Estadística Bayesiana

Irving Gómez Méndez

Ejemplo 1

Tenemos una prueba de laboratorio que detecta una cierta enfermedad A. Denotamos el que salga una prueba positiva para la enfermedad como $T = 1$ y negativa como $T = 0$, y que el paciente tenga la enfermedad A como $E = 1$ y $E = 0$ en otro caso. Las características de la prueba son:

$$\mathbb{P}(T = 1|E = 1) = 0.92, \quad \mathbb{P}(T = 0|E = 0) = 0.99,$$

y la prevalencia de la enfermedad (la proporción de personas enfermas en la población en cuestión) es de 0.12. O sea $\mathbb{P}(E = 1) = 0.12$.

Yo voy y me hago la prueba referida (perteneciendo yo a la población en cuestión) y esta sale positiva. ¿Cuál es la probabilidad posterior de que yo tenga la enfermedad A?

$\mathbb{P}(T = 1|E = 1)$ ó $\mathbb{P}(T = 1|E = 0)$ **no** es lo que necesitamos. Más bien queremos saber qué sucede dado o una vez que $T = 1$.

Teorema de Bayes:

$$\mathbb{P}(E = 1|T = 1) = \frac{\mathbb{P}(T = 1|E = 1)\mathbb{P}(E = 1)}{\mathbb{P}(T = 1|E = 1)\mathbb{P}(E = 1) + \mathbb{P}(T = 1|E = 0)\mathbb{P}(E = 0)}$$

$$= 0.9262$$

Pero, en realidad, o tengo la enfermedad o no la tengo; entonces...

¡¿Qué quiere decir: La probabilidad de que tenga la enfermedad es 0.9262?!

¡No hay frecuencias o eventos repetidos: o estoy o no estoy enfermo!

El estadístico Bruno de Finetti comenzaba su libro con la frase *LA PROBABILIDAD NO EXISTE*. Las mayúsculas aparecen en el texto original. ¿A qué se refiere?

La probabilidad es condicional y subjetiva

Uno de los puntos de partida básicos en la estadística bayesiana es el concepto de probabilidad (y su definición). Para empezar, pongamos unos ejemplos en que usamos la probabilidad y tratemos de encontrar una definición para esta.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar una moneda caiga "águila"?
2. ¿Cuál es la probabilidad de que haya un eclipse mañana?
3. ¿Cuál es la probabilidad de que llueva mañana?
4. ¿Cuál es la probabilidad de que esté lloviendo en México?
5. ¿Cuál es la probabilidad de que haya más de 10^9 estrellas en nuestra galaxia?

Se podría pensar que para la primer pregunta la respuesta es 1/2, pero ¿de qué moneda estamos hablando? ¿tiene esta moneda un águila? (¡podría ser extranjera!). La moneda que se está usando, ¿se la dieron de cambio en la tiendita al profesor? o ¿es una moneda que se acaba de sacar del bolsillo un ilusionista?

Para la pregunta 4, yo podría informarme si está lloviendo en México (¿la ciudad o el estado completo o alguna parte del país?) y entonces esta probabilidad sería 0 ó 1; pero, en este instante, ¿qué tanto sabemos del evento "está lloviendo en México"?

Sea A el evento "está lloviendo en México". Una persona que vive a algunos kilómetros de Qaanaaq, sin acceso a internet, no tendría ninguna razón para asignar mayor probabilidad a A que a A^c. Si denotamos por H_1 la información de esta persona, entonces $\mathbb{P}(A|H_1) = \mathbb{P}(A^c|H_1)$.

Una persona que vive en el Bajío posee una información distinta, H_2, y podría ser que

$$\mathbb{P}(A|H_2) = \begin{cases} 3/4 & \text{si llueve en el Bajío,} \\ 1/4 & \text{si no llueve en el Bajío.} \end{cases}$$

Por el contrario, si una persona vive en México, poseerá una información H_3 tal que

$$\mathbb{P}(A|H_3) = \begin{cases} 1 & \text{si llueve en el México,} \\ 0 & \text{si no llueve en México.} \end{cases}$$

Por lo tanto, la probabilidad de un evento A es una medida del grado de incertidumbre que un individuo tiene sobre ese evento. Esto quiere decir que la probabilidad es siempre contextual, dada una serie de supuestos y consideraciones, aun para las probabilidades más simples.

Ejemplo 2

Suponga que una bolsa tiene 4 canicas que pueden ser blancas o negras, pero no sabemos cuántas hay de cada color. Sabemos que hay cinco posibilidades: $\{B, B, B, B\}$, $\{N, B, B, B\}$, $\{N, N, B, B\}$, $\{N, N, N, B\}$, $\{N, N, N, N\}$. Llamemos a estas posibilidades *conjeturas*. Deseamos saber cuál de estas conjeturas es más plausible dada cierta evidencia sobre el contenido de la bolsa.
Como no contamos con más información sobre la plausibilidad de cada conjetura, asignamos una probabilidad de $1/5$ a cada una. Sacamos tres canicas al azar de la bolsa, una a la vez, haciendo la selección con reemplazo y observamos: (N, B, N).

Podemos calcular la probabilidad del evento (N, B, N) bajo cada una de las conjeturas.

Conjetura	Probabilidad Previa	Probabilidad Posterior
$\{B, B, B, B\}$	$1/5$	$\propto 1/5 \times 0$
$\{N, B, B, B\}$	$1/5$	$\propto 1/5 \times 3$
$\{N, N, B, B\}$	$1/5$	$\propto 1/5 \times 8$
$\{N, N, N, B\}$	$1/5$	$\propto 1/5 \times 9$
$\{N, N, N, N\}$	$1/5$	$\propto 1/5 \times 0$

Por lo tanto, la conjetura $\{N, N, N, B\}$ es la más plausible.

La posterior de hoy es la previa del mañana
El futuro no es como era antes

Suponga que sacamos otra canica, y que resulta ser una canica negra. Con esta nueva información podemos actualizar la probabilidad de cada conjetura.

Conjetura	Probabilidad Previa	Probabilidad Posterior
$\{B, B, B, B\}$	$\propto 0$	$\propto 0 \times 0 = 0$
$\{N, B, B, B\}$	$\propto 3$	$\propto 3 \times 1 = 3$
$\{N, N, B, B\}$	$\propto 8$	$\propto 8 \times 2 = 16$
$\{N, N, N, B\}$	$\propto 9$	$\propto 9 \times 3 = 27$
$\{N, N, N, N\}$	$\propto 0$	$\propto 0 \times 4 = 0$

Hay que notar que l**a que antes era la probabilidad posterior ahora se ha vuelto nuestra probabilidad previa**.

Hasta ahora la nueva información ha sido de la misma naturaleza que la anterior. Pero en general, la información previa y la nueva pueden ser de distinto tipo. Suponga, por ejemplo, que alguien de la fábrica de canicas le dice que las canicas negras son raras. Pues por cada bolsa del tipo $\{N, N, N, B\}$ hay dos del tipo $\{N, N, B, B\}$ y tres del tipo $\{N, B, B, B\}$. Además, todas las bolsas contienen al menos una canica negra y una blanca.

Con esta información, actualizamos la probabilidad de cada conjetura

Conjetura	Probabilidad Previa	Probabilidad Posterior
$\{B, B, B, B\}$	$\propto 0$	$\propto 0 \times 0 = 0$
$\{N, B, B, B\}$	$\propto 3$	$\propto 3 \times 3 = 9$
$\{N, N, B, B\}$	$\propto 16$	$\propto 16 \times 2 = 32$
$\{N, N, N, B\}$	$\propto 27$	$\propto 27 \times 1 = 27$
$\{N, N, N, N\}$	$\propto 0$	$\propto 0 \times 0 = 0$

Con la información que ahora contamos, resulta que la conjetura $\{N, N, B, B\}$ es ahora más plausible.

Filosofía bayesiana

De una u otra manera, la subjetividad siempre ha estado presente en la actividad científica, comenzando por los supuestos sobre los cuales se decide abordar un determinado problema, típicamente se les denomina *supuestos razonables*, pero son "razonables" de acuerdo a la experiencia e información (subjetiva) particular de quien o quienes estudian un fenómeno en un momento dado.

De acuerdo a Wolpert (1992):

> *[...] la idea de una "objetividad científica" tiene tan solo un valor limitado, ya que el proceso mediante el cual se generan las ideas [o hipótesis] científicas puede ser bastante subjetivo [...] Es una ilusión creer que los científicos no tienen un vínculo emocional con sus convicciones científicas [...] las teorías científicas implican una continua interacción con otros científicos y el conocimiento previamente adquirido [...] así como una explicación que tenga posibilidades de ser aceptada [o al menos considerada seriamente] por el resto de la comunidad científica.*

De acuerdo a Press (2003) la subjetividad es una parte inherente y requerida para la inferencia estadística, y para el *método científico*. Sin embargo, ha sido la manera informal y desorganizada en la que se ha permitido la presencia de la subjetividad, la responsable de diversos errores y malas interpretaciones en la historia de la ciencia. La estadística bayesiana incorpora de manera formal y fundamentada la información subjetiva.

