

Himpunan, Dan Fungsi

Ira Prasetyaningrum,M.T

# Materi Matematika 1

- Himpunan dan fungsi
- Matrik
- Limit dan kekontinuan
- Differensial
- Trigonometri
- Integral
- Bilangan Komplek

# Peraturan Di Kelas

- Mahasiswa Maksimal Terlambat 20 Menit.
- Dilarang Makan,minum dan Menerima Telpon diKelas
- Wajib Menggunakan Pakaian Rapi Dan Sopan serta menggunakan sepatu.
- Dilarang Bicara kotor di kelas.

# Prosentase penilaian

- Tugas di dosen jaga : 20%
- UTS :30%
- UAS :35%
- Keaktifan Dikelas :15%

# Definisi Himpunan

- Himpunan (*Set*) adalah kumpulan dari objek-objek yang berbeda
- Anggota Himpunan disebut **elemen/anggota**
- Himpunan ditentukan oleh anggota-anggotanya dan bukan oleh urutan tertentu

# Contoh Himpunan

- Contoh
  - $A = \{1, 3, 5, 7\} = \{7, 5, 3, 1, 3\}$
  - $B = \{x \mid x = 2k + 1, 0 \leq k \leq 30\}$

# Penyajian Himpunan

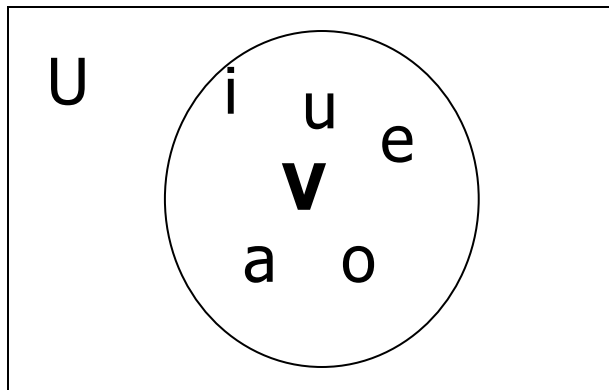
- Enumerasi dengan mendaftar semua elemen himpunan contoh

$$A = \{1,2,3,4\} \quad B = \{a,b,c\}$$

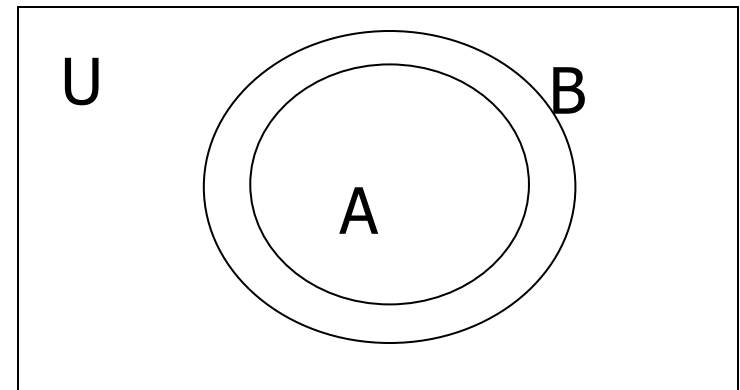
- Menggunakan notasi pembentuk himpunan (notasi set builder)
  - $O = \{x \mid x \text{ adalah bilangan ganjil positif yang kurang dari } 10\}$
  - $R = \{x \mid x \text{ adalah bilangan real}\}.$
- Secara grafik dengan menggunakan Diagram Venn

# Penyajian Himpunan

- Diagram Venn



**Himpunan  
huruf hidup**



**Diagram Venn yang  
menunjukkan bahwa A  
merupakan himpunan bagian  
dari B**



# Contoh Himpunan

- Himpunan huruf hidup dari alphabet  $V = \{a, e, i, o, u\}$
- Himpunan B adalah himpunan positif integer kurang dari 100 maka  $B = \{1, 2, 3, 4, \dots, 99\}$ .
- Himpunan alphabet  $\{a, b, c, d, e, \dots, x, y, z\}$

# Himpunan Berhingga dan Tak Berhingga

- Himpunan berhingga

- Contoh :

- $A = \{1, 2, 3, 4\}$

- $B = \{x \mid x \text{ is an integer, } 1 \leq x \leq 4\}$

- Himpunan tak berhingga

- Contoh :

- $Z = \{\text{integers}\} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

- $S = \{x \mid x \text{ is a real number and } 1 \leq x \leq 4\} = [1, 4]$

# Anggota Himpunan

- $x \in A$  untuk menyatakan  $x$  merupakan anggota himpunan  $A$
- $x \notin A$  untuk menyatakan  $x$  bukan merupakan anggota himpunan  $A$
- Contoh :
  - Misalkan  $A = \{1,2,3\}$   $R = \{a,b,\{a,b,c\},\{a,c\}\}$  maka
  - $2 \in A$  ,  $5 \notin B$  ,  $\{a,b,c\} \in R$  ,  $\{a\} \notin R$

