

1 光電子放出

1.1 光電子放出の一般の性質

◎**光電子放出** 真空中の金属にエネルギー ε の光を当てると、**光電子**と呼ばれる電子が真空中に飛び出す。

光は電磁気で記述される・・・**電磁波** (波の性質を持つ)

波の振幅が大きいほど、波のエネルギーは大きい。

結局電子が金属中から真空中に飛び出すためには金属にエネルギーを与えて、そのエネルギーを障壁のポテンシャルエネルギー以上にしないといけない。

与えないといけないエネルギーは仕事関数 ϕ なので、電子を真空中に放出したいなら、

$$\varepsilon \geq \phi$$

となるくらいの強い光を与えないといけない。

光電子放出に関するいろんな実験

(1) 電子が出てくる条件

光は振幅と周波数 (振動数) ν で特徴づけられる。

(a) $\nu \geq \nu_0$ のとき (ν_0 は**限界周波数**)

光電子放出が起きる。

(b) $\nu < \nu_0$ のとき

光電子放出が起きない。しかも振幅 (光のエネルギー) とは無関係 (速い波じゃないとダメ)

(2) 出てくる電子の数

$\nu \geq \nu_0$ で光のエネルギーを大きくすると、電流は大きくなる。(出てくる電子の数が増える)

アインシュタインの光量子仮説

光は粒子としての性質を持ち、1 個の光の粒子**光子**が周波数 ν を持つとき、エネルギー ε は $\varepsilon = h\nu$ となる。(h は**プランク定数**)

光は波だけでなく、粒子の性質をも併せ持つ (**光の二重性**)

光の周波数 ν と仕事関数 ϕ との関係

$$\begin{aligned} h\nu &\geq \phi \\ \Leftrightarrow \nu &\geq \frac{\phi}{h} = \nu_0 \end{aligned}$$

この時の波長は $v = f\lambda$ より、

$$\lambda_0 = \frac{c}{\nu_0} = \frac{ch}{\phi}$$

c : 光速

λ_0 : 限界波長

フェルミ準位にある電子が光電子放出するとき、その速度は最高速度 v_m となる。(他の金属中の電子よりも速い)

エネルギー保存則より、

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mv_m^2 &= E_F + \varepsilon - (E_F + \phi) \\ &= \varepsilon - \phi \\ &= h\nu - h\nu_0 \\ &= h(\nu - \nu_0) \\ \therefore v_m &= \sqrt{\frac{2h}{m}(\nu - \nu_0)}\end{aligned}$$

他の光の周波数に依存し、振幅には依存しない現象

例) 日焼け

- 電気ストーブ (赤外線) → 日焼けしない (周波数が小さい)
- 日光 (紫外線) → 日焼けする (周波数が大きい)

2 電位分布と電場

2.1 電位と電場の関係

電場 $\vec{E}(\mathbf{r})$ 電位 $V(\mathbf{r})$ の時、

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= -\nabla V(\mathbf{r}) \\ &= \text{grad} V(\mathbf{r})\end{aligned}$$

grad : 勾配

$$\begin{aligned}\text{grad} &\equiv \nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ &= (\partial_x, \partial_y, \partial_z) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}\end{aligned}$$

$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$: 単位ベクトル

$$\begin{aligned}|\mathbf{i}| &= |\mathbf{j}| = |\mathbf{k}| = 1 \\ \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} &= \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0 \\ \mathbf{i} &= (1, 0, 0), \mathbf{j} = (0, 1, 0), \mathbf{k} = (0, 0, 1)\end{aligned}$$

$\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$ を x, y, z の成分表示すると、

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

V : スカラー \mathbf{E} : ベクトル

2.2 電位分布を求めるための基礎方程式

電荷が連続的に分布する球体 (空間電荷) を考える。

この時、単位体積あたりの電荷量 $\rho [\text{C/m}^3]$ を空間電荷密度という。

半径 r の球体の全電荷量 Q は

$$Q = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho$$

となる。

ガウスの法則

正の電荷からは電気力線が湧き出し、負の電荷へは電気力線が吸い込まれる。電気力線の束を電束といい、1[C] の電荷からは1本の電束が出ているものと定義する。

微小体積を貫く電束を考える。ここでは簡単にするために x 方向に貫く電束のみを考える。

x 方向の電場の変化量は

$$E_x \rightarrow E_x + \frac{\partial E_x}{\partial x} dx$$

これは微小体積での x 方向の電場の変化量の変化を表す。

$$(\text{電束の変化}) = \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial x} dx dy dz$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial x} dx : \text{電束密度}$$

$dy dz$: 貫く面積

$$\varepsilon_0 : \text{真空の誘電率} [\text{C}^2 / (\text{N} \cdot \text{m}^2)]$$

$$= \rho dx dy dz (\text{全電荷})$$

y, z 方向も考えると、

$$\begin{aligned} & \varepsilon_0 \left[\varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial x} dx dy dz + \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial y} dx dy dz + \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial z} dx dy dz \right] \\ &= \varepsilon_0 \left[\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right] dx dy dz \\ &= \rho dx dy dz \end{aligned}$$