Al hablar de *información subjetiva* nos referimos a toda aquella información previa que se tiene sobre el fenómeno aleatorio de interés, antes de recolectar o realizar nuevas mediciones sobre el mismo, incluyendo: datos históricos, teorías, opiniones y conjeturas de expertos, conclusiones basadas en estudios previos, etc.

Mantras

En resumen:

- La probabilidad de un evento A es una medida del grado de creencia que tiene un individuo en la ocurrencia de A con base en la información H que posee. Por lo tanto, toda probabilidad es condicional (a las circunstancias, el *agente*, etc.)
- Sea $\mathcal{P} = \left\{ f_{X|\theta}(x|p), p \in \Theta \right\}$ una familia paramétrica de distribuciones. Como toda incertidumbre debe ser medida a través de una probabilidad y contamos con incertidumbre en los parámetros, entonces los parámetros deben ser modelados con una medida de probabilidad (una distribución).

Notación

- Variables aleatorias: X, θ.
- Valores observados: x, p.
- Espacio muestral: $\mathcal{X}$, $X \in \mathcal{X}$.
- Espacio paramétrico: Θ, $\theta \in \Theta$.
- Muestra aleatoria: $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$.
- Muestra observada: $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$.
- Distribución previa o *a priori*: $f_\theta(p)$.
- Verosimilitud: $f_{X|\theta}(x|p)$.
- Verosimilitud observada: $f_{\mathbf{X}|\theta}(\mathbf{x}|p)$.
- Evidencia: $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$.
- Distribución posterior o *a posteriori*: $f_{\theta|\mathbf{X}}(p|\mathbf{x})$.

Distribución posterior

La distribución de probabilidad previa se trata de una distribución basada en experiencia previa (experiencia de especialistas, datos históricos, etc.) antes de obtener datos muestrales nuevos.

Luego procedemos a observar los nuevos datos (obtención de evidencia) y combinamos esta información con la distribución previa mediante la Regla de Bayes y obtenemos una distribución de probabilidad posterior:

$$f_{\theta|\mathbf{X}}(p|\mathbf{x}) = \frac{f_{\mathbf{X}|\theta}(\mathbf{x}|p)f_\theta(p)}{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})} = \frac{f_{\mathbf{X}|\theta}(\mathbf{x}|p)f_\theta(p)}{\int_\Theta f_{\mathbf{X}|\theta}(\mathbf{x}|\tilde{p})f_\theta(\tilde{p})d\tilde{p}}$$

En el argot bayesiano se suele hacer uso indiscriminado de abusos, a veces hasta peligrosos, de notación, por ejemplo

$$f_{\theta|\mathbf{X}}(p|\mathbf{x}) = \frac{f_{\mathbf{X}|\theta}(\mathbf{x}|p) f_{\theta}(p)}{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})}$$

los escribiríamos como

$$f(\theta|\mathbf{X}) \propto f(\mathbf{X}|\theta) f(\theta).$$

Beta-Bernoulli

Supongamos que $X_i|\theta = p \overset{iid}{\sim} \text{Ber}(p)$ y que la incertidumbre acerca de $\theta \in [0,1]$ la cuantificamos con $\theta \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$. Obtenemos $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, entonces

$$f(\mathbf{x}|p) = p^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^n x_i} \prod_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{0,1\}}(x_i)$$

y

$$f(p) = B(\alpha, \beta)^{-1} p^{\alpha-1}(1-p)^{\beta-1} \mathbb{1}_{[0,1]}(p).$$

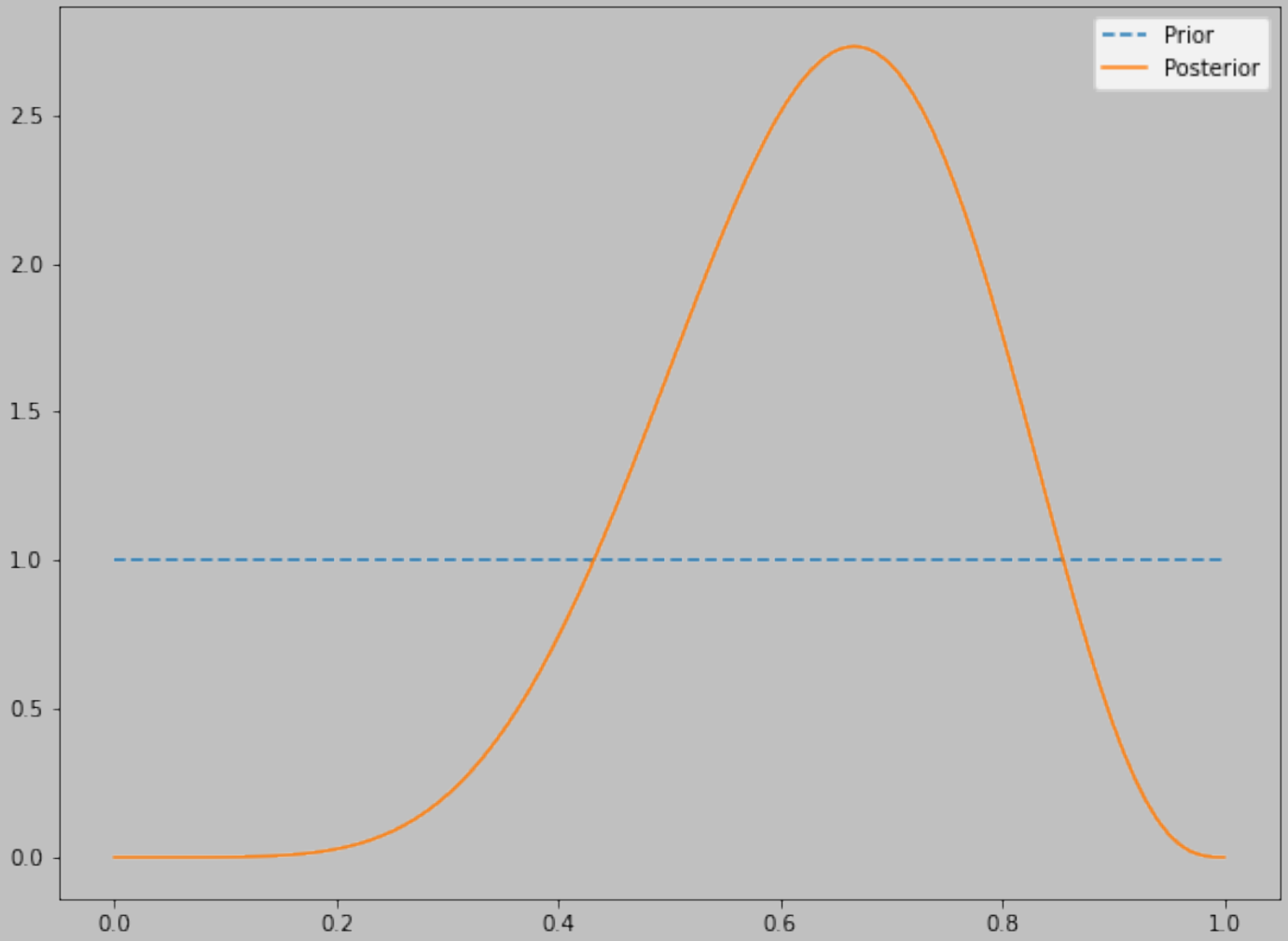
Por lo tanto

$$f(p|\mathbf{x}) \propto p^{\alpha+\sum_{i=1}^n x_i-1}(1-p)^{\beta+n-\sum_{i=1}^n x_i-1} \mathbb{1}_{[0,1]}(p),$$

es decir $\theta|\mathbf{X} = \mathbf{x} \sim \text{Beta}\left(\alpha + \sum_{i=1}^n x_i, \beta + n - \sum_{i=1}^n x_i\right)$.

Ejemplo 3

Suponga que $\mathbf{X}|\theta = p \sim \text{Ber}(p)$ y que no contamos con información sobre θ como para preferir un valor sobre otro, así que modelamos $\theta \sim \text{Beta}(1, 1)$. Se obtiene una muestra aleatoria simple (i.e. se obtienen variables i.i.d.) $\mathbf{x} = (1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1)$. A continuación se muestra la función de densidad previa y posterior para θ.


Prior
Posterior
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

Ejercicio 1

Suponga que una particular población de células puede estar en uno de los siguientes tres estados de producción de una cierta proteína. Los estados son A, B y C, de producción baja, media y alta. Se toma una muestra al azar de 20 células, dentro de cierta población y se verifica si cada una de estas está en producción de la proteína (el resultado del aparato es si o no: 1 o 0, por cada célula analizada). De esta muestra resultan 12 células en producción (1) y las demás en negativo (0).

Por otro lado, sabemos que si la población está en el estado A, se espera que el 20% de la células produzcan la proteína, si está en el estado B se espera que el 50% de las células la produzcan y si está en el estado C se espera que el 70% la produzca.

¿Cuál es la probabilidad de que la población esté en cada uno de estos estados?

Distribuciones predictivas

Muchos son los casos en los que, más que estar interesados en el vector de parámetros θ, lo que queremos es describir el comportamiento de observaciones futuras del fenómeno aleatorio en cuestión, esto es, hacer predicción.

