Cálculo Estocástico
Tarea 2

Iván Irving Rosas Domínguez

11 de septiembre de 2023

1. Sea $(B(t))_{t\geq 0}$ un movimiento browniano. Muestra que los siguientes procesos también son movimientos brownianos en $[0,T]$:

- $X(t) = -B(t)$.
- $X(t) = B(T-t) - B(T)$, donde $T < \infty$.
- $X(t) = c(B(t/c^2))$, donde $T < \infty$.
- $X(t) = t(B(1/t))$, $t > 0$ y $X(0) = 0$.

Realizamos las pruebas inciso a inciso:

- $X(t) = -B(t)$

  Demostración. Para probar esto veamos que las distribuciones finito-dimensionales del proceso $(X(t))_{t\geq 0}$ son normales multivariadas (esto es, que el proceso $(X(t))_{t\geq 0}$ es un proceso gaussiano). Para ello simplemente notamos que, para cualquier variable normal X, $-X$ también es una variable aleatoria normal.

  Luego, si tomamos $t_0 < t_1 < .... < t_n$, entonces

  $$(X_{t_1}, ..., X_{t_n}) = (-B_{t_1}, ..., -B_{t_n}),$$

  pero B es un movimiento browniano, por lo que sus distribuciones finito-dimensionales son normales multivariadas, y por lo tanto, el vector anterior tiene distribuciones finito-dimensionales gaussianas, con lo que X también las tiene.

  Resta ver que la función de medias y de covarianzas de X es la función constante cero y $s \wedge t$ respectivamente. La función de medias es clara, pues para $t \geq 0$, $\mathbb{E}[X(t)] = \mathbb{E}[-B(t)] = 0$, pues B es movimiento browniano estándar. Y además,

  $$\Gamma_X(s,t) = \mathrm{Cov}(X(s), X(t)) = \mathrm{Cov}(-B(s), -B(t)) = \mathrm{Cov}(B(s), B(t)) = s \wedge t, \quad s,t \geq 0.$$

  donde hemos hecho uso de que la covarianza es una función bilineal, y nuevamente de que B es un movimiento browniano estándar.

  Por lo tanto, X es un proceso gaussiano con función de medias 0 y función de covarianzas dada por $s \wedge t$ para $s,t \geq 0$, y por lo tanto, X es un movimiento browniano. ■

- $X(t) = B(T-t) - B(T)$, donde $T < \infty$.

  Demostración. Procedemos de la misma manera que hicimos antes: dado que para cualquier $t \geq 0$, $X(t) = B(T-t) - B(T)$ es la resta de dos variables aleatorias gaussianas, por lo que sus distribuciones finito-dimensionales corresponderán a las de una normal multivariada. Resta ver que su función de medias y de covarianzas son las adecuadas. Cabe mencionar que el hecho de que $T < \infty$ es fundamental para que $B(T)$ esté bien definido, así como $B(T-t)$ para $t \geq 0$.

Nótese que para $0 \leq t \leq T$, $\mathbb{E}[X(t)] = \mathbb{E}[B(T-t) - B(T)] = \mathbb{E}[B(T-t)] - \mathbb{E}[B(T)] = 0$, ya que B es un movimiento browniano. Para la función de covarianzas, notamos que

$$\begin{aligned}
\Gamma_X(s,t) &= \operatorname{Cov}(B(T-t) - B(T), B(T-s) - B(T)) \\
&= \Gamma(T-t, T-s) - \Gamma(T-t, T) - \Gamma(T, T-s) + \Gamma(T,T) \\
&= (T-t) \wedge (T-s) - (T-t) \wedge T - T \wedge (T-s) + T \\
&= T - (s \vee t) - (T-t) - (T-s) + T \\
&= -(s \vee t) + (s+t) \\
&= s \wedge t,
\end{aligned}$$

para $0 \leq s, t \leq T$. Por lo tanto, $X(t) = B(T-t) - B(T)$ es un movimiento browniano. ■

- $X(t) = c(B(t/c^2))$, donde $T \leq \infty$.

