Iván Irving Rosas Domínguez

15 de mayo de 2024

Ejercicio 15: Sean τ un tiempo de paro con respecto a $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ y $X_t = \mathbb{1}_{[0,\tau)}(t)$. Probar que el proceso $(X_t, t \geq 0)$ es adaptado a dicha filtración.

Demostración. Sea $t \geq 0$ un real fijo. Buscamos que $X_t \in \mathcal{F}_t$. Recordamos que

$$\mathbb{1}_{[0,\tau(\omega))}(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t < \tau(\omega), \\ 0, & \text{si } t \geq \tau(\omega). \end{cases}$$

Sea $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Nótese que

$$X_t[A]^{-1} = \{\omega \in \Omega : X_t(\omega) \in A\} = \left\{\omega \in \Omega : \mathbb{1}_{[0,\tau(\omega))}(t) \in A\right\}.$$

Dado que la indicadora toma solo dos valores, tenemos cuatro casos:

$$\left\{\omega \in \Omega : \mathbb{1}_{[0,\tau(\omega))}(t) \in A\right\} = \begin{cases} \varnothing, & \text{si } 0, 1 \notin A, \\ \Omega, & \text{si } 0, 1 \in A, \\ \{t < \tau\}, & \text{si } 0 \notin A, 1 \in A, \\ \{t \geq \tau\}, & \text{si } 0 \in A, 1 \notin A. \end{cases}$$

En cualquier caso, $X_t[A]^{-1} \in \mathcal{F}_t$, y por lo tanto $X_t \in \mathcal{F}_t$. ■

Ejercicio 16: Sea $X = (X_t : t \geq 0)$ un proceso estocástico adaptado a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, con espacio de estados $(E, \mathcal{E})$, donde E es un espacio métrico. Además, consideremos $A \in \mathcal{E}$. Probar que

- Si X es continuo por la derecha, $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ es continua por la derecha y A es un conjunto abierto, entonces T_A es un tiempo de paro con respecto a $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.
- Si X es continuo y A es un conjunto cerrado, entonces T_A es un tiempo de paro con respecto a $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

Demostración.

- Para el primer inciso, recordamos que para una filtración continua por derecha, es equivalente que una variable aleatoria τ sea tiempo de paro con respecto a dicha filtración, a que

  $$\{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t, \qquad \forall t > 0.$$

  Basta entonces con probar esta última propiedad para T_A. Sea $t > 0$ y nótese que

  $$\{T_A < t\} = \{\text{ínf}\{s \geq 0 : X_s \in A\} < t\} = \{\exists\, 0 \leq s < t, \text{ tal que } X_s \in A\} = \bigcup_{0\leq s<t} \{X_s \in A\}.$$

  Buscamos ver que la última unión se puede realizar sobre los reales $s \in [0, t)$ que sean solamente racionales. Es claro que

  $$\bigcup_{0\leq s<t} \{X_s \in A\} \supseteq \bigcup_{0\leq s<t, s\in\mathbb{Q}} \{X_s \in A\}.$$

  Y notemos que si tomamos un elemento $\omega \in \bigcup_{0\leq s<t}\{X_s \in A\}$, existe real positivo $s < t$, tal que $X_s(\omega) \in A$. Ahora, como X es continuo por derecha, para el abierto A y el punto s, existe $\delta > 0$ tal que

  $$X(\omega)[[s, s + \delta)] \subseteq E.$$

Dado que $\delta > 0$, el conjunto $[s, s+\delta)$ no es vacío. Más aún, podemos tomar $r = \min\{s+\delta, t\}$, el cual seguirá siendo no vacío y por lo tanto contiene un racional q. En particular $X_q(\omega) \in E$.

Se sigue entonces que $\omega \in \{X_q \in A\}$, con $q \in [s, r) \subseteq [0, t)$ y $q \in \mathbb{Q}$. Por lo tanto,

$$\omega \in \bigcup_{0 \leq s < t, s \in \mathbb{Q}} \{X_s \in A\}$$

Dado que esta última unión es una unión numerable de conjuntos medibles (ya que $(X_t)_{t\geq 0}$ es adaptado a $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$), es en sí mismo un medible, y concluimos.