Por lo regular la estadística frecuentista aborda este problema estimando puntualmente a θ con base en la muestra observada y dicho estimador $\hat{p}$ es sustituido en $f_{X|\theta}(x|p)$, es decir, se utiliza $f_{X|\theta}(x|\hat{p})$.

En la estadística bayesiana este problema se aborda marginalizando la distribución conjunta de θ y X.

- Distribución predictiva previa o *a priori*:

$$f_X(x) = \int_\Theta f_{X|\theta}(x|p) f_\theta(p) dp$$

Una vez obtenida una muestra $\mathbf{x}$ se induce una distribución conjunta para X y θ condicional en la muestra,

$$\begin{aligned} f_{X,\theta|\mathbf{X}}(x, p|\mathbf{x}) &= \frac{f_{X,\theta,\mathbf{X}}(x, p, \mathbf{x})}{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})} \\ &= f_{X|\theta,\mathbf{X}}(x|p, \mathbf{x}) \frac{f_{\theta,\mathbf{X}}(p, \mathbf{x})}{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})} \\ &= f_{X|\theta}(x|p) f_{\theta|\mathbf{X}}(p|\mathbf{x}) \end{aligned}$$

- Distribución predictiva (posterior o *a posteriori*):

$$f_{X|\mathbf{X}}(x|\mathbf{x}) = \int_\Theta f_{X|\theta}(x|p) f_{\theta|\mathbf{X}}(p|\mathbf{x}) dp$$

Ejemplo 4

Consideremos una urna que contiene dos monedas: una cargada y la otra equilibrada. Supongamos que la moneda cargada está construida para tener una probabilidad de 3/4 de que salga águila. Una persona tomará una de las dos monedas de la urna (no necesariamente al azar) y echará volados.

En este caso podemos definir el espacio medible como $\Omega = \{\text{“Sale águila”}, \text{“Sale sol”}\}$ y tomar como sigma-álgebra el conjunto potencia de Ω, $\mathcal{P}(\Omega)$. En este espacio definimos la variable aleatoria

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega = \text{“Sale águila”}, \\ 0 & \text{si } \omega = \text{“Sale sol”}. \end{cases}$$

Implícitamente estamos eliminando como posibles resultados eventos como que la moneda caiga vertical, que no sepamos el resultado del volado, etc.

$\Theta = \left\{\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right\}$, $\mathcal{X} = \{0, 1\}$, $X|\theta = p \sim \text{Ber}(p)$.

Información previa:
$\mathbb{P}\left(\theta = \frac{3}{4}\right) = \alpha$, $\mathbb{P}(\theta = \frac{1}{2}) = 1 - \alpha$, $\alpha \in (0, 1)$.

$$f_\theta(p) = \alpha \mathbb{1}_{\{3/4\}}(p) + (1 - \alpha)\mathbb{1}_{\{1/2\}}(p).$$

Verosimilitud:

$$f_{X|\theta}(x|p) = p^x(1 - p)^{1-x}\mathbb{1}_{\{0,1\}}(x).$$

Predictiva previa:

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \sum_{p\in\Theta} f_{X|\theta}(x|p) f_\theta(p) \\
&= \alpha \left(\frac{3}{4}\right)^x \left(\frac{1}{4}\right)^{1-x} \mathbb{1}_{\{0,1\}}(x) + (1-\alpha)\left(\frac{1}{2}\right) \mathbb{1}_{\{0,1\}}(x) \\
&= \alpha \left[\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right) \mathbb{1}_{\{1\}}(x) + \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right) \mathbb{1}_{\{0\}}(x)\right] + \frac{1}{2}\mathbb{1}_{\{0,1\}}(x) \\
&= \frac{\alpha}{4}\left[\mathbb{1}_{\{1\}}(x) - \mathbb{1}_{\{0\}}(x)\right] + \frac{1}{2}\mathbb{1}_{\{0,1\}}(x).
\end{aligned}
$$

Es decir,

$$
f_X(1) = \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{4}, \quad f_X(0) = \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{4}.
$$

Verosimilitud observada: Sean $X_1, \ldots, X_n|\theta = p \overset{iid}{\sim} \text{Ber}(p)$, entonces

$$f_{\mathbf{X}|\theta}(\mathbf{x}|p) = p^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^n x_i} \prod_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{0,1\}}(x_i)$$
$$= p^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^n x_i} g(\mathbf{x}).$$

Evidencia:

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \sum_{p\in\Theta} f_{\mathbf{X}|\theta}(\mathbf{x}|p) f_\theta(p)$$
$$= \alpha \left(\frac{3}{4}\right)^{\sum_{i=1}^n x_i} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-\sum_{i=1}^n x_i} g(\mathbf{x}) + (1-\alpha)\left(\frac{1}{2}\right)^n g(\mathbf{x})$$

$$= \left[\alpha \frac{3^{\sum_{i=1}^n x_i}}{4^n} + (1-\alpha)\frac{1}{2^n}\right] g(\mathbf{x}).$$

Posterior:

$$f_{\theta|\mathbf{x}}(p|\mathbf{x}) = \frac{f_{\mathbf{x}|\theta}(\mathbf{x}|p) f_\theta(p)}{f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})}$$

$$= \frac{p^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^n x_i}\left[\alpha \mathbb{1}_{\{3/4\}}(p) + (1-\alpha)\mathbb{1}_{\{1/2\}}(p)\right]}{\alpha \frac{3^{\sum_{i=1}^n x_i}}{4^n} + (1-\alpha)\frac{1}{2^n}}$$

$$= \frac{[2(1-p)]^n \left(\frac{p}{1-p}\right)^{\sum_{i=1}^n x_i}\left[\alpha \mathbb{1}_{\{3/4\}}(p) + (1-\alpha)\mathbb{1}_{\{1/2\}}(p)\right]}{1-\alpha+\alpha\left(\frac{3^{\sum_{i=1}^n x_i}}{2^n}\right)}.$$

Sea $v = \frac{\alpha}{1-\alpha}\left(\frac{3^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{2^n}\right)$, entonces

$$f_{\theta|\mathbf{x}}(p|\mathbf{x}) = \frac{[2(1-p)]^n \left(\frac{p}{1-p}\right)^{\sum_{i=1}^{n} x_i} \left[\alpha \mathbb{1}_{\{3/4\}}(p) + (1-\alpha)\mathbb{1}_{\{1/2\}}(p)\right]}{(1-\alpha)(1+v)},$$

es decir

$$f_{\theta|\mathbf{x}}(1/2|\mathbf{x}) = \frac{1}{1+v}$$

y

$$f_{\theta|\mathbf{x}}(3/4|\mathbf{x}) = 1 - \frac{1}{1+v} = \frac{v}{1+v} = \frac{1}{1+v^{-1}}.$$

Predictiva (posterior)

$$f_{X|\mathbf{x}}(x|\mathbf{x}) = \sum_{p\in\Theta} f_{X|\theta}(x|p) f_{\theta|\mathbf{x}}(p|\mathbf{x})$$

$$= \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{v+1}\right) + \frac{3^x}{4}\left(\frac{1}{v^{-1}+1}\right)\right] \mathbb{1}_{\{0,1\}}(x)$$

$$= \left[\frac{2}{4(v+1)} + \frac{3^x v}{4(v+1)}\right] \mathbb{1}_{\{0,1\}}(x)$$

$$= \frac{3^x v + 2}{4(v+1)} \mathbb{1}_{\{0,1\}}(x).$$

Resumen de ejemplo 4

Previa:

$$f_\theta(p) = \alpha \mathbb{1}_{\{3/4\}}(p) + (1-\alpha)\mathbb{1}_{\{1/2\}}(p), \quad \alpha \in (0,1)$$

Verosimilitud:

$$f_{X|\theta}(x|p) = p^x(1-p)^(1-x)\mathbb{1}_{\{0,1\}}(x)$$

Predictiva previa:

$$f_X(1) = \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{4}, \quad f_X(0) = \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{4}$$

Posterior:

$$f_{\theta|\mathbf{x}}(1/2|\mathbf{x}) = \frac{1}{1+v}, \quad f_{\theta|\mathbf{x}}(3/4|\mathbf{x}) = \frac{1}{1+v^{-1}},$$

$$v = \frac{\alpha}{1-\alpha}\left(\frac{3^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{2^n}\right)$$

Predictiva (posterior):

$$f_{X|\mathbf{x}}(1|\mathbf{x}) = \frac{3v+2}{4(v+1)}, \quad f_{X|\mathbf{x}}(0|\mathbf{x}) = \frac{v+2}{4(v+1)}$$

Tarea 1

- Dejar tarea 1.
- Mostrar ejemplo Beta-Bernoulli.
- Mostrar ejemplo moneda cargada.

No hay torta gratis

Cuando se hace inferencia estadística frecuentista, los procedimientos suelen justificarse por el comportamiento asintótico del método. Como consecuencia, su desempeño con muestras pequeñas es cuestionable. Al contrario, la estadística bayesiana es válida para cualquier tamaño de muestra. Esto no quiere decir que tener más datos no sea útil, todo lo contrario.

El precio que hay que pagar por este poder es la dependencia en la información previa. Si se tiene una mala previa, los resultados no serán confiables.

