Reporte de la presentación

Difusiones de Feller y Difusiones de Wright-Fisher

Iván Irving Rosas Domínguez

8 de diciembre de 2023

Resumen

Tanto los procesos de ramificación como el modelo de Wright-Fisher surgen de la Biología. Por un lado, podemos pensar en los procesos de ramificación como un modelo para el crecimiento de una población que comienza con un individuo $X(0) = 1$, y que a cada tiempo $n \geq 1$, el número de individuos en la generación $n + 1$, consiste en el número total de descendientes que tuvieron los individuos de la generación n. Las hipótesis básicas son que los individuos en la generación n se reproducen de manera independiente, y la distribución de su descendencia es la misma par todos los individuos.

Es conocido que, bajo cierto reescalamiento en espacio y en tiempo, este proceso termina convergiendo en cierto sentido a un proceso continuo. Este es el análogo continuo para el proceso de ramificación, y se conoce como la difusión de ramificación de Feller.

Análogamente, el modelo a tiempo discreto de Wright-Fisher tiene por objetivo describir el comportamiento de distintas características en una población de individuos. Se supone la población constante, que solo hay dos características a estudiar, digamos, la característica **a** y la característica **A**. También se supone que los individuos en la generación $n + 1$ 'eligen' a su ancestro de acuerdo a una determinada regla. Típicamente esta regla consiste en una elección uniforme de un individuo de la generación anterior y en consecuencia se adopta la característica que tal individuo posea. Luego, podemos estudiar la frecuencia de la cantidad de individuos con una característica con respecto al total. Este proceso $X(n)$ es por lo tanto un proceso discreto con valores en $[0, 1]$

Nuevamente es conocido que bajo un reescalamiento en espacio y tiempo adecuados, este proceso también converge en cierto sentido a un proceso continuo. Este proceso es el análogo continuo del modelo anterior, y se conoce como difusión de Wright-Fisher.

Presentamos aquí los detalles de las demostraciones realizadas en la presentación sobre la difusión de Feller y la difusión de Wright-Fisher, así como la prueba de resultados auxiliares que fueron utilizados para ello.

Difusión de Ramificación de Feller

Un proceso de ramificación simple se puede ver como un modelo para el crecimiento de una población en el que cada individuo se reproduce de manera independiente de los demás, y la descendencia de cada individuo tiene una distribución idéntica. La versión continua de este proceso es la difusión de ramificación.

Establecemos a continuación la definición de un proceso de ramificación de Feller.

Definición 1. Sea $t \geq 0$ y supongamos que $X(0) > 0$ es una distribución inicial. Entonces $X = (X(t))_{t\geq 0}$ es una difusión de Feller si X cumple la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dX(t) = \alpha X(t)dt + \sigma\sqrt{X(t)}dB(t),$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$, y $\sigma > 0$.

El coeficiente α mide la *deriva* y este coeficiente es positivo, negativo o cero, dependiendo de si el promedio de la población crece o decrece. W. Feller en 1951 [1] estudia este proceso y resuelve la ecuación diferencial parcial de Fokker-Plank asociada

[1]Ver el artículo original de W. Feller de 1951: `https://digitalassets.lib.berkeley.edu/math/ucb/text/math_s2_article-17.pdf`

a este proceso. A saber, si p representa la densidad de probabilidad asociada al generador infinitesimal del proceso, se tiene que

$$\partial_t p(t,x) = \frac{\sigma^2}{2}\partial_{xx}(xp(t,x)) - \alpha\partial_x(xp(t,x)),$$

por lo que en particular construyó una solución débil de la EDE (1).

En esta sección procedemos a demostrar la existencia y unicidad de una solución fuerte la para la ecuación de difusión de Feller. Posteriormente, se estudian propiedades de las difusiones de ramificación con respecto a las probabilidades de extinción y su comportamiento cuando t tiende a infinito.

