Cálculo Estocástico
Tarea 3

Iván Irving Rosas Domínguez

25 de septiembre de 2023

1. Lema: Sea M^2 el espacio de las martingalas cuadrado-integrables continuas a la derecha. Dada una martingala $X \in M^2$, definimos la métrica $\|.\|$ como sigue:

$$\|X\| := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|X\|_n \wedge 1}{2^n},$$

donde $\forall t \geq 0$, $\|X\|_t := \left(\mathbb{E}\left[X^2(t)\right]\right)^{\frac{1}{2}}$.

Entonces el espacio $\left(M^2, \|.\|\right)$ es un espacio métrico completo y el subespacio M_c^2 (el espacio de las martingalas cuadrado integrables continuas) es un subespacio cerrado de M^2.

Demostración. Para ver que este es un espacio métrico completo, tenemos que ver que $\|.\|$ anterior define en efecto una métrica, sobre M^2. Para ello, recordamos la convención de que dos procesos X, Y en M^2 son iguales si y solo si son indistinguibles entre sí.

Con la noción de igualdad anterior, notamos que $\|.\| : M^2 \to [0, \infty]$ está bien definida ya que

$$\|X\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|X\|_n \wedge 1}{2^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty.$$

- $\|X - Y\| = 0 \Longrightarrow X = Y$, donde la igualdad anterior se entiende como que el proceso X y el proceso Y son indistinguibles. Para ello, basta con ver que un proceso X y el proceso 0 son indistinguibles entre sí, puesto que así, para cualesquiera X, Y procesos, $X - Y$ indistinguible de 0 implica X indistinguible de Y. Sea entonces $X \in M^2$.

  Nótese que $\|X\| = 0 \Longrightarrow \sum_{n=1} \frac{\|X\|_n \wedge 1}{2^n} = 0$, pero dado que $\|X\|_n := \left(\mathbb{E}\left[X^2(n)\right]^{\frac{1}{2}}\right) \geq 0$, entonces $\|X\| = 0 \Longrightarrow \mathbb{E}\left[X^2(n)\right] = 0$, para cualquier $n \geq 1$, por lo que para cualquier entero $n \geq 1$, $X(n) = 0$ casi seguramente, ya que su norma L^2 es justamente igual a 0.

  Pero esto significa que para cualquier $t \geq 0$, $X(t) = \mathbb{E}\left(X\left(\lceil t \rceil\right)|\mathcal{F}_t\right) = \mathbb{E}(0|\mathcal{F}_t) = 0$ casi seguramente, ya que X es una martingala y $\lceil t \rceil$ es un natural, de tal forma que para cualquier $t \geq 0$, $X(t) = 0$ casi seguramente. Luego, tenemos que X es modificación del proceso idénticamente 0.

  No obstante, dado que X es adaptado a la misma filtración $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ a la que es adaptado el proceso idénticamente 0, y X y 0 tienen trayectorias continuas a la derecha, entonces se tiene que X y 0 son indistinguibles, y así, $\|X\| = 0 \Longrightarrow X = 0$.

- $\|X - Y\| = \|Y - X\|$. La simetría es clara puesto que

$$\|X - Y\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|X - Y\|_n \wedge 1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|X(n) - Y(n)\|_{L^2(\Omega)} \wedge 1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|Y(n) - X(n)\|_{L^2(\Omega)} \wedge 1}{2^n} = \|Y - X\|,$$

según las observaciones hechas antes, y utilizando el hecho de que la métrica inducida por la norma $L^2(\Omega)$ sí es simétrica.

