UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE YUCATÁN

FACULTAD DE MATEMÁTICAS
UNIDAD MULTIDISCIPLINARIA TIZIMÍN

Una propuesta basada en estimadores Bootstrap robustos para la evaluación de la precisión de un modelo con la técnica de regresión lineal

Tesis presentada por el:

Br. Irving Geyler Cupul Uc

En su examen profesional en opción al título de:

Licenciado en Ingeniería de Software

Asesores:

M.C. Luis Colorado Martínez
M.C. Salvador Medina Peralta

Tizimín, Yucatán, Diciembre 2024

Resumen

En este trabajo se propone un método que permite evaluar la precisión de un modelo con la técnica de regresión lineal; y se basa en implementar diversos esquemas de remuestreo y estimar la precisión, a través de intervalos de confianza Bootstrap (ICB) para el coeficiente de determinación R^2, del modelo de regresión entre los valores reales y predichos del modelo que se desea evaluar.

Se consideraron cuatro escenarios posibles (NVC, NNVC, NVD y NNVD), de acuerdo al cumplimiento o no de los supuestos de normalidad y varianza constante; y para la estimación de la distribución del coeficiente de determinación R^2, se implementaron ocho esquemas de remuestreo Bootstrap: el simple; los tres propuestos por Wu (1986); los dos propuestos por Liu (1988); el balanceado y el pareado balanceado. Para la estimación de R^2 se propuso el intervalo Bootstrap Percentil y el Bca; y para su cómputo se utilizaron $B = 1,000$ remuestras por cada esquema.

Se realizó un estudio de simulación para comparar las eficiencias de los intervalos de confianza para cada tipo de supuesto con respecto a los diferentes esquemas Bootstrap, tamaños de muestra y tipo de modelo; para ello se simularon y evaluaron $60,000$ modelos Exactos-Precisos (EP) y $60,000$ modelos Exactos-Imprecisos (EI); para cada modelo se identificó la R^2 de origen utilizada para su simulación. Para cada uno de los supuestos y tipo de modelo se simularon modelos con tamaños $n = 10, 15, 20, 25, 30, 35$.

Se consideraron tres tipos de eficiencias para los intervalos con cada esquema Bootstrap, la eficiencia como el porcentaje de las veces en que el intervalo contiene a la R^2 de origen para los modelos EP simulados; y viceversa, para los modelos EI, se determinó como el porcentaje de las veces en que el intervalo de confianza no contiene a la R^2 de origen. También se consideró la eficiencia cuando ambos ICB contienen o no a la R^2 de origen y la eficiencia cuando uno de los intervalos es más estrecho que el otro dado que ambos ICB contienen o no a la R^2 de origen.

Se analizaron los resultados del estudio de simulación a través de un ANOVA factorial y se implementó en el lenguaje R como propuesta final para la evaluación de la precisión de un modelo: cuando los supuestos son NVC, NNVC o NVD se utilice el ICB Percentil con el esquema de remuestreo Liu2 y para el supuesto NNVD se utilice el ICB BCa con el esquema de remuestreo Pareado Balanceado. Finalmente, se aplicó la propuesta en la evaluación de dos modelos que corresponden a casos reales.

Índice

Índice de figuras

1. Introducción

Los modelos son representaciones matemáticas de mecanismos que rigen fenómenos naturales que no se reconocen, controlan o comprenden plenamente, y el proceso de modelación abarca varios pasos que comienzan con una declaración clara de los objetivos del modelo, supuestos sobre sus límites del modelo, la adecuación de los datos disponibles, el diseño de la estructura del modelo, la evaluación de las simulaciones y la aportación de la información para los procesos de recomendación y rediseño (Tedeschi, 2006).

La validación de un modelo en predicción del sistema es la comparación por medio de algún método de las predicciones del modelo con los valores observados del sistema real para determinar su capacidad predictiva; en esta etapa del proceso de modelación matemática se evalúan la exactitud y precisión del modelo, la primera se refiere a la proximidad de las predicciones (z) con los valores observados (y), por ejemplo, sus diferencias ($d = y - z$) del cero y la segunda a la dispersión de los puntos (z, y); sin embargo, en presencia de exactitud la precisión se mide cuantificando la dispersión de dichos puntos respecto a una referencia, por ejemplo, la recta determinista $y = x$, o bien, evaluar la varianza de las diferencias (σ_D^2) alrededor del cero ($\mu_D = 0$) (Medina-Peralta et al., 2017).

En la literatura se han expuesto diferentes enfoques y técnicas para validar modelos. Las técnicas de validación se pueden agrupar en cuatro categorías principales: evaluación subjetiva (involucra a un número de expertos en el campo de interés), técnicas visuales (gráficas comparativas), medidas de desviación (basadas en las diferencias entre valores observados y simulados) y pruebas de estadísticas (Mayer & Butler, 1993).

Entre las técnicas inferenciales, una de las más utilizadas es la Regresión Lineal (RL) entre los observados del sistema real (y) en función de los predichos del modelo a evaluar (z), $y_i = \beta_0 + \beta_1 z_i + \epsilon$ donde $\epsilon_i \sim NI(0, \sigma^2)$; la exactitud se evalúa por medio de una F conjunta verificando si simultáneamente β_0 y β_1 son cero y uno respectivamente (Montgomery et al., 2012; Tedeschi, 2006; Yang et al., 2004); y la precisión se evalúa por medio del coeficiente de determinación R^2 (Balam, 2012), mientras más cerca esté de uno el modelo es más preciso. Adicionalmente, Zacarías (2023) desarrolló un método no paramétrico para evaluar la exactitud de un modelo con la técnica de regresión lineal cuando no se cumplen los supuestos de normalidad y/o varianza constante, basada en la construcción de una región de confianza Bootstrap para el vector de parámetros de regresión. De modo que si el vector $(\beta_0, \beta_1) = (0, 1)$ está contenido en dicha región de confianza, se concluye el modelo es exacto en predicción del sistema. En Zacarías (2023), para garantizar que las estimaciones sean confiables y resistentes a las influencias de datos atípicos se utilizaron estimadores de regresión robustos, implementando el Bootstrap robusto simple y el Wild Bootstrap robusto propuesto en Sohel et al. (2012) bajo tres esquemas de remuestreo propuestos por Wu (1986) y dos propuestos por Liu (1988).

Febles (2014) propuso un método para simular modelos que implica la creación de una muestra pareada de valores observados y predichos (z_i, y_i) basada en la media $(\bar{z})$ y los parámetros $(\beta_0, \beta_1, R^2, SCE)$ de un modelo de regresión entre los observados y predichos. Este método simula modelos de cuatro tipos (exacto-preciso, exacto-impreciso, inexacto-preciso, inexacto-impreciso) y considera cuatro casos de supuestos (normalidad-varianza constante, no normalidad-varianza constante, normalidad-varianza no constante, no normalidad-varianza no constante) en función de la normalidad y la varianza en el modelo de regresión. En Zacarías (2023), se mejoraron los simuladores de Febles (2014) al seleccionar valores plausibles de SCE que generan modelos exacto-precisos independientemente del supuesto cumplido. Además, se determinó una constante para el ancho de una banda horizontal donde se distribuyen los valores predichos y residuales. Se reemplazó el estadístico de Kolmogorov-Smirnov por el de Lilliefors para las pruebas de normalidad, y se implementó la prueba de Breusch-Pagan cuando los residuales cumplen el supuesto de normalidad y la de White cuando los residuales no se ajustan a la distribución normal.

Balam (2012), para medir la precisión de un modelo con regresión lineal, propone la construcción de un intervalo de confianza Bootstrap de residuales balanceado método Percentil con sesgo corregido acelerado BCa, para los casos cuando se cumple el supuesto de varianza constante, independiente si se cumple o no el supuesto de normalidad; y para los casos cuando no se cumple el supuesto de varianza constante, independientemente si se cumple o no el de normalidad, se construye un intervalo de confianza Bootstrap pareado balanceado método Percentil con sesgo corregido acelerado BCa.

Con el fin de medir la precisión se puede considerar el Wild Bootstrap robusto propuesto en Sohel et al. (2012), ya que este considera la utilización de estimadores robustos y otros esquemas de remuestreo diferente al Bootstrap simple. En el presente trabajo se implementó una propuesta a través de intervalos de confianza Bootstrap con los métodos Percentil y Percentil con sesgo corregido acelerado BCa para evaluar la precisión de un modelo con la técnica de regresión lineal, basada en estimadores robustos y los esquemas de remuestreo Bootstrap propuestos por Sohel et al. (2012) e implementados en Zacarías (2023) junto al esquema de Bootstrap Robusto; y bajo los esquemas Bootstrap Pareado Balanceado y Bootstrap de residuales balanceado implementados en Balam (2012).

2. Objetivos

2.1. Objetivo general

Determinar la precisión de un modelo con la técnica de regresión lineal por medio de intervalos de confianza basado en diferentes esquemas de remuestreo Bootstrap y medir sus eficiencias a través de un estudio de simulación.

2.2. Objetivos específicos

1. Desarrollar la metodología para medir la precisión de un modelo con la técnica de regresión lineal por medio de intervalos de confianza basado en diferentes esquemas de remuestreo Bootstrap.

2. Determinar la precisión de un modelo cuando se cumplan los supuestos de normalidad y varianza constante.

3. Determinar la precisión de un modelo cuando no se cumplan los supuestos de normalidad y/o varianza constante.

4. Diseñar e implementar un estudio de simulación para evaluar la eficiencia de la metodología propuesta.

5. Simular modelos exactos-precisos (EP) y modelos exactos-imprecisos (EI) mediante la propuesta de Febles (2014) y Zacarías (2023); cuando se cumplan o no los supuestos de normalidad e igualdad de varianzas.

6. Determinar la eficiencia de los esquemas Bootstrap propuestos para medir la precisión de un modelo.

3. Marco Teórico

3.1. Validación de modelos

Los modelos son representaciones matemáticas de los mecanismos que rigen los fenómenos naturales (Tedeschi, 2006) o como una construcción matemática diseñada para estudiar un sistema del mundo real o fenómeno (Giordano et al., 1997).

Medina-Peralta et al. (2017) indican que la validación de un modelo en la predicción del sistema implica la comparación, por medio de algún método, de las predicciones del modelo con los valores observados del sistema real para determinar su capacidad predictiva.

Mayer y Butler (1993), clasifican los métodos de validación de modelos en Evaluación Subjetiva, Técnicas Visuales, Medidas de Desviación y Pruebas Estadísticas; también señalan que debido a las complejidades y tipos de datos, no existe una combinación establecida de técnicas de validación que sea aplicable en todas las áreas.

Halachmi et al. (2004), menciona que la validación determina si el modelo matemático es una representación exacta del sistema real, y una forma de validación es comparando los datos reales con los predichos por el sistema.

Para la validación de un modelo se evalúan la exactitud y la precisión; la primera se refiere a la proximidad de las predicciones (z) con los valores observados (y), por ejemplo, sus diferencias ($d = y - z$) del cero y la segunda a la dispersión de los puntos (z, y); además, en presencia de exactitud la precisión se mide cuantificando la dispersión de dichos puntos respecto a una referencia, por ejemplo, la recta determinística $y = x$, o bien, evaluar la varianza de las diferencias (σ_D^2) alrededor del cero ($\mu_D = 0$) (Medina-Peralta et al., 2017).

En la Figura 1 se ilustra la diferencia entre la exactitud y precisión de un modelo de simulación. El caso 1 es inexacto e impreciso, el caso 2 es inexacto y preciso, el caso 3 es exacto e impreciso y el caso 4 es exacto y preciso. En un modelo de predicción lo ideal es que cumpla el caso 4.

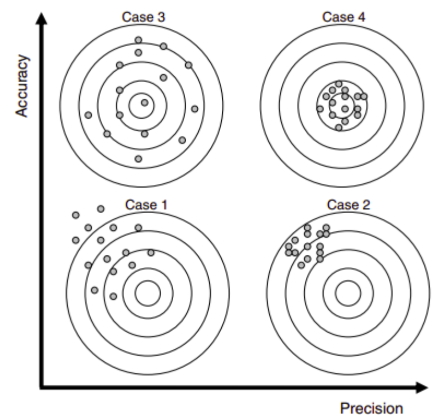

Figura 1: Esquematización de Exactitud y Precisión. Fuente: Tedeschi (2006).

De manera similar, la Figura 2 representa los conceptos ilustrados en la Figura 1 en una forma numérica; el eje X y el eje Y representan al modelo de los valores predichos contra los observados respectivamente. El caso 1 es inexacto e impreciso, el caso 2 es inexacto y preciso, el caso 3 es exacto e impreciso y el caso 4 es exacto y preciso. La línea punteada representa la línea de $X = Y$. En un modelo de predicción lo ideal es que cumpla el caso 4.

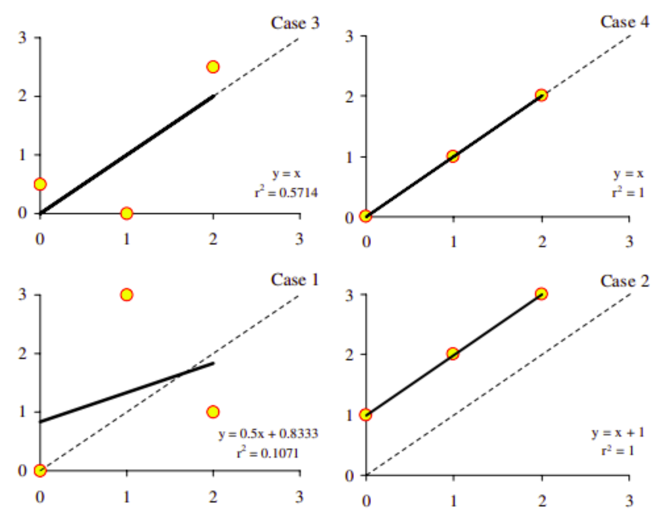

Figura 2: Comparación de las medidas de Exactitud y Precisión. Fuente: Tedeschi (2006).

Las estimaciones del intercepto y la pendiente son buenos indicadores de la exactitud: cuanto mas cerca estén simultáneamente de cero y uno respectivamente mayor es la exactitud. La estimación del coeficiente de determinación (R^2) es un buen indicador de la precisión: cuanto mayor es la R^2 mayor es la precisión (Balam, 2012).

Por su parte, Mayer y Butler (1993) indican que la prueba t paramétrica de medias y el análisis de regresión lineal de la grafica observada frente a la predicha son los métodos estadísticos generales mas útiles, sin embargo, cada método inferencial se encuentra principalmente sujeto a las dificultades para satisfacer sus supuestos.

3.2. Regresión lineal simple

Una de las técnicas mas comunes en la validación de modelos es la de Regresión Lineal Simple de los observados sobre los predichos (Analla, 1998; Mayer et al., 1994; Tedeschi, 2006).

El análisis de regresión lineal tiene como objetivo modelar en forma matemática el comportamiento de una variable de respuesta en función de una o mas variables independientes (Gutierrez & de la Vara, 2012). Por lo tanto, se ajusta el modelo $y_i = \beta_0 + \beta_1 z_i + \epsilon$ donde $1 \leq i \leq n$, y_i es el valor real observado en la i-ésima unidad experimental, z_i es el correspondiente valor predicho por el modelo a validar, ϵ_i es el componente aleatorio o error, β_0 es la ordenada al origen y β_1 la pendiente (Zacarías, 2023).

Esta técnica se encuentra principalmente sujeta al cumplimiento de sus supuestos. Cuando los residuales son independientes, se ajustan a una distribución normal y tienen varianza común, se aplican pruebas de hipótesis estadísticas para evaluar la exactitud, intercepto cero y pendiente uno, ya sea mediante pruebas t de Student, o bien, mediante una prueba F para determinar si el intercepto y la pendiente son simultáneamente cero y uno respectivamente (Balam, 2012).

3.2.1. Verificación de los supuestos de normalidad, varianza constante e independencia para los residuales de un modelo de regresión

Supuesto de normalidad

Para la verificación del supuesto de normalidad de los residuales ϵ_i del modelo de regresión se requiere una muestra de los residuales $e_1, e_2, \cdots, e_n$ y de su distribución empírica:

$$\hat{F}(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} I_{(-\infty,x)}(e_i)}{n} \ \ \forall \ \ x \ \ \in \Re.$$

Se contrastan las siguientes hipótesis:

H_0 : Los ϵ_i tienen distribución normal vs. H_a : Los ϵ_i no tienen distribución normal.

El estadístico de Shapiro-Wilk es uno de los más consolidados y con mayor potencia estadística entre las estadísticas existentes (Arcones & Wang, 2006); este estadístico ha demostrado de manera general, resultados adecuados en comparación a las pruebas clásicas (Arcones & Wang, 2006), pero especialmente cuando se trabaja con distribuciones de colas cortas (Thadewald & Buning, 2007) y con un tamaño muestral inferior a 30, ya que muestra una alta variabilidad cuando se modifican tanto la simetría como el tamaño muestral de la distribución, especialmente entre 20 y 50 datos (Yazici & Yolacan, 2007).

La estadística de Lilliefors (1967) consiste en una mejora de la estadística de Kolmogorov-Smirnov (K-S), sustentada sobre los mismos principios estadísticos, pero específica para aquellos casos en donde la media y la varianza son desconocidas. De este modo, se evita el efecto que provoca, como ocurre en el caso de K-S, la estimación de los parámetros de la muestra (Steinskog et al., 2007) y se recomienda, por tanto, como el estadístico más apropiado para dichos casos (Öztuna et al., 2006); esta estadística está indicada para muestras grandes.

Estadístico de Shapiro-Wilk

$$SW = \frac{1}{\underset{i \leq i \leq n}{max} \mid \Phi(e_i) \mid} [\sum_{i=1}^{k} a_i(e_{(n-i+1)-e_(i)})]^2$$

Donde:

$\Phi(x)$ = Es la función acumulada de la distribución Normal Estándar.

k = Es el menor de los enteros mayor o igual a $n/2$.

a_i = Coeficientes que son calculados para un tamaño de muestra n y se obtienen de la

tabla A17: Coeficientes de la prueba de Shapiro-Wilk (Conover, 1999).
$e_{(i)}$ = Es el i-ésimo menor de la muestra $e_1, e_2, \cdots, e_n$.

Se rechaza la hipótesis de normalidad H_0 con nivel de significancia α si SW es mayor que el cuantil W_α correspondiente al tamaño de muestra n y al nivel de significancia α proporcionado en la tabla A17 (Conover, 1999), o bien, si $p-valor \leq \alpha$.

Estadístico de Lilliefors

$$D =_{1\leq i\leq n}^{max} \{_{1\leq i\leq n}^{max}\{\frac{1}{n} - \Phi(e_{(i)})\},_{1\leq i\leq n}^{max}\{\Phi(e_{(i)}) - \frac{i-1}{n}\}\}$$

Donde: $\Phi(x)$ = Es la función acumulada de la distribución Normal Estándar.
$e_{(i)}$ = Es el i-ésimo menor de la muestra $e_1, e_2, \cdots, e_n$.

Se rechaza a hipótesis de normalidad H_0 con nivel de significancia α si D es mayor que el cuantil D_α correspondiente al tamaño de muestra n y al nivel de significancia α proporcionado en la tabla A.19(a), A.19(b), o bien, A.19(c) de Daniel (1990) dependiendo si únicamente $E(\epsilon)$ es desconocida, sólo σ^2 o ambos parámetros son desconocidos, o bien, si $p-valor \leq \alpha$. El supuesto de normalidad también se verifica con el gráfico de probabilidad normal, si los puntos en dicha gráfica mantienen una forma semejante a una línea recta, entonces el supuesto de normalidad se cumple.

Supuesto de varianza constante

Para la verificación del supuesto de varianza constante en los residuales ϵ_i, se requiere una muestra de los residuales $e_1, e_2, \cdots, e_n$ y se contrastan las siguientes hipótesis:

$H_0 : V(\epsilon_i) = V(\epsilon_j)\ \ \forall\ \ i \neq j$ vs. $H_a : V(\epsilon_i) \neq V(\epsilon_j)$ para alguna $i \neq j$.

Existe una variedad de pruebas estadísticas que contrastan hipótesis semejantes y que permiten evaluar el supuesto de homocedasticidad, las pruebas más utilizadas son la de Breusch-Pagan, la de White, la de Score (Taboga, 2017), la de Goldfeld-Quandt (GeeksforGeeks, s.f.) y la de Harrison-McCabe (Harrison & McCabe, 1979) .

A continuación, se describen las pruebas de Breusch-Pagan y la de White.

Prueba de Breush-Pagan (Breusch & Pagan, 1979; Verbeek, 2004)

La prueba de Breusch-Pagan sólo detecta formas lineales de heterocedasticidad; por lo que consiste en ajustar el modelo de regresión lineal entre los residuales al cuadrado y las variables independientes:

$$e_i{}^2 = \delta_0 + \delta_1 X_1 + \cdots + \delta_k X_k + u \; .$$

Se contrastan las hipótesis:

$$H_0 : \delta_0 = \delta_1 = \cdots = \delta_k = 0 \text{ vs. } H_a : \delta_i \neq 0 \text{ para alguna } i.$$

En H_0 se establece que los residuales no son función de las covariables del modelo; el estadístico de prueba está dado por:

$$B = nR^2 \sim \chi_k^2 \; ,$$

donde R^2 es el coeficiente de determinación del modelo de regresión en $e_i{}^2 = \delta_0 + \delta_1 X_1 + \cdots + \delta_k X_k + u$ y la estadística B se distribuye asintóticamente Ji-cuadrada con k grados de libertad.

Si el estadístico de prueba B tiene un valor $p - valor$ por debajo del valor α establecido, entonces se rechaza la hipótesis nula de homocedasticidad y se asume heterocedasticidad; esta prueba solo detecta formas lineales de heterocedasticidad. Algunos autores (incluidos Bickel (1978) y Koenker (1981)) han sugerido que la prueba estadística de Breusch-Pagan puede no ser precisa para datos no normales.

Prueba White (Verbeek, 2004)

A diferencia de la prueba de Breush-Pagan que sólo detecta formas lineales de heterocedasticidad, la prueba de White (1980) permite contrastar no linealidades, ajustando un modelo de regresión lineal entre los residuales al cuadrado y los productos cruzados de todos los regresores:

$$e_i{}^2 = \delta_0 + \delta_1 X_1 + \cdots + \delta_k X_k + \delta_{k+1} X_1 X_2 + \cdots + \delta_l X_{k-1} X_k + \delta_{l+1} X_1^2 + \cdots + \delta_{l+k} X_k^2 + u(i) \ ,$$

donde $l = \frac{k(k-1)}{2}$.

Se contrastan las hipótesis:
$H_0 : \delta_1 = \cdots = \delta_k = \delta_{k+1} = \cdots = \delta_l = \cdots = \delta_{l+k} = 0$ vs. $H_a : \delta_i \neq 0$ para alguna i.

El estadístico de prueba dado por:

$$W = nR^2 \sim \chi_r^2 \ ,$$

donde R^2 es el coeficiente de determinación del modelo de regresión en (i); y la estadística W se distribuye asintóticamente Ji-cuadrada con $r = (3k + k^2)/2$ grados de libertad. Si el estadístico de prueba W tiene un valor p-valor por debajo del valor α establecido, entonces se rechaza la hipótesis nula de homocedasticidad y se asume heterocedasticidad.

La prueba de White es extremadamente general y su potencia puede ser bastante baja frente a ciertas alternativas, particularmente si el número de observaciones es pequeño; en esta prueba se relaja la suposición de normalidad.

El supuesto de homocedasticidad también se verifica mediante el grafico de dispersión entre los valores predichos contra los residuales; y se utiliza el siguiente criterio:

a) Si los puntos forman algo similar a un cono o embudo, la varianza no es constante.

b) Si los puntos sugieren algún patrón, no se asegura que la varianza sea constante.

c) Los puntos permanecen dentro de una banda horizontal (sugeridas por los datos), o bien, los puntos se encuentran en posiciones al azar, se dice que la varianza es constante.

Supuesto de independencia

Para la verificación de este supuesto se contrastan las hipótesis:

$H_0:$ Los e_i no están correlacionados vs. $H_1:$ Los e_i sí están correlacionados.

Los estadísticos más utilizados para contrastar estas hipótesis son el de Durbin-Watson y el de Breusch-Godfrey. Si no se rechaza la hipótesis H_0 para un nivel de significancia α se dice que se cumple este supuesto. La verificación de este supuesto también se realiza con el gráfico de dispersión entre el orden de entrada de los datos y los residuales; si en este gráfico es posible identificar alguna relación entre el orden de entrada y los residuales, se dice que el supuesto de independencia no se cumple, mientras que, si se observa que los puntos están distribuidos al azar, esto indica que hay independencia entre los residuales.

3.2.2. Validación de modelos con la técnica de regresión lineal simple (Febles, 2014)

Febles (2014), describe la validación de modelos con la técnica de regresión lineal simple que se centra en determinar el grado de exactitud y precisión del modelo basándose en el trabajo previo de Balam (2012).

Sea un modelo $Y = H(\Theta)$, con una muestra pareada $(z_1, y_1), (z_2, y_2), \ldots, (z_n, y_n)$ de valores observados y predichos respectivamente por el modelo. Bajo estas condiciones, se considera el modelo de regresión lineal: $y_i = \beta_0 + \beta_1 z_i$, donde $1 \leq i \leq n$. Donde los estimadores de mínimos cuadrados para β_0, β_1 y el coeficiente de determinación R^2 son respectivamente:

$$\hat{\beta}_0 = \hat{y} - \hat{\beta}_1 \bar{z}\ ,$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(z_i-\bar{z})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(z_i-\bar{z})^2}\ ,$$

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2} \text{ y } 0 \leq R^2 \leq 1,$$

donde $\bar{z}$ y $\bar{y}$ son las medias muéstrales de los valores observados y predichos respectivamente por el modelo; la evaluación estadístico de la exactitud y precisión depende del cumplimiento de los supuestos de normalidad y de varianza constante de los errores i en el modelo.

Los residuales $\epsilon_i = y_i - \bar{y}_i$ son estimaciones de los errores i en el modelo, verificando el supuesto de normalidad en los residuales $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$, con pruebas de bondad de ajuste, como la de Kolmogorov-Smirnov y Shapiro Wilk. El supuesto de varianza constante se verifica con el grafico de dispersión entre los predichos y_i y los residuales ϵ_i del modelo. Con todas las combinaciones de los supuestos de normalidad y varianza constante, la evaluación de la exactitud y precisión del modelo $Y = H(\Theta)$ se analizan en los siguientes tres casos: cuando la muestra de residuales es independiente con distribución normal y varianza constante (NVC); cuando la muestra de residuales es independiente con distribución no normal y varianza constante (NNVC) y cuando la muestra de residuales es independiente con varianza no constante (NVD - NNVD).

3.2.3. Evaluación de la exactitud de un modelo

Cuando se cumplen los supuestos de la Regresión, la verificación de la exactitud de un modelo puede llevarse a cabo vía dos pruebas t de Student, o bien, mediante una prueba F (Balam, 2012).

La Prueba F Conjunta que considera el intercepto y la pendiente de manera conjunta, ambos valores agrupados en un vector de dimensión dos, a diferencia del caso anterior, se compara que el vector de parámetros sea contra que no lo sea. Bajo la premisa de que los residuales del modelo entre los observados y predichos cumplen los supuestos de normalidad y varianza constante,la prueba de hipótesis conjunta permite obtener una región de confianza para el vector de parámetros ,en este caso,se dice que el modelo ese exacto cuando la región de confianza conjunta contiene al punto $(0, 1)$. (Zacarías, 2023).

Para la aplicación de la F conjunta se ajusta el modelo de regresión lineal a simple con los supuestos de que los residuos ajustados se distribuyan normal, son independientes y tienen varianza constante (Ayala, 2024).

La Prueba F Conjunta considera un sólo procedimiento que nos permite establecer si un modelo es exacto considerando simultáneamente el intercepto β_0 y la pendiente β_1, es decir, se prueba estadísticamente si $\begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (Zacarías, 2023).

Zacarías (2023), para evaluar la exactitud de un modelo ante los escenarios NNVC, NVD y NNVD, implemento un método que consiste en estimar la distribución de la estadística F a través de muestras Bootstrap robustas propuestas en Sohel et al. (2012), en donde dependiendo del caso que se presente se implementan los distintos tipos de remuestreo propuestos por Wu (1986) y Liu (1988) y a partir de estas construir una región de confianza para el vector de parámetros $\beta = (\beta_0, \beta_1)$.

3.2.4. Evaluación de la precisión de un modelo

Zacarías (2023), menciona que una parte importante del método de regresión lineal, es que estudia si dicha relación permite realizar estimaciones con una precisión aceptable; por lo que también se considera como un criterio cuantitativo relevante para evaluar la calidad de ajuste de la regresión, el coeficiente de determinación R^2, que en general se interpreta como la proporción de la variabilidad en los datos observados y_i, que es explicada por el modelo.

Balam (2012), utilizó un intervalo de confianza Bootstrap para medir la precisión de un modelo, donde el esquema de remuestreo propuesto depende del cumplimiento o no del supuesto de varianza constante. Cuando se cumple dicho supuesto se emplea un intervalo de confianza Bootstrap de residuales balanceado por el método Percentil con sesgo corregido acelerado para evaluar la precisión de un modelo; y cuando no se cumple el supuesto de varianza constante se emplea un intervalo de confianza Bootstrap pareado balanceado por el método Percentil con sesgo corregido acelerado.

3.2.5. El coeficiente de determinación R^2

El coeficiente de determinación R^2 se utiliza cuando las variables de estudio son cuantitativas y están medidas en una escala de intervalo o razón, siendo una herramienta común para medir el ajuste del modelo a los datos. El valor de R^2 se interpreta frecuentemente como la proporción de la variación de la variable dependiente explicada por el modelo de regresión lineal simple (Balam, 2012). Sin embargo, es importante señalar que R^2 presenta varias limitaciones y características que deben ser tomadas en cuenta al evaluar su utilidad.

Según lo señalado por Balam (2012), algunos puntos clave sobre R^2:

1. R^2 no mide la magnitud de la pendiente de la recta de regresión ajustada, ni implica que una pendiente grande se corresponda con un valor grande de R^2.
2. Es posible obtener un valor grande de R^2 agregando términos adicionales al modelo, lo que puede no reflejar una mejora real en la calidad del modelo.
3. El valor de R^2 no mide adecuadamente la relación entre las variables si no existe una relación lineal, por lo que puede ser grande aunque y no tengan una relación lineal significativa.
4. Un valor elevado de R^2 no necesariamente implica que el modelo sea un buen predictor, ya que puede estar influenciado por factores no realistas en los datos.
5. En algunos casos, R^2 puede ser pequeño si el intervalo de las z es demasiado estrecho para detectar una relación significativa con y.
6. En presencia de valores atípicos o agrupamientos (clustering) en los datos, R^2 puede ser engañoso, pues un valor grande podría ser el resultado de estos factores, en lugar de un ajuste verdadero.

A pesar de sus limitaciones, R^2 tiene ciertas ventajas, como cuando su valor es cercano a cero, lo que indica que el modelo no se ajusta bien a los datos. Sin embargo, si no hay puntos repetidos, es posible construir un modelo polinómico de grado $n-1$ que ofrezca un ajuste perfecto, lo que también pone en evidencia la necesidad de interpretar R^2 con cautela.

Entre otras características, se destaca que el valor esperado de R^2 puede aumentar o disminuir dependiendo de la variabilidad de la variable independiente z, y que, debido a la falta de conocimiento sobre su distribución exacta, R^2 no debe usarse para hacer predicciones directas.

Dadas estas limitaciones, es importante considerar estudios adicionales que profundicen en las propiedades de R^2. Ohtani y Tanizaki (2004), mencionan que para medir la precisión de un modelo de regresión lineal simple, al utilizarse tradicionalmente el coeficiente de determinación R^2 y el coeficiente de determinación ajustado, se han presentado estudios sobre las propiedades de muestras pequeñas de R^2 y $\overline{R}^2$ como lo son Barten (1962) que sugiere una versión modificada de R^2 para reducir su sesgo, y la propuesta de Cramer (1987) al derivar las fórmulas exactas para los dos primeros momentos de R^2 y $\overline{R}^2$, quien muestra que R^2 está seriamente sesgado hacia arriba en muestras pequeñas, mientras que $\overline{R}^2$ es más inestable que R^2 en términos de desviación estándar.

Por lo cual, en Ohtani y Tanizaki (2004) deriva las fórmulas exactas para la función de densidad, la función de distribución y el momento m-ésimo, realizando un análisis numéricos basados en las fórmulas exactas, todo esto considerando un modelo de regresión lineal donde los términos de error obedecen a una distribución t multivariada, examinando los efectos del alejamiento de la normalidad de los términos de error en las distribuciones exactas de R^2 y $\bar{R}^2$. Con intervalos de confianza de R^2 y $\bar{R}^2$, muestran que el sesgo hacia arriba de R^2 se vuelve significativo y que el error estándar de R^2 aumenta a medida que los grados de libertad de la distribución de error t multivariada (ν_0) disminuyen. También se muestra que, cuando los valores de ν_0 y el coeficiente de determinación de la población (Φ) son pequeños, los límites superiores de confianza de R^2 y $\bar{R}^2$ son muy grandes.

Adicionalmente, Christou (2005) explica la distribución del coeficiente de determinación muestral en el caso de regresión simple utilizando su relación con la distribución F no central. Introduce el concepto de coeficiente de determinación verdadero, el cual es útil en estudios de simulación donde la varianza del término de error es conocida, permitiendo construir relaciones con una fuerza predeterminada.

3.3. Regresión lineal robusta

En un modelo de regresión lineal, los supuestos de normalidad y homocedasticidad son fundamentales para garantizar la validez de los estimadores obtenidos por mínimos cuadrados ordinarios (OLS). Sin embargo, en la práctica, estos supuestos rara vez se cumplen debido a la presencia de valores atípicos, heterocedasticidad o discrepancias en las hipótesis del modelo. En estos casos, los estimadores de regresión robusta se presentan como una alternativa confiable, ya que están diseñados para ser menos sensibles a dichas anomalías y proporcionar inferencias más confiables sobre los parámetros del modelo (Zacarías, 2023).

Orenti et al. (2024), menciona que la regresión robusta ofrece ventajas significativas frente a métodos como la regresión ponderada basada en mínimos cuadrados iterativamente reponderados (IRWLS), especialmente en contextos con patrones heterocedásticos en los residuos. No solo permite gestionar de manera óptima los valores atípicos, sino que también proporciona un enfoque más eficaz para manejar la heterocedasticidad y las desviaciones de los supuestos clásicos del modelo.

El objetivo principal de la regresión robusta es desarrollar métodos que produzcan estimaciones precisas y resistentes a influencias indebidas en los datos. Una de las métricas clave para evaluar la robustez de un estimador es el punto de ruptura, definido como la mínima fracción de datos atípicos necesarios para invalidar completamente el estimador. Mientras que los estimadores clásicos como OLS tienen un punto de ruptura bajo que converge a cero a medida que aumenta el tamaño de la muestra, los estimadores robustos modernos pueden alcanzar un punto de ruptura de hasta el 50 %, lo que los hace altamente resistentes (Rousseeuw, 1984; Siegel, 1982).

Entre los estimadores robustos más avanzados se encuentra el MM-Estimador, introducido como una combinación de alta eficiencia y robustez.El MM-Estimador es especialmente útil en contextos donde los datos contienen una proporción significativa de valores atípicos, ya que logra una eficiencia asintótica superior al 85 % y un punto de ruptura máximo del 50 % (Rousseeuw & Yohai, 1984). Este balance lo convierte en una herramienta clave para análisis estadísticos robustos, asegurando un ajuste confiable incluso en condiciones adversas.

3.3.1. MM-Estimador (Yohai, 1987)

El estimador MM tiene las siguientes propiedades: (i) es altamente eficiente cuando los errores tienen una distribución normal y (ii) su punto de ruptura es 0.5.

El estimador MM se define en un procedimiento de tres etapas. En la primera etapa, se calcula una estimación de regresión inicial que es consistente, robusta y con un alto punto de ruptura, pero no necesariamente eficiente. En la segunda etapa, se calcula un estimador M de la escala de errores utilizando residuos basados en la estimación inicial. Finalmente, en la tercera etapa se calcula un estimador M de los parámetros de regresión basada en una función ψ descendente.

Considerando el modelo de regresión lineal simple:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 z_i,\ 1 \leq i \leq n,$$

Huber (1981) define los estimadores M de la siguiente manera: Sea una función real que satisfaga los siguientes supuestos (A1):

I. $\rho(0) = 0$.

II. $\rho(-u) = \rho(u)$.

III. $1 \leq i \leq v$ implica $\rho(u) \leq \rho(v)$.

IV. ρ es continua.

V. Sea a $=$ sup $\rho(u)$, entonces $0 < a < \infty$.

VI. Si $\rho(u) < a$ y $0 \leq u < v$, entonces $\rho(u) < \rho(v)$.

Dada una muestra de tamaño n, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, el estimador M, $s(\mathbf{u})$ está de nido como el valor de s que es la solución de

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \rho\left(\frac{u_i}{s}\right) = b\ ,$$

donde b puede de definirse como $E_\Phi(\rho(u)) = b$, donde Φ denota la distribución normal estándar.

Se cumple que si $c(\mathbf{u}) = \#\{i : 1 \leq i \leq n, u_i = 0\}/n < 1 - (b/a)$, entonces la sumatoria previa tiene solución única y esta solución es diferente de 0. Si $c(\mathbf{u}) \geq 1 - (b/a)$, se define $s(\mathbf{u}) = 0$.

Luego, el estimador MM se define en tres etapas de la siguiente manera:

1. Sean $\beta_0^{'}$ y $\beta_1^{'}$ estimaciones de los parámetros β_0 y β_1 respectivamente con un alto punto de ruptura, posiblemente 0.5.

2. Calcular los residuales

$$\epsilon_i = y_i - \beta_0^{'} - \beta_1^{'} z_i,\ 1 \leq i \leq n$$

   y calcular $s_n = s(\epsilon_i)$, el estimador M definido previamente, usando una función ρ_0 que satisface los supuestos (A1) y considerando una constante b tal que $b/a = 0.5$, donde$a =$ máx $\rho_0(u)$, lo cual implica que para esta escala la estimación tiene un punto de ruptura igual a 0.5.