  Demostración. Supondremos que $c > 0$. De nueva cuenta, probaremos que X es un proceso gaussiano con función de medias y covarianzas adecuadas. Observamos que $X(t)$, para cualquier $t \geq 0$ es el producto de una variable aleatoria gaussiana con una constante c, por lo que nuevamente sus distribuciones finito-dimensionales serán vectores gaussianos multivariados, y por lo tanto X en efecto es un proceso gaussiano.

  Notamos que $\mathbb{E}[X(t)] = \mathbb{E}\left[cB(t/c^2)\right] = 0$, para $0 <\leq t \leq T$, ya que B es un movimiento browniano estándar. Resta ver la función de covarianzas:

$$\begin{aligned}
\Gamma_X(s,t) &= \operatorname{Cov}\left(cB(s/c^2), cB(t/c^2)\right) \\
&= c^2\left((s/c^2) \wedge (t/c^2)\right),
\end{aligned}$$

  y dado que $c^2 > 0$, entonces

$$\Gamma_X(s,t) = c^2\left((s/c^2) \wedge (t/c^2)\right) = (c^2/c^2) s \wedge t = s \wedge t,$$

  para $0 \leq s, t \leq T$. Obsérvese que en la prueba anterior no se usa en ningún momento que T sea finito o infinito salvo por el intervalo en donde se eligen s y t. Concluimos que X en efecto es un movimiento browniano estándar. ■

- $X(t) = t(B(1/t))$, $t > 0$ y $X(0) = 0$.

  Demostración. Verificamos nuevamente que este es un proceso gaussiano. Para $t > 0$, $X(t)$ es una variable aleatoria normal, ya que solo se está multiplicando a dicha variable por una constante. Por ende, sus distribuciones finito-dimensionales serán gaussianas nuevamente, y con ello el proceso X también será gaussiano. Aún incluso si $t = 0$, la distribución de la variable aleatoria $X(0) = 0$ no afecta en nada la distribución de un vector finito-dimensional de variables del proceso X. Resta verificar qué sucede con su proceso de medias y de covarianzas.

  Obsérvese que para $t > 0$, $\mathbb{E}[X(t)] = \mathbb{E}[tB(1/t)] = 0$, ya que B es un movimiento browniano estándar. Además, por definición, $X(0) = 0$, de tal forma que su esperanza es 0. Así, para cualquier $t \geq 0$, $\mathbb{E}[X(t)] = 0$.

  Finalmente, la función de covarianzas del proceso es la siguiente:

$$\begin{aligned}
\Gamma_X(s,t) &= \operatorname{Cov}(tB(1/t), sB(1/s)) \\
&= st\Gamma(1/s, 1/t) \\
&= st((1/s) \wedge (1/t)) \\
&= st(1/(s \vee t)) \\
&= s \wedge t,
\end{aligned}$$

  siempre que $s, t > 0$. Obsérvese que si $s = 0$, entonces directamente

$$\Gamma_X(0,t) = \operatorname{Cov}(X(0), X(t)) = \operatorname{Cov}(0, X(t)) = 0 = 0 \wedge t.$$

  Análogamente en el caso $t = 0$. Por lo tanto, la función de covarianzas es la de un movimiento browniano y con ello, X también es un movimiento browniano estándar. ■