Observamos directamente de (1) que no es posible aplicar el criterio de existencia y unicidad visto en el curso ya que el coeficiente de difusión dado por $\beta(x) = \sigma\sqrt{x}$ no es una función Lipschitz en cero. Dado que estamos interesados en el comportamiento de la solución cuando $X(t)$ tiende a cero (lo cual sería interpretado como que la población está cerca de extinguirse), debemos sortear esta dificultad, ya que a priori no es clara la existencia y unicidad de la solución.

Sin embargo, es posible resolver este problema aproximando por procesos que sí sean Lipschitz en cero. Este resultado se presenta en el siguiente

Teorema 1. La ecuación diferencial estocástica dada por

$$dX(t) = \alpha X(t)dt + \sigma\sqrt{X(t)}dB(t) \tag{1}$$

con $X(0) > 0$, tiene una única solución no negativa. Más aún, si $X(t)$ es esa solución y $\tau = \text{ínf}\{t \geq 0 : X(t) = 0\}$, entonces $X(t) = 0$ para toda $t \geq \tau$.

Demostración. Para cada $n \geq 1$, consideramos la siguiente EDE:

$$dX^n(t) = \alpha X^n(t)dt + \sigma\sqrt{\tfrac{1}{n} \vee X^n(t)}dB(t), \qquad X^n(0) = 0. \tag{2}$$

Notamos que el coeficiente de difusión de la ecuación anterior, $\beta_n(x) = \sigma\sqrt{\frac{1}{n} \vee x}$ es Lipschitz continuo. Una manera de ver lo anterior es que su derivada existe λ - casi en todas partes, donde λ representa la medida de Lebesgue. Notamos que esta derivada está dada casi en todas partes por

$$\frac{d}{dx}\beta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si } x \geq \frac{1}{n}, \end{cases}$$

la cual es una función que está acotada, para cada $n \geq 1$, por $\frac{\sqrt{n}}{2}$. Lo anterior garantiza que $\beta_n(x)$ es una función Lipschitz. Dado que $\mu_n(x) = \mu(x) = \alpha x$, se tiene que para cada $n \geq 1$, $\mu_n(x)$ y $\beta_n(x)$ son funciones Lipschitz y de crecimiento lineal. Por lo tanto, por el criterio de existencia y unicidad de soluciones fuertes, existe una única solución fuerte a la ecuación 2.

Denotamos $\tau_0 = 0$ y $\tau_n := \text{ínf}\{t > 0 : X^n(t) = \frac{1}{n}\}$, con la convención usual $\text{ínf}(\varnothing) = \infty$. Dado que $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$, entonces para $N \in \mathbb{N}$ fijo y para $t < \tau_N$, se tiene que X^n es también solución de la ecuación que resuelve X^N, para cualquier $n \geq N$. Pero las soluciones son únicas. Luego, $X^n(t) = X^N(t)$ para $t < \tau_N$,y para $n \geq N$.

Por otro lado, de la definición de los tiempos de paro τ, $\tau_{n+1} \geq \tau_n$ para cualquier $n \geq 1$. Denotamos $\tau := \text{lím}_{n\to\infty} \tau_n$. Obsérvese que dicho límite existe y es una variable aleatoria ya que los tiempos de paro son positivos y crecientes. Obsérvese también que dicho límite puede ser ∞.

Definimos al proceso X de la siguiente manera:

$$\begin{cases} X(t \wedge \tau) = X^{n+1}(t) & \text{si } \tau_n \leq t \leq \tau_{n+1} \\ X(t) = 0 & \text{si } t > \tau \text{ (si es que } \tau < \infty). \end{cases}$$

Hemos entonces construido una solución a la ecuación (1). Más áun, esta solución es tal que, si $X(t) = 0$ para algún $t > 0$, entonces $X(t) = 0$ para cualquier $t \geq 0$. Además, dado que $X(0) > 0$, y las soluciones a las ecuaciones (2) son continuas, por definición de τ_n los hitting times al 0, la solución X construida antes es positiva. Finalmente, argumentamos la unicidad de la solución recordando el siguiente

Teorema 2. (Yamada-Watanabe). En $\mathbb{R}$, si $\mu(x)$ es Lipschitz y $\sigma(x)$ es $\alpha-$Hölder continua, con $\alpha \geq \frac{1}{2}$, entonces existe una solución fuerte a la ecuación de difusión homogénea en el tiempo, y esta es única.

