1　光電子放出

1.1　光電子放出の一般の性質

◎光電子放出真空中の金属にエネルギー ε の光を当てると、光電子と呼ばれる電子が真空中に飛び出す。

光は電磁気で記述される・・・電磁波 (波の性質を持つ)

波の振幅が大きいほど、波のエネルギーは大きい。

結局電子が金属中から真空中に飛び出すためには金属にエネルギーを与えて、そのエネルギーを障壁のポテンシャルエネルギー以上にしないといけない。

与えないといけないエネルギーは仕事関数 ϕ なので、電子を真空中に放出したいなら、

$$\varepsilon \geq \phi$$

となるくらいの強い光を与えないといけない。

光電子放出に関するいろんな実験

(1) 電子が出てくる条件

光は振幅と周波数 (振動数)ν で特徴づけられる。

(a) $\nu \geq \nu_0$ のとき (ν_0 は限界周波数)

光電子放出が起きる。

(b) $\nu < \nu_0$ のとき

光電子放出が起きない。しかも振幅 (光のエネルギー) とは無関係 (速い波じゃないとダメ)

(2) 出てくる電子の数

$\nu \geq \nu_0$ で光のエネルギーを大きくすると、電流は大きくなる。(出てくる電子の数が増える)

アインシュタインの光量子仮説

光は粒子としての性質を持ち、1 個の光の粒子光子が周波数 ν を持つとき、エネルギー ε は $\varepsilon = h\nu$ となる。(h はプランク定数)

光は波だけでなく、粒子の性質をも併せ持つ (光の二重性)

光の周波数 ν と仕事関数 ϕ との関係

$$h\nu \geq \phi$$
$$\Leftrightarrow \nu \geq \frac{\phi}{h} = \nu_0$$

この時の波長は $v = f\lambda$ より、

$$\lambda_0 = \frac{c}{\nu_0} = \frac{ch}{\phi}$$

c : 光速

λ_0 : 限界波長

フェルミ準位にある電子が光電子放出するとき、その速度は最高速度 v_m となる。(他の金属中の電子よりも速い)

エネルギー保存則より、

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}mv_m^2 &= E_F + \varepsilon - (E_F + \phi) \\
&= \varepsilon - \phi \\
&= h\nu - h\nu_0 \\
&= h(\nu - \nu_0) \\
\therefore v_m &= \sqrt{\frac{2h}{m}(\nu - \nu_0)}
\end{aligned}$$

他の光の周波数に依存し、振幅には依存しない現象

例) 日焼け

- 電気ストーブ (赤外線) →日焼けしない (周波数が小さい)
- 日光 (紫外線) →日焼けする (周波数が大きい)

2　電位分布と電場

2.1　電位と電場の関係

電場 $\vec{E}(\boldsymbol{E})$ 電位 $V(\boldsymbol{r})$ の時、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E} &= -\nabla V(\boldsymbol{r}) \\ &= \mathrm{grad}V(\boldsymbol{r})\end{aligned}$$

grad：勾配

$$\begin{aligned}\mathrm{grad} \equiv \nabla &\equiv (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}) \\ &= (\partial_x, \partial_y, \partial_z) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$:単位ベクトル

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{i}| = |\boldsymbol{j}| = |\boldsymbol{k}| = 1 \\ \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i} = 0 \\ \boldsymbol{i} = (1,0,0), \boldsymbol{j} = (0,1,0), \boldsymbol{k} = (0,0,1)\end{aligned}$$

