ALJABAR LINIER _1
Matrik

Ira Prasetyaningrum

DEFINISI MATRIKS

Apakah yang dimaksud dengan Matriks ?

kumpulan bilangan yang disajikan secara teratur dalam baris dan kolom yang membentuk suatu persegi panjang, serta termuat diantara sepasang tanda kurung.

NOTASI MATRIKS

- **Nama matriks** menggunakan huruf besar
- Anggota-anggota matriks dapat berupa huruf kecil maupun angka
- Digunakan kurung biasa atau kurung siku

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 5 & 7 & 6 \end{pmatrix} \qquad H = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

- **Ordo matriks** atau ukuran matriks merupakan banyaknya baris (garis horizontal) dan banyaknya kolom (garis vertikal) yang terdapat dalam matriks tersebut.

NOTASI MATRIKS

- Jadi, suatu matriks yang mempunyai m baris dan n kolom disebut matriks berordo atau berukuran m x n.

Notasi $A = (a_{ij})$

- Memudahkan menunjuk anggota suatu matriks

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Dengan
$i = 1,2,\dots,m$
$j = 1,2,\dots,n$

MATRIKS

- Contoh : Matriks A merupakan matriks berordo 4x2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$$

- Bilangan-bilangan yang terdapat dalam sebuah matriks dinamakan entri dalam matriks atau disebut juga **elemen atau unsur**.

NOTASI MATRIKS

Baris

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Kolom

Unsur Matriks

Matriks berukuran m x n
atau berorde m x n

MATRIKS BARIS DAN KOLOM

- **Matriks baris** adalah matriks yang hanya mempunyai satu baris

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

- **Matriks kolom** adalah matriks yang hanya mempunyai satu kolom.

$$E = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

MATRIKS A = B

- Dua buah matriks A dan B dikatakan sama (A = B) apabila A dan B mempunyai jumlah baris dan kolom yang sama (berordo sama) dan semua unsur yang terkandung di dalamnya sama.

- $a_{ij} = b_{ij}$ dimana
  - a_{ij} = elemen matriks A dari baris i dan kolom j
  - b_{ij} = elemen matriks B dari baris i dan kolom j

- A = B

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- A ≠ B

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

PENJUMLAHAN MATRIKS

- Apabila A dan B merupakan dua matriks yang ukurannya sama, maka hasil penjumlahan (A + B) adalah matriks yang diperoleh dengan menambahkan bersama-sama entri yang seletak/bersesuaian dalam kedua matriks tersebut.

- Matriks-matriks yang ordo/ukurannya berbeda tidak dapat ditambahkan.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} & a_{33} + b_{33} \end{bmatrix}$$

PENJUMLAHAN MATRIKS

- Contoh Soal

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 4+3 & 2-4 \\ -1+2 & 3+1 \\ 2+1 & -2-2 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 1 & 4 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

PENGURANGAN MATRIKS

- A dan B adalah suatu dua matriks yang ukurannya sama, maka A-B adalah matriks yang diperoleh dengan mengurangkan bersama-sama entri yang seletak/bersesuaian dalam kedua matriks tersebut.

- Matriks-matriks yang ordo/ukurannya berbeda tidak dapat dikurangkan.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & a_{13} - b_{13} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & a_{23} - b_{23} \\ a_{31} - b_{31} & a_{32} - b_{32} & a_{33} - b_{33} \end{bmatrix}$$

PENGURANGAN MATRIKS

- **Contoh** :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 1-1 & 0-1 & -1-1 \\ 2+1 & 2-2 & -3-4 \\ 3-3 & 4-4 & 0-2 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

PERKALIAN MATRIKS DENGAN SKALAR

- Jika k adalah suatu bilangan skalar dan matriks $A=(a_{ij})$ maka matriks $kA=(ka_{ij})$ adalah suatu matriks yang diperoleh dengan mengalikan semua elemen matriks A dengan k.

- Mengalikan matriks dengan skalar dapat dituliskan di depan atau dibelakang matriks.

- **[C]=k[A]=[A]k**

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow 4A = \begin{bmatrix} 4*3 & 4*8 \\ 4*5 & 4*1 \end{bmatrix} \Rightarrow 4A = \begin{bmatrix} 12 & 32 \\ 20 & 4 \end{bmatrix}$$

PERKALIAN MATRIKS DENGAN SKALAR

Sifat-sifat perkalian matriks dengan skalar :

$k(B+C) = kB + kC$

$k(B-C) = kB - kC$

$(k_1+k_2)C = k_1C + k_2C$

$(k_1-k_2)C = k_1C - k_2C$

$(k_1.k_2)C = k_1(k_2C)$

PERKALIAN MATRIKS DENGAN SKALAR

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

dengan k = 2, maka

K(A+B) = 2(A+B) = 2A+2B

$$2(A+B) = 2 * \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = 2 * \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$$

TERBUKTI

$$2A + 2B = 2 * \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + 2 * \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$$

PERKALIAN MATRIKS DENGAN SKALAR

Contoh :

$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ dengan k1 = 2 dan k2 = 3, maka