Nótese que X cumple las condiciones anteriores, concluyendo la demostración. ■

Una vez que establecimos la existencia y la unicidad de la solución anterior, establecemos el siguiente resultado que nos habla sobre el crecimiento exponencial de la población. Para ello, primero probamos el siguiente Lema:

Proposición 1. Sea g una función no negativa definida en $[0, \infty]$. Entonces para cualesquiera $t, T > 0$, se tiene que

$$\int_0^{t\wedge T} g(s)ds \leq \int_0^{\mathrm{t}} g(s\wedge T)ds$$

Demostración. La prueba va por casos. Supongamos primero que $t < T$, $s \wedge T = s$ para cualquier $s \leq t$, y con ello,

$$\int_0^{t\wedge T} g(s)ds = \int_0^t g(s)ds = \int_0^t g(s\wedge T)ds,$$

así que de hecho se tiene la igualdad de las integrales. En el caso en que $T \leq t$,

$$\int_0^{t\wedge T} g(s)ds = \int_0^T g(s)ds \leq \int_0^T g(s)ds + \int_T^t g(T)ds = \int_0^T g(s\wedge T)ds + \int_T^t g(s\wedge T)ds = \int_0^t g(s\wedge T)ds.$$

■

Probamos ahora la siguiente afirmación.

Teorema 3. Sea $X(t)$ la solución de la ecuación diferencial (1), y $X(0) > 0$. Entonces $\mathbb{E}[X(t)] = X(0)e^{-\alpha t}$. Además, $X(t)e^{-\alpha t}$ es una martingala no negativa y que converge casi seguramente a un límite no trivial cuando t tiende a ∞ si $\alpha > 0$

Demostración. Para probar que en efecto el proceso $X(t)e^{-\alpha t}$ es martingala, es importante probar que el proceso $X(t)$ es en efecto integrable. Para ello, notemos que de la ecuación de difusión de Feller (1), se tiene que

$$\int_0^t \sqrt{X(s)}dB(s), \qquad 0 \leq t$$

es solamente una martingala local en principio. Por lo tanto, la propiedad de martingala solo se vale en alguna sucesión de tiempos de paro crecientes y que convergen a $+\infty$. tales que . Notamos que $T_n := \inf\{t \geq 0 : X(t) \geq n\}$ es una sucesión de tiempos de paro, creciente, y tal que $T_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$. Además, se puede demostrar que esta es una sucesión localizante para la integral de Itô. Usando tal sucesión, la ecuación de difusión de Feller toma la siguiente forma integral: para $n \geq 1$,

$$X(t\wedge T_n) - X(0) = \alpha \int_0^{t\wedge T_n} X(s)ds + \sigma \int_0^{t\wedge T_n} \sqrt{X(s)}dB(s).$$

Dado que para $t \leq T_n$, $X(t) \leq n$, las esperanzas están definidas, así que tomando esperanzas en ambos lados y usando la propiedad de martingala local, se tiene que

$$\mathbb{E}[X(t\wedge T_n)] = X(0) + \alpha\mathbb{E}\left[\int_0^t X(s)ds\right]$$

Ahora bien, utilizando 1, y el teorema de Tonelli, se tiene que

$$\begin{aligned} X(0) + \alpha\mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge T_n} X(s)ds\right] &\leq X(0) + \alpha\mathbb{E}\left[\int_0^t X(s\wedge T_n)ds\right] \\ &= X(0) + \alpha\int_0^t \mathbb{E}[X(s\wedge T_n)]\,ds \\ &\leq X(0)e^{\alpha t}, \end{aligned}$$

donde para el último paso hemos utilizado la desigualdad de Grownwall con la función $\mathbb{E}\left[X(t\wedge T_n)\right]$. Ahora bien, dado que X es una solución a la EDE (1), X tiene trayectorias continuas, por lo que $X(t\wedge T_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} X(t)$. Luego, por el Lema de Fatou,

$$\mathbb{E}(X(t)) = \mathbb{E}\left[\liminf_{n\to\infty} X(t\wedge T_n)\right] \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[X(t\wedge T_n)\right] \leq X(0)e^{\alpha t}.$$

