Modelos Estocásticos en Finanzas
Tarea 2

Iván Irving Rosas Domínguez

8 de octubre de 2023

Problema 1.- Considere el problema de inversión óptima visto en clase, dado por: dado X_0, encuentre el proceso adaptado $\Delta_0, ..., \Delta_{N-1}$ que maximiza

$$\mathbb{E}\left[U(X_N)\right],$$

sujeto a la condición

$$X_{n+1} = \Delta_n S_{n+1} + (1+r)(X_n - \Delta_n S_n), \quad n = 0, 1, ..., N-1.$$

1. Considere el Problema 1 para un modelo $N-$binomial con función de utilidad $U(x) = \ln(x)$. Muestre que el proceso de la riqueza óptima correspondiente al proceso de portafolio óptimo está dado por $X_n = \frac{X_0}{\zeta_n}$, $n = 0, ..., N-1$, donde ζ_n es el proceso de densidad de precio visto en clase dado por

$$\zeta_n = \frac{Z_n}{(1+r)^N}.$$

Demostración. En clase se vio que el problema 1 podía bien ser reducido al siguiente problema:

Problema 1.1.- Dado X_0, hallar un vector $(x_1, ..., x_M)$ que maximiza

$$\sum_{m=1}^{M} p_m U(x_m),$$

sujeto a la restricción

$$\sum_{m=1}^{M} p_m x_m \zeta_m = X_0,$$

donde $p_m = \mathbb{P}(\omega^m)$, $x_m = X_N(\omega^m)$, $\zeta_m = \zeta(\omega^m)$ y ω^m es una de las 2^M posibles sucesiones de volados en un modelo N-binomial a N periodos, con $M = 2^M$.

El problema anterior es equivalente al problema inicial y puede ser resuelto utilizando multiplicadores de Lagrange. Para ello, se dedujo que el lagrangiano L era

$$L = \sum_{m=1}^{M} p_m U(x_m) - \lambda\left(\sum_{m=1}^{M} x_m \zeta_m p_m - X_0\right),$$

de tal forma que $U'(X_N) = \lambda \zeta_N = \frac{\lambda Z_N}{(1+r)^N}$, donde Z es la derivada de Radon-Nikodým de $\tilde{\mathbb{P}}$ la medida de riesgo neutral con respecto a $\mathbb{P}$ la medida de riesgo real, y $Z_n = \mathbb{E}\left[Z|F_n\right]$ es el n-ésimo elemento del proceso derivada de Radón-Nikodým.

Recordando que U es una función que suponemos cóncava, su derivada es monótona creciente y por lo tanto tiene una inversa. Luego,

$$X_N = I\left(\frac{\lambda Z_n}{(1+r)^N}\right),$$

donde I es la función inversa de U', y se encuentra la solución primero hallando λ a partir de la ecuación

$$X_0 = \mathbb{E}\left[\frac{Z_n}{(1+r)^N} I\left(\frac{\lambda Z_n}{(1+r)^N}\right)\right]$$

y posteriormente hallando X_N con la ecuación

$$X_N = I\left(\frac{\lambda Z_N}{(1+r)^N}\right).$$

Dado que en nuestro caso, tenemos que $U(x) = \ln(x)$, la cual es claramente una función cóncava, se deduce que $U'(x) = \frac{1}{x}$ y con ello $I(y) = \frac{1}{y}$. Luego, dado que nosotros ya estamos suponiendo que hay un proceso de portafolio que alcanza riqueza óptima X_N, entonces se deben de cumplir las condiciones del problema 1,1 anteriormente escrito. Hallamos pues λ de la primera de las dos ecuaciones anteriores:

$$\begin{aligned} X_0 = \mathbb{E}\left[\frac{Z_n}{(1+r)^N} I\left(\frac{\lambda Z_n}{(1+r)^N}\right)\right] &= \mathbb{E}\left[\frac{Z_n}{(1+r)^N}\left(\frac{(1+r)^N}{\lambda Z_n}\right)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{\lambda}\right] = \frac{1}{\lambda}, \end{aligned}$$

