

Cómputo Científico

Tarea 7

MCMC: Metrópolis-Hastings II

Iván Irving Rosas Domínguez

18 de octubre de 2023

Con el algoritmo Metrópolis-Hastings (MH), simular lo siguiente:

1. Sean $x_i \sim \Gamma(\alpha, \beta)$; $i \in \{1, \dots, n\}$. Simular datos x_i con $\alpha = 3$ y $\beta = 100$ considerando los casos $n = 4$ y $n = 30$.
Con $\alpha \sim U(1, 4)$, $\beta \sim \exp(1)$ distribuciones a priori, se tiene la posterior

$$f(\alpha, \beta | \bar{x}) \propto \frac{\beta^{n\alpha}}{\Gamma(\alpha)} r_1^{\alpha-1} e^{-\beta(r_2+1)}, \quad 1 \leq \alpha \leq 4, \quad \beta > 1.$$

$$\text{con } r_2 = \sum_{i=1}^n x_i \text{ y } r_1 = \prod_{i=1}^n x_i.$$

En ambos casos, grafica los contornos para visualizar dónde está concentrada la posterior.

Utilizar la propuesta

$$q\left(\begin{pmatrix} \alpha_p \\ \beta_p \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}_2\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}\right).$$

2. Simular de la distribución $\Gamma(\alpha, 1)$ con la propuesta $\Gamma([\alpha], 1)$, donde $[\alpha]$ denota la parte entera de α .

Además, realizar el siguiente experimento: poner como punto inicial $x_0 = 900$ y graficar la evolución de la cadena, es decir, $f(X_t)$ vs t .

3. Implementar Random Walk Metrópolis Hastings (RWMH) donde la distribución objetivo es $\mathcal{N}_2(\mu, \Sigma)$, con

$$\mu = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 1 & 0,9 \\ 0,9 & 1 \end{pmatrix}.$$

Utilizar como propuesta $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}_2(\mathbf{0}, \sigma I)$. ¿Cómo elegir σ para que la cadena sea eficiente? ¿Qué consecuencias tiene la elección de σ ?

Como experimento, elige como punto inicial $x_0 = \begin{pmatrix} 1000 \\ 1 \end{pmatrix}$ y comenta los resultados.

Para todos los incisos del ejercicio anterior:

- Establece cual es tu distribución inicial.
- Grafica la evolución de la cadena.
- Indica cuál es el Burn-in.
- Comenta qué tan eficiente es la cadena.
- Implementa el algoritmo MH considerando una propuesta diferente.