- $\|X-Y\| \le \|X-Z\| + \|Z-Y\|$, para $X,Y,Z \in M^2$. Para esta propiedad, notemos que

$$\begin{aligned}
\|X-Y\| &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|X-Y\|_n \wedge 1}{2^n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|X(n)-Y(n)\|_{L^2(\Omega)} \wedge 1}{2^n} \\
&\le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\big(\|X(n)-Z(n)\|_{L^2(\Omega)} + \|Z(n)-Y(n)\|_{L^2(\Omega)}\big) \wedge 1}{2^n} \\
&\le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\big(\|X(n)-Z(n)\|_{L^2(\Omega)} \wedge 1\big) + \big(\|Z(n)-Y(n)\|_{L^2(\Omega)}\big) \wedge 1}{2^n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|X-Z\|_n \wedge 1}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|Z-Y\|_n \wedge 1}{2^n} \\
&= \|X-Z\| + \|Z-Y\|,
\end{aligned}$$

  donde en la primera desigualdad se utiliza la desigualdad del triángulo en L^2, y en la segunda que, si $a, b \ge 0$, entonces $(a+b) \wedge 1 \le a \wedge 1 + b \wedge 1$. Luego, se vale la desigualdad del triángulo y por lo tanto, $\|.\|$ induce una métrica en M^2.

Resta ver ahora que $(M^2, \|.\|)$ es completo.

Consideramos una sucesión de Cauchy $(X_k)_{k\ge1} \subseteq M^2$ de martingalas cuadrado-integrables, entonces aseguramos que para cualquier $t \ge 0$, $(X_k(t))_{k\ge1}$ es una sucesión de Cauchy en $L^2(\Omega)$. En efecto, primero consideremos $n \ge 1$ y veamos que $(X_k(n))_{k\ge1}$ es una sucesión de Cauchy en $L^2(\Omega)$.

Nos interesamos solamente en los ε tales que $0<\varepsilon<1$. Sea pues $0<\varepsilon<1$ y nótese que para $\frac{\varepsilon}{2^n} > 0$, como $(X_k)_{k\ge1}$ es de Cauchy en M^2, existe un $N_n \in \mathbb{N}$ tal que para cualesquiera $k, m \ge N_n$,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\|X_k - X_m\|_j \wedge 1}{2^j} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\|X_k(j) - X_m(j)\|_{L^2(\Omega)} \wedge 1}{2^j} < \frac{\varepsilon}{2^n},$$

por lo que en particular, para nuestro $n \ge 1$,

$$\frac{\|X_k(n) - X_m(n)\|_{L^2(\Omega)} \wedge 1}{2^n} \le \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\|X_k(j) - X_m(j)\|_{L^2(\Omega)} \wedge 1}{2^j} < \frac{\varepsilon}{2^n},$$

es decir, para $0<\varepsilon<1$ existe $N_n \in \mathbb{N}$ tal que para cualesquiera $k, m \ge N_n$,

$$\|X_k(n) - X_m(n)\|_{L^2(\Omega)} \wedge 1 < \varepsilon,$$

pero como $\varepsilon < 1$, se deduce que

$$\|X_k(n) - X_m(n)\|_{L^2(\Omega)} < \varepsilon,$$

lo anterior para cualquier $n \ge 1$, por lo que concluimos que $(X_k(n))_{k\ge1}$ es de Cauchy en $L^2(\Omega)$. Luego, para $t \ge 0$ general se tiene que $(X_k(t))_{t\ge0}$ es de Cauchy también, ya que para $k, m \ge 1$,

$$
\begin{aligned}
\|X_k(\lceil t\rceil) - X_m(\lceil t\rceil)\|_{L^2(\Omega)} &= \mathbb{E}\left[(X_k(\lceil t\rceil) - X_m(\lceil t\rceil))^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[(X_k(\lceil t\rceil) - X_m(\lceil t\rceil))^2 \,|\mathcal{F}_t\right]\right] \\
&\geq \mathbb{E}\left[(X_k(t) - X_m(t))^2\right] \\
&= \|X_k(t) - X_m(t)\|_{L^2(\Omega)},
\end{aligned}
$$

donde utilizamos que $\lceil t\rceil$ es un natural mayor que t, que si X y Y son martingalas, entonces $X - Y$ es martingala (justamente M^2 es un espacio vectorial) y que $(X - Y)^2$ es una submartingala, pues la función cuadrática es convexa.