3. Sea ρ_1 otra función que satisfaga los supuestos (A1) y tal que

$$\rho_1(u) \leq \rho_0(u) \text{ y}$$
$$\sup\ \rho_1(u) = \sup\ \rho_0(u) = a.$$

   Sea $\psi_1 = \rho_1^{'}$. Entonces el estimador MM, se define como cualquier solución de

$$\textstyle\sum_{i=1}^{n} \psi_1(\frac{\epsilon_i}{s_n}) z_i = 0$$

3.3.2. Algoritmo de MM-Estimador (Zacarías, 2023)

Como se presenta en la tesis de Zacarías (2023), el algoritmo MM-Estimador es un enfoque robusto que mejora la estimación de los coeficientes en presencia de valores atípicos. A continuación, se describe el algoritmo:

Sea

$$y_i = \beta_0 - \beta_1 z_i + \epsilon_i,\ 1 \leq i \leq n,$$

una muestra de tamaño n y suponga dadas las estimaciones iniciales $\beta_0^{'}$ y $\beta_0^{'}$, además del estimador M definido en la Etapa 2 como s_n. Para cada $t \in \mathbb{R}$ se definen los pesos $w_i(t) = \psi_1(\epsilon_i/s_n)/(\epsilon_i/s_n)$. También se definen

$$g(t) = \frac{1}{s_n^2} \sum_{i=1}^{n} w_i(t)\epsilon_i z_i = \frac{1}{s_n} \sum_{i=1}^{n} \psi_1(\frac{\epsilon_i}{s_n}) z_i \text{ y}$$

$$M(t) = \frac{1}{s_n^2} \sum_{i=1}^{n} w_i(t) z_i^2.$$

Si $t^{(i)}$ es el valor de la estimación en la j-ésima iteración, entonces $t^{(j+1)}$ está definido por $t^{(j+1)} = t^{(j)} + \Delta(t^{(j)})$, donde

$$\Delta(t) = M^{-1}(t) g(t).$$

Sea $0 < \delta < 1$ y $-g(t)$ el gradiente de $S(t)$, donde

$$S(t) = \sum_{i=1}^{n} \rho_1(\frac{\epsilon_i}{s_n}).$$

Es posible encontrar un entero k (Yohai, 1987) tal que

$$S(t^{(j)} + \Delta(t^{(j)})/2^k) \leq S(t^{(j)}) - \delta(\Delta(t^{(j)})/2^k) g(t^{(j)}).$$

Sea $k_{1,j}$ el mínimo de dichas k y sea $k_{2,j}$ el valor de $k, 0 \leq k \leq k_{1,j}$, lo que da el mínimo de $S(t^{(j)} + \Delta(t^{(j)})/2^k)$. Entonces se define el paso recursivo mediante

$$t^{(t+1)} = (t^j + (1/2^{k_{2,j}})\Delta(t^{(j)})$$

comenzando $t_{(0)}$ las estimaciones de los parámetros de regresión β_0 y β_1.

Los estimadores MM considerados se basan en la función ρ bicuadrada dada por:

$$\rho(u) = \begin{cases} u^2/2 - u^4/2 + u^6/6, & \text{si } |u| \leq 1 \\ \\ 1/6, & \text{si } |u| > 1 \; , \end{cases}$$

que corresponde a la función ψ bicuadrada

$$\psi(u) = \begin{cases} u(1-u^2)^2, & \text{si } |u| \leq 1 \\ \\ 0, & \text{si } |u| > 1 \; . \end{cases}$$

3.4. La técnica Bootstrap

La Técnica Bootstrap es un método computacional intensivo que permite simular la distribución de una estadística. La idea es maestrear repetidamente los datos observados, produciendo cada vez una función de distribución empírica a partir de los datos remuestreo dos (Zacarías, 2023). El Bootstrap se desarrollo por primera vez para datos independientes y distribuidos de manera idéntica, pero esta suposición se puede relajar para que sea posible realizar estimaciones de Bootstrap a partir de datos dependientes, como los residuos de regresión o los datos de series de tiempo (Givens & Hoeting, 2013).

El enfoque Bootstrap esta especialmente indicado en los casos en donde los datos no siguen una distribución normal, hecho que es común a la mayor parte de las medidas utilizadas habitualmente en las ciencias del comportamiento (Micceri, 1989).

El Bootstrap constituye una variedad de técnicas para la inferencia estadística denominadas genéricamente métodos de remuestreo entre las que se encuentran la permutación estocástica, el Jacknife y la validación cruzada (Balam, 2012). Con los métodos de remuestreo nos permiten cuantificar la incertidumbre calculando errores estándar e intervalos de confianza y realizando pruebas de significancia.Requieren menos suposiciones que los métodos tradicionales y generalmente dan respuestas precisas (Hesterberg et al., 2003) .

Segun Hesterberg et al. (2003) las ventajas del Bootstrap son:

1. Pocos supuestos. No requiere que la muestra sea modelada con la distribución normal o que el tamaño de muestra sea grande.

2. Mayor precisión. Algunos métodos Bootstrap son mas precisos en la practica que los métodos clásicos.

3. Generalidades. Los métodos de remuestreo son notablemente similares para una amplia gama de estadísticos y no requieren de nuevas formulas para cada estadístico. No es necesario memorizar o buscar formulas especiales para cada procedimiento.

3.4.1. El principio Bootstrap

Sea $\theta = T(F)$ una característica de interés de una distribución F desconocida. Sea $x_1, x_2, \ldots, x_n$ aleatoria independiente e idénticamente distribuida de la distribución F, sea $\chi = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ junto de datos y sea $\hat{F}(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I_{(-\infty,x)}(x_i)$ la distribución empírica de la muestra. Entonces un estimador de θ es $\hat{\theta} = T(\hat{F})$ (Givens & Hoeting, 2013) .

Suponga que se desea estimar la distribución F de $\hat{\theta}$ la distribución F_R de algún estadístico de prueba $R(\chi, F)$. Por ejemplo, un estadístico de prueba es

$$R(\chi, F) = [T(\hat{F}) - T(F)/S(\hat{F})]$$

donde $S(\hat{F})$ estima la desviación estándar de $T(\hat{F})$. La distribución de la variable aleatoria $R(\chi, F)$ puede ser intratable o completamente desconocida. Esta distribución también puede depender de la distribución desconocida de F. Ante esta situación, la metodología Bootstrap proporciona una aproximación a la distribución de $R(\chi, F)$ derivada de la función de distribución empírica de los datos observados de manera numérica (Balam, 2012).

A continuación, se detallan algoritmos Bootstrap implementados por Balam (2012):

3.4.2. Algoritmo de remuestreo simple (Balam, 2012)

Se asume una muestra de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ independiente e idénticamente distribuida.

1. Se obtienen B muestras de tamaño n con reemplazo y con probabilidades iguales de la muestra original. La cardinalidad de este espacio muestra es n^n. Se denotan las muestras Bootstrap por $X_1^*, X_2^*, \ldots, X_B^*$ donde cada X_i^* es un vector de tamaño n.
2. Se obtienen las muestras, $\hat{\theta}_1^* = T(X_1^*), \hat{\theta}_2^* = T(X_2^*), \ldots, \hat{\theta}_B^* = T(X_B^*)$.
3. Se usa la distribución empírica $\hat{F}_{\hat{\theta}^*}$ de la muestra $\hat{\theta}_1^*, \hat{\theta}_2^*, \ldots, \hat{\theta}_B^*$ para estimar $F_{\hat{\theta}}$.

En la practica, se usa una B grande para disminuir el error de simulación al evitar el calculo de todo el espacio muestra Bootstrap.

Las estimaciones para $F_{\hat{\theta}}, \theta^*$ y σ_{θ^*} están dadas respectivamente por:

$$\hat{F}_{\hat{\theta}^*} \approx F_{\hat{\theta}}, \quad \hat{\theta}^* = \frac{1}{B}\sum_{i=1}^{B} \hat{\theta}_i^* \approx \theta, \quad Var(\hat{\theta}^*) = \frac{1}{B-1}\sum_{i=1}^{B}(\hat{\theta}_i^* - \hat{\theta}^*)^2 \ .$$

3.4.3. Algoritmo de remuestreo balanceado (Balam, 2012)

Balam (2012), menciona que el Bootstrap Balanceado al ser una modificación a la forma del muestreo del Bootstrap básico garantiza que los datos correspondientes a cada individuo de la muestra aparezcan el mismo numero de veces, incrementando con esto la eficiencia.

Se asume una muestra $x_1, x_2, \ldots, x_n$ independiente e idénticamente distribuida y supongamos que se desean obtener B muestras Bootstrap.

1. Considere el vector $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

2. Generar un vector $N = (1, 2, \ldots, n, 1, 2, \ldots, n, 1, 2, \ldots, n)$ de longitud nB.

3. Generar una permutación aleatoria N^* del vector N.

4. La muestra Bootstrap haciendo lo siguiente:

   X_1^* = Los elementos de X comprendidos desde la primera hasta la posición n de N^*.
   X_2^* = Los elementos de X comprendidos desde la posición $n+1$ hasta la posición $2n$ de N^*.
   $\vdots$
   X_B^* = Los elementos de X cuyas posiciones son las ultimas n posiciones de N^*.

5. Se obtienen las muestras, $\hat{\theta}_1^* = T(X_1^*), \hat{\theta}_2^* = T(X_2^*), \ldots, \hat{\theta}_B^* = T(X_B^*)$.

6. Se usa la distribución empírica $\hat{F}_{\hat{\theta}^*}$ de la muestra $\hat{\theta}_1^*, \hat{\theta}_2^*, \ldots, \hat{\theta}_B^*$ para estimar $F_{\hat{\theta}}$

3.4.4. Bootstrap en regresión lineal

Sea $(y_i, z_i), 1 \leq i \leq n$; una muestra pareada entre observados y predichos, se define el modelo de regresión lineal, $y_i = \beta_0 + \beta_1 z_i + \epsilon$, teniendo con Bootstrap la idea de estimar la distribución de la estadística $R(\chi, \theta)$ que esta en función de $\theta = (\beta_0, \beta_1)$ y de $\hat{\theta}$ (Zacarías, 2023). Hay dos maneras de aplicar el Bootstrap en un modelo de regresión: aplicando Bootstrap a la muestra de residuales o aplicando Bootstrap a la muestra Pareada entre Y y Z (Balam, 2012).

Los siguientes algoritmos son adaptaciones de los propuestos por Balam (2012), específicamente el Bootstrap de Residuales Balanceados y el Bootstrap Pareado Balanceado.

Ambas técnicas emplean el **Algoritmo de remuestreo balanceado** para controlar la aleatoriedad en el proceso de remuestreo, asegurando que cada observación aparezca el mismo número de veces en todas las muestras.

3.4.5. Algoritmo Bootstrap de residuales balanceados

Se asume que los ϵ_i son independientes e idénticamente distribuidos. El algoritmo Bootstrap para generar muestras de R^2 es el siguiente:

1. Ajustar una regresión simple para el modelo $y_i = \beta_0 + \beta_1 z_i + \epsilon_i$.

2. Obtener los residuales $\mathbf{e}_i = y_i - \hat{y}_i$, para $i = 1, 2, \ldots, n$.

3. Aplicar el *Algoritmo de Remuestreo Balanceado* para generar B muestras de residuales balanceados $\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*, \ldots, \mathbf{e}_B^*$, donde cada $\mathbf{e}_i^*$ es un vector de tamaño n generado a partir de los residuales $\mathbf{e}_i$.

4. Generar las nuevas observaciones $\mathbf{y}_1^*, \mathbf{y}_2^*, \ldots, \mathbf{y}_B^*$, donde cada $\mathbf{y}_i^*$ es un vector de tamaño n tal que $\mathbf{y}_i^* = \hat{y}_i + \mathbf{e}_i^*$.

5. Ajustar una regresión simple entre los vectores $\mathbf{y}_i^*$ y z_i, y calcular $\hat{R}_b^{2*}$, para $b = 1, 2, \ldots, B$.

6. Obtener las muestras Bootstrap:

$$\hat{R}_1^{2*} \quad \hat{R}_2^{2*} \quad \ldots \quad \hat{R}_B^{2*} \; .$$

3.4.6. Algoritmo Bootstrap Pareado Balanceado

Se asume que los errores ϵ_i en el modelo $y_i = \beta_0 + \beta_1 z_i + \epsilon_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, no tienen varianza constante, lo que implica que no son idénticamente distribuidos (Givens & Hoeting, 2013; Montgomery, 2017).

1. Considere la muestra de pares $\mathbf{w}_1 = (y_1, z_1), \mathbf{w}_2 = (y_2, z_2), \ldots, \mathbf{w}_n = (y_n, z_n)$.

2. Aplicar el *Algoritmo de Remuestreo Balanceado* para generar B muestras pareadas balanceadas $\mathbf{w}_1^*, \mathbf{w}_2^*, \ldots, \mathbf{w}_B^*$, donde cada $\mathbf{w}_i^*$ es un vector de tamaño n (conjunto de pares (y_i^*, z_i^*)), generado a partir de los pares $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n$.

3. Para cada muestra $\mathbf{w}_i^*$, donde $i = 1, 2, \ldots, B$, obtener los vectores de observados $\mathbf{y}_i^*$ y predichos $\mathbf{z}_i^*$, de manera que $\mathbf{w}_i^* = (\mathbf{y}_i^*, \mathbf{z}_i^*)$; obteniendo así las secuencias $\mathbf{y}_1^*, \mathbf{y}_2^*, \ldots, \mathbf{y}_B^*$ y $\mathbf{z}_1^*, \mathbf{z}_2^*, \ldots, \mathbf{z}_B^*$.

4. Ajustar una regresión simple entre los vectores $\mathbf{y}_i^*$ y $\mathbf{z}_i^*$, y calcular $\hat{R}_b^{2*}$ para $b = 1, 2, \ldots, B$.

5. Obtener las muestras Bootstrap:

$$\hat{R}_1^{2*} \quad \hat{R}_2^{2*} \quad \ldots \quad \hat{R}_B^{2*}\ .$$

3.4.7. Algoritmo Bootstrap robusto simple (Zacarías, 2023)

El algoritmo Bootstrap para generar muestras Bootstrap Robustas para $\hat{R}^2$ es el siguiente:

1. Obtener el MM-Estimador $\hat{B}^{MM}$ de B ... y con este obtener los ajustados $\hat{y}_i^{MM} = z_i B^{MM}, i = 1, 2, ..., n$.

2. Obtener los residuales del modelo robusto $e_i^{MM} = y_i - \hat{y}_i^{MM}, i = 1, 2, \ldots, n$.

3. Remuestrea con reemplazo y con probabilidades la muestra robusta $e_1^{MM}, \ldots, e_n^{MM}$ para obtener $e_1^{*MM}, \ldots, e_n^{*MM}$.

4. Obtener $y_i^{*MM} = e_i^{*MM} + \hat{y}_i^{MM}, i = 1, 2, ..., n$.

5. Ajustar una regresión simple $y_i^{*MM} = \beta_0^{*MM} + \beta_1^{*MM} z_i + e_{1i}^{*MM}$ y obtener $\hat{R}_1^{2*MM}$

6. Repetir los pasos 3 a 5, $(B-1)$ veces para obtener las muestras Bootstrap:

$$\hat{R}_1^{2*MM} \quad \hat{R}_2^{2*MM} \quad \ldots \quad \hat{R}_B^{2*MM}\ .$$

3.5. Wild Bootstrap

El Wild Bootstrap es una técnica útil cuando no se cumplen los supuestos de homocedasticidad en modelos de regresión. Wu (1986) demostró que, en presencia de heterocedasticidad, las estimaciones de mínimos cuadrados son inconsistentes y asintóticamente sesgadas. Para abordar este problema, propuso un esquema Bootstrap basado en tres métodos de remuestreo de residuales, mejorando así la precisión de las estimaciones de los parámetros del modelo. Posteriormente, Liu (1988) amplió el trabajo de Wu al desarrollar dos alternativas adicionales para generar remuestras de residuales.

Davidson y Flachaire (2008) en su estudió sobre el Wild Bootstrap en modelos de regresión con perturbaciones heterocedásticas, demostraron que en casos específicos, puede lograrse una inferencia perfecta. Aunque ciertas versiones carecen de corrección de asimetría, han mostrado reducciones significativas en errores de probabilidad de rechazo en pruebas Bootstrap, incluso en muestras pequeñas o medianas.

Estudios posteriores, como el de Sohel et al. (2012), implementaron algunos de los esquemas de Wu y Liu; y demostraron que ofrecen un rendimiento superior en comparación con métodos tradicionales como el Bootstrap clásico, especialmente cuando existen valores atípicos. La asignación de pesos a los residuales estabiliza la varianza de las estimaciones, lo que resulta crucial para obtener inferencias más confiables.

Finalmente, Zacarías (2023) aplicó estos esquemas de Wild Bootstrap para evaluar la exactitud de modelos de regresión lineal en situaciones donde los supuestos de normalidad o varianza constante no se cumplen. Con una metodología inédita que utilizó los tres esquemas propuestos por Wu (1986) y las dos variantes de Liu (1988) para construir regiones de confianza robustas, adaptándose a diferentes escenarios de residuales.

En los apartados siguientes, se detallarán los algoritmos del Bootstrap robusto propuesto Sohel et al. (2012) con las tres diferentes maneras de remuestreo propuesto en Wu (1986) y con las dos formas propuestas en Liu (1988).

3.5.1. Técnica robusta basada en el esquema Wild Bootstrap

Algoritmo 3.5.1.1 - Esquema Bootstrap de Wu 1

1. Ajustar un modelo $y_i = \beta_0 + \beta_1 z_i + \epsilon_i$ mediante el MM-estimador de la muestra original de observaciones para obtener los parámetros robustos $\hat{B}^{MM}$ y, obtener los ajustados $\hat{y}_i = z_i \hat{\beta}_{MM}$.

2. Calcular los residuales $\hat{e}_i^{MM} = y_i - \hat{y}_i, i = 1, 2, \ldots, n$, y obtener los residuales ponderados

$$\hat{e}_i^{WMM} = \begin{cases} e_i^{MM}, & \text{si } \frac{|e_i^{MM}|}{\sigma_{MM}} \leq c \\ \\ \frac{c \times e_i^{MM}}{|\hat{e}_i^{MM}|/\sigma_{MM}}, & \text{si } \frac{|e_i^{MM}|}{\sigma_{MM}} > c \ , \end{cases}$$

donde c es una constante arbitraria que se elige entre 2 y 3; mientras que σ_{MM} es la raíz cuadrada del cuadrado medio del error del modelo robusto $\sigma_{MM} = \sqrt{CME}$.

3. Obtener una muestra Bootstrap y_i^*, tal que

$$y_i^* = z_i \hat{\beta}_{MM} + \frac{t_i^* \hat{e}_i^{WMM}}{\sqrt{1-h_{ii}}},$$

donde h_{ii} es el i-ésimo elemento de la matriz diag$(Z(Z^T Z)^{-1} Z^T)$ y el valor t_i^* es el i-ésimo elemento de una muestra aleatoria de tamaño n de una $N(0,1)$.

4. Ajustar una regresión simple $y_{1i}^* = \beta_{10}^* + \beta_{11}^* x_i + \epsilon_{1i}^*$ para obtener $\hat{R}_1^{2*}$.

5. Repetir $B-1$ veces veces los pasos 3 y 4 para obtener las muestras:

$$\hat{R}_1^{2*} \quad \hat{R}_2^{2*} \quad \ldots \quad \hat{R}_B^{2*} \ .$$

Algoritmo 3.5.1.2 - Esquema Bootstrap de Wu 2

1. Repetir los pasos 1 y 2 del Algoritmo Wu 1.

2. Similar al paso 3 del Algoritmo Wu 1,se obtiene una muestra Bootstrap; pero el valor t_i^* es el i-ésimo elemento de una muestra con reemplazo con probabilidades iguales de los residuos normalizados $a_1, a_2, \ldots, a_n$, donde

$$a_i = \frac{\hat{e}_i - \bar{\hat{e}}_i}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (\hat{e}_i - \bar{\hat{e}})^2}} \text{ con } \bar{\hat{e}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \hat{e}_i.$$

3. Repetir los pasos 4 y 5 del Algoritmo Wu 1.

Algoritmo 3.5.1.3 - Esquema Bootstrap de Wu 3

1. Repetir los pasos 1 y 2 del Algoritmo Wu 1.

2. Similar al paso 3 del Algoritmo Wu 1,se obtiene una muestra Bootstrap; pero el valor t_i^* es el i-ésimo elemento de una muestra con reemplazo con probabilidades iguales del vector de residuales transformado:

$$R_{ai} = \frac{\hat{e}_i^{WMM} - Mediana(\hat{e}_i^{WMM})}{NMAD(\hat{e}_i^{WMM})} \ ,$$

donde $NMAD = \frac{1}{0.6745} Mediana\{|\hat{e}_i^{WMM} - Mediana(\hat{e}_i^{WMM})|\}$.

3. Repetir los pasos 4 y 5 del Algoritmo Wu 1.

Algoritmo 3.5.1.4 - Esquema Bootstrap de Liu 1

1. Repetir los pasos 1 y 2 del Algoritmo Wu 1.

2. Similar al paso 3 del Algoritmo Wu 1,se obtiene una muestra Bootstrap; pero el valor t_i^* es el i-ésimo elemento de una muestra aleatoria de tamaño n de una distribución Gamma($\alpha = 4, \beta = 1/2$) con función de densidad $gz(x) = [\frac{2^4}{3!}]x^3 e^{-2x} I_{(x>0)}$.

3. Repetir los pasos 4 y 5 del Algoritmo Wu 1.

Algoritmo 3.5.1.5 - Esquema Bootstrap de Liu 2

1. Repetir los pasos 1 y 2 del Algoritmo Wu 1.

2. Similar al paso 3 del Algoritmo Wu 1,se obtiene una muestra Bootstrap; pero el valor t_i^* es el i-ésimo elemento de una muestra aleatoria de tamaño n obtenida por

$$t_i^* = H_i D_i - E(H_i)E(D_i), \qquad i = 1, 2, \ldots, n \ ,$$

donde $H_1, H_2, \ldots, H_n$ son variables aleatorias independientes, idénticamente normalmente distribuidas con media $(1/2)(\sqrt{17/6}) + \sqrt{1/6}$ y varianza $1/2$. De igual manera,$D_1, D_2, \ldots, D_n$ también se distribuyen normal, son independientes e idénticamente distribuidas con media $(1/2)(\sqrt{17/6}) - \sqrt{1/6}$ y varianza $1/2$. Tanto H_i y las D_i son independientes entre sí.

3. Repetir los pasos 4 y 5 del Algoritmo Wu 1.

3.6. Intervalos de confianza Bootstrap

Las muestras Bootstrap se pueden utilizar para calcular intervalos de confianza mas aproximados. Cuando $n \to \infty$, el Bootstrap y el intervalo estándar convergen el uno al otro; en algunas situaciones se pueden hacer correcciones al sesgo. Estas correcciones pueden significativamente mejorar la exactitud inferencial de la estimación de un intervalo (Efron & Tibshirani, 1993).

Good (2005), determina que el Bootstrap puede ayudarnos a obtener una estimación del intervalo para cualquier aspecto de la distribución si las observaciones son independientes y todos provienen de una distribución con el mismo valor del parámetro que se estima.El Bootstrap es particularmente valioso cuando se trata de obtener una estimación del intervalo para una proporción o para la media y la varianza de una distribución no simétrica.

Según Balam (2012), desafortunadamente, tales intervalos tienen las siguientes de ciencias:

1. Son sesgados, esto es, es mas probable que contengan ciertos valores falsos del parámetro que se estiman que el verdadero.
2. Son mas anchos y menos eficientes de lo que podrán ser.

Motivos por los que en Balam (2012) se implementa dos métodos para corregir estas de ciencias, el primero es el método Percentil con sesgo corregido y el segundo es el Bootstrap con sesgo corregido acelerado BCa.

A continuación se presentan los algoritmos para al construcción de intervalos de confianza Bootstrap con el método Percentil de Efron (1982) y Bootstrap con sesgo corregido acelerado BCa implementado en Balam (2012).

3.6.1. Algoritmo intervalo de confianza Bootstrap Método Percentil

Para calcular un intervalo de confianza Bootstrap Percentil de $\hat{\theta}$ a partir de un muestra $x_1, x_2, \ldots, x_n$ con probabilidad $(1-\alpha)\,\%$ y con B muestras.

1. Se obtienen B muestras de tamaño n con reemplazo y con probabilidades iguales de la muestra original. Se denotan las muestras Bootstrap por $X_1^*, X_2^*, \ldots, X_B^*$ donde cada X_i^* es un vector de tamaño n.

2. Se obtienen las muestras, $\hat{\theta}_1^* = T(X_1^*), \hat{\theta}_2^* = T(X_2^*), \ldots, \hat{\theta}_B^* = T(X_B^*)$.

3. Las B muestras $\hat{\theta}_1^*, \hat{\theta}_2^*, \ldots, \hat{\theta}_B^*$ se ordenan de manera ascendente, tal que $\hat{\theta}_1^* \leq \hat{\theta}_2^* \leq \cdots \leq \hat{\theta}_B^*$.

4. Determinar los cuantiles LI y LS, para el nivel de confianza del $(1-\alpha)\%$ en la muestra Bootstrap ordenada, con $LI = \hat{\theta}^*_{(\alpha/2)\times B}$ y $LS = \hat{\theta}^*_{(1-\alpha/2)\times B}$.

5. El intervalo de confianza esta dado por: $[LI, LS]$.

3.6.2. Algoritmo intervalo de confianza Bootstrap BCa

Para calcular un intervalo de confianza Bootstrap BCa de $\hat{\theta}$ a partir de un muestra $x_1, x_2, \ldots, x_n$ con probabilidad $(1-\alpha)\%$ y con B muestras.

1. Obtener una estimación $\hat{\theta}$ a partir de los datos originales.

2. Se obtienen B muestras de tamaño n con reemplazo y con probabilidades iguales de la muestra original. Se denotan las muestras Bootstrap por $X_1^*, X_2^*, \ldots, X_B^*$ donde cada X_i^* es un vector de tamaño n.

3. Se obtienen las muestras, $\hat{\theta}_1^* = T(X_1^*), \hat{\theta}_2^* = T(X_2^*), \ldots, \hat{\theta}_B^* = T(X_B^*)$.

4. Se determina la proporción p de las $\hat{\theta}_i^*$ que son mayores o iguales a $\hat{\theta}$.

5. Determinar $Z_0 = Z_p$ donde Z_p es el cuantil en la distribución normal estándar tal que $P(Z > Z_p) = p$.

6. Obtener la constante de aceleración a dada por:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{\theta}_{-iprom} - \hat{\theta}_{-i})^3}{6\ (\ \sum_{i=1}^{n}(\hat{\theta}_{-iprom} - \hat{\theta}_{-i})^2\ )^{3/2}}\ ,$$

   donde: $\hat{\theta}_{-i}$ es la estimación con los datos originales quitando la i-ésima observación y $\hat{\theta}_{-iprom} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{\theta}_{-i}$.

7. Obtener $Z_L = \frac{Z_0 - Z_{\alpha/2}}{1-a(Z_0 - Z_{\alpha/2})} + Z_0$ y $Z_U = \frac{Z_0 + Z_{\alpha/2}}{1-a(Z_0 + Z_{\alpha/2})} + Z_0$ donde: $Z_{\alpha/2}$ es el cuantil en la distribución normal estándar tal que $P(Z > Z_{\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2}$.

8. Encontrar $LI = INVCDF(\Phi(Z_L))$ y $LS = INVCDF(\Phi(Z_U))$ donde $INVCDF$ es el cuantil en la muestra Bootstrap con probabilidad $\Phi(Z_L)$ y $\Phi(Z_U)$ respectivamente y Φ es la distribución acumulada de la normal estándar, siendo $P(\hat{\theta}^* < LI) = \Phi(Z_L)$ y$P(\hat{\theta}^* < LS) = \Phi(Z_U)$.

9. El intervalo de confianza esta dado por: $[LI, LS]$.

3.7. Simulación de modelos

En Febles (2014) se hizo una propuesta para simular modelos que cumplen ciertos supuestos establecidos de manera *a priori*. Se crearon los siguientes 4 simuladores: $ModNVC()$, $ModNNVC()$, $ModNNVD()$ y$ModNVD()$, los cuales en su versión actual contienen las mejoras realizadas en Zacarías (2023); dichos simuladores están implementados en el lenguaje R y dependen de los siguientes cinco argumentos que el usuario deberá especificar de manera a priori: n el tamaño de la muestra deseada, b0 y b1 el intercepto y la pendiente deseada respectivamente del modelo de regresión entre los reales y los predichos, R2 el coeficiente de determinación deseado para el modelo de regresión entre los reales y los predichos, y muz la media deseada para los predichos.

A continuación, se hace una descripción de la funcionalidad de los simuladores sobre como garantizan el cumplimiento o no de los supuestos de normalidad y de varianza constante en los residuales del modelo de regresión entre los reales simulados y los predichos simulados para los diferentes tipos de modelos que se utilizaron en este trabajo.

3.7.1. Simulador de modelos que cumplen el supuesto normalidad y varianza constante (NVC)

Para la simulación de modelos cuyos residuales cumplen el supuesto de normalidad y varianza constante se utiliza el simulador $ModNVC(n, b0, b1, R2, muz)$, el cual implementa dos funciones principales para la simulación de dichos modelos, la función dada por $Datoszy(n, R2, SCE, muz)$ y la función $PruebaVarIndep(Datos)$. La función $Datoszy()$ implementa el método de la transformación para retornar un vector normal bi-variado (z_i, y_i) de tamaño n, cuyos residuales e_i del modelo de regresión entre y_i y z_i cumplen el supuesto de normalidad con las estadística de Shapiro-Wilk y con Lilliefors al 5 %; siempre que los valores a priori determinados generen una matriz de varianzas y covarianzas positiva definida (PD), en caso de que no la función retorna un vector nulo.

La función $PruebaVarIndep()$ implementa el método propuesto en Febles (2014) para lograr el cumplimiento de varianza constante y verifica que se cumpla dicho supuesto con la estadística de Breusch-Pagan y también se verifica el supuesto de independencia con la estadística de Durbin-Watson ambas pruebas al 5 %. Para garantizar el supuesto de varianza constante, en Febles (2014) se consideró como criterio que los puntos entre los ajustados y los residuales del modelo simulado deberán estar distribuidos aleatoriamente en una banda horizontal, donde el ancho de la banda está determinado por $a = 2 * sqrt(SCE/(n-2))$, de tal forma que para que las observaciones (z_i, y_i) simuladas caigan dentro de la banda deberán cumplir la condición $\hat{y}_i - a \leq y_i \leq \hat{y}_i + a$, donde $\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 z_i$. La función $PruebaVarIndep()$ llama tantas veces como sea necesario a la función $Datoszy()$ hasta que el simulador $ModEPNVC()$ retorna un vector bi-variado simulado cuyos residuales del modelo de regresión entre los simulados reales y los simulados predichos cumplen con los supuestos de normalidad, varianza constante e independencia con nivel de significancia del 5 %.

3.7.2. Simulador de modelos que no cumplen el supuesto de normalidad, pero sí el de varianza constante (NNVC)

Para la simulación de modelos cuyos residuales no cumplen el supuesto de normalidad, pero sí el de varianza constante se utiliza el simulador $ModNNVC(n, b0, b1, R2, muz)$, el cual implementa dos funciones principales para la simulación de dichos modelos, la función $Datoszy(n, R2, SCE, muz)$ y la función $PruebaVarIndep(Datos)$. La función $Datoszy()$ implementa el método de simulación propuesto por Cheng et al. (2011) , el cual se encuentra descrito en Febles (2014); con este método se genera un vector aleatorio (z_i, y_i) con distribución Gamma bivariada de tamaño n; este vector se genera con cuatro valores a priori: las medias μ_z y μ_y; y las desviaciones estándar σ_z y σ_y; con este método se resuelve un polinomio cúbico cuya incógnita es el coeficiente de correlación ρ entre z y y, los coeficientes del polinomio dependen a su vez de los coeficientes de asimetría $\gamma_z = 2\sigma_z/\mu_z$ y $\gamma_y = 2\sigma_y/\mu_y$. Este método se aplica hasta que el vector generado no cumple el supuesto de normalidad con las estadísticas de Shapiro-Wilk y con Lilliefors al 5 %.

La función $PruebaVarIndep()$ garantiza el cumplimiento de varianza constante y verifica que se cumpla dicho supuesto con la estadística de Breusch-Pagan y también el supuesto de independencia con la estadística de Durbin-Watson ambas pruebas al 5 %. La descripción y el funcionamiento de $PruebaVarIndep()$ es exactamente igual al caso NVC para garantizar varianza constante; con la diferencia de que la función $PruebaVarIndep()$ llama tantas veces como sea necesario a la función $Datoszy()$ hasta que el simulador $ModNNVC()$ retorna un vector bi-variado simulado cuyos residuales del modelo de regresión entre los simulados reales y los simulados predichos no cumplen con el supuesto de normalidad pero sí con el de varianza constante e independencia con un nivel de significancia del 5 %.

3.7.3. Simulador de modelos que cumplen el supuesto normalidad, pero no el de varianza constante (NVD)

Para la simulación de modelos cuyos residuales cumplen el supuesto de normalidad, pero no el de varianza constante se utiliza el simulador $ModNVD(n, b0, b1, R2, muz)$, el cual implementa la función $Datoszy(n, R2, SCE, muz)$ que garantiza el supuesto de normalidad y verifica que se cumpla dicho supuesto con las estadísticas de Shapiro-Wilk y Lilliefors, ambas pruebas al 5 %. La descripción y el funcionamiento del script $Datoszy(n, R2, SCE, muz)$ es exactamente igual al caso NVC para garantizar normalidad.

Para garantizar el incumplimiento del supuesto de varianza constante, en el simulador $ModNVD(n, b0, b1, R2, muz)$, se consideró como criterio que los puntos entre los ajustados y los residuales del modelo simulado deberán estar distribuidos aleatoriamente en un cono, de tal manera que las fronteras del cono estén limitadas por una recta superior l_1 con ecuación $y_i - \hat{y} = \hat{y} tan\alpha_1$ y una recta inferior l_2 con ecuación $y_i - \hat{y} = \hat{y} tan\alpha_2$, donde α_1 y α_2, son respectivamente, los ángulos de inclinación de l_1 y l_2. Por lo tanto, si el residual $e_i = y_i - \hat{y}_i > 0$, entonces y_i y $\hat{y}_i$ deben cumplir la condición $\hat{y}_i \leq y_i \leq \hat{y}_i(1 + tan\alpha_1)$ para que el punto (z_i, y_i) simulado caiga dentro del cono; de igual forma, si $e_i = y_i - \hat{y}_i < 0$, se debe garantizar la condición $\hat{y}_i(1 + tan\alpha_2) \leq y_i \leq \hat{y}_i$ para que el punto simulado correspondiente caiga dentro del cono. Para la simulación de estos tipos de modelos se consideró un cono simétrico determinado por $\alpha_1 = \pi/9$ y $\alpha_2 = \pi/9$ radianes.

El simulador$ModNVD(n, b0, b1, R2, muz)$ realiza el proceso iterativamente hasta que el vector bi-variado, cuyos residuales del modelo de regresión entre los reales simulados y los predichos simulados cumplen el supuesto de normalidad con las estadísticas de Shapiro-

Wilk y Lilliefors, el de independencia con la estadística de Durbin-Watson, pero no cumplen el supuesto de varianza constante con la estadística de Breusch-Pagan; todas las pruebas son realizadas al 5 %.

3.7.4. Simulador de modelos que no cumplen los supuestos normalidad y varianza constante (NNVD)

Para la simulación de modelos cuyos residuales no cumplen el supuesto de normalidad ni tampoco el de varianza constante se utiliza el simulador $ModNNVD(n, b0, b1, R2, muz)$, el cual implementa la función $Datoszy(n, R2, SCE, muz)$ que garantiza el incumplimiento del supuesto de normalidad y lo verifica con las estadísticas de Shapiro-Wilk y Lilliefors, ambas pruebas al 5 %. La descripción y el funcionamiento de la función dada por $Datoszy(n, R2, SCE, muz)$ es exactamente igual al caso NNVC donde se garantiza el incumplimiento del supuesto de normalidad por medio del método de simulación de Gammas bivariadas propuesto por Cheng et al. (2011).

Para garantizar el incumplimiento del supuesto de varianza constante, el simulador con $ModNVD(n, b0, b1, R2, muz)$, realiza el proceso iterativo equivalente al descrito en el caso NVD hasta que el vector bi-variado, cuyos residuales del modelo de regresión entre los reales simulados y los predichos simulados cumplen el supuesto de independencia con la estadística de Durbin-Watson, pero no cumplen los supuestos de normalidad con las estadísticas de Shapiro-Wilk y Lilliefors, ni tampoco el de varianza constante con la estadística de Breusch-Pagan; todas las pruebas se realizan al 5 %.

Todos los simuladores generan un vector bivariado, donde la primera columna corresponden a los valores predichos del modelo simulado y la segunda columna a los valores reales del modelo simulado.

3.8. Diseño factorial con tres factores de efectos fijos

Cuando se quiere investigar la influencia de tres factores (A, B y C) sobre una o más variables de respuesta, y el número de niveles de prueba en cada uno de los factores es a, b y c, respectivamente, se puede construir el arreglo factorial $a \times b \times c$, que consiste en $a \times b \times c$ tratamientos o puntos experimentales.

Debido a que son tres factores, las posibles interacciones son:

- Tres interacciones de primer orden ($A \times B$, $A \times C$, $B \times C$).
- Una interacción de segundo orden ($A \times B \times C$).

Estructura de los datos, modelo y análisis

Sea y_{ijkl} la respuesta observada l-ésima cuando el factor A se encuentra en el i-ésimo nivel, el factor B en el j-ésimo nivel y el factor C en el k-ésimo nivel, donde $i = 1, 2, \ldots, a$, $j = 1, 2, \ldots, b$, $k = 1, 2, \ldots, c$ y $l = 1, 2, \ldots, n$. En general, los datos observados se verán como en la tabla siguiente:

Factor A	Factor B												
	1				2				$\cdots$	b			
	Factor C				Factor C					Factor C			
	1	2	$\cdots$	c	1	2	$\cdots$	c		1	2	$\cdots$	c
1	$y_{1111}, y_{1112}, \ldots, y_{111n}$	$y_{1121}, y_{1122}, \ldots, y_{112n}$	$\cdots$	$y_{11c1}, y_{11c2}, \ldots, y_{11cn}$	$y_{1211}, y_{1212}, \ldots, y_{121n}$	$y_{1221}, y_{1222}, \ldots, y_{122n}$	$\cdots$	$y_{12c1}, y_{12c2}, \ldots, y_{12cn}$		$y_{1b11}, y_{1b12}, \ldots, y_{1b1n}$	$y_{1b21}, y_{1b22}, \ldots, y_{1b2n}$	$\cdots$	$y_{1bc1}, y_{1bc2}, \ldots, y_{1bcn}$
2	$y_{2111}, y_{2112}, \ldots, y_{211n}$	$y_{2121}, y_{2122}, \ldots, y_{212n}$	$\cdots$	$y_{21c1}, y_{21c2}, \ldots, y_{21cn}$	$y_{2211}, y_{2212}, \ldots, y_{221n}$	$y_{2221}, y_{2222}, \ldots, y_{222n}$	$\cdots$	$y_{22c1}, y_{22c2}, \ldots, y_{22cn}$		$y_{2b11}, y_{2b12}, \ldots, y_{2b1n}$	$y_{2b21}, y_{2b22}, \ldots, y_{2b2n}$	$\cdots$	$y_{2bc1}, y_{2bc2}, \ldots, y_{2bcn}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
a	$y_{a111}, y_{a112}, \ldots, y_{a11n}$	$y_{a121}, y_{a122}, \ldots, y_{a12n}$	$\cdots$	$y_{a1c1}, y_{a1c2}, \ldots, y_{a1cn}$	$y_{a211}, y_{a212}, \ldots, y_{a21n}$	$y_{a221}, y_{a222}, \ldots, y_{a22n}$	$\cdots$	$y_{a2c1}, y_{a2c2}, \ldots, y_{a2cn}$		$y_{ab11}, y_{ab12}, \ldots, y_{ab1n}$	$y_{ab21}, y_{ab22}, \ldots, y_{ab2n}$	$\cdots$	$y_{abc1}, y_{abc2}, \ldots, y_{abcn}$

Figura 3: Disposición general para un diseño factorial con tres factores de efectos fijos.