$\boldsymbol{E} = (E_x, E_y, E_z)$ を x, y, z の成分表示すると、

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

V:スカラー　$\boldsymbol{E}$:ベクトル

2.2　電位分布を求めるための基礎方程式

電荷が連続的に分布する球体 (空間電荷) を考える。

この時、単位体積あたりの電荷量ρ[C/m^3] を空間電荷密度という。

半径 r の球体の全電荷量 Q は

$$Q = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

となる。

ガウスの法則

正の電荷からは電気力線が湧き出し、負の電荷へは電気力線が吸い込まれる。電気力線の束を電束といい、1[C] の電荷からは 1 本の電束が出ているものと定義する。

微小体積を貫く電束を考える。ここでは簡単にするために x 方向に貫く電束のみを考える。

x 方向の電場の変化量は

$$E_x \to E_x + \frac{\partial E_x}{\partial x} dx$$

これは微小体積での x 方向の電場の変化量の変化を表す。

$$(\text{電束の変化}) = \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial x} dxdydz$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial x} dx &: \text{電束密度} \\ dydz &: \text{貫く面積} \\ \varepsilon_0 &: \text{真空の誘電率}[\mathrm{C}^2/(\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2)] \end{aligned}$$

$$= \rho dxdydz(\text{全電荷})$$

y, z 方向も考えると、

$$\begin{aligned} &\varepsilon_0 \left[\varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial x} dxdydz + \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial y} dxdydz + \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial z} dxdydz \right] \\ =&\varepsilon_0 \left[\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right] dxdydz \\ =&\rho dxdydz \end{aligned}$$

よって、ガウスの法則

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\boldsymbol{E} =& \frac{\rho}{\varepsilon_0} (= \nabla \cdot \boldsymbol{E}) \\ \mathrm{div} =& \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\right) = \frac{\partial \boldsymbol{i}}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{k}}{\partial x} \\ \boldsymbol{E} =& -\mathrm{grad}V \end{aligned}$$

ガウスの定理微分形

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{divgrad}V = \Delta V = &\left(\frac{\partial \boldsymbol{i}}{\partial x}+\frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial x}+\frac{\partial \boldsymbol{k}}{\partial x}\right)\cdot\left(\frac{\partial V\boldsymbol{i}}{\partial x}+\frac{\partial V\boldsymbol{j}}{\partial x}+\frac{\partial V\boldsymbol{k}}{\partial x}\right)\\
=&\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\\
=&-\frac{\rho}{\varepsilon_0}
\end{aligned}
$$

これをポアソン方程式という。特に $\rho = 0$ のとき

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$$

である。これをラプラス方程式という。

これは 2 階微分方程式なので、V を求めるには初期条件を 2 つ与える必要がある。

$V = ax + b$ と表せるとき、

$$
\begin{aligned}
&\begin{cases} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=0 \\ V(x=0)=2 \\ V(x=4)=6 \end{cases}\\
&\begin{cases} b=2 \\ 4a+b=6 \end{cases} \Rightarrow a=1, b=2\\
&\therefore V = x+2\\
&E=-\frac{\partial V}{\partial x}=-1
\end{aligned}
$$

円筒座標系

r, ϕ, z による座標系

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \end{cases}$$

2.3 平行平面電極間の電位分布と電場

$V = 0$ の平面電極と、それに平行な $V = V_a$ の平面電極が距離 D[m] 離れたところにある。2 つの電極は yz 平面上にある。

x 成分のラプラス方程式 ($\rho = 0$)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= 0 \\
\int \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dx &= 0 \\
\Leftrightarrow \frac{\partial V}{\partial x} &= c \ \ (c : \text{定数}) \\
\int \frac{\partial V}{\partial x} dx &= \int c dx \\
\Leftrightarrow V &= cx + c' \ \ (c' : \text{定数}) \\
V(x=0) = 0, &V(x=D) = V_a \\
\begin{cases} c' = 0 \\ cD + c' = V_a \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} c' = 0 \\ c = \frac{V_a}{D} \end{cases} \\
\therefore V &= \frac{V_a}{D} x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{電場} E_x &= -\frac{\partial V}{\partial x} \ \ (E_y = E_z = 0) \\
&= -\frac{V_a}{D}
\end{aligned}$$

