Cálculo Estocástico
Tarea 6

Iván Irving Rosas Domínguez

30 de octubre de 2023

1. Teorema (Existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales estocásticas)

Sea $T > 0$ y sean $b(\cdot,\cdot) : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ \sigma(\cdot,\cdot) : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times m}$ dos funciones medibles que satisfacen

$$|b(t,x)| + |\sigma(t,x)| \leq C(1+|x|), \qquad x \in \mathbb{R}^n,\ t \in [0,T]$$

para alguna constante $C > 0$ (donde $|\sigma|^2 = \sum |\sigma_{ij}|^2$) y tales que

$$|b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq D|x-y|, \qquad x,y \in \mathbb{R}^n,\ t \in [0,T]$$

para alguna constante D. Sea Z una variable aleatoria que es independiente de la $\sigma-$álgebra $\mathcal{F}_\infty^{(m)}$ generada por $B_s(\cdot)$, $s \geq 0$, y tal que

$$\mathbb{E}\left[|Z|^2\right] < \infty.$$

Entonces la ecuación diferencial estocástica

$$dX_t = b(t,X_t)dt + \sigma(t,X_t)dB_t, \qquad 0 \leq t \leq T,\ X_0 = Z \tag{1}$$

tiene una única solución $X_t(\omega)$, continua en la variable t con la propiedad de que $X_t(\omega)$ es adaptada a la filtración $\mathcal{F}_t^Z$ generada por Z y $B_s(\cdot)$, con $s \leq t$ y

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T |X_t|^2 dt\right] < \infty.$$

Demostración. Comenzamos por probar la unicidad (salvo indistinguibilidad). Supongamos que $X(t,\omega)$ y $\widehat{X}(t,\omega)$, $(t,\omega) \in [0,\infty)\times\Omega$ son dos soluciones continuas en t a la ecuación diferencial (1), con condiciones iniciales $X(0,\omega) = Z(\omega)$ y $\widehat{X}(0,\omega) = \widehat{Z}(\omega)$, con $\omega \in \Omega$. Supongamos que $Z = \widehat{Z}$ casi seguramente.

Denotemos por $a(s,\omega) = b(s,X_s(\omega)) - b(s,X_s(\omega))$ y $\gamma(s,\omega) = \sigma(s,X_s(\omega)) - \sigma(s,\widehat{X}_s(\omega))$. Entonces se tienen las siguientes estimaciones.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left|X_t - \widehat{X_t}\right|^2\right] &= \mathbb{E}\left[\left(Z - \widehat{Z} + \int_0^t a ds + \int_0^t \gamma dB_s\right)^2\right] \\
&\leq 2\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t a ds\right)^2\right] + 2\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \gamma dB_s\right)^2\right] \\
&\leq 2t\mathbb{E}\left[\int_0^t a^2 ds\right] + 2\mathbb{E}\left[\int_0^t \gamma^2 ds\right],
\end{aligned}$$

donde en la primera desigualdad usamos que $(|v| + |w|)^2 \leq 2v^2 + 2w^2$, y en la segunda desigualdad usamos Cauchy-Schwarz en la integral de a, mientras que en la integral estocástica utilizamos la isometría de Itô (ya que las soluciones las suponemos cuadrado-integrables, por lo que la integral es martingala y cumple dicha propiedad). Ahora bien, por hipótesis los coeficientes b y σ son Lipschitz, por lo que

$$
\begin{aligned}
2t\mathbb{E}\left[\int_0^t a^2 ds\right] + 2\mathbb{E}\left[\int_0^t \gamma^2 ds\right] &= 2(1+t)\mathbb{E}\left[\int_0^t a^2 + \gamma^2 ds\right] \\
&= 2(1+t)\mathbb{E}\left[\int_0^t \left(b(s,X_s) - b(s,\widehat{X}_s)\right)^2 + \left(\sigma(s,X_s) - \sigma(s,\widehat{X}_s)\right)^2 ds\right] \\
&\leq 2(1+t)\mathbb{E}\left[\int_0^t \left(\left|b(s,X_s) - b(s,\widehat{X}_s)\right| + \left|\sigma(s,X_s) - \sigma(s,\widehat{X}_s)\right|\right)^2 ds\right] \\
&\leq 2(1+t)D^2\mathbb{E}\left[\int_0^t \left|X_s - \widehat{X}_s\right|^2 ds\right] \\
&\leq 2(1+T)D^2 \int_0^t \mathbb{E}\left[\left|X_s - \widehat{X}_s\right|^2\right] ds, \qquad (2)
\end{aligned}
$$