Discusión sobre la previa

Históricamente, algunos detractores de la estadística bayesiana argumentan sobre la arbitrariedad de la distribución previa. Es cierto que las distribuciones previas son lo suficientemente flexibles para codificar distinto tipo de información. Entonces, si la previa puede ser cualquier cosa, ¿no es posible obtener cualquier respuesta que quieras? De hecho sí.

Sin embargo, si tu objetivo es mentir usando la estadística es una tontería hacerlo a través de la previa, pues dicha mentira estaría rápidamente cubierta. Es más fácil modificar la inferencia cambiando la verosimilitud.

Ejercicio 2

Sean $X_1, \ldots, X_n | \mu, \sigma^2 \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ y sea $\lambda = \sigma^{-2}$. A λ se le conoce como la "precisión". Haciendo abuso de notación diremos que $X_1, \ldots, X_n | \mu, \lambda \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \lambda)$.

Suponga que λ es conocida y considere la distribución previa para $\mu \sim \mathcal{N}(\mu_0, \lambda_0)$. Obtenga la distribución posterior de μ.

Regresión (Normal-Inversa Gama)

Detalles sangrientos

Tarea 2

- Dejar tarea 2.

Cómo evitar a Procrustes

Un modelo bayesiano es una máquina que toma de entrada la distribución previa de los parámetros y la verosimilitud, y usando el teorema de Bayes como motor produce la distribución posterior. Sin embargo, saber la regla matemática del funcionamiento del motor suele ser de muy poca ayuda. Restringirse únicamente a aquellos modelos que permiten la manipulación matemática es una solución *procrustea*.

Ante este problema es necesario recurrir a alguna técnica numérica que permita aproximar la manipulación matemática.

Aproximación usando una rendija

Una solución sencilla cuando se tienen pocos parámetros (típicamente uno o dos) continuos consiste en generar una rendija de valores para los parámetros. Sea p_j alguno de estos valores, entonces se puede calcular la distribución posterior en p_j (salvo por una constante de proporcionalidad) usando la fórmula:

$$f_{\theta|\mathbf{X}}(p_j|\mathbf{x}) \propto f_{\mathbf{X}|\theta}(\mathbf{x}|p_j) f_\theta(p_j).$$

Una importante consecuencia de este hecho es que podemos generar una muestra de la distribución posterior a partir de la rendija de valores propuesta, simplemente basta con seleccionar el valor p_j de manera proporcional a $f_{\mathbf{X}|\theta}(\mathbf{x}|p_j) f_\theta(p_j)$.

Simular de la predictiva posterior

También nos puede interesar generar una muestra de la distribución predictiva. Una vez que se cuenta con una muestra de la distribución posterior de los parámetros, $p_1, \ldots, p_m$, se puede generar una muestra $x_1, \ldots, x_m$ de la distribución predictiva posterior. Simplemente hay que simular $\mathbf{X}_j \sim f_{X|\theta}(x|p_j)$.

Pruebas de hipótesis

Algunas veces la inferencia estadística puede ser formulada como:

1. Se cuenta con una hipótesis, la cual puede ser cierta o falsa ($H : \theta \in \Theta_1$).
2. Se obtiene evidencia estadística sobre la falsedad de la hipótesis.
3. Usamos (o deberíamos usar) el teorema de Bayes para deducir de manera lógica el impacto de la evidencia en la hipótesis

$$\mathbb{P}(H|\mathbf{x}) = \mathbb{P}(\theta \in \Theta_1|\mathbf{x}) = \int_{\Theta_1} f(p|\mathbf{x})dp.$$

Estimación por intervalo

Si se cuenta con una muestra de la distribución posterior $p_1, \ldots, p_m$, se puede estimar $\mathbb{P}(\theta \in \Theta_1 | \mathbf{x}) = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\theta \in \Theta_1} | \mathbf{x}\right]$ mediante

$$\frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \mathbb{1}_{p_j \in \Theta_1}.$$

También se vuelve sencillo estimar intervalos (θ_1, θ_2) tales que $\mathbb{P}(\theta \in (\theta_1, \theta_2)) = 1 - \alpha$. A estos intervalos se les llama intervalos de credibilidad. Un intervalo de particular interés es el de menor longitud cuya probabilidad es $1 - \alpha$ (highest posterior density interval, HPDI).

Estimación puntual (MAP)

Recuerde que el estimador bayesiano consiste en toda la distribución posterior. Sin embargo, a veces nos es requerido reportar un único valor. En este caso es común reportar el valor más probable a posteriori (maximum a posteriori, MAP). Lamentablemente, dicho estimador puntual puede dar lugar a resultados absurdos.

Ejemplo 5

Considere el ejercicio, planteado en la tarea, del globo terráqueo. Suponga que en 3 lanzamientos se obtiene AAA, en este caso el MAP vale 1. Lo que es un resultado absurdo.

Estimación puntual

En vez de reportar el MAP se podría optar por la media o la mediana de la distribución posterior, pero entonces surge la pregunta de qué estimador puntual es el que deberíamos de reportar. Una manera de tomar esta decisión es a través del uso de alguna función de pérdida $L(p, p_0)$, donde p_0 es el verdadero parámetro. Pero, ¡el verdadero parámetro es desconocido!

Para solucionar este inconveniente se minimiza la perdida esperada, tomando el valor esperado con respecto a la distribución posterior. Es decir se calcula

$$\begin{aligned} L(p) &= \mathbb{E}_{\tilde{p}\sim f_{\theta|\mathbf{X}}}[L(p,\tilde{p})] \\ &= \int_{\Theta} L(p,\tilde{p}) f_{\theta|\mathbf{X}}(\tilde{p}|\mathbf{x}) d\tilde{p} \end{aligned}$$

y se selecciona $p \in \arg\min_{p\in\Theta} L(p)$.

Si se cuenta con muestra $p_1, \ldots, p_m$ de la distribución posterior, entonces $L(p)$ puede ser estimado mediante

$$\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} L(p, p_j)$$

- Mostrar ejemplo Beta-binomial.

Cómo determinar qué función de pérdida usar

Considere el caso en que se requiere decidir si ordenar una evacuación o no con base en la velocidad del viento provocado por un huracán.

El riesgo a que haya fallecidos y/o personas afectadas aumenta rápidamente conforme aumenta la rapidez del viento. Sin embargo, también se induce un costo al ordenar una evacuación innecesaria, aunque este es mucho menor.

Por lo tanto, se debería usar una función de pérdida muy asimétrica, que crece rápidamente cuando la velocidad del viento excede nuestra inferencia, pero crece lentamente cuando la velocidad del viento es menor que nuestra inferencia.

Breve comentario sobre las pruebas de hipótesis

Retomando nuestra discusión sobre las pruebas de hipótesis. De manera más general, lo que se desea es calcular

$$\mathbb{P}(H|\text{evidencia}) = \frac{\mathbb{P}(\text{evidencia}|H)\mathbb{P}(H)}{\mathbb{P}(\text{evidencia})}.$$

Lo más importante es aumentar $\mathbb{P}(H)$, lo cual requiere un esfuerzo cognitivo y argumentativo y no se limita a una simple prueba estadística.

Simular de la predictiva previa

Note que también se puede simular una muestra de la predictiva previa, para ello basta con simular una muestra de los parámetros $p_1, \ldots, p_m$, a partir de la distribución previa y luego simular $\mathbf{X}_j \sim f_{X|\theta}(x|p_j)$.

Poder simular de la predictiva previa puede ayudar a discriminar entre distintas distribuciones previas. Pues al simular de la predictiva previa podemos observar las consecuencias de las distribución previa sobre la variable de interés X. Muchas de las técnicas convencionales para decidir la distribución previa pueden dar lugar a distribuciones más bien absurdas.

- Mostrar ejemplo de la estatura de la población !Kung.