El modelo para un diseño de tres factores es:

$$y_{ijkl} = \mu + \tau_i + \beta_j + \gamma_k + (\tau\beta)_{ij} + (\tau\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + (\tau\beta\gamma)_{ijk} + \epsilon_{ijkl}$$
$$i = 1, 2, \ldots, a,\ j = 1, 2, \ldots, b,\ k = 1, 2, \ldots, c \text{ y } l = 1, 2, \ldots, n.$$

Donde:

- μ es la media general
- τ_i efecto del i-ésimo nivel del factor renglón A.
- β_j efecto del j-ésimo nivel del factor columna B.
- γ_k efecto del k-ésimo nivel del factor columna C.

- $(\tau\beta)_{ij}$ efecto de la interacción entre τ_i y β_j .
- $(\tau\gamma)_{ik}$ efecto de la interacción entre τ_i y γ_k .
- $(\beta\gamma)_{jk}$ efecto de la interacción entre β_j y γ_k .
- $(\tau\beta\gamma)_{ijk}$ efecto de la interacción entre τ_i , β_j y γ_k .
- ϵ_{ijkl} es el error aleatorio.

Supuestos del modelo

$\epsilon_{ijkl} NI(0, \sigma^2)$

Hipótesis

Para los factores:

$$H_0^1 = \tau_1 = \tau_2 = \cdots = \tau_a = 0 \text{ vs } H_1^1 : \text{al menos una } \tau_i \neq 0 \ , \ i = 1, 2, \ldots, a \ .$$
$$H_0^2 = \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_b = 0 \text{ vs } H_1^2 : \text{al menos una } \beta_j \neq 0 \ , \ j = 1, 2, \ldots, b \ .$$
$$H_0^3 = \gamma_1 = \gamma_2 = \cdots = \gamma_c = 0 \text{ vs } H_1^3 : \text{al menos una } \gamma_k \neq 0 \ , \ k = 1, 2, \ldots, c \ .$$

Para las interacciones:

$$H_0^4 : (\tau\beta)_{ij} = 0 \ \forall i, j \text{ vs } H_1^4 : \text{al menos una } (\tau\beta)_{ij} \neq 0 \ , \ i = 1, 2, \ldots, a; j = 1, 2, \ldots, b \ .$$
$$H_0^5 : (\tau\gamma)_{ik} = 0 \ \forall i, k \text{ vs } H_1^5 : \text{al menos una } (\tau\gamma)_{ik} \neq 0 \ , \ i = 1, 2, \ldots, a; k = 1, 2, \ldots, c \ .$$
$$H_0^6 : (\beta\gamma)_{jk} = 0 \ \forall j, k \text{ vs } H_1^6 : \text{al menos una } (\beta\gamma)_{jk} \neq 0 \ , \ j = 1, 2, \ldots, b; k = 1, 2, \ldots, c \ .$$
$$H_0^7 : (\tau\beta\gamma)_{ijk} = 0 \ \forall i, j, k \text{ vs } H_1^7 : \text{al menos una } (\tau\beta\gamma)_{ijk} \neq 0 \ ,$$
$$i = 1, 2, \ldots, a; j = 1, 2, \ldots, b; k = 1, 2, \ldots, c \ .$$

Suma de cuadrados

Las fórmulas de cálculo para las sumas de cuadrados son:
$SC_{total} = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{c} \sum_{l=1}^{n} y_{ijkl}^2 - \frac{y_{....}^2}{abcn}$,

$SC_A = \sum_{i=1}^{a} \frac{y_{i...}^2}{bcn} - \frac{y_{....}^2}{abcn}$,

$SC_B = \sum_{j=1}^{b} \frac{y_{.j..}^2}{acn} - \frac{y_{....}^2}{abcn}$,

$SC_C = \sum_{k=1}^{c} \frac{y^2_{..k.}}{abn} - \frac{y^2_{....}}{abcn}$.

Las sumas de cuadrados para las interacciones son:

$SC_{AB} = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \frac{y^2_{ij..}}{cn} - \frac{y^2_{....}}{abcn} - SC_A - SC_B$,

$SC_{AC} = \sum_{i=1}^{a} \sum_{k=1}^{c} \frac{y^2_{i.k.}}{bn} - \frac{y^2_{....}}{abcn} - SC_A - SC_C$,

$SC_{BC} = \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{c} \frac{y^2_{.jk.}}{an} - \frac{y^2_{....}}{abcn} - SC_C - SC_B$,

$SC_{ABC} = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{c} \frac{y^2_{ijk.}}{n} - \frac{y^2_{....}}{abcn} - SC_A - SC_B - SC_C - SC_{AB} - SC_{AC} - SC_{BC}$.

La suma de cuadrados del error puede encontrarse restando la suma de cuadrados de cada efecto principal e interacción de la suma de cuadrados total:

$$SC_E = SC_T - SC_A - SC_B - SC_C - SC_{AB} - SC_{AC} - SC_{BC} - SC_{ABC} \ .$$

O bien,

$$SC_E = SC_T - SC_{Sub(ABC)},$$

donde

$$SC_{Sub(ABC)} = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{c} \frac{y^2_{ijk.}}{n} - \frac{y^2_{....}}{abcn}.$$

Estadísticos de prueba

Para probar la significación la fuente de variabilidad X, se divide CM_X por el CM_E; de modo que los valores grandes de este cociente implican que los datos no apoyan la hipótesis nula correspondiente:

$$F^X = \frac{CM_X}{CM_E} \sim F_{x,abc(n-1)},$$

donde x representa los grados de libertad asociados a la fuente de variabilidad X.

Región de rechazo

Con un nivel de significación dado α, la región de rechazo se encuentra en la cola superior de la distribución F correspondiente:

$$RR: F_0^X > F_{a;x,abc(n-1)},$$

donde F_0^X es el valor de la estadística de prueba correspondiente.

Valor p

Se considera la fuente de variación (X) con su correspondiente estadístico de prueba:

$$P_X = P(F_{a;x,abc(n-1)} \geq F_0^X).$$

Fuente de variación	SC	g.l	CM	F_0	Valor - p
A	SC_A	$a-1$	$\frac{SC_A}{a-1}$	$\frac{CM_A}{CM_E}$	$P(F \geq F_0^A)$
B	SC_B	$b-1$	$\frac{SC_B}{b-1}$	$\frac{CM_B}{CM_E}$	$P(F \geq F_0^B)$
C	SC_C	$c-1$	$\frac{SC_C}{c-1}$	$\frac{CM_C}{CM_E}$	$P(F \geq F_0^C)$
AB	SC_{AB}	$(a-1)(b-1)$	$\frac{SC_{AB}}{(a-1)(b-1)}$	$\frac{CM_{AB}}{CM_E}$	$P(F \geq F_0^{AB})$
AC	SC_{AC}	$(a-1)(c-1)$	$\frac{SC_{AC}}{(a-1)(c-1)}$	$\frac{CM_{AC}}{CM_E}$	$P(F \geq F_0^{AC})$
BC	SC_{BC}	$(b-1)(c-1)$	$\frac{SC_{BC}}{(b-1)(c-1)}$	$\frac{CM_{BC}}{CM_E}$	$P(F \geq F_0^{BC})$
ABC	SC_{ABC}	$(a-1)(b-1)(c-1)$	$\frac{SC_{ABC}}{(a-1)(b-1)(c-1)}$	$\frac{CM_{ABC}}{CM_E}$	$P(F \geq F_0^{ABC})$
Error	SC_E	$abc(n-1)$	$\frac{SC_E}{abc(n-1)}$		
Total	SC_T	$abcn-1$			

Cuadro 1: Tabla del ANOVA para el diseño factorial de tres factores con efectos fijos.

3.8.1. Comparación múltiple de Tukey (Montgomery, 2017)

Si el ANOVA indica que hay diferencia en el nivel medio de los factores resulta de interés llevar a cabo comparaciones entre las medias individuales para determinar diferencias específicas. Existiendo interacción significativa, los efectos de los factores no son independientes.

Con la prueba de Tukey el nivel de significación global es exactamente cuando los tamaños de las muestras son iguales y como máximo α cuando los tamaños de las muestras son desiguales. Este método también puede utilizarse para construir intervalos de confianza sobre las diferencias en todos los pares de medias. Para estos intervalos, el nivel de confianza simultáneo es del $(1-\alpha)100\,\%$ cuando los tamaños de las muestras son iguales y de al menos $(1-\alpha)100\,\%$ cuando los tamaños de las muestras son desiguales.

$H_0 : \mu_i = \mu_j$ vs $H_1 : \mu_i \neq \mu_j$ para toda $i \neq j$.

$\mu_i \neq \mu_j$ si $|\bar{Y}_i - \bar{Y}_j| > q_\alpha(p,f)\sqrt{\frac{CM_E}{n}} = T_\alpha$ (tamaños de las muestras iguales).

La tabla V del apéndice en Montgomery (2017) contiene $q_\alpha(p,f)$, valor del punto porcentual α superior del estadístico del rango estudentizado $q = \frac{\bar{Y}_{max}-\bar{Y}_{min}}{\sqrt{\frac{CM_E}{n}}}$, donde $\bar{Y}_{max}$ y $\bar{Y}_{min}$ son las medias muestrales mayor y menor respectivamente de un grupo de p medias muestrales, f son los gl asociados con CM_E.

Con intervalo de confianza del $(1-\alpha)100\,\%$ para $\mu_i - \mu_j$:

$$\bar{Y}_{max} - \bar{Y}_{min} - q_\alpha(p,f)\sqrt{\frac{CM_E}{n}} \leq \mu_i - \mu_j \leq \bar{Y}_{max} - \bar{Y}_{min} + q_\alpha(p,f)\sqrt{\frac{CM_E}{n}}.$$

Para tamaños de muestras desiguales, en la prueba de hipótesis se utiliza:

$$T_\alpha = \frac{q_\alpha(p,f)}{\sqrt{2}}\sqrt{CM_E(\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_j})}.$$

Los intervalos de confianza para la diferencia de los pares de medias se determinan con:

$$\bar{Y}_{max} - \bar{Y}_{min} - \frac{q_\alpha(p,f)}{\sqrt{2}}\sqrt{CM_E(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j})} \leq \mu_i - \mu_j \leq \bar{Y}_{max} - \bar{Y}_{min} + \frac{q_\alpha(p,f)}{\sqrt{2}}\sqrt{CM_E(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j})}.$$

Donde la versión para tamaños de las muestras diferentes se llama el procedimiento de Tukey-Kramer.

4. Metodología

En este trabajo se propone un método que permite evaluar la precisión de un modelo con la técnica de regresión lineal; y se basa en implementar diversos esquemas de remuestreos y estimar la precisión, a través de intervalos de confianza Bootstrap para el coeficiente de determinación R^2, del modelo de regresión entre los valores reales y predichos del modelo que se desea evaluar.

Se consideraron cuatro escenarios posibles con respecto al cumplimiento o no de los supuestos de normalidad y de varianza constante para un modelo a evaluar: NVC, NNVC, NVD y NNVD. Para estimar la distribución del coeficiente de determinación R^2, se implementan ocho esquemas de remuestreo: el Bootstrap Robusto Simple; el Wild Bootstrap robusto propuesto en Sohel et al. (2012) con los tres esquemas de remuestreo propuestos porWu (1986), y los dos esquemas propuestos por Wu (1986); el Bootstrap de residuales balanceado y el Bootstrap pareado balanceado. Se proponen los intervalos percentiles y el BCa para estimar R^2 y para su cómputo se utilizan $B = 1,000$ remuestras para cada uno de los esquemas Bootstrap.

Se realizó un estudio de simulación para comparar las eficiencias de los intervalos de confianza para los diferentes esquemas Bootstrap, tamaños de muestra y tipo de modelo; se simularon y evaluaron un total de 120,000 modelos, de los cuales 60,000 modelos fueron Exactos-Precisos (EP) y 60,000 fueron Exactos-Imprecisos (EI); para cada uno de los modelos se identificaron las R^2 de origen utilizadas para su simulación. Se simularon modelos de tamaños $n = 10, 15, 20, 25, 30, 35$ para cada uno de los supuestos y tipo de modelo.

Se consideraron tres criterios para determinar las eficiencias de los intervalos para cada esquema Bootstrap, el primer criterio determina la eficiencia como el porcentaje de las veces en que el intervalo contiene a la R^2 de origen para los modelos EP simulados; y viceversa, para los modelos IP la eficiencia se determinó como el porcentaje de las veces en que el intervalo de confianza no contiene a la R^2 de origen. El segundo criterio determina la eficiencia como el porcentaje de las veces en que ambos intervalos contienen de manera simultánea a la R^2 de origen para los modelos EP y de manera viceversa cuando ambos no la contienen para los modelos EI; y el tercer criterio determina la eficiencia como el porcentaje de las veces en que uno de los intervalos es más estrecho que el otro cuando ambos intervalos contienen simultáneamente la R^2 de origen para los modelos EP y de manera viceversa uno de los intervalos es más estrecho que el otro cuando ambos no la contienen simultáneamente para los modelos EI.

Se analizaron las eficiencias de los intervalos para cada tipo de supuesto a través de un ANOVA factorial para identificar diferencias significativas entre los tipos de intervalos, tipos de esquemas y tamaños de muestra; complementándolo con pruebas de Tukey. De acuerdo al análisis de los resultados se consideró una propuesta final para la evaluación de la precisión de un modelo, la cual se implementó en el lenguaje R (R Core Team, 2024); y se ilustra con dos modelos correspondientes a casos reales que se ajustaron a cada uno los diferentes escenarios.

4.1. Una propuesta para evaluar la precisión de un modelo

En esta propuesta para evaluar la precisión de un modelo se considera: el conocimiento del tipo de caso de esté ante los cuatro escenarios posibles bajo el cumplimiento de los supuestos de normalidad y/o varianza contante, los predichos (z), los observados (y) para generar muestras Bootstrap del coeficiente de determinación R^2. Se propone construir intervalos de confianza con el método Percentil y BCa a través de las muestras obtenidas, por ocho esquemas Bootstrap.

4.1.1. Estimadores y esquemas Bootstrap

Se debe considerar tres tipos de casos bajo el cumplimiento de los supuestos de normalidad y/o varianza contante:

Caso - 1 NVC

Caso - 2 NNVC

Caso - 3 NVD o NNVD

Es necesario construir los intervalos de confianza con los métodos: Percentil y BCa para la R^2. Dado el desconocimiento de la función de distribución del coeficiente de determinación, se propone el uso de los esquemas Bootstrap propuestos en Sohel et al. (2012) e implementados en Zacarías (2023), al igual de los dos esquemas Bootstrap implementados en Balam (2012). Dependiendo el caso a evaluar se utiliza los estimadores de mínimos cuadrados o el MM-estimador robusto.

Estimador de mínimos cuadrados para el Caso 1- NVC.. En este caso se propone utilizar los estimadores al correr una regresión simple, junto a los residuales y los valores ajustados $\hat{y}$ obtenido por la regresión.

MM-estimador para el Caso 2- NNVC y Caso - 3 NVD o NNVD. En ambos casos se propone utilizar el MM-estimador con regresión robusta junto con los residuales robustos y los valores ajustados $\hat{y}$ robustos obtenidos por la regresión. Para el Caso 2- NNVC, los residuales robustos se utilizan sin ponderar y para el Caso - 3 NVD o NNVD los residuales robustos se ponderarán.

Bootstrap robusto y Bootstrap de Residuales Balanceados para todos los casos. Para todos los casos se propone utilizar siete esquemas Bootstrap a los residuales dependiendo sus caso, los siguientes esquemas robustos: los tres de Wu (*Algoritmo 3.5.1.1, Algoritmo 3.5.1.2 y Algoritmo 3.5.1.3*), los dos de Liu (*Algoritmo 3.5.1.4 y Algoritmo 3.5.1.5*) y el Bootstrap simple (*Algoritmo 3.4.7* y *Algoritmo 3.4.2*). Adicionalmente, se propone implementar junto a los seis esquemas robustos, el Bootstrap de residuales balanceados (*Algoritmo 3.4.5*).

Bootstrap Pareado Balanceado para todos los casos. El Bootstrap Pareado Balanceado (*Algoritmo 3.4.6*) al aplicar el remuestreo sobre una muestra pareada de las observaciones con su respectiva predicha y no depender de los estimadores al no utilizar los residuales, se implementa sin importar el tipo de caso, con los predichos z y los observados y del modelo a evaluar.

Este proceso que permite utilizar los esquemas Bootstrap dependiendo del caso del modelo se encuentra descrito en la Figura 4 e implementado en la función *CalcularR2Bootstrap()* (Anexo C1).

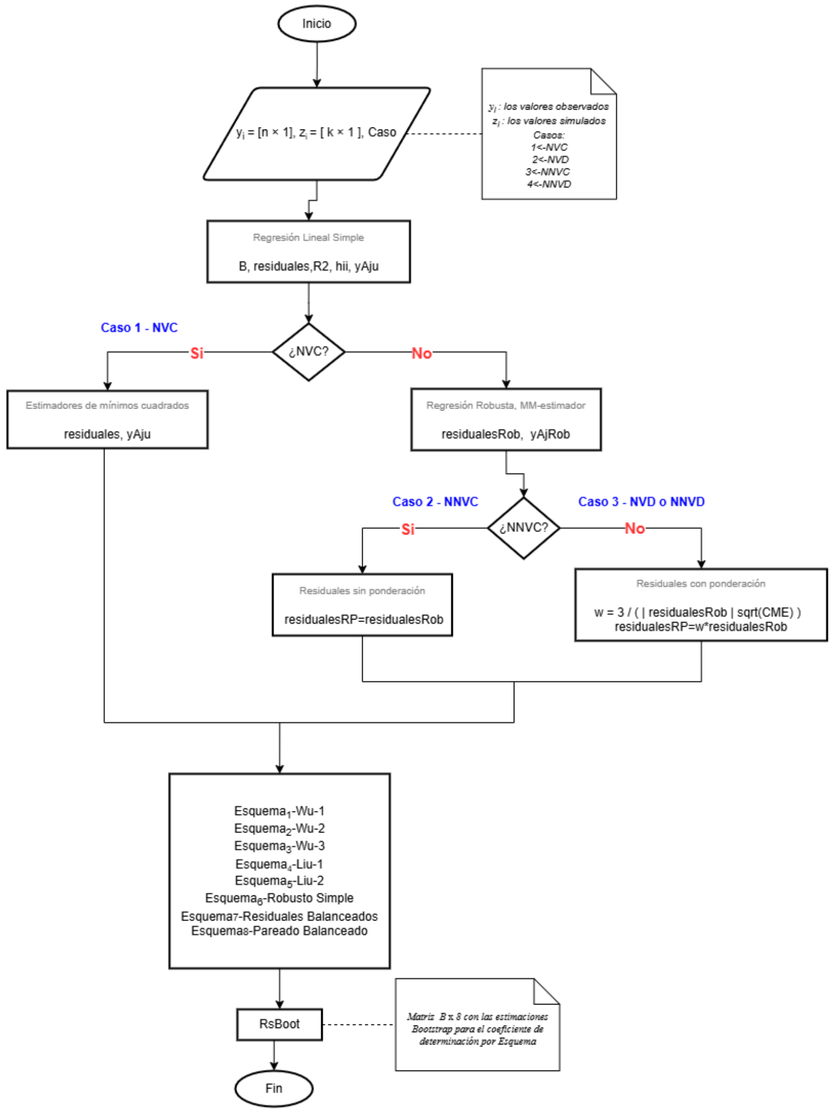

Figura 4: Diagrama de flujo para los diferentes esquemas Bootstrap.

4.1.2. Intervalos de confianza para la R^2

Para evaluar la precisión del modelo se propone utilizar los intervalos de confianza Percentil y BCa para cada una de las muestras de R^2s obtenidas en el procedimiento anterior por esquema Bootstrap. Debido a que las muestra Bootstrap de R^2s ya se tiene, para el computo del ICB Percentil el *Algoritmo 3.6.1* se comienza desde el paso 3. Y para el computó del ICB BCa se realiza el paso 1 del *Algoritmo 3.6.2* en el cual se obtiene la estimación de la R^2 a partir de los datos originales del modelo, y se omiten los pasos 2 y 3 de dicho algoritmo ya que como en el caso anterior se cuenta con la muestra Bootstrap de R^2s. La construcción de los ICB está implementada en la función *ContruirIntervBoot()* (Anexo C2).

A continuación, se describe el algoritmo implementado en la función *EvalPrecisionModel()* (Anexo C3) para evaluar la precisión de un modelo construyendo intervalos de confianza para cada esquema Bootstrap:

Algoritmo 4.1.2.1 - Evaluación la Precisión de un Modelo

1. Calcular e_i y $\hat{y}_i$ con los estimadores correspondientes a su caso (Caso - 1, Caso - 2 y Caso - 3).

2. Llamar la función *CalcularR2Bootstrap()* y aplicar el algoritmo con los esquemas Bootstrap para generar la matriz **RsBoot** de orden $b \times k$, donde:

   - b es el número de remuestras generadas $(\hat{R}_1^{2*}, \hat{R}_2^{2*}, \ldots, \hat{R}_b^{2*})$.
   - k es el número de esquemas Bootstrap considerados $(k = 8)$.

3. Para cada columna k $(k = 1, 2, \ldots, 8)$ en la matriz de remuestras $RsBoot$:

   - Llamar a la función *ContruirIntervBoot()* para construir el intervalo de confianza Percentil $[LI_{P_k}, LS_{P_k}]$ utilizando el *Algoritmo 3.6.1* modificado previamente.
   - Llamar a la función *ContruirIntervBoot()* para construir intervalo de confianza BCa $[LI_{BCa_k}, LS_{BCa_k}]$ utilizando el *Algoritmo 3.6.2* modificado previamente.

4.2. Estudio de simulación para la evaluación de la propuesta

Para evaluar la eficiencia de los intervalos de confianza con los diferentes esquemas Bootstrap, se realizó un estudio de simulación donde se simularon modelos con la propuesta de Febles (2014) y las mejoras establecidas en Zacarías (2023); considerando los siguientes factores: Precisión (EP, EI), Supuestos (NVC, NVD, NNVC, NNVD) y tamaño de muestra $(10, 15, 20, 25, 30, 35)$.

4.2.1. Simulación de los modelos

Para la simulación de los modelos se utilizaron los simuladores $ModNVC()$, $ModNNVC()$, $ModNNVD()$ y$ModNVD()$ descritos en la sección 3.7. Para este trabajo se simularon modelos de tipo EP y EI, por lo que se consideraron valores *a priori* fijos para el intercepto y la pendiente con b0=0 y b1=1; lo cual implicó que para el uso de los simuladores solo se tuviera que especificar tres argumentos: n, R2 y muz.

Los modelos se simularon para tamaños de muestra $n = 10, 15, 20, 25, 30, 35$; para los valores hipotéticos de R^2, se seleccionaron números aleatorios en el intervalo (0.8, 0.99) para los modelos EP y números aleatorios en el intervalo (0.1, 0.3) para los modelos EI, en ambos casos los números se redondearon a cuatro decimales. Para la especificación de muz se consideraron número aleatorios en el intervalo (5,100).

4.2.2. Generación y respaldo de los modelos simulados

Para la simulación y el respaldo de todos los modelos utilizados para evaluar la propuesta de este trabajo, se desarrolló la función $SimMod(N, n, r, TipoPres, TipoSupues)$; la cual tiene como argumentos el número de modelos que se desean simular (N); el tamaño de la muestra (n); el número de réplicas para cada modelo (r); la precisión deseada (TipoPres; 1: Preciso, 2:Impreciso); y tipo de supuesto que debe cumplir el modelo simulado (TipoSupues; 1:NVC, 2:NVD, 3:NNVC, 4:NNVD). Para todos los tipos de modelos simulados se consideraron $r = 5$ réplicas para $N = 500$ modelos; de tal forma que, para un tamaño de muestra fijo, un tipo de precisión fijo y un tipo de supuesto fijo se simularon 2,500 modelos; por lo que en total se simularon y respaldaron $120,000$ modelos $(2500 \times 6 \times 2 \times 4)$, la mitad fueron modelos EP y la otra mitad modelos EI. La función $SimEP()$ ejecuta para cada réplica, el simulador correspondiente ($ModNVC()$, $ModNVD()$,$ModNNVC()$,$ModNNVD()$) N veces para la simulación de los modelos correspondientes a cada tipo de supuesto. Al final, la función $SimMod()$ guarda los modelos simulados por cada tamaño de muestra, tipo de precisión y tipo de supuesto en una matriz de tamaño $rn \times 2N$ y también guarda en otra matriz de tamaño $r \times N$ a las R^2 de origen correspondientes a cada uno de los modelos simulados, en total se respaldaron 48 matrices que contienen los 120,000 modelos y 48 matrices que contienen las R^2 de origen correspondiente a cada modelo simulado. Las matrices se utilizaron para determinar las eficiencias de los métodos Bootstrap propuestos para la medición de la precisión de un modelo. Para más detalle sobre la función $SimMod()$ ver Anexo C5.

En el Anexo C6, se muestran las ejecuciones realizadas a la función $SimMod()$ para la simulación y respaldo de los 120,000 modelos utilizados.

4.2.3. Evaluación de la precisión de los modelos

Después de simular los modelos hipotéticos EP e EI con los cuatro supuestos, se construyó la función $ProcesarModels()$ (Anexo C4) que utiliza la función $EvalPrecisionModel()$ para evaluar la precisión, donde para la primera función $ProcesarModels$, recibe los siguientes argumentos: "$archivos\_encontrados$" que representa dos archivos: la matriz de $rn \times 2N$ con los modelos y la matriz de $r \times N$ con las R^2 de origen respectivas; "$caso$" indica el tipo de escenario de los modelos, con 1 como Normalidad- Homocedasticidad, 2 como Normalidad-Heterocedasticidad, 3 como No normalidad-Homocedasticidad y 4 como No normalidad-Heterocedasticidad; "$replicas$" como el número de replicas del estudio; "$nivConfianza$" como el nivel de confianza para el I.C. para la R^2; "N" como el tamaño de muestra de los modelos; "$MODELO$" para indicar si es preciso o impreciso y "$CASO$" como una etiqueta del tipo de supuesto("NVC","NVD","$NNVC$","$NNVD$").

La función al procesar ambas matrices (modelos y sus R^2s de origen) por replica, recupera uno por uno los modelos y se le aplica a la función $EvalPrecisionModel()$ que implementa el *Algoritmo 4.1.2.1* con $B = 1,000$ remuestras Bootstrap por cada uno de los ocho tipos de remuestreos y calcula los I.C., el cual recibe los parámetros de "$data$" como el vector $z \times y$ con los predichos y las observaciones respectivamente del modelo; "$alpha$" como el nivel de significancia; "$nivConfianza$", el nivel de confianza y el "$caso$", que retorna una lista de ocho matrices de tamaño 2×2, donde cada fila de matriz contiene los ICB Percentil e ICB BCa para el coeficiente de determinación calculado por cada esquema para el modelo.

4.2.4. Determinación de la eficiencia de los intervalos y esquemas

Al obtener la lista con los I.C. para la R^2 del modelo, estos se procesan por esquema y se realizan las evaluaciones para determinar las eficiencias, pero antes, deber cumplir el criterio de que los intervalos con el esquema hayan sido calculados, es decir, son valores válidos, para considerarlo un modelo eficaz con el esquema. La eficiencia se determinó como el porcentaje de veces que los intervalos contienen a la R^2 de origen empleada para simular el modelo. Adicionalmente, para evaluar cuál de los dos intervalos es más eficaz, se consideraron dos escenarios: si solo uno de los intervalos logró contener la R^2, se consideró ganador por defecto y la eficiencia se calculó como el porcentaje de veces en que solo uno de los intervalos incluyó la R^2; en caso de empate, es decir, cuando ambos intervalos contuvieron la R^2, se consideró más eficiente el intervalo con menor amplitud, ya que proporciona una estimación más precisa. La eficiencia en este caso se calculó como el porcentaje de veces que ambos intervalos incluyeron la R^2, pero uno de ellos fue más estrecho.

La eficiencia de los esquema Bootstrap, se determinó como el porcentaje de veces que logra que ambos intervalos contengan a la R^2 de origen con respecto a los modelos evaluados.

Los resultado de las eficiencias se respaldan por supuesto, tipo de modelo y tamaño de muestra, y sus réplicas con dos tablas: la primera tabla para la eficiencia de los intervalos se guarda el número de réplica, el identificador del esquema utilizado, el número de modelos dados por la réplica, el número de modelos eficaces en la réplica que cumplieron la condición de construir ambos intervalos con valores válidos, la frecuencia de que el I.C Percentil es eficiente, la frecuencia de que el I.C BCa es eficiente, la frecuencia en la que el I.C Percentil fue el ganador por defecto, la frecuencia en la que el I.C BCa fue el ganador por defecto, la frecuencia en la que el I.C. Percentil fue mejor que el I.C. BCa cuando ambos fueron ganadores y la frecuencia en la que el I.C. BCa fue mejor que el I.C. Percentil cuando ambos fueron ganadores. La segunda tabla, corresponde a la eficiencia de los esquemas por réplica determinado por el número de veces en la que el esquema logró hacer que sus ICB contuvieran a la R^2 de origen (Ver Anexo C4).

En total se construyeron 96 tablas para las eficiencias, de las cuales 48 fueron para modelos EP y 48 para modelos EI. Para resumir los resultados de las tablas se construyeron 8 nuevas tablas con las eficiencias promedios para cada tipo de modelo, donde para cada supuesto se construyó una tabla de eficiencias promedios para los ICB, por tamaño de muestra y esquema de remuestreo y otra para las eficiencias promedio de los esquemas por tamaño de muestra.

Finalmente, se construyó por cada tipo de modelo una tabla que resume la eficiencia promedio por cada supuesto y esquemas sin importar el tamaño de la muestra.

4.3. Análisis estadísticos

Para cada supuesto (NVC, NNVC, NVD, NNVD) se utilizó ANOVA en un arreglo factorial de tres factores seguido de la comparación múltiple de Tukey (Montgomery, 2017), para determinar el comportamiento de la eficiencia de dos ICB en la evaluación de la precisión, bajo ocho esquemas de remuestreo, seis tamaños de muestra y dos tipos de modelo. Cabe señalar que, en cuatro de los ocho análisis de varianza realizados se eliminaron valores atípicos para el logro del cumplimiento de los supuestos del ANOVA. Las pruebas estadísticas se consideraron significativas cuando el $pvalor < 0.05$ y se utilizó el paquete estadístico STATGRAPHICS Centurion 19 (Statgraphics Technologies, Inc., 2024) .

5. Resultados

En esta sección se presentan los resultados descriptivos y de los análisis estadísticos de las eficiencias de los ICB cuando se tiene cada uno de los casos de supuestos (NVC, NNVC, NVD, NNVD), por esquema, tamaño de muestra y tipo de modelo.

5.1. Eficiencia de los intervalos Bootstrap para el caso EP-NVC

Con base en el promedio general (Figura 5) para: Eficiencia del ICB Percentil (Efic Int Boot Perc) y Eficiencia del ICB BCa (Efic Int Boot Bca) el mejor esquema resultó Liu2, 0.9569 y 0.9586 respectivamente; Eficiencia del ICB Percentil cuando solo él lo contiene a la R^2 y Eficiencia del ICB BCa cuando solo él contiene a la R^2 el mejor esquema es Liu1, 0.7354 y 0.7366 respectivamente; la Eficiencia de ICB Percentil cuando gana en el empate a ICB BCa (Efic Boot Perc gana empate), el mejor esquema es Wu1 (0.8989) y la Eficiencia ICB BCa cuando gana en el empate al ICB Percentil (Efic Boot Bca gana empate), el mejor esquema es Wu3 (0.4304).

Sin considerar el tamaño de la muestra y esquema, para el caso EP-NVC los ICB mejores en promedio general (Figura 5) son: el ICB Percentil con 0.8091 ante la Eficiencia en ICB BCa; la Eficiencia del ICB Bca cuando solo él contiene a la R^2 (0.1516) y la Eficiencia de ICB Percentil cuando gana en el empate al ICB Bca con 0.7047. Por lo que, el mejor es ICB Percentil.

Tamaño de Muestra	Esquema	Efic Int Boot Perc	Efic Int Boot Bca	Efic Int Boot Perc cuando solo el lo contiene	Efic Int Boot Bca cuando solo el contiene	Efic Boot Perc gana empate	Efic Boot Bca gana empate
n = 10	PromWu1	0.8972	0.9168	0.0210	0.0419	0.9335	0.0455
	PromWu2	0.8124	0.8332	0.0366	0.0606	0.9187	0.0447
	PromWu3	0.8289	0.7892	0.1094	0.0646	0.4675	0.4679
	PromLiu1	0.5496	0.5800	0.5433	0.5670	0.4253	0.0314
	PromLiu2	0.9576	0.9644	0.0184	0.0253	0.9427	0.0406
	PromRobusto	0.6680	0.6952	0.1000	0.1351	0.7353	0.1647
	PromResBal	0.6656	0.6976	0.1020	0.1431	0.7297	0.1684
	PromParBal	0.9092	0.9264	0.0256	0.0436	0.7035	0.2710
Promedio (n = 10)		**0.7861**	**0.8004**	**0.1195**	**0.1351**	**0.7320**	**0.1543**
n = 15	PromWu1	0.9196	0.9336	0.0170	0.0317	0.9408	0.0422
	PromWu2	0.8696	0.8832	0.0286	0.0435	0.9309	0.0405
	PromWu3	0.8348	0.8182	0.1031	0.0849	0.4444	0.4733
	PromLiu1	0.4980	0.4828	0.7696	0.7632	0.2105	0.0311
	PromLiu2	0.9752	0.9736	0.0123	0.0107	0.9206	0.0700
	PromRobusto	0.7264	0.7452	0.0823	0.1053	0.7906	0.1270
	PromResBal	0.7268	0.7512	0.0839	0.1136	0.7803	0.1358
	PromParBal	0.9156	0.9260	0.0205	0.0315	0.7081	0.2730
Promedio (n = 15)		**0.8082**	**0.8142**	**0.1397**	**0.1481**	**0.7158**	**0.1491**
n = 20	PromWu1	0.9308	0.9416	0.0190	0.0302	0.9368	0.0442
	PromWu2	0.8876	0.8944	0.0253	0.0327	0.9305	0.0451
	PromWu3	0.8483	0.8291	0.1055	0.0847	0.4165	0.5022
	PromLiu1	0.4252	0.3936	0.9045	0.8972	0.0853	0.0184
	PromLiu2	0.9852	0.9804	0.0093	0.0045	0.8821	0.1134
	PromRobusto	0.7504	0.7656	0.0783	0.0968	0.7933	0.1303
	PromResBal	0.7508	0.7668	0.0718	0.0913	0.8103	0.1178
	PromParBal	0.9196	0.9212	0.0179	0.0195	0.7301	0.2546
Promedio (n = 20)		**0.8122**	**0.8116**	**0.1540**	**0.1571**	**0.6981**	**0.1533**
n = 25	PromWu1	0.9516	0.9544	0.0143	0.0172	0.9418	0.0472
	PromWu2	0.9140	0.9212	0.0193	0.0269	0.9290	0.0535
	PromWu3	0.8682	0.8356	0.1171	0.0827	0.4519	0.4655
	PromLiu1	0.3765	0.2881	0.9669	0.9571	0.0290	0.0139
	PromLiu2	0.9916	0.9896	0.0044	0.0024	0.8264	0.1724
	PromRobusto	0.7680	0.7872	0.0677	0.0906	0.8083	0.1240
	PromResBal	0.7684	0.7812	0.0729	0.0881	0.8044	0.1227
	PromParBal	0.9296	0.9304	0.0150	0.0159	0.7396	0.2474
Promedio (n = 25)		**0.8210**	**0.8110**	**0.1597**	**0.1601**	**0.6913**	**0.1558**
n = 30	PromWu1	0.9488	0.9532	0.0126	0.0172	0.9507	0.0371
	PromWu2	0.9140	0.9216	0.0148	0.0230	0.9396	0.0460
	PromWu3	0.8689	0.8433	0.1047	0.0774	0.4316	0.4910
	PromLiu1	0.3141	0.2127	0.9912	0.9866	0.0096	0.0038
	PromLiu2	0.9900	0.9896	0.0032	0.0028	0.7678	0.2302
	PromRobusto	0.7820	0.7884	0.0706	0.0781	0.8106	0.1227
	PromResBal	0.7812	0.7932	0.0630	0.0771	0.8257	0.1128
	PromParBal	0.9216	0.9276	0.0130	0.0194	0.7407	0.2493
Promedio (n = 30)		**0.8151**	**0.8037**	**0.1592**	**0.1602**	**0.6845**	**0.1616**
n = 35	PromWu1	0.8333	0.8301	0.1851	0.1835	0.6899	0.1329
	PromWu2	0.7701	0.7639	0.2297	0.2297	0.6265	0.1529
	PromWu3	0.7245	0.7109	0.2530	0.2575	0.5726	0.1827
	PromLiu1	0.7384	0.7291	0.2367	0.2486	0.6226	0.1427
	PromLiu2	0.8421	0.8540	0.0566	0.0703	0.7653	0.1799
	PromRobusto	0.8396	0.8477	0.0636	0.0731	0.8003	0.1383
	PromResBal	0.8647	0.8720	0.0559	0.0648	0.8262	0.1196
	PromParBal	0.8833	0.8811	0.0631	0.0629	0.7497	0.1941
Promedio (n = 35)		**0.8120**	**0.8111**	**0.1430**	**0.1488**	**0.7067**	**0.1554**
PromGral	Wu1	0.9136	0.9216	0.0448	0.0536	**0.8989**	0.0582
	Wu2	0.8613	0.8696	0.0591	0.0694	0.8792	0.0638
	Wu3	0.8289	0.8044	0.1321	0.1086	0.4641	**0.4304**
	Liu1	0.4836	0.4477	**0.7354**	**0.7366**	0.2304	0.0402
	Liu2	**0.9569**	**0.9586**	0.0174	0.0193	0.8508	0.1344
	Robusto	0.7557	0.7716	0.0771	0.0965	0.7897	0.1345
	ResBal	0.7596	0.7770	0.0749	0.0963	0.7961	0.1295
	ParBal	0.9132	0.9188	0.0259	0.0321	0.7286	0.2482
	Intervalo	**0.8091**	**0.8087**	**0.1458**	**0.1516**	**0.7047**	**0.1549**

Figura 5: Eficiencia promedio de los intervalos Bootstrap por tamaño de muestra y esquema de remuestreo para el caso EP-NVC.