y una vez que tenemos lo anterior, calculamos X_N:

$$X_N = I\left(\frac{\lambda Z_n}{(1+r)^N}\right) = \frac{(1+r)^N}{\lambda Z_n} = \frac{X_0}{(1+r)^N},$$

de tal forma que para N, el valor óptimo de la riqueza está dado por

$$X_N = \frac{X_0}{(1+r)^N},$$

en este caso en el que $U(x) = \ln(x)$. Luego, para calcular el resto del proceso de riqueza, hacemos uso de que el proceso

$$\left(\frac{X_n}{(1+r)^n}\right)_{n\geq 0},$$

es una $\tilde{P}$-martingala con respecto a la filtración generada por los volados. Tenemos así que

$$\begin{aligned} \frac{X_n}{(1+r)^n} &= \tilde{\mathbb{E}}\left[\frac{X_N}{(1+r)^N}\big|\mathcal{F}_n\right] \\ &= \tilde{\mathbb{E}}\left[\frac{X_0}{\zeta_N(1+r)^N}\big|\mathcal{F}_n\right] \\ &= \tilde{\mathbb{E}}\left[\frac{X_0\cdot(1+r)^N}{Z_N(1+r)^N}\big|\mathcal{F}_n\right] \\ &= X_0\tilde{\mathbb{E}}\left[\frac{1}{Z_N}\big|\mathcal{F}_n\right], \end{aligned}$$

por lo que resta investigar el comportamiento de la última esperanza condicional. Por definición, sabemos que $Z_N = Z$ es la derivada de Radón-Nikodým de $\tilde{\mathbb{P}}$ con respecto a $\mathbb{P}$, la cual, en nuestro contexto, está definida para ω^m alguna de todas las posibles sucesiones de volados, como

$$Z(\omega^m) = \frac{\tilde{\mathbb{P}}(\omega^m)}{\mathbb{P}(\omega^m),}$$

La variable está bien definida pues las probabilidades son siempre positivas, y además, se vio en clase que $\tilde{\mathbb{E}}[Z] = 1$ y que $\tilde{\mathbb{E}}\left[Y\big|\mathcal{F}_n\right] = \frac{1}{Z_n}\mathbb{E}\left[Z_m Y\big|\mathcal{F}_n\right]$, para $Y \in \mathcal{F}_n$. Obsérvese que podemos definir a la variable $Z' := \frac{1}{Z}$, de tal forma que

$$Z'(\omega^m) = \left(\frac{\tilde{\mathbb{P}}(\omega^m)}{\mathbb{P}(\omega^m)}\right)^{-1} = \frac{\mathbb{P}(\omega^m)}{\tilde{\mathbb{P}}(\omega^m)},$$

la cual es la derivada de Radón-Nikodým de $\mathbb{P}$ con respecto a $\tilde{\mathbb{P}}$. Y esta variable va a cumplir exactamente las mismas condiciones que Z, así como su proceso derivada. En particular, tendremos que

$$\tilde{\mathbb{E}}\left[\frac{1}{Z_N}\big|\mathcal{F}_n\right] = \tilde{\mathbb{E}}\left[\frac{1}{Z}\big|\mathcal{F}_n\right] = \tilde{\mathbb{E}}\left[Z'\big|\mathcal{F}_n\right] = Z'_n = \frac{1}{Z_n},$$

por lo que volviendo a nuestra ecuación de interés, se sigue que

$$\frac{X_n}{(1+r)^n} = X_0\tilde{\mathbb{E}}\left[\frac{1}{Z_N}\big|\mathcal{F}_n\right] = \frac{X_0}{Z_n},$$