Así, dado que $\|X_k(\lceil t\rceil) - X_m(\lceil t\rceil)\|_{L^2(\Omega)} \xrightarrow[k,m\to\infty]{} 0$, se sigue que $\|X_k(t) - X_m(t)\|_{L^2(\Omega)} \xrightarrow[k,m\to\infty]{} 0$.

Se tiene que para cualquier $t \geq 0$, $(X_k(t))_{k\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en $L^2(\Omega)$, por lo que al ser $L^2(\Omega)$ completo, para cada $t \geq 0$, existe una variable $X(t) \in L^2(\Omega)$ tal que $\|X_k(t) - X(t)\|_{L^2(\Omega)} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$. Consideremos ahora al proceso X formado por las variables anteriores. Aseguramos que tal proceso es una martingala cuadrado-integrable con trayectorias continuas a la derecha y tal que $\|X_k - X\| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$.

- Notemos que el proceso X es adaptado a la filtración $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, en efecto, como para cualquier $t \geq 0$, $X_k(t) \xrightarrow[k\to\infty]{L^2} X(t)$, entonces existe una subsucesión $(X_{k_j})_{j\geq 1}$ tal que $X_{k_j} \xrightarrow[k\to\infty]{c.s.} X(t)$, y como $X_k(t)$ es $\mathcal{F}_t$-medible por hipótesis, para cualquier $k \geq 1$, entonces $X(t)$ es $\mathcal{F}_t$-medible.
- Notamos que el proceso X es cuadrado-integrable, pues como $X_k(t) \xrightarrow[k\to\infty]{L^2} X(t)$, entonces para $\varepsilon = 1$ existe un $K \in \mathbb{N}$ tal que
  $$\|X_K(t) - X(t)\|_2 < 1,$$
  de tal forma que
  $$\|X(t)\|_2 \leq \|X(t) - X_K(t)\|_2 + \|X_K(t)\| < 1 + \|X_K(t)\|_2 < \infty,$$
  ya que X_K es una martingala de M^2 y por lo tanto $X_K(t)$ está en $L^2(\Omega)$. Esto nos dice en particular que el proceso X es integrable.
- Veamos que X es una martingala. Sean $0 \leq s \leq t$. Probaremos por definición que $X(s) = \mathbb{E}\left[X(t)|\mathcal{F}_s\right]$. Claramente $X(s)$ es $\mathcal{F}_s$-medible, por lo que resta simplemente ver que para cualquier $A \in \mathcal{F}_s$,
  $$\int_A X(s)d\mathbb{P} = \int_A X(t)d\mathbb{P},$$
  pero para ello notamos que
  $$
  \begin{aligned}
  \int_A X_k(s)d\mathbb{P} &= \mathbb{E}\left[X_k(s)\mathbb{1}_A\right] \\
  &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A\mathbb{E}\left[X_k(t)|\mathcal{F}_s\right]\right] \\
  &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X_k(t)\mathbb{1}_A|\mathcal{F}_s\right]\right] \\
  &= \mathbb{E}\left[X_k(t)\mathbb{1}_A\right] \\
  &= \int_A X_k(t)d\mathbb{P},
  \end{aligned}
  $$
  pero nótese también que
  $$\left|\int_A X_k(s)d\mathbb{P} - \int_A X(s)d\mathbb{P}\right| = \mathbb{E}\left[(X_k(s) - X(s))\,\mathbb{1}_A\right] \leq \mathbb{E}\left[(X_k(s) - X(s))^2\right]^{1/2}\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A^2\right]^{1/2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$
  donde hemos utilizado la desigualdad de Cauchy-Schwarz, ya que $X_k(s) \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} X(s)$, y análogamente se tiene que
  $$\left|\int_A X_k(t)d\mathbb{P} - \int_A X(t)d\mathbb{P}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

así que, por la unicidad de los límites:

$$\int_A X(s)d\mathbb{P} = \lim_{k\to\infty}\int_A X_k(s)d\mathbb{P} = \lim_{k\to\infty}\int_A X_k(t)d\mathbb{P} = \int_A X(t)d\mathbb{P},$$

por lo que la igualdad de integrales se sigue y entonces X es una martingala cuadrado-integrable.

