Departamento de Matemáticas
de la
Universidad de Guanajuato

Desde la compacidad a las topologías débil y débil*

Tesis presentada para obtener el grado de
Licenciado en Matemáticas.

Alumno: Irwin Enrique Villalobos López
Asesor: Dr. Fernando Galaz Fontes

Centro de Investigación en Matemáticas A. C.

Guanajuato, México
Noviembre del 2021

Índice general

Introducción

Desde el primer curso de cálculo que se imparte en la licenciatura en matemáticas se tiene un encuentro indirecto con la compacidad por medio de las propiedades que tienen los intervalos cerrados y acotados. Ya en los cursos de análisis se trabaja con la compacidad en el marco de espacios métricos y se demuestra que en el caso particular de $\mathbb{R}^n$, podemos identificar a los conjuntos compactos como aquellos que son cerrados y acotados. En cursos más avanzados de análisis se prueba que en los espacios normados de dimensión infinita esto ya no sucede, más aún la bola cerrada unitaria ya no es compacta en estos espacios. La escasez de conjuntos compactos en un espacio normado de dimensión infinita dificulta en gran medida el estudio de las funciones ahí definidas, puesto que la compacidad del dominio de una función continua hace que ésta tenga cualidades importantes.

Una forma de lidiar con el problema anterior es introducir otras topologías en los espacios normados de tal forma que, respetando la estructura algebraica, mantengan una relación con la topología original y tengan menos conjuntos abiertos. Es por esto que se les llama topologías débiles. La primera de estas, la topología débil, se define como la topología más pequeña sobre un espacio normado en la cual los funcionales lineales continuos bajo la norma siguen siendo continuos. Por otro lado, la topología débil* (débil estrella) se define sobre un espacio dual como la topología más pequeña en la cual se satisface que todas las funciones de evaluación son continuas. Desde principios del siglo XX, David Hilbert y Frigyes Riesz ya habían trabajado con la convergencia débil de sucesiones en $L_2[0,1]$ y $L_p[0,1]$ respectivamente, pero fue Von Neumman quien vio que precisamente lo anterior provenía de una topología. Como fruto de todo este desarrollo, resulta que en el caso de la topología débil* la bola unitaria en el espacio dual ahora siempre es compacta.

A lo largo de este trabajo hacemos un recorrido de los conceptos y resultados necesarios para establecer la conclusión anterior, empezando desde espacios topológicos y culminando con la construcción y desarrollo de las topologías débil y débil*. Una vez introducidos los conceptos topológicos de continuidad y compacidad nos adentraremos en el marco más particular de los espacios métricos, donde dichos conceptos se pueden caracterizar por medio de la convergencia de sucesiones. Después, especificando una vez más nuestro campo de estudio, nos enfocamos a espacios normados, donde además de contar con una distancia y su topología inducida, también tenemos una estructura de espacio vectorial. Debido a que las topologías débiles en general no son metrizables, el estudio de espacios métricos y normados no nos provee de resultados válidos para trabajar con dichas topologías. Sin embargo, estas aun conservan el vínculo entre la topología y la estructura algebraica, lo que da lugar a los espacios vectoriales topológicos. Pero antes de empezar el estudio de estos espacios desarrollamos el concepto de red, que sustituye y generaliza el papel que las sucesiones tienen en los espacios métricos. En este punto estaremos listos para definir las topologías débiles y estudiar en ellas la compacidad.

Hemos dividido nuestra exposición en seis capítulos. El tema que tratamos en el primer capítulo es la topología, concepto que formalizó Felix Hausdorff en 1914 para generalizar las propiedades de los espacios euclidianos que permiten un estudio adecuado de funciones a través del comportamiento que tienen en los conjuntos abiertos [Cro02, p. 129]. Cabe mencionar que en ese entonces Hausdorff denominó como espacio topológico a lo que actualmente se le conoce como un espacio de Hausdorff. A partir de ahí se introduce la noción de continuidad que extiende a la definición épsilon-delta que expuso Bernard Bolzano en 1817. Además de esto, en este capítulo también tratamos el concepto actual de compacidad presentado por Pavel Alexandrov y Pavel Urysohn en 1929 [Cro02, p. 193], el cual es útil dado que generaliza a los espacios topológicos las propiedades que en $\mathbb{R}$ tienen los intervalos cerrados y acotados. En el camino para llegar a dicho concepto, se trabajó con distintas nociones. Entre ellas están la compacidad por sucesiones, trabajada en 1904 por Maurice Fréchet; la compacidad contable, la propiedad de Bolzano-Weierstrass y la propiedad de intersección finita. Algunas de las definiciones con las que trabajamos en este capítulo se basaron en [DGC05].