2. Considerando $-B(t)$, deducir la distribución conjunta de $B(t)$ y $m(t) = \min_{s\leq t} B(s)$.

Demostración. Notemos que para x, y tales que $-x \leq -y$ y $-y \geq 0$,

$$\mathbb{P}\left(B(t) \geq x,\ \min_{s\leq t}(B(t)) \geq y\right) = \mathbb{P}\left(-B(t) \leq -x,\ \max_{s\leq t}(-B(t)) \leq -y\right),$$

pero recordamos que el proceso $-B$ también es un movimiento browniano, las distribuciones finito-dimensionales de $-B$ y B coinciden, por lo que

$$\mathbb{P}\left(B(t) \geq x,\ \min_{s\leq t}(B(t)) \geq y\right) = \mathbb{P}\left(B(t) \leq -x,\ \max_{s\leq t}(B(t)) \leq -y\right),$$

con $-x \leq -y$ y $-y \geq 0$. Sin embargo, por lo visto en clase ya conocemos la distribución conjunta de (B, M), con $M(t) = \max_{s\geq t} B(t)$, la cual, evaluada en $(-x, -y)$, está dada por

$$f_{(B,M)}(-x,-y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{2(-y)-(-x)}{t^{3/2}}e^{-(2y-x)^2/2t}, \quad -x \leq -y,\ -y \geq 0.$$

por lo que,

$$f_{(B,m)}(x,y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{x-2y}{t^{3/2}}e^{-(2y-x)^2/2t}, \quad y \leq 0,\ x \geq y$$

■

3. Muestra que las variables aleatorias $M(t)$, $|B(t)|$ y $M(t) - B(t)$ tienen las mismas distribuciones.

Demostración. Aseguramos que la función de densidad de cada una de las tres variables anteriores, está dada por:

$$f(z) = 2\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-z^2/2t}, \quad z \geq 0.$$

Procedemos primero con $|B(t)|$. Notemos que

$$\mathbb{P}\left(|B(t)| > z\right) = \mathbb{P}\left(B(t) > z\right) + \mathbb{P}\left(-B(t) > z\right),$$

para $z \geq 0$. Pero sabemos que la distribución de B y de $-B$ es la misma, por lo que la identidad anterior se convierte en

$$\mathbb{P}\left(|B(t)| > z\right) = 2\mathbb{P}\left(B(t) > z\right), \quad z \geq 0. \tag{1}$$

Luego,

$$\mathbb{P}\left(|B(t)| \leq z\right) = 1 - 2\mathbb{P}\left(B(t) > z\right) = -1 + 2(1 - \mathbb{P}\left(B(t) > z\right)) = -1 + 2\mathbb{P}\left(B(t) \leq z\right),$$

de forma que, si derivamos la expresión anterior, tenemos que

$$f_{|B(t)|}(z) = 2\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-z^2/2t}, \quad z \geq 0, \tag{2}$$

tal y como habíamos predicho.

Procedemos ahora a mostrar que la función de densidad de $M(t)$ es la mencionada. Sabemos ya que se da la igualdad de eventos $\{M(t) \geq z\} = \{T_z \leq t\}$, con $z \geq 0$. Además, notamos que

$$\mathbb{P}\left(B(t) > z\right) = \mathbb{P}\left(B(t) > z | T_z \leq t\right)\mathbb{P}\left(T_z \leq t\right) + \mathbb{P}\left(B(t) > z | T_z > t\right)\mathbb{P}\left(T_z > t\right),$$

pero $\mathbb{P}\left(B(t) > z | T_z > t\right)$, ya que si el primer tiempo de llegada a z ocurre después de t, no puede ser que al tiempo t, $B(t) > z$, ya que al ser continuas las trayectorias de B, forzosamente por el teorema del valor intermedio, $B(t) = z$ en algún punto en $[0, t]$.