Regresión de la estatura en el peso

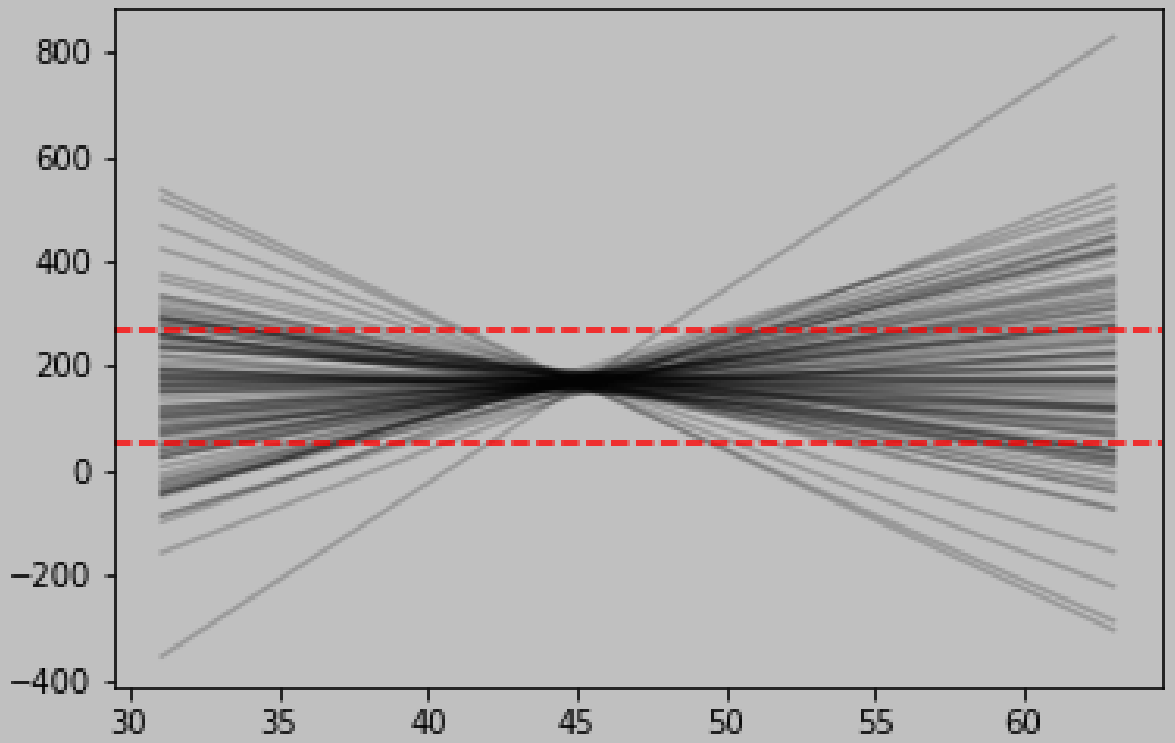
Para estos ejercicios vamos a usar los datos de la comunidad !Kung. Consideraremos sólo a los adultos, esto porque la estatura está fuertemente relacionada con la edad hasta antes de la adultez.

Sea h_i la estatura del i-ésimo individuo, w_i su peso y $\bar{w}$ el peso promedio de los adultos. Vamos a considerar el modelo:

$$
\begin{aligned}
h_i &\sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma) \\
\mu_i &= \alpha + \beta(w_i - \bar{w}) \\
\alpha &\sim \mathcal{N}(170, 10) \\
\beta &\sim \mathcal{N}(0, 10) \\
\sigma &\sim \mathcal{U}(0, 33)
\end{aligned}
$$

Note cuando $w_i = \bar{w}$, $\mu_i = \alpha$. Es decir cuando el peso es igual al promedio de la población la estatura promedio será α, así que hace mucho sentido modelar $\alpha \sim \mathcal{N}(170, 10)$. Para σ simplemente usamos una distribución con poca información. Pero **¿por qué hemos puesto esa previa para β?**

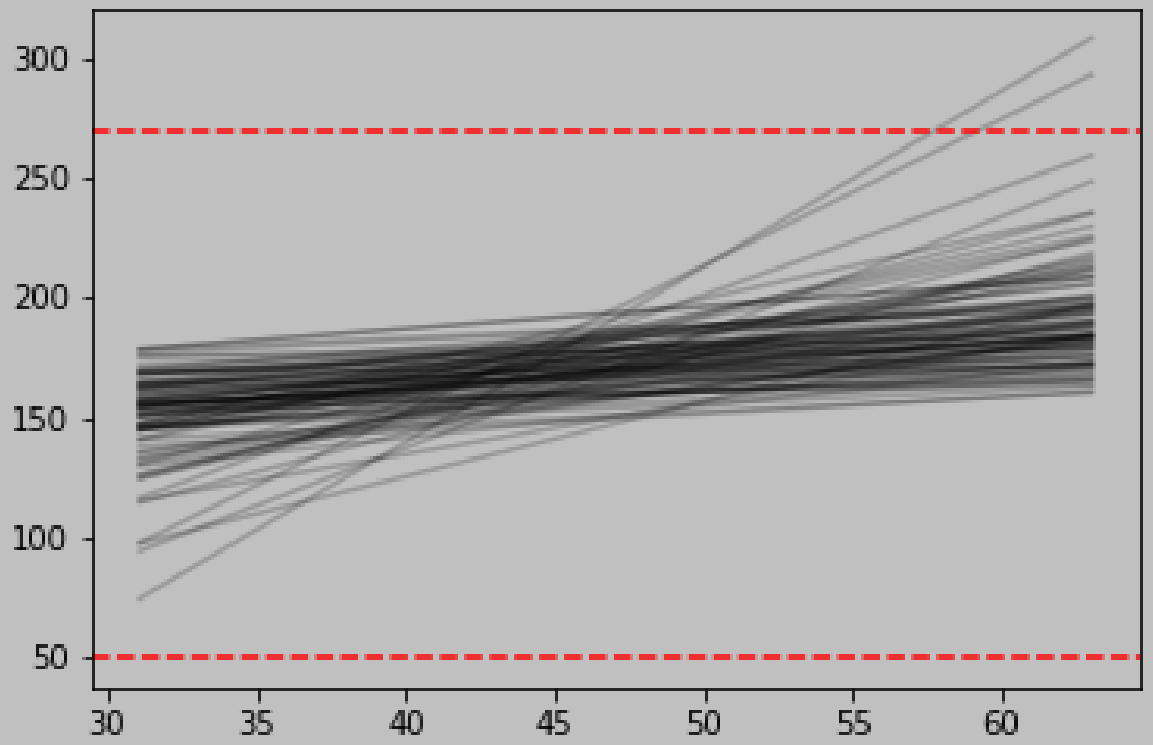
Una manera de verificar qué tan sensatas son estas previa es simulando valores de α y β, $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_m$ y luego graficar $\alpha_j + \beta_j(w_j - \bar{w}), \quad j = 1, \ldots, m.$



¡Evidentemente esta previa para β es absurda!

Cualquiera sabe que el peso y la estatura guardan (hasta cierto punto) una correlación positiva, por lo que es sensato considerar una distribución previa estrictamente positiva para β. Por lo que consideramos el siguiente modelo:

$$
\begin{aligned}
h_i &\sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma) \\
\mu_i &= \alpha + \beta(w_i - \bar{w}) \\
\alpha &\sim \mathcal{N}(170, 10) \\
\beta &\sim \text{lognormal}(0, 1) \\
\sigma &\sim \mathcal{U}(0, 33)
\end{aligned}
$$


300
250
200
150
100
50
30
35
40
45
50
55
60

Estimador MAP

Una vez establecido el modelo podemos crear una rendija de valores para α, β y σ. Y como antes, simular una muestra de la posterior. Con esta muestra podemos estimar puntualmente los parámetros y graficar la recta con mayor probabilildad a posteriori $\hat{\alpha} + \hat{\beta}(w - \bar{w})$.

Intervalos de confianza

Como μ depende de los parámetros y estos tienen una distribución posterior, entonces μ también cuenta con una distribución posterior. En particular fijando un peso w, y contando con una muestra a posteriori $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_m$ podemos obtener una muestra a posteriori $\mu_1, \ldots, \mu_m$ usando la relación:

$$\mu_j = \alpha_j + \beta_j(w - \bar{w}).$$

A partir de esta muestra podemos obtener un intervalo de confianza para la estatura media dado el peso w. Variando w desde el valor más bajo hasta el valor más alto podemos obtener un intervalo de confianza para la función de regresión.

Intervalos de predicción

Finalmente, para agregar intervalos de predicción hay que recordar que $h \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$. Así para un peso fijo w podemos obtener una muestra de la posterior de μ como se explicó antes, $\mu_1, \ldots, \mu_m$. Además podemos simular una muestra de la posterior de σ, $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$. Por lo tanto podemos obtener una muestra de la posterior de h, $h_1, \ldots, h_m$, donde $h_j \sim \mathcal{N}(\mu_j, \sigma_j)$. A partir de la muestra $h_1, \ldots, h_m$ podemos obtener un intervalo de predicción para el peso w. Variando w desde el valor más bajo hasta el valor más alto podemos obtener un intervalo de predicción para la función de regresión.

- Mostrar ejemplo de regresión de la estatura de la población !Kung.