# Dua Himpunan yang Sama

- Dua Himpunan adalah sama jika dan hanya jika kedua himpunan memiliki elemen yang sama. Notasi  $A = B \leftrightarrow A \subseteq B$  dan  $B \subseteq A$
- Contoh :
  - $A = \{1,3,5\}$   $B = \{3,5,1\}$   $C = \{1,3,3,3,1,5\}$
  - $A = B$  karena  $1 \in A$  dan  $1 \in B$ ,  $2 \in A$  dan  $2 \in B$ ,  $3 \in A$  dan  $3 \in B$
  - $A = C$  karena  $1 \in A$  dan  $1 \in C$ ,  $2 \in A$  dan  $2 \in C$ ,  $3 \in A$  dan  $3 \in C$
  - Berarti  $A = C$

# Himpunan Kosong dan Kardinalitas

- Himpunan Kosong dilambangkan dengan  $\{ \}$  atau  $\emptyset$
- Himpunan Kosong adalah himpunan yang tidak memiliki anggota.
- Jumlah elemen dari Himpunan A disebut Kardinalitas simbol  $| A |$ .
- Himpunan yang berhingga dapat ditentukan kardinalitasnya
- Himpunan yang tak berhingga kardinalitas tidak dapat dihitung.

# Himpunan Kosong dan Kardinalitas

- Jika  $A = \{1, 2, 3\}$  maka  $|A| = 3$
- Jika  $B = \{x \mid x \text{ is a natural number and } 1 \leq x \leq 9\}$  maka  $|B| = 9$
- Contoh kardinalitas yang tidak dapat dihitung :
- $R = \{x \mid x \text{ adalah bilangan real}\}$
- $S = \{x \mid x \text{ is a real number and } 1 \leq x \leq 4\} = [1, 4]$

# Himpunan Semesta

- ***Universal set*** (Himpunan semesta):  
himpunan dari semua elemen

□ Contoh:

- $U = \{\text{semua bil asli}\}$
- $U = \{\text{semua bil real}\}$
- $U = \{x \mid x \text{ adalah bil asli and } 1 \leq x \leq 10\}$

# Himpunan Bagian

- Himpunan A merupakan himpunan bagian B jika dan hanya jika setiap elemen A juga merupakan elemen dari B.
- Dinotasikan dengan  $A \subseteq B$
- X adalah *proper subset* dari Y jika  $X \subseteq Y$  tapi tidak  $Y \subseteq X$
- Terdapat himpunan S , Power set S adalah himpunan dari semua himpunan bagian dari himpunan S. Dinyatakan dengan  $P(S)$ .



# Himpunan Bagian

- Apakah Power Set dari Himpunan  $A = \{1,2,3\}$ ?
- $P(A) = \{ \{\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\} \}$   
maka  $|P(A)| = 8$
- Himpunan kosong merupakan himpunan bagian dari semua himpunan.
- **Teorema**
- **Jika  $|X| = n$  maka  $|P(X)| = 2^n$ .**

# Operasi pada Himpunan

- $A \cup B$  (Union/Gabungan)
- $A \cap B$  (Intersection/Irisan)
- disjoint (saling lepas)
- $A - B$  (Difference/Selisih)
- $A^c$  (Komplemen)

# Operasi Gabungan

- Terdapat Himpunan A dan B, Gabungan (Union) dari himpunan A dan B dinyatakan dengan  $A \cup B$  adalah himpunan yang elemennya merupakan anggota himpunan A atau merupakan anggota himpunan B.
- $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ atau } x \in B\}$

# Operasi Irisan

- Terdapat Himpunan A dan B, Irisan (Intersection) dari himpunan A dan B dinyatakan dengan  $A \cap B$  adalah himpunan yang elemennya merupakan anggota himpunan A dan anggota himpunan B.
- $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ dan } x \in B\}$

# Disjoint (saling lepas)

- Dua himpunan disebut disjoint (saling lepas) jika irisannya adalah Himpunan Kosong.
- $A \cap B = \emptyset$

# Selisih (difference)

- Selisih (difference) dari Himpunan A dan B dinyatakan dengan  $A - B$ , Himpunan yang elemennya adalah elemen dari A yang bukan elemen dari B.
- $A - B = \{x \mid x \in A \text{ dan } x \notin B\}$

# Komplemen

- U adalah Himpunan Semesta. Komplemen dari Himpunan A dinyatakan dengan  $A^c$ .
- $A^c = U - A$