por lo que despejando, se tiene que para cualquier $n \in \{0, 1, ..., N-1\}$,

$$X_n = \frac{X_0 \cdot (1+r)^n}{Z_n} = \frac{X_0}{\zeta_n},$$

tal y como buscábamos. ■

2. Considere el Problema 1 para un modelo N-binomial con función de utilidad $U(x) = \frac{1}{p}x^p$ con $p < 1$ y $p \neq 0$. Muestre que la riqueza óptima al tiempo N está dada por

$$X_N = \frac{X_0(1+r)^N Z^{\frac{1}{p-1}}}{\mathbb{E}\left[Z^{\frac{p}{p-1}}\right]},$$

donde Z es la derivada de Radon-Nikodým de $\tilde{\mathbb{P}}$ con respecto a $\mathbb{P}$.

Demostración. Nuevamente utilizamos el problema 1,1 para resolver el problema original. Notamos que la función de aversión al riesgo $U(x) = \frac{1}{p}x^p$ es una función cóncava, ya que el exponente p es menor a 1 y en particular no es 0 en ningún momento. Incluso cuando $p < 0$, la función sigue siendo cóncava. Notamos también que

$$U'(x) = \frac{p}{p}x^{p-1} = x^{p-1}, \qquad p < 1, p \neq 0,$$

y esta función es invertible en $(0, \infty)$, y tiene por inversa a

$$I(y) = y^{\frac{1}{p-1}}, \qquad p < 1, p \neq 0.$$

Por lo tanto, utilizando las ecuaciones

$$X_N = I\left(\frac{\lambda Z_N}{(1+r)^N}\right),$$

y

$$X_0 = \mathbb{E}\left[\frac{Z_N}{(1+r)^N} I\left(\frac{\lambda Z_N}{(1+r)^N}\right)\right],$$

vistas en clase y ajustadas a este problema, encontramos el multiplicador λ:

$$\begin{aligned}
X_0 = \mathbb{E}\left[\frac{Z_N}{(1+r)^N} I\left(\frac{\lambda Z_N}{(1+r)^N}\right)\right] &= \mathbb{E}\left[\frac{Z_N}{(1+r)^N}\left(\frac{\lambda Z_n}{(1+r)^N}\right)^{\frac{1}{p-1}}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\frac{\lambda^{\frac{1}{p-1}} Z_N^{1+\frac{1}{p-1}}}{(1+r)^{N+\frac{N}{p-1}}}\right] \\
&= \frac{\lambda^{\frac{1}{p-1}}}{(1+r)^{\frac{Np}{p-1}}}\mathbb{E}\left[Z_N^{\frac{1}{p-1}}\right] \\
&= \frac{\lambda^{\frac{1}{p-1}}}{(1+r)^{\frac{Np}{p-1}}}\mathbb{E}\left[Z^{\frac{1}{p-1}}\right]
\end{aligned}$$

donde hemos usado que $Z_N = Z$, ya que justamente el proceso derivada de Radón-Nikodým es creado a partir de la martingala de Doob con base en la variable Z, a saber, $Z_n = \mathbb{E}[Z|\mathcal{F}_n]$, por lo que en particular $Z = \mathbb{E}[Z|\mathcal{F}_N] = Z_N$, ya que Z es $\mathcal{F}_N$-medible, pues es una variable que depende de todos los valores de los volados desde 0 hasta N.

Luego, despejando λ, tenemos que

$$\lambda^{\frac{1}{p-1}} = \frac{X_0(1+r)^{\frac{Np}{p-1}}}{\mathbb{E}\left[Z^{\frac{1}{p-1}}\right]}.$$

