含有 1 个向量$x=\dfrac{n_2+n_3}{2}+C\left(\eta_2+\eta_3-\eta_2-\eta_1\right)$

三、解答题

1. l_1的方向向量$\vec{a}_1=(1,1,1)$　　l_2的方向向量$\vec{a}_2=(-1,1,1)$

l_1上一点$P_1=(1,1,5)$　　l_2上一点$P_2=(1,-1,-1)$　　$\overrightarrow{P_1P_2}=(0,-2,-6)$

$\left[\overrightarrow{P_1P_2},\vec{a}_1,\vec{a}_2\right]\neq 0$　　故l_1、l_2异面　　l_1l_2的距离$d=\dfrac{\left\|\left[\overrightarrow{P_1P_2},\vec{a}_1,\vec{a}_2\right]\right\|}{\left\|\vec{a}_1\times\vec{a}_2\right\|}=2\sqrt{2}$　　$\vec{a}_1\times\vec{a}_2=(0,-2,2)$

设直线为$\dfrac{x-x_0}{0}=\dfrac{y-y_0}{-2}=\dfrac{z-z_0}{2}$　　在l_1上取点$A(t_1,t_1,t_1+4)$　　l_2上取点$B(t_2,-t_2,-t_2)$

$\overrightarrow{AB}=\left(t_2-t_1,-t_2-t_1,-t_2-t_1-4\right)$　　$\therefore\dfrac{t_2-t_1}{0}=\dfrac{-t_2-t_1}{-2}=\dfrac{-t_2-t_1-4}{2}$　　则$t_1=-1$，$t_2=-1$　$P_1^{-1}P_2$

直线方程为$\therefore\dfrac{x+1}{0}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-3}{2}$

2. $A=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & \lambda\end{bmatrix}$　　$\bar{A}=\left[\begin{array}{ccc:c}\lambda & 1 & 1 & \lambda-3\\ 1 & \lambda & 1 & -2\\ 1 & 1 & \lambda & -2\end{array}\right]$　　$\therefore\bar{A}=\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & \lambda & -2\\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0\\ 0 & 0 & (\lambda+2)(1-\lambda) & 3(\lambda-1)\end{array}\right]$

$\therefore\lambda=1$时有无穷多解　　$\lambda=-2$无解　　$\lambda\neq1$且$\lambda\neq-2$有唯一解

$\therefore\lambda=1$时$\bar{A}=\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$　　取一个特解$\begin{bmatrix}-1 & -1 & 0\end{bmatrix}^T$　　$r(A)=2$基础解系中有两个向量

$\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\end{bmatrix}^T$，　$\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\end{bmatrix}^T$　$\therefore x=\begin{bmatrix}-1 & -1 & 0\end{bmatrix}^T+C_1\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\end{bmatrix}^T+C_2\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\end{bmatrix}^T$　C_1,C_2为任意常数

3. 二次型矩阵$A=\begin{bmatrix}1 & b & 1\\ b & a & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$　　特征值为$0,1,4$　　$\therefore|A|=0$　　$\therefore a=3\quad b=1$

$\therefore A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$　　特征值 0 对应的特征向量$\alpha_1=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\end{bmatrix}^T$

特征值 1 对应的特征向量$\alpha_2=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\end{bmatrix}^T$　　特征值 4 对应的特征向量$\alpha_3=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\end{bmatrix}^T$

单位化得$\beta_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}^T$　　$\beta_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}^T$　　$\beta_3=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}^T$

$\therefore$正交矩阵$P=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$

4. $\because AX+I=A^2+X$　　$\therefore(A-I)X=A^2-I$　　$\because A-I=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$　$|A-I|\neq0$

$A-I$ 为可逆矩阵 $\therefore X=A+I=\begin{bmatrix}2&0&1\\0&3&0\\1&0&2\end{bmatrix}$

5. $A=\begin{bmatrix}1&-1&2&3\\1&3&0&1\\0&1&-1&-1\\1&-4&-3&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ $\therefore r(A)=3$ $\because$ 线性空间由 A 生成

$\therefore$ 维数即为 A 的秩，基为 A 的极大无关组 $\therefore V$ 的秩为 3 基为 $\begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix}^T$ $\begin{bmatrix}0&1&0\end{bmatrix}^T$ $\begin{bmatrix}0&0&1\end{bmatrix}^T$

6. 证明：充分性：设 $C=\begin{bmatrix}\alpha_1&\cdots&\alpha_n\end{bmatrix}$ $A=C^TC$

取 $B=\varepsilon_1,\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n$（基本单位向量） $\because AX=B$ 有解 $\therefore \varepsilon_1,\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n$ 可由 A 的列向量组线性表示

A 的列向量可由 $\varepsilon_1,\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n$ 线性表示 $\therefore$A 与单位矩阵等价 $\therefore r(A)=n$ $\therefore Ax=0$ 只有零解

$\therefore C^TCx=0$ 只有零解，$Cx=0$ 只有零解 $\therefore \alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n$ 线性无关

必要性：$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n$ 线性无关 $\therefore Cx=0$ 只有零解 $\therefore Ax=0$ 只有零解 $\therefore r(A)=n$

$\therefore A$ 的列向量组 $\beta_1,\beta_2\cdots\beta_n,B$ 线性相关 $(n+1)$ 个 n 维向量线性相关

$\therefore B$ 可由 $\beta_1,\beta_2\cdots\beta_n$ 线性表示 $\therefore Ax=B$ 有解

本试题集答案由彭康学导团制作，如有错误，请在学习群里反馈给我们。试题集适合学习线性代数的机类、化工等专业使用，其它专业请选择性参考。如有打印店以此盈利，请勿购买。

彭康学导团 QQ 学习群彭小帮 2.0：397499749

搜索微信公众号“彭康书院学导团”或扫描右侧二维码关注我们，了解更多学业动态，掌握更新学习资料。