En el segundo capítulo nos adentramos en el estudio de los espacios métricos, concepto que introdujo Fréchet en 1906 [Cro02, p. 97] y que se basa en la noción de distancia. Estos espacios resultan cumplir los axiomas de contabilidad, así que las sucesiones juegan en ellos un papel muy importante. Tanto así que nos permiten caracterizar algunos conceptos como la compacidad, que en su momento hizo Fréchet; la cerradura y la continuidad. Nuestro principal propósito en este capítulo es determinar condiciones necesarias y suficientes bajo las cuales un conjunto es compacto en un espacio métrico. En el proceso nos encontramos con la necesidad de abordar las nociones de espacio completo y de conjunto totalmente acotado, que generalizan respectivamente las de espacio cerrado y de conjunto acotado y que ya resuelven nuestro problema en el caso particular de $\mathbb{R}^n$.

Para terminar de delimitar nuestro marco de trabajo, en el tercer capítulo tratamos con la teoría de espacios normados, la cual fue desarrollada principalmente por Stefan Banach, Hans Hahn, Eduard Helly y Norbert Wiener a principios del siglo XX y fue el mismo Banach quien en 1923 definió a los espacios que ahora llevan su nombre [Cro02, p. 97]. Comenzamos proveyendo algunos ejemplos de espacios de Banach como lo son los espacios de sucesiones ℓ_p. En seguida nuestro objetivo se convierte en mostrar una caracterización de los espacios normados de dimensión finita mediante la compacidad de su bola unitaria, la cual se le atribuye a Frigyes Riesz en 1918. Nosotros lo demostramos de la misma manera que se hace en [Die84], a partir del lema de Riesz. En el proceso demostramos que todos los espacios normados de la misma dimensión finita son linealmente isomorfos, como ya lo sabían los matemáticos polacos en los años veinte. Para finalizar el capítulo nos ocupamos de estudiar el espacio dual de un espacio normado, así como algunos resultados al respecto, entre los que destacan los teoremas de Hahn-Banach y el lema de Helly.

Debido a que en muchos casos las topologías débiles resultan ser no metrizables, no es posible aplicar en su estudio los resultados antes vistos, que se basan en el uso de sucesiones. Es por esto que en el cuarto capítulo desarrollamos una generalización de las sucesiones que, al igual que en el capítulo dos, permite caracterizar a la cerradura, continuidad y compacidad, pero esta vez en cualquier espacio topológico. Esta generalización de la que hablamos son las redes. En este capítulo hacemos especial hincapié en el teorema de Tychonoff, que exhibe que el producto arbitrario de espacios compactos es compacto. Aunque tal teorema fue probado por Andrey Tychonoff en 1937, aquí exhibimos una prueba que dio Paul Chernoff en su artículo [Che92] y que utiliza redes. En cuanto al resto del capítulo, algunas de las demostraciones están basadas en [Meg98].

Como se mencionó anteriormente, las topologías débiles resultan producir espacios vectoriales topológicos. Así es como en el quinto capítulo nos interesamos en el análisis de estos espacios. Resaltamos que los espacios normados resultan ser un caso específico de espacios vectoriales topológicos y que al igual que todos los espacios normados de dimensión finita son linealmente isomorfos, lo mismo sucede con los espacios vectoriales topológicos. Aunque fue Tychonoff quien demostró esto, en esta presentención nos guiamos en la demostración que Terence Tao da en [Tao11]. Posteriormente exponemos un caso específico de espacios vectoriales topológicos y sus propiedades. Estos son los espacios generados por una familia de seminormas y, al igual que [Rud91], más adelante se usarán para definir las topologías débiles. En particular, para la topología débil* desarrollamos la teoría detrás del espacio de funciones de un conjunto A sobre el campo $\mathbb{K}$.