ここで、空間電荷密度 $\rho = -kx^{-1/2}$ とおく。x 軸方向のポアソン方程式は

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} =& \frac{k}{\varepsilon_0} x^{-1/2} \\
\int \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dx =& \int \frac{k}{\varepsilon_0} x^{-1/2} dx \\
\frac{\partial V}{\partial x} =& \frac{k}{\varepsilon_0} \cdot 2x^{1/2} + c \ \ (c : \text{定数}) \\
\int \frac{\partial V}{\partial x} dx =& \frac{2k}{\varepsilon_0} \int x^{1/2} dx + \int c' \ \ (c' : \text{定数})
\end{aligned}$$

初期条件 (境界条件)

$$\begin{aligned}
V(x=0) =& 0 \Leftrightarrow c' = 0 \\
V(x=D) =& V_a \Leftrightarrow \frac{4k}{3\varepsilon_0} D^{3/2} + cD + c' = V_a \\
\therefore cD =& V_a - \frac{4k}{3\varepsilon_0} c^{1/2} \\
c =& \frac{V_a}{D} - \frac{4k}{3\varepsilon_0} c^{1/2}
\end{aligned}$$

3　静電場中の電子の運動

3.1　電場による電子の加速

空間中に電子がある。ここに静電場 $\boldsymbol{E} = (E_x.E_y, E_z)$ をかけると電子は電場の向きと反対向きにクーロン力 $\boldsymbol{F} = (F_x, F_y, F_z)$ を受ける。電子の電荷を $-e$[C], 質量を m[kg] とすると、運動方程式より、

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{F}(= -e\boldsymbol{E}) \ \ (a := \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}, \boldsymbol{v} := \frac{d\boldsymbol{r}}{dt})$$

成分表示すると、

$$\begin{cases} m\frac{d^2x}{dt^2} = -eE_x \\ m\frac{d^2y}{dt^2} = -eE_y \\ m\frac{d^2z}{dt^2} = -eE_z \end{cases}$$

電位を V として $\boldsymbol{E} = -\nabla V$ より、

$$\begin{cases} m\frac{d^2x}{dt^2} = e\frac{\partial V}{\partial x} \\ m\frac{d^2y}{dt^2} = e\frac{\partial V}{\partial y} \\ m\frac{d^2z}{dt^2} = e\frac{\partial V}{\partial z} \end{cases}$$

電子にも重力は働くが、クーロン力よりも十分小さいので無視する。

3.1.1　平行平面電極間の電子の運動

例によってさっきから使っているコンデンサの、$V = 0$ のところに電子を 1 個おく。電子の初速度は $v_0 = 0$ である。電子の運動方程式 ($\rho = 0$) より、

$$\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= e\frac{V_a}{D} \\ \Leftrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{eV_a}{D} \end{aligned}$$

これを積分して、

$$\begin{aligned} \int \frac{d^2x}{dt^2}dt &= \frac{eV_a}{D}\int dt \\ \frac{x}{t} &= \frac{eV_a}{mD}t + c \ \ (c : \text{初速度(定数)}) \end{aligned}$$

この時、$v_0 = 0$ より初速度 c は 0 である。

もう一度積分して、

$$
\begin{aligned}
\int fracxtdt =& \frac{eV_a}{mD} t \int tdt \\
x =& \frac{eV_a}{mD} \frac{t^2}{2} + c' \quad (c' : \text{初期位置(定数)}) \\
t = 0 \to x =& 0 \\
\therefore c' =& 0 \\
\therefore x =& \frac{eV_a}{2mD} t^2 \mathrm{m}
\end{aligned}
$$

(別解)

$$
\begin{aligned}
v =& V_a + at \\
x =& V_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \\
V_0 =& 0, a = \frac{eV_a}{mD} \\
\Rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} v = \frac{eV_a}{mD} t \\ x = \frac{eV_a}{2mD} t^2 \end{array} \right.
\end{aligned}
$$