- Para toda $t \geq 0$, podemos reescribir el evento $\{T_F \leq t\}$ como sigue:

$$\{T_F \leq t\} = \{ \inf\{s \geq 0 : X_s \in F\} \leq t\} = \left\{ \inf_{0 \leq s \leq t} d(X_s, F) = 0 \right\}.$$

La contención de izquierda a derecha es sencilla de ver. Para la contención inversa, si suponemos que el ínfimo de las distancias entre X_s y el conjunto F es 0 a lo largo de todo el intervalo $[0, t]$, dado que el conjunto F es cerrado y $(X_t)_{\geq 0}$ es continuo, la función distancia $d(X_s, F)$ es continua sobre $[0, t]$, por lo que el ínfimo en realidad es un mínimo.

Esto nos dice que existe un punto $s \in [0, t]$ en el cual X_s toca al conjunto F. De aquí se sigue que el primer tiempo de llegada a F debe ocurrir antes, o a lo más, en t, esto es, $T_F \leq t$.

Finalmente, tenemos la siguiente igualdad,

$$\left\{ \inf_{0 \leq s \leq t} d(X_s, F) = 0 \right\} = \left\{ \inf_{s \in [0,t] \cap \mathbb{Q}} d(X_s, F) = 0 \right\}.$$

Esto se da gracias a la continuidad del proceso X.

Finalmente, por definición de ínfimo, se tiene la siguiente igualdad:

$$\left\{ \inf_{s \in [0,t] \cap \mathbb{Q}} d(X_s, F) = 0 \right\} = \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{s \in [0,t] \cap \mathbb{Q}} \{d(X_s, F) < \frac{1}{n}\}$$

Y estos últimos son conjuntos medibles, por lo que concluimos.

∎

Ejercicio 20: Sea F no aritmética en $\mathbb{R}$. Probar que toda función continua y acotada f que verifica

$$\int f(x+y) dF(y) = f(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

es constante.

Demostración. Hacemos la prueba en 4 pasos. Para ello, definimos las siguientes funciones auxiliares:

$$H_0(x) := \int (f(x+y) - f(x))^2 \, dF(y), \qquad H_n(x) := \int H_0(x+y) dF^{*n}(y) \quad \text{y} \quad S_n(x) := \sum_{k=0}^{n} H_k(x).$$

Por otro lado, notamos las siguientes igualdades. Sea $g_k(x) = \mathbb{E}\left[f\left(x + \sum_{k=1}^{n} \xi_k\right)\right]$. Entonces, por ejemplo para el caso $k = 2$, se tiene que

$$g_2(x) = \mathbb{E}\left[f(x + \xi_1 + \xi_2)\right] \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}\left[f(x + y + \xi_1)\right] dF(y) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x+y+z) dF(z) \right) dF(y)$$

y además, por simetría, que

$$g_2(x) = \mathbb{E}\left[f(x + \xi_1 + \xi_2)\right] \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}\left[f(x + \xi_1 + z)\right] dF(z) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x+y+z) dF(y) \right) dF(z).$$

Más aún, notemos que si $Z := \xi_1 + \xi_2$, entonces $dF_Z = dF_{\xi_1+\xi_2} = dF^{*2}$, por lo que

$$g_2(x) = \mathbb{E}\left[x + \xi_1 + \xi_2\right] = \mathbb{E}\left[x + Z\right] = \int_{\mathbb{R}} f(x+y) dF^{*2}(y).$$

Se sigue entonces la siguiente cadena de igualdades:

$$g_2(x) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x+y+z) dF(z) \right) dF(y) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x+y+z) dF(y) \right) dF(z) = \int_{\mathbb{R}} f(x+y) dF^{*2}(y).$$

En general, para $k \geq 1$,

$$g_{k+1} f(x) = \mathbb{E}\left[f(x + \xi_1 + ... + \xi_{k+1})\right] = \mathbb{E}\left[f\left(x + \sum_{j=1}^{k+1} \xi_j \right) \right] = \int_{\mathbb{R}} f(x+y) dF^{*(k+1)}(y) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x+y+z) dF^{*k}(y) \right) dF(z) = \int_{\mathbb{R}} \Big($$

Parte 1 Demostraremos que $S_n(x) \leq \|f\|_\infty^2$, para cualquier $x \in \mathbb{R}$. En efecto, aseguramos que se cumple lo siguiente

$$\forall n \geq 0, \qquad H_{n+1}(x) = \int H_n(x+w) dF(w).$$

Sea $n \geq 0$. Observemos las siguientes igualdades obtenidas gracias al uso repetido del teorema de Tonelli.

