Cálculo Estocástico
Tarea 4

Iván Irving Rosas Domínguez

4 de octubre de 2023

1. $X(t)$ tiene un diferencial estocástico con $\mu(x) = cx$ y $\sigma^2(x) = x^a$, $c > 0$. Sea $Y(t) = X(t)^b$. ¿Qué elección de b resultará en un coeficiente de difusión constante para Y?

   Solución: notamos que $X(t)$ directamente está definido como proceso de Itô, pues

$$dX(t) = \mu(X(t),t)dt + \sigma(X(t),t)dB(t) = cX(t)dt + X^a(t)dB(t),$$

   por lo que utilizando la fórmula de Itô para procesos de Itô, dado que $Y(t) = f(X(t)) = X^b(t)$, con $f(x) = x^b$, función que claramente es C^2, tenemos que

$$\begin{aligned}
dY(t) = df(X(t)) &= f'(X(t))dX(t) + \frac{1}{2}\sigma^2(X(t),t)f''(X(t))dt \\
&= f'(X(t))\left(\mu(X(t),t)dt + \sigma(X(t),t)dB(t)\right) \\
&= \left(\mu(X(t),t)f'(X(t)) + \frac{1}{2}\sigma^2(X(t),t)f''(X(t))\right)dt + \sigma(X(t),t)f'(X(t))dB(t) \\
&= \left(cX(t)bX^{b-1}(t) + \frac{1}{2}X^a(t)b(b-1)X^{b-2}(t)\right)dt + X^{a/2}bX^{b-1}(t)dB(t) \\
&= \left(cbX^b(t) + \frac{b(b-1)}{2}X^{a+b-2}(t)\right)dt + bX^{a/2+b-1}(t)dB(t),
\end{aligned}$$

   por lo que si queremos que $Y(t)$ tenga un coeficiente de difusión constante, basta con que pidamos que $\frac{a}{2} + b - 1 = 0$, lo que resolviendo en términos de b significa pedir que

$$b = 1 - \frac{a}{2},$$

   y con ello tendremos que $Y(t)$ tendrá un coeficiente de difusión constante dado justamente por $b = 1 - \frac{a}{2}$.

2. Encuentra $d\left(M(t)\right)^2$, donde $M(t) = e^{B(t)-\frac{t}{2}}$.

   Demostración. Interpretando $d\left(M(t)\right)^2 = d\left(M^2(t)\right)$, calculamos primero $M^2(t) = e^{2B(t)-t}$. Observamos que $M^2(t)$ es función de $B(t)$ y t, a saber, $M^2(t) = f(B(t),t)$, donde $f(x,t) = e^{2x-t} = e^{2x}e^{-t}$, la cual claramente es una función de clase $C^{2,1}$. Además, $M(t)$ es un proceso de Itô ya que justamente es función del movimiento browniano que es un proceso de Itô, y de t, por lo que podemos hallar el diferencial utilizando la fórmula de Itô para procesos de Itô la forma

$X(t) = g\left(B(t), t\right)$:

$$
\begin{aligned}
dM^2(t) = df(B(t),t) &= \partial_x f\left(B(t),t\right) dB(t) + \partial_t f\left(B(t),t\right) dt + \frac{1}{2}\cdot \sigma_B^2(B(t),t)\cdot \partial_{xx} f(B(t),t) dt \\
&= \left(2e^{2x}e^{-t}\Big|_{(B(t),t)}\right) dB(t) + \left(-e^{2x}e^{-t}\Big|_{(B(t),t)}\right) dt + \frac{1}{2}\cdot \sigma_B^2(B(t),t)\cdot \left(4e^{2x}e^{-t}\Big|_{(B(t),t)}\right) dt \\
&= \left(2e^{2B(t)}e^{-t}\right) dB(t) + \left(-e^{2B(t)}e^{-t}\right) dt + \frac{1}{2}\cdot 1^2 \cdot \left(4e^{2B(t)}e^{-t}\right) dt \\
&= \left(2e^{2B(t)-t}\right) dB(t) - \left(e^{2B(t)-t}\right) dt + 2\left(e^{2B(t)-t}\right) dt \\
&= \left(2e^{2B(t)-t}\right) dB(t) + \left(e^{2B(t)-t}\right) dt,
\end{aligned}
$$

lo que se traduce en que:

$$
M^2(t) = \int_0^t 2e^{2B(s)-s} dB(s) + \int_0^t e^{2B(s)-s} ds.
$$

■

3. Let $M(t) = B^3(t) - 3tB(t)$. Muestra que M es una martingala, primero directamente y después usando integrales de Itô.