5.1.1. Eficiencia de los esquemas para el caso EP-NVC

Con base en al menos 95 % de eficiencia promedio y sin importar el ICB (Figura 6): $n = 10$ ningún esquema cumplió la condición, sin embargo con Liu2 se obtuvo 0.94, y con los tamaños de muestra 15, 20, 25, 30 y 35 el mejor fue el esquema Lui2.

Sin considerar el tamaño de la muestra e ICB, para el caso EP-NVC el mejor promedio general (Figura 6) en eficiencia de esquema es Liu2 (0.9737).

Tamaño de Muestra	Replica	Wu1	Wu2	Wu3	Liu1	Liu2	Robusto	ResBal	ParBal
n = 10	1	0.8860	0.8020	0.7485	0.2760	0.9580	0.6200	0.6100	0.8980
	2	0.9020	0.8180	0.7621	0.2600	0.9500	0.6040	0.5940	0.9020
	3	0.8500	0.7560	0.7071	0.2440	0.9160	0.5800	0.5800	0.8660
	4	0.8840	0.7760	0.7398	0.2440	0.9460	0.5920	0.5920	0.8840
	5	0.8700	0.7620	0.7339	0.2320	0.9300	0.6100	0.6120	0.8800
Promedio (n = 10)		**0.8784**	**0.7828**	**0.7383**	**0.2512**	**0.9400**	**0.6012**	**0.5976**	**0.8860**
n = 15	1	0.8880	0.8200	0.7123	0.0960	0.9560	0.6240	0.6260	0.8780
	2	0.9140	0.8460	0.7733	0.1060	0.9620	0.6560	0.6560	0.9060
	3	0.9060	0.8560	0.7606	0.1260	0.9620	0.6840	0.6860	0.8980
	4	0.9060	0.8580	0.7520	0.1120	0.9660	0.6980	0.6860	0.9020
	5	0.9060	0.8440	0.7455	0.1320	0.9700	0.6720	0.6760	0.9000
Promedio (n = 15)		**0.9040**	**0.8448**	**0.7487**	**0.1144**	**0.9632**	**0.6668**	**0.6660**	**0.8968**
n = 20	1	0.9020	0.8500	0.7505	0.0440	0.9760	0.6840	0.6920	0.8760
	2	0.9100	0.8620	0.7780	0.0480	0.9760	0.6920	0.6880	0.9060
	3	0.9360	0.8980	0.7695	0.0420	0.9820	0.7280	0.7300	0.9280
	4	0.8960	0.8440	0.7240	0.0400	0.9720	0.6560	0.6700	0.9000
	5	0.9220	0.8720	0.7722	0.0280	0.9740	0.6980	0.7040	0.9060
Promedio (n = 20)		**0.9132**	**0.8652**	**0.7588**	**0.0404**	**0.9760**	**0.6916**	**0.6968**	**0.9032**
n = 25	1	0.9420	0.9060	0.7731	0.0100	0.9880	0.7240	0.7220	0.9200
	2	0.9440	0.8980	0.7651	0.0140	0.9840	0.6980	0.7000	0.9100
	3	0.9420	0.9000	0.7565	0.0100	0.9860	0.7300	0.7200	0.9240
	4	0.9240	0.8800	0.7756	0.0160	0.9880	0.6900	0.6860	0.9040
	5	0.9380	0.8980	0.7621	0.0120	0.9900	0.7380	0.7340	0.9200
Promedio (n = 25)		**0.9380**	**0.8964**	**0.7665**	**0.0124**	**0.9872**	**0.7160**	**0.7124**	**0.9156**
n = 30	1	0.9320	0.8900	0.7896	0.0080	0.9840	0.7100	0.7240	0.8860
	2	0.9400	0.8960	0.7575	0.0020	0.9900	0.7360	0.7440	0.9140
	3	0.9420	0.9060	0.7760	0.0020	0.9860	0.7180	0.7220	0.9100
	4	0.9420	0.9080	0.7791	0.0000	0.9840	0.7480	0.7520	0.9340
	5	0.9280	0.9020	0.7876	0.0020	0.9900	0.7220	0.7180	0.9040
Promedio (n = 30)		**0.9368**	**0.9004**	**0.7780**	**0.0028**	**0.9868**	**0.7268**	**0.7320**	**0.9096**
n = 35	1	0.9480	0.9120	0.7960	0.0000	0.9900	0.7540	0.7600	0.9160
	2	0.9460	0.9200	0.7923	0.0000	0.9900	0.7240	0.7240	0.9240
	3	0.9380	0.9180	0.7964	0.0000	0.9900	0.7660	0.7680	0.9160
	4	0.9360	0.9000	0.7756	0.0000	0.9880	0.7220	0.7140	0.9040
	5	0.9600	0.9320	0.8136	0.0000	0.9860	0.7580	0.7640	0.9340
Promedio (n = 35)		**0.9456**	**0.9164**	**0.7948**	**0.0000**	**0.9888**	**0.7448**	**0.7460**	**0.9188**
PromGralEsq		**0.9193**	**0.8677**	**0.7642**	**0.0702**	**0.9737**	**0.6912**	**0.6918**	**0.9050**

Figura 6: Eficiencia promedio de los esquemas por tamaño de muestra para el caso EP-NVC.

5.2. Eficiencia de los intervalos Bootstrap para el caso EP-NNVC

Con base en el promedio general (Figura 7) para: Eficiencia del ICB Percentil (Efic Int Boot Perc) y Eficiencia en ICB BCa (Efic Int Boot Bca) el mejor esquema resultó Liu2, 0.9893 y 0.9870 respectivamente; Eficiencia del ICB Percentil cuando solo él contiene a la R^2 y Eficiencia del ICB BCa cuando solo él contiene a la R^2 el mejor esquema es Liu1, 0.6381 y 0.6549 respectivamente; la Eficiencia de ICB Percentil cuando gana en el empate a ICB BCa (Efic Boot Perc gana empate), el mejor esquema es Wu2 (0.9026) y la Eficiencia ICB BCa cuando gana el empate al ICB Percentil (Efic Boot Bca gana empate), el mejor esquema es Wu3 (0.8147).

Sin considerar el tamaño de la muestra y esquema, para el caso EP-NNVC los ICB mejores en promedio general (Figura 7) son: Eficiencia del ICB BCa (Efic Int Boot Bca) con 0.8653 ante 0.8604 de la Eficiencia en ICB Percentil (Efic Int Boot Perc); la Eficiencia del ICB BCa cuando solo el contiene a la R^2 (0.1117) y la Eficiencia de ICB Percentil cuando gana en el empate al ICB BCa (Efic Boot Perc gana empate) con 0.6697. Por lo que, el mejor es ICB Percentil.

Tamaño de Muestra	Esquema	Efic Int Boot Perc	Efic Int Boot Bca	Efic Int Boot Perc cuando solo el lo contiene	Efic Int Boot Bca cuando solo el contiene	Efic Boot Perc gana empate	Efic Boot Bca gana empate
n = 10	PromWu1	0.9460	0.9592	0.0127	0.0263	0.8955	0.0918
	PromWu2	0.9160	0.8956	0.0446	0.0228	0.8430	0.1342
	PromWu3	0.9707	0.9491	0.0401	0.0182	0.1985	0.7833
	PromLiu1	0.6820	0.7256	0.3235	0.3640	0.6711	0.0088
	PromLiu2	0.9776	0.9756	0.0127	0.0107	0.9321	0.0600
	PromRobusto	0.7352	0.7816	0.0385	0.0957	0.7135	0.2480
	PromResBal	0.7360	0.7800	0.0385	0.0928	0.7240	0.2375
	PromParBal	0.9236	0.9468	0.0109	0.0351	0.7778	0.2113
Promedio (n = 10)		**0.8609**	**0.8767**	**0.0652**	**0.0832**	**0.7195**	**0.2219**
n = 15	PromWu1	0.9592	0.9660	0.0096	0.0166	0.8928	0.0976
	PromWu2	0.9240	0.9284	0.0190	0.0237	0.8928	0.0903
	PromWu3	0.9564	0.9379	0.0468	0.0280	0.1454	0.8267
	PromLiu1	0.6228	0.6748	0.4145	0.4595	0.5714	0.0141
	PromLiu2	0.9856	0.9860	0.0069	0.0073	0.8988	0.0959
	PromRobusto	0.7740	0.8116	0.0408	0.0852	0.6879	0.2713
	PromResBal	0.7768	0.8140	0.0364	0.0806	0.7001	0.2636
	PromParBal	0.9324	0.9420	0.0133	0.0233	0.7880	0.1987
Promedio (n = 15)		**0.8664**	**0.8826**	**0.0734**	**0.0905**	**0.6972**	**0.2323**
n = 20	PromWu1	0.9624	0.9640	0.0124	0.0141	0.8975	0.0925
	PromWu2	0.9316	0.9300	0.0172	0.0155	0.9149	0.0734
	PromWu3	0.9492	0.9205	0.0608	0.0316	0.1174	0.8511
	PromLiu1	0.5506	0.5714	0.5752	0.5913	0.3968	0.0301
	PromLiu2	0.9884	0.9852	0.0061	0.0028	0.8708	0.1268
	PromRobusto	0.8132	0.8280	0.0458	0.0628	0.7367	0.2176
	PromResBal	0.8116	0.8244	0.0473	0.0621	0.7262	0.2279
	PromParBal	0.9368	0.9448	0.0098	0.0182	0.7833	0.2069
Promedio (n = 20)		**0.8680**	**0.8710**	**0.0968**	**0.0998**	**0.6804**	**0.2283**
n = 25	PromWu1	0.9716	0.9700	0.0127	0.0111	0.9000	0.0909
	PromWu2	0.9492	0.9492	0.0139	0.0139	0.9243	0.0655
	PromWu3	0.9336	0.9158	0.0615	0.0433	0.1215	0.8352
	PromLiu1	0.4684	0.4876	0.7295	0.7401	0.2557	0.0162
	PromLiu2	0.9940	0.9900	0.0060	0.0020	0.8461	0.1519
	PromRobusto	0.8212	0.8380	0.0482	0.0674	0.7205	0.2326
	PromResBal	0.8232	0.8408	0.0471	0.0671	0.7287	0.2241
	PromParBal	0.9508	0.9500	0.0138	0.0130	0.7912	0.1995
Promedio (n = 25)		**0.8640**	**0.8677**	**0.1166**	**0.1197**	**0.6610**	**0.2270**
n = 30	PromWu1	0.9736	0.9664	0.0156	0.0083	0.8969	0.0952
	PromWu2	0.9484	0.9472	0.0126	0.0114	0.9208	0.0707
	PromWu3	0.9225	0.9018	0.0791	0.0580	0.1206	0.8214
	PromLiu1	0.4058	0.3853	0.8569	0.8504	0.1276	0.0244
	PromLiu2	0.9948	0.9916	0.0044	0.0012	0.7845	0.2147
	PromRobusto	0.8336	0.8408	0.0479	0.0561	0.7313	0.2208
	PromResBal	0.8368	0.8428	0.0511	0.0578	0.7317	0.2171
	PromParBal	0.9416	0.9460	0.0131	0.0178	0.7864	0.2021
Promedio (n = 30)		**0.8571**	**0.8527**	**0.1351**	**0.1326**	**0.6375**	**0.2333**
n = 35	PromWu1	0.9724	0.9732	0.0111	0.0119	0.8841	0.1072
	PromWu2	0.9516	0.9440	0.0177	0.0097	0.9199	0.0712
	PromWu3	0.9011	0.8873	0.0918	0.0776	0.1517	0.7707
	PromLiu1	0.3469	0.3161	0.9293	0.9239	0.0663	0.0116
	PromLiu2	0.9952	0.9936	0.0028	0.0012	0.7217	0.2775
	PromRobusto	0.8300	0.8368	0.0478	0.0554	0.7265	0.2285
	PromResBal	0.8288	0.8328	0.0541	0.0586	0.7371	0.2115
	PromParBal	0.9416	0.9456	0.0124	0.0165	0.7748	0.2145
Promedio (n = 35)		**0.8459**	**0.8412**	**0.1459**	**0.1444**	**0.6228**	**0.2366**
PromGral	Wu1	0.9642	0.9665	0.0124	0.0147	0.8945	0.0959
	Wu2	0.9368	0.9324	0.0208	0.0162	**0.9026**	0.0842
	Wu3	0.9389	0.9187	0.0634	0.0428	0.1425	**0.8147**
	Liu1	0.5127	0.5268	**0.6381**	**0.6549**	0.3482	0.0175
	Liu2	**0.9893**	**0.9870**	0.0065	0.0042	0.8423	0.1545
	Robusto	0.8012	0.8228	0.0448	0.0704	0.7194	0.2365
	ResBal	0.8022	0.8225	0.0458	0.0698	0.7246	0.2303
	ParBal	0.9378	0.9459	0.0122	0.0207	0.7836	0.2055
	Intervalo	**0.8604**	**0.8653**	**0.1055**	**0.1117**	**0.6697**	**0.2299**

Figura 7: Eficiencia promedio de los intervalos Bootstrap por tamaño de muestra y esquema de remuestreo para el caso EP-NNVC.

5.2.1. Eficiencia de los esquemas para el caso EP-NNVC

Con base en al menos 95 % de eficiencia promedio y sin importar el ICB (Figura 8) : con $n = 10$ el mejor fue el esquema Liu2 (0.9651), seguido por Wu1 (0.9340) y con los tamaños de muestra 15, 20, 25, 30 y 35 los mejores esquemas son Liu2 y Wu1.

Sin considerar el tamaño de la muestra e ICB, para el caso EP-NNVC los mejores promedio generales (Figura 8) en eficiencia son los esquema Liu2 y Wu1.

Tamaño de Muestra	Replica	Wu1	Wu2	Wu3	Liu1	Liu2	Robusto	ResBal	ParBal
n = 10	1	0.9360	0.8858	0.9299	0.4500	0.9640	0.7020	0.7020	0.9240
	2	0.9360	0.8700	0.9320	0.4500	0.9660	0.6940	0.6940	0.9060
	3	0.9360	0.8720	0.9259	0.4420	0.9640	0.7160	0.7140	0.9200
	4	0.9160	0.8540	0.9336	0.4820	0.9580	0.7340	0.7320	0.8880
	5	0.9460	0.8940	0.9379	0.4820	0.9740	0.6880	0.6960	0.9300
Promedio (n = 10)		**0.9340**	**0.8752**	**0.9318**	**0.4612**	**0.9652**	**0.7068**	**0.7076**	**0.9136**
n = 15	1	0.9460	0.9120	0.9130	0.3800	0.9780	0.7460	0.7500	0.9300
	2	0.9500	0.9160	0.9234	0.3660	0.9740	0.7520	0.7560	0.9200
	3	0.9620	0.9080	0.9111	0.3720	0.9760	0.7500	0.7600	0.9200
	4	0.9440	0.9020	0.9098	0.3680	0.9800	0.7380	0.7460	0.9180
	5	0.9480	0.8940	0.9010	0.3380	0.9860	0.7260	0.7300	0.9120
Promedio (n = 15)		**0.9500**	**0.9064**	**0.9117**	**0.3648**	**0.9788**	**0.7424**	**0.7484**	**0.9200**
n = 20	1	0.9440	0.8960	0.8853	0.2320	0.9860	0.7640	0.7760	0.9220
	2	0.9380	0.8980	0.8992	0.2320	0.9700	0.7760	0.7720	0.9140
	3	0.9640	0.9280	0.8690	0.2400	0.9900	0.7700	0.7620	0.9520
	4	0.9560	0.9300	0.8972	0.2580	0.9780	0.7540	0.7480	0.9200
	5	0.9500	0.9260	0.9069	0.2064	0.9880	0.8160	0.8080	0.9300
Promedio (n = 20)		**0.9504**	**0.9156**	**0.8915**	**0.2337**	**0.9824**	**0.7760**	**0.7732**	**0.9276**
n = 25	1	0.9660	0.9400	0.8770	0.1380	0.9860	0.8000	0.8020	0.9360
	2	0.9640	0.9280	0.8934	0.1040	0.9860	0.7940	0.7940	0.9440
	3	0.9560	0.9340	0.8697	0.1102	0.9900	0.7640	0.7800	0.9320
	4	0.9600	0.9440	0.8727	0.1162	0.9880	0.7920	0.7900	0.9480
	5	0.9500	0.9340	0.8682	0.1667	0.9900	0.7580	0.7560	0.9280
Promedio (n = 25)		**0.9592**	**0.9360**	**0.8762**	**0.1270**	**0.9880**	**0.7816**	**0.7844**	**0.9376**
n = 30	1	0.9780	0.9540	0.8722	0.0700	0.9980	0.8080	0.8100	0.9420
	2	0.9560	0.9380	0.8499	0.0561	0.9880	0.7900	0.7900	0.9300
	3	0.9500	0.9300	0.8551	0.0520	0.9880	0.7980	0.7960	0.9260
	4	0.9520	0.9240	0.8435	0.0565	0.9880	0.7820	0.7840	0.9200
	5	0.9560	0.9360	0.8269	0.0541	0.9900	0.7900	0.7900	0.9280
Promedio (n = 30)		**0.9584**	**0.9364**	**0.8495**	**0.0577**	**0.9904**	**0.7936**	**0.7940**	**0.9292**
n = 35	1	0.9600	0.9280	0.8049	0.0243	0.9920	0.7780	0.7620	0.9380
	2	0.9600	0.9200	0.8191	0.0245	0.9920	0.7720	0.7740	0.9180
	3	0.9580	0.9360	0.8367	0.0162	0.9900	0.8060	0.8000	0.9420
	4	0.9700	0.9520	0.8371	0.0388	0.9960	0.8160	0.8060	0.9360
	5	0.9600	0.9380	0.7939	0.0181	0.9920	0.7800	0.7780	0.9160
Promedio (n = 35)		**0.9616**	**0.9348**	**0.8183**	**0.0244**	**0.9924**	**0.7904**	**0.7840**	**0.9300**
PromGralEsq		**0.9523**	**0.9174**	**0.8798**	**0.2115**	**0.9829**	**0.7651**	**0.7653**	**0.9263**

Figura 8: Eficiencia promedio de los esquemas por tamaño de muestra para el caso EP-NNVC.

5.3. Eficiencia de los intervalos Bootstrap para el caso EP-NVD

Con base en el promedio general (Figura 9) para: Eficiencia del ICB Percentil (Efic Int Boot Perc) y Eficiencia en ICB BCa (Efic Int Boot Bca) el mejor esquema resultó Liu2, 0.9775 y 0.9760 respectivamente; Eficiencia del ICB Percentil cuando solo él contiene a la R^2 y Eficiencia del ICB BCa cuando solo él contiene a la R^2 el mejor esquema es Liu1, 0.5042 y 0.4677 respectivamente; la Eficiencia de ICB Percentil cuando gana en el empate a ICB BCa (Efic Boot Perc gana empate), el mejor esquema es Pareado Balanceado (ParBal) con 0.8230 y la Eficiencia ICB BCa cuando gana el empate al ICB Percentil, el mejor esquema es Wu3 (0.5159).

Sin considerar el tamaño de la muestra y esquema, para el caso EP-NVD los ICB mejores en promedio general (Figura 9) son: Eficiencia del ICB BCa (Efic Int Boot Bca) con 0.8299 ante la Eficiencia de 0.8279 en ICB Percentil (Efic Int Boot Perc); la Eficiencia del ICB Percentil cuando solo el contiene a la R^2 (0.1049) y la Eficiencia de ICB Percentil cuando gana en el empate al ICB Bca con 0.6110. Por lo que, el mejor es ICB Percentil.

Tamaño de Muestra	Esquema	Efic Int Boot Perc	Efic Int Boot Bca	Efic Int Boot Perc cuando solo el lo contiene	Efic Int Boot Bca cuando solo el contiene	Efic Boot Perc gana empate	Efic Boot Bca gana empate
n = 10	PromWu1	0.9140	0.9200	0.0337	0.0400	0.6986	0.2703
	PromWu2	0.8400	0.8488	0.0489	0.0588	0.6689	0.2822
	PromWu3	0.8137	0.7543	0.1457	0.0785	0.4139	0.5077
	PromLiu1	0.6964	0.6972	0.3200	0.3209	0.3497	0.3393
	PromLiu2	0.9532	0.9492	0.0323	0.0282	0.7086	0.2653
	PromRobusto	0.7088	0.7028	0.1208	0.1131	0.6100	0.2814
	PromResBal	0.7508	0.7488	0.0950	0.0924	0.4864	0.4264
	PromParBal	0.8612	0.9224	0.0255	0.0901	0.8706	0.1038
Promedio (n = 10)		**0.8173**	**0.8179**	**0.1028**	**0.1027**	**0.6008**	**0.3095**
n = 15	PromWu1	0.9308	0.9452	0.0198	0.0348	0.7243	0.2559
	PromWu2	0.8744	0.8868	0.0325	0.0460	0.7150	0.2534
	PromWu3	0.8221	0.7995	0.1225	0.0978	0.3819	0.5212
	PromLiu1	0.6092	0.6212	0.4558	0.4660	0.2365	0.3095
	PromLiu2	0.9748	0.9728	0.0147	0.0128	0.7100	0.2801
	PromRobusto	0.7344	0.7460	0.0913	0.1057	0.6826	0.2318
	PromResBal	0.7648	0.7820	0.0700	0.0905	0.5377	0.3923
	PromParBal	0.8684	0.9152	0.0189	0.0691	0.8398	0.1412
Promedio (n = 15)		**0.8224**	**0.8336**	**0.1032**	**0.1153**	**0.6035**	**0.2982**
n = 20	PromWu1	0.9480	0.9548	0.0165	0.0235	0.7376	0.2459
	PromWu2	0.9028	0.9148	0.0248	0.0376	0.7195	0.2557
	PromWu3	0.8511	0.8411	0.0997	0.0890	0.4096	0.5075
	PromLiu1	0.5424	0.5380	0.5670	0.5618	0.2634	0.1852
	PromLiu2	0.9804	0.9792	0.0122	0.0110	0.6839	0.3087
	PromRobusto	0.7660	0.7832	0.0673	0.0879	0.7230	0.2116
	PromResBal	0.7844	0.8016	0.0566	0.0768	0.5947	0.3486
	PromParBal	0.8832	0.9120	0.0213	0.0522	0.8155	0.1632
Promedio (n = 20)		**0.8323**	**0.8406**	**0.1082**	**0.1175**	**0.6184**	**0.2783**
n = 25	PromWu1	0.9484	0.9524	0.0194	0.0235	0.7364	0.2471
	PromWu2	0.9108	0.9212	0.0238	0.0348	0.7171	0.2591
	PromWu3	0.8396	0.8236	0.1175	0.1005	0.3849	0.5177
	PromLiu1	0.4844	0.4464	0.5903	0.5553	0.3103	0.1343
	PromLiu2	0.9812	0.9816	0.0094	0.0098	0.6175	0.3756
	PromRobusto	0.7632	0.7816	0.0703	0.0921	0.7196	0.2101
	PromResBal	0.7832	0.8064	0.0541	0.0813	0.5806	0.3653
	PromParBal	0.8936	0.9112	0.0125	0.0316	0.8142	0.1732
Promedio (n = 25)		**0.8256**	**0.8280**	**0.1122**	**0.1161**	**0.6101**	**0.2853**
n = 30	PromWu1	0.9588	0.9600	0.0142	0.0154	0.7333	0.2562
	PromWu2	0.9292	0.9332	0.0159	0.0202	0.7340	0.2530
	PromWu3	0.8571	0.8459	0.1086	0.0968	0.3940	0.5096
	PromLiu1	0.4465	0.3776	0.5856	0.5096	0.3973	0.0932
	PromLiu2	0.9860	0.9836	0.0061	0.0037	0.5705	0.4271
	PromRobusto	0.7880	0.8036	0.0644	0.0824	0.7269	0.2110
	PromResBal	0.8096	0.8248	0.0480	0.0654	0.5853	0.3682
	PromParBal	0.9072	0.9148	0.0185	0.0267	0.7907	0.1916
Promedio (n = 30)		**0.8353**	**0.8304**	**0.1077**	**0.1025**	**0.6165**	**0.2887**
n = 35	PromWu1	0.9588	0.9604	0.0126	0.0142	0.7279	0.2616
	PromWu2	0.9368	0.9400	0.0162	0.0196	0.7134	0.2737
	PromWu3	0.8637	0.8541	0.1048	0.0947	0.3744	0.5322
	PromLiu1	0.4032	0.3276	0.5066	0.3928	0.5162	0.0910
	PromLiu2	0.9896	0.9896	0.0040	0.0040	0.4870	0.5105
	PromRobusto	0.7976	0.8048	0.0629	0.0714	0.7270	0.2111
	PromResBal	0.8204	0.8308	0.0433	0.0554	0.5783	0.3788
	PromParBal	0.9088	0.9224	0.0127	0.0273	0.8073	0.1799
Promedio (n = 35)		**0.8349**	**0.8287**	**0.0954**	**0.0849**	**0.6164**	**0.3049**
PromGral	Wu1	0.9431	0.9488	0.0194	0.0252	0.7264	0.2562
	Wu2	0.8990	0.9075	0.0270	0.0362	0.7113	0.2629
	Wu3	0.8412	0.8197	0.1165	0.0929	0.3931	**0.5159**
	Liu1	0.5304	0.5013	**0.5042**	**0.4677**	0.3456	0.1921
	Liu2	**0.9775**	**0.9760**	0.0131	0.0116	0.6296	0.3612
	Robusto	0.7597	0.7703	0.0795	0.0921	0.6982	0.2262
	ResBal	0.7855	0.7991	0.0612	0.0770	0.5605	0.3799
	ParBal	0.8871	0.9163	0.0183	0.0495	**0.8230**	0.1588
	Intervalo	**0.8279**	**0.8299**	**0.1049**	**0.1065**	**0.6110**	**0.2942**

Figura 9: Eficiencia promedio de los intervalos Bootstrap por tamaño de muestra y esquema de remuestreo para el caso EP-NVD.

5.3.1. Eficiencia de los esquemas para el caso EP-NVD

Con base en al menos 95 % de eficiencia promedio y sin importar el ICB (Figura 10): con $n = 10$ ningún esquema cumplió la condición, sin embargo con Liu2 se obtuvo 0.9224 y con los tamaños de muestra 15, 20, 25, 30 y 35 el mejor fue el esquema Lui2.

Sin considerar el tamaño de la muestra, para el caso EP-NVD el mejor promedio general (Figura 10) en eficiencia por esquema es Liu2 (0.9648).

Tamaño de Muestra	Replica	Wu1	Wu2	Wu3	Liu1	Liu2	Robusto	ResBal	ParBal
n = 10	1	0.8820	0.8040	0.6775	0.4860	0.9180	0.6300	0.6800	0.8500
	2	0.8700	0.7746	0.6850	0.4860	0.9240	0.6100	0.6740	0.8320
	3	0.9020	0.8246	0.7398	0.4960	0.9360	0.6500	0.7200	0.8220
	4	0.8720	0.7807	0.6646	0.4440	0.9080	0.6080	0.6580	0.8400
	5	0.8900	0.8109	0.7096	0.4560	0.9260	0.6180	0.6660	0.8520
Promedio (n = 10)		**0.8832**	**0.7990**	**0.6953**	**0.4736**	**0.9224**	**0.6232**	**0.6796**	**0.8392**
n = 15	1	0.9300	0.8680	0.7238	0.3220	0.9760	0.6380	0.6880	0.8780
	2	0.9300	0.8460	0.7192	0.3140	0.9660	0.6660	0.7240	0.8460
	3	0.9140	0.8380	0.7379	0.3500	0.9500	0.6760	0.7080	0.8660
	4	0.8920	0.8420	0.7177	0.3380	0.9620	0.6680	0.7160	0.8220
	5	0.8960	0.8360	0.7077	0.3340	0.9480	0.6880	0.7200	0.8480
Promedio (n = 15)		**0.9124**	**0.8460**	**0.7213**	**0.3316**	**0.9604**	**0.6672**	**0.7112**	**0.8520**
n = 20	1	0.9300	0.8680	0.7490	0.2320	0.9640	0.6840	0.7100	0.8540
	2	0.9400	0.8920	0.7677	0.2100	0.9680	0.7060	0.7320	0.8780
	3	0.9280	0.8820	0.7485	0.2240	0.9720	0.7040	0.7300	0.8500
	4	0.9540	0.8960	0.8052	0.2660	0.9800	0.7400	0.7620	0.8940
	5	0.9100	0.8640	0.7610	0.2440	0.9580	0.7380	0.7660	0.8460
Promedio (n = 20)		**0.9324**	**0.8804**	**0.7663**	**0.2352**	**0.9684**	**0.7144**	**0.7400**	**0.8644**
n = 25	1	0.9400	0.9080	0.7490	0.1880	0.9780	0.7200	0.7520	0.8840
	2	0.9340	0.8940	0.7425	0.2000	0.9720	0.7000	0.7380	0.8920
	3	0.9120	0.8520	0.7395	0.1940	0.9720	0.6840	0.7160	0.8600
	4	0.9360	0.8880	0.7359	0.1960	0.9740	0.7160	0.7500	0.8860
	5	0.9280	0.9040	0.7369	0.2140	0.9640	0.7280	0.7480	0.8900
Promedio (n = 25)		**0.9300**	**0.8892**	**0.7408**	**0.1984**	**0.9720**	**0.7096**	**0.7408**	**0.8824**
n = 30	1	0.9340	0.9160	0.7756	0.1888	0.9800	0.7340	0.7720	0.8860
	2	0.9500	0.9200	0.7390	0.1824	0.9800	0.7580	0.7740	0.8920
	3	0.9480	0.9158	0.7823	0.1920	0.9740	0.7260	0.7600	0.8980
	4	0.9380	0.8920	0.7780	0.1623	0.9780	0.7240	0.7560	0.8740
	5	0.9560	0.9280	0.7455	0.2004	0.9880	0.7440	0.7920	0.9020
Promedio (n = 30)		**0.9452**	**0.9144**	**0.7641**	**0.1852**	**0.9800**	**0.7372**	**0.7708**	**0.8904**
n = 35	1	0.9260	0.9080	0.7590	0.2088	0.9740	0.7520	0.7820	0.8900
	2	0.9540	0.9360	0.7903	0.1710	0.9900	0.7840	0.8060	0.9120
	3	0.9360	0.9020	0.7575	0.2044	0.9860	0.6940	0.7540	0.8800
	4	0.9700	0.9460	0.7960	0.2166	0.9900	0.7460	0.7940	0.9100
	5	0.9480	0.9160	0.7635	0.1932	0.9880	0.7620	0.7880	0.8940
Promedio (n = 35)		**0.9468**	**0.9216**	**0.7733**	**0.1988**	**0.9856**	**0.7476**	**0.7848**	**0.8972**
PromGralEsq		**0.9250**	**0.8751**	**0.7435**	**0.2705**	**0.9648**	**0.6999**	**0.7379**	**0.8709**

Figura 10: Eficiencia promedio de los esquemas por tamaño de muestra para el caso EP-NVD.

5.4. Eficiencia de los intervalos Bootstrap para el caso EP-NNVD

Con base en el promedio general (Figura 11) para: Eficiencia del ICB Percentil (Efic Int Boot Perc) el mejor esquema resultó Liu2 (0.9171); Eficiencia en ICB BCa (Efic Int Boot Bca) el mejor esquema resultó Pareado Balanceado (ParBal) con 0.9162; Eficiencia del ICB Percentil cuando solo el contiene a la R^2 y Eficiencia del ICB BCa cuando solo él contiene a la R^2 el mejor esquema resultó Wu3, 0.3156 y 0.2458 respectivamente; la Eficiencia de ICB Percentil cuando gana en el empate a ICB BCa (Efic Boot Perc gana empate), el mejor esquema es ParBal (0.7930) y la Eficiencia ICB BCa cuando gana el empate al ICB Percentil (Efic Boot Bca gana empate), el mejor esquema es de Residuales Balanceados (ResBal) con 0.8630.

Sin considerar el tamaño de la muestra y esquema, para el caso EP-NNVD los ICB mejores en promedio general (Figura 11) son: Eficiencia del ICB Percentil (Efic Int Boot Perc) con 0.8186 ante 0.8009 de la Eficiencia en ICB BCa (Efic Int Boot Bca); la Eficiencia del ICB Percentil cuando solo él contiene a la R^2 (0.1119) y la Eficiencia de ICB BCa cuando gana en el empate al ICB Perc (Efic Boot Bca gana empate) con 0.6286.Por lo que, el mejor es ICB BCa.

Lo de mejor el ICB BCa, es que sus eficiencias son cercanas pero ICB BCa gana en el empate.

Tamaño de Muestra	Esquema	Efic Int Boot Perc	Efic Int Boot Bca	Efic Int Boot Perc cuando solo el lo contiene	Efic Int Boot Bca cuando solo el contiene	Efic Boot Perc gana empate	Efic Boot Bca gana empate
n = 10	PromWu1	0.8924	0.8780	0.0542	0.0386	0.3427	0.6187
	PromWu2	0.8028	0.7953	0.0308	0.0216	0.4738	0.5075
	PromWu3	0.7286	0.6324	0.2820	0.1730	0.0651	0.7619
	PromLiu1	0.7312	0.6720	0.2945	0.2325	0.0809	0.6866
	PromLiu2	0.9340	0.9184	0.0467	0.0305	0.3177	0.6518
	PromRobusto	0.6916	0.6704	0.1225	0.0951	0.4278	0.4808
	PromResBal	0.7768	0.7224	0.1212	0.0554	0.0560	0.8886
	PromParBal	0.8512	0.9180	0.0150	0.0867	0.7761	0.2089
Promedio (n = 10)		**0.8011**	**0.7759**	**0.1209**	**0.0917**	**0.3175**	**0.6006**
n = 15	PromWu1	0.8928	0.8700	0.0931	0.0694	0.2460	0.6846
	PromWu2	0.8279	0.8121	0.0677	0.0495	0.2796	0.6727
	PromWu3	0.6791	0.6107	0.2959	0.2172	0.0309	0.7519
	PromLiu1	0.7916	0.7500	0.1941	0.1492	0.0368	0.8140
	PromLiu2	0.9272	0.9000	0.0846	0.0570	0.1844	0.7586
	PromRobusto	0.7760	0.7720	0.0746	0.0699	0.4416	0.4943
	PromResBal	0.8420	0.8016	0.0826	0.0365	0.0608	0.9027
	PromParBal	0.8656	0.9124	0.0212	0.0715	0.7792	0.1995
Promedio (n = 15)		**0.8253**	**0.8036**	**0.1142**	**0.0900**	**0.2574**	**0.6598**
n = 20	PromWu1	0.8728	0.8619	0.1105	0.0994	0.2305	0.6705
	PromWu2	0.8516	0.8400	0.0751	0.0623	0.2109	0.7273
	PromWu3	0.6218	0.5538	0.3354	0.2536	0.0675	0.6788
	PromLiu1	0.7935	0.7587	0.1612	0.1226	0.1045	0.7729
	PromLiu2	0.9112	0.8884	0.0992	0.0761	0.1592	0.7646
	PromRobusto	0.8056	0.8080	0.0671	0.0699	0.4585	0.4753
	PromResBal	0.8475	0.8123	0.0780	0.0379	0.0723	0.8898
	PromParBal	0.8896	0.9160	0.0212	0.0494	0.7949	0.1839
Promedio (n = 20)		**0.8242**	**0.8049**	**0.1185**	**0.0964**	**0.2623**	**0.6454**
n = 25	PromWu1	0.8679	0.8623	0.1046	0.0988	0.2341	0.6729
	PromWu2	0.8771	0.8707	0.0687	0.0618	0.2059	0.7375
	PromWu3	0.5778	0.5328	0.3227	0.2659	0.0756	0.6585
	PromLiu1	0.7853	0.7420	0.1368	0.0864	0.1863	0.7273
	PromLiu2	0.9092	0.8940	0.0972	0.0818	0.1325	0.7881
	PromRobusto	0.8240	0.8308	0.0613	0.0691	0.4813	0.4582
	PromResBal	0.8390	0.8182	0.0693	0.0455	0.1055	0.8490
	PromParBal	0.9048	0.9128	0.0198	0.0285	0.8004	0.1832
Promedio (n = 25)		**0.8231**	**0.8079**	**0.1100**	**0.0922**	**0.2777**	**0.6343**
n = 30	PromWu1	0.8779	0.8667	0.1023	0.0907	0.2500	0.6593
	PromWu2	0.8747	0.8778	0.0585	0.0620	0.2035	0.7457
	PromWu3	0.5538	0.5296	0.3230	0.2917	0.0850	0.6233
	PromLiu1	0.7630	0.7283	0.1108	0.0686	0.2686	0.6628
	PromLiu2	0.9239	0.9011	0.0859	0.0628	0.1142	0.8231
	PromRobusto	0.8168	0.8284	0.0588	0.0719	0.5220	0.4192
	PromResBal	0.8291	0.8191	0.0574	0.0458	0.1136	0.8406
	PromParBal	0.9168	0.9216	0.0183	0.0234	0.8142	0.1692
Promedio (n = 30)		**0.8195**	**0.8091**	**0.1019**	**0.0896**	**0.2964**	**0.6179**
n = 35	PromWu1	0.8628	0.8600	0.1123	0.1094	0.2463	0.6468
	PromWu2	0.9004	0.8880	0.0653	0.0522	0.2055	0.7422
	PromWu3	0.5556	0.5090	0.3349	0.2731	0.1002	0.6266
	PromLiu1	0.7599	0.7178	0.0957	0.0425	0.2847	0.6728
	PromLiu2	0.8972	0.8852	0.1036	0.0914	0.0987	0.8099
	PromRobusto	0.8312	0.8372	0.0547	0.0616	0.5329	0.4155
	PromResBal	0.8293	0.8205	0.0624	0.0524	0.1410	0.8076
	PromParBal	0.9092	0.9164	0.0172	0.0248	0.7932	0.1896
Promedio (n = 35)		**0.8182**	**0.8043**	**0.1057**	**0.0885**	**0.3003**	**0.6139**
PromGral	Wu1	0.8778	0.8665	0.0962	0.0844	0.2583	0.6588
	Wu2	0.8557	0.8473	0.0610	0.0516	0.2632	0.6888
	Wu3	0.6195	0.5614	**0.3156**	**0.2458**	0.0707	0.6835
	Liu1	0.7708	0.7281	0.1655	0.1170	0.1603	0.7227
	Liu2	**0.9171**	0.8978	0.0862	0.0666	0.1678	0.7660
	Robusto	0.7909	0.7911	0.0732	0.0729	0.4774	0.4572
	ResBal	0.8273	0.7990	0.0785	0.0456	0.0915	**0.8630**
	ParBal	0.8895	**0.9162**	0.0188	0.0474	**0.7930**	0.1891
	Intervalo	**0.8186**	**0.8009**	**0.1119**	**0.0914**	**0.2853**	**0.6286**

Figura 11: Eficiencia promedio de los intervalos Bootstrap por tamaño de muestra y esquema de remuestreo para el caso EP-NNVD.

