Procesos de Markov

Iván Irving Rosas Domínguez

15 de junio de 2024

Ejercicios del examen

1. Sea ξ el número de descendientes de un individuo arbitrario y denotemos por $\zeta_1, ..., \zeta_\xi$ a sus posiciones en la recta real, las cuales vamos a considerar independientes. Definamos a la medida aleatoria

$$\mathcal{Z}(A) = \sum_{i=1}^{\xi} \delta_{\zeta_i}(A), \qquad \text{para } A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Para funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, vamos a definir

$$\langle f, \mathcal{Z} \rangle = \sum_{i=1}^{\xi} f(\zeta_i),$$

siempre y cuando el lado derecho esté bien definido.

Vamos a definir a la caminata aleatoria ramificante como sigue: vamos a iniciar con un número arbitrario (pero determinista) de individuos situado en el origen de la recta real. Cada uno de dichos individuos genera descendientes de acuerdo a la ley del proceso puntual $\mathcal{Z}$ descrito anteriormente. Cada uno de estos individuos conforman la primera generación y cada uno de ellos generan nuevos individuos cuyas posiciones son determinadas de acuerdo a la ley del mismo proceso puntual $\mathcal{Z}$ considerando la posición de su ancestro directo, y así sucesivamente. Como en el caso del proceso de Galton-Watson vamos a asumir que cada individuo se reproduce de manera independiente. En otras palabras, la caminata aleatoria ramificante es una sucesión de medidas indexadas por generación $\{\mathcal{Z}_n(\cdot) : n \geq 0\}$, donde

$$\mathcal{Z}_n(A) = \sum_{i=1}^{Z_n} \delta_{\zeta_i^{(n)}}(A), \qquad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

donde $Z_n = \mathcal{Z}_n(\mathbb{R})$, el número de individuos en la n-ésima generación y $\{\zeta_1^{(n)}, ..., \zeta_{Z_n}^{(n)}\}$ sus posiciones en la recta real.

a) Mostrar que para $n \geq 0$,

$$\mathcal{Z}_{n+1}(A) = \sum_{i=1}^{Z_n} \mathcal{Z}^{(i)}(A - \zeta_i^{(n)}), \qquad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

donde $\mathcal{Z}^{(i)}$, $i = 1, ..., Z_n$ son copias i.i.d. de $\mathcal{Z}$ y para cada real x, el conjunto $A - x = \{y \in \mathbb{R} : y + x \in A\}$.

b) Muestre que es un proceso de Markov.

c) Ahora definamos

$$m(\theta) = \mathbb{E}_{\delta_0}\left[\langle e^{-\theta\cdot}, \mathcal{Z}\rangle\right] = \mathbb{E}_{\delta_0}\left[\sum_{i=1}^{\xi} e^{-\theta\zeta_i}\right], \qquad \theta \in \mathbb{R},$$

donde $\mathbb{P}_{\delta_0}$, denota la ley de $\{\mathfrak{Z}_{\mathfrak{n}} : \mathfrak{n} \geq \mathfrak{o}\}$ empezando con un solo individuo en el origen. Mostrar que para toda $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $m(\theta) < \infty$, el proceso

$$W_n(\theta) = \frac{\langle e^{-\theta\cdot}, \mathcal{Z}_n\rangle}{m(\theta)^n} = \sum_{i=1}^{Z_n} \frac{e^{-\theta\zeta_i^{(n)}}}{m(\theta)^n}, \qquad n \geq 0,$$

es una martingala.

2. Sea M una medida aleatoria definida en el espacio medible $(E,\mathcal{E})$, tal que para toda sucesión de conjuntos medibles $(B_i)_{i\geq 1}$ disjuntos dos a dos se tiene

$$M\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} M(B_i).$$

a) Supongamos que existe una medida en $(E,\mathcal{E})$ tal que $0<\mu(E)<\infty$ y que para toda $f:E\to\mathbb{R}_+$ medible se cumple

$$\mathbb{E}\left[\exp\left\{-\langle M,f\rangle\right\}\right] = \exp\left\{-\int_E (1-e^{-f(x)})\mu(dx)\right\},$$

donde

$$\langle M,f\rangle := \int_E f(x)M(dx).$$

Probar que M es una medida aleatoria de Poisson (**Ayuda:** Considerar a f como una función escalonada.)