$$\begin{aligned}
H_{n+1}(x) = \int_{\mathbb{R}} H_0(x+y) dF^{*(n+1)}(y) &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} (f(x+y+z) - f(x+y))^2 dF(z) \right) dF^{*(n+1)}(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} (f(x+y+z) - f(x+y))^2 dF^{*(n+1)}(y) \right) dF(z) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} (f(x+y+z+w) - f(x+y+w))^2 dF(w) \right) dF^{*n}(y) \right) dF(z) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} (f(x+y+z+w) - f(x+y+w))^2 dF(z) \right) dF^{*n}(y) \right) dF(w) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} H_0(x+y+w) dF^{*n}(y) \right) dF(w) \\
&= \int_{\mathbb{R}} H_n(x+w) dF(w),
\end{aligned}$$

justo como queríamos. Una vez teniendo la identidad anterior, aseguramos que para cualquier $n \geq 1$,

$$H_n(x) = \int_{\mathbb{R}} f^2(x+y) dF^{*(n+1)}(y) - \int_{\mathbb{R}} f^2(x+y) dF^{*n}(y).$$

En efecto, procediendo por inducción, para $n \geq 1$ se tiene que

$$\begin{aligned}
H_1(x) = \int_{\mathbb{R}} H_0(x+y) dF(y) &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \left(f(x+y+z) - f(x+y)\right)^2 dF(z) \right) dF(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f^2(x+y+z) - 2f(x+y+z)f(x+y) + f^2(x+y) dF(z) \right) dF(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f^2(x+y+z) dF(z) \right) - 2f(x+y) \left(\int_{\mathbb{R}} f(x+y+z) dF(z) \right) + f^2(x+y) dF(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f^2(x+y+z) dF(z) \right) dF(y) - 2f^2(x+y) + f^2(x+y) dF(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}} f^2(x+y) dF^{*2}(y) - \int_{\mathbb{R}} f^2(x+y) dF(y).
\end{aligned}$$

Suponemos ahora que el resultado es válido para $n \geq 1$ y notamos que para $n+1$,

$$
\begin{aligned}
H_{n+1}(x) = \int_{\mathbb{R}} H_n(x+y)dF(y) &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f^2(x+y+z)dF^{*(n+1)}(z) - \int_{\mathbb{R}} f^2(x+y+z)dF^{*n}(z) \right) dF(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}} f^2(x+y+z)dF^{*(n+1)}(y)dF(z) - \int_{\mathbb{R}} f^2(x+y+z)dF^{*n}(y)dF(z) \\
&= \int_{\mathbb{R}} f^2(x+y)dF^{*(n+2)}(y) - \int_{\mathbb{R}} f^2(x+y+z)dF^{*(n+1)}(y),
\end{aligned}
$$

como queríamos. Una vez que tenemos esto, notamos que para cualquier $n \geq 0$, $S_n(x)$ es una suma telescópica, y por lo tanto, para cualquier $x \in \mathbb{R}$,

$$
\begin{aligned}
S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} H_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \left(\int_{\mathbb{R}} f^2(x+y)dF^{*(k+1)}(y) - \int_{\mathbb{R}} f^2(x+y)dF^{*k}(y) \right) \\
&= \int_{\mathbb{R}} f^2(x+y)dF^{*(n+1)}(y) - \int_{\mathbb{R}} f^2(x+y)dF^{*0}(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}} f^2(x+y)dF^{*(n+1)}(y) - f^2(x) \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \|f\|_{\infty}^2 dF^{*(n+1)}(y) - f^2(x) \\
&\leq \|f\|_{\infty}^2 \cdot 1 + 0 \\
&= C^2.
\end{aligned}
$$

Parte 2 Demostramos que $H_n(x) \leq H_{n+1}(x)$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$. En efecto, sea $x \in \mathbb{R}$ y nótese que

$$
\begin{aligned}
H_n(x) = \int H_0(x+y)dF^{*n}(y) &= \int \left(\int \left(f(x+y+z) - f(x+y)\right)^2 dF(z) \right) dF^{*n}(y) \\
&= \int \left(\int \left(\int f(x+y+z+w) - f(x+y+w)dF(w) \right)^2 dF(z) \right) dF^{*n}(y) \\
&\leq \int \left(\int \left(\int (f(x+y+z+w) - f(x+y+w))^2 dF(w) \right) dF(z) \right) dF^{*n}(y) \\
&= \int \left(\int \left(\int (f(x+y+w+z) - f(x+y+w))^2 dF(z) \right) dF(w) \right) dF^{*n}(y) \\
&= \int \left(\int H_0(x+y+w)dF(w) \right) dF^{*n}(y) \\
&= \int H_0(x+y)dF^{*(n+1)}(y) \\
&= H_{n+1}(x),
\end{aligned}
$$