Aproximación por cuadratura

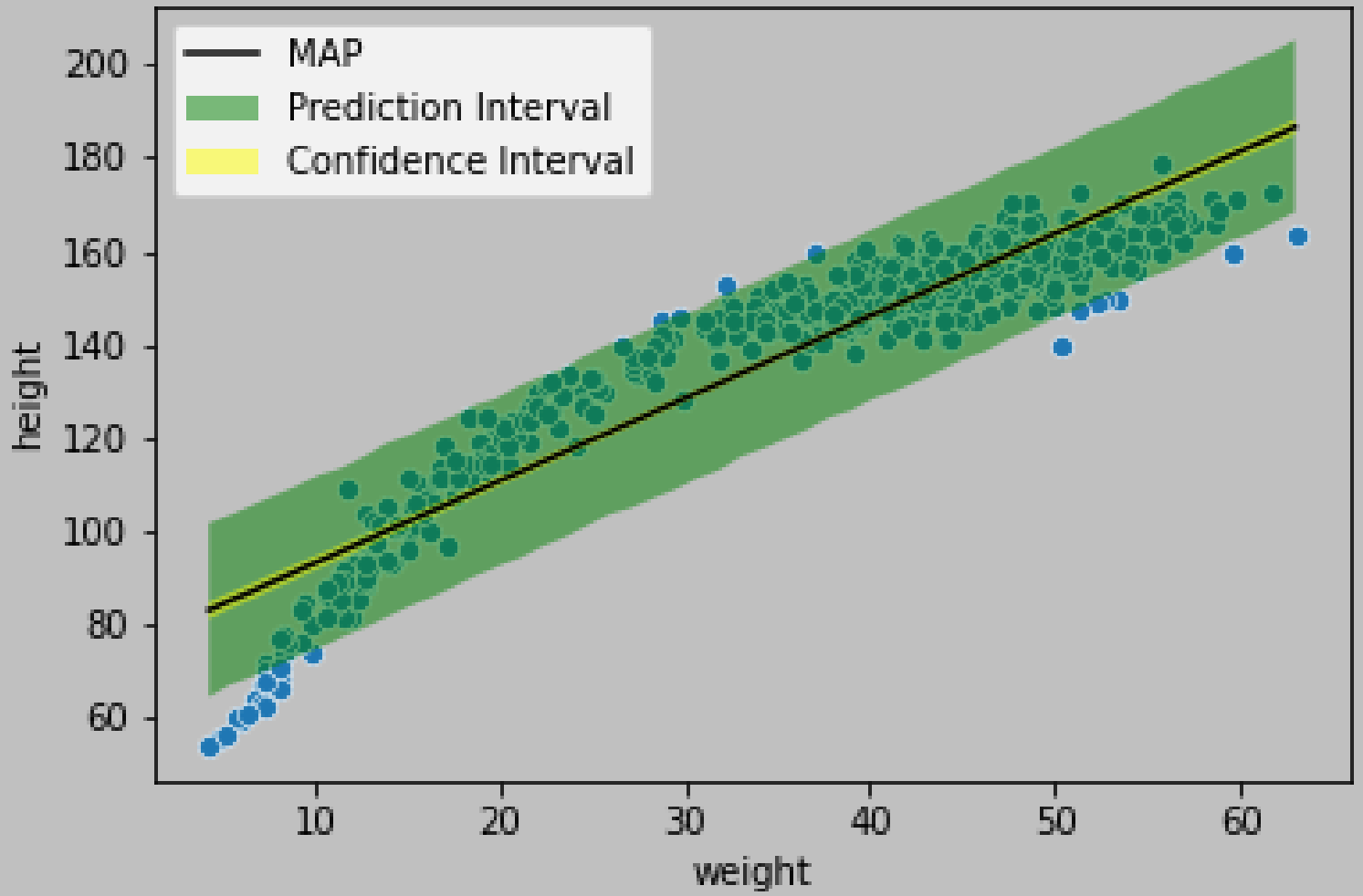
Es claro que una de las limitantes del método de aproximación usando una rendija es que escala pobremente cuando incrementamos el número de parámetros en el modelo (maldición de la alta dimensionalidad). De los ejemplos anteriores también hemos visto que las posteriores de los parámetros tienden a tomar una forma acampanada cuando el tamaño de la muestra es grande (ley de grandes números).

Esta observación nos permite introducir el método de aproximación por cuadratura. Hay que recordar que la densidad normal tiene esta forma de campana y que el logaritmo es proporcional a $\lambda(x - \mu)^2$, i.e. es una función cuadrática (una parábola). Usando este hecho podemos aproximar la posterior de los parámetros mediante una distribución normal.

Regresión de la estatura en el peso (2)

- Mostrar ejemplos de aproximación por cuadratura.

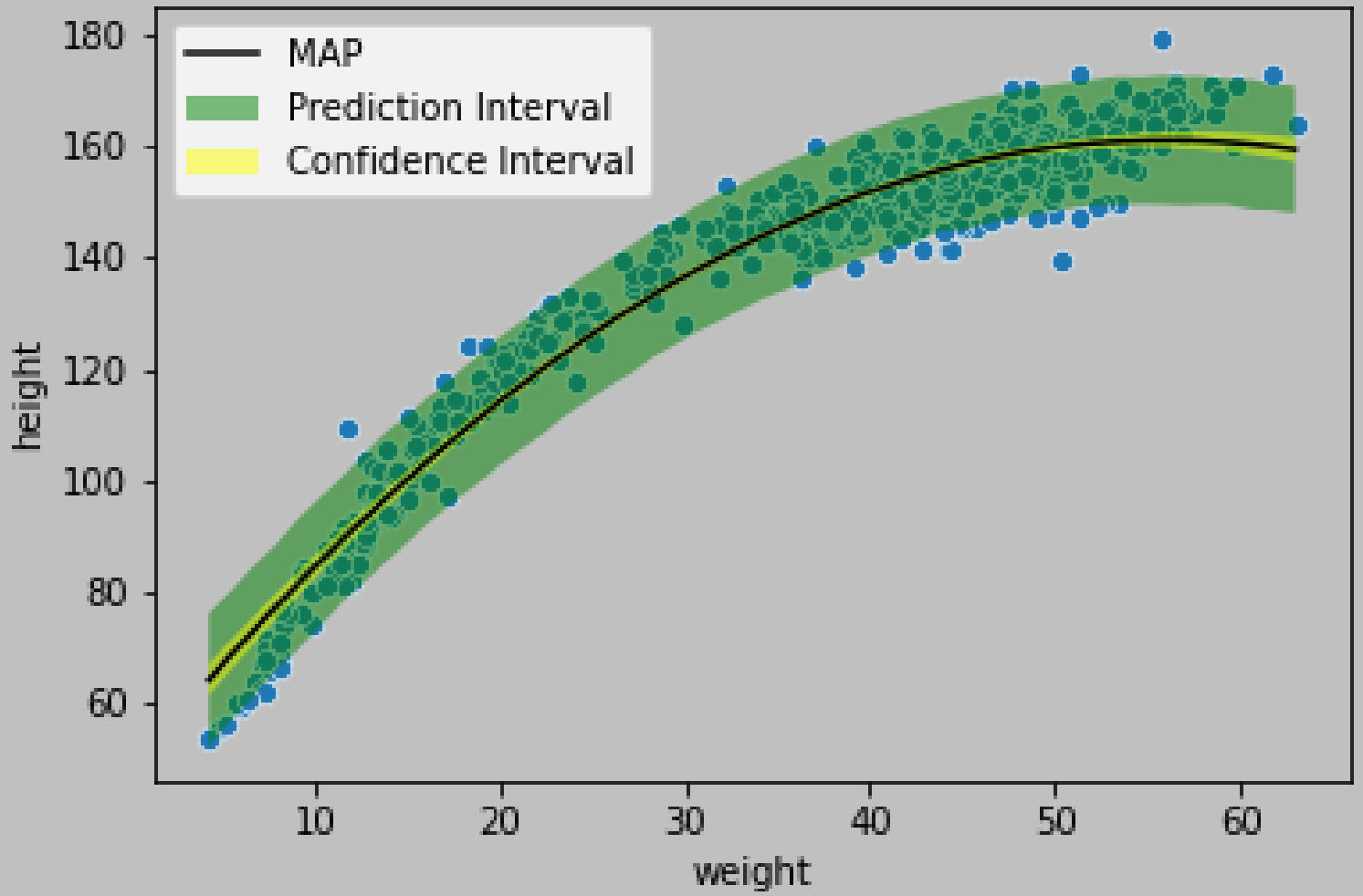
Consideremos una vez más el ejemplo de predecir la estatura de la población !Kung según su peso, pero ahora tomemos todos los individuos de la muestra. Ahora estamos dispuestos a aceptar que pueda haber mayor variabilidad en la estatura así que cambiamos la distribución previa de σ por $\sigma \sim \mathcal{U}(0, 50)$. Antes de ajustar el modelo estandarizamos la altura y el peso (restamos la media y dividimos por el desvío padrón), más adelante veremos por qué hemos hecho esto. Para estimar la posterior de los parámetros usamos la aproximación por cuadratura.


MAP
Prediction Interval
Confidence Interval
200
180
160
140
120
100
80
60
height
10
20
30
40
50
60
weight

El modelo no es satisfactorio por lo que en su lugar proponemos el siguiente modelo:

$$
\begin{aligned}
h_i &\sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma) \\
\mu_i &= \alpha + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2 \\
\alpha &\sim \mathcal{N}(170, 10) \\
\beta_1 &\sim \text{lognormal}(0, 1) \\
\beta_2 &\sim \mathcal{N}(0, 1) \\
\sigma &\sim \mathcal{U}(0, 50),
\end{aligned}
$$

donde $x_i = (w_i - \bar{w})/s_w$.
Como estamos considerando una potencia de la variable predictora conviene estandarizarla antes para evitar posibles problemas numéricos.


MAP
Prediction Interval
Confidence Interval
180
160
140
120
100
80
60
height
10
20
30
40
50
60
weight

Tarea 3

- Dejar tarea 3.

Introducción a la causalidad

El tema de causalidad no es en sí mismo un tema exclusivo de la estadística bayesiana. Pero sí está muy relacionado con el tema de regresión, a pesar de ello tiende a ser un tema olvidado en la mayoría de los cursos que tratan el tema de regresión. Sin embargo, el ignorarlo puede acarrear varios problemas y poco entendimiento del fenómeno de interés.

