Cómputo Científico
Tarea 4
Cálculo de eigenvalores

Iván Irving Rosas Domínguez

24 de septiembre de 2023

1. Dado el siguiente:

Teorema 1 (Gershgorin)**.** Dada una matriz $A = (a_{ij})$ de $m \times m$, cada eigenvalor de A está en al menos uno de los discos en el plano complejo con centro en a_{ii} y radio $\sum_{j \neq i} |a_{ij}|$. Además, si n de estos discos forman un dominio conexo, disjunto de los otros $m - n$ discos, entonces hay exactamente n eigenvalores en ese dominio.

Deduce estimaciones de los eigenvalores de

$$\begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & \epsilon \\ 0 & \epsilon & 1 \end{pmatrix}$$

con $|\epsilon| < 1$.

Solución: dado el teorema anterior, procedemos a calcular los discos de Gershgorin para $i = 1, 2, 3$.

a) $D_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 8| \leq 1 + 0\} = D_1(8)$, el disco complejo de radio 1 con centro en 8.

b) $D_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 4| \leq 1 + \epsilon\} = D_{1+\epsilon}(4)$, el disco complejo de radio 1 con centro en 4.

c) $D_3 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| \leq \epsilon\} = D_\epsilon(1)$, el disco complejo de radio ϵ con centro en 1.

No obstante, dado que la matriz es simétrica y tiene entradas reales, entonces sus eigenvalores son reales, por lo que podemos descartar los discos complejos y hablar de intervalos en la recta real. Luego, los Discos de Gershgorin están dados por

a) $D_1 = [-7, 9]$, la bola cerrada con centro en 8 y radio 1,

b) $D_2 = [3 - \epsilon, 5 + \epsilon]$, la bola cerrada con centro en 4 y radio $1 + \epsilon$,

c) $D_3 = [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]$, la bola cerrada con centro en 1 y radio ϵ,

2. Implementa la iteración QR con shift. Aplícala a la matriz A del Ejercicio 1 con $\epsilon = 10^{-N}$ para $N = 1, 3, 4, 5$.

3. Determina todos los eigenvalores y eigenvectores de una matriz de Householder

4. Demuestra que no es posible construir la transformación de similaridad del Teorema de Schur con un número finito de transformaciones de similaridad de Householder.

5. ¿Qué pasa si aplicas la iteración QR sin shift a una matriz ortogonal? o **hagan el que quieran** Sea A una matriz de Hessenberg superior y sea $QR = A$ la factorización QR de A. Muestra que RQ es una matriz superior de Hessenberg.