en donde en la tercera igualdad usamos la propiedad de f, en la desigualdad utilizamos Jensen, y en la cuarta igualdad utilizamos Tonelli. El resto de igualdades se dan por definición de H_k y de la convolución de funciones de distribución F.

Se sigue que H_n es una sucesión creciente en n para cualquier $x \in \mathbb{R}$.

Parte 3 Demostramos que $H_0(x) = 0$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$. Para ello nótese que, a ser H_0 la integral de una función no negativa, $0 \leq H_0(x)$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$. Con ello, para cualquier $k \geq 1$,

$$
H_k(x) = \int H_0(x+y)dF^{*n}(y) \geq 0, \qquad x \in \mathbb{R}.
$$

Por lo tanto, $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} H_k(x)$ es una suma de términos no negativos, y en consecuencia S_n es una sucesión de positivos no decreciente. Dado que para cualquier $n \geq 1$, $S_n(x) \leq \|f\|_{\infty}^2$ según lo visto en el primer inciso, la sucesión

S_n es acotada superiormente. Así,

$$\sum_{k=0}^{\infty} H_k(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) \leq \|f\|_\infty^2,$$

esto es, la serie de las H_k converge. Lo anterior para cualquier $x \in \mathbb{R}$. En particular, la sucesión de los términos debe tener límite igual a 0. Por lo tanto, al ser H_n una sucesión no decreciente,

$$0 \leq H_0(x) \leq \lim_{n\to\infty} H_n(x) = 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Por lo que al ser $H_0(x)$ independiente de n, se tiene que $H_0(x) = 0$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$.

Parte 4 Deducimos que para cualquier $x \in \mathbb{R}, y \in Supp(F)$, $f(x+y) - f(x) = 0$. Procedemos por contradicción. Supongamos que existen dos puntos $x_0 \in \mathbb{R}$ y $y_0 \in Supp(F)$ tales que $f(x_0 + y_0) - f(x_0) \neq 0$.

Dado que f es continua, para $x_0 \in \mathbb{R}$ fijo, la función $g(y) = (f(x_0 + y) - f(x_0))^2$ también es continua. En particular nuestra suposición se traduce en que en el punto y_0, se tiene que $g(y_0) > 0$. Por ser g continua, existe un abierto $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ tal que $y_0 \in (a, b)$ y $g(y) > 0$ para cualquier punto $y \in (a, b)$.

Por otro lado, dado que $y \in Supp(F)$, el cual por definición es un conjunto cerrado, se tiene que $(a, b) \cap Supp(F) \neq \varnothing$. De hecho, si μ_F es la medida que induce la función de distribución F, se tiene que $\mu_F((a, b)) > 0$. Esto ocurre, ya que si $\mu_F((a, b)) = 0$, entonces $\mu_F(\mathbb{R} \setminus (a, b)) = 1$.

Pero entonces por definición del soporte, $Supp(F) \subseteq \mathbb{R} \setminus (a, b)$, y por lo tanto $y_0 \notin Supp(F)$, lo cual no puede suceder.

Por lo tanto, g es una función que en el conjunto (a, b), toma valores positivos, y $\mu_F((a, b)) > 0$. Se sigue de la parte 3 que

$$0 = H_0(x_0) = \int_{\mathbb{R}} (f(x_0 + y) - f(x_0))^2 \, dF(y) \geq \int_{(a,b)} (f(x_0 + y) - f(x_0))^2 \, dF(y) \geq \int_{(a,b)} g(y) dF(y) > 0,$$

ya que una función medible con valores positivos en un conjunto A medible de medida positiva tiene integral positiva sobre dicho conjunto. Pero lo anterior es una contradicción.

Se deduce que no pueden existir dichos elementos $x_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \in Supp(F)$. Por lo tanto, $f(x+y) = f(x)$ para cualesquiera $x \in \mathbb{R}$, $y \in Supp(F)$, y con ello, f es constante.

$\blacksquare$