# Contoh

- If  $X=\{1, 4, 7, 10\}$ ,  $Y=\{1, 2, 3, 4, 5\}$

$$- X \cup Y =$$

$$- X \cap Y =$$

$$- X - Y =$$

$$- Y - X =$$



# Contoh

- If  $X=\{1, 4, 7, 10\}$ ,  $Y=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 
  - $X \cup Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 10\}$
  - $X \cap Y = \{1, 4\}$
  - $X - Y = \{7, 10\}$
  - $Y - X = \{2, 3, 5\}$

# Definisi Relasi

- Terdapat dua himpunan  $X$  dan  $Y$ , *Cartesian product*  $X \times Y$  adalah himpunan dari semua pasangan terurut  $(x, y)$  dimana  $x \in X$  dan  $y \in Y$ 
  - $X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X \text{ dan } y \in Y\}$
- Contoh :
  - $X = \{A, B\}$
  - $Y = \{1, 2, 3\}$
  - Cross Product
$$X \times Y = \{(A, 1), (A, 2), (A, 3), (B, 1), (B, 2), (B, 3)\}$$
$$Y \times X = \{(1, A), (1, B), (2, A), (2, B), (3, A), (3, B)\}$$
- Cartesian Product  $A \times B = B \times A$  tidak sama.

# Fungsi

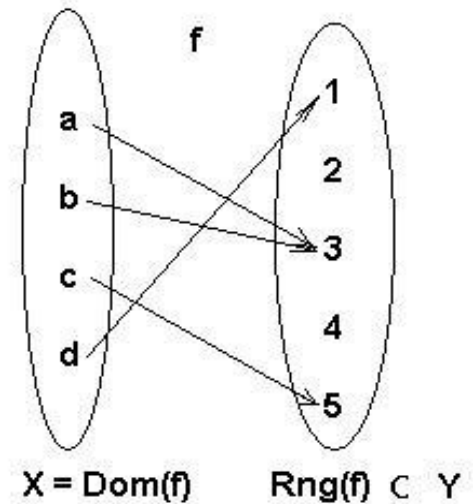
- Fungsi merupakan jenis khusus pada relasi

## Definisi Fungsi :

- Misalkan terdapat himpunan A dan B. Relasi biner  $f$  dari A ke B merupakan suatu fungsi jika setiap elemen di dalam A dihubungkan dengan tepat satu elemen di dalam B. Jika  $f$  adalah fungsi dari A ke B kita menuliskan  $f : A \rightarrow B$   
yang artinya  $f$  **memetakan** A ke B
- Nama lain fungsi adalah **pemetaan** atau **transformasi**
- Ditulis  $f(a) = b$

# Fungsi

- Himpunan A disebut **daerah asal** (*domain*) dari  $f$
- Himpunan B disebut **daerah hasil** (*codomain*) dari  $f$
- Himpunan yang berisi semua nilai pemetaan  $f$  disebut **range** (jelajah)
- *Range* dari  $f$  =  
 $\{ b \mid b = f(a) \text{ untuk beberapa } x \in A \}$
- Example:
  - $\text{Dom}(f) = X = \{a, b, c, d\}$ ,
  - $\text{Rng}(f) = \{1, 3, 5\}$
  - $f(a) = f(b) = 3, f(c) = 5, f(d) = 1$ .



# Contoh

- Daerah asal  $A = \{1,2,3\}$   $B = \{u,v,w\}$
- $f = \{(1,u),(2,v),(3,w)\} \rightarrow$  fungsi
- $f = \{(1,u),(2,u),(3,v)\} \rightarrow$  fungsi
- $f = \{(1,u),(2,u),(1,w)\} \rightarrow$  bukan fungsi

# Fungsi Invers

- Terdapat sebuah fungsi  $y = f(x)$ , fungsi inverse  $f^{-1}$  adalah himpunan  $\{(y, x) \mid y = f(x)\}$ .