これは等加速度運動である。

また、電子が-極から＋極に到達するまでにかかる時間 τ は

$$
\begin{aligned}
D = \frac{eV_a}{2mD} \tau^2 \Leftrightarrow & \tau^2 = \frac{2mD^2}{eV_a} \\
\therefore \tau =& \sqrt{\frac{2m}{eV_a}} D
\end{aligned}
$$

τ:電子走行時間 $(\rho = 0, V_0 = 0)$

3.2　電子ボルト及び電子の速度

電子の EOM(一次元 x 軸方向)

$$
\begin{aligned}
m\frac{dv}{dt} &= e\frac{dV}{dx}, \quad \left(v = \frac{dx}{dt}\right) \\
\int mv\frac{dv}{dt}dt &= \int ev\frac{dV}{dx}dt \\
\int_{v_0}^{v} &= \int_0^{V_0} edV \\
\Leftrightarrow \left[\frac{1}{2}mv^2\right]_{v_0}^{v} &= [eV]_0^{V_0} \\
\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 &= eV_0 \\
(\text{初速度}v_0\text{は}0\text{とする}) \\
\frac{1}{2}mv^2 &= eV_0 \ \ [\mathrm{J}]
\end{aligned}
$$

電子が 1 [V] の電位差の間を通った時に得られるエネルギーは 1.602×10^{-19} [J]

これを 1 [eV(電子ボルト)] と定義する。

電子の速度は

$$
v = \sqrt{\frac{2eV_0}{m}} \ \ [\mathrm{m/s}]
$$

4　静磁場中の電子の運動

ベクトル積 (外積)

点 O から $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ が角度 θ をなして存在している。
$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ によって作られる平行四辺形の面積 S は、

$$S = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\sin\theta$$

このとき、平行四辺形に垂直に交わるベクトル $\boldsymbol{C}$ は、

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = -\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}$$

となる。
よって、

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = -\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}$$
$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{D} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{D} + \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{D}$$
$$\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z) \quad \boldsymbol{B} = (B_x, B_y B_z)$$
$$\text{ここで、}x, y, z\text{方向の単位ベクトル}\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\text{を考えると、}$$
$$\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}, \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{i}, \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}, \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{0}$$

$\boldsymbol{i}$,$\boldsymbol{j}$,$\boldsymbol{k}$ は $Cyclic$ である。

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A} &= A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}, \boldsymbol{B} = B_x\boldsymbol{i} + B_y\boldsymbol{j} + B_z\boldsymbol{k} \\
\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} &= (A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}) \times (B_x\boldsymbol{i} + B_y\boldsymbol{j} + B_z\boldsymbol{k}) \\
&= A_xB_y\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} + A_xB_z\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{k} + A_yB_x\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{i} + A_yB_z\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k} + A_zB_x\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i} + A_zB_y\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{j} \\
&= (A_yB_z - A_zB_y)\boldsymbol{i} + (A_zB_x - A_xB_z)\boldsymbol{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\boldsymbol{k} \\
&= (A_yB_z - A_zB_y, A_zB_x - A_xB_z, A_xB_y - A_yB_x) \\
&= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \\
&= \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} A_j B_k
\end{aligned}$$

4.1 磁場による電子の加速

◎ローレンツ力磁場中で速度 v [m/s] で動く電子は力を受ける。この力をローレンツ力という。

$$\boldsymbol{F} = -e\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \quad (\boldsymbol{B}:\text{磁束密度})$$

電子の EOM は

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = -\frac{e}{m}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$$

成分表示:$\boldsymbol{r} = (x, y, z), \boldsymbol{v} = (v_x, v_y, v_z), \boldsymbol{B} = (B_x B_y, B_z)$とおく。

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = -\dfrac{e}{m}(v_y B_z - v_z B_y) \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = -\dfrac{e}{m}(v_x B_z - v_z B_x) \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} = -\dfrac{e}{m}(v_x B_y - v_y B_x) \end{cases}$$