5.4.1. Eficiencia de los esquemas para el caso EP-NNVD

Con base en al menos 95 % de eficiencia promedio y sin importar el ICB (Figura 12): sólo con el $n = 30$ se cumple la condición bajo el esquema Pareado Balanceado (ParBal) con 0.9. Ahora sin considerar el criterio anterior, el mejor esquema para: n=10 es Liu2 (0.8904) y Wu1(0.8440), n=15 es Liu2 (0.8488) y ParBal (0.8472), n=20 es ParBal (0.8708) y Liu2 (0.8207), n=25 es ParBal (0.8868) y Liu2 (0.8207), n=30 es ParBal (0.9) y Liu2 (0.8447) y en n=35 es ParBal (0.8936) y Wu2 (0.8415).

Sin considerar el tamaño de la muestra, para el caso EP-NNVD los mejores promedios generales (Figura 12) en eficiencia de esquema son ParBal (0.8728) y Liu2 (0.8383).

Tamaño de Muestra	Replica	Wu1	Wu2	Wu3	Liu1	Liu2	Robusto	ResBal	ParBal
n = 10	1	0.8600	0.8061	0.5322	0.5560	0.8938	0.6340	0.7180	0.8360
	2	0.8240	0.7521	0.5249	0.5460	0.8880	0.5740	0.6700	0.8120
	3	0.8360	0.7721	0.4843	0.4800	0.8760	0.5840	0.6740	0.8400
	4	0.8560	0.7914	0.5644	0.4760	0.9060	0.6240	0.6780	0.8440
	5	0.8440	0.7686	0.5105	0.5220	0.8880	0.6180	0.6720	0.8600
Promedio (n = 10)		**0.8440**	**0.7781**	**0.5233**	**0.5160**	**0.8904**	**0.6068**	**0.6824**	**0.8384**
n = 15	1	0.7980	0.7816	0.4599	0.6180	0.8200	0.7400	0.7580	0.8560
	2	0.8260	0.7760	0.5000	0.6600	0.8680	0.7220	0.7980	0.8660
	3	0.8100	0.7612	0.4798	0.6420	0.8540	0.7000	0.7800	0.8340
	4	0.8040	0.7692	0.4504	0.6380	0.8620	0.7180	0.7600	0.8460
	5	0.8100	0.7708	0.5000	0.6320	0.8400	0.7100	0.7660	0.8340
Promedio (n = 15)		**0.8096**	**0.7718**	**0.4780**	**0.6380**	**0.8488**	**0.7180**	**0.7724**	**0.8472**
n = 20	1	0.7615	0.8149	0.4110	0.6540	0.8357	0.7580	0.7675	0.8700
	2	0.7480	0.7762	0.4124	0.7140	0.8020	0.7540	0.7840	0.8600
	3	0.8020	0.8052	0.4667	0.6560	0.8280	0.7780	0.7940	0.9000
	4	0.7820	0.7586	0.3830	0.6300	0.8200	0.7200	0.7660	0.8640
	5	0.7880	0.7836	0.3958	0.6754	0.8180	0.7480	0.7960	0.8600
Promedio (n = 20)		**0.7763**	**0.7877**	**0.4138**	**0.6659**	**0.8207**	**0.7516**	**0.7815**	**0.8708**
n = 25	1	0.7760	0.7952	0.3609	0.6860	0.8176	0.7640	0.7680	0.8780
	2	0.7675	0.8012	0.3881	0.6573	0.8260	0.7280	0.7535	0.8780
	3	0.7720	0.8270	0.4072	0.6827	0.8040	0.7820	0.7936	0.8800
	4	0.7780	0.8133	0.4043	0.6720	0.8260	0.7840	0.7776	0.8960
	5	0.7920	0.8477	0.3958	0.6914	0.8300	0.8100	0.8120	0.9020
Promedio (n = 25)		**0.7771**	**0.8169**	**0.3912**	**0.6779**	**0.8207**	**0.7736**	**0.7809**	**0.8868**
n = 30	1	0.7760	0.8156	0.3761	0.6680	0.8317	0.7820	0.7860	0.9020
	2	0.8360	0.8380	0.4097	0.6600	0.8820	0.7720	0.7880	0.9100
	3	0.7715	0.8153	0.3533	0.6821	0.8277	0.7760	0.7715	0.9120
	4	0.7920	0.8140	0.3700	0.6856	0.8460	0.7660	0.7840	0.8960
	5	0.7660	0.8340	0.3665	0.6962	0.8360	0.7480	0.7780	0.8800
Promedio (n = 30)		**0.7883**	**0.8234**	**0.3751**	**0.6784**	**0.8447**	**0.7688**	**0.7815**	**0.9000**
n = 35	1	0.7880	0.8557	0.3966	0.6700	0.8300	0.8080	0.7960	0.9000
	2	0.7320	0.8320	0.3504	0.6975	0.7840	0.7680	0.7695	0.8740
	3	0.7700	0.8460	0.3745	0.6965	0.8120	0.7820	0.7972	0.9020
	4	0.7816	0.8380	0.3745	0.7026	0.8156	0.7940	0.7916	0.9080
	5	0.7580	0.8360	0.3524	0.6694	0.7800	0.7760	0.7340	0.8840
Promedio (n = 35)		**0.7659**	**0.8415**	**0.3697**	**0.6872**	**0.8043**	**0.7856**	**0.7777**	**0.8936**
PromGralEsq		**0.7935**	**0.8032**	**0.4252**	**0.6439**	**0.8383**	**0.7341**	**0.7627**	**0.8728**

Figura 12: Eficiencia promedio de los esquemas por tamaño de muestra para el caso EP-NNVD.

5.5. Eficiencia promedio por supuestos para el caso EP

Dados los modelos de tipo EP para los casos: NVC, NNVC y NVD, con base en los promedios generales sin importar el tamaño de muestra (Figura 13), por encima del 95 % se recomienda el uso del esquema Liu2 con el intervalo Percentil; y por encima del 90 % para NNVD de igual forma el esquema Liu2 o ParBa pero con el intervalo BCa, para la evaluación de la precisión.

Supuestos	Esquema	Efic Int Boot Perc	Efic Int Boot Bca	Efic Int Boot Perc cuando solo el lo contiene	Efic Int Boot Bca cuando solo el contiene	Efic Boot Perc gana empate	Efic Boot Bca gana empate
NVC	Wu1	0.9136	0.9216	0.0448	0.0536	**0.8989**	0.0582
	Wu2	0.8613	0.8696	0.0591	0.0694	0.8792	0.0638
	Wu3	0.8289	0.8044	0.1321	0.1086	0.4641	**0.4304**
	Liu1	0.4836	0.4477	0.7354	0.7366	0.2304	0.0402
	Liu2	**0.9569**	**0.9586**	0.0174	0.0193	0.8508	0.1344
	Robusto	0.7557	0.7716	0.0771	0.0965	0.7897	0.1345
	ResBal	0.7596	0.7770	0.0749	0.0963	0.7961	0.1295
	ParBal	0.9132	0.9188	0.0259	0.0321	0.7286	0.2482
	Intervalo	**0.8091**	**0.8087**	**0.1458**	**0.1516**	**0.7047**	**0.1549**
NNVC	Wu1	0.9642	0.9665	0.0124	0.0147	0.8945	0.0959
	Wu2	0.9368	0.9324	0.0208	0.0162	**0.9026**	0.0842
	Wu3	0.9389	0.9187	0.0634	0.0428	0.1425	**0.8147**
	Liu1	0.5127	0.5268	0.6381	0.6549	0.3482	0.0175
	Liu2	**0.9893**	**0.9870**	0.0065	0.0042	0.8423	0.1545
	Robusto	0.8012	0.8228	0.0448	0.0704	0.7194	0.2365
	ResBal	0.8022	0.8225	0.0458	0.0698	0.7246	0.2303
	ParBal	0.9378	0.9459	0.0122	0.0207	0.7836	0.2055
	Intervalo	**0.8604**	**0.8653**	**0.1055**	**0.1117**	**0.6697**	**0.2299**
NVD	Wu1	0.9431	0.9488	0.0194	0.0252	0.7264	0.2562
	Wu2	0.8990	0.9075	0.0270	0.0362	0.7113	0.2629
	Wu3	0.8412	0.8197	0.1165	0.0929	0.3931	**0.5159**
	Liu1	0.5304	0.5013	0.5042	0.4677	0.3456	0.1921
	Liu2	**0.9775**	**0.9760**	0.0131	0.0116	0.6296	0.3612
	Robusto	0.7597	0.7703	0.0795	0.0921	0.6982	0.2262
	ResBal	0.7855	0.7991	0.0612	0.0770	0.5605	0.3799
	ParBal	0.8871	0.9163	0.0183	0.0495	**0.8230**	0.1588
	Intervalo	**0.8279**	**0.8299**	**0.1049**	**0.1065**	**0.6110**	**0.2942**
NNVD	Wu1	0.8778	0.8665	0.0962	0.0844	0.2583	0.6588
	Wu2	0.8557	0.8473	0.0610	0.0516	0.2632	0.6888
	Wu3	0.6195	0.5614	0.3156	0.2458	0.0707	0.6835
	Liu1	0.7708	0.7281	0.1655	0.1170	0.1603	0.7227
	Liu2	**0.9171**	0.8978	0.0862	0.0666	0.1678	0.7660
	Robusto	0.7909	0.7911	0.0732	0.0729	0.4774	0.4572
	ResBal	0.8273	0.7990	0.0785	0.0456	0.0915	**0.8630**
	ParBal	0.8895	**0.9162**	0.0188	0.0474	**0.7930**	0.1891
	Intervalo	**0.8186**	**0.8009**	**0.1119**	**0.0914**	**0.2853**	**0.6286**

Figura 13: Eficiencia promedio por supuesto para el caso EP.

Análisis descriptivos similares se realizaron para modelos EI (Anexo A). A continuación, y a modo de resumen se presenta el concentrado de eficiencias promedio por cada supuesto sin importar el tamaño de muestra.

5.6. Eficiencia promedio por supuesto para el caso EI

Dados los modelos de tipo EI para los casos: NVC, NNVC, NVD y NNVD con base en los promedios generales (Figura 14), por encima del 95 % se recomienda el uso del esquema Liu 2 con el intervalo BCa, para la evaluación de la precisión.

Supuestos	Esquema	Efic Int Boot Perc	Efic Int Boot Bca	Efic Int Boot Perc cuando solo el lo contiene	Efic Int Boot Bca cuando solo el contiene	Efic Boot Perc gana empate	Efic Boot Bca gana empate
	Wu1	0.9362	0.8872	0.0721	0.0207	0.1365	0.8428
	Wu2	0.9218	0.8766	0.0751	0.0272	0.1105	**0.8626**
	Wu3	0.9086	0.8640	0.0917	0.0445	**0.3019**	0.6539
	Liu1	0.5173	0.4915	0.5864	0.5751	0.0001	0.4383
NVC	Liu2	**0.9627**	**0.9052**	0.0718	0.0130	0.1939	0.7931
	Robusto	0.9071	0.8649	0.0795	0.0345	0.1302	0.8353
	ResBal	0.9073	0.8650	0.0802	0.0350	0.1289	0.8361
	ParBal	0.9351	0.8818	0.0737	0.0180	0.2686	0.7135
	Intervalo	**0.8745**	**0.8295**	**0.1413**	**0.0960**	**0.1588**	**0.7469**
	Wu1	0.9331	0.8855	0.0836	0.0343	0.2994	0.6663
	Wu2	0.9270	0.8731	0.0885	0.0318	0.2265	0.7418
	Wu3	0.9527	0.8495	0.1278	0.0220	**0.6169**	0.3611
	Liu1	0.5418	0.5453	0.5224	0.5304	0.0046	0.4865
NNVC	Liu2	**0.9603**	**0.9005**	0.0788	0.0177	0.3173	0.6650
	Robusto	0.9083	0.8617	0.0996	0.0508	0.2815	0.6683
	ResBal	0.9068	0.8618	0.0992	0.0521	0.2850	0.6632
	ParBal	0.9365	0.8876	0.0741	0.0233	0.2274	**0.7493**
	Intervalo	**0.8833**	**0.8331**	**0.1467**	**0.0953**	**0.2823**	**0.6252**
	Wu1	0.9705	0.8822	0.1046	0.0150	0.2994	0.6855
	Wu2	0.9576	0.8731	0.1040	0.0171	0.2817	**0.7012**
	Wu3	0.9416	0.8560	0.1225	0.0346	0.3226	0.6427
	Liu1	0.6143	0.6213	0.3799	0.3885	0.0924	0.5386
NVD	Liu2	**0.9837**	0.8855	0.1060	0.0070	0.3081	0.6849
	Robusto	0.8934	0.8347	0.1224	0.0605	0.3000	0.6394
	ResBal	0.9163	0.8537	0.1052	0.0394	**0.3364**	0.6242
	ParBal	0.9467	**0.8915**	0.0771	0.0199	0.2960	0.6842
	Intervalo	**0.9030**	**0.8373**	**0.1402**	**0.0728**	**0.2796**	**0.6501**
	Wu1	0.9494	0.7771	0.2048	0.0286	0.4556	0.5158
	Wu2	0.9393	0.8008	0.1685	0.0244	0.4481	0.5275
	Wu3	0.8999	0.6961	0.2807	0.0702	0.5166	0.4132
	Liu1	0.7348	0.6476	0.2624	0.1632	0.4480	0.3887
NNVD	Liu2	**0.9554**	0.7896	0.1964	0.0278	0.4336	0.5385
	Robusto	0.8723	0.7927	0.1791	0.0962	0.3486	0.5552
	ResBal	0.9298	0.7969	0.1799	0.0428	**0.5197**	0.4375
	ParBal	0.9470	**0.8882**	0.0804	0.0195	0.2977	**0.6828**
	Intervalo	**0.9035**	**0.7736**	**0.1940**	**0.0591**	**0.4335**	**0.5074**

Figura 14: Eficiencia promedio por supuesto para el caso EI.

A continuación, los resultados de los análisis estadísticos cuando se tiene cada uno de los casos de supuestos.

5.7. Comparación de la eficiencia del ICB Percentil cuando se tiene NVC (NVC-EficIB1)

Cuando se tiene NVC y se utilizó el ICB Percentil para evaluar la precisión, se obtuvo interacción triple significativa ($TipoMod \times TM \times Esq : F = 11.97, P < 0.0001$; Figura 34 del Anexo B). Con base en una eficiencia promedio de al menos 95 %, el mejor esquema resultó Liu2 sin importar el tamaño de muestra y tipo de modelo (Figura 15).

Condición	Eficiencia Promedio	Grupos Homogéneos
EINVC10Liu2	0.951182	defghijk
EPNVC25Wu1	0.9516	defghijk
EPNVC35Wu1	0.9548	efghijkl
EPNVC10Liu2	0.9576	fghijklm
EINVC15Liu2	0.959163	fghijklm
EINVC30Liu2	0.964	ghijklm
EINVC25Liu2	0.9644	hijklm
EINVC20Liu2	0.9684	ijklm
EINVC35Liu2	0.9688	ijklm
EPNVC15Liu2	0.9752	jklm
EPNVC20Liu2	0.9852	klm
EPNVC30Liu2	0.99	lm
EPNVC25Liu2	0.9916	m
EPNVC35Liu2	0.992	m

Promedios con igual letra no difieren (P>0.05), prueba de Tukey.

Figura 15: Comparación de eficiencias promedio del ICB Percentil cuando se tiene NVC.

5.7.1. Comparación de la eficiencia del ICB BCa cuando se tiene NVC (NVC-EficIB2)

Cuando se tiene NVC y se utilizó el ICB BCa para evaluar la precisión, se obtuvo interacción triple significativa ($TipoMod \times TM \times Esq : F = 3.60, P < 0.0001$; Figura 35 del Anexo B). Con base en una eficiencia promedio de al menos 95 %, el mejor esquema resultó Liu2 sin importar el TM, sin embargo, sólo identifica al tipo de modelo EP *a priori* simulado (Figura 16).

Condición	Eficiencia Promedio	Grupos Homogéneos
EPNVC30Wu1	0.9532	opqrstu
EPNVC25Wu1	0.9544	pqrstu
EPNVC35Wu1	0.9616	qrstu
EPNVC10Liu2	0.9644	rstu
EPNVC15Liu2	0.9736	stu
EPNVC20Liu2	0.9804	tu
EPNVC35Liu2	0.9892	u
EPNVC25Liu2	0.9896	u
EPNVC30Liu2	0.9896	u

Promedios con igual letra no difieren (P>0.05), prueba de Tukey.

Figura 16: Comparación de eficiencias promedio del ICB BCa cuando se tiene NVC.

5.8. Comparación de la eficiencia del ICB Percentil cuando se tiene NNVC (NNVC-EficIB1)

Cuando se tiene NNVC y se utilizó el ICB Percentil para evaluar la precisión, se obtuvo interacción triple significativa ($TipoMod \times TM \times Esq : F = 17.86, P < 0.0001$; Figura 36 del Anexo B). Con base en una eficiencia promedio de al menos 95 %, el mejor esquema resultó Liu2 sin importar el tamaño de muestra y tipo de modelo; con excepción del caso EINNVC10Liu2, sin embargo, su eficiencia promedio es 94.52 % (Figura 17).

Condición	Eficiencia Promedio	Grupos Homogéneos
EPNNVC25ParBal	0.9508	UVWXYZabcde
EPNNVC35Wu2	0.9516	UVWXYZabcde
EPNNVC15Wu3	0.956433	VWXYZabcdef
EPNNVC15Wu1	0.9592	WXYZabcdefg
EINNVC15Liu2	0.959984	XYZabcdefg
EPNNVC20Wu1	0.9624	YZabcdefg
EINNVC20Liu2	0.9632	YZabcdefg
EINNVC35Liu2	0.9636	YZabcdefg
EINNVC15Wu3	0.964785	YZabcdefg
EINNVC25Liu2	0.9648	YZabcdefg
EINNVC30Liu2	0.9648	YZabcdefg
EPNNVC10Wu3	0.970728	Zabcdefg
EPNNVC25Wu1	0.9716	abcdefg
EPNNVC35Wu1	0.9724	abcdefg
EPNNVC30Wu1	0.9736	bcdefg
EPNNVC10Liu2	0.9776	cdefg
EPNNVC15Liu2	0.9856	defg
EINNVC10Wu3	0.986	efg
EPNNVC20Liu2	0.9884	fg
EPNNVC25Liu2	0.994	g
EPNNVC30Liu2	0.9948	g
EPNNVC35Liu2	0.9952	g

Promedios con igual letra no difieren (P>0.05), prueba de Tukey.

Figura 17: Comparación de eficiencias promedio del ICB Percentil cuando se tiene NNVC.

5.8.1. Comparación de la eficiencia del ICB BCa cuando se tiene NNVC (NNVC-EficIB2)

Cuando se tiene NNVC y se utilizó el ICB BCa para evaluar la precisión, se obtuvo interacción triple significativa ($TipoMod \times TM \times Esq : F = 5.95, P < 0.0001$; Figura 37 del Anexo B). Con base en una eficiencia promedio de al menos 95 %, se obtuvo dos mejores esquemas Liu2 y Wu1 sin importar el TM, sin embargo, ambos sólo identifican al tipo de modelo EP *a priori* simulado (Figura 18).

Condición	Eficiencia Promedio	Grupos Homogéneos
EPNNVC25ParBal	0.95	klmnopq
EPNNVC10Wu1	0.9592	lmnopqr
EPNNVC20Wu1	0.964	mnopqr
EPNNVC15Wu1	0.966	nopqr
EPNNVC30Wu1	0.9664	nopqr
EPNNVC25Wu1	0.97	opqr
EPNNVC35Wu1	0.9732	opqr
EPNNVC10Liu2	0.9756	opqr
EPNNVC20Liu2	0.9852	pqr
EPNNVC15Liu2	0.986	qr
EPNNVC25Liu2	0.99	r
EPNNVC30Liu2	0.9916	r
EPNNVC35Liu2	0.9936	r

Promedios con igual letra no difieren (P>0.05), prueba de Tukey.

Figura 18: Comparación de eficiencias promedio del ICB BCa cuando se tiene NNVC.

5.9. Comparación de la eficiencia del ICB Percentil cuando se tiene NVD (NVD-EficIB1)

Cuando se tiene NVD y se utilizó el ICB Percentil para evaluar la precisión, se obtuvo interacción triple significativa ($TipoMod \times TM \times Esq : F = 7.89, P < 0.0001$; Figura 38 del Anexo B). Con base en una eficiencia promedio de al menos 95 %, el mejor esquema resultó Liu2 sin importar el tamaño de muestra y tipo de modelo (Figura 19).

Condición	Eficiencias Promedio	Grupos Homogéneos
EINVD20ParBal	0.9524	efghijklmnop
EINVD25ParBal	0.9528	fghijklmnop
EPNVD10Liu2	0.9532	ghijklmnop
EINVD25Wu2	0.956785	ghijklmnop
EINVD35ParBal	0.9568	ghijklmnop
EINVD30ParBal	0.957179	ghijklmnop
EPNVD30Wu1	0.9588	hijklmnop
EPNVD35Wu1	0.9588	hijklmnop
EINVD15Wu2	0.959167	hijklmnop
EINVD10Wu1	0.962348	ijklmnop
EINVD30Wu2	0.964	ijklmnop
EINVD20Wu2	0.964386	ijklmnop
EINVD35Wu2	0.9648	ijklmnop
EINVD25Wu1	0.96559	ijklmnop
EINVD35Wu1	0.9724	jklmnop
EINVD30Wu1	0.973191	jklmnop
EINVD20Wu1	0.97439	klmnop
EPNVD15Liu2	0.9748	klmnop
EINVD15Wu1	0.975191	klmnop
EINVD10Liu2	0.979969	lmnop
EINVD25Liu2	0.980385	lmnop
EPNVD20Liu2	0.9804	lmnop
EPNVD25Liu2	0.9812	lmnop
EINVD35Liu2	0.982	mnop
EINVD30Liu2	0.9844	nop
EINVD15Liu2	0.985995	op
EPNVD30Liu2	0.986	op
EINVD20Liu2	0.989597	p
EPNVD35Liu2	0.9896	p

Promedios con igual letra no difieren (P>0.05), prueba de Tukey.

Figura 19: Comparación de eficiencias promedio del ICB Percentil cuando se tiene NVD.

5.9.1. Comparación de la eficiencia del ICB BCa cuando se tiene NVD (NVD-EficIB2)

Cuando se tiene NVD y se utilizó el ICB BCa para evaluar la precisión, se obtuvo interacción triple significativa ($TipoMod \times TM \times Esq : F = 3.91, P < 0.0001$; Figura 39 del Anexo B). Con base en una eficiencia promedio de al menos 95 %, el mejor esquema resultó Liu2 sin importar el TM, sin embargo, sólo identifica al tipo de modelo EP *a priori* simulado (Figura 20)).

Condición	Eficiencias Promedio	Grupos Homogéneos
EPNVD10Liu2	0.9492	jklmnopq
EPNVD25Wu1	0.9524	jklmnopq
EPNVD20Wu1	0.9548	klmnopq
EPNVD30Wu1	0.96	lmnopq
EPNVD35Wu1	0.9604	lmnopq
EPNVD15Liu2	0.9728	mnopq
EPNVD20Liu2	0.9792	nopq
EPNVD25Liu2	0.9816	opq
EPNVD30Liu2	0.9836	pq
EPNVD35Liu2	0.9896	q

Promedios con igual letra no difieren (P>0.05), prueba de Tukey.

Figura 20: Comparación de eficiencias promedio del ICB BCa cuando se tiene NVD.

5.10. Comparación de la eficiencia del ICB Percentil cuando se tiene NNVD (NNVD-EficIB1)

Cuando se tiene NNVD y se utilizó el ICB Percentil para evaluar la precisión, se obtuvo interacción triple significativa ($TipoMod \times TM \times Esq : F = 10.71, P < 0.0001$; Figura 40 del Anexo B). Con base en una eficiencia promedio de al menos 93.96 %, se obtuvo dos mejores esquemas Liu2 y ParBal para todos los tamaños de muestra con excepción de n=35 para Liu2 (92.72 %) y n=10 para ParBal (91.28 %). Sin embargo, ambos esquemas sólo identifican al tipo de modelo EI *a priori* simulado (Figura 21).

Condición	Eficiencia Promedio	Grupos Homogéneos
EINNVD10ParBal	0.9128	bcdefghi
EPNNVD30ParBal	0.9168	cdefghij
EINNVD30ResBal	0.9176	defghij
EINNVD10ResBal	0.9208	defghijk
EINNVD10Wu3	0.921346	defghijk
EINNVD20Wu3	0.922608	defghijk
EPNNVD30Liu2	0.923933	defghijkl
EINNVD35Wu2	0.925904	defghijklm
EINNVD35Wu1	0.9264	defghijklm
EINNVD25ResBal	0.927168	defghijklmn
EINNVD35Liu2	0.927172	defghijklmn
EPNNVD15Liu2	0.9272	defghijklmn
EINNVD10Wu2	0.930228	efghijklmn
EPNNVD10Liu2	0.933974	fghijklmn
EINNVD30Wu2	0.935151	fghijklmno
EINNVD30Wu1	0.9396	ghijklmnop
EINNVD30Liu2	0.9412	ghijklmnop
EINNVD15Wu3	0.941872	ghijklmnop
EINNVD25Wu2	0.94393	hijklmnop
EINNVD15ParBal	0.945974	hijklmnop
EINNVD20Wu2	0.946653	hijklmnop
EINNVD25Wu1	0.946775	hijklmnop
EINNVD25Liu2	0.951155	ijklmnop
EINNVD20ParBal	0.9536	jklmnop
EINNVD20Wu1	0.953971	jklmnop
EINNVD15Wu2	0.954074	jklmnop
EINNVD25ParBal	0.9544	jklmnop
EINNVD15ResBal	0.955161	jklmnop
EINNVD20ResBal	0.9568	klmnop
EINNVD30ParBal	0.9576	klmnop
EINNVD35ParBal	0.9576	klmnop
EINNVD20Liu2	0.962374	lmnop
EINNVD10Wu1	0.963573	mnop
EINNVD15Wu1	0.965956	nop
EINNVD15Liu2	0.973948	op
EINNVD10Liu2	0.97638	p

Promedios con igual letra no difieren (P>0.05), prueba de Tukey.

Figura 21: Comparación de eficiencias promedio del ICB Percentil cuando se tiene NNVD.

5.10.1. Comparación de la eficiencia del ICB BCa cuando se tiene NNVD (NNVD-EficIB2)

Cuando se tiene NNVD y se utilizó el ICB BCa para evaluar la precisión, se obtuvo interacción triple significativa ($TipoMod \times TM \times Esq : F = 11.76, P < 0.0001$; Figura 41 del Anexo B). Con base en una eficiencia promedio de al menos 88.80 %, con el esquema ParBal se obtuvo la mayor eficiencia promedio en todos los tamaños de muestra, también bajo el esquema Liu2 con excepción de $n = 35$ (88.52 %) cuando el tipo de modelo a priori simulado es EP. Cabe señalar que el esquema ParBal identifica el tipo de modelo EI para n=25, 30, 35 y las eficiencias no difieren estadísticamente con al menos 90.4 % (Figura 22).

Condición	Eficiencias Promedio	Grupos Homogéneos
EPNNVD35Liu2	0.885158	fghi
EPNNVD35Wu2	0.887958	ghij
EPNNVD20Liu2	0.888359	ghij
EPNNVD25Liu2	0.893954	ghij
EPNNVD15Liu2	0.9	ghij
EPNNVD30Liu2	0.901113	ghij
EINNVD25ParBal	0.904	ghij
EPNNVD15ParBal	0.9124	hij
EPNNVD25ParBal	0.9128	hij
EPNNVD20ParBal	0.916	ij
EPNNVD35ParBal	0.9164	ij
EPNNVD10ParBal	0.918	ij
EPNNVD10Liu2	0.91837	ij
EINNVD30ParBal	0.92	ij
EPNNVD30ParBal	0.9216	ij
EINNVD35ParBal	0.9312	j

Promedios con igual letra no difieren (P>0.05), prueba de Tukey.

Figura 22: Comparación de eficiencias promedio del ICB BCa cuando se tiene NNVD.

5.11. Propuesta Final

Con base en los resultados de los análisis estadísticos, cuando se tenga NVC, NNVC o NVD y se evalué la precisión el ICB a utilizar sería Percentil con esquema de remuestreo Liu2. Y cuando se tenga NNVD y se evalué la precisión, el ICB a utilizar sería BCa con esquema de remuestreo Pareado Balanceado.

5.11.1. Implementación

Para la propuesta final de este trabajo, dado los resultado estadísticos, para los diferentes casos NVC, NNVC y NVD, se calcula el ICB Percentil para evaluar la precisión con el esquema de Liu2, ya que este obtuvo en el estudio de simulación una eficiencia al menos del 95 %; con las diferencias en la implementación de los residuales: para el caso 1 (NVC) se utilizó los residuales al correr una regresión lineal simple, para el caso 2 (NVD) se utilizó los residuales robustos ponderados y en el caso 3 (NNVC) los residuales robustos sin ponderar. Ademas, cuando se tenga el caso 4 (NNVD) se evalúa la precisión con el ICB BCa con el esquema de remuestreo Pareado Balanceado que obtuvo una eficiencia al menos del 88.8 %.

La propuesta final se implementó con el lenguaje R, de tal forma que la evaluación de la precisión se realiza de manera automática dependiendo del cumplimiento de los supuestos. En las salidas, se presentan los resultados de las pruebas estadísticas junto con su conclusión respectiva y en el ICB para R^2 se presentan los límites inferior (LI) y superior (LS) estimados junto con la conclusión de si el modelo evaluado es preciso o impreciso bajo el criterio: $LI \leq 70 \leq LS$ *o* $LI \geq 70\,\%$.

Los argumentos necesarios en la función de la propuesta final, son: la muestra bivariada $(z_1, y_1), (z_2, y_2), \ldots, (z_n, y_n)$ formada por los predichos z_i y por los observados y_i del modelo a evaluar y un nivel del confianza $1 - \alpha$ para el ICB, de modo que nivel de significancia α para las pruebas estadísticas se determina a partir del coeficiente de confianza. La figura 23 muestra el diagrama de flujo de la propuesta final y en el Anexo C7 se encuentra el script de R correspondiente a la función *EvaluaPrecICB()*.

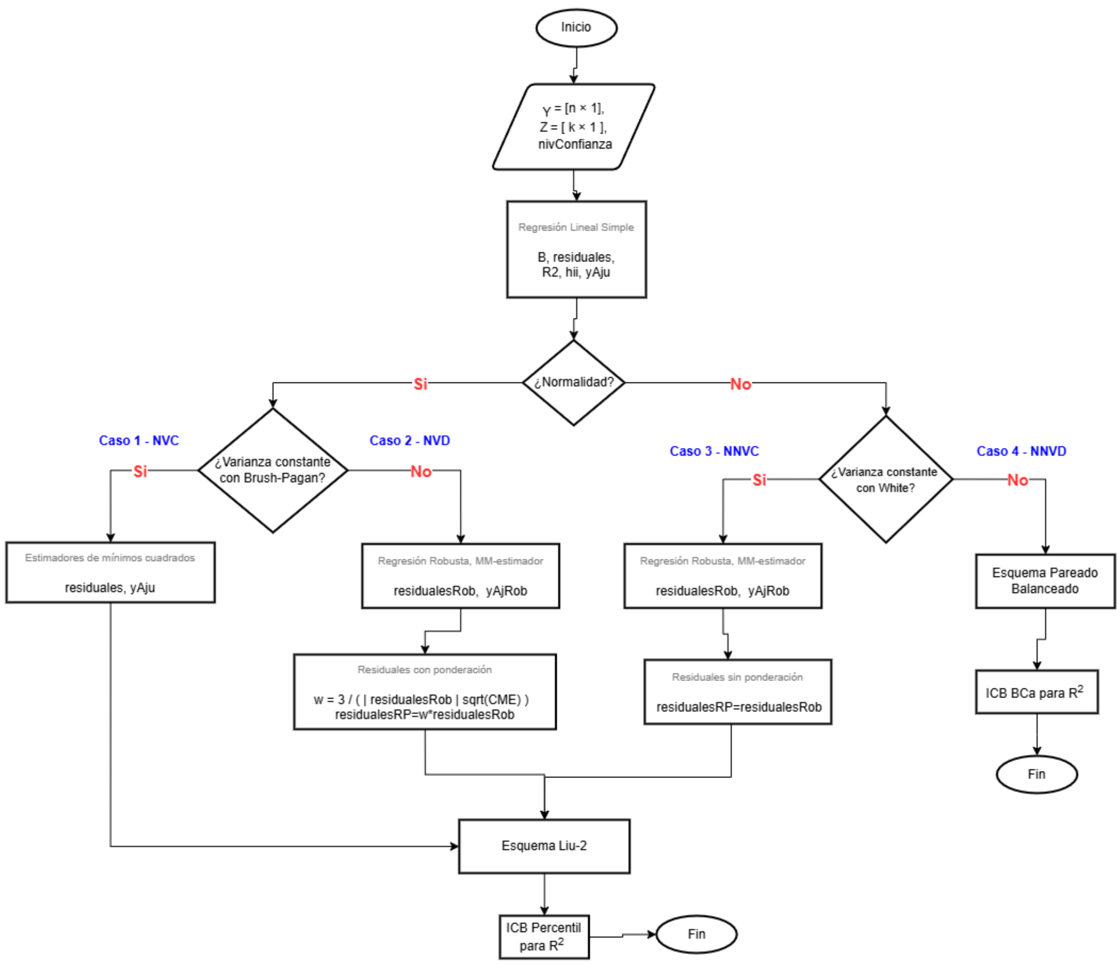

Figura 23: Diagrama de flujo de la propuesta final para evaluar la precisión de un modelo.

5.11.2. Aplicación

Caso 1 - NVC

Para este caso se consideraron los datos experimentales de la ganancia diaria de peso (GDP) en ovinos; datos experimentales vs. modelo de simulación para estimar la ganancia diaria de peso (GDP) (Osorio, 2011). Estos datos se encuentran en el apéndice B de Balam (2012).

Utilizando 95 % de coeficiente de confianza y con base en los resultados al verificar los supuestos (Figura 24) se obtuvo que corresponde al caso NVC. Por lo tanto, en la evaluación de la precisión se aplicó el ICB Percentil con el esquema de remuestreo Liu2, dando como resultado que el modelo evaluado es preciso considerando un $R^2 \geq 70\,\%$.Es decir, se cumplió que el ICB estimado para R^2 contiene el valor 70 %.

```
PRUEBA DE NORMALIDAD
   Estadistica   ValorCal    pValor
W Shapiro-Wilk 0.98158509 0.8865120
D    Liliefort 0.07458593 0.9558153

Conclusión: Se cumple el supuesto de normalidad con Shapiro y Lilliefort al 5 %.

PRUEBA T-STUDENT PARA MEDIA CERO EN LOS RESIDUALES
  Estadistica      ValorCal pValor
t   T-Student -1.816261e-16      1

Conclusión: Se cumple el supuesto de media cero en los residuales al  5 %.

PRUEBA DE IGUALDAD DE VARIANZAS CON BREUSH-PAGAN
    Estadistica ValorCal    pValor
BP Breush-Pagan 1.067363 0.3015417

Conclusión: Se cumple el supuesto de varianza constante con el estadístico de Breush-Pagan al 5 %.

PRUEBA DE DURBIN-WATSON PARA INDEPENDENCIA
          Estadistica ValorCal    pValor
DW Durbin-Watson test 1.857982 0.2962045

Conclusión: Se cumple el supuesto de independencia con Durbin-Watson al 5 %.

 ****** CASO: NORMALIDAD - HOMOCEDASTICIDAD (NVC) ******

PRECISION (R2) CON EL ICB PERCENTIL-ESQUEMA BOOTSTRAP LIU2
       Atributos   Valores
1             R2 0.7273763
2    R2BootMedia 0.7168087
3 DesvEstR2Boots 0.1317316
4           LIR2 0.3842338
5           LSR2 0.8992233

Conclusión: El modelo es preciso con el ICB Percentil al  95 %.

 Criterio: Si el  0.7  está contenido en el ICB o es mayor igual al limite inferior del ICB.
```

Figura 24: Resultados del caso NVC.

Caso 2 - NNVD

Se aplicó a los datos experimentales del volumen de una parcela en metros cúbicos a un diámetro superior ($n = 63$) de 10cm y los simulados con el modelo PTAEDA (Reynolds & Chung, 1987), el cual es un modelo estocástico. Cada simulación con el modelo PTAEDA corresponde a la media de 10 corridas del modelo para cada parcela. En cada parcela se mide la edad, el indice de sitio y el número de arboles por hectárea. Estos datos se encuentran en el apéndice B de Balam (2012).