# Invers

## Contoh

$$f(\text{Linda}) = \text{Moscow}$$

$$f(\text{Max}) = \text{Boston}$$

$$f(\text{Kathy}) = \text{Hong Kong}$$

$$f(\text{Peter}) = \text{Lübeck}$$

$$f(\text{Helena}) = \text{New York}$$

## Fungsi invers $f^{-1}$ :

$$f^{-1}(\text{Moscow}) = \text{Linda}$$

$$f^{-1}(\text{Boston}) = \text{Max}$$

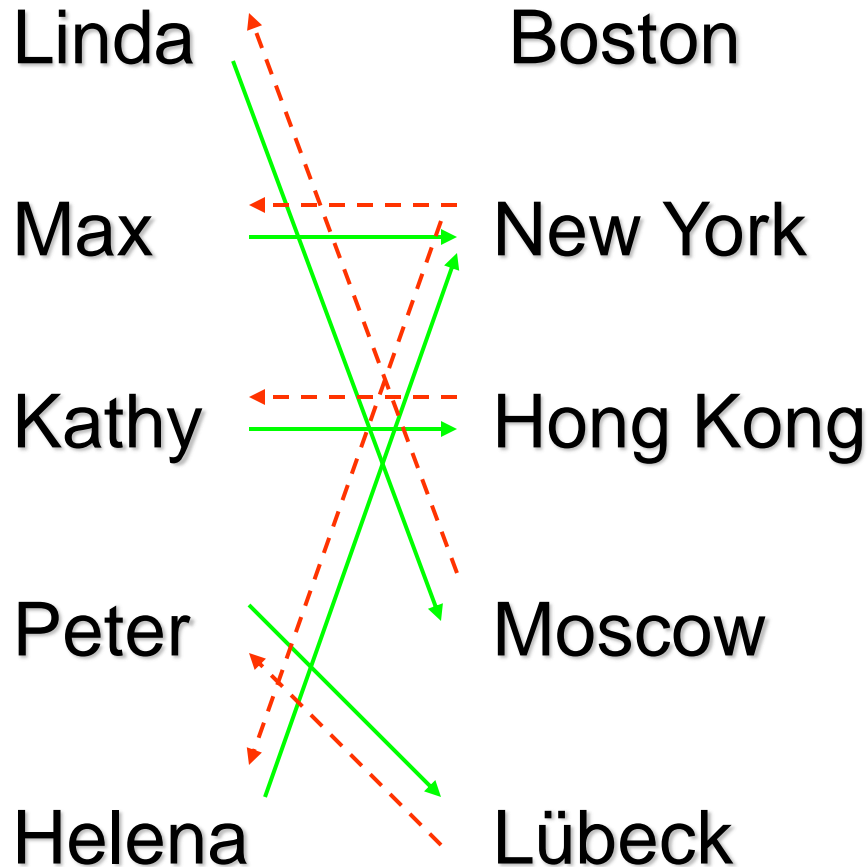
$$f^{-1}(\text{Hong Kong}) = \text{Kathy}$$

$$f^{-1}(\text{Lübeck}) = \text{Peter}$$

$$f^{-1}(\text{New York}) = \text{Helena}$$

Invers hanya mungkin untuk bijektif (fungsi yang invertible)

# Invers



$f$  

$f^{-1}$  

•  $f^{-1}: C \rightarrow P$  bukan fungsi karena New York dipetakan ke dua elemen yang berbeda yaitu Max dan Helena.



# Contoh

- Tentukan fungsi invers  $f(x) = x^2 + 1$
- Fungsi  $f(x) = x^2 + 1$  bukan fungsi one to one sehingga tidak memiliki fungsi invers

# Komposisi fungsi

- Terdapat dua fungsi  $g : X \rightarrow Y$  dan  $f : Y \rightarrow Z$ , komposisi  $f \circ g$  didefinisikan sebagai berikut :
- $f \circ g (x) = f(g(x))$  untuk setiap  $x \in X$
- Contoh :
  - $g(x) = x^2 - 1$ ,
  - $f(x) = 3x + 5$ .
  - $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(3x + 5) = (3x + 5)^2 - 1$
- Komposisi fungsi memenuhi hukum asosiatif :  $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$  tetapi tidak memenuhi hukum komutatif :  $f \circ g \neq g \circ f$ .

# Komposisi

- Contoh:

- $f(x) = 7x - 4$ ,  $g(x) = 3x$ ,

- $f:\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}$ ,  $g:\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}$

- $(f\circ g)(5) = f(g(5)) = f(15) = 105 - 4 = 101$

- $(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x) = 21x - 4$

# Komposisi

- Komposisi fungsi dan inversnya menghasilkan **fungsi identitas**

$$i(x) = x.$$

- $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x$

**Soal –soal**

# Latihan Soal

1. Sebutkan anggota dari himpunan-himpunan di bawah ini:
  - $A = \{x \mid x \text{ adalah bilangan real yang memenuhi } x^2 = 1\}$
  - $B = \{x \mid x \text{ adalah bilangan integer kurang dari } 12\}$
2. Buat notasi pembangkit himpunan untuk mendeskripsikan himpunan di bawah ini:
  - $\{0, 3, 6, 9, 12\}$
  - $\{M, N, O, P\}$
3. Cari himpunan A dan B jika  $A - B = \{1, 5, 7, 8\}$   $B - A = \{2, 10\}$  dan  $A \cap B = \{3, 6, 9\}$

# Latihan Soal

4. Dapatkan  $f \circ g(x) = (x^2 + 1) / (x^2 + 2)$   
dan dimana  $g(x) = 2x + 1$  cari  $f(x)$
5. Dapatkan  $f \circ g(x)$  dan  $g \circ f(x)$  dimana  
 $f(x) = x^2 + 1$  dan  $g(x) = x + 2$