Se sigue que
$$\mathbb{P}\left(B(t)>z\right)=\mathbb{P}\left(B(t)>z|T_z\leq t\right)\mathbb{P}\left(T_z\leq t\right).$$
Ahora bien, dado que $T_z \leq t$, entonces $B(t)=B(T_z+s)$, donde $s=t-T_z\geq 0$, y además $B(T_z)=z$. Luego,

$$\mathbb{P}\left(B(t)>z|T_z\leq t\right)=\mathbb{P}\left(B(T_z+s)-B(T_z)>0|T_z\leq t\right),$$

y por la propiedad fuerte de Markov, el proceso $(B(T_z+s)-B(T_z))_{s\geq 0}$ es un movimiento browniano que empieza en 0, independiente de $\mathcal{F}_{T_z}$, por lo que

$$\mathbb{P}\left(B(t)>z|T_z\leq t\right)=\mathbb{P}\left(B(T_z+s)-B(T_z)>0|T_z\leq t\right)=\mathbb{P}(B(T_z+s)-B(T_z)>0)=\frac{1}{2},$$

ya que estamos hablando de una variable aleatoria Gaussiana centrada en 0. Luego,

$$\mathbb{P}\left(B(t)>z\right)=\mathbb{P}\left(B(t)>z|T_z\leq t\right)\mathbb{P}\left(T_z\leq t\right)=\frac{1}{2}\mathbb{P}\left(T_z\leq t\right),$$

con lo que $2\mathbb{P}\left(B(t)>z\right)=\mathbb{P}\left(T_z\leq t\right)=\mathbb{P}(M(t)\geq z)$. Juntando esto con la ecuación (1), deducimos que las variables $M(t)$ y $|B(t)|$ tienen la misma distribución.

Finalmente veamos lo que sucede con $M(t)-B(t)$. Por lo visto en clase, sabemos que la densidad de $(B(t),M(t))$ está dada por
$$f_{(B,M)}(x,y)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{2y-x}{t^{3/2}}e^{\frac{-(2y-x)^2}{2t}},\quad x\leq y, y\geq 0.$$
Obsérvese entonces que $B(t)=x$ y $M(t)-B(y)=z$ si y sólo si $B(t)=x$ y $M(t)=z+x$, donde $z+x\geq 0$ y $x\leq x+z$, es decir, $x\geq -z$ y $z\geq 0$. Se sigue entonces que

$$f_{B(t),M(t)-B(t)}(x,z)=f_{B(t),M(t)}(x,x+z),\quad z\geq 0,\ x\geq -z,$$

de modo que,

$$\begin{aligned}
f_{M(t)-B(t)}(z) &= \int_{-z}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{2(z+x)-x}{t^{3/2}}e^{\frac{-(2(z+x)-x)^2}{2t}}dx\\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{t^{3/2}}\int_{-z}^{\infty}(x+2z)e^{\frac{-(x+2z)^2}{2t}}\\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{t^{3/2}}\,(-t)\int_{-z}^{\infty}\frac{-2}{2t}(x+2z)e^{\frac{-(x+2z)^2}{2t}}dx\\
&= -\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\left(e^{\frac{-(x+2z)^2}{2t}}\Big|_{-z}^{\infty}\right)\\
&= -\frac{2}{\sqrt{2\pi t}}\left(0-e^{\frac{-(-z+2z)^2}{2t}}\right)\\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi t}}e^{\frac{z^2}{2t}},\quad z\geq 0,
\end{aligned}$$

la cual es justamente la función de la ecuación (2), como buscábamos. Concluimos que los procesos $B, M-B$ y $|B|$ tienen la misma distribución.

$\blacksquare$

4. Formular la ley de grandes números y la ley del logaritmo iterado para el movimiento browniano cerca del cero.

Comenzamos con la ley fuerte de grandes números para el movimiento browniano.