Por último, habiendo llegado a este punto, ya contamos con las herramientas necesarias para manejar adecuadamente a las topologías débiles. Empezamos el sexto capítulo definiendo pues estas topologías y enunciando las propiedades básicas sobre convergencia de funciones y acotamiento de conjuntos. Además presentamos un ejemplo de Von Neumman que muestra que la topología débil puede ser no metrizable, aunque fue John V. Wehausen quien demostró que la topología débil de todo espacio de dimensión infinita no es metrizable. Como punto culminante de este trabajo, demostramos el teorema de Banach-Alaoglu, el cual tiene como consecuencia que bajo las topologías débiles no es necesario que un espacio sea de dimensión finita para que la bola unitaria sea compacta. Este fue demostrado por Banach para el caso particular de espacios separables y más tarde en 1940 Alaoglu lo probó en el caso general. Finalizamos nuestra exposición hablando un poco sobre la reflexividad de los espacios normados, concepto que en un principio se introduce independiente de las topologías débiles, pero que a través del teorema de Goldstine se puede caracterizar mediante la compacidad de la bola unitaria en la topología débil. Este vínculo se hace más estrecho cuando demostramos, a través del manejo de las topologías débiles solamente, que un subespacio cerrado de un espacio reflexivo también es reflexivo.

Capítulo 1

Espacios topológicos

Un aspecto muy importante de los espacios normados, sobre los cuales estaremos enfocándonos, es su topología, así que empezaremos este trabajo recordando algunos de los principales conceptos topológicos.

Sea X un conjunto no vacío. Una *topología* τ de X es una familia de subconjuntos de X que cumple las siguientes propiedades:

- **i)** El conjunto vacío $\varnothing$ y X pertenecen a τ.
- **ii)** Dados $A, B \in \tau$ se tiene que $A \cap B \in \tau$.
- **iii)** Si $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ es una familia de elementos de τ, entonces $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \in \tau$.

En este caso la pareja (X, τ) es un *espacio topológico*, a los elementos de τ los llamamos *abiertos* y a sus complementos *cerrados*.

Un subconjunto V de X es una *vecindad* de $x \in X$, si existe un abierto U tal que

$$x \in U \subseteq V.$$

En este caso también decimos que x es un *punto interior* de V. Al conjunto de puntos interiores de V en X lo denotamos por V^0. Claramente, $V^0 \subseteq V$.

Si además de ser una vecindad de $x \in X$, V es abierto, diremos que V es una *vecindad abierta* de x. En otras palabras, V es una vecindad abierta de x si, y sólo si V es un abierto que lo contiene.

Lema 1.1. *Sea X un espacio topológico y $V \subseteq X$. Entonces V es abierto si, y sólo si V es una vecindad de x para toda $x \in V$. En otras palabras, V es abierto si, y sólo si $V = V^0$.*

Demostración. Supongamos que V es abierto y sea $x \in V$. Entonces V es una vecindad de x.

Supongamos ahora que V es una vecindad de x para todo $x \in V$. Así, para cada $x \in V$ existe un abierto U_x tal que $x \in U_x \subseteq V$. De donde

$$V = \bigcup_{x \in V} U_x$$

es abierto. ■

Definición 1.1. Sea X un conjunto no vacío. Una *base* $\mathcal{B}$ de X es una familia de subconjuntos de X tal que:

- **i)** Es una *cubierta* de X, es decir, $\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B = X$.
- **ii)** Para $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ y $x \in B_1 \cap B_2$ existe $B_3 \in \mathcal{B}$ con $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Una base $\mathcal{B}$ determina la topología $\tau(\mathcal{B})$ definida por

$$\tau(\mathcal{B}) := \left\{ \bigcup_{\alpha\in\Lambda} B_\alpha : B_\alpha \in \mathcal{B} \text{ y } \Lambda \text{ cualquier conjunto} \right\}.$$

Si X es un espacio topológico, $\mathcal{B}$ es una base y $\tau(\mathcal{B})$ es la topología de X, diremos simplemente que $\mathcal{B}$ es una base de X.