Finalmente, podemos tomar una modificación X que sea continua a la derecha y con ello $X \in M^2$. Resta solamente ver que en efecto $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{} X$ en $(M^2, \|.\|)$. Sea $\varepsilon > 0$. Obsérvese que existe un $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier $k \geq \mathbb{N}_0$,

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{3},$$

Luego, obsérvese que para toda $n \in \{1, ..., N_0 - 1\}$, las sucesiones $(X_k(n))_{k\geq 1}$ convergen en $L^2(\Omega)$ a $X(n)$, de tal forma que para cada $n \in \{1, ..., N_0 - 1\}$, seleccionando $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, existe un $N_n \in \mathbb{N}$ tal que para toda $k \geq N_n$, se tiene que

$$\|X_k(n) - X(n)\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

lo anterior para $k \geq N_n$, y para $n \in \{1, ..., N_0 - 1\}$. Definimos $N = \max\{N_0, N_1, ..., N_{N_0-1}\}$ y nótese que, para $k \geq N$,

$$\begin{aligned}
\|X_k - X\| &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|X_k - X\|_n \wedge 1}{2^n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|X_k(n) - X(n)\|_{L^2(\Omega)} \wedge 1}{2^n} \\
&= \sum_{n=1}^{N-1} \frac{\|X_k(n) - X(n)\|_{L^2(\Omega)} \wedge 1}{2^n} + \sum_{n=N}^{\infty} \frac{\|X_k(n) - X(n)\|_{L^2(\Omega)} \wedge 1}{2^n} \\
&\leq \sum_{n=1}^{N-1} \frac{\|X_k(n) - X(n)\|_{L^2(\Omega)}}{2^n} + \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{2^n} \\
&\leq \sum_{n=1}^{N-1} \frac{\|X_k(n) - X(n)\|_{L^2(\Omega)}}{2^n} + \frac{\varepsilon}{3} \\
&\leq \sum_{n=1}^{N-1} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} + \frac{\varepsilon}{3} \\
&= \frac{\varepsilon}{2^2}\left(\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{2^{n-1}}\right) + \frac{\varepsilon}{3} \\
&= \frac{\varepsilon}{2^2}\left(\sum_{n=0}^{N-2} \frac{1}{2^n}\right) + \frac{\varepsilon}{3} \\
&= \frac{\varepsilon}{2^2}\left(\frac{1 - (1/2)^{N-1}}{1 - (1/2)}\right) + \frac{\varepsilon}{3} \\
&= \frac{\varepsilon}{2^2}\left(2(1 - (1/2)^{N-1})\right) + \frac{\varepsilon}{3} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2}(1) + \frac{\varepsilon}{3} \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{3} \\
&< \varepsilon,
\end{aligned}$$

por lo que en efecto $\|X_n - X\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, y concluimos.

Resta ver ahora que $(M_c^2, \|.\|)$ es un subespacio cerrado de $(M_c^2, \|.\|)$. Para ello, consideremos una sucesión $(X_k)_{k\geq 1} \subseteq M_c^2$ y supongamos que dicha sucesión converge a un elemento $X \in M^2$. Buscamos probar que X es una martingala cuadrado integrable continua.

