Modelos Estocásticos en Finanzas
Tarea-examen 3

Iván Irving Rosas Domínguez

15 de diciembre de 2023

1. Considere la función v_L dada por

$$v_L(x) = \begin{cases} K - x & \text{si } 0 \leq x \leq L, \\ (K-L)\left(\frac{x}{L}\right)^{-2r/\sigma^2} & \text{si } x \geq L. \end{cases} \tag{1}$$

La primera línea de la ecuación anterior implica que $v'_L(L-) = -1$. Use la segunda línea de (1) para calcular $v'_L(L+)$. Muestre que el *smooth pasting* dado por

$$v'_{L_*}(L_*-) = v'_{L_*}(L_*+),$$

se satisface solo por L_* dado por

$$L_* = \frac{2r}{2r+\sigma^2}K. \tag{2}$$

Demostración. Calculamos la derivada de v_L dada por (1) en el intervalo $[L, \infty)$. Nótese que $L > 0$ por lo que las expresiones de la segunda línea están bien definidas, así que para $x > L$,

$$v'_L(x) = (K-L)\left(-\frac{2r}{\sigma^2}\right)\left(\frac{x}{L}\right)^{-2r/\sigma^2-1}\left(\frac{1}{L}\right) = -\frac{2r(K-L)}{L\sigma^2}\left(\frac{x}{L}\right)^{-2r/\sigma^2-1}.$$

Nótese que lo anterior es una función continua de x, ya que $x > L > 0$. Luego, para calcular la derivada por derecha, hacemos tender x a L por derecha, lo que nos dice que

$$v'_L(L+) = -\frac{2r(K-L)}{L\sigma^2}\left(\frac{L}{L}\right)^{-2r/\sigma^2-1} = -\frac{2r(K-L)}{L\sigma^2}.$$

Se sigue que, para que las derivadas por derecha e izquierda de v_L coincidan en L, se debe tener que

$$v'_L(L+) = v'_L(L-) \iff -1 = -\frac{2r(K-L)}{L\sigma^2},$$

por lo que resolviendo para L, se tiene que

$$\begin{aligned} -1 = -\frac{2r(K-L)}{L\sigma^2} &\iff 1 = \frac{2r(K-L)}{L\sigma^2} \\ &\iff L\sigma^2 = 2rK - 2rL \\ &\iff L(\sigma^2 + 2r) = 2rK \\ &\iff L = \frac{2r}{2r+\sigma^2}K \end{aligned}$$

por lo que el *smooth pasting*, se logra siempre que

$$L_* = \frac{2r}{2r+\sigma^2}K.$$

∎

2. Considere dos puts Americanos perpetuos con base en un movimiento browniano geométrico dado por

$$dS(t) = rS(t)dt + \sigma S(t)d\widetilde{W}(t)$$

Supongamos que los puts tienen diferentes precios de strike, K_1 y K_2, donde $0 < K_1 < K_2$. Sean $v_1(x)$ y $v_2(x)$ sus respectivos precios (como se calculó en clase). Muestre que $v_2(x)$ satisface las primeras dos condiciones lineales

$$v_2(x) \geq (K_1 - x)^+ \quad \text{para todo } x \geq 0, \tag{3}$$

$$rv_2(x) - rxv_2'(x) - \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 v_2''(x) \geq 0 \quad \text{para todo } x \geq 0, \tag{4}$$

para el precio del put Americano perpetuo con precio de strike K_1 pero que $v_2(x)$ no satisface la tercera condición dada por:

Para toda $x \geq 0$ la igualdad se da en (3) o en (4) o en ambas.

