1　電位分布と電場

1.1　電位と電場の関係

　電場 $\vec{E}(\boldsymbol{E})$ 電位 $V(\boldsymbol{r})$ の時、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E} &= -\nabla V(\boldsymbol{r}) \\ &= \mathrm{grad} V(\boldsymbol{r})\end{aligned}$$

grad：勾配

$$\begin{aligned}\mathrm{grad} \equiv \nabla &\equiv (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}) \\ &= (\partial_x, \partial_y, \partial_z) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$:単位ベクトル

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{i}| = |\boldsymbol{j}| = |\boldsymbol{k}| = 1 \\ \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i} = 0 \\ \boldsymbol{i} = (1,0,0), \boldsymbol{j} = (0,1,0), \boldsymbol{k} = (0,0,1)\end{aligned}$$

$\boldsymbol{E} = (E_x, E_y, E_z)$ を x, y, z の成分表示すると、

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

V:スカラー　$\boldsymbol{E}$:ベクトル

1.2　電位分布を求めるための基礎方程式

　電荷が連続的に分布する球体 (空間電荷) を考える。

　この時、単位体積あたりの電荷量$\rho[\mathrm{C/m^3}]$を空間電荷密度という。

　半径 r の球体の全電荷量 Q は

$$Q = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

となる。

ガウスの法則

　正の電荷からは電気力線が湧き出し、負の電荷へは電気力線が吸い込まれる。電気力線の束を電束といい、1[C] の電荷からは 1 本の電束が出ているものと定義する。

　微小体積を貫く電束を考える。ここでは簡単にするために x 方向に貫く電束のみを考える。

x 方向の電場の変化量は

$$E_x \to E_x + \frac{\partial E_x}{\partial x}dx$$

これは微小体積での x 方向の電場の変化量の変化を表す。

$$(\text{電束の変化}) = \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial x}dxdydz$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial x}dx &: \text{電束密度} \\ dydz &: \text{貫く面積} \\ \varepsilon_0 &: \text{真空の誘電率}[\mathrm{C}^2/(\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2)] \end{aligned}$$

$$= \rho dxdydz(\text{全電荷})$$

y, z 方向も考えると、

$$\begin{aligned} &\varepsilon_0 \left[\varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial x}dxdydz + \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial y}dxdydz + \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial z}dxdydz\right] \\ =&\varepsilon_0 \left[\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right] dxdydz \\ =&\rho dxdydz \end{aligned}$$

よって、ガウスの法則

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\boldsymbol{E} =& \frac{\rho}{\varepsilon_0} (= \nabla \cdot \boldsymbol{E}) \\ \mathrm{div} =& (\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}) = \frac{\partial \boldsymbol{i}}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{k}}{\partial x} \\ \boldsymbol{E} =& -\mathrm{grad}V \end{aligned}$$

ガウスの定理微分形

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{divgrad}V = \Delta V =& \left(\frac{\partial \boldsymbol{i}}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{k}}{\partial x}\right) \cdot \left(\frac{\partial V \boldsymbol{i}}{\partial x} + \frac{\partial V \boldsymbol{j}}{\partial x} + \frac{\partial V \boldsymbol{k}}{\partial x}\right) \\ =& \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \\ =& -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{aligned}$$

これをポアソン方程式という。特に $\rho = 0$ のとき

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

である。これをラプラス方程式という。

これは 2 階微分方程式なので、V を求めるには初期条件を 2 つ与える必要がある。

$V = ax + b$ と表せるとき、

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0 \\ V(x=0) = 2 \\ V(x=4) = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 2 \\ 4a + b = 6 \end{cases} \Rightarrow a = 1, b = 2$$

$$\therefore V = x + 2$$

$$E = -\frac{\partial V}{\partial x} = -1$$

円筒座標系

r, ϕ, z による座標系

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \end{cases}$$

1.3 平行平面電極間の電位分布と電場

$V = 0$ の平面電極と、それに平行な $V = V_a$ の平面電極が距離 D[m] 離れたところにある。2 つの電極は yz 平面上にある。

x 成分のラプラス方程式 $(\rho = 0)$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0$$

$$\int \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial V}{\partial x} = c \quad (c : \text{定数})$$

$$\int \frac{\partial V}{\partial x} dx = \int c dx$$

$$\Leftrightarrow V = cx + c' \quad (c' : \text{定数})$$

$$V(x=0) = 0, V(x=D) = V_a$$

$$\begin{cases} c' = 0 \\ cD + c' = V_a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c' = 0 \\ c = \frac{V_a}{D} \end{cases}$$

$$\therefore V = \frac{V_a}{D}x$$

$$\text{電場} E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad (E_y = E_z = 0)$$
$$= -\frac{V_a}{D}$$

