Cálculo Estocástico
Tarea 6

Iván Irving Rosas Domínguez

20 de octubre de 2023

1. Teorema (Existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales estocásticas)

Sea $T > 0$ y sean $b(\cdot,\cdot) : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ \sigma(\cdot,\cdot) : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times m}$ dos funciones medibles que satisfacen

$$|b(t,x)| + |\sigma(t,x)| \leq C(1+|x|), \qquad x \in \mathbb{R}^n,\ t \in [0,T]$$

para alguna constante $C > 0$ (donde $|\sigma|^2 = \sum |\sigma_{ij}|^2$) y tales que

$$|b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq D|x-y|, \qquad x,y \in \mathbb{R}^n,\ t \in [0,T]$$

para alguna constante D. Sea Z una variable aleatoria que es independiente de la $\sigma-$álgebra $\mathcal{F}_\infty^{(m)}$ generada por $B_s(\cdot)$, $s \geq 0$, y tal que

$$\mathbb{E}\left[|Z|^2\right] < \infty.$$

Entonces la ecuación diferencial estocástica

$$dX_t = b(t,X_t)dt + \sigma(t,X_t)dB_t, \qquad 0 \leq t \leq T,\ X_0 = Z$$

tiene una única solución $X_t(\omega)$, continua en la variable t con la propiedad de que $X_t(\omega)$ es adaptada a la filtración $\mathcal{F}_t^Z$ generada por Z y $B_s(\cdot)$, con $s \leq t$ y

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T |X_t|^2 dt\right] < \infty.$$

2. Verificar que los procesos dados resuelven las correspondientes ecuaciones diferenciales estocásticas: (B_t denota el movimiento Browniano 1-dimensional)

a) $X_t = e^{B_t}$ resuelve $dX_t = \frac{1}{2}X_t dt + X_t dB_t$

b) $X_t = \frac{B_t}{1+B_t};\ B_0 = 0$ resuelve

$$dX_t = -\frac{1}{1+t}X_t dt + \frac{1}{1+t}dB_t; \qquad X_0 = 0.$$

c) $X_t = \operatorname{sen}(B_t)$ con $B_0 = a \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ resuelve

$$dX_t = -\frac{1}{2}X_t dt + \sqrt{1-X_t^2}dB_t \quad \text{para} \quad t < T(\omega) = \inf\left\{s > 0 : B_s \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right\}.$$

d) $(X_1(t), X_2(t)) = (t, e^t B_t)$ resuelve

$$\begin{bmatrix} dX_1 \\ dX_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ X_2 \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 0 \\ e^{X_1} \end{bmatrix} dB_t$$

e) $(X_1(t), X_2(t)) = (\cosh(B_t), \sinh(B_t))$ resuelve

$$\begin{bmatrix} dX_1 \\ dX_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} X_2 \\ X_1 \end{bmatrix} dB_t$$

3. Sea $(B_1, ..., B_n)$ un movimiento Browniano en $\mathbb{R}^n$, $\alpha_1, ..., \alpha_n$ constantes. Resolver la ecuación diferencial estocástica

$$dX_y = rX_t dt + X_t \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k dB_k(t) \right); \qquad X_0 > 0.$$

(Este es un modelo para un crecimiento exponencial con varias fuentes de ruido blanco independientes en la tasa de crecimiento relativa.)

4. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales estocásticas

a)

$$\begin{bmatrix} dX_1 \\ dX_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & X_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dB_1 \\ dB_2 \end{bmatrix}.$$

b) $dX_t = X_t dt + dB_t$. (Sugerencia: multiplicar ambos lados con el 'factor integrante' e^{-t} y comparar con $d(e^{-t}X_t)$).

c) $dX_t = -X_t dt + e^{-t} dB_t$.

5. Resolver la ecuación diferencial estocástica (2-dimensional)

$$\begin{aligned} dX_1(t) &= X_2(t)dt + \alpha dB_1(t) \\ dX_2(t) &= X_1(t)d + \beta dB_2(t) \end{aligned}$$

donde $(B_1(t), B_2(t))$ es un movimiento Browniano 2-dimensional y α, β son constantes. Este es un modelo para una cuerda vibrante sujeta a una fuerza estocástica.

6. (El puente Browniano).

Para $a, b \in \mathbb{R}$ fijos, considérese la siguiente ecuación 1-dimensional.

$$dY_t = \frac{b - Y_t}{1 - t} dt + dB_t; \qquad 0 \le t < 1, \quad Y_0 = a.$$

Verificar que

$$Y_t = a(1-t) + bt + (1-t) \int_0^t \frac{dB_s}{1-s}; \qquad 0 \le t < 1$$

resuelve la ecuación y demostrar que $\lim_{t \to 1} Y_t = b$ c.s. El proceso Y_t es denominado *el puente Browniano* (de a a b).