Demostración. Recordamos que, de acuerdo a lo visto en clase, para el precio K_1 y K_2, las funciones v_1 y v_2 están dadas por

$$v_i(x) = \begin{cases} (K_i - x) & \text{si } 0 \leq x \leq L \\ (K_i - L)\left(\frac{x}{L}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}} & \text{si } L \leq x, \end{cases}$$

por lo que vemos que v_2 cumple las primeras dos condiciones (3) y (4):

- Nótese que para $x \geq 0$, si $0 \leq x \leq L$, entonces directamente de la definición de $v_2(x)$ se tiene que $v_2(x) = K_2 - x$, luego, como $0 < K_1 < K_2$, se tiene que

  $$v_2(x) \geq K_1 - x = (K_1 - x)^+,$$

  donde la última igualdad se debe a que el valor L el valor de la barrera inferior al precio de strike K se escoge justamente tal que $0 < L < K_1 < K_2$. Por lo tanto, en $[0, L]$ se cumple la condición (3). Supongamos ahora que $L \leq x$. Nótese así que

  $$v_2(x) = (K_2 - L)\left(\frac{x}{L}\right)^{-\frac{2r}{\sigma}^2} \geq (K_2 - L)(1)^{-\frac{2r}{\sigma^2}} = K_2 - L.$$

  Luego, si $K_1 - x \geq 0$, entonces $K_2 - L \geq K_1 - x \geq 0$, y con ello, $v_2(x) \geq (K_1 - L)^+$. Por otro lado, si $K_1 - x \leq 0$, entonces $K_2 - L \geq 0$ pues $0 \leq L < K_1 < K_2$ y con ello, $v_2(x) = K_2 - L \geq 0 = (K_1 - x)^+$. En cualquier caso, se cumple la primera condición (3).

- Supongamos que $0 \leq x \leq L$. Es claro en este caso que las primeras y segundas derivadas de v_2 están dadas por

  $$v_2'(x) = -1 \qquad \text{y} \qquad v_2'(x) = 0,$$

  por lo que la ecuación (4) está dada para v_2 por

  $$r(K_2 - x) - rx(-1) - 0 = rK_2 - rx + rx = rK_2 \geq 0,$$

  por lo que se cumple la condición (4). Supongamos ahora que $L \leq x$, entonces las derivadas para $v_2(x)$ en este intervalo están dadas por

  $$v_2'(x) = -\frac{2r}{\sigma^2}(K_2 - L)L^{2r/\sigma^2}x^{-2r/\sigma^2 - 1},$$

  y

  $$v_2''(x) = -\frac{2r}{\sigma^2}\left(-\frac{2r}{\sigma^2} - 1\right)(K_2 - L)L^{2r/\sigma^2}x^{-2r/\sigma^2 - 2},$$

  por lo que entonces la condición de la (4) se vuelve:

  $$r(K_2 - L)x^{-\frac{2r}{\sigma^2}}L^{\frac{2r}{\sigma^2}} - rx\left(-\frac{2r}{\sigma^2}(K_2 - L)L^{2r/\sigma^2}x^{-2r/\sigma^2 - 1}\right) - \frac{1}{2}\sigma^2 x^2\left(-\frac{2r}{\sigma^2}\right)\left(-\frac{2r}{\sigma^2} - 1\right)(K_2 - L)L^{2r/\sigma^2}x^{-2r/\sigma^2 - 2},$$

  la cual al simplificar se vuelve

  $$r(K_2 - L)x^{-\frac{2r}{\sigma^2}}L^{\frac{2r}{\sigma^2}} + r\frac{2r}{\sigma^2}(K_2 - L)L^{2r/\sigma^2}x^{-2r/\sigma^2} + r\left(-\frac{2r}{\sigma^2} - 1\right)(K_2 - L)L^{2r/\sigma^2}x^{-2r/\sigma^2},$$

y al factorizar el término común $r(K_2 - L)x^{-\frac{2r}{\sigma^2}}L^{\frac{2r}{\sigma^2}}$, obtenemos que

$$x^{-\frac{2r}{\sigma^2}}L^{\frac{2r}{\sigma^2}}\left(1 + \frac{2r}{\sigma^2} - 1 - \frac{2r}{\sigma^2}\right) = 0 \geq 0,$$

por lo que en efecto se cumple la segunda condición (4).