ここで、空間電荷密度 $\rho = -kx^{-1/2}$ とおく。x 軸方向のポアソン方程式は

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} =& \frac{k}{\varepsilon_0}x^{-1/2} \\
\int \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}dx =& \int \frac{k}{\varepsilon_0}x^{-1/2}dx \\
\frac{\partial V}{\partial x} =& \frac{k}{\varepsilon_0}\cdot 2x^{1/2} + c \ \ (c : \text{定数}) \\
\int \frac{\partial V}{\partial x}dx =& \frac{2k}{\varepsilon_0}\int x^{1/2}dx + \int c' \ \ (c' : \text{定数})
\end{aligned}$$

初期条件 (境界条件)

$$\begin{aligned}
V(x=0) =& 0 \Leftrightarrow c' = 0 \\
V(x=D) =& V_a \Leftrightarrow \frac{4k}{3\varepsilon_0}D^{3/2} + cD + c' = V_a \\
\therefore cD =& V_a - \frac{4k}{3\varepsilon_0}c^{1/2} \\
c =& \frac{V_a}{D} - \frac{4k}{3\varepsilon_0}c^{1/2}
\end{aligned}$$

2　静電場中の電子の運動

2.1　電場による電子の加速

空間中に電子がある。ここに静電場 $\boldsymbol{E} = (E_x.E_y, E_z)$ をかけると電子は電場の向きと反対向きにクーロン力 $\boldsymbol{F} = (F_x, F_y, F_z)$ を受ける。電子の電荷を $-e$[C], 質量を m[kg] とすると、運動方程式より、

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{F}(= -e\boldsymbol{E}) \ \ (a := \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}, \boldsymbol{v} := \frac{d\boldsymbol{r}}{dt})$$

成分表示すると、

$$\begin{cases} m\frac{d^2x}{dt^2} = -eE_x \\ m\frac{d^2y}{dt^2} = -eE_y \\ m\frac{d^2z}{dt^2} = -eE_z \end{cases}$$

電位を V として $\boldsymbol{E} = -\nabla V$ より、

$$\begin{cases} m\frac{d^2x}{dt^2} = e\frac{\partial V}{\partial x} \\ m\frac{d^2y}{dt^2} = e\frac{\partial V}{\partial y} \\ m\frac{d^2z}{dt^2} = e\frac{\partial V}{\partial z} \end{cases}$$

電子にも重力は働くが、クーロン力よりも十分小さいので無視する。

2.1.1　平行平面電極間の電子の運動

例によってさっきから使っているコンデンサの、$V = 0$ のところに電子を 1 個おく。電子の初速度は $v_0 = 0$ である。電子の運動方程式 $(\rho = 0)$ より、

$$
\begin{aligned}
m\frac{d^2x}{dt^2} =& e\frac{V_a}{D} \\
\Leftrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} =& \frac{eV_a}{D}
\end{aligned}
$$

これを積分して、

$$
\begin{aligned}
\int \frac{d^2x}{dt^2}dt =& \frac{eV_a}{D}\int dt \\
\frac{x}{t} =& \frac{eV_a}{mD}t + c \quad (c: \text{初速度(定数)})
\end{aligned}
$$

この時、$v_0 = 0$ より初速度 c は 0 である。

もう一度積分して、

$$
\begin{aligned}
\int frac{x}{t}dt =& \frac{eV_a}{mD}t\int tdt \\
x =& \frac{eV_a}{mD}\frac{t^2}{2} + c' \quad (c': \text{初期位置(定数)}) \\
t = 0 \rightarrow x =& 0 \\
\therefore c' =& 0 \\
\therefore x =& \frac{eV_a}{2mD}t^2 \mathrm{m}
\end{aligned}
$$

(別解)

$$
\begin{aligned}
v =& V_a + at \\
x =& V_0 t + \frac{1}{2}at^2 \\
V_0 =& 0, a = \frac{eV_a}{mD} \\
\Rightarrow& \begin{cases} v = \frac{eV_a}{mD}t \\ x = \frac{eV_a}{2mD}t^2 \end{cases}
\end{aligned}
$$

これは等加速度運動である。

また、電子が-極から + 極に到達するまでにかかる時間 τ は

$$
\begin{aligned}
D = \frac{eV_a}{2mD}\tau^2 \Leftrightarrow& \tau^2 = \frac{2mD^2}{eV_a} \\
\therefore \tau =& \sqrt{\frac{2m}{eV_a}}D
\end{aligned}
$$

τ:電子走行時間 $(\rho = 0, V_0 = 0)$