Cálculo Estocástico
Tarea 3

Iván Irving Rosas Domínguez

16 de septiembre de 2023

1. Lema: Sea M^2 el espacio de las martingalas cuadrado-integrables. Dada una martingala $X \in M^2$, definimos la métrica $\|.\|$ como sigue:

$$\|X\| := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|X\|_n \wedge 1}{2^n},$$

donde $\forall t \geq 0$, $\|X\|_t := \left(\mathbb{E}\left[X_t^2\right]\right)^{\frac{1}{2}}$.

Entonces el espacio $\left((M^2, \|.\|)\right)$ es un espacio normado completo y el subespacio M_c^2 (el espacio de las martingalas cuadrado integrables continuas) es un subespacio cerrado de M^2.

2. Muestra que si $X(t)$ es no aleatorio (no depende de $B(t)$) y es función de t y s con $\int_0^t X^2(t,s)ds < \infty$, entonces $\int_0^t X(t,s)dB(s)$ es una variable aleatoria Gaussiana $Y(t)$. La colección $Y(t)$, $0 \leq t \leq T$, es un proceso Gaussiano con media cero y función de covarianza para $u \geq 0$ dada por $\operatorname{Cov}(Y(t), Y(t+u)) = \int_0^\infty X(t,s)X(t+u,s)ds$.

3. Muestra que una martingala Gaussiana en un intervalo de tiempo finito $[0,T]$ es una martingala cuadrado-integrable con incrementos independientes. Deducir que si X es no aleatorio y $\int_0^t X^2(s)ds < \infty$, entonces $Y(t) = \int_0^\infty X(s)dB(s)$ es una martingala Gaussiana cuadrado-integrable con incrementos independientes.

4. Un proceso $X(t)$ en $(0,1)$ tiene un diferencial estocástico con coeficiente $\sigma^2(x) = x(1-x)$. Suponiendo que $0 < X(t) < 1$, muestra que el proceso definido por $Y(t) = \ln(X(t))/(1-X(t))$ tiene un coeficiente de difusión constante.

5. Obtener el diferencial de una fórmula de cociente $d\left(\frac{X(t)}{Y(t)}\right)$ tomando $f(x,y) = x/y$. Suponga que el proceso Y se mantiene lejos de 0.