Por lo tanto, las esperanzas están bien definidas. Probamos ahora que de hecho el término de la integral de Itô es de hecho una Martingala. Para ello, calculamos su variación cuadrática:

$$\mathbb{E}\left[[M,M](t)\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t X(s)ds\right] \leq \int_0^t X(0)e^{\alpha s}ds \leq Ce^{\alpha t},$$

donde hemos usado la desigualdad anterior para las esperanzas y Tonelli. Luego, M es una martingala local, que se anula en cero, y tal que $\mathbb{E}\left[\sqrt{[M,M](t)}\right] < \infty$ para cualquier t. Entonces M es una martingala uniformemente integrable en $[0,T]$, para cualquier $T>0$.

Regresamos nuevamente a la ecuación de Feller, la cual en forma integral y para $t>0$ arbitrario es:

$$X(t) = X(0) + \alpha\int_0^t X(s)ds + \sigma\int_0^t \sqrt{X(s)}dB(s),$$

Gracias a que probamos que la integral es martingala, si tomamos esperanzas dicho término es cero, por lo que

$$\mathbb{E}(X(t)) = \mathbb{E}(X(0)) + \alpha\mathbb{E}\left[\int_0^t X(s)ds\right] = \mathbb{E}\left[X(t)\right] + \alpha\int_0^t \mathbb{E}(X(s))ds,$$

por lo que haciendo $f(t) = \mathbb{E}(X(t))$, tenemos que

$$f(t) = K + \alpha\int_0^t f(s)ds,$$

con $K = \mathbb{E}\left[X(0)\right]$. Escribiendo la ecuación en forma diferencial se tiene la siguiente ecuación diferencial con condición inicial:

$$\begin{cases} f'(t) = f(t), & \text{si } 0 \leq t \\ f(0) = K \end{cases}$$

y resolviendo, tenemos que $\mathbb{E}\left[X(t)\right] = \mathbb{E}\left[X(0)\right]e^{\alpha t}$. En particular, si elegimos $X(0) = x$ una condición puntual, se tiene que

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right] = X(0)e^{\alpha t}.$$

Finalemente, probamos que $X(t)e^{-\alpha t}$ es una martingala que posee un límite no trivial. Para ello, utilizamos integración por partes con el término $X(t)e^{-\alpha t}$. Notamos que

$$d(X(t)e^{-\alpha t}) = X(t)(-\alpha e^{-\alpha t})dt + e^{-\alpha t}dX(t) + d[e^{-\alpha\cdot}, X](t).$$

Dado que conocemos el diferencial de X, y que el proceso $e^{-\alpha t}$ es de variación finita, el término de variación cruzada es cero, por lo que la ecuación anterior toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned} d(X(t)e^{-\alpha t}) &= -\alpha X(t)e^{-\alpha t}dt + e^{-\alpha t}\alpha X(t)dt + \sigma^2 e^{-\alpha t}\sqrt{X(t)}dB(t) \\ &= \sigma^2 e^{-\alpha t}\sqrt{X(t)}dB(t), \end{aligned}$$

que en términos de integrales se escribe:

$$X(t)e^{-\alpha t} = X(0) + \sigma^2\int_0^t e^{-\alpha s}\sqrt{X(s)}ds.$$

Aseguramos que el término anterior es en realidad una martingala uniformemente integrable. Para ello, denotamos $U(t) = X(t)e^{-\alpha t}$ y notamos que, al ser una integral de Itô, se tiene que U es una martingala local. Ahora, calculando la esperanza de su variación cuadrática, tenemos que

$$\mathbb{E}\left[[U,U](t)\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t e^{-2\alpha s} X(s) ds\right] = \int_0^t e^{-2\alpha s}\mathbb{E}\left[X(s)\right] ds = \int_0^t e^{-2\alpha s}\mathbb{E}\left[X(0)\right] e^{\alpha s} ds = \mathbb{E}\left[X(0)\right] \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha} < \infty$$