- Resta que veamos que NO se cumplen simultáneamente (3) y (4) (o ambas). Nótese que para ello, basta verificar la existencia de un $x \in [0, \infty)$ tal que no se cumplan ni la igualdad en (3) ni la igualdad en (4). Proponemos $x = \frac{L}{2}$. Es claro que entonces $0 < x < L < K_1 < K_2$. Notamos que no se da la igualdad en (4): como $0 < x < L$, entonces $v_2(x) = K_2 - x$ y así, según las derivadas calculadas antes,

$$rv_2(x) - rxv_2'(x) - \frac{1}{2}\sigma^2x^2v_2''(x) = r(K_2 - x) - rx(-1) - 0 = rK_2 - rx + rx = rK_2,$$

y como $r, K_2 > 0$ por hipótesis, entonces se da la desigualdad estricta en (4). Por otro lado, nótese que tampoco se da la igualdad en (3), esto ya que

$$v_2(x) = K_2 - x.$$

Mientras que

$$(K_1 - x)^+ = K_1 - x,$$

porque $0 < L/2 = x < L < K_1 < k_2$. Se sigue que, si se diera la igualdad en (3), entonces

$$K_2 - x = K_1 - x \iff K_2 = K_1,$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto, no se da la igualdad en (3) y con ello, el precio v_2 de la opción con precio de strike $K_2 > K_1$ no satisface la tercera de las condiciones lineales complementarias para el precio de strike K_1.

■

3. Suponga que $v(x)$ es una función continua y acotada con derivada continua y que satisface

$$v(x) \geq (K - x)^+ \quad \text{para todo } x \geq 0, \tag{5}$$

$$rv(x) - rxv'(x) - \frac{1}{2}\sigma^2x^2v''(x) \geq 0 \quad \text{para todo } x \geq 0, \tag{6}$$

$$\text{Para toda } x \geq 0 \text{ la igualdad se da en (5) o en (6).} \tag{7}$$

Este ejercicio muestra que $v(x)$ tiene que ser $v_{L_*}(x)$ dada por (1) con L_* dado por (2). Suponga que K es estrictamente positiva.

1. Primero, considérese un intervalo de valores en x en el que $v(x)$ satisface

$$rv(x) - rxv'(x) - \frac{1}{2}\sigma^2x^2v''(x) = 0. \tag{8}$$

Esta es una ecuación diferencial de segundo orden lineal, y tiene dos soluciones de la forma x^p. Sustituya x^p en (8) y muestre que los únicos valores de p que producen que x^p satisfaga (8) son $p = -\frac{2r}{\sigma^2}$ y $p = 1$.

Demostración. Supongamos que se satisface (8). Sustituyendo $v(x) = x^p$, se tiene que

$$rx^p - rxpx^{p-1} - \frac{1}{2}\sigma^2x^2p(p-1)x^{p-2} = 0 \iff rx^p - rpx^p - \frac{1}{2}\sigma^2p(p-1)x^p = 0,$$

y ahora, suponiendo que $x = 0$ es un valor dentro del intervalo, se tiene la igualdad anterior. Supongamos ahora que $x \neq 0$. Entonces cancelando términos y resolviendo para p, se tiene que

$$
\begin{aligned}
r - rp - \frac{1}{2}\sigma^2 p(p-1) = 0 &\iff p^2 + p(\frac{2r}{\sigma^2} - 1) = \frac{2r}{\sigma^2} \\
&\iff p^2 + 2p\left(\frac{r}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{r}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{2r}{\sigma^2} + \left(\frac{r}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right)^2 \\
&\iff \left(p + \frac{r}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{2r}{\sigma^2} + \left(\frac{r}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right)^2 \\
&\iff \left(p + \frac{r}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{r^2}{\sigma^4} + 2\frac{r}{\sigma^2}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4} \\
&\iff \left|p + \frac{r}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{r}{\sigma^2} + \frac{1}{2}\right| \\
&\iff \begin{cases} p + \frac{r}{\sigma^2} - \frac{1}{2} = \frac{r}{\sigma^2} + \frac{1}{2} & \iff \quad p = 1 \\ p + \frac{r}{\sigma^2} - \frac{1}{2} = -\frac{r}{\sigma^2} - \frac{1}{2} & \iff \quad p = -\frac{2r}{\sigma^2} \end{cases}
\end{aligned}
$$