Utilizando 95 % de coeficiente de confianza y con base en los resultados al verificar los supuestos (Figura 25) se obtuvo que corresponde al caso NNVD. Por lo tanto, en la evaluación de la precisión se aplicó el ICB BCa con el esquema de remuestreo Pareado Balanceado, dando como resultado que el modelo evaluado es preciso considerando un $R^2 \geq 70\,\%$. Es decir, se cumplió que el LI estimado para R^2 es mayor que 70 %.

```
PRUEBA DE NORMALIDAD
   Estadistica  ValorCal       pValor
W Shapiro-Wilk 0.9090287 0.0002003722
D    Liliefort 0.1395817 0.0038165826

Conclusión: No se cumple el supuesto de normalidad con Shapiro y Lilliefort al 5 %.

PRUEBA T-STUDENT PARA MEDIA CERO EN LOS RESIDUALES
  Estadistica      ValorCal pValor
t   T-Student -7.099852e-16      1

Conclusión: Se cumple el supuesto de media cero en los residuales al  5 %.

PRUEBA DE IGUALDAD DE VARIANZAS CON WHITE
   Estadistica ValorCal       pValor
BP       White 23.60013 1.185793e-06

Conclusión: No se cumple el supuesto de varianza constante con el estadístico de White al 5 %.

PRUEBA DE DURBIN-WATSON PARA INDEPENDENCIA
          Estadistica ValorCal    pValor
DW Durbin-Watson test 1.740505 0.1258351

Conclusión: Se cumple el supuesto de independencia con Durbin-Watson al 5 %.

 ****** CASO: NO NORMALIDAD - HETEROCIDASTICIDAD (NNVD) ******

PRECISION (R2) CON EL ICB BCa-ESQUEMA BOOTSTRAP PAREADO BALANCEADO
       Atributos    Valores
1             R2 0.83505020
2     R2BootMedia 0.84055856
3 DesvEstR2Boots 0.03684941
4           LIR2 0.74039251
5           LSR2 0.89089504

Conclusión: El modelo es preciso con el ICB BCa al 95 %.

 Criterio: Si el  0.7  está contenido en el ICB o es mayor igual al limite inferior del ICB.
```

Figura 25: Resultados del caso NNVD.

6. Conclusión

En este trabajo se propuso un método para evaluar la precisión de un modelo con la técnica de regresión lineal; basado en ocho esquemas de remuestreo, dos tipos de modelo y seis tamaños de muestra; a través de dos intervalos de confianza Bootstrap para el coeficiente de determinación R^2, del modelo de regresión que resulta entre los valores reales y predichos del modelo a evaluar.

En la medición de la precisión, se consideraron cuatro escenarios posibles (NVC, NNVC, NVD y NNVD) para estimar la distribución del coeficiente de determinación R^2, mediante la implementación de los ocho esquemas de remuestreos: el Bootstrap simple, el Wild Bootstrap robusto con los tres esquemas propuestos por Wu (1986) y con los dos esquemas propuestos por Liu (1988), el Bootstrap de residuales balanceados y el Bootstrap pareado balanceado. Finalmente, por medio de los intervalos de confianza Bootstrap método percentil y Bca se estimó R^2 con $B = 1,000$ remuestras para cada uno de los esquemas.

Se realizó un estudio de simulación para comparar las eficiencias de los intervalos de confianza para cada tipo de supuesto con respecto a los diferentes esquemas Bootstrap, tamaños de muestra y tipo de modelo; para ello se simularon mediante la propuesta de Febles (2014) y Zacarías (2023) , y evaluaron 60,000 modelos Exactos-Precisos (EP) y 60,000 modelos Exactos-Imprecisos (EI). Para cada modelo se identificó la R^2 de origen utilizada para su simulación.

Se consideraron tres criterios principales para determinar las eficiencias de los intervalos de confianza para cada esquema Bootstrap, el primer criterio determinó la eficiencia como el porcentaje de las veces en que el intervalo de confianza contiene a la R^2 de origen para los modelos EP simulados; y viceversa, para los modelos EI la eficiencia se determinó como el porcentaje de las veces en que el intervalo de confianza no contiene a la R^2 de origen. El segundo criterio determinó la eficiencia como el porcentaje de las veces en que ambos intervalos contienen de manera simultánea a la R^2 de origen para los modelos EP y cuando ambos no la contienen para los modelos EI; y el tercer criterio determinó la eficiencia como el porcentaje de las veces en que uno de los intervalos de confianza es más estrecho que el otro cuando ambos intervalos contienen simultáneamente la R^2 de origen para los modelos EP y de manera viceversa uno de los intervalos es más estrecho que el otro cuando ambos no la contienen simultáneamente para los modelos EI.

Se analizaron los resultados del estudio de simulación a través de un ANOVA factorial y se determinó con al menos un 95 % que para los supuestos NVC, NNVC o NVD se utilice el ICB Percentil con el esquema de remuestreo Liu2 sin importar el tamaño de muestra. Y se determinó con al menos el 88.8 % que para el supuesto NNVD se utilice el ICB BCa con el esquema de remuestreo pareado balanceado; con la limitación de que para modelos EI con tamaños de muestra “pequeño” $n = 10, 15, 20$, no se obtuvo un buen desempeño.

Con el propósito de que los resultados de este trabajo conformen una herramienta que permita evaluar la precisión de un modelo con la técnica de regresión lineal, se consideró como propuesta final: para los supuestos NVC, NNVC o NVD se utilice el ICB Percentil con el esquema de remuestreo Liu2 (NVC: residuales de regresión lineal simple, NNVC: residuales robustos sin ponderar y NVD: residuales robustos ponderados) y para el supuesto NNVD se utilice el ICB BCa con el esquema de remuestreo pareado balanceado. Esta herramienta se implementó en el lenguaje R.

En la aplicación de la propuesta final, para la ganancia diaria de peso en ovinos, el modelo resultó ser de tipo NVC y preciso, coincidiendo con Balam (2012), cabe señalar que usó ICB BCa con residuales balanceados y en este trabajo se usó ICB Percentil con el esquema de remuestreo Liu2. Para el volumen por parcela, el modelo resultó de tipo NNVD y preciso, coincidiendo con Balam (2012), tanto en la decisión como en el esquema e ICB que utilizó.

Como trabajo futuro, se podría desarrollar una librería en el lenguaje R que contenga la propuesta de este trabajo para la evaluación de la precisión, junto con la propuesta desarrollada por Zacarías (2023) para la evaluación de la exactitud y de esta manera tener una herramienta integral para la evaluación de un modelo con la técnica de regresión lineal. También esta propuesta se podría integrar al Sistema de Validación de Modelos (Mazún, 2014), contribuyendo con un módulo más para la validación de un modelo.

Por último, para otro trabajo futuro se propone evaluar otros ICB que requieren cómputos más exhaustivos pero utilizando la programación en paralelo.

Referencias

Analla, M. (1998). Model validation through the linear regression fit to actual versus predicted values. *Agricultural Systems*, *57*(1), 115-119. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/S0308-521X(97)00073-5

Arcones, M. A., & Wang, Y. (2006). Some new tests for normality based on U-processes. *Statistics and Probability Letters*, *76*(1), 69-82. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.spl.2005.07.003

Ayala, R. (2024). *Eficacia de los estimadores para la varianza de los predichos en la simulación de modelos exactos-precisos cuando se cumplen los supuestos de normalidad e igualdad de varianzas* [Tesis de Licenciatura]. UADY, Facultad de Matemáticas.

Balam, R. (2012). *Evaluación de La Exactitud y Precisión de Un Modelo Con Regresión Lineal* [Tesis de Maestría]. UADY, Facultad de Matemáticas.

Barten, A. P. (1962). Note on unbiased estimation of the squared multiple correlation coefficient. *Statistica Neerlandica*, *16*(2), 151-164. https://doi.org/https://doi.org/10.1111/j.1467-9574.1962.tb01062.x

Bickel, P. J. (1978). Using Residuals Robustly I: Tests for Heteroscedasticity, Nonlinearity. *The Annals of Statistics*, *6*(2), 266-291. https://doi.org/10.1214/aos/1176344124

Breusch, T. S., & Pagan, A. R. (1979). A Simple Test for Heteroscedasticity and Random Coefficient Variation. *Econometrica*, *47*(5), 1287-1294. Consultado el 30 de noviembre de 2024, desde http://www.jstor.org/stable/1911963

Cheng, K.-S., Hou, J.-C., Liou, J.-J., Wu, Y.-C., & Chiang, J.-L. (2011). Stochastic simulation of bivariate gamma distribution: A frequency-factor based approach. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, *25*, 107-122. https://doi.org/10.1007/s00477-010-0427-7

Christou, N. (2005). *The True R^2 and the Truth about R^2* (inf. téc.). UCLA: Center for the Teaching of Statistics. https://escholarship.org/uc/item/6149r04h

Conover, W. J. (1999). *Practical Nonparametric Statistics* (3.ª ed.). John Wiley & Sons.

Cramer, J. (1987). Mean and variance of R2 in small and moderate samples. *Journal of Econometrics*, *35*(2), 253-266. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/0304-4076(87)90027-3

Daniel, W. (1990). *Applied Nonparametric Statistics* (2.ª ed.). PWS-KENT Publishing.

Davidson, R., & Flachaire, E. (2008). The wild bootstrap, tamed at last. *Journal of Econometrics*, *146*(1), 162-169. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.jeconom.2008.08.003

Efron, B. (1982). *The Jackknife, the Bootstrap and Other Resampling Plans*. Society for Industrial; Applied Mathematics. https://doi.org/10.1137/1.9781611970319

Efron, B., & Tibshirani, R. J. (1993). *An Introduction to the Bootstrap*. Chapman & Hall/CRC.

Febles, A. (2014). *Evaluación de La eficiencia Del Método de Regresión En La Validación de Modelos: Un Estudio de Simulación* [Tesis de Maestría]. UADY, Facultad de Matemáticas.

GeeksforGeeks. (s.f.). *Goldfeld-Quandt Test* [Recuperado en noviembre de 2024]. https://www.geeksforgeeks.org/goldfeld-quandt-test/

Giordano, F. R., Weir, M. D., & Fox, W. P. (1997). *The modeling process*. Brooks/Cole Publishing Company.

Givens, G. H., & Hoeting, J. A. (2013). *Computational Statistics* (3.ª ed.). Wiley.

Good, P. (2005). Permutation, parametric and bootstrap tests of hypotheses. 3rd ed. https://doi.org/10.1007/b138696

Gutierrez, H., & de la Vara, R. (2012). *Análisis y diseño de experimentos* (3.ª ed.). McGraw Hill.

Halachmi, I., Edan, Y., Moallem, U., & Maltz, E. (2004). Predicting feed intake of the individual dairy cow. *J Dairy Sci*, *87*(7), 2254-2267. https://doi.org/10.3168/jds.S0022-0302(04)70046-6

Harrison, M. J., & McCabe, B. P. M. (1979). A Test for Heteroscedasticity Based on Ordinary Least Squares Residuals. *Journal of the American Statistical Association*, *74*(366), 494-499. Consultado el 30 de noviembre de 2024, desde http://www.jstor.org/stable/2286361

Hesterberg, T., Monaghan, S., Moore, D., Clipson, A., & Epstein, R. (2003). *Bootstrap Methods and Permutation Tests*. W. H. Freeman; Company.

Huber, P. J. (1981). *Robust Statistics*. John Wiley; Sons. https://doi.org/10.1002/0471725250

Koenker, R. (1981). A note on studentizing a test for heteroscedasticity. *Journal of Econometrics*, *17*(1), 107-112. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/0304-4076(81)90062-2

Lilliefors, H. W. (1967). On the Kolmogorov-Smirnov Test for Normality with Mean and Variance Unknown. *Journal of the American Statistical Association*, *62*, 399-402. https://api.semanticscholar.org/CorpusID:16462094

Liu, R. Y. (1988). Bootstrap Procedures under Some Non-I.I.D. Models. *The Annals of Statistics*, *16*(4), 1696-1708. https://doi.org/10.1214/aos/1176351062

Mayer, D., & Butler, D. (1993). Statistical Validation. *Theoretical Modelling Aspects*, *68*(1), 21-32. https://doi.org/10.1016/0304-3800(93)90105-2

Mayer, D., Stuart, M., & Swain, A. (1994). Regression of real-world data on model output: An appropriate overall test of validity. *Agricultural Systems*, *45*(1), 93-104. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/S0308-521X(94)90282-8

Mazún, E. (2014). *Diseño e implementación en el SVMRL del método de Freese con sus extensiones para validad modelos en Web* [Tesis de Licenciatura]. UADY, Facultad de Matemáticas.

Medina-Peralta, S., Vargas-Villamil, L., Colorado-Martínez, L., & Navarro-Alberto, J. (2017). Validation of Models with Proportional Bias. *Revista MVZ Córdoba*, *22*, 5674-5682. https://doi.org/10.21897/rmvz.927

Micceri, T. (1989). The Unicorn, The Normal Curve, and Other Improbable Creatures. *Psychological Bulletin*, *105*, 156-166. https://doi.org/10.1037/0033-2909.105.1.156

Montgomery, D. C. (2017). *Design and Analysis of Experiments* (9th edition). John wiley & sons.

Montgomery, D. C., Peck, E. A., & G.G., V. (2012). *Introduction to Linear Regression Analysis* (5th Edition). John wiley & sons.

Ohtani, K., & Tanizaki, H. (2004). Exact Distributions of R2 and Adjusted R2 in a Linear Regression Model with Multivariate t Error Terms. *Journal of the Japan Statistical Society*, *34*. https://doi.org/10.14490/jjss.34.101

Orenti, A., Zolin, A., Marubini, E., Antonelli, P., Ambrogi, F., & Bruno Mario, C. (2024). Robust Regression as a Sensible Alternative to the Weighted Ordinary Least Squares Regression in case of Heteroskedasticity. A Tutorial. *Epidemiology, Biostatistics, and Public Health*, *19*. https://doi.org/10.54103/2282-0930/26484

Osorio, A. I. (2011). *Modelo de simulación para predecir ganancia de peso en ovinos alimentados con dietas altas en grano* [Tesis de Maestría]. Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Xochimilco.

Öztuna, D., Elhan, A., & Tüccar, E. (2006). Investigation of four different normality tests in terms of type 1 error rate and power under different distributions. *Turkish Journal of Medical Sciences*, *36*, 171-176.

R Core Team. (2024). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing. Vienna, Austria. https://www.R-project.org/

Reynolds, M. R. J., & Chung, J. (1987). Regression methodology for estimating model prediction error. *Canadian Journal of Forest Research*, *16*(5), 931-938.

Rousseeuw, P. (1984). Least Median of Squares Regression. *Journal of the American Statistical Association*, *79*(388), 871-880. http://www.jstor.org/stable/2288718

Rousseeuw, P., & Yohai, V. (1984). Robust Regression by Means of S-Estimators. *Springer Lecture Notes in Statistics*, *26*, 256-272. https://doi.org/10.1007/978-1-4615-7821-5_15

Siegel, A. F. (1982). Robust Regression Using Repeated Medians. *Biometrika*, *69*(1), 242-244. https://doi.org/10.1093/biomet/69.1.242

Sohel, R., Habshah, M., & Imon, H. M. R. (2012). Robust Wild Bootstrap for Stabilizing the Variance of Parameter Estimates in Heteroscedastic Regression Models in the Presence of Outliers. *Mathematical Problems in Engineering*, 14.

Statgraphics Technologies, Inc. (2024). *STATGRAPHICS Centurion 19 Version 19.6.03*. https://www.statgraphics.com

Steinskog, D. J., Tjøstheim, D. B., & Kvamstø, N. G. (2007). A Cautionary Note on the Use of the Kolmogorov Smirnov Test for Normality. *Monthly Weather Review*, *135*(3), 1151. https://doi.org/10.1175/MWR3326.1

Taboga, M. (2017). *Lectures on Probability Theory and Mathematical Statistics* (3.ª ed.).

Tedeschi, L. O. (2006). Assessment of the Adequacy of Mathematical Models. *Agricultural Systems*, *89*, 225-247. https://doi.org/10.1016/j.agsy.2005.11.004

Thadewald, T., & Buning, H. (2007). Jarque-Bera Test and its Competitors for Testing Normality - A Power Comparison. *Journal of Applied Statistics*, *34*, 87-105. https://doi.org/10.1080/02664760600994539

Verbeek, M. (2004). *A Guide to Modern Econometrics* (2.ª ed.). Wiley & Sons Ltd.

White, H. (1980). A Heteroskedasticity-Consistent Covariance Matrix Estimator and a Direct Test for Heteroskedasticity. *Econometrica*, *48*(4), 817-838. Consultado el 1 de diciembre de 2024, desde http://www.jstor.org/stable/1912934

Wu, C. F. J. (1986). Jackknife, Bootstrap and Other Resampling Methods in Regression Analysis. *The Annals of Statistics*, *14*(4), 1261-1295. https://doi.org/10.1214/aos/1176350142

Yang, Y., Monserud, A., & Huang, S. (2004). An Evaluation of Diagnostic Test and Their Roles in Validating Forest Biometric Models. *Canadian Journal of Forest Research-revue Canadienne De Recherche Forestiere - CAN J FOREST RES*, *34*, 619-629. https://doi.org/10.1139/x03-230

Yazici, B., & Yolacan, S. (2007). A comparison of various tests of normality. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, *77*(2), 175-183. https://doi.org/10.1080/10629360600678310

Yohai, V. J. (1987). High Breakdown-Point and High Efficiency Robust Estimates for Regression. *The Annals of Statistics*, *15*(2), 642-656. https://doi.org/10.1214/aos/1176350366

Zacarías, K. (2023). *Evaluación de La Exactitud de Un Modelo Cuando No Se Cumplen Los Supuestos En La Técnica de Regresión Lineal* [Tesis de Maestría]. UADY, Facultad de Matemáticas.

Anexo A. Tablas de eficiencias de ICB y esquemas de los modelo EI

A1. Eficiencia de los intervalos Bootstrap para el caso EI-NVC

Con base en el promedio general (Figura 26) para: Eficiencia del ICB Percentil (Efic Int Boot Perc) y Eficiencia del ICB BCa (Efic Int Boot Bca) el mejor esquema resulto Liu2, 0.9627 y 0.9052 respectivamente; Eficiencia del ICB Percentil cuando solo el lo contiene a la R^2 y Eficiencia del ICB BCa cuando solo el contiene a la R^2 el mejor esquema resulto Liu1, 0.5864 y 0.5751 respectivamente; la Eficiencia de ICB Percentil cuando gana en el empate a ICB BCa (Efic Boot Perc gana empate), el mejor esquema es Wu3 (0.3019) y la Eficiencia ICB BCa cuando gana en el empate al ICB Percentil (Efic Boot Bca gana empate), el mejor esquema es Wu2 (0.8626).

Sin considerar el tamaño de la muestra y esquema, para el caso EI-NVC los ICB mejores en promedio general (Figura 26) son: Eficiencia del ICB Percentil (Efic Int Boot Perc) con 0.8745 ante la Eficiencia en ICB BCa (Efic Int Boot Bca); la Eficiencia del ICB Percentil cuando solo el contiene a la R^2 (0.1413) y la Eficiencia de ICB BCa cuando gana en el empate al ICB Perc (Efic Boot Bca gana empate) con 0.7469. Por lo que, el mejor es el ICB Percentil.

Tamaño de Muestra	Esquema	Efic Int Boot Perc	Efic Int Boot Bca	Efic Int Boot Perc cuando solo el lo contiene	Efic Int Boot Bca cuando solo el contiene	Efic Boot Perc gana empate	Efic Boot Bca gana empate
n = 10	PromWu1	0.9208	0.8259	0.1333	0.0338	0.1334	0.8328
	PromWu2	0.8935	0.7990	0.1445	0.0435	0.1099	0.8466
	PromWu3	0.8952	0.7871	0.1600	0.0448	0.2244	0.7309
	PromLiu1	0.5830	0.6142	0.3517	0.3847	0.0007	0.6476
	PromLiu2	0.9512	0.8503	0.1350	0.0325	0.1346	0.8330
	PromRobusto	0.8687	0.7902	0.1445	0.0598	0.0919	0.8484
	PromResBal	0.8691	0.7863	0.1472	0.0575	0.0979	0.8445
	PromParBal	0.9352	0.8363	0.1338	0.0315	0.1863	0.7822
Promedio (n = 10)		**0.8646**	**0.7862**	**0.1688**	**0.0860**	**0.1224**	**0.7957**
n = 15	PromWu1	0.9303	0.8559	0.1012	0.0229	0.1208	0.8563
	PromWu2	0.9100	0.8448	0.1043	0.0352	0.0916	0.8732
	PromWu3	0.8987	0.8303	0.1238	0.0514	0.2751	0.6736
	PromLiu1	0.5572	0.5873	0.4075	0.4377	0.0000	0.5950
	PromLiu2	0.9592	0.8783	0.0994	0.0164	0.1389	0.8447
	PromRobusto	0.9019	0.8323	0.1144	0.0403	0.1076	0.8521
	PromResBal	0.9008	0.8307	0.1149	0.0402	0.1043	0.8555
	PromParBal	0.9356	0.8551	0.1066	0.0225	0.2461	0.7314
Promedio (n = 15)		**0.8742**	**0.8143**	**0.1465**	**0.0833**	**0.1355**	**0.7852**
n = 20	PromWu1	0.9400	0.8936	0.0702	0.0219	0.1284	0.8497
	PromWu2	0.9268	0.8860	0.0703	0.0275	0.1079	0.8646
	PromWu3	0.9180	0.8740	0.0853	0.0393	0.3010	0.6596
	PromLiu1	0.5244	0.5280	0.5373	0.5405	0.0000	0.4747
	PromLiu2	0.9684	0.9108	0.0706	0.0118	0.1713	0.8169
	PromRobusto	0.9124	0.8668	0.0807	0.0323	0.1185	0.8492
	PromResBal	0.9124	0.8724	0.0785	0.0362	0.1155	0.8483
	PromParBal	0.9372	0.8868	0.0713	0.0185	0.2507	0.7308
Promedio (n = 20)		**0.8800**	**0.8398**	**0.1330**	**0.0910**	**0.1492**	**0.7617**
n = 25	PromWu1	0.9444	0.9072	0.0551	0.0163	0.1274	0.8563
	PromWu2	0.9360	0.8988	0.0573	0.0182	0.1081	0.8736
	PromWu3	0.9168	0.8892	0.0710	0.0422	0.3229	0.6349
	PromLiu1	0.5116	0.4496	0.6506	0.6028	0.0000	0.3972
	PromLiu2	0.9644	0.9196	0.0547	0.0087	0.1866	0.8047
	PromRobusto	0.9196	0.8916	0.0575	0.0278	0.1426	0.8296
	PromResBal	0.9204	0.8896	0.0601	0.0275	0.1255	0.8470
	PromParBal	0.9424	0.8952	0.0595	0.0098	0.2861	0.7041
Promedio (n = 25)		**0.8819**	**0.8426**	**0.1332**	**0.0942**	**0.1624**	**0.7434**
n = 30	PromWu1	0.9368	0.9152	0.0401	0.0175	0.1439	0.8386
	PromWu2	0.9296	0.9096	0.0400	0.0189	0.1164	0.8647
	PromWu3	0.9064	0.8936	0.0587	0.0453	0.3313	0.6235
	PromLiu1	0.4820	0.4120	0.7363	0.6905	0.0000	0.3095
	PromLiu2	0.9640	0.9304	0.0382	0.0035	0.2339	0.7626
	PromRobusto	0.9200	0.8980	0.0444	0.0210	0.1546	0.8244
	PromResBal	0.9212	0.8996	0.0465	0.0236	0.1597	0.8168
	PromParBal	0.9256	0.9012	0.0402	0.0142	0.3046	0.6812
Promedio (n = 30)		**0.8732**	**0.8450**	**0.1306**	**0.1043**	**0.1805**	**0.7152**
n = 35	PromWu1	0.9452	0.9256	0.0326	0.0121	0.1651	0.8228
	PromWu2	0.9348	0.9212	0.0342	0.0199	0.1288	0.8526
	PromWu3	0.9168	0.9096	0.0515	0.0439	0.3569	0.6008
	PromLiu1	0.4456	0.3580	0.8347	0.7942	0.0000	0.2058
	PromLiu2	0.9688	0.9420	0.0326	0.0051	0.2984	0.6965
	PromRobusto	0.9200	0.9108	0.0356	0.0259	0.1660	0.8081
	PromResBal	0.9196	0.9112	0.0339	0.0250	0.1706	0.8044
	PromParBal	0.9344	0.9160	0.0308	0.0113	0.3377	0.6510
Promedio (n = 35)		**0.8731**	**0.8493**	**0.1358**	**0.1172**	**0.2029**	**0.6802**
PromGral	Wu1	0.9362	0.8872	0.0721	0.0207	0.1365	0.8428
	Wu2	0.9218	0.8766	0.0751	0.0272	0.1105	**0.8626**
	Wu3	0.9086	0.8640	0.0917	0.0445	**0.3019**	0.6539
	Liu1	0.5173	0.4915	**0.5864**	**0.5751**	0.0001	0.4383
	Liu2	**0.9627**	**0.9052**	0.0718	0.0130	0.1939	0.7931
	Robusto	0.9071	0.8649	0.0795	0.0345	0.1302	0.8353
	ResBal	0.9073	0.8650	0.0802	0.0350	0.1289	0.8361
	ParBal	0.9351	0.8818	0.0737	0.0180	0.2686	0.7135
	Intervalo	**0.8745**	**0.8295**	**0.1413**	**0.0960**	**0.1588**	**0.7469**

Figura 26: Eficiencia promedio de los intervalos Bootstrap por tamaño de muestra y esquema de remuestreo para el caso EI-NVC.

A2. Eficiencia de los esquemas para el caso EI-NVC

Con base en al menos 90 % de eficiencia promedio y sin importar el ICB (Figura 27): con $n = 10$ y $n = 15$ ningún esquema cumplió la condición, sin embargo con ambos el mejor esquema es Liu2, con 0.8227 y 0.8639 respectivamente; con los tamaños de muestra 20, 25, 30 el mejor fue el esquema Lui2 y con el tamaño de muestra 35 los mejores esquemas fueron Wu1, Wu2, Liu2 y Pareado Balanceado (ParBal).

Sin considerar el tamaño de la muestra e ICB, para el caso EI-NVC el mejor promedio general (Figura 27) en eficiencia de esquema es Liu2 (0.8938).

Tamaño de Muestra	Replica	Wu1	Wu2	Wu3	Liu1	Liu2	Robusto	ResBal	ParBal
n = 10	1	0.8080	0.7715	0.7640	0.4160	0.8320	0.7475	0.7420	0.8080
	2	0.7940	0.7640	0.7595	0.3820	0.8220	0.7360	0.7460	0.8020
	3	0.8100	0.7680	0.7640	0.3740	0.8380	0.7640	0.7600	0.8300
	4	0.7840	0.7560	0.7400	0.3580	0.8140	0.7480	0.7360	0.8080
	5	0.7936	0.7615	0.7320	0.3607	0.8076	0.7194	0.7214	0.8016
Promedio (n = 10)		**0.7979**	**0.7642**	**0.7519**	**0.3781**	**0.8227**	**0.7430**	**0.7411**	**0.8099**
n = 15	1	0.8680	0.8520	0.8160	0.3280	0.9060	0.8160	0.8140	0.8660
	2	0.8420	0.8320	0.8000	0.3600	0.8660	0.8180	0.8100	0.8420
	3	0.7960	0.7760	0.7560	0.3080	0.8260	0.7700	0.7620	0.7940
	4	0.8277	0.7980	0.7776	0.3246	0.8477	0.7776	0.7780	0.8200
	5	0.8477	0.8180	0.7876	0.3307	0.8737	0.8116	0.8216	0.8577
Promedio (n = 15)		**0.8363**	**0.8152**	**0.7874**	**0.3303**	**0.8639**	**0.7986**	**0.7971**	**0.8359**
n = 20	1	0.8860	0.8640	0.8440	0.2520	0.9020	0.8320	0.8460	0.8780
	2	0.8720	0.8620	0.8380	0.2280	0.8980	0.8300	0.8460	0.8660
	3	0.8760	0.8640	0.8500	0.2400	0.9100	0.8540	0.8440	0.8860
	4	0.8660	0.8580	0.8320	0.2400	0.8920	0.8340	0.8280	0.8540
	5	0.8700	0.8600	0.8340	0.2520	0.8980	0.8440	0.8400	0.8680
Promedio (n = 20)		**0.8740**	**0.8616**	**0.8396**	**0.2424**	**0.9000**	**0.8388**	**0.8408**	**0.8704**
n = 25	1	0.9000	0.8940	0.8500	0.1600	0.9180	0.8818	0.8700	0.8918
	2	0.8800	0.8640	0.8420	0.1740	0.8980	0.8500	0.8520	0.8740
	3	0.9020	0.8920	0.8640	0.1800	0.9160	0.8780	0.8760	0.8980
	4	0.8680	0.8620	0.8360	0.1560	0.9000	0.8440	0.8360	0.8640
	5	0.9120	0.9000	0.8660	0.2260	0.9260	0.8800	0.8920	0.9040
Promedio (n = 25)		**0.8924**	**0.8824**	**0.8516**	**0.1792**	**0.9116**	**0.8668**	**0.8652**	**0.8864**
n = 30	1	0.9160	0.9060	0.8580	0.1560	0.9300	0.9040	0.8900	0.9000
	2	0.8940	0.9000	0.8600	0.1220	0.9400	0.8820	0.8840	0.8900
	3	0.8940	0.8900	0.8520	0.1420	0.9300	0.8800	0.8760	0.8840
	4	0.9080	0.8980	0.8660	0.1320	0.9400	0.8840	0.8880	0.8980
	5	0.8840	0.8680	0.8300	0.0880	0.8960	0.8460	0.8540	0.8700
Promedio (n = 30)		**0.8992**	**0.8924**	**0.8532**	**0.1280**	**0.9272**	**0.8792**	**0.8784**	**0.8884**
n = 35	1	0.9080	0.9040	0.8880	0.0740	0.9360	0.8800	0.8800	0.8920
	2	0.9100	0.9040	0.8500	0.0800	0.9140	0.8900	0.8900	0.8980
	3	0.9299	0.9220	0.8760	0.0720	0.9520	0.9040	0.9060	0.9100
	4	0.9200	0.9000	0.8680	0.0780	0.9460	0.8880	0.8880	0.9200
	5	0.9040	0.8840	0.8660	0.0640	0.9380	0.8740	0.8780	0.9080
Promedio (n = 35)		**0.9144**	**0.9028**	**0.8696**	**0.0736**	**0.9372**	**0.8872**	**0.8884**	**0.9056**
PromGralEsq		**0.8690**	**0.8531**	**0.8256**	**0.2219**	**0.8938**	**0.8356**	**0.8352**	**0.8661**

Figura 27: Eficiencia promedio de los esquemas por tamaño de muestra para el caso EI-NVC.

A3. Eficiencia de los intervalos Bootstrap para el caso EI-NNVC

Con base en el promedio general (Figura 28) para: Eficiencia del ICB Percentil (Efic Int Boot Perc) y Eficiencia en ICB BCa (Efic Int Boot Bca) el mejor esquema resultó Liu2, 0.9603 y 0.9005 respectivamente; Eficiencia del ICB Percentil cuando solo él contiene a la R^2 y Eficiencia del ICB BCa cuando solo él contiene a la R^2 el mejor esquema resultó Liu1, 0.5224 y 0.5304 respectivamente; la Eficiencia de ICB Percentil cuando gana en el empate a ICB BCa (Efic Boot Perc gana empate), el mejor esquema es Wu3 (0.6169) y la Eficiencia ICB BCa cuando gana el empate al ICB Percentil (Efic Boot Bca gana empate), el mejor esquema es Pareado Balanceado (ParBal) con 0.7493.

Sin considerar el tamaño de la muestra y esquema, para el caso EI-NNVC los ICB mejores en promedio general (Figura 28) son: Eficiencia del ICB Percentil (Efic Int Boot Perc) con 0.8833 ante la Eficiencia en ICB BCa (Efic Int Boot Bca); la Eficiencia del ICB Percentil cuando solo el contiene a la R^2 (0.1467) y la Eficiencia de ICB BCa cuando gana en el empate al ICB Perc (Efic Boot Bca gana empate) con 0.6252. Por lo que, el mejor ICB Percentil.

Tamaño de Muestra	Esquema	Efic Int Boot Perc	Efic Int Boot Bca	Efic Int Boot Perc cuando solo el lo contiene	Efic Int Boot Bca cuando solo el contiene	Efic Boot Perc gana empate	Efic Boot Bca gana empate
n = 10	PromWu1	0.9116	0.8307	0.1346	0.0505	0.2226	0.7269
	PromWu2	0.8903	0.7922	0.1496	0.0444	0.1589	0.7968
	PromWu3	0.9860	0.8268	0.1631	0.0019	0.5447	0.4533
	PromLiu1	0.5968	0.6376	0.3306	0.3738	0.0133	0.6561
	PromLiu2	0.9452	0.8527	0.1294	0.0351	0.2281	0.7368
	PromRobusto	0.8832	0.8064	0.1429	0.0615	0.1815	0.7570
	PromResBal	0.8803	0.8071	0.1443	0.0669	0.1839	0.7492
	PromParBal	0.9343	0.8575	0.1207	0.0420	0.1664	0.7916
Promedio (n = 10)		**0.8785**	**0.8014**	**0.1644**	**0.0845**	**0.2124**	**0.7085**
n = 15	PromWu1	0.9316	0.8544	0.1168	0.0369	0.2795	0.6836
	PromWu2	0.9232	0.8432	0.1222	0.0388	0.1814	0.7798
	PromWu3	0.9648	0.8259	0.1543	0.0121	0.6236	0.3644
	PromLiu1	0.5932	0.6068	0.3895	0.4034	0.0042	0.6181
	PromLiu2	0.9600	0.8691	0.1129	0.0202	0.2743	0.7054
	PromRobusto	0.9056	0.8308	0.1356	0.0578	0.2501	0.6921
	PromResBal	0.9040	0.8308	0.1381	0.0621	0.2478	0.6900
	PromParBal	0.9428	0.8592	0.1141	0.0280	0.1979	0.7741
Promedio (n = 15)		**0.8906**	**0.8150**	**0.1604**	**0.0824**	**0.2573**	**0.6634**
n = 20	PromWu1	0.9368	0.8788	0.0892	0.0291	0.3178	0.6531
	PromWu2	0.9300	0.8623	0.0960	0.0250	0.2293	0.7457
	PromWu3	0.9475	0.8386	0.1344	0.0219	0.6450	0.3331
	PromLiu1	0.5364	0.5760	0.4594	0.4964	0.0052	0.5354
	PromLiu2	0.9632	0.8908	0.0864	0.0121	0.3226	0.6653
	PromRobusto	0.9116	0.8487	0.1159	0.0505	0.2854	0.6641
	PromResBal	0.9120	0.8491	0.1150	0.0496	0.2937	0.6567
	PromParBal	0.9324	0.8735	0.0854	0.0239	0.2198	0.7564
Promedio (n = 20)		**0.8837**	**0.8272**	**0.1477**	**0.0886**	**0.2898**	**0.6262**
n = 25	PromWu1	0.9384	0.9088	0.0626	0.0322	0.3159	0.6520
	PromWu2	0.9392	0.9076	0.0643	0.0318	0.2423	0.7260
	PromWu3	0.9488	0.8668	0.1097	0.0255	0.6501	0.3244
	PromLiu1	0.5244	0.5444	0.5642	0.5807	0.0015	0.4394
	PromLiu2	0.9648	0.9256	0.0552	0.0151	0.3323	0.6526
	PromRobusto	0.9164	0.8936	0.0760	0.0524	0.3060	0.6415
	PromResBal	0.9156	0.8912	0.0747	0.0493	0.3076	0.6439
	PromParBal	0.9396	0.9104	0.0494	0.0189	0.2528	0.7283
Promedio (n = 25)		**0.8859**	**0.8561**	**0.1320**	**0.1007**	**0.3011**	**0.6010**
n = 30	PromWu1	0.9420	0.9140	0.0543	0.0253	0.3316	0.6431
	PromWu2	0.9424	0.9056	0.0590	0.0208	0.2756	0.7036
	PromWu3	0.9388	0.8612	0.1100	0.0298	0.6340	0.3362
	PromLiu1	0.5180	0.4780	0.6587	0.6290	0.0016	0.3715
	PromLiu2	0.9648	0.9240	0.0527	0.0107	0.3649	0.6243
	PromRobusto	0.9212	0.8852	0.0747	0.0370	0.3303	0.6326
	PromResBal	0.9188	0.8908	0.0710	0.0417	0.3364	0.6219
	PromParBal	0.9364	0.9068	0.0436	0.0123	0.2567	0.7309
Promedio (n = 30)		**0.8853**	**0.8457**	**0.1405**	**0.1008**	**0.3164**	**0.5830**
n = 35	PromWu1	0.9380	0.9260	0.0439	0.0315	0.3292	0.6392
	PromWu2	0.9372	0.9276	0.0402	0.0302	0.2714	0.6988
	PromWu3	0.9300	0.8776	0.0951	0.0410	0.6039	0.3551
	PromLiu1	0.4822	0.4290	0.7321	0.6993	0.0019	0.2988
	PromLiu2	0.9636	0.9408	0.0361	0.0127	0.3815	0.6058
	PromRobusto	0.9120	0.9052	0.0526	0.0454	0.3354	0.6225
	PromResBal	0.9100	0.9016	0.0518	0.0430	0.3402	0.6176
	PromParBal	0.9336	0.9180	0.0312	0.0148	0.2707	0.7145
Promedio (n = 35)		**0.8758**	**0.8532**	**0.1354**	**0.1148**	**0.3168**	**0.5690**
PromGral	Wu1	0.9331	0.8855	0.0836	0.0343	0.2994	0.6663
	Wu2	0.9270	0.8731	0.0885	0.0318	0.2265	0.7418
	Wu3	0.9527	0.8495	0.1278	0.0220	**0.6169**	0.3611
	Liu1	0.5418	0.5453	**0.5224**	**0.5304**	0.0046	0.4865
	Liu2	**0.9603**	**0.9005**	0.0788	0.0177	0.3173	0.6650
	Robusto	0.9083	0.8617	0.0996	0.0508	0.2815	0.6683
	ResBal	0.9068	0.8618	0.0992	0.0521	0.2850	0.6632
	ParBal	0.9365	0.8876	0.0741	0.0233	0.2274	**0.7493**
	Intervalo	**0.8833**	**0.8331**	**0.1467**	**0.0953**	**0.2823**	**0.6252**

Figura 28: Eficiencia promedio de los intervalos Bootstrap por tamaño de muestra y esquema de remuestreo para el caso EI-NNVC.

A4. Eficiencia de los esquemas para el caso EI-NNVC

Con base en al menos 90 % de eficiencia promedio y sin importar el ICB (Figura 29): con $n = 10, 15$ y 20 ningún esquema cumplió la condición, sin embargo, al no considerar el criterio anterior, el mejor esquema para: n=10 es Wu3 (0.8252) y Liu2 (0.8215), n=15 es Liu2 (0.8515) y Pareado Balanceado (ParBar) con 0.8352 y n=20 es Liu2 (0.8800) y Wu1 (0.8532). Con el tamaño de muestra 25 el mejor esquema es Liu2 (0.9116) seguido por ParBal (0.8932), con tamaño de muestra 30 el mejor esquema es Liu2 (0.9140) seguido por ParBal (0.8956) y con el tamaño de muestra 35 los mejores esquemas son Liu2 y ParBal, con 0.9288 y 0.904 respectivamente.

Sin considerar el tamaño de la muestra e ICB, para el caso EI-NNVC los mejores promedios generales (Figura 29) en eficiencia de esquema son Liu2 (0.8848) y ParBal (0.8671).