Por lo tanto, se tiene que $X(t)e^{-\alpha t}$ es una martingala cuadrado integrable sobre todo $[0,T]$, $T > 0$ y además es uniformemente integrbale sobre todo $[0,T]$. Más aún, si $\alpha > 0$, entonces la parte de la derecha de la cota anterior es decreciente, por lo que si tomamos supremo sobre t, se tiene que

$$\sup_{t\geq 0} \frac{\mathbb{E}\left[X(0)\right](1-e^{-\alpha t})}{\alpha} = \mathbb{E}\left[X(0)\right]\frac{1}{\alpha} < \infty.$$

Luego, se tiene que U es una martingala uniformemente integrable, e incluso es cuadrado-integrable.

Dado que U tiene esa forma tan particular, tenemos que U tiene segundos momentos finitos, por lo que tiene, como martingala, un último elemento no trivial U_∞, y se tiene que

$$U(t) = \mathbb{E}\left[U_\infty|\mathcal{F}_t\right], 0 \leq t \leq \infty.$$

y además,

$$U(t) \xrightarrow[t\to\infty]{0} U_\infty$$

casi seguramente y en L^2. ■

Lo anterior nos dice que el comportamiento de la población cuando $t \to \infty$ es del orden exponencial. Luego, si $\alpha > 0$, entonces el término exponencial que multiplica a la martingala 'empuja' la población hacia el cero, de tal forma que cuando el tiempo pasa, la población se estabiliza en un límite no trivial.

Finalmente probamos un resultado que tiene que ver con las probabilidades de extinción del proceso.

Teorema 4. Sea $X(t)$ una solución a la ecuación diferencial estocástica (1) y supongamos $X(0) = x > 0$. Entonces la probabilidad de extinción última está dada por

$$P(\text{Extinción}) = e^{-\frac{2\alpha}{\sigma^2}x}$$

si $\alpha > 0$ y es 1 si $\alpha \leq 0$.

Demostración. Sean $T_0 := \inf t \geq 0 : X(t) = 0$ y $T_b := \{t \geq 0 : X(t) = b\}$ los tiempos de paro que indican el primer instante en el que la población llega a 0 y llega a $b > 0$ respectivamente. Las probas de salida de $[0,b]$ están dadas, de acuerdo a lo visto en clase, por

$$\mathbb{P}_x\left(T_0 < T_b\right) = \frac{S(b) - S(x)}{S(a) - S(0)},$$

donde $S(x)$ la función de escala está dada por

$$S(x) = \int_{x_1}^x \exp\left\{-\int_{x_0}^u \frac{2\alpha}{\sigma^2} dy\right\} du = Ke^{-\frac{2\alpha x}{\sigma^2}} + L,$$

donde K y L son constantes que dependen de los puntos positivos x_0, x_1 y α, σ. Simplificando,

$$\mathbb{P}_x(T_0 < T_b) = \frac{e^{-cx} - e^{-cb}}{1 - e^{-cb}}, \qquad c = \frac{2\alpha}{\sigma^2}$$