よって、ガウスの法則

$$\begin{aligned} \text{div} \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} (= \nabla \cdot \mathbf{E}) \\ \text{div} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right) = \frac{\partial \mathbf{i}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial z} \\ \mathbf{E} &= -\text{grad} V \end{aligned}$$

——— ガウスの定理微分形 ———

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{divgrad} V &= \Delta V = \left(\frac{\partial \mathbf{i}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial z} \right) \cdot \left(\frac{\partial V \mathbf{i}}{\partial x} + \frac{\partial V \mathbf{j}}{\partial y} + \frac{\partial V \mathbf{k}}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \\ &= -\frac{\rho}{\varepsilon_0}\end{aligned}$$

これをポアソン方程式という。特に $\rho = 0$ のとき

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

である。これをラプラス方程式という。

これは2階微分方程式なので、 V を求めるには初期条件を2つ与える必要がある。

$V = ax + b$ と表せるとき、

$$\begin{aligned}&\begin{cases} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0 \\ V(x=0) = 2 \\ V(x=4) = 6 \end{cases} \\ &\begin{cases} b = 2 \\ 4a + b = 6 \end{cases} \Rightarrow a = 1, b = 2 \\ &\therefore V = x + 2 \\ &E = -\frac{\partial V}{\partial x} = -1\end{aligned}$$

円筒座標系

r, ϕ, z による座標系

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\begin{cases} x = r \cos \phi \\ y = r \sin \phi \end{cases}$$

2.3 平行平面電極間の電位分布と電場

$V = 0$ の平面電極と、それに平行な $V = V_a$ の平面電極が距離 $D[\text{m}]$ 離れたところにある。2つの電極は yz 平面上にある。

x 成分のラプラス方程式 ($\rho = 0$)

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= 0 \\
 \int \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dx &= 0 \\
 \Leftrightarrow \frac{\partial V}{\partial x} &= c \quad (c : \text{定数}) \\
 \int \frac{\partial V}{\partial x} dx &= \int c dx \\
 \Leftrightarrow V &= cx + c' \quad (c' : \text{定数}) \\
 V(x=0) &= 0, V(x=D) = V_a \\
 \begin{cases} c' = 0 \\ cD + c' = V_a \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} c' = 0 \\ c = \frac{V_a}{D} \end{cases} \\
 \therefore V &= \frac{V_a}{D}x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{電場 } E_x &= -\frac{\partial V}{\partial x} \quad (E_y = E_z = 0) \\
 &= -\frac{V_a}{D}
 \end{aligned}$$

ここで、空間電荷密度 $\rho = -kx^{-1/2}$ とおく。 x 軸方向のポアソン方程式は

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= \frac{k}{\varepsilon_0} x^{-1/2} \\
 \int \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dx &= \int \frac{k}{\varepsilon_0} x^{-1/2} dx \\
 \frac{\partial V}{\partial x} &= \frac{k}{\varepsilon_0} \cdot 2x^{1/2} + c \quad (c : \text{定数}) \\
 \int \frac{\partial V}{\partial x} dx &= \frac{2k}{\varepsilon_0} \int x^{1/2} dx + \int c' \quad (c' : \text{定数})
 \end{aligned}$$

初期条件 (境界条件)

$$\begin{aligned}
 V(x=0) &= 0 \Leftrightarrow c' = 0 \\
 V(x=D) &= V_a \Leftrightarrow \frac{4k}{3\varepsilon_0} D^{3/2} + cD + c' = V_a \\
 \therefore cD &= V_a - \frac{4k}{3\varepsilon_0} D^{3/2} \\
 c &= \frac{V_a}{D} - \frac{4k}{3\varepsilon_0} D^{1/2}
 \end{aligned}$$

3 静電場中の電子の運動

3.1 電場による電子の加速

空間中に電子がある。ここに静電場 $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$ をかけると電子は電場の向きと反対向きにクーロン力 $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$ を受ける。電子の電荷を $-e[\text{C}]$, 質量を $m[\text{kg}]$ とすると、運動方程式より、

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} (= -e\mathbf{E}) \quad (a := \frac{d\mathbf{v}}{dt}, \mathbf{v} := \frac{d\mathbf{r}}{dt})$$

成分表示すると、

$$\begin{cases} m \frac{d^2 x}{dt^2} = -eE_x \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} = -eE_y \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} = -eE_z \end{cases}$$

電位を V として $\mathbf{E} = -\nabla V$ より、

$$\begin{cases} m \frac{d^2 x}{dt^2} = e \frac{\partial V}{\partial x} \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} = e \frac{\partial V}{\partial y} \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} = e \frac{\partial V}{\partial z} \end{cases}$$