donde en la última igualdad hemos utilizado el teorema de Tonelli. Lo anterior nos dice que la función $v : [0,T] \to \mathbb{R}$, $v(t) = \mathbb{E}\left[\left|X_t - \widehat{X}_t\right|^2\right]$ satisface la desigualdad

$$
v(t) \leq 0 + A\int_0^t v(s)ds, \qquad A := 2(1+T)D^2.
$$

Por lo tanto, por la desigualdad de Gronwall, se deduce que

$$
v(t) \leq 0 \cdot e^{At}.
$$

Se sigue que $v(t) = 0$ para cualquier $t \geq 0$ y con ello, $\mathbb{E}\left[\left|X_t - \widehat{X}_t\right|^2\right] = 0$, así que forzosamente para cualquier $t \in \mathbb{R}$, $X_t = \hat{X}_t$. Esto hace a los procesos X y $\hat{X}$ modificaciones el uno del otro. Sin embargo, como los procesos se suponen soluciones de la ecuación anterior, ambos son continuos y en particular son continuos por derecha, por lo que entonces son indistinguibles y por lo tanto la solución es única salvo indistinguibilidad.

Procedemos a la demostración de la existencia. Esta sigue la misma línea de la prueba de existencia para ecuaciones diferenciales ordinarias. Definimos de manera recursiva $Y_t^{(0)} := X_0$ y para cualquier $k \geq 0$,

$$
Y_t^{(k+1)} := X_0 + \int_0^t b(s, Y_s^{(k)})ds + \int_0^t \sigma(s, Y_s^{(k)})dB_s.
$$

Realizando exactamente las mismas cuentas que nos condujeron a (2), por definición de las $Y^{(k)}$ deducimos que

$$
\mathbb{E}\left[\left|Y_t^{(k+1)} - Y_t^{(k)}\right|^2\right] \leq 2(1+T)D^2 \int_0^t \mathbb{E}\left[\left|Y_s^{(k)} - Y_s^{(k-1)}\right|^2\right] ds, \qquad (3)
$$

para $k \geq 1$ y $t \leq T$. Además, en el caso $k = 0, t \leq T$, se tiene que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left|Y_t^{(1)} - Y_t^{(0)}\right|^2\right] &= \mathbb{E}\left[\left|X_0 + \int_0^t b(s, X_0)ds + \int_0^t \sigma(s, X_0)dB_s - X_0\right|^2\right] \\
&\leq 2\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t b(s, X_0)ds\right)^2 + \left(\int_0^t \sigma(s, X_0)dB_s\right)^2\right] \\
&\leq 2\mathbb{E}\left[t\int_0^t b^2(s, X_0)ds + \int_0^t \sigma^2(s, X_0)ds\right] \\
&\leq 2(1+T)\mathbb{E}\left[\int_0^t b^2(s, X_0) + \sigma^2(s, X_0)ds\right] \\
&\leq 2(1+T)\mathbb{E}\left[\int_0^t \left(|b(s, X_0)| + |\sigma(s, X_0)|\right)^2 ds\right] \\
&\leq 2(1+T)\mathbb{E}\left[\int_0^t C^2(1+X_0)^2 ds\right] \\
&= 2(1+T)tC^2\mathbb{E}\left[(1+X_0^2)\right] \\
&\leq 4(1+T)tC^2(1+\mathbb{E}\left[X_0^2\right]),
\end{aligned}
$$

donde hemos hecho uso de la desigualdad $a^2+b^2 \leq (|a|+|b|)^2 \leq 2(a^2+b^2)$, de Cauchy-Schwarz, de la condición de crecimiento lineal y de la isometría de Itô (ya que suponemos que X_0 es cuadrado integrable y por lo tanto $\sigma(s, X_0)$ es cuadrado integrable justo por la condición de crecimiento lineal). Nótese que podemos reescribir lo anterior simplemente como

$$
\mathbb{E}\left[\left|Y_t^{(1)} - Y_t^{(0)}\right|^2\right] \leq 4(1+T)tC^2(1+\mathbb{E}\left[X_0^2\right]) \leq A_1 t, \tag{4}
$$

donde A_1 es una constante que solo depende de C, T y $\mathbb{E}\left[X_0^2\right]$.

