# Convergencia de polinomios y Probabilidad Libre

Iván Irving Rosas Domínguez

9 de septiembre de 2024

**Resumen**

Basado en «S-transform for finite free probability». Trabajo con Fujie, Perales, ?. ArXiv 2408.09337

Trabajo que continúa la tesis de licenciatura de Daniel Perales. Gustó el artículo pero no vieron qué onda hasta recientemente. Conecta dos áreas. Geometría de Polinomios y Matrices aleatorias y probabilidad libre.

El resultado mas importante, y son de esas cosas que cuando uno piensa que unos resultados mágicamente aparecen cuando hace otras cosas, este es un ejemplo. Cosas de matrices aleatorias e ideas de combinatoria se aplican a un problema muy natural que es entender convergencia de polinomios o de su distribución espectral.

El problema que nos interesa es el siguiente.

## 1. Problema

Sea $(P_n)_{n\geq 1}$ sucesión de polinomios de grado $n$, polinomios con raíces reales. Definimos $P_n(x) := (x-\lambda_1), ..., (x-\lambda_n)$. Consideremos la distribución empírica o distribución de raíces $\mu_n := \sum_{i=1}^{n} \delta_{\lambda_i}$. Los lambda no necesariamente son distintos (aunque se pueden suponer distintos entre sí)

Nos interesa dar condiciones en los coeficientes para asegurar que $\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} \mu$ y describir de alguna forma la medida $\mu$.

**Ejemplos.** · Polinomios de Hermite. $h_n(x) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \binom{2n}{2k} \frac{(2k)!}{k!} \frac{x^{2n-2k}}{(2n)^k}$

Resulta ser que $\mu_{h_n} \to S$, donde se da que Hermite$=\mathbb{E}\left[X_{GUE}\right]$, donde GUE son las matrices Gaussianas Unitarias, y $S$ es la distibución de Wigner.

· Polinomios de Laguerre. $L_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(x)(-1)^k \binom{n}{} k \frac{(n)_k}{n^k} X^{n-1}$.

Se tiene que $\mu_{L_n} \to Mp$, donde $Mp$ es la Marchenko-Pasteur y se tiene que $L_n = \mathbb{E}\left[X_{Wishart}\right]$, donde $GG^T$, $G = GUE$. (Preguntar a Esaul, en su tesis de maestría estudió este tipo de objetos.)

El problema es determinar a partir de los coeficientes de los polinomios, saber a dónde van. Es decir, ¿qué significa en términos de los polinomios la convergencia de la distribución empírica de las raíces?

· Polinomios de Chebyshev. $Ch(x) = \sum(-1)^k \frac{2k!}{k!} \frac{(2n-k-1)!}{2^{2k}} x^{2k}$.

En este caso $M_{Ch^n} \to arcoseno$. Coincide con $X_{A_G}$, y $A_G$ es un ciclo.

El resultado principal es el siguiente

**Teorema 1** (AFPO). Sea $(p_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de polinomios con raíces simétricas

$$p_n(x) = x^n - a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + ...$$

Entonces son equivalentes

- El coeficiente $\frac{\binom{n}{k-1} a_{k-1}}{\binom{n}{k} a_k} \to f(t)$ siempre que $\frac{k}{n} \to t$, para cualquier $t$. $k$ depende de $n$, por ejemplo podemos tomar $k = \lfloor nt \rfloor$, para cualquier $t \in [0,1]$.
- $\mu[P_n] \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} \mu$.

Observamos que como función los $P_n$ no convergen, esa es la dificultad. Nos ponemos a estudiar las medidas empíricas. Mimbela pregunta. ¿Pero y qué pasa con polinomios que sí convergen? Por ejemplo, los polinomios de Bernstein. ¿Da algo de intuición? ¿Se aplica este resultado para esos polinomios?

En el ejemplo de los polinomios de Laguerre, resulta que

$$\frac{(n)_k}{n^k} / \frac{(n)_{k+1}}{n^{k+1}} = \frac{n}{n-k+1}.$$

Por lo tanto, si $k \approx tn$, entonces lo anterior converge a $\frac{1}{1-t} = f(t)$. Y esta madre es creciente.

Lo mismo se puede hacer en Cheby o en otros. Ahora bien, en el caso de Laguerre, la $f$ resultó ser relativamente sencilla. En el problema general ¿quién es la $f$?