Tamaño de Muestra	Replica	Wu1	Wu2	Wu3	Liu1	Liu2	Robusto	ResBal	ParBal
	1	0.7960	0.7480	0.8180	0.4020	0.8320	0.7680	0.7640	0.8100
	2	0.7800	0.7380	0.8280	0.4040	0.8280	0.7480	0.7495	0.8377
n = 10	3	0.8000	0.7680	0.8240	0.4140	0.8200	0.7640	0.7660	0.8060
	4	0.7816	0.7720	0.8380	0.3980	0.8160	0.7480	0.7480	0.8380
	5	0.7860	0.7590	0.8180	0.3780	0.8176	0.7560	0.7380	0.8156
Promedio (n = 10)		**0.7887**	**0.7570**	**0.8252**	**0.3992**	**0.8227**	**0.7568**	**0.7531**	**0.8215**
	1	0.8120	0.8040	0.7900	0.3380	0.8420	0.7680	0.7580	0.8360
	2	0.8140	0.8080	0.8180	0.3360	0.8477	0.7820	0.7860	0.8240
n = 15	3	0.8440	0.8160	0.8357	0.3620	0.8580	0.8020	0.8020	0.8480
	4	0.8160	0.8180	0.8340	0.4020	0.8540	0.7820	0.7820	0.8500
	5	0.8280	0.8060	0.8020	0.3720	0.8560	0.7800	0.7680	0.8180
Promedio (n = 15)		**0.8228**	**0.8104**	**0.8159**	**0.3620**	**0.8515**	**0.7828**	**0.7792**	**0.8352**
	1	0.8580	0.8260	0.7980	0.2780	0.8800	0.7980	0.8100	0.8500
	2	0.8300	0.8200	0.8056	0.2760	0.8560	0.7760	0.7740	0.8400
n = 20	3	0.8540	0.8520	0.8337	0.3080	0.8880	0.8240	0.8180	0.8740
	4	0.8740	0.8540	0.8480	0.2880	0.8960	0.8220	0.8320	0.8660
	5	0.8500	0.8517	0.8156	0.3000	0.8800	0.8096	0.8016	0.8337
Promedio (n = 20)		**0.8532**	**0.8407**	**0.8202**	**0.2900**	**0.8800**	**0.8059**	**0.8071**	**0.8527**
	1	0.8840	0.8820	0.8660	0.2300	0.9140	0.8460	0.8500	0.9000
	2	0.8920	0.8980	0.8680	0.2480	0.9260	0.8660	0.8620	0.9060
n = 25	3	0.8700	0.8620	0.8240	0.2220	0.9000	0.8380	0.8400	0.8860
	4	0.8580	0.8680	0.8180	0.2360	0.8960	0.8200	0.8240	0.8820
	5	0.8940	0.8840	0.8480	0.2060	0.9220	0.8640	0.8600	0.8920
Promedio (n = 25)		**0.8796**	**0.8788**	**0.8448**	**0.2284**	**0.9116**	**0.8468**	**0.8472**	**0.8932**
	1	0.8760	0.8680	0.8140	0.1640	0.8960	0.8500	0.8520	0.8700
	2	0.8900	0.8900	0.8460	0.1680	0.9100	0.8300	0.8360	0.9080
n = 30	3	0.8760	0.8760	0.8100	0.1920	0.9120	0.8540	0.8540	0.8880
	4	0.9020	0.8840	0.8460	0.1920	0.9260	0.8500	0.8540	0.9060
	5	0.9100	0.9160	0.8620	0.1680	0.9260	0.8780	0.8720	0.9060
Promedio (n = 30)		**0.8908**	**0.8868**	**0.8356**	**0.1768**	**0.9140**	**0.8524**	**0.8536**	**0.8956**
	1	0.8960	0.9040	0.8440	0.1480	0.9360	0.8740	0.8720	0.9220
	2	0.9140	0.9180	0.8640	0.1160	0.9320	0.8740	0.8780	0.9220
n = 35	3	0.8860	0.8840	0.8320	0.1160	0.9260	0.8560	0.8520	0.8880
	4	0.8860	0.8860	0.8280	0.1283	0.9200	0.8520	0.8440	0.8900
	5	0.9020	0.9060	0.8400	0.1380	0.9300	0.8640	0.8680	0.9000
Promedio (n = 35)		**0.8968**	**0.8996**	**0.8416**	**0.1293**	**0.9288**	**0.8640**	**0.8628**	**0.9044**
PromGralEsq		**0.8553**	**0.8456**	**0.8306**	**0.2643**	**0.8848**	**0.8181**	**0.8172**	**0.8671**

Figura 29: Eficiencia promedio de los esquemas por tamaño de muestra para el caso EI-NNVC.

A5. Eficiencia de los intervalos Bootstrap para el caso EI-NVD

Con base en el promedio general (Figura 30) para: Eficiencia del ICB Percentil (Efic Int Boot Perc) el mejor esquema resultó Liu2 (0.9837), Eficiencia en ICB BCa (Efic Int Boot Bca) el mejor esquema resultó Pareado Balanceado(ParBal) con 0.8915; Eficiencia del ICB Percentil cuando solo él lo contiene a la R^2 y Eficiencia del ICB Bca cuando solo él contiene a la R^2 el mejor esquema resulto Liu1, 0.3799 y 0.3885 respectivamente; la Eficiencia de ICB Percentil cuando gana en el empate a ICB BCa (Efic Boot Perc gana empate), el mejor esquema es Residuales Balanceados(ResBal) con 0.3364 y la Eficiencia ICB BCa cuando gana el empate al ICB Percentil (Efic Boot Bca gana empate), el mejor esquema es Wu2 (0.7012).

Sin considerar el tamaño de la muestra y esquema, para el caso EI-NVD los ICB mejores en promedio general (Figura 30) son: Eficiencia del ICB Percentil (Efic Int Boot Perc) con 0.9030 ante la Eficiencia en ICB BCa (Efic Int Boot Bca); la Eficiencia del ICB Percentil cuando solo el contiene a la R^2 (0.1402) y la Eficiencia de ICB BCa cuando gana en el empate al ICB Perc (Efic Boot Bca gana empate) con 0.6501. Por lo que, el mejor es ICB Percentil

Tamaño de Muestra	Esquema	Efic Int Boot Perc	Efic Int Boot Bca	Efic Int Boot Perc cuando solo el lo contiene	Efic Int Boot Bca cuando solo el contiene	Efic Boot Perc gana empate	Efic Boot Bca gana empate
n = 10	PromWu1	0.9623	0.8009	0.1866	0.0226	0.1716	0.8058
	PromWu2	0.9362	0.7815	0.1843	0.0228	0.1700	0.8071
	PromWu3	0.9291	0.7764	0.1920	0.0330	0.1864	0.7806
	PromLiu1	0.7011	0.7147	0.2093	0.2242	0.1204	0.6713
	PromLiu2	0.9800	0.8077	0.1860	0.0124	0.1648	0.8228
	PromRobusto	0.8547	0.7682	0.1765	0.0837	0.1930	0.7234
	PromResBal	0.8987	0.7926	0.1546	0.0412	0.2201	0.7387
	PromParBal	0.9211	0.8462	0.1196	0.0416	0.2224	0.7360
Promedio (n = 10)		**0.8979**	**0.7860**	**0.1761**	**0.0602**	**0.1811**	**0.7607**
n = 15	PromWu1	0.9752	0.8535	0.1370	0.0140	0.2550	0.7310
	PromWu2	0.9592	0.8419	0.1394	0.0194	0.2363	0.7443
	PromWu3	0.9364	0.8211	0.1602	0.0424	0.2798	0.6778
	PromLiu1	0.6559	0.6955	0.2520	0.2946	0.1369	0.6111
	PromLiu2	0.9860	0.8539	0.1416	0.0089	0.2357	0.7555
	PromRobusto	0.8764	0.7979	0.1641	0.0818	0.2530	0.6651
	PromResBal	0.9152	0.8283	0.1364	0.0458	0.2835	0.6707
	PromParBal	0.9400	0.8639	0.1044	0.0255	0.2769	0.6975
Promedio (n = 15)		**0.9055**	**0.8195**	**0.1544**	**0.0666**	**0.2446**	**0.6941**
n = 20	PromWu1	0.9744	0.8703	0.1182	0.0128	0.3006	0.6866
	PromWu2	0.9644	0.8635	0.1177	0.0147	0.2785	0.7068
	PromWu3	0.9488	0.8463	0.1366	0.0321	0.3227	0.6452
	PromLiu1	0.6256	0.6432	0.3451	0.3631	0.1089	0.5509
	PromLiu2	0.9896	0.8740	0.1201	0.0036	0.3030	0.6934
	PromRobusto	0.9100	0.8251	0.1384	0.0500	0.3113	0.6387
	PromResBal	0.9304	0.8423	0.1246	0.0331	0.3401	0.6267
	PromParBal	0.9524	0.8780	0.0957	0.0192	0.2923	0.6886
Promedio (n = 20)		**0.9119**	**0.8303**	**0.1495**	**0.0661**	**0.2822**	**0.6546**
n = 25	PromWu1	0.9656	0.9052	0.0791	0.0176	0.3298	0.6525
	PromWu2	0.9568	0.8952	0.0790	0.0156	0.3063	0.6781
	PromWu3	0.9440	0.8795	0.0983	0.0323	0.3719	0.5958
	PromLiu1	0.5956	0.6084	0.4103	0.4223	0.0863	0.5149
	PromLiu2	0.9804	0.9103	0.0784	0.0074	0.3412	0.6514
	PromRobusto	0.8988	0.8536	0.1005	0.0530	0.3288	0.6182
	PromResBal	0.9156	0.8672	0.0833	0.0323	0.3676	0.6001
	PromParBal	0.9528	0.9036	0.0625	0.0115	0.3134	0.6751
Promedio (n = 25)		**0.9012**	**0.8529**	**0.1239**	**0.0740**	**0.3057**	**0.6233**
n = 30	PromWu1	0.9732	0.9248	0.0588	0.0095	0.3755	0.6150
	PromWu2	0.9640	0.9208	0.0573	0.0131	0.3522	0.6347
	PromWu3	0.9456	0.8992	0.0791	0.0316	0.3902	0.5782
	PromLiu1	0.5710	0.5610	0.4922	0.4830	0.0623	0.4664
	PromLiu2	0.9844	0.9264	0.0618	0.0030	0.3973	0.5997
	PromRobusto	0.9096	0.8748	0.0832	0.0466	0.3625	0.5909
	PromResBal	0.9228	0.8908	0.0712	0.0377	0.4011	0.5612
	PromParBal	0.9572	0.9224	0.0440	0.0079	0.3275	0.6647
Promedio (n = 30)		**0.9035**	**0.8650**	**0.1184**	**0.0791**	**0.3336**	**0.5888**
n = 35	PromWu1	0.9724	0.9384	0.0481	0.0136	0.3641	0.6223
	PromWu2	0.9648	0.9360	0.0464	0.0171	0.3466	0.6363
	PromWu3	0.9456	0.9136	0.0690	0.0364	0.3850	0.5786
	PromLiu1	0.5368	0.5048	0.5706	0.5437	0.0395	0.4168
	PromLiu2	0.9820	0.9408	0.0481	0.0064	0.4069	0.5868
	PromRobusto	0.9112	0.8888	0.0716	0.0482	0.3516	0.6002
	PromResBal	0.9152	0.9012	0.0608	0.0462	0.4061	0.5477
	PromParBal	0.9568	0.9348	0.0364	0.0137	0.3432	0.6431
Promedio (n = 35)		**0.8981**	**0.8698**	**0.1189**	**0.0907**	**0.3304**	**0.5790**
PromGral	Wu1	0.9705	0.8822	0.1046	0.0150	0.2994	0.6855
	Wu2	0.9576	0.8731	0.1040	0.0171	0.2817	**0.7012**
	Wu3	0.9416	0.8560	0.1225	0.0346	0.3226	0.6427
	Liu1	0.6143	0.6213	**0.3799**	**0.3885**	0.0924	0.5386
	Liu2	**0.9837**	0.8855	0.1060	0.0070	0.3081	0.6849
	Robusto	0.8934	0.8347	0.1224	0.0605	0.3000	0.6394
	ResBal	0.9163	0.8537	0.1052	0.0394	**0.3364**	0.6242
	ParBal	0.9467	**0.8915**	0.0771	0.0199	0.2960	0.6842
	Intervalo	**0.9030**	**0.8373**	**0.1402**	**0.0728**	**0.2796**	**0.6501**

Figura 30: Eficiencia promedio de los intervalos Bootstrap por tamaño de muestra y esquema de remuestreo para el caso EI-NVD.

A6. Eficiencia de los esquemas para el caso EI-NVD

Con base en al menos 90 % de eficiencia promedio y sin importar el ICB (Figura 31): con $n = 10, 15$ y 20 ningún esquema cumplió la condición, sin embargo, al no considerar el criterio anterior, el mejor esquema para: n=10 es Pareado Balanceado (ParBal) con 0.8110, Liu2 (0.7977), Wu1 (0.7829) y Wu2 (0.7637); n=15 es Liu2 (0.8463), ParBal (0.8419), Wu1 (0.8415) y Wu2 (0.8255), y n=20 Liu2 (0.8708), ParBal (0.8612), Wu1 (0.8591) y Wu2 (0.7637). Con el tamaño de muestra 25 el mejor esquema es Liu2 (0.9035) seguido por ParBal (0.8932), Wu1 (0.8892) y Wu2 (0.881); con tamaño de muestra 30 los mejores esquemas son Liu2 (0.9236), Wu1 (0.9160), ParBal (0.9152) y Wu2 (0.9088), y con el tamaño de muestra 35 los mejores esquemas son Liu2 (0.9348), Wu1 (0.9256), ParBal (0.922) y Wu2 (0.92).

Sin considerar el tamaño de la muestra, para el caso EI-NVD el mejor promedio general (Figura 31) en eficiencia de esquema son Liu2 (0.8794), ParBal (0.8741), Wu1 (0.8690) y Wu2 (0.8583).

Tamaño de Muestra	Replica	Wu1	Wu2	Wu3	Liu1	Liu2	Robusto	ResBal	ParBal
n = 10	1	0.7540	0.7293	0.7320	0.5160	0.7800	0.6860	0.7260	0.8016
	2	0.8020	0.7782	0.7780	0.5600	0.8020	0.7080	0.7640	0.8200
	3	0.7776	0.7671	0.7320	0.5500	0.7976	0.6880	0.7600	0.8080
	4	0.7948	0.7733	0.7621	0.5531	0.8068	0.7209	0.7811	0.8092
	5	0.7860	0.7708	0.7500	0.5940	0.8020	0.7160	0.7680	0.8160
Promedio (n = 10)		**0.7829**	**0.7637**	**0.7508**	**0.5546**	**0.7977**	**0.7038**	**0.7598**	**0.8110**
n = 15	1	0.8520	0.8260	0.7976	0.4800	0.8580	0.7120	0.7940	0.8440
	2	0.8480	0.8360	0.8000	0.4960	0.8540	0.7680	0.8140	0.8700
	3	0.8380	0.8100	0.7860	0.4840	0.8460	0.7480	0.7860	0.8220
	4	0.8380	0.8196	0.7680	0.4680	0.8420	0.7100	0.7720	0.8500
	5	0.8317	0.8357	0.7796	0.5251	0.8317	0.7255	0.7856	0.8236
Promedio (n = 15)		**0.8415**	**0.8255**	**0.7862**	**0.4906**	**0.8463**	**0.7327**	**0.7903**	**0.8419**
n = 20	1	0.8680	0.8520	0.8360	0.3980	0.8820	0.7960	0.8220	0.8760
	2	0.8620	0.8580	0.8196	0.3840	0.8758	0.7840	0.8120	0.8600
	3	0.8440	0.8420	0.8180	0.4220	0.8420	0.7900	0.8160	0.8560
	4	0.8497	0.8437	0.7936	0.4000	0.8660	0.7615	0.7996	0.8440
	5	0.8720	0.8580	0.8280	0.4440	0.8880	0.7880	0.8220	0.8700
Promedio (n = 20)		**0.8591**	**0.8507**	**0.8190**	**0.4096**	**0.8708**	**0.7839**	**0.8143**	**0.8612**
n = 25	1	0.9000	0.8880	0.8700	0.3240	0.9040	0.8140	0.8460	0.9080
	2	0.8960	0.8800	0.8520	0.3860	0.9080	0.8300	0.8580	0.8820
	3	0.8980	0.8920	0.8520	0.3500	0.9160	0.8220	0.8420	0.8980
	4	0.8700	0.8740	0.8400	0.3560	0.8958	0.7840	0.8220	0.8920
	5	0.8818	0.8717	0.8417	0.3400	0.8938	0.7920	0.8280	0.8860
Promedio (n = 25)		**0.8892**	**0.8811**	**0.8511**	**0.3512**	**0.9035**	**0.8084**	**0.8392**	**0.8932**
n = 30	1	0.9220	0.9240	0.8880	0.2880	0.9300	0.8460	0.8700	0.9360
	2	0.9140	0.8980	0.8640	0.2760	0.9160	0.8320	0.8540	0.9140
	3	0.9098	0.8980	0.8620	0.2966	0.9180	0.8180	0.8300	0.9038
	4	0.9240	0.9260	0.8780	0.3140	0.9320	0.8497	0.8798	0.9300
	5	0.9100	0.8980	0.8620	0.2740	0.9220	0.8240	0.8520	0.8920
Promedio (n = 30)		**0.9160**	**0.9088**	**0.8708**	**0.2897**	**0.9236**	**0.8339**	**0.8572**	**0.9152**
n = 35	1	0.9360	0.9300	0.9020	0.2180	0.9420	0.8560	0.8680	0.9400
	2	0.9320	0.9220	0.8760	0.2420	0.9420	0.8500	0.8560	0.9180
	3	0.9140	0.9060	0.8700	0.2220	0.9220	0.8180	0.8420	0.9160
	4	0.9180	0.9140	0.8580	0.2280	0.9260	0.8400	0.8500	0.9100
	5	0.9280	0.9280	0.8960	0.2420	0.9420	0.8660	0.8820	0.9260
Promedio (n = 35)		**0.9256**	**0.9200**	**0.8804**	**0.2304**	**0.9348**	**0.8460**	**0.8596**	**0.9220**
PromGralEsq		**0.8690**	**0.8583**	**0.8264**	**0.3877**	**0.8794**	**0.7848**	**0.8201**	**0.8741**

Figura 31: Eficiencia promedio de los esquemas por tamaño de muestra para el caso EI-NVD.

A7. Eficiencia de los intervalos Bootstrap para el caso EI-NNVD

Con base en el promedio general (Figura 32) para: Eficiencia del ICB Percentil (Efic Int Boot Perc) el mejor esquema resultó Liu2 (0.9554), Eficiencia en ICB BCa (Efic Int Boot Bca) el mejor esquema resultó Pareado Balanceado (ParBal) con 0.8882; Eficiencia del ICB Percentil cuando solo él lo contiene a la R^2 el mejor esquema resulto Wu3 (0.2807), Eficiencia del ICB BCa cuando solo él contiene a la R^2 el mejor esquema resultó Liu1 (0.1632); la Eficiencia de ICB Percentil cuando gana en el empate a ICB BCa (Efic Boot Perc gana empate), el mejor esquema es Residuales Balanceados(ResBal) con 0.5197 y la Eficiencia ICB BCa cuando gana el empate al ICB Percentil (Efic Boot Bca gana empate), el mejor esquema es ParBal (0.5074).

Sin considerar el tamaño de la muestra y esquema, para el caso EI-NNVD los ICB mejores en promedio general (Figura 32) son: Eficiencia del ICB Percentil (Efic Int Boot Perc) con 0.9035 ante la Eficiencia en ICB BCa (Efic Int Boot Bca); la Eficiencia del ICB Percentil cuando solo el contiene a la R^2 (0.1940) y la Eficiencia de ICB BCa cuando gana en el empate al ICB Perc (Efic Boot Bca gana empate) con 0.5074.Por lo que, el mejor es ICB Percentil.

Tamaño de Muestra	Esquema	Efic Int Boot Perc	Efic Int Boot Bca	Efic Int Boot Perc cuando solo el lo contiene	Efic Int Boot Bca cuando solo el contiene	Efic Boot Perc gana empate	Efic Boot Bca gana empate
n = 10	PromWu1	0.9636	0.7438	0.2360	0.0102	0.3257	0.6641
	PromWu2	0.9302	0.7499	0.1987	0.0060	0.2845	0.7095
	PromWu3	0.9213	0.6790	0.2866	0.0318	0.3077	0.6605
	PromLiu1	0.7264	0.6348	0.2831	0.1797	0.3063	0.5140
	PromLiu2	0.9764	0.7590	0.2296	0.0090	0.2822	0.7088
	PromRobusto	0.8604	0.7528	0.1791	0.0616	0.2259	0.7126
	PromResBal	0.9208	0.7612	0.1880	0.0178	0.3080	0.6743
	PromParBal	0.9128	0.8328	0.1306	0.0471	0.2321	0.7209
Promedio (n = 10)		**0.9015**	**0.7392**	**0.2165**	**0.0454**	**0.2840**	**0.6706**
n = 15	PromWu1	0.9660	0.7301	0.2563	0.0158	0.3850	0.5992
	PromWu2	0.9541	0.7583	0.2170	0.0149	0.3819	0.6032
	PromWu3	0.9419	0.6601	0.3210	0.0311	0.4977	0.4711
	PromLiu1	0.7455	0.6398	0.2626	0.1407	0.4766	0.3827
	PromLiu2	0.9739	0.7511	0.2379	0.0117	0.3716	0.6167
	PromRobusto	0.8683	0.7694	0.2047	0.1022	0.3279	0.5698
	PromResBal	0.9552	0.7818	0.1958	0.0175	0.5012	0.4813
	PromParBal	0.9460	0.8591	0.1135	0.0238	0.2644	0.7118
Promedio (n = 15)		**0.9188**	**0.7437**	**0.2261**	**0.0447**	**0.4008**	**0.5545**
n = 20	PromWu1	0.9540	0.7546	0.2308	0.0276	0.4514	0.5210
	PromWu2	0.9467	0.7838	0.1894	0.0210	0.4526	0.5264
	PromWu3	0.9226	0.6860	0.2987	0.0568	0.5619	0.3813
	PromLiu1	0.7240	0.6512	0.2541	0.1710	0.4977	0.3314
	PromLiu2	0.9624	0.7706	0.2171	0.0223	0.4409	0.5367
	PromRobusto	0.8888	0.7843	0.1922	0.0846	0.3824	0.5330
	PromResBal	0.9568	0.7952	0.1898	0.0251	0.5480	0.4269
	PromParBal	0.9536	0.8820	0.0897	0.0159	0.3071	0.6771
Promedio (n = 20)		**0.9136**	**0.7635**	**0.2077**	**0.0530**	**0.4552**	**0.4917**
n = 25	PromWu1	0.9468	0.7887	0.1931	0.0315	0.5110	0.4575
	PromWu2	0.9439	0.8126	0.1625	0.0271	0.5013	0.4716
	PromWu3	0.8924	0.7065	0.2726	0.0812	0.5846	0.3342
	PromLiu1	0.7400	0.6600	0.2400	0.1479	0.5042	0.3478
	PromLiu2	0.9512	0.7994	0.1877	0.0336	0.4763	0.4901
	PromRobusto	0.8744	0.7963	0.1899	0.1105	0.3871	0.5024
	PromResBal	0.9272	0.8007	0.1800	0.0505	0.5853	0.3643
	PromParBal	0.9544	0.9040	0.0641	0.0119	0.3150	0.6730
Promedio (n = 25)		**0.9038**	**0.7835**	**0.1862**	**0.0618**	**0.4831**	**0.4551**
n = 30	PromWu1	0.9396	0.8172	0.1664	0.0415	0.5217	0.4368
	PromWu2	0.9352	0.8411	0.1336	0.0366	0.5167	0.4467
	PromWu3	0.8726	0.7115	0.2647	0.0981	0.5781	0.3239
	PromLiu1	0.7396	0.6496	0.2664	0.1649	0.4576	0.3775
	PromLiu2	0.9412	0.8196	0.1657	0.0418	0.5041	0.4541
	PromRobusto	0.8708	0.8232	0.1599	0.1113	0.3805	0.5082
	PromResBal	0.9176	0.8196	0.1670	0.0674	0.5935	0.3391
	PromParBal	0.9576	0.9200	0.0497	0.0109	0.3216	0.6675
Promedio (n = 30)		**0.8968**	**0.8002**	**0.1717**	**0.0715**	**0.4842**	**0.4442**
n = 35	PromWu1	0.9264	0.8280	0.1464	0.0449	0.5390	0.4161
	PromWu2	0.9259	0.8590	0.1099	0.0406	0.5519	0.4075
	PromWu3	0.8486	0.7337	0.2407	0.1219	0.5698	0.3082
	PromLiu1	0.7331	0.6503	0.2683	0.1753	0.4457	0.3790
	PromLiu2	0.9272	0.8379	0.1403	0.0487	0.5268	0.4245
	PromRobusto	0.8712	0.8304	0.1490	0.1072	0.3879	0.5049
	PromResBal	0.9016	0.8231	0.1589	0.0788	0.5822	0.3390
	PromParBal	0.9576	0.9312	0.0351	0.0077	0.3458	0.6464
Promedio (n = 35)		**0.8864**	**0.8117**	**0.1561**	**0.0781**	**0.4936**	**0.4282**
PromGral	Wu1	0.9494	0.7771	0.2048	0.0286	0.4556	0.5158
	Wu2	0.9393	0.8008	0.1685	0.0244	0.4481	0.5275
	Wu3	0.8999	0.6961	**0.2807**	0.0702	0.5166	0.4132
	Liu1	0.7348	0.6476	0.2624	**0.1632**	0.4480	0.3887
	Liu2	**0.9554**	0.7896	0.1964	0.0278	0.4336	0.5385
	Robusto	0.8723	0.7927	0.1791	0.0962	0.3486	0.5552
	ResBal	0.9298	0.7969	0.1799	0.0428	**0.5197**	0.4375
	ParBal	0.9470	**0.8882**	0.0804	0.0195	0.2977	**0.6828**
	Intervalo	**0.9035**	**0.7736**	**0.1940**	**0.0591**	**0.4335**	**0.5074**

Figura 32: Eficiencia promedio de los intervalos Bootstrap por tamaño de muestra y esquema de remuestreo para el caso EI-NNVD.

A8. Eficiencia de los esquemas para el caso EI-NNVD

Con base en al menos 90 % de eficiencia promedio y sin importar el ICB (Figura 33): con $n = 10, 15, 20$ y 25 ningún esquema cumplió la condición, sin embargo, al no considerar el criterio anterior, el mejor esquema para: n=10 es Pareado Balanceado (ParBal) con 0.7936; $n = 15$ es (ParBal) con 0.8387; n=20 es ParBal (0.8680) y n=25 es ParBal (0.8932). Con los tamaños de muestra 30 y 35 el mejor esquema es ParBal, 0.91 y 0.9240 respectivamente.

Sin considerar el tamaño de la muestra, para el caso EI-NNVD el mejor promedio general (Figura 33) en eficiencia de esquema es ParBal (0.8713).

Tamaño de Muestra	Replica	Wu1	Wu2	Wu3	Liu1	Liu2	Robusto	ResBal	ParBal
n = 10	1	0.7220	0.7337	0.6420	0.5140	0.7400	0.6800	0.7320	0.7940
	2	0.7340	0.7449	0.6593	0.5040	0.7500	0.7060	0.7420	0.7960
	3	0.7369	0.7342	0.6627	0.5400	0.7435	0.7260	0.7500	0.8060
	4	0.7480	0.7581	0.6633	0.5460	0.7680	0.6940	0.7520	0.7800
	5	0.7400	0.7561	0.6593	0.5000	0.7595	0.7260	0.7620	0.7920
Promedio (n = 10)		**0.7362**	**0.7454**	**0.6573**	**0.5208**	**0.7522**	**0.7064**	**0.7476**	**0.7936**
n = 15	1	0.7220	0.7556	0.6633	0.5700	0.7575	0.7080	0.7980	0.8480
	2	0.7260	0.7450	0.6293	0.5540	0.7460	0.6700	0.7660	0.8640
	3	0.7209	0.7636	0.6573	0.5360	0.7410	0.6914	0.7615	0.8176
	4	0.6934	0.7131	0.6044	0.5210	0.7074	0.6713	0.7340	0.8080
	5	0.7300	0.7580	0.6440	0.5680	0.7595	0.7120	0.7816	0.8560
Promedio (n = 15)		**0.7185**	**0.7471**	**0.6397**	**0.5498**	**0.7423**	**0.6905**	**0.7682**	**0.8387**
n = 20	1	0.7300	0.7510	0.6258	0.5400	0.7595	0.7060	0.7500	0.8620
	2	0.7320	0.7675	0.6426	0.5440	0.7420	0.7220	0.7860	0.8680
	3	0.7530	0.7968	0.6840	0.5400	0.7635	0.7014	0.7720	0.8760
	4	0.7340	0.7555	0.6253	0.5300	0.7620	0.7260	0.7740	0.8600
	5	0.7200	0.7660	0.6580	0.5440	0.7400	0.7340	0.7940	0.8740
Promedio (n = 20)		**0.7338**	**0.7674**	**0.6471**	**0.5396**	**0.7534**	**0.7179**	**0.7752**	**0.8680**
n = 25	1	0.7940	0.8020	0.6520	0.5620	0.7920	0.7120	0.7840	0.8980
	2	0.7580	0.7756	0.6419	0.5420	0.7460	0.7255	0.7640	0.8860
	3	0.7440	0.7940	0.6433	0.5600	0.7800	0.7260	0.7455	0.8920
	4	0.7655	0.8036	0.6740	0.5800	0.7851	0.6880	0.7660	0.9020
	5	0.7580	0.7776	0.6345	0.5680	0.7600	0.6900	0.7420	0.8880
Promedio (n = 25)		**0.7639**	**0.7905**	**0.6491**	**0.5624**	**0.7726**	**0.7083**	**0.7603**	**0.8932**
n = 30	1	0.7780	0.7960	0.6473	0.5320	0.7820	0.7340	0.7760	0.9080
	2	0.7900	0.8220	0.6433	0.5540	0.7740	0.7480	0.7720	0.9160
	3	0.7680	0.8016	0.6420	0.5420	0.7780	0.7280	0.7500	0.9020
	4	0.7760	0.8040	0.6353	0.5560	0.7800	0.7140	0.7540	0.9000
	5	0.8040	0.8277	0.6393	0.5280	0.8120	0.7340	0.7700	0.9240
Promedio (n = 30)		**0.7832**	**0.8103**	**0.6414**	**0.5424**	**0.7852**	**0.7316**	**0.7644**	**0.9100**
n = 35	1	0.7700	0.8076	0.6197	0.5431	0.7760	0.7340	0.7220	0.9200
	2	0.7960	0.8297	0.6165	0.5040	0.8056	0.7500	0.7655	0.9180
	3	0.8120	0.8520	0.7120	0.5360	0.8220	0.7400	0.7840	0.9240
	4	0.7760	0.8036	0.6453	0.5580	0.7820	0.7420	0.7460	0.9200
	5	0.8000	0.8280	0.6290	0.5400	0.8000	0.7400	0.7740	0.9380
Promedio (n = 35)		**0.7908**	**0.8242**	**0.6445**	**0.5362**	**0.7971**	**0.7412**	**0.7583**	**0.9240**
PromGralEsq		**0.7544**	**0.7808**	**0.6465**	**0.5419**	**0.7671**	**0.7160**	**0.7623**	**0.8713**

Figura 33: Eficiencia promedio de los esquemas por tamaño de muestra para el caso EI-NNVD.

Anexo B. Resultados de los análisis de varianza en la comparación de las Eficiencias de los ICB

Fuente	Suma de Cuadrados	Gl	Cuadrado Medio	Razón-F	Valor-P
TipoMod	0.512682	1	0.512682	3096.40	0.0000
TM	0.0320222	5	0.00640444	38.68	0.0000
Esq	10.6914	7	1.52734	9224.53	0.0000
TipoMod*TM	0.00560964	5	0.00112193	6.78	0.0000
TipoMod*Esq	0.531686	7	0.0759551	458.74	0.0000
TM*Esq	0.431637	35	0.0123325	74.48	0.0000
TipoMod*TM*Esq	0.0693391	35	0.00198112	11.97	0.0000
Residuo	0.063249	382	0.000165573		
Total	12.4542	477			

Figura 34: ANOVA para la eficiencia del ICB Percentil cuando se tiene NVC.

Fuente	Suma de Cuadrados	Gl	Cuadrado Medio	Razón-F	Valor-P
TipoMod	0.0571653	1	0.0571653	239.09	0.0000
TM	0.0708953	5	0.0141791	59.30	0.0000
Esq	11.5232	7	1.64617	6885.12	0.0000
TipoMod*TM	0.0475327	5	0.00950655	39.76	0.0000
TipoMod*Esq	0.691258	7	0.0987512	413.03	0.0000
TM*Esq	1.18671	35	0.0339059	141.81	0.0000
TipoMod*TM*Esq	0.0301378	35	0.00086108	3.60	0.0000
Residuo	0.0906154	379	0.000239091		
Total	13.7863	474			

Figura 35: ANOVA para la eficiencia del ICB BCa cuando se tiene NVC.

Fuente	Suma de Cuadrados	Gl	Cuadrado Medio	Razón-F	Valor-P
TipoMod	0.0647545	1	0.0647545	365.88	0.0000
TM	0.014846	5	0.00296919	16.78	0.0000
Esq	8.39952	7	1.19993	6780.01	0.0000
TipoMod*TM	0.0032701	5	0.00065402	3.70	0.0028
TipoMod*Esq	0.319351	7	0.0456216	257.78	0.0000
TM*Esq	0.442176	35	0.0126336	71.38	0.0000
TipoMod*TM*Esq	0.110601	35	0.00316002	17.86	0.0000
Residuo	0.0672527	380	0.000176981		
Total	9.64682	475			

Figura 36: ANOVA para la eficiencia del ICB Percentil cuando se tiene NNVC.

Fuente	Suma de Cuadrados	Gl	Cuadrado Medio	Razón-F	Valor-P
TipoMod	0.124489	1	0.124489	616.12	0.0000
TM	0.0214264	5	0.00428528	21.21	0.0000
Esq	7.29858	7	1.04265	5160.32	0.0000
TipoMod*TM	0.125113	5	0.0250226	123.84	0.0000
TipoMod*Esq	0.312757	7	0.0446796	221.13	0.0000
TM*Esq	0.901817	35	0.0257662	127.52	0.0000
TipoMod*TM*Esq	0.0421127	35	0.00120322	5.95	0.0000
Residuo	0.0775881	384	0.000202052		
Total	8.90389	479			

Figura 37: ANOVA para la eficiencia del ICB BCa cuando se tiene NNVC.

Fuente	Suma de Cuadrados	Gl	Cuadrado Medio	Razón-F	Valor-P
TipoMod	0.676394	1	0.676394	3630.22	0.0000
TM	0.0103565	5	0.00207129	11.12	0.0000
Esq	6.99108	7	0.998725	5360.18	0.0000
TipoMod*TM	0.00610741	5	0.00122148	6.56	0.0000
TipoMod*Esq	0.221902	7	0.0317003	170.14	0.0000
TM*Esq	0.452056	35	0.0129159	69.32	0.0000
TipoMod*TM*Esq	0.0514574	35	0.00147021	7.89	0.0000
Residuo	0.071548	384	0.000186323		
Total	8.4809	479			

Figura 38: ANOVA para la eficiencia del ICB Percentil cuando se tiene NVD.

Fuente	Suma de Cuadrados	Gl	Cuadrado Medio	Razón-F	Valor-P
TipoMod	0.00653274	1	0.00653274	26.55	0.0000
TM	0.123515	5	0.0247031	100.40	0.0000
Esq	5.96943	7	0.852775	3465.91	0.0000
TipoMod*TM	0.089897	5	0.0179794	73.07	0.0000
TipoMod*Esq	0.552347	7	0.0789067	320.70	0.0000
TM*Esq	0.964397	35	0.0275542	111.99	0.0000
TipoMod*TM*Esq	0.0336813	35	0.000962323	3.91	0.0000
Residuo	0.094482	384	0.000246047		
Total	7.83428	479			

Figura 39: ANOVA para la eficiencia del ICB BCa cuando se tiene NVD.

Fuente	Suma de Cuadrados	Gl	Cuadrado Medio	Razón-F	Valor-P
TipoMod	0.855888	1	0.855888	4235.23	0.0000
TM	0.0276751	5	0.00553503	27.39	0.0000
Esq	2.14168	7	0.305955	1513.97	0.0000
TipoMod*TM	0.0118284	5	0.00236568	11.71	0.0000
TipoMod*Esq	0.811916	7	0.115988	573.95	0.0000
TM*Esq	0.227936	35	0.00651247	32.23	0.0000
TipoMod*TM*Esq	0.0757693	35	0.00216484	10.71	0.0000
Residuo	0.0767933	380	0.000202088		
Total	4.22629	475			

Figura 40: ANOVA para la eficiencia del ICB Percentil cuando se tiene NNVD.

Fuente	Suma de Cuadrados	Gl	Cuadrado Medio	Razón-F	Valor-P
TipoMod	0.0894361	1	0.0894361	327.75	0.0000
TM	0.150684	5	0.0301367	110.44	0.0000
Esq	3.24457	7	0.463509	1698.58	0.0000
TipoMod*TM	0.0580848	5	0.011617	42.57	0.0000
TipoMod*Esq	0.620147	7	0.0885924	324.66	0.0000
TM*Esq	0.153858	35	0.00439595	16.11	0.0000
TipoMod*TM*Esq	0.11232	35	0.00320915	11.76	0.0000
Residuo	0.104786	384	0.000272881		
Total	4.53388	479			

Figura 41: ANOVA para la eficiencia del ICB BCa cuando se tiene NNVD.