Proposición 1.1. *Sea $\mathcal{B}$ una familia de abiertos de un espacio topológico X. Entonces $\mathcal{B}$ es una base de X si, y sólo si para todo abierto U en X y $x \in U$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq U$.*

Demostración. Supongamos primero que $\mathcal{B}$ es una base de X. Sea U abierto en X y $x \in U$. Como U es abierto, existen un conjunto Λ y $B_\alpha \in \mathcal{B}$ para cada $\alpha \in \Lambda$ tales que

$$U = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} B_\alpha.$$

De manera que existe $\alpha \in \Lambda$ tal que $x \in B_\alpha \subseteq U$.

Ahora supongamos que para cada abierto U y $x \in U$ existe $B \in \mathcal{B}$ para el cual se cumple que $x \in B \subseteq U$. Entonces:

i) Dado $x \in X$, como X es abierto, existe $B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x$. Así que

$$X = \bigcup_{x\in X} B_x \subseteq \bigcup_{B\in\mathcal{B}} B.$$

ii) Sean B_1, $B_2 \in \mathcal{B}$ y $x \in B_1 \cap B_2$. Como B_1 y B_2 son abiertos, entonces $B_1 \cap B_2$ es abierto. Por hipótesis existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que

$$x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2.$$

Por definición **i)** y **ii)** indican que $\mathcal{B}$ es una base. Veamos que es una base de X. Sea τ_X la topología de X. Como $\mathcal{B} \subseteq \tau_X$, entonces las uniones arbitrarias de elementos en $\mathcal{B}$ son abiertos. Así pues $\tau(\mathcal{B}) \subseteq \tau_X$. Ahora, al tomar $U \in \tau$ para cada $x \in U$ por hipótesis existe $B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subseteq U$. De donde

$$U = \bigcup_{x\in U} B_x$$

y así $U \in \tau(\mathcal{B})$. Es decir, $\tau_X = \tau(\mathcal{B})$.

■

Ejemplo 1.1. Consideremos en $\mathbb{R}$ la familia de intervalos abiertos $\mathcal{I} = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{R}, a < b\}$. Notemos que:

i) Dado $x \in \mathbb{R}$, el intervalo $(x-1, x+1)$ contiene a x, así que $\mathcal{I}$ es una cubierta de $\mathbb{R}$.

ii) Sean $I_1 = (a_1, b_1), I_2 = (a_2, b_2) \in \mathcal{I}$ tales que $x \in I_1 \cap I_2$. Entonces $a_1 < x < b_1$ y $a_2 < x < b_2$. Al definir $a = \text{máx}(a_1, a_2)$ y $b = \text{mín}(b_1, b_2)$, se tiene que $x \in (a,b) \subseteq I_1 \cap I_2$.

Por lo tanto $\mathcal{I}$ es una base de $\mathbb{R}$. La topología que genera $\mathcal{I}$ se denomina *topología usual* de $\mathbb{R}$ y es la que consideraremos al trabajar en $\mathbb{R}$ como espacio topológico.

Ejemplo 1.2. Sea X un conjunto no vacío. La familia τ de todos los subconjuntos de X resulta ser una topología en X, puesto que la unión arbitraria e intersección finita de subconjuntos de X vuelve a ser un subconjunto de X. A esta topología se le denomina *topología discreta* de X.

Definición 1.2. Sean (X,τ) un espacio topológico y $\varnothing \neq Y \subseteq X$. Consideremos la familia de subconjuntos de Y

$$\tau_Y := \{U \cap Y : U \in \tau\}.$$

Resulta que τ_Y es una topología y recibe el nombre de *topología subespacio* en Y respecto a X. A un conjunto en τ_Y lo llamaremos *abierto relativo* o *abierto* en Y

Sea X un espacio topológico. Consideremos un conjunto no-vacío $Y \subseteq X$ y en Y tomemos la topología subespacio. Fijemos $A \subseteq Y$. Entonces, dada cualquier propiedad topológica, podemos preguntarnos si el tenerla respecto de Y implica que la tiene respecto de X o viceversa.