Luego, la probabilidad de extinción está dada por el límite cuando b tiende a $+\infty$. Denotando por $T_\infty =: \lim_{b\to\infty} T_b$, usando el hecho de que T_b converge crecientemente a T_∞, se tiene por el teorema de continuidad de la medida de probabilidad que

$$\mathbb{P}_x(T_0 < T_\infty) = \lim_{b\to\infty} \mathbb{P}_x(T_0 < T_b) = \lim_{b\to\infty} \frac{e^{-cx} - e^{-cb}}{1 - e^{-cb}} = \begin{cases} e^{-\frac{2\alpha}{\sigma^2}x} & \text{si } \alpha > 0 \\ 1 & \text{si } \alpha \leq 0, \end{cases}$$

donde al momento de pasar al límite, si $\alpha > 0$, entonces el comportamiento del límite está dado esencialmente por la expresión $e^{-cx} = e^{-\frac{2\alpha}{\sigma^2}x}$, mientras que si $\alpha \leq 0$ el comportamiento está dado por el cociente $\frac{e^{-cb}}{e^{-cb}}$, que en el límite se vuelve 1 y obtenemos lo anteriormente dicho.

Resta ahora ver qué sucede con la expresión T_∞. Dicha expresión indica el instante en el cual el proceso llega a $+\infty$. Si dicho instante es finito con probabilidad positiva, entonces la población explotará en un tiempo finito. Sin embargo, utilizamos el test de Feller para ver que la solución a la ecuación anterior no explota en un tiempo finito:

donde T_∞ es el tiempo de explosión, el cual será infinito si la explosión no ocurre.

Pero usando el test de explosión de Feller, no hay explosión y $T_\infty = \infty$. Luego, la probabilidad de que la población se extinga en un tiempo finito está dada por

$$\mathbb{P}_x(T_0 < \infty) = \begin{cases} e^{-\frac{2\alpha}{\sigma^2}x} & \text{si } \alpha > 0 \\ 1 & \text{si } \alpha \leq 0, \end{cases}$$

■

Finalmente, se presenta en [1] una nueva manera de ver a la difusión en términos de un movimiento Browniano con cambio de tiempo, aplicando el teorema Davis-Dubins-Schwarz. Ver Capítulo 7.

Difusión de Wright-Fisher

Teorema 5. El proceso de difusión de Wright-Fisher está dado por

$$dX(t) = (-\gamma_1 X(t)) + \gamma_2(1 - X(t))dt + \sqrt{X(t)(1 - X(t))}dB(t),$$

con $0 < X(0) < 1$. Y este cumple con las siguientes propiedades:

- Cuando no hay mutación (i.e. $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$), la función ecuación se vuelve

  $$dX(t) = \sqrt{X(t)(1 - X(t))}dB(t),$$

  y la función de escala está dada por $S(x) = x$, por lo que en consecuencia para $0 \leq a < x < b < 1$,

  $$\mathbb{P}_x(T_b < T_a) = \frac{x - a}{b - a}$$

  Además, el tiempo esperado para fijación de un alelo está dada como solución de la ecuación $Lv = -1$, la cual es

  $$v(x) = \mathbb{E}_x[\tau] = -2((1 - x)\ln(1 - x) + x\ln(x)).$$

- Cuando el modelo tiene una constante de mutación positiva, digamos, cuando $\gamma_2 = 0$ y $\gamma := \gamma_1 > 0$, entonces la ecuación estocástica se vuelve

  $$dX(t) = -\gamma X(t)dt + \sqrt{X(t)(1 - X(t))}dB(t),$$

  con $0 < X(0) < 1$. En este caso, la función de escala está dada por

  $$S(x) = \frac{1 - (1 - x)^{1-2\gamma}}{1 - 2\gamma}$$

  si $\gamma \neq \frac{1}{2}$ y está dada por

  $$S(x) = -\log(1 - x),$$

  cuando $\gamma = \frac{1}{2}$. Se tiene también que $T_b \xrightarrow[t \to b]{} T_1$ y si $\gamma \geq \frac{1}{2}$, se tiene

  $$\mathbb{P}_x(T_1 < T_0) = \lim_{t \to \infty} \mathbb{P}_x(T_b < T_0) = 0$$

  El tiempo esperado de fijación es finito y este ocurre con probabilidad 1 si $\gamma \geq \frac{1}{2}$, y con proba positiva ocurren ambas fijaciones si $\gamma < \frac{1}{2}$.