Demostración. Comenzamos probando que $M(t)$ es una martingala con respecto a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ generada por el movimiento browniano, y lo haremos por definición. Notamos que:

a) $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ es una filtración por definición.

b) $(M(t))_{t\geq 0}$ es un proceso adaptado a $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ ya que para cada $t \geq 0$, $M(t)$ es una función de $B(t)$ y por lo tanto, $M(t)$ es $\mathcal{F}_t$-medible.

c) Notamos que $M(t)$ es integrable, ya que

$$
\int_\Omega |M(t)|\, d\mathbb{P} \leq \int_\Omega |B^3(t)| d\mathbb{P} - 3t\int_\Omega |B(t)|\, d\mathbb{P} < \infty, \qquad t \geq 0.
$$

ya que $B(t) \sim N(0,t)$ y por lo tanto sus primeros y terceros momentos absolutos son finitos

d) Finalmente, probamos la propiedad de martingala: dado $0 \leq s \leq t$,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[M(t)|\mathcal{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[B^3(t) - 3tB(t)|\mathcal{F}_s\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(B(t) - B(s) + B(s)\right)^3 |\mathcal{F}_s\right] - \mathbb{E}\left[3tB(t)|\mathcal{F}_s\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(B(t)-B(s)\right)^3 + 3\left(B(s)-B(t)\right)^2 B(s) + 3\left(B(s)-B(t)\right)B^2(s) + B^3(s)|\mathcal{F}_s\right] - \mathbb{E}\left[3tB(t)|\mathcal{F}_s\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(B(t)-B(s)\right)^3 |\mathcal{F}_s\right] + 3\mathbb{E}\left[\left(B(s)-B(t)\right)^2 B(s)|\mathcal{F}_s\right] \\
&\quad + 3\mathbb{E}\left[\left(B(s)-B(t)\right)B^2(s)|\mathcal{F}_s\right] + \mathbb{E}\left[B^3(s)|\mathcal{F}_s\right] - 3t\mathbb{E}\left[B(t)|\mathcal{F}_s\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(B(t)-B(s)\right)^3\right] + 3B(s)\mathbb{E}\left[(B(s)-B(t))^2|\mathcal{F}_s\right] + 3B^2(s)\mathbb{E}\left[B(t)-B(s)|\mathcal{F}_s\right] + B^3(s) - 3t\mathbb{E}\left[B(t)|\mathcal{F}_s\right] \\
&= 0 + 3B(s)\mathbb{E}\left[\left(B(s)-B(t)\right)^2\right] + 3B^2(s)\mathbb{E}\left[B(t)-B(s)\right] + B^3(s) - 3t\mathbb{E}\left[B(t)|F_s\right] \\
&= 3B(s)(t-s) + 0 + B^3(s) - 3tB(s) \\
&= B^3(s) + 3B(t) - 3sB(s) - 3tB(t) \\
&= B^3(s) - 3sB(s),
\end{aligned}
$$

por lo que $M(t)$ es en efecto una martingala.

Probamos ahora que $M(t)$ es una martingala utilizando solamente integral de Itô. Afirmamos que

$$M(t) = \int_0^t B^2(s) - s\ dB(s).$$

En efecto. Nótese que para $t \geq 0$, por la fórmula de Itô para el movimiento browniano, tenemos para la función $f(x) = x^3$, que claramente tiene segundas derivadas continuas,

$$\begin{aligned} B^3(t) = f(B(t)) &= f(B(0)) + \int_0^t f'(B(s))dB(s) + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B(s))dB(s) \\ &= B^3(0) + \int_0^t 3B^2(t)dB(s) + \frac{1}{2}\int_0^t 6B(s)dB(s) \\ &= 3\int_0^t B^2(t)dB(s) + 3\int_0^t B(s)ds \end{aligned} \tag{1}$$

Por otro lado, calculando directamente la última integral del lado derecho de la igualdad, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_0^t B(s)ds &= \lim_{\delta_n \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} B(t_{i+1}^n)(t_{i+1}^n - t_i^n) \\ &= \lim_{\delta_n \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} B(t_{i+1}^n)(t_{i+1}^n - t_i^n) \\ &= \lim_{\delta_n \to 0} \left[B(t_n^n)(t_n^n - t_{n-1}^n) + B(t_{n-1}^n)(t_{n-1}^n - t_{n-2}^n) + ... + B(t_2^n)(t_2^n - t_1^n) + B(t_1^n)(t_1^n - t_0^n)\right] \\ &= \lim_{\delta_n \to 0} \left[B(t_n^n)t_n^n - B(t_n^n)t_{n-1}^n + B(t_{n-1}^n)t_{n-1}^n - B(t_{n-1}^n)t_{n-2}^n + ... - B(t_2^n)t_1^n + B(t_1^n)t_1^n - B(t_1^n)t_0^n\right] \\ &= \lim_{\delta_n \to 0} B(t)t - \left[t_{n-1}^n(B(t_n^n) - B(t_{n-1}^n)) + t_{n-2}^n(B(t_{n-1}^n) - B(t_{n-2}^n)) + ... + t_1^n(B(t_2^n) - B(t_1^n))\right] - B(t_1^n)t_0^n \\ &= tB(t) - B(t_1)\cdot 0 - \lim_{\delta_n \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} t_i(B(t_{i+1}^n) - B(t_i^n)), \end{aligned} \tag{2}$$

donde hemos hecho uso de la definición de la integral de Itô, de la fórmula de suma por partes en las sumas parciales de la integral, y de que el límite anterior se toma sobre la norma δ_n de particiones anidadas $0 = t_0^n < t_1^n < t_2^n < ... < t_{n-1}^n < t_n^n = t$ del intervalo $[0, t]$.

Notamos ahora que

$$\int_0^t s\ dB(s) = \lim_{\delta_n \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} t_i(B(t_{i+1}^n) - B(t_i^n)), \tag{3}$$

ya que la expresión de la derecha anterior es justamente la definición de la integral de Itô del proceso constante $X(s) = s$ en $[0, t]$ vía la aproximación de dicho proceso por medio de procesos simples, a saber,

$$X(s) = \lim_{n \to \infty} 0 \cdot \mathbb{1}_{\{0\}}(s) + \sum_{i=1}^{n-1} t_i \mathbb{1}_{(t_{i+1} - t_i]}(s),$$

y justamente la integral de la izquierda en la ecuación (3) es el límite de las integrales de Itô de los procesos anteriores que aproximan a $X(s) = s$ en el sentido L^2.

Concluimos de lo anterior y de las igualdades en (2) que

$$\int_0^t B(s)ds = tB(t) - \int_0^t s\ dB(s),$$

por lo que sustituyendo la ecuación anterior en la ecuación (1), tenemos que

$$B^3(t) = 3\int_0^t B^2(t)dB(s) + 3\left(tB(t) - \int_0^t s\ dB(s)\right),$$

así que podemos reescribir $M(t)$ como:

$$M(t) = B^3(t) - 3tB(t) = 3\left(\int_0^t B^2(s)dB(s) - \int_0^t s\ dB(s)\right) = 3\left(\int_0^t B^2(s) - s\ dB(s)\right),$$

esto es, $M(t)$ es precisamente una integral de Itô, así que solamente resta ver que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \left(B^2(s) - s\right)^2 ds\right] < \infty$$

para poder deducir que es una martingala. Pero notamos que

$$\begin{aligned}\int_0^t \mathbb{E}\left[\left(B^2(s) - s\right)^2\right] ds &= \int_0^t \mathbb{E}\left[B^4(s)\right] - 2s\mathbb{E}\left[B^2(s)\right] + s^2 ds \\ &= \int_0^t 3s^2 - 2s^2 + s^2 ds \\ &= 2t^3/3 \\ &< \infty,\end{aligned}$$

de tal forma que la integral de Itô en efecto es una martingala y terminamos. ■

4. Muestra que $M(t) = e^{\frac{t}{2}} \operatorname{sen}(B(t))$ es una martingala utilizando fórmula de Itô.

Demostración. Aseguramos que

$$M(t) = \int_0^t e^{t/2} \cos(B(t)) dB(t).$$

En efecto, por la fórmula Itô, dado que $M(t) = e^{t/2} \operatorname{sen}(B(t))$ es una función solamente de $B(t)$ (el cual es un proceso de Itô) y de t. Entonces utilizando la fórmula de Itô para procesos de la forma $g(X(t), t)$, se tiene que, para $f(x,t) = e^{t/2} \operatorname{sen}(x)$, función que claramente es de clase $C^{2,1}$, tenemos que

$$\begin{aligned} df(B(t), t) &= \partial_x f\left(B(t), t\right) dB(t) + \partial_t f\left(B(t), t\right) dt + \frac{1}{2} \cdot \sigma_B^2(B(t), t) \partial_{xx} f(B(t), t) dt \\ &= \left(e^{t/2} \cos(x)\Big|_{(B(t),t)}\right) dB(t) + \left(\frac{1}{2} e^{t/2} \operatorname{sen}(x)\Big|_{(B(t),t)}\right) dt + \frac{1}{2} \cdot \sigma_B^2(B(t), t) \left(-e^{t/2} \operatorname{sen}(x)\Big|_{(B(t),t)}\right) dt \\ &= \left(e^{t/2} \cos(B(t))\right) dB(t) + \left(\frac{s1}{2} e^{t/2} \operatorname{sen}(B(t))\right) dt - \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \left(e^{t/2} \operatorname{sen}(B(t))\right) dt \\ &= e^{t/2} \cos(B(t)) dB(t), \end{aligned}$$

lo cual se traduce en que

$$e^{t/2} \operatorname{sen}(B(t)) = M(t) = f(B(t), t) = \int_0^t e^{t/2} \cos(B(t)) dB(t),$$

es decir, $M(t)$ es la integral de Itô de cierto proceso, por lo que en particular si probamos que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t (e^{s/2} \cos(B(s)))^2 ds\right] < \infty$$

podremos concluir que es una martingala. Pero notamos que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\int_0^t (e^{s/2} \cos(B(s)))^2 ds\right] &= \mathbb{E}\left[\int_0^t e^s \cos^2(B(t)) ds\right] \\ &\leq \mathbb{E}\left[\int_0^t e^s ds\right] \\ &= \mathbb{E}\left[e^t - 1\right] \\ &= e^t - 1 \\ &< \infty,\end{aligned}$$

por lo que la integral en efecto es una martingala y terminamos. ■

5. Sea $X(t) = (1-t)\int_0^t \frac{dB(s)}{1-s}$, donde $0 \leq t < 1$. Hallar $dX(t)$.

Solución: Notamos que, denotando $Y(t) = \int_0^t \frac{dB(s)}{1-s}$, que claramente es un proceso de Itô, se tiene que

$$X(t) = (1-t)\int_0^t \frac{dB(s)}{1-s} = (1-t)Y(t) = f(Y(t), t),$$

donde $f(x,t) = (1-t)x$, así que $X(t)$ es una función de un proceso de Itô. Claramente f es de clase $C^{2,1}$, por lo que usando fórmula de Itô, tenemos que

$$\begin{aligned}
dX(t) = df(Y(t), t) &= \partial_x f\,(Y(t), t)\, dY(t) + \partial_t f\,(Y(t), t)\, dt + \frac{1}{2}\cdot \sigma_Y^2(Y(t), t)\partial_{xx} f(Y(t), t) dt \\
&= (1-t) dY(t) - Y(t) dt + \frac{1}{2}\cdot \sigma_Y^2(Y(t), t)\cdot 0 dt \\
&= (1-t)\left(\frac{1}{1-t} dB(t)\right) - Y(t) dt \\
&= dB(t) - Y(t) dt,
\end{aligned}$$

donde $Y(t) = \int_0^t \frac{1}{1-s} dB(s)$.