■

2. Las funciones $x^{-\frac{2r}{\sigma^2}}$ y x son soluciones linealmente independientes de (8), entonces cualquier solución de (8) debe ser de la forma
$$f(x) = Ax^{-2r/\sigma^2} + Bx,$$
para algunas constantes A y B. Use este hecho y el hecho de que $v(x)$ y $v'(x)$ son continuas para mostrar que no puede existir un intervalo $[x_1, x_2]$ con $0 < x_1 < x_2 < \infty$, tal que $v(x)$ satisface (8) en $[x_1, x_2]$ y satisface
$$v(x) \geq (K - x)^+ \tag{9}$$
con igualdad para x en $[x_1, x_2]$ e idénticamente a la izquierda de x_1 y para x en inmediatamente a la derecha de x_2 a menos que $v(x)$ sea idénticamente 0 en $[x_1, x_2]$.

Demostración. Supongamos que x_1, x_2 son números tales que $[x_1, x_2] \subseteq (0, \infty)$ y tales que $v(x)$ cumple (8) y (9) con igualdad. Esto nos dice que $v(x) = Ax^{-2r/\sigma^2} + Bx$ para algunas constantes A y B. Ahora bien, supongamos que el intervalo $[x_1, x_2]$ es tal que su intersección con $[K, \infty)$ es no nula. Se sigue entonces que existen puntos en $[x_1, x_2]$ en donde $x \geq K$, y en consecuencia, $(K - x)^+ = 0$ por lo que la condición (9) con igualdad se vuelve $Ax^{-2r/\sigma^2} + Bx = 0$, lo cual nos dice que $Ax^{-2r/\sigma^2} = -Bx \iff Ax^{-2r/\sigma^2 - 1} = -B$, de tal forma que una función de x, que puede tomar infinitos valores (salvo el caso en que $x_2 = K$) es igual a una constante. Por lo tanto, para que la igualdad se de, se debe cumplir que $A = B = 0$ y con ello v es idénticamente 0 en $[x_1, x_2]$.

Finalmente, suponiendo que no ocurre lo anterior y que $[x_1, x_2] \subseteq [0, K]$, entonces $(K - x)^+ = K - x$, de tal forma que la condición (9) con igualdad se vuelve
$$Ax^{-2r/\sigma^2} + Bx = K - x \iff Ax^{-2r/\sigma^2} = K - (B+1)x,$$
y analizando nuevamente la ecuación anterior, nos damos cuenta que, al ser $\frac{2r}{\sigma^2}$ un número positivo, se tiene que una curva del tipo hipérbola está igualada a una recta con pendiente negativa y ordenada al origen K, por lo que a lo más, se podrían intersecar en dos puntos. Pero la igualdad anterior ocurre para cualquier punto en $[x_1, x_2] \subseteq [0, K]$, entonces la igualdad ocurre solamente si $A = B = 0$ y nuevamente v es idénticamente 0. La continuidad de v y su derivada v'' nos asegura que este comportamiento se preserva en los extremos del intervalo $[x_1, x_2]$. ■

3. Use el hecho de que $v(0)$ tiene que ser igual a K para mostrar que no puede existir un número $x_2 > 0$ tal que $v(x)$ satisface
$$rv(x) - rxv'(x) - \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 v''(x) \geq 0 \tag{10}$$
con igualdad en $[0, x_2]$.

Demostración. Supongamos que tal número $x_2 > 0$ existe y nótese que, si $v(x)$ satisface (10) con igualdad en $[0, x_2]$, entonces por el inciso anterior, v debe ser de la forma $v(x) = Ax^{-2r/\sigma^2} + Bx$, la cual es una función que se anula en 0. Luego, $v(0) = 0$, y este comportamiento se preserva en los extremos del intervalo $[0, x_2]$ de acuerdo al ítem anterior. Pero sabemos que $v(0) = K > 0$, por lo que no es posible que exista $x_2 > 0$ con dicha propiedad. ■

4. Explique por qué $v(x)$ no puede satisfacer (9) con igualdad para todo $x \geq 0$.

   Solución: Esto se explica porque, de ser el caso que (9) se cumpla en todo $[0, \infty)$, entonces $v(x) = (K - x)^+$, la cual no es una función derivable en el punto $x = K$. O bien, aún ignorando que la función no sea derivable en ese punto, la derivada de la misma no sería continua. Por lo tanto, no puede darse la igualdad en todo $[0, \infty)$.