Obsérvese que utilizando las cotas obtenidas antes, para $k=1$ tenemos que

$$
\mathbb{E}\left[|Y_t^{(2)} - Y_t^{(1)}|^2\right] \leq 2(1+T)D^2 \int_0^t \mathbb{E}\left[\left|Y_t^{(1)} - Y_t^{(0)}\right|^2\right] ds \leq 2(1+T)D^2 \int_0^t A_1 s \; ds = 2(1+T)D^2 A_1 \frac{t^2}{2}.
$$

En general, utilizamos ahora un argumento recursivo sobre k para obtener que

$$
\mathbb{E}\left[|Y_t^{(k+1)} - Y_t^{(k)}|^2\right] \leq \frac{{A_2}^{k+1} t^{k+1}}{(k+1)!}, \tag{5}
$$

para cualquier $k \geq 0$ y $t \in [0, T]$, donde A_2 es una constante que solo depende de C, D, T y $\mathbb{E}\left[X_0^2\right]$.

Por otro lado, notemos que $\mathbb{P}-$ casi seguramente, se tiene

$$
\sup_{0\leq t\leq T} |Y_t^{(k+1)} - Y_t^{(k)}| \leq \int_0^T |b(s, Y_s^{(k)}) - b(s, Y_s^{(k-1)})|ds + \sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t \sigma(s, Y_s^{(k)}) - \sigma(s, Y_s^{(k-1)})dB_s\right|,
$$

por monotonía de la integral. Luego, por monotonía de la probabilidad, para cualquier $k \geq 1$,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t^{(k+1)}-Y_t^{(k)}|>\frac{1}{2^k}\right) &\leq \mathbb{P}\left(\left(\int_0^T |b(s,Y_s^{(k)})-b(s,Y_s^{(k-1)})|ds\right)^2>2^{-2(k-1)}\right)\\
&+\mathbb{P}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t \sigma(s,Y_s^{(k)})-\sigma(s,Y_s^{(k-1)})dB_s\right|>2^{-k-1}\right)\\
&\leq 2^{2(k+1)}\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T |b(s,Y_s^{(k)})-b(s,Y_s^{(k-1)})|ds\right)^2\right]\\
&+2^{2(k+1)}\mathbb{E}\left[\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t \sigma(s,Y_s^{(k)})-\sigma(s,Y_s^{(k-1)})dB_s\right|\right)^2\right],
\end{aligned}
$$

donde hemos usado en el último paso la desigualdad de Chebyshev. Usando nuevamente Cauchy-Schwarz en la última integral de la izquierda, y aplicando la desigualdad maximal de Doob usando el hecho de que la integral de Itô es una martingala (ya que la resta de las funciones σ es cuadrado-integrable) e isometría de Itô, se tiene que

$$
\begin{aligned}
&2^{2(k+1)}\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T |b(s,Y_s^{(k)})-b(s,Y_s^{(k-1)})|ds\right)^2\right]+2^{2(k+1)}\mathbb{E}\left[\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t \sigma(s,Y_s^{(k)})-\sigma(s,Y_s^{(k-1)})dB_s\right|\right)^2\right]\\
&\leq 2^{2(k+1)}T\int_0^T \mathbb{E}\left[|b(s,Y_s^{(k)})-b(s,Y_s^{(k-1)})|^2\right]ds+2^{2(k+1)}\cdot\left(\frac{2}{2-1}\right)^2\mathbb{E}\left[\left|\int_0^T \sigma(s,Y_s^{(k)})-\sigma(s,Y_s^{(k-1)})dB_s\right|^2\right]\\
&=2^{2(k+1)}T\int_0^T \mathbb{E}\left[|b(s,Y_s^{(k)})-b(s,Y_s^{(k-1)})|^2\right]ds+2^{2(k+1)}\cdot 4\mathbb{E}\left[\int_0^T\left(\sigma(s,Y_s^{(k)})-\sigma(s,Y_s^{(k-1)})\right)^2ds\right]\\
&=2^{2(k+1)}T\int_0^T \mathbb{E}\left[|b(s,Y_s^{(k)})-b(s,Y_s^{(k-1)})|^2\right]ds+2^{2(k+2)}\int_0^T\mathbb{E}\left[\left(\sigma(s,Y_s^{(k)})-\sigma(s,Y_s^{(k-1)})\right)^2\right]ds\\
&=2^{2(k+2)}\int_0^T\mathbb{E}\left[|b(s,Y_s^{(k)})-b(s,Y_s^{(k-1)})|^2+|\sigma(s,Y_s^{(k)})-\sigma(s,Y_s^{(k-1)})|^2\right]ds
\end{aligned}
$$