- En el caso en el que $\gamma_1, \gamma_2 > 0$, se tiene que las fijaciones no ocurren y $X(t)$ admite una distribución estacionaria. Esta tiene la forma
$$\frac{1}{\beta(2\gamma_1, 2\gamma 2)}(1-x)^{2\gamma_1 - 1}x^{2\gamma_2 - 1},$$
es decir, la distribución estacionaria de $X(t)$ es una variable $\beta(2\gamma 1, 2\gamma 2)$

Demostración. Para probar
$$\mathbb{P}_x(\text{La característica A se fijó}) = \mathbb{P}_x(T_0 < T_1) = x,$$
se calcula la función de escala de $X(t)$. Notamos que, como $\mu(x) = 0$, entonces
$$S(x) = \int_{x_1}^{x} \exp\left\{ -\int_{x_0}^{u} \frac{2\mu(s)}{\sigma^2(s)} ds \right\} du = x$$
Luego,
$$\mathbb{P}_x(T_b < T_a) = \frac{x-a}{b-a}, \qquad 0 \le a < x < b \le 1$$
Tomando $a = 0$, $b = 1$, se tiene lo buscado.

El tiempo esperado de salida de la difusión del intervalo $[0,1]$ está dado por la solución a la ecuación diferencial $v(0) = v(1) = 0$, y $Lv = -1$.

El generador infinitesimal del proceso $L_t f$ está dado por
$$L_t f(x) = \mu(x)\partial_x f(x) + \frac{1}{2}\sigma^2(x)\partial_{xx} f(x) = 0 + \frac{x(1-x)}{2} f''(x),$$
por lo que tenemos que resolver la ecuación diferencial
$$\begin{cases} \frac{x(1-x)}{2} v''(x) = -1 & \text{si } 0 < x < 1, \\ v(0) = v(1) = 0 \end{cases}$$
Resolviendo la EDO de segundo orden anterior, utilizando que
$$\int_0^t \ln(x) = x\ln(x) - x,$$
se tiene que
$$v(x) = \mathbb{E}_x\left[\tau_{a,A}\right] = -2((1-x)\ln(1-x) + x\ln(x))$$
Para el caso en el que tenemos mutación unilateral, las cuentas son análogas pero más técnicas. En particular, el proceso tiene trayectorias continuas, por lo que el límite cuando $b \to \infty$ está justificado.

Finalmente, para el tercer caso en el que se tiene la posibilidad de mutaciones bilaterales, encontramos explícitamente la distribución invariante del proceso.

Para ello, utilizamos el criterio para hallar la fórmula para la densidad:
$$\begin{aligned} \pi(x) = \frac{C}{\beta^2(x)} \exp\left(\int_{x_0}^{x} \frac{2\mu(s)}{\sigma^2(s)} ds \right) &= \frac{C}{1-x} \exp\left(\int_{x_0}^{x} \frac{-2\gamma_1 x + 2\gamma_2(1-x)}{x(1-x)} dx \right) \\ &= \frac{C}{x(1-x)} \exp\left\{ 2\gamma_1 \ln(1-x) + 2\gamma_2 \ln(x) \right\} \\ &= \frac{C}{x(1-x)} (1-x)^{2\gamma_1} x^{2\gamma_2} \\ &= Cx^{2\gamma_2 - 1}(1-x)^{2\gamma_1 - 1}, \end{aligned}$$
que es proporcional a la densidad de una variable $Beta(2\gamma_1, 2\gamma_2)$. Añadiendo la constante C adecuada obtenemos el resultado.

Karlin & Taylor (1981), A second course in Stochastic Processes, sección 15, es una referencia que contiene a detalle muchos más resultados sobre la difusión de Wright-Fisher.

■

Referencias

[1] Klebaner, F. (2012). *An Introduction to Stochastic Calculus with Applications.* (3^{ra} ed.) England: Imperial College Press.

[2] S. Karlin, H. Taylor (1981. *A second course in Stochastic Processess*). Nueva York: Academic Press, Inc.