Ya con el valor de λ, utilizamos la ecuación que nos entrega el valor de la riqueza en el instante N, a saber,

$$\begin{aligned} X_N = I\left(\frac{\lambda Z}{(1+r)^N}\right) &= \left(\frac{\lambda Z}{(1+r)^N}\right)^{\frac{1}{p-1}} \\ &= \lambda^{\frac{1}{p-1}} \frac{Z^{\frac{1}{p-1}}}{(1+r)^{\frac{N}{p-1}}} \\ &= \frac{X_0(1+r)^{\frac{Np}{p-1}}}{\mathbb{E}\left[Z^{\frac{1}{p-1}}\right]} \frac{Z^{\frac{1}{p-1}}}{(1+r)^{\frac{N}{p-1}}} \\ &= \frac{X_0(1+r)^{\frac{Np}{p-1}-\frac{N}{p-1}} Z^{\frac{1}{p-1}}}{\mathbb{E}\left[Z^{\frac{1}{p-1}}\right]} \\ &= \frac{X_0(1+r)^N Z^{\frac{1}{p-1}}}{\mathbb{E}\left[Z^{\frac{p}{p-1}}\right]}, \end{aligned}$$

tal y como se quería.

■

3. Un inversionista provee una pequeña cantidad de dinero X_0 para que se pruebe la efectividad de una estrategia de inversión sobre los siguientes N-periodos. Puedes invertir en el modelo N-binomial sujeto a la condición de que el portafolio nunca puede ser negativo. Si al tiempo N el valor del portafolio es a lo menos γ, una constante positiva especificada por el inversionista, entonces él te otorgará una gran cantidad de dinero para que se la manejes. Entonces el problema es el siguiente:

Maximizar

$$\mathbb{P}\left(X_N \geq \gamma\right),$$

donde X_N es el portafolio comenzando on fortuna X_0 bajo la condición de que

$$X_n \geq 0, \qquad n \in \{0, 1, ..., N\}.$$

Podemos reformular el problema como sigue: maximizar

$$\mathbb{P}\left(X_N \geq \gamma\right)$$

sujeto a la restricción

$$\tilde{\mathbb{E}}\left[\frac{X_N}{(1+r)^N}\right] = X_0, \qquad X_n \geq 0, \qquad n \in \{0, 1, ..., N\}.$$

a) Muestra que si $X_N \geq 0$, entonces $X_n \geq 0$ para todo $n \geq 0$.

Demostración. Recordamos nuevamente que el proceso $\left(\frac{X_n}{(1+r)^n}\right)_{n\geq 0}$ es martingala bajo la medida de riesgo neutral. Luego, dado que por hipótesis estamos suponiendo que X_N es una variable aleatoria que representa la riqueza al tiempo N acorde a cierto proceso de portafolio, y esta es positiva, entonces por monotonía de la esperanza condicional y el hecho de que $1 + r > 0$, se tiene que

$$0 \leq \tilde{\mathbb{E}}\left[\frac{X_N}{(1+r)^N}|\mathcal{F}_n\right] = \frac{X_n}{(1+r)^n}, \qquad n \in \{0, 1, ..., N-1\},$$

por lo que para cualquier $n \in \{0, 1, ..., N-1\}$ se sigue que

$$0 \leq X_n$$

■

b) Considera la función

$$U(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq x \leq \gamma, \\ 1, & \text{si } x \geq \gamma. \end{cases}$$

Muestra que para cada $y > 0$ fija, se tiene que

$$U(x) - yx \leq U(I(y)) - yI(y)$$

para toda $x \geq 0$, donde

$$I(y) = \begin{cases} \gamma, & \text{si } 0 < y \leq \frac{1}{\gamma}, \\ 0, & \text{si } \frac{1}{\gamma}. \end{cases}$$

Demostración. Observamos que las funciones U e I pueden ser escritas como: $U : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $U(x) = \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{\gamma}]}(x)$ y $I : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $I(y) = \gamma \mathbb{1}_{[\gamma, \infty)}(y)$. Sean $y > 0$ y $x \geq 0$. Procedemos a probar la desigualdad anterior por casos:

$0 < y \leq \frac{1}{\gamma}$: en este caso, $I(y) = \gamma$, por lo que

$$\begin{aligned} U(x) - yx \leq U(I(y)) - yI(y) &\iff \mathbb{1}_{[\gamma,\infty)}(x) - yx \leq U(\gamma) - y\gamma \\ &\iff \mathbb{1}_{[\gamma,\infty)}(x) - yx \leq \mathbb{1}_{[\gamma,\infty)}(\gamma) - y\gamma \\ &\iff \mathbb{1}_{[\gamma,\infty)}(x) + y\gamma \leq 1 + yx. \end{aligned}$$

Luego, si $x < \gamma$, entonces la indicadora de la izquierda en la expresión anterior es 0 y

$$U(x) - yx \leq U(I(y)) - yI(y) \iff y\gamma \leq 1 + yx,$$

pero dado que $0 < y < \frac{1}{\gamma}$, se tiene que $y\gamma \leq 1 \leq 1 + yx$, pues $y > 0$ y $x \geq 0$, por lo que la desigualdad se da. Por otro lado, si $x \leq \gamma$, entonces

$$U(x) - yx \leq U(I(y)) - yI(y) \iff 1 + y\gamma \leq 1 + yx \iff \gamma \leq x,$$

lo cual es justamente lo que estamos suponiendo. Por lo tanto, la desigualdad se da nuevamente.

$y \geq \frac{1}{\gamma}$: en este caso, $I(y) = 0$ y por lo tanto,

$$\begin{aligned} U(x) - yx \leq U(I(y)) - yI(y) &\iff U(x) - yx \leq U(0) - y \cdot 0 \\ &\iff \mathbb{1}_{[\gamma,\infty)}(x) - yx \leq \mathbb{1}_{[\gamma,\infty)}(0) \\ &\iff \mathbb{1}_{[\gamma,\infty)}(x) \leq yx, \end{aligned}$$

por lo que si $x < \gamma$, entonces

$$U(x) - yx \leq U(I(y)) - yI(y) \iff \mathbb{1}_{[\gamma,\infty)}(x) \leq yx \iff 0 \leq xy,$$

pero esto último ocurre pues $x \geq 0$ y $y > 0$. Por otro lado, si $x \geq \gamma$, entonces

$$U(x) - yx \leq U(I(y)) - yI(y) \iff \mathbb{1}_{[\gamma,\infty)}(x) \leq yx \iff 1 \leq xy,$$

pero dado que $y \geq \frac{1}{\gamma}$, entonces $xy \geq 1$, por lo que la desigualdad ocurre en ambos casos.

■

c) Suponga que existe una solución λ a la ecuación

$$\mathbb{E}\left[\frac{Z_N}{(1+r)^N} I\left(\frac{\lambda Z_N}{(1+r)^N}\right)\right] = X_0. \tag{1}$$

Muestre que la X_N óptima está dada por (como se hizo en clase)

$$X_N^* = I\left(\frac{\lambda Z}{(1+r)^N}\right).$$

Demostración. Utilizamos el inciso anterior. Notamos que haciendo $x = X_N$ una solución cualquiera al problema anterior, no necesariamente la óptima, pero la cual es mayor o igual a 0 pues buscamos que se cumplan las condiciones del problema, y haciendo $y = \frac{\lambda Z}{(1+r)^N}$, el cual también es un valor mayor a 0, se deduce que

$$U(x) - yx \leq U(I(y)) - yI(y) \Longleftrightarrow U(X_N) - X_N \frac{\lambda Z}{(1+r)^N} \leq U\left(I\left(\frac{\lambda Z}{(1+r)^N}\right)\right) - \frac{\lambda Z}{(1+r)^N} I\left(\frac{\lambda Z}{(1+r)^N}\right),$$