Teorema 1. (**Ley fuerte de grandes números para el M. Browniano:**) Sea $(B(t))_{t\geq 0}$ un movimiento browniano. Entonces

$$\lim_{t\to\infty} \frac{B(t)}{t} = 0 \quad \mathbb{P}\text{-c.s.}$$

Demostración. Utilizaremos el lema de Borel-Cantelli. Sea $\varepsilon > 0$. Definimos, para cada $n \geq 0$,

$$A_n := \left\{ \omega \in \Omega : \sup_{2^n \leq t \leq 2^{n+1}} \left| \frac{B(t)(\omega)}{t} \right| \geq \varepsilon \right\}.$$

Por la desigualdad de Chebyshov, y acotando dentro del supremo,

$$\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\sup_{2^n \leq t \leq 2^{n+1}} \left| \frac{B(t)}{t} \right| \geq \varepsilon \right) \leq \frac{\mathbb{E}\left[\left(\sup_{2^n \leq t \leq 2^{n+1}} \left| \frac{B(t)}{t} \right| \right)^2 \right]}{\varepsilon^2} \leq \frac{\mathbb{E}\left[\sup_{2^n \leq t \leq 2^{n+1}} B(t)^2 \right]}{(2^n)^2 \varepsilon^2},$$

y ahora, dado que B es una martingala, y la función z^2 es una función convexa, entonces B^2 es una submartingala, por lo que por la desigualdad maximal de Doob, con $p = 2$, se tiene que

$$\frac{\mathbb{E}\left[\sup_{2^n \leq t \leq 2^{n+1}} B(t)^2 \right]}{(2^n)^2 \varepsilon^2} \leq \left(\frac{2}{2-1} \right)^2 \frac{\mathbb{E}\left[B(2^{n+1})^2 \right]}{2^{2n} \varepsilon^2} = \frac{4(2^{n+1})}{2^{2n} \varepsilon^2} = \frac{8}{2^n \varepsilon^2}.$$

Se sigue que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{2^n \varepsilon^2} < \infty.$$

por lo que, por el Lema de Borel-Cantelli, se tiene que

$$P\left(\limsup_{n\to\infty} A_n \right) = 0,$$

es decir,

$$\mathbb{P}\left(\liminf_{t\to\infty} A_n^c \right) = 1,$$

esto es, la probabilidad de que $\left| \frac{B(t)}{t} \right|$ en el intervalo $[2^n, 2^{n+1}]$ sea más grande que $\varepsilon > 0$, ocurre solamente una cantidad finita de veces con probabilidad 1. El argumento anterior es para cualquier $\varepsilon > 0$, por lo que concluimos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{B(t)}{t} = 0 \quad \mathbb{P}\text{-c.s.}$$

Para formular el equivalente en las cercanías del cero, utilizamos que $X(t) = tB(\frac{1}{t})$ es un movimiento browniano también. Nótese entonces que

$$0 = \lim_{t\to\infty} \frac{B(t)}{t} = \lim_{z\to 0} zB\left(\frac{1}{z} \right).$$

En particular, gracias a la propiedad de reversibilidad en el tiempo, las propiedades con respecto comportamiento del browniano en ∞, se traduce en una propiedad del movimiento browniano cerca del 0. ∎

Teorema 2. (**Ley del Logaritmo Iterado para el M. Browniano:**) Sea $(B(t))_{t\geq 0}$ un movimiento browniano. Entonces

$$\limsup_{t\to 0} \frac{B(t)}{\sqrt{2t \log(\log(1/t))}} = 1, \quad \liminf_{t\to 0} \frac{B(t)}{\sqrt{2t \log(\log(1/t))}} = -1$$

Demostración. Gracias a que el movimiento browniano es simétrico, basta hacer la prueba para el primer enunciado, puesto que suponiendo que este es cierto,

$$-1 = -\limsup_{t\to 0} \frac{B(t)}{\sqrt{2t \log(\log(1/t))}} = \liminf_{t\to 0} \frac{-B(t)}{\sqrt{2t \log(\log(1/t))}} = \liminf_{t\to 0} \frac{B(t)}{\sqrt{2t \log(\log(1/t))}}$$

Probamos entonces el primer enunciado. Denotemos $\phi(t) := \sqrt{2t\log(\log(1/t))}$. Para ello, probaremos que para cualesquiera $\delta > 0$ y $\varepsilon > 0$,

$$\limsup_{t\to 0} \frac{B(t)}{\phi(t)} < 1+\delta \quad \text{ y } \limsup_{t\to 0} \frac{B(t)}{\phi(t)} > 1-\varepsilon.$$