TERBUKTI

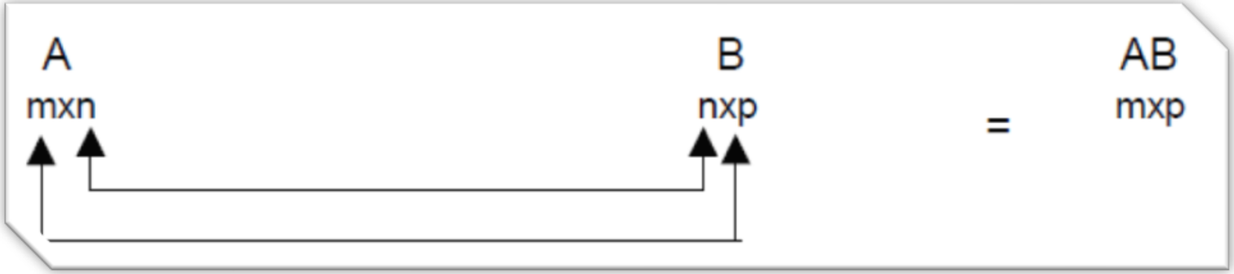
(k1+k2)C = k1.C + k2.C

$$(k_1 + k_2) * C = (2+3) * \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = 5 * \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 10 & -5 \end{bmatrix}$$

$$(k_1 * C + k_2 * C) = (2) * \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + (3) * \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 10 & -5 \end{bmatrix}$$

PERKALIAN MATRIKS

- Perkalian matriks dengan matriks pada umumnya tidak bersifat komutatif.
- Syarat perkalian adalah jumlah banyaknya kolom pertama matriks sama dengan jumlah banyaknya baris matriks kedua.
- Jika matriks A berukuran mxn dan matriks B berukuran nxp maka hasil dari perkalian A*B adalah suatu matriks $C=(c_{ij})$ berukuran mxp dimana



PERKALIAN MATRIKS

- Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A * B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (3*3) + (2*1) + (1*0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \end{bmatrix}$$

$$B * A = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3*3 & 3*2 & 3*1 \\ 1*3 & 1*2 & 1*1 \\ 0*3 & 0*2 & 0*1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

PERKALIAN MATRIKS

- Apabila A merupakan suatu matriks persegi, maka $A^2 = A.A$; $A^3=A^2.A$ dan seterusnya
- Apabila AB = BC maka tidak dapat disimpulkan bahwa A=C (tidak berlaku sifat penghapusan)
- Apabila AB = AC belum tentu B = C
- Apabila AB = 0 maka tidak dapat disimpulkan bahwa A=0 atau B=0
- Terdapat beberapa hukum perkalian matriks :

1. A(BC) = (AB)C
2. A(B+C) = AB+AC
3. (B+C)A = BA+CA
4. A(B-C)=AB-AC
5. (B-C)A = BA-CA
6. A(BC) = (aB)C= B(aC)
7. AI = IA = A

PERPANGKATAN MATRIKS

Sifat perpangkatan pada matriks sama seperti sifat perpangkatan pada bilangan-bilangan untuk setiap a bilangan riil, dimana berlaku :

$A^2 = A\ A$

$A^3 = A^2\ A$

$A^4 = A^3\ A$

$A^5 = A^4\ A$; dan seterusnya

PERPANGKATAN MATRIKS

Tentukan hasil A^2 dan A^3

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = AxA = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = AxA^2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$$

PERPANGKATAN MATRIKS

Tentukan hasil $2A^2 + 3A^3$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2A^2 = 2 \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$3A^3 = 3 \cdot \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 & 9 \\ -6 & 6 \end{bmatrix}$$

$$2A^2 + 3A^3 = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -15 & 9 \\ -6 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 7 \\ -10 & 10 \end{bmatrix}$$

JENIS –JENIS MATRIKS

- **Matriks bujursangkar (persegi)** adalah matriks yang berukuran n x n

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

- **Matriks nol** adalah matriks yang setiap entri atau elemennya adalah bilangan nol

$$O_{3\,x\,2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sifat-sifat dari matriks nol :

-A+0=A, jika ukuran matriks A = ukuran matriks 0

-A*0=0, begitu juga 0*A=0.

JENIS –JENIS MATRIKS

- **Matriks Diagonal** adalah matriks persegi yang semua elemen diatas dan dibawah diagonalnya adalah nol. Dinotasikan sebagai D.

  Contoh :

$$D_{3x3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

- **Matriks Skalar** adalah matriks diagonal yang semua elemen pada diagonalnya sama

$$D_{3x3} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

JENIS –JENIS MATRIKS

- **Matriks Identitas** adalah matriks skalar yang elemen-elemen pada diagonal utamanya bernilai 1.

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sifat-sifat matriks identitas :

A*I=A

I*A=A

- **Matriks Segitiga Atas** adalah matriks persegi yang elemen di bawah diagonal utamanya bernilai nol
- **Matriks Segitiga Bawah** adalah matriks persegi yang elemen di atas diagonal utamanya bernilai nol

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$