Cálculo Estocástico
Tarea 7

Iván Irving Rosas Domínguez

2 de noviembre de 2023

1. Demostrar el siguiente Teorema:

Teorema: Sea $X(t)$ una solución de la ecuación

$$dX(t) = \mu(X(t))dt + \sigma(X(t))dB(t).$$

y definamos $Y(t) = X(\tau_t)$. Entonces $Y(t)$ es una solución débil a la ecuación diferencial estocástica

$$dY(t) = \frac{\mu(Y(t))}{g(Y(t))}dt + \frac{\sigma(Y(t))}{\sqrt{g(Y(t))}}dB(t), \qquad \text{con} \quad Y(0) = X(0).$$

2. Si $X(t)$ es una difusión con coeficientes $\mu(x) = cx$ y $\sigma(x) = 1$. Dar su generador y mostrar que

$$X^2(t) - 2c\int_0^t X^2(s)ds - t$$

es una martingala.

3. $X(t)$ es una difusión con $\mu(x) = 2x$ y $\sigma^2(x) = 4x$. Dar su generador L. Resolver $Lf = 0$ y dar una martingala M_f. Hallar la EDE para el proceso $Y(t) = \sqrt{X(t)}$, y dar el generador de $Y(t)$.

4. Mostrar que el tiempo medio de salida de una difusión a partir de un intervalo, que por el teorema (...) satisface la ecuación diferencial

$$Lv = -1,$$

está dada por

$$v(x) = -\int_a^x 2G(y)\int_a^y \frac{ds}{\sigma^2(s)G(s)}dy + \int_a^b 2G(y)\int_a^y \frac{ds}{\sigma^2(s)G(s)}dy\frac{\int_a^x G(s)ds}{\int_a^b G(s)ds},$$

donde $G(x) = \exp\left(-\int_a^x \frac{2\mu(s)}{\sigma^2(s)}ds\right)$.

5. Dar una representación probabilística de la solución $f(x,t)$ de la EDP

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \quad 0 \le t \le T, \quad f(x,T) = x^2.$$

Resolver esta EDP utilizando la solución de la correspondiente ecuación diferencial estocástica.