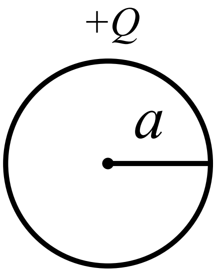
1　静電容量の計算

$Q = CV$:同じ V でも C が大きいほうが Q が大きくなる。
つまり、C が大きい→多くの Q を蓄えることができる。

1.1



$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \to Q = 4\pi\epsilon_0 aV$$
$$(C = 4\pi\epsilon_0 a)$$

a が大きいほど C が大きくなる。

1.2

$C = \epsilon_0 \frac{S}{d}$ となる。(既習)

1.3　同心球

$a < r < b$ における電界は

$$4\pi r^2 E = \frac{Q}{\epsilon_0} \text{より、} E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

($C < r$ には電界がない)

$$\begin{aligned}
V &= -\int_b^a \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\int_b^a r^{-2} dr \\
&= -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}[(-1)r^{-1}]_b^a = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}) \\
\therefore Q &= \frac{4\pi\epsilon_0}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} V \\
\therefore C &= \frac{4\pi\epsilon_0}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} = \frac{4\pi\epsilon_0 ab}{b - a}
\end{aligned}$$

- C は無関係
- $b \to \inf$ とすると、例 1 に帰着する。

1.4 同心円筒

$a < r < b$ における電界は、

$$
\begin{aligned}
2\pi r \cdot lE &= \frac{\lambda l}{\epsilon_0} \therefore E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \\
V &= -\int_b^a \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} dr = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\int_b^a r^{-1} dr \\
&= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}[\ln r]_b^a = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{a}{b} \\
&= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln ba \\
\therefore \lambda &= \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln b/a} V \\
&\left(C = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln b/a}\right)
\end{aligned}
$$

1.5 送電線

x の場所における電界を求める。

$$
\begin{aligned}
&A\text{による電界}: \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x} \\
&B\text{による電界}: \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 (d-x)}
\end{aligned}
$$

(λ が均一に分布していると仮定する。ただし $r << d$)

$$
\begin{aligned}
\therefore E &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x}\right) \\
V &= -\int_{d-r}^{r} E dx = \int_r^{d-r} E dx = \int_r^{d-r} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x}) dx \\
&= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}[\ln x - \ln(d-x)]_r^{d-r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\left[\ln\frac{x}{d-x}\right]_r^{d-r} \\
&= \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0}\ln\frac{d-r}{r} \simeq \lambda\frac{\ln\frac{d}{r}}{\pi\epsilon_0}(d >> r) \\
\therefore \lambda &= \frac{\pi\epsilon_0}{\ln d/r} V \therefore C = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln d/r} l(F)
\end{aligned}
$$

1.6 2 つの導体球

$$
\begin{aligned}
A\text{による電界}&: \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 x^2} \\
B\text{による電界}&: \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (d-x)^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore E &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(d-x)^2}\right)\\
V &= \int_r^{d-r}\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(d-x)^2}\right)dx\\
&= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{d-x}\right]_r^{d-r}\\
&= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left\{(-\frac{1}{d-r}+\frac{1}{r})-(-\frac{1}{r}+\frac{1}{d-r})\right\}\\
&= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{2}{r}-\frac{2}{d-r}\right)=2\cdot\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{d-r}\right)\\
&\sim \frac{Q}{2\pi\epsilon_0}(\frac{1}{r}-\frac{1}{d})\\
Q &\sim \frac{2\pi\epsilon_0}{\frac{1}{r}-\frac{1}{d}}V \therefore C \sim \frac{2\pi\epsilon_0 rd}{d-r}(F)
\end{aligned}
$$