Ejemplo 1.3. Tomemos el espacio topológico $X = \mathbb{R}$ y en este consideremos $Y = [0,1] \subseteq \mathbb{R}$. Observemos que el intervalo $A = (\frac{1}{2}, 1] = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) \cap [0,1]$ es abierto en Y, mientras que no lo es en X. Este es un ejemplo de una propiedad topológica que A cumple respecto a Y pero que no cumple respecto a X.

Proposición 1.2. *Sean (X,τ) un espacio topológico y $\varnothing \neq Y \subseteq X$. Si $\mathcal{B}$ es una base de τ, entonces $\mathcal{B}_Y := \{B \cap Y : B \in \mathcal{B}\}$ es una base de τ_Y.*

Demostración. Sea $B \in \mathcal{B}$. Entonces $B \cap Y$ es un abierto en Y. Esto prueba que $\mathcal{B}_Y$ es una familia de abiertos en Y.

Ahora, tomemos algún abierto U de X y $x \in U \cap Y$. Entonces $x \in U$ y como $\mathcal{B}$ es una base de X, por la proposición 1.1 se sigue que existe $B \in \mathcal{B}$ con $x \in B \subseteq U$. De esta manera $x \in B \cap Y \subseteq U \cap Y$, donde $B \cap Y \in \mathcal{B}_Y$. Luego, de la proposición 1.1 se concluye que $\mathcal{B}_Y$ es base de τ_Y. ■

Definición 1.3. Sea X un espacio topológico. Dado A un subconjunto de X, su *cerradura* es el conjunto $\overline{A} \subseteq X$ de puntos $x \in X$ que cumplen que para toda vecindad abierta U de x se satisface que $U \cap A \neq \varnothing$.

Ejemplo 1.4. Consideremos $A \subseteq \mathbb{R}$ no vacío y acotado. El axioma del supremo indica que existe una mínima cota superior $a := \sup A$ de A. Demostremos que $\sup A \in \overline{A}$.

Sea U una vecindad abierta de a. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $(a-\varepsilon, a] \subseteq U$. Por propiedades del supremo existe $x \in A \cap (a-\varepsilon, a] \subseteq A \cap U$. Así que $A \cap U \neq \varnothing$ y se sigue que $a \in \overline{A}$.

Proposición 1.3. *Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Entonces:*

- **i)** *$\overline{A}$ es cerrado.*
- **ii)** *$A \subseteq \overline{A}$.*
- **iii)** *A es cerrado si y sólo si $A = \overline{A}$.*

Demostración.

i) Demostremos que $\overline{A}^{\mathsf{c}}$ es abierto. Sea $x \in \overline{A}^{\mathsf{c}}$, de manera que $x \notin \overline{A}$. Así que existe U vecindad abierta de x tal que $U \cap A = \varnothing$. Dado $y \in U$ se tiene que U es una vecindad de y que no intersecta a A, por lo que $y \notin \overline{A}$ y así $x \in U \subseteq \overline{A}^{\mathsf{c}}$. Es decir, $\overline{A}^{\mathsf{c}}$ es una vecindad de todos sus puntos. El lema 1.1 implica que $\overline{A}^{\mathsf{c}}$ es abierto.

ii) Dados $x \in A$ y U vecindad abierta de x, se tiene entonces que $x \in A \cap U$, por lo que $A \cap U \neq \varnothing$ y así $x \in \overline{A}$.

iii) Sea A un conjunto cerrado en X y sea $x \in \overline{A}$. Supongamos que $x \notin A$, de manera que $x \in A^{\mathsf{c}}$. Como A es cerrado entonces A^{c} es una vecindad abierta de x. Dado que $x \in \overline{A}$, se tiene que $A \cap A^{\mathsf{c}} \neq \varnothing$, lo cual es una contradicción. Así que $x \in A$ y $\overline{A} \subseteq A$. Junto con **ii)** se concluye que $A = \overline{A}$.

Si por otro lado suponemos que $A = \overline{A}$, entonces **i)** indica que A es cerrado.

■

Definición 1.4. Sea X un espacio topológico y A un conjunto en X. Decimos que $x \in X$ es un *punto de acumulación* de A si para toda vecindad abierta U de x se cumple que $(U \cap A) \setminus \{x\} \neq \varnothing$. Al conjunto de puntos de acumulación de A lo denotamos por A'.