Para ello, fijamos $T \in [0, \infty)$. Nótese que por las desigualdades de martingalas que

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0\leq t\leq T} |X_k(t) - X(t)| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathbb{E}(|X_k(T) - X(T)|^+)}{\varepsilon} = \frac{\mathbb{E}(|X_k(T) - X(T)|)}{\varepsilon},$$

pero dado que $X_k(T)$ converge en $L^2(\Omega)$ a $X(T)$, se tiene que

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0\leq t\leq T} |X_k(t) - X(t)| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathbb{E}(|X_k(T) - X(T)|)}{\varepsilon} \leq \frac{\left(\mathbb{E}\left[|X_k(t) - X(T)|^2\right]\right)^{1/2}}{\varepsilon} = \frac{\|X_k(T) - X(T)\|_2}{\varepsilon} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0,$$

donde lo anterior es válido para cualquier $\varepsilon > 0$. Luego, definimos una subsucesión de (X_k) como sigue: para $1 > 0$ existe $k_1 > 0$ tal que

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0\leq t\leq T} |X_{k_1}(t) - X(t)| \geq 1\right) \leq \frac{1}{2},$$

luego suponiendo que tenemos construidos $k_1, ..., k_n$ tales que

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0\leq t\leq T} |X_{k_n}(t) - X(t)| \geq \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{2^n},$$

entonces para $\frac{1}{2^{n+1}} > 0$ existe k'_{n+1} tal que

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0\leq t\leq T} \left|X_{k'_{n+1}}(t) - X(t)\right| \geq \frac{1}{n+1}\right) \leq \frac{1}{2^{n+1}},$$

por lo que definiendo $k_{n+1} := \max\{k_1, ..., k_n, k'_{n+1}\} + 1$, se tiene que $X_{k_{n+1}}(T)$ es tal que cumple lo anterior. Luego, la subsucesión $(X_{k_n})_{n\geq 1}$ cumple que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\sup_{0\leq t\leq T} |X_{k_n}(t) - X(t)| \geq \frac{1}{n}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty,$$

por lo que por el Lema de Borel-Cantelli,

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} \left\{\sup_{0\leq t\leq T} |X_{k_n}(t) - X(t)| \geq \frac{1}{n}\right\}\right) = 0,$$

o lo que es lo mismo,

$$\mathbb{P}\left(\liminf_{n\to\infty} \left\{\sup_{0\leq t\leq T} |X_{k_n}(t) - X(t)| < \frac{1}{n}\right\}\right) = 1,$$

así que el conjunto de $\omega \in \Omega$ para los cuales hay convergencia uniforme de la subsucesión $(X_{k_n})_{n\geq 0}$ a a $X(t)$ tiene probabilidad. Pero como la convergencia es uniforme casi seguramente, y las trayectorias de $(X_k)_{k\geq 0}$ son continuas con probabilidad 1, entonces X tiene trayectorias continuas casi seguramente.

Lo anterior en cualquier intervalo $[0, T]$, por lo que las trayectorias de X son continuas en todo $[0, \infty)$.

■

2. Muestra que si $X(t)$ es no aleatorio (no depende de $B(t)$) y es función de t y s con $\int_0^t X^2(t, s)ds < \infty$, entonces $\int_0^t X(t, s)dB(s)$ es una variable aleatoria Gaussiana $Y(t)$. La colección $Y(t)$, $0 \leq t \leq T$, es un proceso Gaussiano con media cero y función de covarianza para $u \geq 0$ dada por $\operatorname{Cov}(Y(t), Y(t + u)) = \int_0^t X(t, s)X(t + u, s)ds$.

Demostración. Comenzamos notando que en efecto la variable aleatoria dada por la integral está bien definida. En efecto, dado que $X(s,t)$ es determinista, entonces su esperanza es ella misma, por lo que

$$\int_0^T \mathbb{E}(X^2(t,s))dt = \int_0^T X^2(t,s)dt < \infty,$$

por lo que la integral está bien definida. Probamos ahora que su media es 0. Esto se deduce directamente de la definición de integral de Itô, ya que por definición,

$$\lim_{\delta_n \to 0} \sum_{n=0}^{n-1} X(t_j,s)(B(t_{j+1}) - B(t_j)),$$

pero cada una de estas variables tiene media cero, por lo que se concluye que el límite tiene media cero. Probamos ahora la fórmula para las covarianzas: sean $u, t \geq 0$ y $s \in \mathbb{R}$, y notamos que