## 2. Elementos de Proba Libre.

Recordemos que la transformada de Cauchy es

$$G_\mu(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2-t} d\mu$$

con $z \in \mathbb{C}$, y además uno puede recuperar la densidad de la medida como

$$\lim_{y \to 0^+} Im(G_\mu(x+iy)) = \pi d\mu.$$

Ahora, nótese que

$$\psi_\mu(z) = \int_0^\infty \frac{tz}{1-tz} d\mu(t) = \frac{1}{z} G_\mu(\frac{1}{z}) - 1$$

y definimos la transformada $S$ como

$$S_\mu(z) = \frac{1+z}{z} \psi_\mu^{-1}(z)$$

Nos preguntamos ¿cuáles son las propiedades de la transformada $S$?

**Propiedades de la transformada $S$.**

- $S_\mu : (-1,0) \to \mathbb{R}^+$, con $\lim_{t \to -1} S_\mu(t) = a$, con $a = \int x^{-1} d\mu$ y también $\lim_{t \to 0} S_\mu(t) = b^{-1}$ donde $b = \int x d\mu$.
- $S_\mu$ es estrictamente creciente.
- $S_{\mu \otimes \nu} = S_\mu S_\nu$.

¿Cuál fue el resultado entonces? Resulta ser que, por ejemplo, la transformada $S_\mu$ de la Marchenko Pasteur resulta ser $f(t) = \frac{1}{1-t}$. Entonces dada la equivalencia que se tiene mostrada en el teorema principal, podemos calcular el límite de la primera condición (si existe el límite, existe la transformada $S$ de la medida empírica). Luego, calculamos transformadas $S$ de distribuciones, analizamos a donde converge la medida empírica, le sacamos la transformada $S$ a la medida límite y tratamos de cuadrar. Vamos, que en resumen, el teorema que se probó se puede reescribir como

**Teorema 2** (AFPO)**.** Sea $(p_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de polinomios con raíces simétricas

$$p_n(x) = x^n - a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + ...$$

Entonces son equivalentes

- El coeficiente $\frac{\binom{n}{k-1} a_{k-1}}{\binom{n}{k} a_k} \to S_\mu(-t)$.
- $\mu[P_n] \xrightarrow[n \to \infty]{\mathcal{D}} \mu$.

Lo anterior bajo algunas hipótesis.

## 3. Polinomios

Nótese que

$$P_n(x) = (x-\lambda_1)...(x_{\lambda_n}) = x^n - e_1 x^{n-1} + ...$$

donde $e_i = \sum_{1\le i_1,\ldots,i_k \le n} \lambda_{i_1}...\lambda_{i_k}$. y donde $\tilde{e}_i := e_k/\binom{n}{k}$. Además estos últimos satisfacen propiedades de convexidad:

$$\tilde{e}_{k+1}\tilde{e}_{k-1} \ge \tilde{e}_k^2.$$

y se satisface que

$$\tilde{e}_n/\tilde{e}_{n-1} \le \tilde{e}_k/\tilde{e}_{k+1} \le \tilde{e}_{k-1}/\tilde{e}_k \le ... \le \tilde{e}_0/\tilde{e}e_1.$$

Y entonces

$$\frac{\lambda_1 \cdot ... \cdot \lambda_n}{\lambda_1 \cdot ... \cdot \lambda_{n-1} + ...} = \frac{1}{1/\lambda_1 + ... + 1/\lambda_n}$$

A Daniel Perales se le ocurrió que lo anterior fuera la transformada $S$ para polinomios. Se comporta exactamente de la misma manera que la transformada $S$.

**Teorema 3** (Hoskens-Kabluchko, Ar. Perales-Garza)**.** $\mu_{P_n} \to \mu$ y si $k \sim tn$, entonces $\mu_{P_n}^( k) \to D_t \mu^{\boxplus 1/t} = \mu_t$. Y se tiene que

$$S_{\mu_t}(tz) = S_\mu(z).$$

Veamos. Si tenemos el polinomio, ¿cómo son los coeficientes de las derivadas?

$$\partial_x P_n(x) = nx^{n-1} - (n-1e_1 x^{n-2}).$$

Lo vuelvo mónico, y nos damos cuenta del lema siguiente

**Teorema 4** (Lema)**.**

$$\tilde{e}_k(P)/\tilde{e}_{k-1}(P) = \tilde{e}(\partial_x P)/\tilde{e}_{k-1}(P) \cdot ... \cdot \tilde{e}_k(\partial^l P)/\tilde{e}_{k-1}(P).$$

Observamos que tomando convergencias, se tienen las siguientes relaciones:

$$\tilde{e}(\partial_x P)/\tilde{e}_{k-1}(P) \cdot ... \cdot \tilde{e}_k(\partial^l P)/\tilde{e}_{k-1}(P) \to \int x^{-1}\partial^k(P_k) \to \int x^{-1}\mu_t = S_{\mu_t}(-1) = S_\mu(-t).$$