Lema 1.2. *Sea X un espacio topológico.*

- **i)** *Si $A \subseteq B \subseteq X$, entonces $A' \subseteq B'$.*
- **ii)** *Si $A \subseteq X$, entonces $A' \subseteq \overline{A}$.*

Demostración.

i) Sea $x \in A'$ y U una vecindad abierta de x. Como $\varnothing \subsetneq (U \cap A) \setminus \{x\} \subseteq (U \cap B) \setminus \{x\}$, se sigue que $x \in B'$.

ii) Sea $x \in A'$ y U una vecindad abierta de x. Como $\varnothing \subsetneq (U \cap A) \setminus \{x\} \subseteq (U \cap A)$, se sigue entonces que $x \in \overline{A}$.

■

1.1. Continuidad

El que una función entre dos espacios topológicos mantenga cierta relación entre los abiertos de ambos espacios resulta ser una propiedad bastante deseable. Dicha relación constituye el concepto de continuidad y permite distinguir funciones con propiedades de interés y que a lo largo de esta sección iremos enunciando.

Definición 1.5. Sean X y Y dos espacios topológicos y $f : X \to Y$.

- **i)** La función f es *continua* en $x \in X$ si para toda vecindad abierta V de $f(x)$ existe una vecindad abierta U de x tal que $f(U) \subseteq V$.
- **ii)** La función f es *continua*, si f es continua en x para todo $x \in X$.

Lema 1.3. *Sean X y Y dos espacios topológicos y $f : X \to Y$. Entonces f es continua si, y sólo si $f^{-1}(V)$ es abierto en X, para todo abierto V en Y.*

Demostración. Supongamos que f es continua. Sea V un abierto en Y. Para cada $x \in f^{-1}(V)$, V es vecindad abierta de $f(x)$, por lo que existe U_x vecindad abierta de x tal que $f(U_x) \subseteq V$ y por lo tanto $U_x \subseteq f^{-1}(V)$. De esto se puede concluir que

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{x \in f^{-1}(V)} U_x$$

es abierto.

Ahora supongamos que $f^{-1}(V)$ es abierto en X para todo abierto V en Y y tomemos $x \in X$. Sea V una vecindad abierta de $f(x)$. Entonces $f^{-1}(V)$ es abierto en X. Como $f(x) \in V$, entonces $x \in f^{-1}(V)$ y por lo tanto $f^{-1}(V)$ es una vecindad abierta de x. Además $f(f^{-1}(V)) \subseteq V$. ∎

Ejemplo 1.5. Sean X, Y espacios topológicos y $y_0 \in Y$.

- **i)** Cualquier función constante $f : X \to Y$, dada por $f(x) = y_0$, es continua, pues para todo abierto V en Y se tiene que

$$f^{-1}(V) = \begin{cases} X, & \text{si } y_0 \in V; \\ \varnothing, & \text{si } y_0 \notin V, \end{cases}$$

  es abierto en X.
- **ii)** Consideremos ahora la identidad $Id_X : X \to X$. Para cualquier abierto U de X, se tiene que $Id_X^{-1}(U) = U$ es abierto. Así que Id_X es continua.
- **iii)** Si $Y \subseteq X$ tiene la topología subespacio, entonces la inclusión $i : Y \to X, y \mapsto y$, es continua, pues dado U abierto en X, se tiene que $i^{-1}(U) = U \cap Y \in \tau_Y$.

Cuando sea necesario probar que una función es continua, si se cuenta con una base en el codominio, entonces basta probar que la preimagen de cualquier conjunto básico es abierto, como indica el siguiente lema.

Lema 1.4. *Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \to Y$. Si $\mathcal{B}$ es una base de Y y $f^{-1}(B)$ es abierto en X para todo $B \in \mathcal{B}$, entonces f es continua.*

Demostración. Sea V abierto en Y. Entonces existen un conjunto Λ y algunos $B_\alpha \in \mathcal{B}$, $\alpha \in \Lambda$ tales que $V = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} B_\alpha$. Por hipótesis $f^{-1}(B_\alpha)$ es abierto en X para toda $\alpha \in \Lambda$, por lo que también lo es

$$\bigcup_{\alpha \in \Lambda} f^{-1}(B_\alpha) = f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} B_\alpha\right) = f^{-1}(V).$$

∎

Otra manera de demostrar que una función es continua es expresarla como la composición de dos funciones que previamente sabemos que son continuas, como indica la siguiente proposición.