b) Supongamos que existe una medida en $(E,\mathcal{E})$ tal que $0<\mu(E)<\infty$, y consideremos a

$$M(dx) := \sum_{i=1}^{N} \delta_{\xi_i}(dx),$$

donde $(\xi_i)_{i\geq 1}$ es una sucesión de v.a.i.i.d. con ley común $\mu(\cdot)/\mu(E)$ y N una v.a. con distribución Poisson de parámetro $\mu(E)$ independiente de $(\xi_i)_{i\geq 1}$. Además sean $r:E\to\mathbb{R}_+$ una función medible y $(\varepsilon_i)_{i\geq 1}$ una sucesión de v.a.i.i.d. con ley común exponencial estándar e independiente de $(\xi_i)_{i\geq 1}$ y N. Vamos a definir a

$$\widetilde{M}(dx) := \sum_{i=1}^{N} \mathbb{1}_{r(\xi_i)<\varepsilon} delta_{\xi_i}\delta(\xi_i)(dx).$$

Probar que $\widetilde{M}$ es una medida aleatoria de Poisson y determinar su intensidad. (**Ayuda:** Utilice la parte anterior.)

c) Sean M y $\widetilde{M}$ como en la parte anterior y definamos

$$D := \exp\left\{-\langle M,r\rangle + \int_E \left(1-e^{-r(x)}\right)\mu(dx)\right\}.$$

Probar que $d\widetilde{\mathbb{P}}=D\cdot d\mathbb{P}$, es una densidad de probabilidad y que la ley de M bajo $\widetilde{\mathbb{P}}$ es la misma que la de $\widetilde{M}$ bajo $\mathbb{P}$.

3. Sea $\sigma=(\sigma_t:t\geq 0)$ un subordinador. Recordemos que en particular tenemos que

$$\Psi(q) = -\log\mathbb{E}\left[e^{-\theta\sigma_1}\right] = \delta q + \int_0^{\infty}(1-e^{-qx})\Pi(dx),$$

donde $\delta\geq 0$ y

$$\int_{(0,\infty)}(1\wedge x)\Pi(dx)<\infty.$$

Definamos para cada $q\geq 0$, la medida q-potencial en $[0,\infty)$ como sigue

$$U^(q)(dx) = \mathbb{E}\left[\int_0^{\infty} e^{-qt}\mathbb{1}_{\sigma_t\in dx}dt\right].$$

Sea $F=U^{(1)}$ y sea V la medida de renovación asociada a la distribución F.

a) Determinar la relación entre las medidas $V(dx)$ y $U^{(0)}(dx)$.

b) Supongamos que $\mu=\mathbb{E}\left[\sigma_1\right]\in(0,\infty)$.

1) Si $U^{(0)}$ es no aritmética, mostrar que para toda $y>0$,

$$\lim_{x\to\infty} U^{(0)}(x+y)-U^{(0)}(x) = \frac{y}{x}.$$

2) Mostrar que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{U^{(0)}(x)}{x} = \frac{1}{\mu}.$$

Ejercicios de la tarea

38.

39. Supongamos que ξ es una v.a. que toma valores en $\mathbb{N}$ y que $\mathbb{E}[\xi] < \infty$ (en otras palabras ξ es aritmética de paso 1). Sean $(\xi_i)_{i\geq 1}$ una sucesión de v.a.i.i.d. de ley común ξ y $T_n = \xi_1 + ... + \xi_n$. Además consideremos a una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ y definamos a $\Sigma := \sum_{n=1}^{\infty} f(T_n)$.

a) Probar que $\Sigma \in L^1(\mathbb{P})$ si y solamente si $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) < \infty$.

b) Sean $\overline{F}(x) = \mathbb{P}(\xi > x)$ y $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$. Probar que

$$\mathbb{E}\left[\text{card}\,\{n \geq 1 : \xi_{n+1} > g(T_n)\}\right] < \infty \quad \text{si y solamente si} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \overline{F}(g(n)) < \infty.$$

42. Sean E, F dos espacios medibles, $\phi : E \to F$ una biyección medible y $(X_t : t \geq 0)$ un proceso de Markov con respecto a su filtración canónica, que toma valores en E y con semigrupo $(P_t)_{t\geq 0}$. Probar que $Y_t = \phi(X_t)$, para $t \geq 0$, es un proceso de Markov y determinar su semigrupo.

44. Sea X un proceso de Feller. Probar que para toda función boreliana y acotada, la integral

$$\int_0^t f(X_s)ds,$$

es una variable aleatoria $(\mathcal{F}_t)$-medible. Además supongamos que $f \geq 0$ y denotemos por

$$Uf(x) = \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\infty} f(X_s)ds\right],$$

probar que si $A := supp(f)$, entonces

$$Uf(x) = \int_A Uf(y)\mathbb{P}_x(X_s \in dy, T_A < \infty),$$

donde $T_A = \inf\{t : X_t \in A\}$.

46. Probar que $\mathcal{G}$ es un operador cerrado, i.e. si $(f_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{D}$ tal que converge en C_0 y $\mathcal{G}f_n \to g$ en C_0 entonces existe $f \in \mathcal{D}$ tal que $\mathcal{G}f = g$.