Obsérvese que la arbitrariedad de ε y de δ implican la igualdad. Procedemos con la primera desigualdad. La idea es estudiar a B_t a lo largo de una sucesión $(t_n)_{n\geq 0}$ tal que $t_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Sea $0 < \xi < 1$, y denotemos $t_n = \xi^n$. Sea $\delta > 0$. Consideremos los eventos

$$A_n := \{\omega \in \Omega : \exists t \in [t_{n+1}, t_n] \text{ tal que } B(t) \geq (1+\delta)\phi(t_{n+1})\}$$

Para ello, notemos que, denotando $C_n := \left\{\sup_{t\leq t_n B(t)\geq(1+\delta)\phi(t_{n+1})}\right\}$, se tiene que $A_n \subseteq C_n$, ya que claramente el supremo sobre todo $[0,t_n]$ de $B(t)$ es mayor al valor de $B(t)$ sobre $[t_{n+1}, t_n]$. Y además, se tiene que la función $\phi(t) = \sqrt{2t\log(\log(1/t))}$ es decreciente para t suficientemente pequeño, lo cual se cumple gracias a que $t^n \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Así, la contención anterior está justificada, y por lo tanto, $\mathbb{P}(A_n) \leq \mathbb{P}(C_n)$. Sin embargo, el evento C_n habla de la cola del máximo del browniano en $[0, t_n]$, así que por el ejercicio 3, y particularmente por lo visto en la ecuación (2), se tiene que

$$\mathbb{P}(A_n) \leq \mathbb{P}(C_n) = 2\mathbb{P}\left(\{B(t_n) \geq (1+\delta)\phi(t_{n+1})\}\right).$$

Ahora bien, observando la densidad de una variable normal Y de media 0 y varianza σ^2, tenemos que para $\lambda > 0$,

$$\mathbb{P}(|Y| \geq \lambda) = 2\int_\lambda^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \leq \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sigma}{\lambda} e^{-\frac{\lambda^2}{2\sigma^2}},$$

por lo que utilizando esta cota en la ecuación que teníamos, se sigue que

$$\mathbb{P}(A_n) \leq 2\mathbb{P}\left(\{B(t_n) \geq (1+\delta)\phi(t_{n+1})\}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{t_n}}{(1+\delta)\phi(t_{n+1})} e^{-\frac{(1+\delta)^2\phi^2(t_{n+1})}{2t_n}}.$$

Definimos $\gamma := (1+\delta)^2\xi$. Obsérvese ahora que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{t_n}}{(1+\delta)\phi(t_{n+1})} e^{-\frac{(1+\delta)^2\phi^2(t_{n+1})}{2t_n}} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{t_n}}{(1+\delta)\phi(t_{n+1})} e^{-\frac{(1+\delta)^2\phi^2(t_{n+1})}{2t_n}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{t_n}}{(1+\delta)\sqrt{2t_n\log(\log(1/t_n))}} e^{-\frac{(1+\delta)^2 2t_{n+1}\log(\log(1/t_{n+1}))}{2t_n}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(1+\delta)\sqrt{2\xi^n\log(\log(1/\xi^n))}} e^{-\frac{(1+\delta)^2\xi^{n+1}\log(\log(1/\xi^{n+1}))}{\xi^n}} \\
&= \frac{C'}{\sqrt{\xi^n\log(n\log(1/\xi))}} e^{-(1+\delta)^2\xi\log((n+1)\log(1/\xi))} \\
&= \frac{C'}{\sqrt{\xi^n\log(n\log(1/\xi))}} (n+1)^{-\gamma}(\log(1/\xi))^{-\gamma} \\
&= \frac{C}{(n+1)^\gamma\sqrt{\log(n+1)}},
\end{aligned}$$