5. Explique por qué $v(x)$ no puede satisfacer (10) con igualdad para todo $x \geq 0$.

   Solución: Esto se explica justamente en el ítem 3, ya que de satisfacerse (10) con igualdad para todo $x \geq 0$, en particular se satisface para algún intervalo $[0, x_2]$, con $x_2 > 0$, pero esto no es posible.

6. De los dos ítems anteriores y la condición *Para toda* $x \geq 0$*, la igualdad se da en* (9) *o en* (10). Vemos que $v(x)$ a veces satisface (9) con igualdad y otras no la satisface con igualdad, en cuyo caso debe satisfacer (10) con igualdad. Del ítem 2 y 3 vemos que la región en la cual $v(x)$ no satisface (9) con igualdad y satisface (10) con igualdad no puede ser un intervalo $[x_1, x_2]$ con $0 < x_1 < x_2 < \infty$, y tampoco puede ser una unión disjunta de intervalos de esta forma. Entonces tiene que ser un semi-eje $[x_1, \infty)$, con $x_1 > 0$. En la región $[0, x_1]$, $v(x)$ satisface (9) con igualdad. Muestre que x_1 tiene que ser igual a L_* y que $v(x)$ tiene que estar dada por $v_{L_*}(x)$ dada por (1).

   Demostración. Notamos que se tiene que satisfacer $x_1 = L_*$. En efecto. Dado que v tiene que ser una función derivable con derivada continua y acotada, se tiene que tener que $v(x) = (K - x)^+$ debe coincidir por derecha con $v(x)$ dada por $Ax^{-\frac{2r}{\sigma^2}} + Bx$, y a su vez, la derivada de $v(x)$ tiene que ser continua, por lo que las expresiones de (9) y (10) y sus derivadas deben ser iguales. Nótese que imponiendo las condiciones de consistencia, tenemos que

   $$v(x) = K - x = Ax^{-2r/\sigma^2} + Bx \qquad \text{y } v'(x) = -1 = Ax^{-2r/\sigma^2 - 1}\left(\frac{-2r}{\sigma^2}\right) + B,$$

   de tal forma que resolviendo para x, se tiene que $x = \frac{2r}{2r+\sigma^2}K$, justo como se buscaba. ∎

4. (Put Americano perpetuo que paga dividendos). Considere un put Americano perpetuo con base en un movimiento Browniano geométrico pagando dividendos a tasa constante $a > 0$. El diferencial de este activo está dado por

$$dS(t) = (r - a)S(t)dt + \sigma(t)d\widetilde{W}(t),$$

donde $\widetilde{W}(t)$ es un movimiento Browniano bajo la medida de riesgo neutral $\widetilde{\mathbb{P}}$.

1. Suponga que adoptamos la estrategia de ejercer el put oen el primer instante que el precio alcanza o está por debajo de L. ¿Cuál es el payoff descontado esperado bajo la medida de riesgo neutral de esta estrategia (tal como lo hicimos en clase sin dividendos)? Escriba esto como una función $v_L(x)$ del precio inicial del activo x. (Sugerencia: defina la constante positiva

   $$\gamma = \frac{1}{\sigma^2}\left(r - a - \frac{1}{2}\sigma^2\right) + \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{1}{\sigma^2}\left(r - a - \frac{1}{2}\sigma^2\right)^2 + 2r}$$

   y escriba $v_L(x)$ usando γ).