4.1.1 一様な磁場中の電子の運動

◎ローレンツ力

$$\boldsymbol{F} = -e\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$$

電子の EOM は、

$$\frac{\partial^2\boldsymbol{r}}{\partial t^2} = -e\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}, \boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$$

$$\boldsymbol{r} = (x, y, z), \quad \boldsymbol{B} = (B_x, B_y, B_z)$$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = -\dfrac{e}{m}\left(\dfrac{dy}{dt}B_z - \dfrac{dz}{dt}B_y\right) \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = -\dfrac{e}{m}\left(\dfrac{dz}{dt}B_x - \dfrac{dx}{dt}B_z\right) \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} = -\dfrac{e}{m}\left(\dfrac{dx}{dt}B_y - \dfrac{dy}{dt}B_x\right) \end{cases}$$

Z 軸方向の磁束密度を考える。($\boldsymbol{B} = (0, 0, B_z)$)

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = -\dfrac{e}{m}\dfrac{dy}{dt}B_z \\ \dfrac{d^2x}{dt^2} = -\dfrac{e}{m}\dfrac{dx}{dt}B_z \\ \dfrac{d^z}{dt^2} = 0 \end{cases}$$

これらを t で積分する。

$$
\begin{aligned}
&\frac{dx}{dt} = -\frac{e}{m} y B_z + C_2' \\
&\frac{dx}{dt} = -\frac{e}{m} x B_z + C_1' \\
&\frac{dz}{dt} = C_3 \\
&\quad (C_1', C_2', C_3' \text{は積分定数}) \\
&C_2' = -\frac{e}{m} B_z C_2, C_1' = \frac{e}{m} B_z C_1 \quad (C_1, C_2 \text{は定数})\text{とすると}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= -\frac{e}{m} B_z (y + C_2) = v_x && (1) \\
\frac{dx}{dt} &= -\frac{e}{m} B_z (x + C_1) = v_y && (2) \\
\frac{dz}{dt} &= C_3 = v_z && (3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
v_z &= v \cos\theta \quad (v = |\boldsymbol{v}|) \\
\sqrt{v_x^2 + v_y^2} &= v \sin\theta \Leftrightarrow v_x^2 + v_y^2 = v^2 \sin^2\theta
\end{aligned}
$$

(**??**), (**??**)を代入すると、

$$
\begin{aligned}
&\frac{e^2}{m^2} B_z^2 (y + C_2)^2 \frac{e^2}{m^2} B_z^2 (x + C_1)^2 = v^2 \sin^2\theta \\
&(x + C_1)^2 + (y + C_2)^2 = \left(\frac{mv \sin\theta}{eB_z} \right)^2 \\
&\text{円の方程式:半径} r = \frac{mv \sin\theta}{eB_z} \\
&\text{周期} T \text{は} T = \frac{a\pi r}{v \sin\theta} = \frac{2\pi m}{eB_z} \\
&\text{角速度} \omega_c = \frac{2\pi}{T} = \frac{eB_z}{m} : \text{サイクロトロン角周波数}
\end{aligned}
$$

Z 軸が円の中心を通るとき、$C_1 = 0, C_2 = 0$ となる。その時の解は、

$$
\left\{
\begin{aligned}
x &= r \cos(\omega_c t + \varepsilon) \\
x &= r \sin(\omega_c t + \varepsilon) \\
z &= vt \cos\theta
\end{aligned}
\right.
$$

$$\varepsilon \text{は} t = 0 \text{の電子の位置で決まる。}$$

これは z 軸を中心に螺旋運動する。

4.1.2　静電磁場中の電子の運動

◎電場と磁場が直交しているとき距離 D, 電位差 v_a のコンデンサを考える。電子の EOM は、

$$\boldsymbol{E} = (E, 0, 0)$$
$$\boldsymbol{B} = (0, 0, B)$$

教科書の (3.24),(3.25),(3.37) 式を組み合わせると、

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = -e\boldsymbol{E} - e\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$$
$$E = -\frac{\partial V_x}{\partial x} = -\frac{V_a}{D}$$