por lo que tomando esperanzas, y recordando la definición de X_N^*, de X_0, que λ es solución a la ecuación (1) y que Z es la derivada de Radon-Nikodým de $\tilde{\mathbb{P}}$ con respecto a $\mathbb{P}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[U(X_N)\right] - &\mathbb{E}\left[X_N \frac{\lambda Z}{(1+r)^N}\right] \leq \mathbb{E}\left[U\left(I\left(\frac{\lambda Z}{(1+r)^N}\right)\right)\right] - \mathbb{E}\left[\frac{\lambda Z}{(1+r)^N} I\left(\frac{\lambda Z}{(1+r)^N}\right)\right] \\
&\Longleftrightarrow \mathbb{E}\left[U(X_N)\right] - \lambda\mathbb{E}\left[X_N \frac{Z}{(1+r)^N}\right] \leq \mathbb{E}\left[U\left(I\left(\frac{\lambda Z}{(1+r)^N}\right)\right)\right] - \lambda\mathbb{E}\left[\frac{Z}{(1+r)^N} I\left(\frac{\lambda Z}{(1+r)^N}\right)\right] \\
&\Longleftrightarrow \mathbb{E}\left[U(X_N)\right] - \lambda\tilde{\mathbb{E}}\left[\frac{X_N}{(1+r)^N}\right] \leq \mathbb{E}\left[U\left(X_N^*\right)\right] - \lambda X_0 \\
&\Longleftrightarrow \mathbb{E}\left[U(X_N)\right] - \lambda X_0 \leq \mathbb{E}\left[U\left(X_N^*\right)\right] - \lambda X_0 \\
&\Longleftrightarrow \mathbb{E}\left[U(X_N)\right] \leq \mathbb{E}\left[U\left(X_N^*\right)\right] \\
&\Longleftrightarrow \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{[\gamma,\infty)}(X_N)\right] \leq \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{[\gamma,\infty)}(X_N^*)\right] \\
&\Longleftrightarrow \mathbb{P}\left(X_N \geq \gamma\right) \leq \mathbb{P}\left(X_N^* \geq \gamma\right),
\end{aligned}$$

tal y como queríamos. Por lo tanto, la variable X_N^* dada por la expresión anterior en efecto maximiza la probabilidad buscada. ■

d) Si en listamos las $M = 2^N$ posibles secuencias de volados y las etiquetamos por $\omega^1, ..., \omega^M$ y definimos $\zeta_m = \zeta(\omega^m)$ y $p_m = \mathbb{P}(\omega^m)$. Aquí enlistamos las $\omega_m's$ de manera que las $\zeta_m's$ sean ascendentes, es decir,

$$\zeta_1 \leq \zeta_2 \leq \cdots \leq \zeta_M.$$

Muestre que la suposición de que existe λ solución a (1) es equivalente a suponer que para algún entero positivo K tenemos que $\zeta_K < \zeta_{K+1}$ y

$$\sum_{m=1}^{K} \zeta_m p_m = \frac{X_0}{\gamma}.$$

Demostración. Por definición de esperanza y de ζ_m, si suponemos que λ es solución a (1), entonces

$$X_0 = \mathbb{E}\left[\frac{Z_N}{(1+r)^N} I\left(\frac{\lambda Z_N}{(1+r)^N}\right)\right] = \mathbb{E}\left[\zeta_N I(\lambda\zeta_N)\right] = \mathbb{E}\left[\zeta I(\lambda\zeta)\right] = \sum_{m=1}^{M} \zeta_m I(\lambda\zeta_m) p_m,$$

ahora bien, como X_0 lo suponemos estrictamente positivo, entonces

$$\sum_{m=1}^{M} \zeta_m I(\lambda\zeta_m) p_m > 0,$$

por lo que al ser todos los sumandos positivos, al menos existe un elemento en el conjunto $A = \{m \in \{1, ..., M\} : \zeta_m I(\zeta_m\lambda)p_m > 0\}$. Dado que A es un subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$ que está acotado, entonces tiene máximo. Sea $K = \max A$. Nótese que

$$\zeta_K I(\zeta_K\lambda)p_K > 0 \Longrightarrow I(\zeta_K\lambda) = \gamma \neq 0,$$

de donde se deduce que $0 < \zeta_K\lambda \leq \frac{1}{\gamma}$ por definición de I. Pero lo anterior se traduce en que