donde C' y C son constantes que dependen de δ y ξ. Recordemos ahora que $\xi \in (0,1)$ en general. Pero ahora podemos elegir $\xi > \frac{1}{(1+\delta)^2}$, de tal forma que $\gamma > 1$, y con ello, $\mathbb{P}(A_n) \leq \frac{C}{(n+1)^\gamma\sqrt{\log(n+1)}}$, la cual es una serie convergente. Por lo tanto, por el Lema de Borel-Cantelli, A_n sucede solamente una cantidad finita de veces con probabilidad 1. Esto es, solo para una cantidad finita de naturales $n \geq 1$,

$$\frac{B(t)}{\sqrt{2t_n\log(\log(1/t_n))}} \geq 1+\delta,$$

con probabilidad 1. Por lo tanto, la desigualdad contraria ocurre siempre, salvo una cantidad finita de veces, para $\delta > 0$ arbitrario. Por lo tanto,

$$\limsup_{t\to 0} \frac{B(t)}{\phi(t)} < 1+\delta.$$

Para la desigualdad restante, tomamos $\varepsilon > 0$. Tal como en el inciso anterior, elegimos $\delta > 0$, y $\xi \in (0,1)$, y denotamos $t_n = \xi^n$. Definimos $X(n) := B(t_n) - B(t_{n+1})$. Entonces las variables $X(n)$ son independientes entre sí y su varianza es $\mathrm{Var}\,(X(n)) = t_n - t_{n+1} = \xi^n(1-\xi)$.

Aseguramos que $\mathbb{P}\,(X(n) \geq (1-\delta)\phi(t_n) i.o.) = 1$.

Obsérvese que, utilizando la desigualdad análoga de la cola de una variable normal de antes,

$$\mathbb{P}\left(\{X(n) \geq (1-\delta)\phi(t_n)\}\right) \geq \frac{\sqrt{t_n - t_{n+1}}}{\sqrt{2\pi}\phi(t_n)} e^{-\frac{(1-\delta)^2\phi^2(t_n)}{2(t_n - t_{n+1})}}.$$

Definimos $\gamma := \frac{(1-\delta)^2}{1-\xi}$. Realizando cuentas similares a las hechas antes, se puede deducir que

$$\frac{\sqrt{t_n - t_{n+1}}}{\sqrt{2\pi}\phi(t_n)} e^{-\frac{(1-\delta)^2\phi^2(t_n)}{2(t_n - t_{n+1})}} \geq \frac{C}{n^\gamma \sqrt{\log(n)}},$$

donde C es una constante adecuada. Luego, dado que $\xi \in (0,1)$ fue arbitraria, podemos elegirla de tal forma que $\gamma < 1$, de tal forma que la serie de las probabilidades

$$\mathbb{P}\left(\{X(n) \geq (1-\delta)\phi(t_n)\}\right)$$

forma una serie divergente. Gracias a la independencia de las variables $X(n)$ entre sí, por el Lema de Borel-Cantelli para eventos independientes, se tiene lo buscado.

Por otro lado, dado que tenemos que

$$\limsup_{t\to 0} \frac{B(t)}{\phi(t)} < 1+\delta,$$

utilizando la simetría del movimiento browniano, se tiene que

$$\liminf_{t\to 0} \frac{B(t)}{\phi(t)} > -(1+\delta),$$

de manera que, como $t_n = \xi^n \to 0$, para una n suficientemente grande,

$$B(t_n) = X(n) + B(t_{n+1}) > X_n - (1+\delta)\phi(t_{n+1}).$$

Pero como $\mathbb{P}\,(X(n) \geq (1-\delta)\phi(t_n) i.o.) = 1$, existe una sucesión de n, digamos n_k, tal que $n_k \to \infty$ para la cual

$$X_n - (1+\delta)\phi(t_{n+1}) > (1-\delta)\phi(t_n) - (1-\delta)\phi(t_{n+1}).$$

