Iván Irving Rosas Domínguez

31 de enero de 2024

1. Probar que la medida μ_0, definida en el teorema de Daniell-Kolmogorov, es finita aditiva en los cilindros, i.e. en $\mathfrak{C}$ de acuerdo a la notación del curso.

2. En la propiedad de Markov para el caso de cadenas de Markov, completar el argumento de clases monótonas.

3. Probar que

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F} \mid A \cap \{T = n\} \in \mathcal{F}_n \text{ para toda } n \in \mathbb{N}\}$$

es una σ-álgebra. Además, ver que $X_T \mathbb{1}_{\{T<\infty\}}$ es $\mathcal{F}_T$-medible.

4. **(Propiedad de Markov Fuerte)** Sea T un tiempo de paro finito casi seguramente, i.e. $\mathbb{P}_x(T < \infty) = 1$. Entonces bajo el evento $\{X_T = y\}$, la cadena trasladada $X \circ \Theta_T$ es independiente de $\mathcal{F}_T$ y tiene por ley $\mathbb{P}_y$.

5. **(Cambio de tiempo)** El objetivo de este ejercicio es el de realizar una transformación de cambio de tiempo a una cadena de Markov y ver que transforma a una cadena de Markov en otra cadena (con matriz de transición diferente).

1. Caminata aleatoria (continua por la izquierda): Sean Π una medida de probabilidad en $\{-1, 0, 1, 2, ...\}$ y $(\xi_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de v.a.i.i.d. con ley común Π. Para $x \in \mathbb{Z}$, vamos a denotar por $\mathbb{P}_x$ a la ley de $S = (S_n, n \geq 0)$, donde

$$S_n = S_0 + \sum_{j=1}^{n} \xi_j \quad n \geq 1, \quad \text{ y } \quad \mathbb{P}_x(S_0 = x) = 1.$$

Además vamos a definir a $T_0 := \inf\{n \geq 0 \mid S_n = 0\}$. Probar que T_0 es un tiempo de paro.

2. Procesos de Galton-Watson: Sea γ una medida de probabilidad en $\{0, 1, ...\}$, la cual llamaremos ley de reproducción (ley del número de hijos de un individuo). Para $x \in \mathbb{N}$, vamos a denotar por $\mathbb{Q}_x$ a la ley del proceso de Galton-Watson $Z = (Z_n, n \geq 0)$ que empieza con x individuos, donde

$$Z_0 = x, \qquad \mathbb{Q}_x - c.s., \qquad Z_{n+1} = \sum_{j=1}^{Z_n} \alpha_{n,j},$$

y $\alpha_{n,j}$ es el número de hijos del j-ésimo individuo de la generación n. Vamos a suponer que $\{\alpha_{n,j}, n \geq 0, j \geq 1\}$ son v.a.i.i.d. con ley común γ. Probar que Z es una cadena de Markov con matriz de transición

$$Q(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y = 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \neq y \\ \gamma^{*x}(y) & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde γ^{*x} no es más que la convolución de γ, x-veces y representa la ley de $\alpha_{0,1} + ... + \alpha_{0,n}$.

3. Supongamos que $x > 0$. Vamos a definir de manera inductiva a $\tau_{n+1} := \tau_n + S_{\tau_n}$ con $\tau_0 = 0$. Verificar que τ_n es un tiempo de paro en la filtración natural de S, que $\tau_n \leq T_0$ y que $\lim_{n\to\infty} \tau_n = T_0$.

4. Sea $Z_n := S_{\tau_n}$ y $\mathbb{Q}_x$ la ley de $Z = (Z_n, n \geq 0)$ bajo $\mathbb{P}_x$. Verificar que $\mathbb{Q}_x$ es la ley de un proceso de Galton-Watson y expresar a la ley de reproducción γ en términos de Π. Además verificar que la población total $\sum_{n=0}^{\infty} X_n$, bajo $\mathbb{Q}_x$, tiene la misma ley que T_0 bajo $\mathbb{P}_x$.

6. Probar que el único conjunto $\mathcal{F}$-medible contenido en $\mathcal{C}\left([0,\infty), \mathbb{R}^d\right)$ es el conjunto vacío y deducir que $\mathcal{C}\left([0,\infty), \mathbb{R}^d\right)$ no es $\mathcal{F}$-medible.

7. Sean $\widetilde{X}$ y X dos procesos continuos casi seguramente. Probar que si $\widetilde{X}$ es una modificación de X, entonces $\widetilde{X}$ y X son indistinguibles.

8. Probar que existe una única medida $\mathbb{W}$ en $\left(\mathcal{C}\left([0,\infty),\mathbb{R}^d\right),\mathcal{B}(\mathcal{C})\right)$, donde $\mathcal{B}(\mathcal{C})$ es la σ-álgebra de Borel con la topología de los compactos-abiertos, tal que el proceso canónico $X=(X_t, t\geq 0)$ definido por

$$X_t(\omega)=\omega(t), \qquad \text{donde } \omega\in\mathcal{C}\left([0,\infty),\mathbb{R}^d\right),$$

es un movimiento browniano d-dimensional en $\left(\mathcal{C}\left([0,\infty),\mathbb{R}^d\right),\mathcal{B}(\mathcal{C}),\mathbb{W}\right)$.