$$\zeta_K \leq \frac{1}{\lambda\gamma},$$

por lo que, como los ζ_m están ordenados de menor a mayor, se tiene que para cualquier $m \in A$ con $m \leq K$,

$$\zeta_m \leq \frac{1}{\lambda\gamma},$$

y con ello,

$$\zeta_m I(\zeta_m \lambda) p_m = \zeta_m \gamma p_m, \qquad \forall\ 1 \leq m \leq K,$$

así como para cualquier $m \in A$ con $m > K$, por el mismo orden de los ζ_m,

$$\zeta_m I(\zeta_m \lambda) p_m = 0 \Longrightarrow I(\zeta_m \lambda) = 0 \Longrightarrow \zeta_m \lambda > \frac{1}{\gamma} \Longrightarrow \zeta_m > \frac{1}{\lambda\gamma},$$

así que en particular para $m = K+1$,

$$\zeta_K \leq \frac{1}{\lambda\gamma} < \zeta_{K+1},$$

es decir, $\zeta_K < \zeta_{K+1}$.
Por lo tanto,

$$X_0 = \mathbb{E}\left[\zeta\left(\lambda\zeta\right)\right] = \sum_{m=1}^{M} \zeta_m I(\lambda\zeta_m) p_m = \sum_{m=1}^{K} \zeta_m I(\zeta_m \lambda) p_m = \sum_{m=1}^{K} \zeta_m \gamma p_m,$$

de donde se sigue que

$$\sum_{m=1}^{K} \zeta_m p_m = \frac{X_0}{\gamma}.$$

De manera contraria, si se tiene que existe $K \in \{1, ..., M\}$ tal que

$$\sum_{m=1}^{K} \zeta_m p_m = \frac{X_0}{\gamma},$$

con $\zeta_K < \zeta_{K+1}$, entonces podemos elegir $\lambda > 0$ una constante positiva tal que

$$\lambda\zeta_K < \frac{1}{\gamma},$$

de tal forma que, como $\lambda\zeta_K \leq \frac{1}{\gamma} < \lambda\zeta_{K+1}$, con lo que $I\left(\lambda\zeta_K\right) = \gamma$ y por el orden en los ζ_m, se tiene que

$$I(\lambda\zeta_m) = \begin{cases} \gamma, & \text{si } \lambda\zeta_m \leq \frac{1}{\gamma} \Longleftrightarrow m \leq K, \\ 0, & \text{si } \lambda\zeta_m > \frac{1}{\gamma} \Longleftrightarrow m > K. \end{cases} \tag{2}$$

Por lo que

$$X_0 = \sum_{m=1}^{K} \zeta_m \gamma p_m = \sum_{m=1}^{K} \zeta_m I(\lambda\zeta_m) p_m = \sum_{m=1}^{M} \zeta_m I(\lambda\zeta_m) p_m = \mathbb{E}\left[\zeta I(\lambda\zeta)\right] = \mathbb{E}\left[\frac{Z_N}{(1+r)^N} I\left(\frac{\lambda Z_N}{(1+r)^N}\right)\right],$$

y concluimos que λ es solución de

$$\mathbb{E}\left[\frac{Z_N}{(1+r)^N} I\left(\frac{\lambda Z_N}{(1+r)^N}\right)\right] = X_0.$$

∎

e) Muestre que X_N^* está dado por

$$X_N^*(\omega^m) = \begin{cases} \gamma, & \text{si } m \leq K, \\ 0, & \text{si } m \geq K+1. \end{cases}$$

Demostración. Del inciso *c*) y *d*), y particularmente de (2) tenemos que para $m \in \{1, ..., M\}$,

$$X_N^*(\omega^m) = I(\lambda\zeta)(\omega^m) = I(\lambda\zeta_m) = \begin{cases} \gamma, & \text{si } m \leq K, \\ 0, & \text{si } m > K. \end{cases}$$

∎