成分表示すると、

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{e}{m}\dfrac{V_a}{D} - \dfrac{e}{m}B\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dv_z}{dt} \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{e}{m}B\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dv_y}{dt} \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} = 0, \dfrac{dv_z}{dt} = 0 \quad (z\text{軸方向は等速直線運動}) \end{cases}$$

(赤字：クーロン力, 青字：ローレンツ力)

ここで $A = \dfrac{eV_a}{mD}, \omega_c = \dfrac{eB}{m}$ とおく。

$$\frac{dv_x}{dt} = A - \omega_c v_y$$
$$t\text{で微分して、}\frac{d^2V_x}{dt^2} = -\omega_c\frac{dv_y}{dt}$$
$$\frac{dv_y}{dt} = \omega_c v_x$$
$$\Rightarrow \frac{d_x^v}{dt^2} = -\omega_c^2 v_x$$

これを $v_x = \cdots$ の式に直し、v_x についての微分方程式を解く。

(1) 上の式を 2 階積分して $v_x = \cdots$ の式にする
(2) 一般解を与える (微分方程式を満たすように解を決める)

2 階積分解法

$$\begin{aligned}
v_x &= C_1 \sin\omega_c t + C_2 \cos\omega_c t, \quad (C_1, C_2 : \text{積分定数}) \\
\frac{dv_x}{dt} &= \omega_c (C_1 \cos\omega_c t - C_2 \sin\omega_c t) \\
\frac{d^2 v_x}{dt^2} &= -\omega_c^2 (C_1 \sin\omega_c t + C_2 \cos\omega_c t) \\
&= -\omega_c^2 v_x
\end{aligned}$$

一般解解法

$$\begin{aligned}
v_x =& C_1 \sin\omega_c t + C_2 \cos\omega_c t \\
\frac{dv_x}{dt} =& \omega_c (C_1 \cos\omega_c t - C_2 \sin\omega_c t) \\
\frac{d^2 v_x}{dt^2} =& -\omega_c^2 v_x \\
\text{初期状態} : t = 0 \rightarrow & v_x = 0, v_y = 0 \\
v_x(t=0) =& C_2 = 0 \\
\frac{dv_x(t=0)}{dt} =& A - \omega_c v_y(t=0), \quad v_y(t=0) = 0 \\
\therefore \omega_c C_1 =& A \\
C_1 =& \frac{A}{\omega_c} \\
\therefore v_x =& \frac{A}{\omega_c} \sin\omega_c t \\
\frac{dv_x}{dt} =& A - \omega_c v_y \\
v_y =& \frac{A}{\omega_c} - \frac{1}{\omega_c} \frac{dv_x}{dt} \\
=& \frac{A}{\omega_c} - \frac{A}{\omega_c} \cos\omega_c t
\end{aligned}$$

位置 $x(t), y(t)$ を求めるために、v_x, v_y を t で微分する。

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \int v_x dt \\
&= \int \frac{A}{\omega_c} \sin \omega_c t dt \\
&= -\frac{A}{\omega_c} \cos \omega_c t + C_3 \\
y(t) &= \int v_y dt \\
&= \frac{A}{\omega_c} t - \frac{A}{\omega_c} \sin \omega_c t + C_4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{初期状態}: t = 0 \rightarrow & x = 0, y = 0 \\
x(t=0) &= -\frac{A}{\omega_c^2} + C_3 = 0 \\
\Leftrightarrow & C_3 = \frac{A}{\omega_c^2} \\
y(t=0) &= C_4 = 0 \\
\therefore x(t) &= -\frac{A}{\omega_c^2} \cos \omega_c t + \frac{A}{\omega_c^2} \\
y(t) &= \frac{A}{\omega_c} t - \frac{A}{\omega_c^2} \sin \omega_c t
\end{aligned}
$$

