根付き木について

いるやん

1　グラフ

グラフ G は空でない頂点集合 $V(G)$ と異なる 2 頂点を結ぶ辺集合 $E(G)$ によって定義される。グラフの例を図 1 に示す。

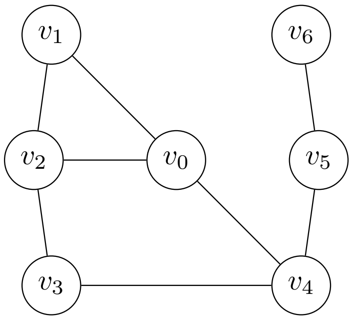

図 1　グラフの例

グラフの応用の例としては、辺を路線に、頂点を駅とすることによって、次数の高い頂点はハブとなる駅であることがわかったり、グラフの形から孤立する地域を特定することができるようになる。

1.1　用語の定義

以下の定義は、本レジュメに使用される用語、及びその用語の定義に必要な用語のみを含む。そのため、対称的な用語が存在しても一方のみを定義している。

サイズ　グラフの辺の数を指す。

位数　グラフの頂点の数を指す。

隣接頂点　$v_0,\ v_1$ を結ぶ辺が辺集合 E に含まれるとき、v_0 と v_1 は隣接しているという。

接続　辺 e が頂点 $v_0,\ v_1$ を結ぶとき、e は $v_0(v_1)$ に接続しているという。

次数　各頂点に定義される値で、その頂点に接続している辺の数を指す。

端点　次数が 1 の頂点を指す。

グラフの最小次数　グラフの頂点の次数の最小値を、そのグラフの最小次数という。

道　2 頂点 $v_0,\ v_1$ に対して以下の操作を行うとき、列 P を v_0 を**始点**とし v_1 を**終点**とする v_0–v_1 道という。

道を作る操作

1. v_0 を最初の v とする。
2. v に隣接する頂点 v' を 1 つ選択する。
3. 辺 vv' を列 P に追加する。
4. v' を新しい v とする。
5. $v \neq v_1$ ならば、操作 2 に戻る。

v_0–v_1 道が存在するとき、 $v_0,\ v_1$ は**連結している**という。

基本道　同じ頂点が含まれない道を指す。

サイクル　始点と終点が同じ基本道を指す。

閉路　始点と終点が同じ道を指す。

道の長さ　道に含まれる辺の数を指す。

2 頂点間の距離　2 頂点間の道の長さの最小値を指す。

内素な道　列 $P_1,\ P_2$ で構成される、同じ始点・終点を持つ 2 つの道が内素であるとは、始点と終点を除いて、 $P_1,\ P_2$ に共通の頂点が現れないことをいう。

自明なグラフ　位数が 1 で、かつサイズが 0 のグラフを自明なグラフという。

連結なグラフ　グラフのどの 2 頂点も連結しているグラフを連結なグラフという。

部分グラフ　G を頂点集合 $V(G)$ と辺集合 $E(G)$ からなるグラフとする。頂点集合 $V(H)$ と辺集合 $E(H)$ を持つグラフ H は以下を満たすとき G の部分グラフという。

- $V(H) \subseteq V(G) \land E(H) \subseteq E(G)$

同型　$G_1,\ G_2$ をグラフとする。以下を満たす $V(G_1)$ から $V(G_2)$ への全単射 ϕ が定義できるとき、G_1 と G_2 は同型であるとか、G_1 は G_2 の同型グラフであるという。

- $uv \in E(G_1) \Leftrightarrow \phi(u)\phi(v) \in E(G_2)$

2　木

木とは、閉路を持たない連結グラフをいう。木の例を図 2 に示す。

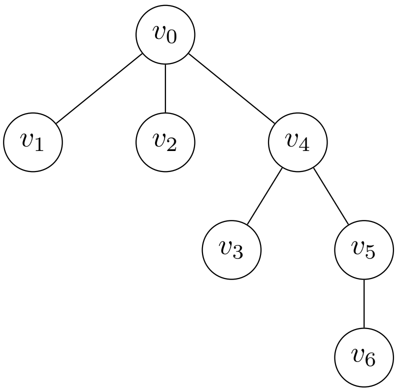

図 2　木の例。図 1 のグラフの部分グラフである。

木の持つ性質には以下のようなものがある。

(2-1) 木のサイズは、常に木の位数よりも 1 だけ小さい。
(2-2) 自明でない木は、少なくとも 2 つの端点を持つ。
(2-3) 木から異なる 2 つの頂点を選んだとき、それらを結ぶ道は必ずちょうど 1 つだけ存在する。
(2-4) T を位数 m の木、 G を最小次数が $m-1$ 以上のグラフとする。このとき、 T は G のある部分グラフと同型である。

2.1　根付き木

根付き木とは、**根**と呼ばれる頂点を 1 つ持つ木である。

根付き木の各頂点に関して、以下のように用語が定義される。

- 頂点 v と根を結ぶ道の上にある頂点を v の**祖先**という。
- 頂点 v の祖先のうち、隣接するものを v の**親**という。
- 頂点 v に対し、以下の定義のいずれかを満たすものを v の**子孫**という。
  - v の自身である。
  - 祖先でない頂点 w のうち、v–w 道が根を含まないもの
- 子孫のうち、隣接するものを**子**という。

3　卒業研究について

3.1　2-コーダルリング

2-コーダルリング $CR(N,\ d_1,\ d_2)$ は、以下のように定義される。

1. 位数 N のサイクルを $C,\ G$ とする。ここで、$C = G$ であるとする。
2. C において、距離が d_1 である 2 頂点 $u_1,\ v_1$ を結ぶ辺 u_1v_1 を $E(G)$ に追加する。
3. C において、距離が d_2 である 2 頂点 $u_2,\ v_2$ を結ぶ辺 u_2v_2 を $E(G)$ に追加する。
4. 以上のようにして得られたグラフ G が 2-コーダルリングである。

コーダルリングの例を図 3 に示す。

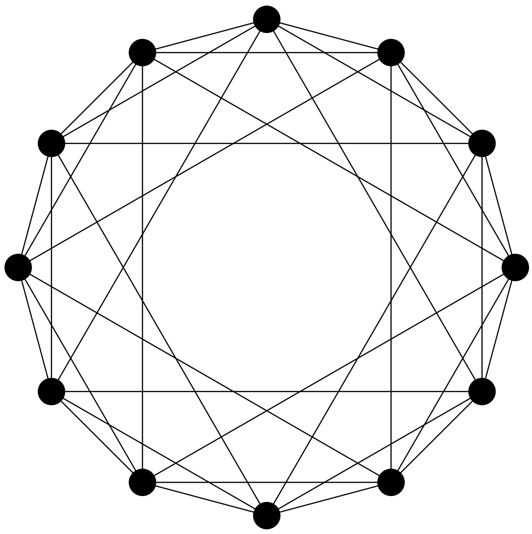

図 3　コーダルリング $CR(12,\ 2,\ 4)$

卒業研究は、2-コーダルリングに対して以下のことに取り組む予定である。

- ある頂点と他の任意の頂点との間に 6 本の道を構築する手続きを考案する。
- 上記で構築した道が内素であることをプログラムによって検証する。

参考文献

[1] G. Chartrand and O. R. Oellermann, Applied and Algorithmic Graph Theory, McGraw-Hill, 1993.
[2] 守屋悦朗, 離散数学入門, サイエンス社, 2012.