   Demostración. Resolviendo la ecuación diferencial $dS(t) = (r - a)S(t)dt + \sigma S(t)d\widetilde{W}(t)$, tenemos que

   $$S(t) = S(0)\exp\left\{\sigma\widetilde{W}(t) + (r - a - \frac{1}{2}\sigma^2)t\right\}$$

   Denotando por $\alpha := r - a - \frac{1}{2}\sigma^2$, notamos que la función $v_L(x)$ debe estar dada por $K - x$ si $x \in [0, L]$ (justamente ejercemos la opción si es que desde un inicio la opción al tiempo 0 es $S(0) = x \leq L$), y buscamos ahora la expresión para la opción cuando $S(0) = x > L$. Nótese que $S(t) = L$ si y solo si

   $$x\exp\left\{\sigma\widetilde{W}(t) + \alpha t\right\} = L,$$

   lo cual ocurre si y solo si

   $$-\sigma\widetilde{W}(t) - \frac{\alpha}{\sigma}t = \frac{1}{\sigma}\ln(\frac{x}{L}),$$

y aplicamos el teorema visto en clase para el movimiento browniano $-\widetilde{W}(t)$ y el término de deriva $-\frac{\alpha}{\sigma}t$. En este caso usamos que $\lambda = r$, $\mu = -\frac{\alpha}{\sigma}$ y $m = \frac{1}{\sigma}\ln\left(\frac{x}{L}\right)$. Esto nos da como resultado que

$$\widetilde{\mathbb{E}}\left[e^{-r\tau_m}\right] = e^{-m(-\mu+\sqrt{\mu^2+2\lambda})}$$

lo cual sustituyéndolo por las cantidades mencionadas antes, nos origina que

$$\widetilde{\mathbb{E}}\left[e^{-r\tau_L}\right] = \exp\left\{-\frac{1}{\sigma}\ln\left(\frac{x}{L}\right)(\frac{\alpha}{\sigma}+\sqrt{\frac{\alpha^2}{\sigma^2}+2r})\right\} = \exp\left\{-\ln\left(\frac{x}{L}\right)(\frac{\alpha}{\sigma 2}+\frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{\alpha^2}{\sigma^2}+2r})\right\} = \left(\frac{x}{L}\right)^{-\gamma},$$

y esta última es la expresión del precio inicial del activo $S(0) = x$. ■

2. Determine L_* el valor de L que maximiza el payoff descontado esperado bajo la medida de riesgo neutral $v_L(x)$ calculado en el ítem anterior.

   Demostración. Para esto, tomamos la expresión $v(S(0)) = v(x) = (K-L)(\frac{x}{L})^{-\gamma}$ y derivamos en términos de L para obtener el máximo. Fijamos el valor de x (pues el máximo en L debe funcionar para todos los x), y notamos que

$$g(L) = (K-L)L^{\gamma}$$

   debe ser maximizada. Pero esta función encuentra su máximo en

$$g'(L) = \gamma(K-L)L^{\gamma-1} - L^{gamma} = 0 \iff \gamma(K-L) = L \iff L = \frac{\gamma K}{\gamma+1},$$

   y por lo tanto $L = \frac{\gamma}{\gamma+1}K$ es la barrera óptima a elegir para ejercer el Put.

   ■

3. Muestre que para cualquier precio inicial $S(0) = x$ del activo, el proceso $e^{-rt}v_{L_*}(S(t))$ es una supermartingala bajo $\widetilde{\mathbb{P}}$. Muestre que si $S(0) = x > L_*$ y $e^{-rt}v_{L_*}(S(t))$ es parado al primer instante en el que el precio del activo llega a L_*, entonces la supermartingala parada es una martingala. (Sugerencia: muestre que

$$r + (r-a)\gamma - \frac{1}{2}\sigma^2\gamma(\gamma+1) = 0).$$

4. Muestre que, para cualquier precio inicial del activo $S(0) = x$,

$$v_{L_*}(x) = \max_{\tau\in\mathcal{T}} \widetilde{\mathbb{E}}\left[e^{-r\tau}(K - S(\tau))\right],$$

   donde $\mathcal{T}$ es el conjunto de todos los tiempos de paro.