電子にも重力は働くが、クーロン力よりも十分小さいので無視する。

3.1.1 平行平面電極間の電子の運動

例によってさっきから使っているコンデンサの、 $V = 0$ のところに電子を1個おく。電子の初速度は $v_0 = 0$ である。電子の運動方程式 ($\rho = 0$) より、

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= e \frac{V_a}{D} \\ \Leftrightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} &= \frac{eV_a}{D} \end{aligned}$$

これを積分して、

$$\begin{aligned} \int \frac{d^2 x}{dt^2} dt &= \frac{eV_a}{D} \int dt \\ \frac{x}{t} &= \frac{eV_a}{mD} t + c \quad (c: \text{初速度(定数)}) \end{aligned}$$

この時、 $v_0 = 0$ より初速度 c は0である。

もう一度積分して、

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{dt} dt &= \frac{eV_a}{mD} t \int dt \\ x &= \frac{eV_a}{mD} \frac{t^2}{2} + c' \quad (c' : \text{初期位置(定数)}) \\ t = 0 \rightarrow x = 0 \\ \therefore c' &= 0 \\ \therefore x &= \frac{eV_a}{2mD} t^2\end{aligned}$$

(別解)

$$\begin{aligned}v &= V_a + at \\ x &= V_0 t + \frac{1}{2} at^2 \\ V_0 &= 0, a = \frac{eV_a}{mD} \\ \Rightarrow \begin{cases} v = \frac{eV_a}{mD} t \\ x = \frac{eV_a}{2mD} t^2 \end{cases}\end{aligned}$$

これは等加速度運動である。

また、電子が $-$ 極から $+$ 極に到達するまでにかかる時間 τ は

$$\begin{aligned}D &= \frac{eV_a}{2mD} \tau^2 \Leftrightarrow \tau^2 = \frac{2mD^2}{eV_a} \\ \therefore \tau &= \sqrt{\frac{2m}{eV_a}} D\end{aligned}$$

τ : 電子走行時間 ($\rho = 0, V_0 = 0$)

3.2 電子ボルト及び電子の速度

電子の EOM(一次元 x 軸方向)

$$\begin{aligned}m \frac{dv}{dt} &= e \frac{dV}{dx}, \quad \left(v = \frac{dx}{dt} \right) \\ \int m v \frac{dv}{dt} dt &= \int e v \frac{dV}{dx} dt \\ \int_{v_0}^v &= \int_0^{V_0} e dV \\ \Leftrightarrow \left[\frac{1}{2} m v^2 \right]_{v_0}^v &= [eV]_0^{V_0} \\ \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 &= e V_0 \\ (\text{初速度 } v_0 \text{ は } 0 \text{ とする}) \\ \frac{1}{2} m v^2 &= e V_0 \quad [\text{J}]\end{aligned}$$

電子が 1 [V] の電位差の間を通った時に得られるエネルギーは 1.602×10^{-19} [J]

これを **1 [eV(電子ボルト)]** と定義する。

電子の速度は

$$v = \sqrt{\frac{2eV_0}{m}} \quad [\text{m/s}]$$

4 静磁場中の電子の運動

ベクトル積 (外積)

点 O から \mathbf{A}, \mathbf{B} が角度 θ をなして存在している。

\mathbf{A} と \mathbf{B} によって作られる平行四辺形の面積 S は、

$$S = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\sin\theta$$

このとき、平行四辺形に垂直に交わるベクトル \mathbf{C} は、

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$$

となる。

よって、

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \times \mathbf{D} = \mathbf{A} \times \mathbf{D} + \mathbf{B} \times \mathbf{D}$$

$$\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z) \quad \mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$$

ここで、 x, y, z 方向の単位ベクトル $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ を考えると、

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}, \mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0}$$

$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ は *Cyclic* である。

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}, \mathbf{B} = B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}) \times (B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k})$$

$$= A_x B_y \mathbf{i} \times \mathbf{j} + A_x B_z \mathbf{i} \times \mathbf{k} + A_y B_x \mathbf{j} \times \mathbf{i} + A_y B_z \mathbf{j} \times \mathbf{k} + A_z B_x \mathbf{k} \times \mathbf{i} + A_z B_y \mathbf{k} \times \mathbf{j}$$

$$= (A_y B_z - A_z B_y) \mathbf{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \mathbf{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{k}$$

$$= (A_y B_z - A_z B_y, A_z B_x - A_x B_z, A_x B_y - A_y B_x)$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} A_j B_k$$

4.1 磁場による電子の加速

◎ローレンツ力磁場中で速度 v [m/s] で動く電子は力を受ける。この力をローレンツ力という。

$$\mathbf{F} = -e\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (\mathbf{B}: \text{磁束密度})$$

電子の EOM は

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{e}{m}\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

成分表示: $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$, $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$ とおく。

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{e}{m}(v_y B_z - v_z B_y) \\ \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{e}{m}(v_x B_z - v_z B_x) \\ \frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{e}{m}(v_x B_y - v_y B_x) \end{cases}$$