Para este tema usaremos datos sobre la tasa de divorcios, tasa de matrimonio y edad mediana de matrimonio en los distintos estados de Estados Unidos.

Prediciendo la tasa de divorcio

En este ejemplo intentaremos predecir (y entender las causas de) la tasa de divorcio usando la edad (mediana) de matrimonio y la tasa de matrimonio.

Pero **¿cómo asignamos distribuciones previas en este caso?** Como vimos en el ejemplo anterior, una manera de hacer es proponer alguna distribución para los parámetros de la regresión y observar si obtenemos valores sensatos para μ_i. Sólo que en este caso no tenemos tan claro qué valores son sensatos para μ_i.

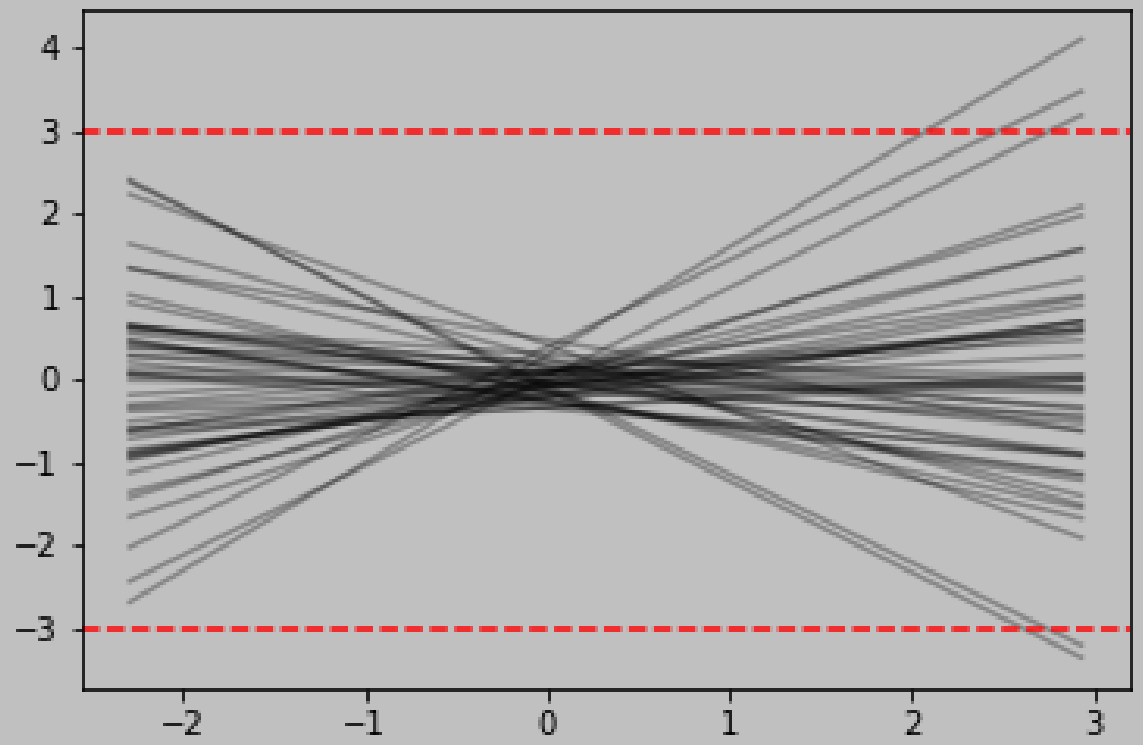
Una manera de resolver este problema es no modelando directamente la tasa de divorcios sino la tasa **estandarizada**. Sabemos que cuando dicha tasa sigue una distribución normal, entonces al estandarizarla, sus valores estarán entre -3 y 3 con alta probabilidad.

Sean D, M y A las tasas de divorcio, matrimonio y edad mediana estandarizadas. Proponemos el siguiente modelo para predecir D en función de A:

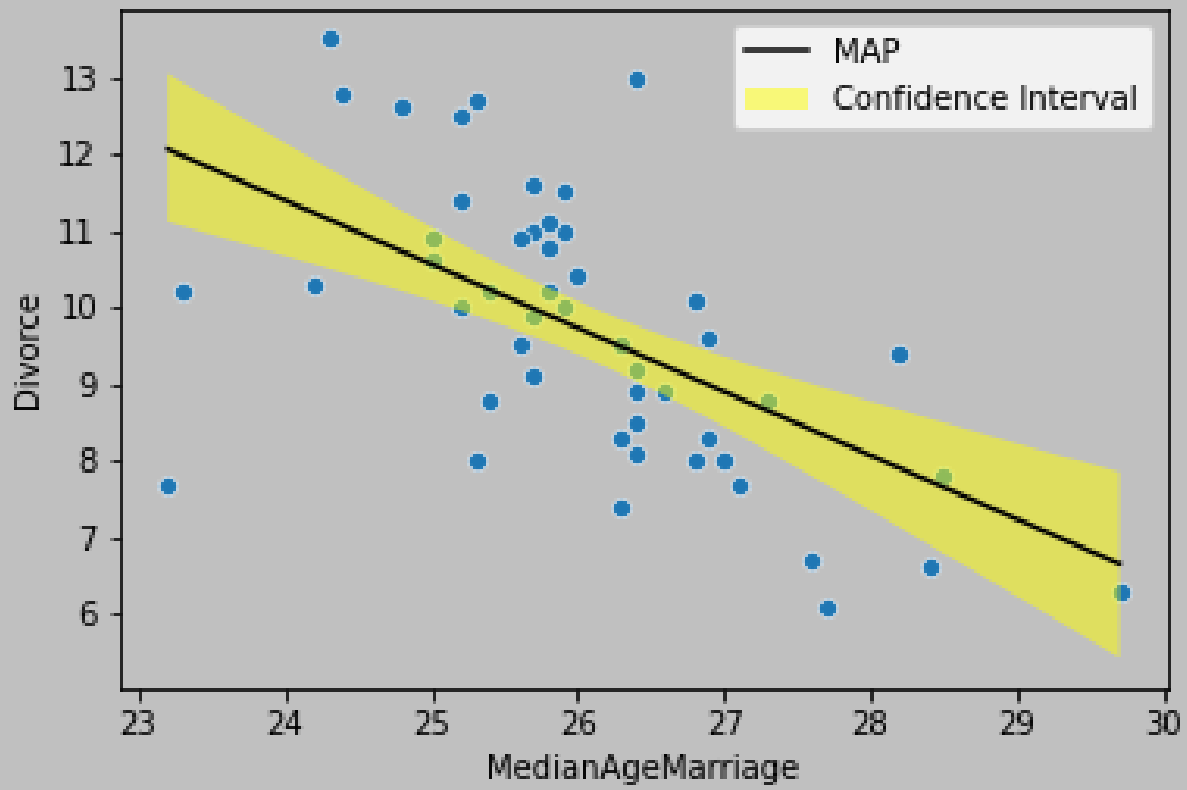
Modelo 1

$$
\begin{aligned}
D_i &\sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma) \\
\mu_i &= \alpha + \beta_A A_i \\
\alpha &\sim \mathcal{N}(0, 0.2) \\
\beta_A &\sim \mathcal{N}(0, 0.5) \\
\sigma &\sim \text{Exp}(1).
\end{aligned}
$$

A continuación se muestra la distribución previa para μ.



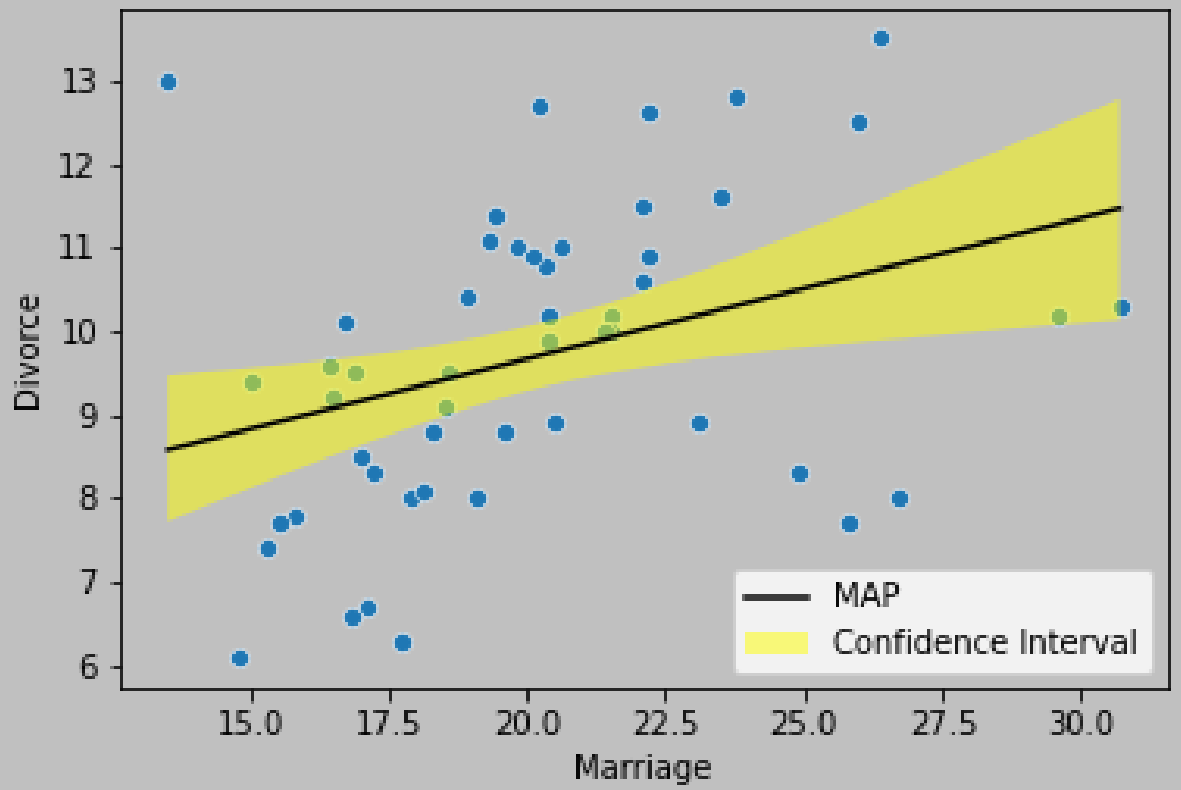
De manera análoga al ejercicio anterior podemos estimar la función de regresión. Al final simplemente *desestandarizamos* los datos para tener la regresión en la escala usual.