De lo anterior y de la ecuación (3), se sigue que

$$
\mathbb{P}\left(\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t^{(k+1)}-Y_t^{(k)}|>\frac{1}{2^k}\right)\leq 2^{2(k+2)}D^2(T+1)\mathbb{E}\left[\left|Y_s^{(k)}-Y_s^{(k-1)}\right|^2\right]ds
$$

y combinando lo anterior con la ecuación (5), se tiene que

$$
\mathbb{P}\left(\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t^{(k+1)}-Y_t^{(k)}|>\frac{1}{2^k}\right)\leq 4^{k+2}D^2(T+1)\int_0^T\frac{A_2^kt^k}{k!}dt=4^{k+2}D^2(T+1)A_2^k\frac{T^{k+1}}{(k+1)!},
$$

por lo que si $A_2\geq 2D^2(T+1)$ (lo cual está en nuestro control según definimos A_2 en (4)), tenemos que

$$
\mathbb{P}\left(\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t^{(k+1)}-Y_t^{(k)}|>\frac{1}{2^k}\right)\leq\frac{(4A_2T)^{k+1}}{(k+1)!}.
$$

Recordemos que A_2 solamente depende de C,T y $\mathbb{E}\left[X_0^2\right]$, por lo que la serie

$$
\sum_{n\geq 0}\frac{(4A_2T)^{k+1}}{(k+1)!}
$$

es convergente y es una cota independiente de $t\in[0,T]$. Luego,

$$
\mathbb{P}\left(\limsup_{k\geq 0}\left\{\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t^{(k+1)}-Y_t^{(k)}|>\frac{1}{2^k}\right\}\right)=0,
$$

por lo que entonces para cualquier $k \geq 0$ el conjunto de $\omega \in \Omega$ para los cuales la serie anterior es menor a $\frac{1}{2^k}$ tiene probabilidad 1. Acabamos de mostrar que $\mathbb{P}-$casi seguramente, la sucesión

$$Y_t^{(n)} := Y_t^{(0)} + \sum_{k=0}^{n-1}(Y_t^{(k+1)} - Y_t^{(k)})$$

es uniformemente convergente para $t \in [0, T]$.

Denotamos tal límite como X_t. Dicho límite está definido casi seguramente. Notemos que, por la continuidad de las trayectorias de $Y_t^{(n)}$ para casi todo $\omega \in \Omega$, se sigue que $(X_t)_{t\geq 0}$ es un proceso con trayectorias continuas casi seguramente. Además, dado que para cualquier $t \geq 0$, $Y_t^{(n)}$ es $\mathcal{F}_t$-medible, se sigue que X_t es $\mathcal{F}_t$-medible, por lo que el proceso $(X_t)_{t\geq 0}$ es adaptado a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

Notamos ahora que el límite X_t también es el límite de la sucesión en L^2. Sean $m \geq n \geq 0$ y notemos que

$$\begin{aligned}
\|Y_t^{(m)} - Y_t^{(n)}\|_2 &= \|\sum_{k=n}^{m-1}(Y_t^{(k+1)} - Y_t^{(k)})\|_2 \\
&\leq \sum_{k=n}^{m-1}\|Y_t^{(k+1)} - Y_t^{(k)}\|_2 \\
&\leq \sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{(A_2 t)^{k+1}}{(k+1)!}\right)^{1/2},
\end{aligned}$$

donde hemos hecho uso de la ecuación (5). Dado que los coeficientes de la serie anterior convergen (se trata de una serie exponencial), entonces se tiene que

$$\|Y_t^{(m)} - Y_t^{(n)}\|_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

por lo que la sucesión $(Y_t^{(n)})_{n\geq 0}$ es de Cauchy en L^2, y por lo tanto converge. Luego. Dado que la sucesión converge en L_2, converge también en probabilidad, por lo que existe una subsucesión $(Y_t^{(n_k)})_{k\geq 0}$ que converge casi seguramente. Pero dado que $(Y_t^{(n)})_{n\geq 0}$ converge casi seguramente a $(X_t)_{t\geq 0}$, el límite $(X_t)_{t\geq 0}$ también es el límite en L^2 de la sucesión Y.