Anexo C. Programas en R

C1. Función CalcularR2Bootstrap

En este anexo se muestra el script en R (R Core Team, 2024), el cual se utilizó para utilizar los esquemas Bootstrap dependiendo del caso del modelo.

```
#Función de apoyo para obtener las muestras Bootstrap de R²
#Sea y <- los observador,
# z <- los estimados,
#yAjRob <- y ajustados
#residuales <- residuales por regresion lineal,
#residualesRob <- residuales por regresion lineal robusta,
#residualesRP <- residuales robustos ponderados,
#hii<- valor de aplacamiento del modelo con
#regresion simple, n <- tamaño de la muestra de residuos,
#B <- repeticiones Bootstrap,
#tipo <- sea el tipo de esquema Boostrap Robusto.
#1<-Wu 1, 2<-Wu 2, 3<-Wu 3,
# 4<-Liu 1, 5<-Liu 2, 6<- Robusto/Simple
# 7<-residuales balanceados, 8<- pareado balanceado
CalcularR2Bootstrap <- function(y, z, yAjRob, residuales,
     residualesRob, residualesRP, hii, n, B, tipo) {
 sqrt_hii <- sqrt(1 - hii)
 RsBoot <- numeric(B)
 if((tipo == 7) || (tipo ==8)){
  N     <- rep(1:n,B)
  NPerm <- sample(N)
 }
 for (i in 1:B) {
  residualBT <- switch(
  tipo,
  {
   tt <- rnorm(n)
   (tt * residualesRP) / sqrt_hii
  },
  {
   ai <- (residuales - mean(residuales)) / sd(residuales)
   tt <- sample(ai, replace = TRUE)
   (tt * residualesRP) / sqrt_hii
  },
  {
   mediana <- median(residualesRP)
   NMAD <- (1 / 0.6745) * median(abs(residualesRP - mediana))
   Rai <- (residualesRP - mediana) / NMAD
```

```
   tt <- sample(Rai, replace = TRUE)
   (tt * residualesRP) / sqrt_hii
  },
  {
   tt <- rgamma(n, 2, 4)
   (tt * residualesRP) / sqrt_hii
  },
  {
   media1 <- 0.5 * sqrt(17 / 6) + sqrt(1 / 6)
   media2 <- 0.5 * sqrt(17 / 6) - sqrt(1 / 6)
   H <- rnorm(n, media1, sqrt(0.5))
   D <- rnorm(n, media2, sqrt(0.5))
   tt <- H * D - media1 * media2
   (tt * residualesRP) / sqrt_hii
  },
  {
   sample(residualesRob, replace = TRUE)
  },
  {
   posI <- (i-1)*n+1
   posF <- i*n
   VPosi <- NPerm[posI:posF]
   residualesRP[VPosi]
  },
  {
   posI <- (i-1)*n+1
   posF <-i*n
   NPerm[posI:posF]
  },
  stop("Esquema no válido")
  )

  if(tipo != 8){
   yBoots <- yAjRob + residualBT
   modeloBoots <- lm(yBoots ~ z)
  }else{
   YP <- y[residualBT]
   ZP <- z[residualBT]
   modeloBoots <- lm(YP ~ ZP)
  }

  RsBoot[i] <- summary(modeloBoots)$r.squared
 }
 return(RsBoot)
}
```

C2. Función ContruirIntervBoot

En este anexo se muestra el script en R (R Core Team, 2024), el cual se utilizó para la construcción de los ICB Percentil e ICB BCa.

```
#Función de apoyo para construir el intervalo de confianza
#la muestra de R² Bootstraps del modelo
#Sea data <- los valores z e y del modelo,
# R2 <- la R² estimada del modelo,
#muestrasR2Boot <- la muestra de R² Bootstrap,
# B <- repeticiones Bootstrap, nivConfianza<- nivel de confianza,
#tipo<- sea el tipo de intervalo de confiaza que desea construir,opciones:
#1<- percentil, 2<-BCa
ContruirIntervBoot <- function(data, R2, muestrasR2Boot, B,
        nivConfianza, tipo){
 intervalo <- numeric(2)
 alpha <- 1-nivConfianza
 z <- as.numeric(data[[1]])
 y <- as.numeric(data[[2]])
 vectorR2Bootstrap <- muestrasR2Boot
 intervalo <- switch(
 tipo,
 {
  puntosCriticos <- quantile(vectorR2Bootstrap,
         c(alpha/2, 1 - alpha/2))
  as.vector(puntosCriticos)
 },
 {
  n <- length(z)
  z0 <- qnorm(mean(vectorR2Bootstrap < R2))
  suma0=0
  suma02=0
  suma03=0
  for(i in 1:n)
  {R2MI=summary(lm(y[-i]~z[-i]))$r.squared
   suma0=R2MI+suma0
  }
  R2PMI=suma0/n
  for(i in 1:n)
  {Dif0=R2PMI-summary(lm(y[-i]~z[-i]))$r.squared
   suma02=Dif0^2+suma02
   suma03=Dif0^3+suma03
  }
  a=suma03/(6*(suma02^1.5))

  z_alfa1 <- qnorm(alpha / 2)
```

```
  z_alfa2 <- qnorm(1 - alpha / 2)
  alfa1 <- pnorm(z0 + (z0 + z_alfa1) / (1 - a * (z0 + z_alfa1)))
  alfa2 <- pnorm(z0 + (z0 + z_alfa2) / (1 - a * (z0 + z_alfa2)))
  ICInfBootBCa <- quantile(muestrasR2Boot, alfa1)
  ICSupBootBCa <- quantile(muestrasR2Boot, alfa2)
  as.vector(c(ICInfBootBCa, ICSupBootBCa))
 },
 stop("Intervalo no válido")
 )
 return (intervalo)
}
```

C3. Función EvalPrecisionModel

En este anexo se muestra el script en R (R Core Team, 2024), el cual se utilizó para evaluar la precisión de un modelo construyendo intervalos de confianza para cada esquema Bootstrap.

```
#Función propuesta para evaluar la precisión de un modelo creando
#intervalos de confianza con la tecnica de regresion lineal
#con estimadores robustos y esquemas Booststrap
#Sea data<- el modelo con las columnas z e y
#caso <- 1 #Normalidad- homocedasticidad,
#2 #Normalidad-heterocidasticidad,
#3 #No normalidad-homocedasticidad y
#4 #No normalidad-heterocidastecidad
EvalPrecisionModel <- function (data, alpha, nivConfianza, caso){
 library("robustbase")
 library("readxl")
 z <- as.numeric(data[[1]])
 y <- as.numeric(data[[2]])
 n <- length(z)
 B <- 1000 #Remuestras bootstrap

 #Regresion lineal simple
 modeloLineal <- lm(y~z)
 residuales <- residuals(modeloLineal)
 R2 <- summary(modeloLineal)$r.squared
 hii <- hatvalues(modeloLineal)
 yAju <- fitted(modeloLineal)

 #Casos
 NVC <- 1 #Normalidad- homocedasticidad
 NVD <- 2 #Normalidad-heterocidasticidad
 NNVC <- 3 #No normalidad-homocedasticidad
 NNVD <- 4 #No normalidad-heterocidastecidad
 numRemues <- 8 #Numero de tipos de remuestreos implementados
 rsBoot <- matrix(0,nrow = B, ncol = numRemues)

 #Uso de los estimadores dependendiendo el caso
 if(NVC == caso){
  #Minimos cuadrados
  residualesRob <- residuales
  yAjRob <- yAju
  residualesRP <- residuales

 }else{
```

```
  # Uso de estimador robusto MM
  modeloLinealRob <- lmrob(y ~ z, method = "MM")
  residualesRob <- modeloLinealRob$residuals
  yAjRob <- modeloLinealRob$fitted.values

  #Segundo caso,no cumple normalidad, si varianza
  if(NNVC==caso){
   # Residuales robustos sin ponderacion
   residualesRP <- residualesRob
  }

  #Tercer caso, no hay homocedasticidad
  if((NNVD==caso) || (NVD==caso)){
   # Residuales robustos con ponderacion
   CMERob <- modeloLinealRob$scale**2
   #Llamar función para ponderar residuales
   residualesRP <- PodResidRobu (residualesRob,CMERob)
  }
 }

 #Procesamiento de los residuales en distintos esquemas
 for(i in 1:numRemues){
  BootR <- CalcularR2Bootstrap(y,z, yAjRob,residuales
  ,residualesRob,residualesRP,hii,n,B,tipo=i)
  rsBoot[, i] <- BootR
 }
 resultadosInter <- vector("list", numRemues)

 #Cálculo de los intervalos para el R²
 for(i in 1:numRemues){
  muestrasR2Boot <- rsBoot[,i]
  perc <- ContruirIntervBoot(data,R2,muestrasR2Boot
  ,B,nivConfianza=0.95,tipo=1)
  bca <- ContruirIntervBoot(data,R2,muestrasR2Boot,
  B,nivConfianza=0.95,tipo=2)
  resultadosInter[[i]] <- list(perc, bca)
 }

 return(resultadosInter)
}
```

C4. Función ProcesarModels

En este anexo se muestra el script en R (R Core Team, 2024), el cual se utilizó para la evaluación de la precisión de los modelos.

```
# Función para procesar y capturar los resultados
#sobre la precisión de las muestras con sus I.C.
# Dado archivos_encontrados <-  list(muestra,R2)
#con rutas de archivos
# para el parametro caso, 1-NVC, 2-NVD, 3-NNVC, 4-NNVD
# para replicas sea el número de replicas
# con nivConfinza entre 0 - 1
# y sea para N el tamaño de las muestras
ProcesarModels <- function(archivos_encontrados, caso,
       replicas, nivConfianza, N, MODELO, CASO) {
 library(openxlsx)
 library(readxl)
 archivo_muestra <- archivos_encontrados$muestra
 archivo_R2 <- archivos_encontrados$R2
 data_muestra <- read_excel(archivo_muestra, col_names = TRUE)
 data_R2 <- read_excel(archivo_R2, col_names = TRUE)

 block <- 1000
 cols_por_model <- 2
 limit_model <- 500 #modelos a procesar
 esquemas <- 8

 #Tablas de conteos
 nombre_cols <- c("Replica","Esquema", "NumMod",
     "NumModEfic", "FrecEficIB1","FrecEficIB2",
 "FrecEficIB1Unico","FrecEficIB2Unico",
 "FrecEficIB1Emp2", "FrecEficIB2Emp2","NingunGanador")
 conteos_totales <- matrix(0, ncol = length(nombre_cols),
        nrow = replicas * esquemas)
 colnames(conteos_totales) <- nombre_cols

 #Tabla de eficiencia
 nombre_cols_efi <- c("Replicas", "NumMod", "Esq1",
      "Esq2", "Esq3", "Esq4", "Esq5",
       "Esq6", "Esq7", "Esq8")
 conteo_efi <- matrix(ncol=length(nombre_cols_efi),
      nrow = replicas)
 colnames(conteo_efi) <- nombre_cols_efi

 nombre_archivo_conteos <- paste(MODELO, "__",
```

```
       CASO, "__N", N, "__resultados_conteo__",
        ".xlsx", sep = "")
nombre_archivo_efi <- paste(MODELO, "__", CASO, "__N",
      N,"__resultados_eficiencia__", ".xlsx", sep = "")

#Creando libros de excel
wb_conteos <- createWorkbook()
addWorksheet(wb_conteos, "Conteos")
wb_eficiencia <- createWorkbook()
addWorksheet(wb_eficiencia, "Eficiencia")

for (replica in 1:replicas) {
 print(paste("Replica #", replica))
 num_m <- 0 #num de modelos
 #Conteos por replica
 conteo_replica <- matrix(0, nrow = 8,
      ncol = length(nombre_cols))
 replica_vector <- rep(replica, each = esquemas)
 esquema_vector <- rep(1:esquemas)#vector de 1-8
 numMode_vector <- rep(limit_model, each = esquemas)
 #Matriz de datos iniciales
 matriz_inicial <- cbind(replica_vector,
      esquema_vector,numMode_vector)
 conteo_replica[, 1:3] <- matriz_inicial
 #Eficiencia por replica
 conteo_efi_replica <- numeric(length(nombre_cols_efi))
 conteo_efi_replica[1] <- replica
 #Indices de incio y fin de replica
 fila_inicio <- (replica - 1) * N + 1
 fila_fin <- replica * N
 replica_data <- data_muestra[fila_inicio:fila_fin, ]
 R2_replica <- as.numeric(data_R2[replica, ])

 #Procesamiento de fila replica
 for (i in seq(1, ncol(replica_data), by = block)) {
  block_end <- min(i + block - 1, ncol(replica_data))
  block_caso <- replica_data[, i:block_end]
  R2_block <- as.numeric(R2_replica[i:500])
  Rmod <- 0 #Indice de R² a procesar

  #Procesamiendo de modelos replica
  for (j in seq(1, ncol(block_caso), by = cols_por_model)) {
   model_end <- min(j + cols_por_model - 1, ncol(block_caso))
   modeloActual <- block_caso[, j:model_end]
   R2_modelo <- R2_block[Rmod + 1]
   Rmod <- Rmod + 1
```

```
resultadosInter <- EvalPrecisionModel(modeloActual,
        alpha, nivConfianza, caso)
        #Funcion propuesta
print(R2_modelo)
print(resultadosInter)

#Procesando resultados del modelo por esquema
for (numEsquema in 1:length(resultadosInter)) {
 resultados_esquema <- resultadosInter[[numEsquema]]
 intervalos_ganadores <- list()
 modelo_esquema_eficaz <- TRUE # Bandera de modelo eficaz en esquema

 #Procesando intervalos por esquema
 for (numIntervalo in 1:length(resultados_esquema)) {
  intervalo <- resultados_esquema[[numIntervalo]]
  # Verifica si el intervalo es NaN
  if (any(is.na(intervalo)) || length(intervalo) != 2) {
   modelo_esquema_eficaz <- FALSE
   warning(paste("Intervalo inválido en esquema",
        numEsquema, "intervalo", numIntervalo,
   "Intervalo:", paste(intervalo, collapse = ","),
   "con R2_modelo:", R2_modelo))
   break
  } else {
   # Intervalo es válido, revisar si contiene el R2
   if (!is.na(R2_modelo)) {
    R2_intervalo <- ifelse(R2_modelo
         >= intervalo[1] & R2_modelo <= intervalo[2], 1, 0)
    if (R2_intervalo == 1) {
     intervalos_ganadores[[length(intervalos_ganadores) + 1]]
      <- list(Intervalo = numIntervalo,
       Longitud = intervalo[2] - intervalo[1])
    }
   }
  }
 }#Fin procesado intervalos por esquema

 # Si ambos intervalos fueron calculados correctamente
 if (modelo_esquema_eficaz) {
  conteo_replica[numEsquema, 4] <-
    conteo_replica[numEsquema, 4] + 1 #Modelo eficiente


  # Lógica para ganador único o empate
  if (length(intervalos_ganadores) == 1) {
   if (intervalos_ganadores[[1]]$Intervalo == 1){
```

```
    conteo_replica[numEsquema, 5] <- conteo_replica[numEsquema, 5] + 1
     #Eficiencia
    conteo_replica[numEsquema, 7] <- conteo_replica[numEsquema, 7] + 1
      #Ganador
     }
     if (intervalos_ganadores[[1]]$Intervalo == 2){
     conteo_replica[numEsquema, 6] <- conteo_replica[numEsquema, 6] + 1
     #Eficiencia
     conteo_replica[numEsquema, 8] <- conteo_replica[numEsquema, 8] + 1
      #Ganador
     }

    } else if (length(intervalos_ganadores) == 2) {
     #Conteo ambas contuvieron a R²
     conteo_replica[numEsquema, 5]<-conteo_replica[numEsquema, 5]+1
     conteo_replica[numEsquema, 6]<-conteo_replica[numEsquema, 6]+1
     conteo_efi_replica[numEsquema+2]<-conteo_efi_replica[
                 numEsquema+ 2]+1
     #Entro en los dos
     mejor_intervalo <- intervalos_ganadores[[which.min(
          sapply(intervalos_ganadores, function(x) x$Longitud))]]
     if (mejor_intervalo$Intervalo == 1)
      conteo_replica[numEsquema, 9]<-conteo_replica[numEsquema, 9]+1
     if (mejor_intervalo$Intervalo == 2)
      conteo_replica[numEsquema, 10]<-conteo_replica[numEsquema, 10]+1
    }else{
    conteo_replica[numEsquema, 11] <- conteo_replica[numEsquema, 11]+1
    #Sin ganadores
    }
   }

  }#Fin por esquemas

  #Segumiento de modelos
  num_m <- num_m + 1
  if (num_m %% 50 == 0) {
   print(paste("Procesados", m, "modelos de replica",
       replica, "/",replicas))
  }
  if (num_m == limit_model) {
   break
  }

 }#Fin de modelos replica
}#Fin de replica
```

```
  #Guardar resultados obtenidos de replica
  fila_inicio <- (replica - 1) * esquemas + 1
  fila_fin <- replica * esquemas
  conteos_totales[fila_inicio:fila_fin, ] <- conteo_replica
  conteo_efi_replica[2] <- num_m
  conteo_efi[replica, ] <- conteo_efi_replica

  #Guardar resultados en xlsx
  writeData(wb_conteos, "Conteos", conteos_totales,
    startCol = 1, startRow = 1, rowNames = FALSE)
  writeData(wb_eficiencia, "Eficiencia", conteo_efi,
     startCol = 1, startRow = 1, rowNames = FALSE)
  saveWorkbook(wb_conteos, nombre_archivo_conteos, overwrite = TRUE)
  saveWorkbook(wb_eficiencia, nombre_archivo_efi, overwrite = TRUE)

 }#Fin de replicas

 cat("Fin de cálculos")
}
```

C5. Función SimMod

En este anexo se muestra el script en R (R Core Team, 2024), el cual se utilizó para la simulación y el respaldo de todos los modelos.

```
##SIMULACION DE MODELOS##
#N=numero de modelos a simular
#n=tamano de la muestra
#r=numero de replicas por tamano
#TipoPres=tipo de presicion del modelo;
# 1:Preciso; 2:Impreciso
#TipoSupues=tipo de supuesto que cumple
#el modelo de regresion; 1:NVC; 2:NVD; 3:NNVC; 4:NNVD
#Los modelos son exactos, b0=0 y b1=1

SimMod=function(N,n,r,TipoPres,TipoSupues)
{library(writexl)
 cat("\n\n Simulacion de modelos de tamano",n,"\n")
 A=matrix(nrow=n*r,ncol=2*N)#Matriz de modelos
 B=matrix(nrow=r,ncol=N)#Matriz de R2
 b0=0
 b1=1
 for(j in 1:r)
 {s=n*(j-1)+1
  m=j*n
  for(i in 1:N)
  {if(TipoPres==1){R2=round(runif(1,min=0.8,max=0.99),4)}
   if(TipoPres==2){R2=round(runif(1,min=0.1,max=0.3),4)}
   B[j,i]=R2
   muz=round(runif(1,5,100),0)
   li=2*(i-1)+1
   ls=2*i
   if(TipoSupues==1){A[s:m,li:ls]=ModNVC(n,b0,b1,R2,muz)}
   if(TipoSupues==2){A[s:m,li:ls]=ModNVD(n,b0,b1,R2,muz)}
   if(TipoSupues==3){A[s:m,li:ls]=ModNNVC(n,b0,b1,R2,muz)}
   if(TipoSupues==4){A[s:m,li:ls]=ModNNVD(n,b0,b1,R2,muz)}
   if(i%%100==0){cat("\nYa se simularon",
      i,"modelos de la replica",j,"\n")}
  }
  cat("\n Listo la replica",j,"\n")
 }

 #Guarda los modelos
 A=as.data.frame(A)
```

```
 if(TipoPres==1 && TipoSupues==1){nomarch="EPNVC"}
 if(TipoPres==1 && TipoSupues==2){nomarch="EPNVD"}
 if(TipoPres==1 && TipoSupues==3){nomarch="EPNNVC"}
 if(TipoPres==1 && TipoSupues==4){nomarch="EPNNVD"}
 if(TipoPres==2 && TipoSupues==1){nomarch="EINVC"}
 if(TipoPres==2 && TipoSupues==2){nomarch="EINVD"}
 if(TipoPres==2 && TipoSupues==3){nomarch="EINNVC"}
 if(TipoPres==2 && TipoSupues==4){nomarch="EINNVD"}
 nomarch=paste(nomarch,n)
 nomarch=paste(nomarch,".xlsx")
 write_xlsx(A,path=nomarch)

 #Guarda las R2
 B=as.data.frame(B)
 if(TipoPres==1 && TipoSupues==1){nomarch2="R2EPNVC"}
 if(TipoPres==1 && TipoSupues==2){nomarch2="R2EPNVD"}
 if(TipoPres==1 && TipoSupues==3){nomarch2="R2EPNNVC"}
 if(TipoPres==1 && TipoSupues==4){nomarch2="R2EPNNVD"}
 if(TipoPres==2 && TipoSupues==1){nomarch2="R2EINVC"}
 if(TipoPres==2 && TipoSupues==2){nomarch2="R2EINVD"}
 if(TipoPres==2 && TipoSupues==3){nomarch2="R2EINNVC"}
 if(TipoPres==2 && TipoSupues==4){nomarch2="R2EINNVD"}
 nomarch2=paste(nomarch2,n)
 nomarch2=paste(nomarch2,".xlsx")
 write_xlsx(B,path=nomarch2)
 cat("\n\n Fin de la simulacion de modelos de tamano n=",n,"\n\n")
}#Termina la funcion SimMod
```

C6. Ejecuciones de la Función SimMod

En este anexo se muestra el script en R (R Core Team, 2024), el cual se utilizó para ejecutar la simulación y el respaldo de todos los modelos.

```
#Genaración de las matrices de modelos y sus correspondiente R2
#por cada tamano de muestra
#Modelos EPNVC por cada tamano de muestra
SimMod(N=500,n=10,r=5,TipoPres=1,TipoSupues=1)
SimMod(N=500,n=15,r=5,TipoPres=1,TipoSupues=1)
SimMod(N=500,n=20,r=5,TipoPres=1,TipoSupues=1)
SimMod(N=500,n=25,r=5,TipoPres=1,TipoSupues=1)
SimMod(N=500,n=30,r=5,TipoPres=1,TipoSupues=1)
SimMod(N=500,n=35,r=5,TipoPres=1,TipoSupues=1)

#Modelos EPNVD por cada tamano de muestra
SimMod(N=500,n=10,r=5,TipoPres=1,TipoSupues=2)
SimMod(N=500,n=15,r=5,TipoPres=1,TipoSupues=2)
SimMod(N=500,n=20,r=5,TipoPres=1,TipoSupues=2)
SimMod(N=500,n=25,r=5,TipoPres=1,TipoSupues=2)
SimMod(N=500,n=30,r=5,TipoPres=1,TipoSupues=2)
SimMod(N=500,n=35,r=5,TipoPres=1,TipoSupues=2)

#Modelos EPNNVC por cada tamano de muestra
SimMod(N=500,n=10,r=5,TipoPres=1,TipoSupues=3)
SimMod(N=500,n=15,r=5,TipoPres=1,TipoSupues=3)
SimMod(N=500,n=20,r=5,TipoPres=1,TipoSupues=3)
SimMod(N=500,n=25,r=5,TipoPres=1,TipoSupues=3)
SimMod(N=500,n=30,r=5,TipoPres=1,TipoSupues=3)
SimMod(N=500,n=35,r=5,TipoPres=1,TipoSupues=3)

#Modelos EPNNVD por cada tamano de muestra
SimMod(N=500,n=10,r=5,TipoPres=1,TipoSupues=4)
SimMod(N=500,n=15,r=5,TipoPres=1,TipoSupues=4)
SimMod(N=500,n=20,r=5,TipoPres=1,TipoSupues=4)
SimMod(N=500,n=25,r=5,TipoPres=1,TipoSupues=4)
SimMod(N=500,n=30,r=5,TipoPres=1,TipoSupues=4)
SimMod(N=500,n=35,r=5,TipoPres=1,TipoSupues=4)
#############################################
#Modelos IPNVC por cada tamano de muestra
SimMod(N=500,n=10,r=5,TipoPres=2,TipoSupues=1)
SimMod(N=500,n=15,r=5,TipoPres=2,TipoSupues=1)
SimMod(N=500,n=20,r=5,TipoPres=2,TipoSupues=1)
SimMod(N=500,n=25,r=5,TipoPres=2,TipoSupues=1)
SimMod(N=500,n=30,r=5,TipoPres=2,TipoSupues=1)
```

```
SimMod(N=500,n=35,r=5,TipoPres=2,TipoSupues=1)

#Modelos IPNVD por cada tamano de muestra
SimMod(N=500,n=10,r=5,TipoPres=2,TipoSupues=2)
SimMod(N=500,n=15,r=5,TipoPres=2,TipoSupues=2)
SimMod(N=500,n=20,r=5,TipoPres=2,TipoSupues=2)
SimMod(N=500,n=25,r=5,TipoPres=2,TipoSupues=2)
SimMod(N=500,n=30,r=5,TipoPres=2,TipoSupues=2)
SimMod(N=500,n=35,r=5,TipoPres=2,TipoSupues=2)

#Modelos IPNNVC por cada tamano de muestra
SimMod(N=500,n=10,r=5,TipoPres=2,TipoSupues=3)
SimMod(N=500,n=15,r=5,TipoPres=2,TipoSupues=3)
SimMod(N=500,n=20,r=5,TipoPres=2,TipoSupues=3)
SimMod(N=500,n=25,r=5,TipoPres=2,TipoSupues=3)
SimMod(N=500,n=30,r=5,TipoPres=2,TipoSupues=3)
SimMod(N=500,n=35,r=5,TipoPres=2,TipoSupues=3)

#Modelos IPNNVD por cada tamano de muestra
SimMod(N=500,n=10,r=5,TipoPres=2,TipoSupues=4)
SimMod(N=500,n=15,r=5,TipoPres=2,TipoSupues=4)
SimMod(N=500,n=20,r=5,TipoPres=2,TipoSupues=4)
SimMod(N=500,n=25,r=5,TipoPres=2,TipoSupues=4)
SimMod(N=500,n=30,r=5,TipoPres=2,TipoSupues=4)
SimMod(N=500,n=35,r=5,TipoPres=2,TipoSupues=4)
```

C7. Función EvaluaPrecICB

En este anexo se muestra el script en R (R Core Team, 2024), el cual se utilizó para la propuesta final para evaluar la precisión de un modelo.

```
#Propuesta final
#Sean los parametros: data una matriz,
# con la columna 1 las "z" la columna 2 las "y"
# y niConfinza un nivel de confinza entre 0-1
EvaluaPrecICB <- function(data, nivConfianza=0.95){
 library("nortest")
 library("lmtest")
 library("robustbase")

 z <<- as.numeric(data[[1]])
 y <<- as.numeric(data[[2]])
 n <<- length(z)
 B <<- 2500 #Remuestras bootstrap necesarias
 caso <<- 0
 IC_proces <<- 1 #Construir IC, metodo percentil como inicial
 alpha <<- 1-nivConfianza
 #Casos posibles
 NVC <- 1 #Normalidad- homocedasticidad
 NVD <- 2 #Normalidad-heterocidasticidad
 NNVC <- 3 #No normalidad-homocedasticidad
 NNVD <- 4 #No normalidad-heterocidastecidad
 #Verificación de supuestos
 hay_normalidad <- FALSE
 varianza_constante <- FALSE
 media_cero <- FALSE
 hay_independencia <-FALSE
 conceptosClave <<- rep(0,4) #Banderas de apoyo en las 4 pruebas
 limite_precision <<-0.7

 #Regresion lineal simple
 modeloLineal <- lm(y~z)
 residuales <- residuals(modeloLineal)
 R2 <- summary(modeloLineal)$r.squared
 hii <- hatvalues(modeloLineal)
 yAju <- fitted(modeloLineal)

 # Función para imprimir texto con colores
 print_colored <- function(text, text_color = 37, bg_color = NULL) {
  if (!is.null(bg_color)) {
   cat(sprintf("\033[%d;%dm%s\033[0m", text_color, bg_color, text))# Texto-fondo
```

```
 } else {
  cat(sprintf("\033[%dm%s\033[0m", text_color, text)) #Texto coloreado
 }
}

#Supuesto de normalidad
{
 pValShap <- shapiro.test(residuales)$p.value  #Shapiro-Wilk
 ValCShap <- shapiro.test(residuales)$statistic
 pValLILLIE <- lillie.test(residuales)$p.value   #Lilliefort
 ValCLILLIE <- lillie.test(residuales)$statistic
 #Resultados
 pValor <- c(pValShap, pValLILLIE)
 ValorCal <- c(ValCShap, ValCLILLIE)
 Estadistica <- c("Shapiro-Wilk","Liliefort")
 tablaNormal <- data.frame(Estadistica,ValorCal,pValor)
 print_colored("\nPRUEBA DE NORMALIDAD\n", 37, 40)
 print(tablaNormal)

 pVal_Min <- min(pValor)
 hay_normalidad <-  pVal_Min > alpha

 if (hay_normalidad) {
  cat("\nConclusión: Se cumple el supuesto de normalidad
    con Shapiro y Lilliefort al",alpha*100,"%.\n")
  conceptosClave[1] <- 1
 }else{
  cat("\nConclusión: No se cumple el supuesto
   de normalidad con Shapiro y Lilliefort al",alpha*100,"%.\n")
  conceptosClave[1] <- 2
 }
}#Fin prueba normalidad


#Media cero
{
 #Prueba
 pValor <-t.test(residuales)$p.value #test T-student
 ValorCal <- t.test(residuales)$statistic
 #Construccion de la tabla
 Estadistica = c("T-Student")
 tablaVar <- data.frame(Estadistica, ValorCal, pValor)
 print_colored("\nPRUEBA T-STUDENT PARA MEDIA CERO EN LOS RESIDUALES\n", 37, 40)
 print(tablaVar)
 media_cero <- alpha < pValor
```

```
 if(media_cero){
  cat("\nConclusión: Se cumple el supuesto de
    media cero en los residuales al ",alpha*100,"%.\n")
  conceptosClave[3] <- 1
 }else{
  cat("\nConclusión: No se cumple el supuesto de
   media cero en los residuales al",alpha*100,"%.\n")
  conceptosClave[3] <- 2
 }
}#Fin de prueba de media cero



#Prueba de varianzas
{
 pValor <- 0
 prueba_var <- NULL
 aviso_varianza <- NULL
 ValorCal <- 0

 if(hay_normalidad){
  #Aplicar Breusch-Pagan Test
  pValor <- bptest(modeloLineal)$p.value
  ValorCal <- bptest(modeloLineal)$statistic
  conceptosClave[2] <- 1
  Estadistica <- c("Breush-Pagan")
 }else{
  #Aplicar White test
  pValor <- bptest(modeloLineal, varformula = ~ I(z^2))$p.value
  ValorCal <- bptest(modeloLineal, varformula = ~ I(z^2))$statistic
  conceptosClave[2] <- 2
  Estadistica <- c("White")
 }

 valorTestVa <-c(pValor)
 tablaVarianza <- data.frame(Estadistica,ValorCal, pValor)

 aviso_varianza <- switch(
 conceptosClave[2],
 {
  print_colored("\nPRUEBA DE IGUALDAD DE VARIANZAS CON BREUSH-PAGAN\n", 37, 40)
 },
 {
  print_colored("\nPRUEBA DE IGUALDAD DE VARIANZAS CON WHITE\n", 37, 40)
 },
 stop("Prueba invalida")
```

```
 )

 print(tablaVarianza)

 varianza_constante <- alpha < pValor

 if(varianza_constante){
  aviso_varianza <- switch(
  conceptosClave[2],
  {
   cat("\nConclusión: Se cumple el supuesto de varianza
   constante con el estadístico de Breush-Pagan al",alpha*100,"%.\n")
  },
  {
   cat("\nConclusión: Se cumple el supuesto de varianza
   constante con el estadístico de White al",alpha*100,"%.\n")
  },
  stop("Prueba invalida")
  )
 }else{
  aviso_varianza <- switch(
  conceptosClave[2],
  {
   cat("\nConclusión: No se cumple el supuesto de varianza
    constante con el estadístico de Breush-Pagan al",alpha*100,"%.\n")
  },
  {
   cat("\nConclusión: No se cumple el supuesto de varianza
   constante con el estadístico de White al",alpha*100,"%.\n")
  },
  stop("Prueba invalida")
  )
 }
}#Fin prueba varianzas



#Independencia
{
 #Prueba
 pValor <- dwtest(modeloLineal)$p.value #Durbin-Watson test
 ValorCal <- dwtest(modeloLineal)$statistic
 Estadistica = c("Durbin-Watson test")
 tablaVar <- data.frame(Estadistica,ValorCal, pValor)
 print_colored("\nPRUEBA DE DURBIN-WATSON PARA INDEPENDENCIA\n", 37, 40)
 print(tablaVar)
```

```
 hay_independencia <- alpha < pValor

 if(hay_independencia){
  cat("\nConclusión: Se cumple el supuesto de
    independencia con Durbin-Watson al",alpha*100,"%.\n")
  conceptosClave[4] <- 1
 }else{
  cat("\nConclusión: No se cumple el supuesto de
    independencia con Durbin-Watson al",alpha*100,"%.\n")
  conceptosClave[4] <- 2
 }
}#Fin de prueba independencia



#Decision de caso que nos encontramos
if(hay_normalidad && varianza_constante){
 caso <- NVC
 print_colored("\n ****** CASO: NORMALIDAD
  - HOMOCEDASTICIDAD (NVC) ******\n", 37, 34)
}else{
 # Uso de estimador robusto MM
 modeloLinealRob <<- lmrob(y ~ z, method = "MM")

 if (hay_normalidad && !varianza_constante) {
  caso <- NVD
  print_colored("\n ****** CASO: NORMALIDAD
   - HETEROCIDASTICIDAD (NVD) ******\n", 37, 34)
 }
 if(!hay_normalidad && varianza_constante){
  caso <- NNVC
  print_colored("\n ****** CASO: NO NORMALIDAD
    - HOMOCEDASTICIDAD (NNVC) ******\n", 37, 34)
 }
 if(!hay_normalidad && !varianza_constante){
  caso <- NNVD
  print_colored("\n ****** CASO: NO NORMALIDAD
   - HETEROCIDASTICIDAD (NNVD) ******\n", 37, 34)
  IC_proces <- 2
 }
}
RsBoot <<- numeric(B)#Remuestra de R^2
#Comienza remuestreos Bootstrap para el coeficiente de determinación
{
 if(caso != NNVD){
```

```
 residuales_utilizar <- switch(
 caso,
 {
  residuales #Usar minimos cuadrados -> NVC
 },
 {
  resTemp <- modeloLinealRob$residuals
  CMERob <- modeloLinealRob$scale**2
  consPes <- 3
  x <- abs(resTemp)/sqrt(CMERob)
  w <- rep(1,n)
  xx <- which(x > consPes)
  w[xx] <- (consPes / w[xx])
  w*resTemp #Usar residuales robustos ponderados MM-estimador->NVD
 },
 {
  modeloLinealRob$residuals #Usar residuales robustosMM-estimador ->NNVC
 },
 stop("Caso no valido para residuales")
 )

 yajus_usar <- if (caso == NVC ) yAju else modeloLinealRob$fitted.values

 #Efectuando Esquema Liu 2
 sqrt_hii <- sqrt(1 - hii)
 for (i in 1:B) {
  media1 <- 0.5 * sqrt(17 / 6) + sqrt(1 / 6)
  media2 <- 0.5 * sqrt(17 / 6) - sqrt(1 / 6)
  H <- rnorm(n, media1, sqrt(0.5))
  D <- rnorm(n, media2, sqrt(0.5))
  tt <- H * D - media1 * media2
  resBoot <- (tt * residuales_utilizar) / sqrt_hii
  yBoots <- yajus_usar + resBoot
  modeloBoots <- lm(yBoots ~ z)
  RsBoot[i] <- summary(modeloBoots)$r.squared
 }
}else{#Caso NNVD
 N     <- rep(1:n,B)
 NPerm <- sample(N)
 for (i in 1:B) {
  posI <- (i-1)*n+1
  posF <- i*n
  pares_boots<- NPerm[posI:posF]
  YP <- y[pares_boots]
  ZP <- z[pares_boots]
```

```
   modeloBoots <- lm(YP ~ ZP)
   RsBoot[i] <- summary(modeloBoots)$r.squared
  }
 }
}#Fin Bootstrap

intervalo <- numeric(2)#Intervalo
#Construir intervalo de confinza para R^2
{
 intervalo <- switch(
 IC_proces,
 {
  puntosCriticos <- quantile(RsBoot, c(alpha/2, 1 - alpha/2))
  as.vector(puntosCriticos)
 },
 {
  z0 <- qnorm(mean(RsBoot < R2))
  suma0 <-0
  suma02<-0
  suma03<-0
  for(i in 1:n){
   R2MI<-summary(lm(y[-i]~z[-i]))$r.squared
   suma0<-R2MI+suma0
  }
  R2PMI<- suma0/n
  for(i in 1:n){
   Dif0<-R2PMI-summary(lm(y[-i]~z[-i]))$r.squared
   suma02<-Dif0^2+suma02
   suma03<-Dif0^3+suma03
  }
  a<-suma03/(6*(suma02^1.5))
  z_alfa1 <- qnorm(alpha / 2)
  z_alfa2 <- qnorm(1 - alpha / 2)
  alfa1 <- pnorm(z0 + (z0 + z_alfa1) / (1 - a * (z0 + z_alfa1)))
  alfa2 <- pnorm(z0 + (z0 + z_alfa2) / (1 - a * (z0 + z_alfa2)))

  ICInfBCa <- quantile(RsBoot, alfa1)
  ICSupBCa <- quantile(RsBoot, alfa2)
  as.vector(c(ICInfBCa, ICSupBCa))
 },
 stop("Intervalo no válido")
 )
}
#Resultado final
{
 resultado <- switch(
```

```
  IC_proces,
  {
   print_colored("\nPRECISION (R2) CON EL
   ICB PERCENTIL-ESQUEMA BOOTSTRAP LIU2   \n", 37, 40)
  },
  {
   print_colored("\nPRECISION (R2) CON EL
    ICB BCa-ESQUEMA BOOTSTRAP PAREADO BALANCEADO \n", 37, 40)
  },
  stop("Prueba invalida")
  )
  Atributos <- c("R2","R2BootMedia","DesvEstR2Boots","LIR2","LSR2")
  Valores <- c(R2,mean(RsBoot),sd(RsBoot),intervalo[1],intervalo[2])
  tabla_IC <-data.frame(Atributos,Valores)
  print(tabla_IC)

  R2_preciso <- ifelse( (limite_precision>=intervalo[1]
    & limite_precision <= intervalo[2]) ||
      (intervalo[1] >= limite_precision) , 1, 0)
  conclusion <- switch(
  IC_proces,
  {
   if (R2_preciso == 1) {
    cat("\nConclusión: El modelo es preciso con
      el ICB Percentil al ",nivConfianza*100,"%.\n")
   }else{
    cat("\nConclusión: El modelo es impreciso con
      el ICB Percentil al",nivConfianza*100,"%.\n")
   }
  },{
   if (R2_preciso == 1) {
    cat("\nConclusión: El modelo es preciso con
      el ICB BCa al",nivConfianza*100,"%.\n")
   }else{
    cat("\nConclusión: El modelo es impreciso con
     el ICB BCa al",nivConfianza*100,"%.\n")
   }
  }
  )
  cat("\n Criterio: Si el ",limite_precision, "
    está contenido en el ICB o es mayor
      igual al limite inferior del ICB.\n")
 }#Fin de bloque final
}#Fin propuesta final
```