Por último, nótese que

$$\frac{\phi(t_{n+1})}{\phi(t_n)} = \frac{\sqrt{2t_n \log(\log(1/t_n))}}{\sqrt{2t_{n+1}\log(\log(1/t_{n+1}))}} = \frac{\sqrt{\log(n\log(1/\xi))}}{\sqrt{\xi\log((n+1)\log(1/\xi))}} \leq \sqrt{2\xi},$$

para n suficientemente grande. De tal forma que, para tal $n \geq 1$,

$$B(t_n) \geq (1 - \delta - 2\sqrt{2\xi}(1+\delta))\phi(t_n).$$

Se pueden elegir δ y ξ suficientemente pequeños para que se siga conservando el que $\gamma < 1$, necesario para la primera parte de este segundo inciso, y de tal forma que

$$\delta + \sqrt{2\xi}(1+\delta) < \varepsilon.$$

De hecho, para ser exactos, ambas condiciones se satisfacen eligiendo $\delta < \varepsilon/2$ y $\xi < \varepsilon^2/32$. Luego, existe una sucesión de naturales $n \to \infty$ tales que

$$B(t_n) \geq (1-\varepsilon)\phi(t_n),$$

de donde se sigue que hay una sucesión de naturales $n \to \infty$ tales que

$$\frac{B(t_n)}{\phi(t_n)} \geq 1-\varepsilon,$$

y por lo tanto se tiene la desigualdad de límite superior, con lo que concluimos ambas desigualdades y por lo tanto la igualdad.

■

5. Sea $\{\Pi\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de particiones del intervalo $[0,t]$ tales que

$$\lim_{n\to\infty} \|\Pi_n\| = 0.$$

Entonces las variaciones cuadráticas

$$V_t^{(2)}(\Pi_n) \triangleq \sum_{k=1}^{m_n} |W_{t_k^{(n)}} - W_{t_{k-1}^{(n)}}|^2$$

del movimiento browniano W sobre tales particiones convergen hacia t en L^2 conforme $n \to \infty$. Más aún, si las particiones se vuelven suficientemente finas de tal forma que $\sum_{n=1}^{\infty} \|\Pi_n\| < \infty$, entonces la convergencia anterior ocurre con probabilidad 1.

Demostración. El caso en el que las particiones son tales que $\sum_{k=1}^{\infty} \|\Pi_n\| < \infty$, la prueba se vio en clase, por lo que solo hay que ver el caso de la convergencia en L^2. Si $\Pi = \{t_0, ..., t_m\}$ es una partición del intervalo $[0,t]$, entonces

$$V_t^{(2)}(\Pi) - t = \sum_{k=1}^{m} \left(\left(W_{t_k} - W_{t_{k-1}}\right)^2 - (t_k - t_{k-1}) \right)$$

se puede ver como una suma de variables aleatorias independientes centradas. En consecuencia,

$$\mathbb{E}\left[(V_t^{(2)}(\Pi) - t)^2\right] = \sum_{k=1}^{m} (t_k - t_{k-1})^2 \mathbb{E}\left[\left(\frac{(W_{t_k} - W_{t_{k-1}})^2}{t_k - t_{k-1}} - 1\right)^2\right] \leq \sum_{k=1}^{m} (t_k - t_{k-1}) \|\Pi\| \mathbb{E}\left[(Z^2-1)^2\right] \leq K\|\Pi\| t,$$

donde Z es una variable aleatoria normal estándar (todas las variables de la expresión anterior están siendo normalizadas por su varianza), y $K = \mathbb{E}\left[(Z^2-1)^2\right]$. Pero esta última expresión tiende a cero conforme el tamaño de la partición tiende a cero, así que

$$V_t^{(2)}(\Pi) \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} t.$$

■