$$\begin{aligned}
\operatorname{Cov}(Y(t), Y(t+u)) &= \mathbb{E}\left[Y(t)Y(t+u)\right] - \mathbb{E}\left[Y(t)\right]\mathbb{E}\left[Y(t+u)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[Y(t)Y(t+u)\right] - 0 \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^t X(t,s)dB(s) \cdot \left(\int_0^t X(t+u,s)dB(s) + \int_t^{t+u} X(t+u,s)dB(s)\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^t X(t,s)dB(s) \cdot \int_0^t X(t+u,s)dB(s)\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^t X(t,s)dB(s) \cdot \int_t^{t+u} X(t+u,s)dB(s)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^t X(t,s)dB(s) \cdot \int_0^t X(t+u,s)dB(s)\right] + \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\int_0^t X(t,s)dB(s) \cdot \int_t^{t+u} X(t+u,s)dB(s)\Big|\mathcal{F}_t\right]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^t X(t,s)dB(s) \cdot \int_0^t X(t+u,s)dB(s)\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^t X(t,s)dB(s)\mathbb{E}\left[\int_t^{t+u} X(t+u,s)dB(s)\Big|\mathcal{F}_t\right]\right],
\end{aligned}$$

y dado que $X(t+u,s)$ es no aleatorio, su integral desde t hasta $t+u$ es independiente de $\mathcal{F}_t$, de tal forma que

$$\mathbb{E}\left[\int_t^{t+u} X(t+u,s)dB(s)\Big|\mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}\left[\int_t^{t+u} X(t+u,s)dB(s)\right] = 0,$$

y con ello el lado derecho de la expresión de la covarianza es 0. Pero el lado izquierdo es tal que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t X(t,s)dB(s) \cdot \int_0^t X(t+u,s)dB(s)\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t X(t,s)X(t+u,s)ds\right],$$

de acuerdo a un resultado de clase en el que se demuestra que la esperanza del producto de dos integrales de Itô es la esperanza de la integral de Lebesgue del producto de los procesos. Pero utilizando el teorema de Fubini, dado que los procesos son no aleatorios, tenemos que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t X(t,s)X(t+u,s)ds\right] = \int_0^t \mathbb{E}\left[X(t,s)X(t+u,s)\right]ds = \int_0^t X(t,s)X(t+u,s)ds,$$

como queríamos. Resta simplemente ver que el proceso $(Y(t))_{0\leq t\leq T}$ es un proceso Gaussiano. Por definición de la integral de Itô, se tiene que

$$\lim_{\delta_n \to 0} \sum_{n=0}^{n-1} X(t_j,s)(B(t_{j+1}) - B(t_j)),$$

y obsérvese que cada una de las variables sobre las que actúa el límite es una variable aleatoria Gaussiana, y por lo tanto la suma es una variable aleatoria Gaussiana. Luego, dado que el límite de Gaussianas es Gaussiana, se concluye que la integral

$$\int_0^t X(t,s)dB(s)$$

es una variable aleatoria Gaussiana con media cero y varianza

$$\int_0^t X^2(t,s)ds,$$

para cualquier $t \geq 0$. Luego, para mostrar que el proceso $Y(t)$ es un proceso Gaussiano, tenemos que considerar las distribuciones finito-dimensionales, pero notemos que cualquier vector $(Y(t_1),...,Y(t_n))$ tiene una distribución finito-dimensional normal multivariada utilizando función característica. ■

3. Muestra que una martingala Gaussiana en un intervalo de tiempo finito $[0,T]$ es una martingala cuadrado-integrable con incrementos independientes. Deducir que si X es no aleatorio y $\int_0^t X^2(s)ds < \infty$, entonces $Y(t) = \int_0^T X(s)dB(s)$ es una martingala Gaussiana cuadrado-integrable con incrementos independientes.