Similarmente, ajustamos el modelo de regresión de D dado M:

Modelo 2

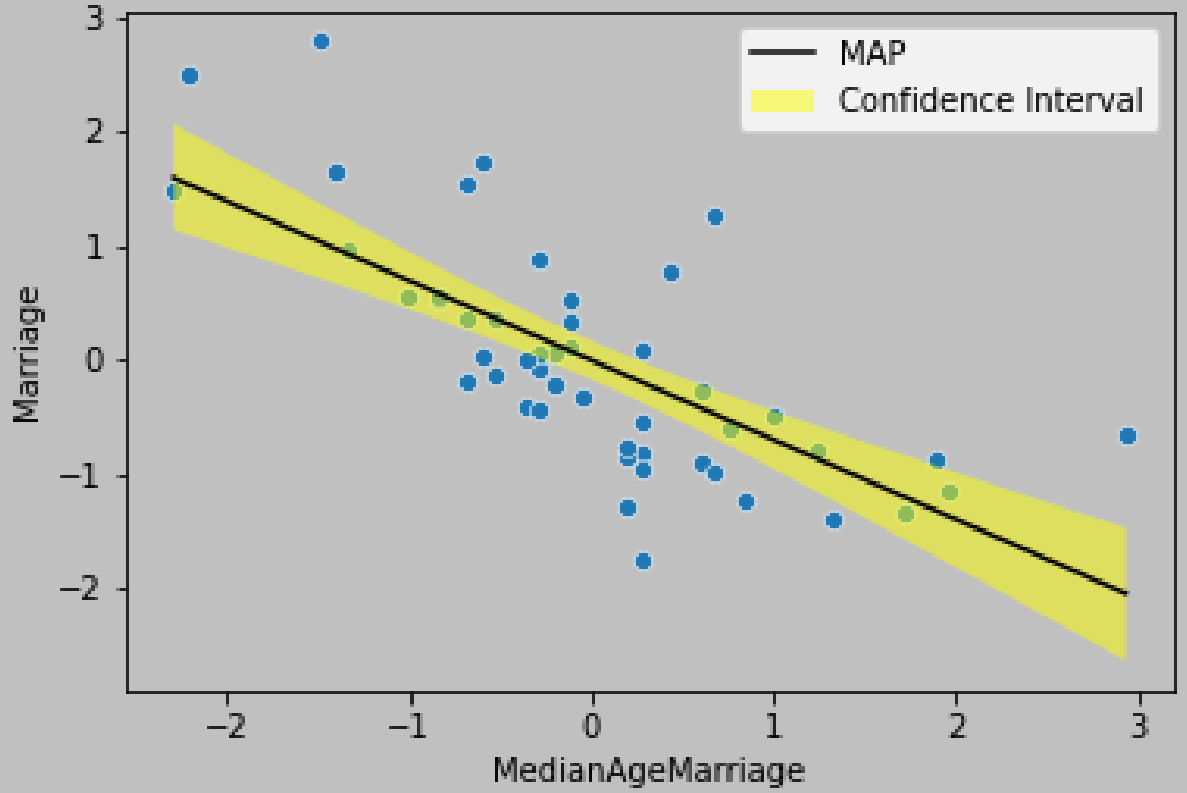
$$D_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma)$$
$$\mu_i = \alpha + \beta_M M_i$$
$$\alpha \sim \mathcal{N}(0, 0.2)$$
$$\beta_M \sim \mathcal{N}(0, 0.5)$$
$$\sigma \sim \text{Exp}(1).$$


Divorce
Marriage
13
12
11
10
9
8
7
6
15.0
17.5
20.0
22.5
25.0
27.5
30.0
MAP
Confidence Interval

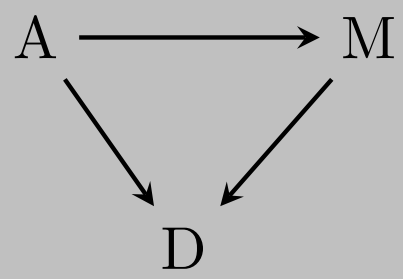
Finalmente, también podemos ajustar un modelo de regresión para M dado A:

$$
\begin{aligned}
M_i &\sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma) \\
\mu_i &= \alpha + \beta_{AM} A_i \\
\alpha &\sim \mathcal{N}(0, 0.2) \\
\beta_{AM} &\sim \mathcal{N}(0, 0.5) \\
\sigma &\sim \text{Exp}(1).
\end{aligned}
$$

Una ventaja de trabajar con los datos estandarizados es que β_{AM} se vuelve el coeficiente de correlación entre M y A, cuyo estimador MAP es $\hat{\beta}_{AM} = -0.69$.


MAP
Confidence Interval
Marriage
MedianAgeMarriage
3
2
1
0
−1
−2
−2
−1
0
1
2
3

Con estos resultados hemos comprobado que existe una relación a pares entre las variables, por lo que podemos pensar en un modelo causal asociado al grafo:



En este caso A influye en D de dos maneras. Hay un primer efecto $A \to D$. Este primer efecto puede explicarse como que los jóvenes tienden a ser más inmaduros y volverse incompatibles con su pareja, mientras que las parejas más grandes tienden a ser más estables. El segundo es un efecto indirecto, en el que la edad influye en la tasa de matrimonios que a su vez influye en la tasa de divorcios. En este caso, si las personas se casan más jóvenes, se incrementa la tasa de matrimonios porque hay más personas jóvenes que viejas.

Markov equivalencia

El grafo anterior pertenece a una familia de grafos llamados grafos dirigidos acíclicos (directed acyclic graphs, DAGs) y nos ayudan a establecer relaciones de causalidad. Como en el grafo existe una flecha entre cada par de variables se satisfacen las siguientes condiciones de independencia:

$$D \not\perp\!\!\!\perp A, \quad D \not\perp\!\!\!\perp M, \quad A \not\perp\!\!\!\perp M.$$

Sin embargo, existen al menos otros dos DAGs que inducen las mismas relaciones de independencia:

Mediators and Confounders

El primero de los grafos muestra una relación denominada *mediation*, en la cual M es llamado *mediator*. El segundo grafo corresponde a una relación en la que A es llamado un *confounder*.

Existe un área conocida como **Inferencia Causal** que busca identificar cuál es el modelo causal más plausible para el fenómeno de interés.

Lo primero que debemos notar es que el modelo 1, contiene el efecto "total" de A sobre D. El "total" se refiere a que se han considerado todos los caminos de A a D. El directo $A \to D$ y el indirecto $A \to M \to D$.
Para estimar el efecto directo de A y M sobre D podemos ajustar el siguiente modelo de regresión:

Modelo 3

$$
\begin{aligned}
D_i &\sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma) \\
\mu_i &= \alpha + \beta_M M_i + \beta_A A_i \\
\alpha &\sim \mathcal{N}(0, 0.2) \\
\beta_M &\sim \mathcal{N}(0, 0.5) \\
\beta_A &\sim \mathcal{N}(0, 0.5) \\
\sigma &\sim \text{Exp}(1).
\end{aligned}
$$

La siguiente tabla resume la estimación de los parámetros de correlación en los distintos modelos.

	$\hat{\beta}_A$	Intervalo 95%	$\hat{\beta}_M$	Intervalo 95%
Modelo 1	-0.57	(-0.79,-0.36)	-	-
Modelo 2	-	-	0.35	(0.1,0.59)
Modelo 3	-0.61	(-0.9,-0.31)	-0.07	(-0.36,0.23)

El parámetro de correlación entre A y D no muestra diferencias importantes. Pero el parámetro de correlación entre M y D se ve muy afectado, incluso el intervalo de probabilidad del 95% incluye al cero. Esto es, dado A, M es (casi) irrelevante para D, i.e. (casi) $D \perp\!\!\!\perp M|A$.

De estas observaciones podemos inferir el siguiente grafo causal: