

Cálculo Estocástico

Tarea 8

Iván Irving Rosas Domínguez

29 de diciembre de 2023

1. Mostrar que para cualquier u , $f(x, t) = \exp\{ux - u^2t/2\}$ resuelve la ecuación backward para el movimiento Browniano. Tómense las derivadas primeras, segundas, etc., de $\exp\{ux - u^2t/2\}$ con respecto a u e igualese $u = 0$ para obtener que las funciones x , $x^2 - t$, $x^3 - 3tx$, $x^4 - 6tx^2 + 3t^2$, etc. también resuelven la ecuación backward 6.13. Deducir que $B^2(t) - t$, $B^3(t) - 3tB(t)$ y $B^4(t) - 6tB^2(t) + 3t^2$ son martingalas.
2. Hallar $f(x)$ tal que $f(B(t) + t)$ es una martingala.
3. Investigar las explosiones del siguiente proceso

$$dX(t) = X^2(t)dt + \sigma X^\alpha(t)dB(t).$$

4. Mostrar que el cuadrado del proceso de Bessel $X(t)$ en 6.64 se acerca arbitrariamente al cero cuando $n = 2$, esto es, $\mathbb{P}(T_y < \infty) = 1$ para cualquier $y > 0$ suficientemente pequeña, pero cuando $n \geq 3$, $\mathbb{P}(T_y < \infty) < 1$.
5. Sea $X(t)$ una difusión con coeficientes $\sigma(x) = 1$, $\mu(x) = -1$ para $x < 0$, $\mu(x) = 1$ para $x > 0$ y $\mu(0) = 0$. Mostrar que $\pi(x) = e^{-|x|}$ es una distribución estacionaria para X .