x, y はサイクロイドの式になっている。
円の半径 $r = \frac{A}{\omega_c^2}$ で、

$$
\begin{aligned}
\omega_c t = \pi \text{のとき、} x_m &= \frac{2A}{\omega_c^2} \\
\omega_c t = 2\pi \text{のとき、} y_m &= \frac{2\pi A}{\omega_c^2}
\end{aligned}
$$

x_m, y_m はそれぞれサイクロイドの最大の幅および高さである。

4.2　空間電荷による電流

4.2.1　空間電荷による定常電流

◎定常電流と電圧の関係

空間電荷密度 $\rho \neq 0$ のとき、ポアソン方程式は

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

となる。

ここで、$x=0$ に $V=0$ の陰極、$x=D$ に $V=V_a$ の陽極があり、$\rho \neq 0$ である平行平面電極を考える。ここで、電流密度を J [A/m^2], 電子の速度を v [m/s] とすると、

$$J = \rho v$$

が成り立つ。

この時 J は定常電流 (密度) となる。

4 章『真空管』では、定常電流と電位の関係を導く。

(3.33) 式より、(V は電位)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mv^2 =& eV \quad (v_0 = 0)\\ v =& \sqrt{\frac{2eV}{m}}\\ \therefore \rho =& J/\sqrt{\frac{2eV}{m}}\end{aligned}$$

これをポアソン方程式に代入して

$$\begin{aligned}\frac{d^2V}{dx^2} =& -\frac{J}{\varepsilon_0\sqrt{\frac{2eV}{m}}}\\ \frac{dV}{dx}&dx\text{で積分}\\ \int \frac{d^2V}{dx^2}\frac{dV}{dx}dx =& \int -\frac{J}{\varepsilon_0\sqrt{\frac{2eV}{m}}}dV\\ \frac{1}{2}\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 =& -2\frac{J}{\varepsilon_0}\sqrt{\frac{V}{2e/m}} + C\end{aligned}$$

ここで、陰極では $V=0$ であり、空間電荷密度が大きい時、電位は小さくなる。

電場が 0⇒ $C=0$

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 = -4\frac{J}{\varepsilon_0}\sqrt{\frac{V}{2e/m}}$$

$$\frac{dV}{dx} = \sqrt{-4\frac{J}{\varepsilon_0}\sqrt{\frac{V}{2e/m}}} \quad \text{(平方根を取る)}$$

$$\frac{dV}{dx} = \left(-\frac{4J}{\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{2e/m}}\right)^{\frac{1}{2}} V^{\frac{1}{4}}$$

左辺にV,右辺にxと変数分解する。

$$V^{-\frac{1}{4}}dV = \left(-\frac{4J}{\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{2e/m}}\right)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$\text{積分して、}\int V^{-\frac{1}{4}}dV = \int \left(-\frac{4J}{\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{2e/m}}\right)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$\frac{4}{3}V^{\frac{3}{4}}V = \left(-\frac{4J}{\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{2e/m}}\right)^{\frac{1}{2}} x + C'$$

$$x = 0, v = 0\text{より}C' = 0\text{で、}\frac{16}{9}V^{\frac{3}{2}} = -\frac{4J}{\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{2e/m}}x^2 \quad \text{(両辺を二乗した)}$$

$$J = -\frac{4}{9}\varepsilon_0\sqrt{\frac{2e}{m}}\frac{V^{\frac{3}{2}}}{x^2}$$

陽極の電位$x = D, V = V_a$で、

$$\begin{aligned} J &= -\underline{\frac{4}{9}\varepsilon_0\sqrt{\frac{2e}{m}}}\frac{V_a^{\frac{3}{2}}}{D^2} \\ &= -\underline{2.33\times10^{-6}}\frac{V_a^{\frac{3}{2}}}{D^2} \\ &= -\underline{K}V_a^{\frac{3}{2}}, \quad K\text{：パーヴィアンス} \end{aligned}$$