Demostración. Supongamos que $(X(t))_{0\leq t\leq T}$ es una martingala Gaussiana en $[0,T]$. Obsérvese que es cuadrado integrable, ya que al ser la función x^2 convexa, X^2 se convierte en una submartingala y así,

$$X^2(t) \leq \mathbb{E}\left[X^2(T)\middle|\mathcal{F}_t\right] \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{E}\left[X^2(t)\right] \leq \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X^2(T)\middle|\mathcal{F}_t\right]\right] = \mathbb{E}\left[X^2(T)\right],$$

y lo anterior para $t \geq 0$ arbitrario, de tal forma que

$$\sup_{0\leq t\leq T} \mathbb{E}\left[X^2(t)\right] \leq \mathbb{E}\left[X^2(T)\right] < \infty,$$

donde la última afirmación se debe a que $X(T)$ es una variable aleatoria Gaussiana y por lo tanto debe tener segundo momento finito. Se sigue que $(X(t))_{0\leq t\leq T}$ es cuadrado-integrable.

Notamos ahora que posee incrementos independientes. En efecto, sean $0 \leq t \leq t+s \leq T$ y recordemos que, al ser $X(t+s)$ y $X(t)$ variables gaussianas, entonces $X(t+s)-X(t)$ y $X(t)$ serán independientes si y solo si su covarianza es cero. Calculamos entonces

$$\operatorname{Cov}\left(X(t+s)-X(t), X(t)\right) = \mathbb{E}\left[(X(t+s)-X(t))X(t)\right] - \mathbb{E}\left[X(t+s)-X(t)\right]\mathbb{E}\left[X(t)\right],$$

pero nótese que, usando la propiedad de torre y martingala,

$$\mathbb{E}\left[X(t+s)-X(t)\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X(t+s)-X(t)\middle|\mathcal{F}_t\right]\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X(t+s)\middle|\mathcal{F}_t\right] - \mathbb{E}\left[X(t)\middle|\mathcal{F}_t\right]\right] = \mathbb{E}\left[X(t)-X(t)\right] = 0,$$

y además,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(X(t+s)-X(t))X(t)\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[(X(t+s)-X(t))X(t)\middle|\mathcal{F}_t\right]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[X(t)\mathbb{E}\left[X(t+s)-X(t)\middle|\mathcal{F}_t\right]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[X(t)(X(t)-X(t))\right] \\
&= 0,
\end{aligned}$$

de modo que la covarianza de los incrementos es cero y por lo tanto, las variables son independientes. Para la última parte, por la proposición vista en clase análoga a lo demostrado aquí arriba, se tiene que para X no aleatorio tal que

$$\int_0^t X^2(s)ds < \infty,$$

el proceso $Y(t) = \int_0^t X(s)dB(s)$ es una martingala Gaussiana, y esto es posible verlo gracias a que es límite de procesos Gaussianos, similar a como se demostró en el ejercicio 2, mientras que la propiedad de martingala se obtiene gracias a que el proceso X es determinista, y que los incrementos están dados en función del movimiento Browniano proceso que es una martingala. Por lo tanto, al ser la integral una martingala Gaussiana, por lo mostrado antes $Y(t)$ es también un proceso cuadrado-integrable con incrementos independientes.

■

4. Un proceso $X(t)$ en $(0,1)$ tiene un diferencial estocástico con coeficiente $\sigma(x) = x(1-x)$. Suponiendo que $0 < X(t) < 1$, muestra que el proceso definido por $Y(t) = \ln(\frac{X(t)}{1-X(t)})$ tiene un coeficiente de difusión constante.