De la convergencia en L^2 del proceso, se sigue que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T X_t^2 dt\right] < \infty.$$

Finalmente, resta ver que el proceso $(X_t)_{t\geq 0}$ en efecto satisface la ecuación diferencial. Para ello, notamos que por definición,

$$dY_t^{(k+1)} = b(t, Y_t^{(k)})dt + \sigma(t, Y_t^{(k)})dB_t \tag{6}$$

De aquí se sigue que , como $Y_t^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} X_t$ uniformemente en $[0, T]$ y casi seguramente en $\mathbb{P}$, entonces por la convergencia en L^2 y el Lema de Fatou aplicado dos veces,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\int_0^T (X_t - Y_t^{(n)})^2 dt\right] &= \mathbb{E}\left[\int_0^T \liminf_{m\to\infty}(Y_t^{(m)} - Y_t^{(n)})^2 dt\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\liminf_{m\to\infty}\int_0^T (Y_t^{(m)} - Y_t^{(n)})^2 dt\right] \\
&\leq \liminf_{m\to\infty}\mathbb{E}\left[\int_0^T (Y_t^{(m)} - Y_t^{(n)})^2 dt\right] \\
&\leq \limsup_{m\to\infty}\mathbb{E}\left[\int_0^T (Y_t^{(m)} - Y_t^{(n)})^2 dt\right]
\end{aligned}$$

y esta última expresión tiende a 0 conforme n tiende a infinito. Finalmente, expandiendo X_t y $Y_t^{(n)}$, se sigue de la isometría de Itô que

$$\int_0^t \sigma(s, Y_s^{(n)})dB_s \to \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s$$

y de la desigualdad de Hölder que

$$\int_0^t b(s, Y_s^{(n)}) \to \int_0^t b(s, X_s)ds.$$

Ambos límites en el sentido L^2. Por lo tanto, tomando el límite en el sentido integral de (6), se sigue que X_t cumple $dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t$. ■

2. Verificar que los procesos dados resuelven las correspondientes ecuaciones diferenciales estocásticas: (B_t denota el movimiento Browniano 1-dimensional)

a) $X_t = e^{B_t}$ resuelve $dX_t = \frac{1}{2}X_t dt + X_t dB_t$

Solución: Utilizando fórmula de Itô con la función $f(x) = e^x$, que claramente es C^2, y recordando que la variación cuadrática del movimiento Browniano es $< B, B >_t = t$, se tiene que

$$dX_t = d(e^{B_t}) = e^{B_t}dB_t + \frac{1}{2}e^{B_t}d < B, B >_t = \frac{1}{2}X_t dt + X_t dB_t,$$

tal y como se quería.

b) $X_t = \frac{B_t}{1+B_t}$; $B_0 = 0$ resuelve

$$dX_t = -\frac{1}{1+t}X_t dt + \frac{1}{1+t}dB_t; \qquad X_0 = 0.$$

Solución: Utilizamos ahora la función $f(x, t) = \frac{x}{1+t}$. Claramente dicha función es de clase $C^{2,1}$, por lo que por fórmula de Itô,

$$dX_t = df(B_t, t) = \frac{1}{1+t}dB_t - \frac{X_t}{1+t}dt + 0 \cdot d < B, B >_t = \frac{1}{1+t}dB_t - \frac{X_t}{1+t}dt,$$

por lo que el proceso dado cumple con la ecuación diferencial estocástica. Finalmente, es claro que

$$\frac{B_0}{1+t} = 0 \qquad \mathbb{P} - c.s,$$

por lo que también cumple la condición inicial.

c) $X_t = \text{sen}(B_t)$ con $B_0 = a \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ resuelve

$$dX_t = -\frac{1}{2}X_t dt + \sqrt{1 - X_t^2}dB_t \quad \text{para} \quad t < T(\omega) = \text{ínf}\left\{s > 0 : B_s \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right\}.$$

Solución: Ahora usamos la función $f(x) = sen(x)$, la cual claramente es C^2 en $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, se tiene que

$$dX_t = df(B_t) = \cos(B_t)dB_t - \text{sen}(B_t)d < B, B >_t = \sqrt{\cos^2(B_t)}dB_t - \text{sen}(B_t)dt = \sqrt{1 - X_t^2}dB_t - X_t dt,$$

tal y como queríamos. Es importante destacar que en la ecuación anterior, dado que $t < T(\omega) = \text{ínf}\left\{s > 0 : B_s \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right\}$, entonces $\cos(B_t) \geq 0$, por lo que la expresión $\cos(B_t) = \sqrt{\cos^2(B_t)}$ utilizada antes tiene sentido, además de que $B_0 = a \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ hace que la solución sea consistente.

d) $(X_1(t), X_2(t)) = (t, e^t B_t)$ resuelve

$$\begin{bmatrix} dX_1 \\ dX_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ X_2 \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 0 \\ e^{X_1} \end{bmatrix} dB_t$$

Solución: Resolvemos entrada a entrada. Notamos que X_1 debe cumplir la ecuación $dX_1(t) = 1 \cdot dt$, cuyo significado es

$$X_1(t) = X_1(0) + \int_0^t 1 \; ds = X_1(0) + t,$$

por lo que si $X_1(t)=t$, claramente $X_1(t)=0+t=t$ y acabamos. Para la segunda parte, utilizamos la fórmula de Itô en la función $f(x,t)=xe^t$, la cual claramente es $C^{2,1}$, por lo que

$$dX_2(t)=d(B_te^t)=e^tdB_t+e^tB_tdt+\frac{1}{2}\cdot 0=X_2(t)dt+e^tdB_t.$$

Y dado que $X_1(t)=t$ para cualquier $t\geq 0$, entonces

$$dX_2(t)=X_2(t)dt+e^tdB_t=X_2(t)+e^{X_1(t)}dB_t,$$

de tal forma que en efecto el proceso $X_2(t)=e^tB_t$ cumple la ecuación correspondiente. Se concluye que el vector $(X_1(t),X_2(t))=(t,e^tB_t)$ resuelve el sistema de ecuaciones anterior.

e) $(X_1(t),X_2(t))=(\cosh(B_t),\sinh(B_t))$ resuelve

$$\begin{bmatrix} dX_1 \\ dX_2 \end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}dt+\begin{bmatrix} X_2 \\ X_1 \end{bmatrix}dB_t$$

Solución: Utilizamos fórmula de Itô nuevamente en cada entrada. Recordamos que

$$\cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2} \qquad \sinh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2},$$

son funciones definidas en todo el plano complejo, son funciones analíticas y además cumplen que $\sinh'(x)=\cosh(x)$ y $\cosh'(x)=\sinh(x)$. Con esto en mente y utilizando la función $f(x)=\cosh(x)$, por Itô:

$$dX_1(t)=df(B_t)=\sinh(B_t)dB_t+\frac{1}{2}\cosh(B_t)d<B,B>_t=\frac{1}{2}X_1(t)dt+\sinh(B_t)dB_t.$$

Por otro lado, utilizando la fórmula de Itô ahora con la función $f(x)=\sinh(x)$, se tiene que

$$dX_2(t)=df(B_t)=\cosh(B_t)dB_t+\frac{1}{2}\sinh(B_t)d<B,B>_t=\frac{1}{2}X_2(t)dt+\cosh(B_t)dB_t.$$

Y dado que $(X_1(t),X_2(t))=(\cosh(B_t),\sinh(B_t))$, se tiene claramente que

$$dX_1(t)=\frac{1}{2}X_1(t)dt+\sinh(B_t)dB_t=\frac{1}{2}X_1(t)dt+X_2(t)dB_t, \qquad dX_2(t)=\frac{1}{2}X_2(t)dt+\cosh(B_t)dB_t=\frac{1}{2}X_2(t)dt+X_1(t)dB_t,$$

por lo que el vector anterior cumple los sistemas de ecuaciones dados.

3. Sea $(B_1,...,B_n)$ un movimiento Browniano en $\mathbb{R}^n$, $\alpha_1,...,\alpha_n$ constantes. Resolver la ecuación diferencial estocástica

$$dX_t=rX_tdt+X_t\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k dB_k(t)\right); \qquad X_0>0.$$

(Este es un modelo para un crecimiento exponencial con varias fuentes de ruido blanco independientes en la tasa de crecimiento relativa.)

Solución: proponemos la solución siguiente:

$$X_t:=X_0e^{(r-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n\alpha_i^2)t+\sum_{k=1}^n\alpha_iB_i(t)}$$

Resta comprobar que en efecto es solución de la ecuación diferencial estocástica anterior. Nótese que por la fórmula de Itô $n-$dimensional, utilizando la función

$$g:\mathbb{R}^n\times[0,\infty)\to\mathbb{R}, \qquad g(x_1,...,x_n,t)=X_0\exp\left\{\left(r-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n\alpha_i^2\right)t+\sum_{k=1}^n\alpha_ix_i\right\}.$$

La función anterior es $C^{2,1}$, por lo que por la fórmula de Itô en n dimensiones, y aprovechando que la derivada de la exponencial es ella misma salvo constantes,

$$
\begin{aligned}
dX_t = dg(B_1,...,B_n,t) &= \partial_t g(X_t,t)dt + \sum_{k=1}^{n} \partial_i g(X_t,t)dB_i + \sum_{i,j} \partial_{ij} g(X_t,t)d < B_i, B_j > \\
&= \left(r - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \alpha_i^2 \right) X_t dt + \sum_{k=1}^{n} \alpha_i X_t dB_i + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \alpha_i^2 X_t d < B_i, B_i > \\
&= \left(r - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \alpha_i^2 \right) X_t dt + \sum_{k=1}^{n} \alpha_i X_t dB_i + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \alpha_i^2 X_t dt \\
&= rX_t dt + \sum_{k=1}^{n} \alpha_i X_t dB_i \\
&= rX_t dt + X_t \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_i dB_i \right)
\end{aligned}
$$

donde hemos utilizado que la variación cuadrática de dos brownianos independientes entre sí es cero, y que la variación cuadrática de un browniano consigo misma es t. Concluimos que el proceso d definido antes satisface la ecuación diferencial estocástica dada.

4. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales estocásticas

a)

$$
\begin{bmatrix} dX_1 \\ dX_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & X_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dB_1 \\ dB_2 \end{bmatrix}.
$$

Solución: Resolvemos por fórmula de Itô entrada a entrada. Para X_1, se tiene que

$$dX_1(t) = dt + dB_1(t) + 0 \cdot dB_2(t) = dt + dB_1(t),$$

de tal forma que

$$X_1(t) = X_0 + t + B_1(t).$$

Mientras tanto, para la segunda ecuación, tenemos que

$$dX_2(t) = X_1(t)dB_2(t),$$

Ahora bien, utilizando integración por partes, tenemos que

$$d(X_1B_2) = X_1 dB_2 + B_2 dX_1 + d < X_1, B_2 >_t,$$

de donde se sigue que

$$
\begin{aligned}
X_1 dB_2(t) &= d(X_1B_2)(t) - B_2(dt + dB_1(t)) - d < t + B_1, B_2 >_t \\
&= d(X_1B_2)(t) - B_2 dt - B_2(t)dB_1(t) - 0 - d < B_1, B_2 >_t \\
&= d(X_1B_2)(t) - B_2(t)dt - B_2(t)dB_1(t),
\end{aligned}
$$

donde hemos usado que la covariación de B_1 y B_2 es 0, pues estamos suponiendo que son movimientos brownianos independientes. Lo anterior nos dice que

$$dX_2 = X_1 dB_2 = d(X_1B_2)(t) - B_2(t)dt - B_2(t)dB_1(t),$$

así que

$$X_2(t) = X_1(t)B_2(t) - 0 - \int_0^t B_2(s)ds - \int_0^t B_2(s)dB_1(s),$$

es decir,

$$X_2(t) = (X_0 + t + B_1(t))\, B_2(t) - \int_0^t B_2(s)ds - \int_0^t B_2(s)dB_1(s)$$

es solución de la ecuación anterior.

b) $dX_t = X_t dt + dB_t$. (Sugerencia: multiplicar ambos lados con el 'factor integrante' e^{-t} y comparar con $d(e^{-t}X_t)$).

Solución: definimos $Y_t := e^{-t}X_t$ y notemos que por fórmula de Itô,

$$dY_t = e^{-t}dX_t - e^{-t}X_t dt + \frac{1}{2}\cdot 0 = e^{-t}(X_t dt + dB_t) - e^{-t}X_t dt = e^{-t}dB_t,$$

de donde se sigue que

$$e^{-t}X_t = X_0 + \int_0^t e^{-s}dB_s,$$

es decir,

$$X_t = e^t X_0 + e^t \int_0^t e^{-s}dB_s$$

satisface la ecuación anterior.

c) $dX_t = -X_t dt + e^{-t}dB_t$. **Solución:** definimos nuevamente $Y_t := e^t X_t$, entonces por Itô,

$$dY_t = e^t dX_t + e^t X_t dt + \frac{1}{2}\cdot 0 = e^t(-X_t dt + e^{-t}dB_t) + e^t X_t dt = dB_t,$$

de tal forma que

$$e^t X_t = X_0 + \int_0^t dB_s,$$

así que

$$X_t = e^{-t}X_0 + e^{-t}B_t$$

es solución a la ecuación anterior.