Demostración. Utilizamos directamente la fórmula de Itô para procesos de Itô. Escribimos el diferencial del proceso $X(t)$:

$$dX(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dB(t) = \mu(t)dt + X(t)(1 - X(t))dB(t),$$

luego, para $f(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) = \ln(x) - \ln(1-x)$, con derivadas $f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}$ y $f''(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(1-x)^2}$, por fórmula de Itô:

$$\begin{aligned}
df(X(t)) &= f'(X(t))dX(t) + \frac{1}{2}f''(X(t))\sigma^2(t)dt \\
&= \left(f'(X(t))\mu(t) + \frac{1}{2}f''(X(t))\sigma^2(t)\right)dt + f'(X(t))\sigma(t)dB(t), \\
&= \left(f'(X(t))\mu(t) + \frac{1}{2}f''(X(t))\sigma^2(t)\right)dt + \left(\frac{1}{X(t)} + \frac{1}{1-X(t)}\right)\sigma(t)dB(t) \\
&= \left(f'(X(t))\mu(t) + \frac{1}{2}f''(X(t))\sigma^2(t)\right)dt + \frac{\sigma(t)}{X(t)(1-X(t))}dB(t) \\
&= \left(f'(X(t))\mu(t) + \frac{1}{2}f''(X(t))\sigma^2(t)\right)dt + \frac{\sigma(t)}{\sigma(t)}dB(t) \\
&= \left(f'(X(t))\mu(t) + \frac{1}{2}f''(X(t))\sigma^2(t)\right)dt + dB(t),
\end{aligned}$$

por lo que el proceso $Y(t)$ es tal que su diferencial $dY(t)$ tiene un coeficiente de difusión $\sigma_Y(t)$ constante. ■

5. Obtener el diferencial de una fórmula de cociente $d\left(\frac{X(t)}{Y(t)}\right)$ tomando $f(x,y) = x/y$. Suponga que el proceso Y se mantiene lejos de 0.

Demostración. Utilizamos nuevamente fórmula de Itô, pero esta vez para dos variables, ambas procesos de Itô. Nótese que para $f(x,y) = \frac{x}{y}$,

$$\begin{aligned}
d\left(\frac{X(t)}{Y(t)}\right) &= df(X(t), Y(t)) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}dX(t) + \frac{\partial f}{\partial y}dY(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial^2 x^2}\sigma_x^2(t)dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\sigma_y^2(t)dt + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\sigma_x(t)\sigma_y(t)dt\Big|_{X(t),Y(t)} \\
&= \frac{1}{Y(t)}dX(t) - \frac{X(t)}{Y^2(t)}dY(t) + 0 + \frac{1}{2}\frac{2X(t)}{Y^3(t)}\sigma_y^2(t)dt - \frac{1}{Y^2(t)}\sigma_x(t)\sigma_y(t)dt \\
&= \frac{1}{Y(t)}dX(t) - \frac{X(t)}{Y^2(t)}dY(t) + \left(\frac{X(t)}{Y^3(t)}\sigma_y^2(t) - \frac{1}{Y^2(t)}\sigma_x(t)\sigma_y(t)\right)dt,
\end{aligned}$$

pero

$$dX(t) = \mu_x(t)dt + \sigma_x(t)dB(t), \qquad dY(t) = \mu_y(t)dt + \sigma_x(t)dB(t),$$

de tal forma que

$$\begin{aligned}
d\left(\frac{X(t)}{Y(t)}\right) &= \frac{1}{Y(t)}dX(t) - \frac{X(t)}{Y^2(t)}dY(t) + \left(\frac{X(t)}{Y^3(t)}\sigma_y^2(t) - \frac{1}{Y^2(t)}\sigma_x(t)\sigma_y(t)\right)dt \\
&= \left(\frac{\mu_x(t)}{Y(t)} - \frac{X(t)\mu_y(t)}{Y^2(t)} + \frac{X(t)}{Y^3(t)}\sigma_y^2(t) - \frac{1}{Y^2(t)}\sigma_x(t)\sigma_y(t)\right)dt + \left(\frac{\sigma_x(t)}{Y(t)} - \frac{X(t)\sigma_y(t)}{Y^2(t)}\right)dB(t)
\end{aligned}$$

es la fórmula buscada. ■