5. Resolver la ecuación diferencial estocástica (2-dimensional)

$$\begin{aligned} dX_1(t) &= X_2(t)dt + \alpha dB_1(t) \\ dX_2(t) &= X_1(t)dt + \beta dB_2(t) \end{aligned}$$

donde $(B_1(t), B_2(t))$ es un movimiento Browniano 2-dimensional y α, β son constantes. Este es un modelo para una cuerda vibrante sujeta a una fuerza estocástica.

6. (El puente Browniano).

Para $a, b \in \mathbb{R}$ fijos, considérese la siguiente ecuación 1-dimensional.

$$dY_t = \frac{b - Y_t}{1-t}dt + dB_t; \qquad 0 \le t < 1, \quad Y_0 = a.$$

Verificar que

$$Y_t = a(1-t) + bt + (1-t)\int_0^t \frac{dB_s}{1-s}; \qquad 0 \le t < 1$$

resuelve la ecuación y demostrar que $\lim_{t\to 1} Y_t = b$ c.s. El proceso Y_t es denominado *el puente Browniano* (de a a b).

Solución: verificamos que el proceso Y_t anterior cumple la ecuación dada. En efecto. Claramente $Y_0 = a$. Definimos ahora $Z_t := \frac{b-Y_t}{1-t}$. Nótese que

$$Y_t = a(1-t) + bt + (1-t)\int_0^t \frac{dB_s}{1-s} \implies b - Y_t = b - \left(a(1-t) + bt + (1-t)\int_0^t \frac{dB_s}{1-s}\right),$$

por lo que

$$Z_t = \frac{b - Y_t}{1-t} = \frac{b}{1-t} - a - \frac{bt}{1-t} - \int_0^t \frac{dB_s}{1-s} = b\frac{1-t}{1-t} - a - \int_0^t \frac{dB_s}{1-s} = b - a - \int_0^t \frac{dB_s}{1-s}.$$

y notamos que $Z_0 = b - a$. Con ello,

$$dZ_t = \frac{1}{1-t} dB_t.$$

Ahora, por definición, $Z_t = \frac{b-Y_t}{1-t}$, lo que nos dice que $Y_t = b - Z_t(1-t)$. Luego, utilizando la fórmula de Itô con la función $f(x,t) = b - x(1-t)$, que claramente es $C^{2,1}$, se tiene que

$$dY_t = -(1-t)dZ_t - (-Z_t)dt + \frac{1}{2} \cdot 0 = -(1-t)(\frac{1}{1-t})dB_t + Z_t dt = dB_t + \frac{b - Y_t}{1-t} dt,$$

por lo que en efecto Y definido como antes cumple con la ecuación diferencial mencionada.

Finalmente para demostrar la convergencia, aplicamos integración por partes en la definición de Y_t:

$$Y_t = a(1-t) + bt + (1-t) \int_0^t \frac{dB_s}{1-s} = a(1-t) + bt + B_t + (1-t) \int_0^t \frac{B_s}{(1-s)^2}.$$

Claramente la parte que multiplica a las constantes tiende a 1, por lo que resta probar que la parte de la derecha tiende a 0. Nótese que

$$B_t + (1-t) \int_0^t \frac{B_s}{(1-s)^2} = (1-t) \int_0^t \frac{B_1 - B_s}{(1-s)^2} ds.$$

Recordamos ahora que, si g es una función positiva y decreciente en [0,1] tal que $g(1) = 0$, entonces para cualquier función positiva f tal que

$$\int_0^1 f(u)g(u)du < \infty,$$

se cumple que $\lim_{t \to 1} g(t) \int_0^1 f(u)du = 0$. Aplicando esto a la función $f(u) = \frac{B_1 - B_t}{(1-u)^2}$ y $g(u) = 1 - u$, se tiene que

$$Y_t \xrightarrow[t \to 1]{} b,$$

casi seguramente.