Proposición 1.4. *Sean X, Y, Z espacios topológicos, $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$. Si f y g son continuas, entonces la composición $g \circ f : X \to Z$ es continua.*

Demostración. Sea U cualquier vecindad abierta en Z. Como g es continua, del lema 1.3 se sigue que $g^{-1}(U)$ es abierto en Y. Luego, como f es continua, del mismo lema 1.3 se concluye que $(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$ es abierto en X y $g \circ f$ es continua. ■

Sea $f : A \to B$ una función de A en B. Para $D \subseteq A$ denotamos por $f\big|_D$ a la función *restricción* de D en B definida por $f\big|_D(x) = f(x)$ para toda $x \in D$.

Lema 1.5. *Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función.*

- **i)** *Si f es continua, entonces para toda $\varnothing \neq A \subseteq X$, $f\big|_A$ es continua.*
- **ii)** *Si $f\big|_U$ es continua para una vecindad abierta U de $x \in X$, entonces f es continua en x.*
- **iii) (Lema del Pegado)** *Si existen $A, B \subseteq X$ abiertos tales que $A \cup B = X$ y $f\big|_A$ y $f\big|_B$ son continuas, entonces f es continua.*

Demostración.

i) Tomemos un abierto V en Y. Como f es continua, entonces $f^{-1}(V)$ es abierto en X y por lo tanto ${f\big|_A}^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap A$ es abierto en A. Por el lema 1.3, $f\big|_A$ es continua.

ii) Sea V una vecindad abierta de $f(x)$ en Y. Como $f\big|_U$ es continua y $x \in U$, entonces en particular $f\big|_U$ es continua en x. Por lo tanto existe una vecindad abierta W de x en X tal que $f(W \cap U) = f\big|_U(W \cap U) \subseteq V$. Puesto que U y W son vecindades abiertas de x, también $W \cap U$ lo es. Luego f es continua en x.

iii) Sea $x \in X$. Entonces $x \in A \cup B$. Si $x \in A$, puesto que $f\big|_A$ es continua y A es abierto, de **ii)** se sigue que f es continua en x. Análogamente, f también es continua en x si $x \in B$. Por lo tanto f es continua.

■

Definición 1.6. Sean X y Y espacios topológicos. Un *homeomorfismo* entre X y Y es una función $f : X \to Y$ que es biyectiva, continua y de inversa continua.

Proposición 1.5. *Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ un homeomorfismo. Entonces f preserva abiertos y cerrados.*

Demostración. El que f preserve abiertos se sigue de inmediato del hecho de que f^{-1} es continua y de el lema 1.3.

Sea A un conjunto cerrado. Entonces $X \setminus A$ es abierto. Como f preserva abiertos, resulta que $f(X \setminus A)$ es abierto. Dado que f es biyectiva, se tiene que $Y \setminus f(A) = f(X \setminus A)$ es abierto y por lo tanto $f(A)$ es cerrado. ■

Ejemplo 1.6. Consideremos las funciones $f_1 : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ y $f_2 : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$ definidas por $f_1(x) = \frac{1}{x}$ para toda $x > 0$ y $f_2(x) = \frac{1}{x}$ para toda $x < 0$. Probemos que f_1 es continua. Sea

$(a, b), a < b$, un abierto básico en $\mathbb{R}$. Tenemos tres casos. Si $a > 0$, entonces $f_1^{-1}((a, b)) = (\frac{1}{b}, \frac{1}{a})$. En el segundo caso tomemos $b \leq 0$. Entonces $f^{-1}((a, b)) = \varnothing$. En el último caso resulta que $a \leq 0$ y $b > 0$, por lo que $f^{-1}((a, b)) = (\frac{1}{b}, \infty)$. De esta manera $f_1^{-1}((a, b))$ es abierto en $(0, \infty)$ y por el lema 1.4 se sigue que f es continua.

Dado que la función $g : (0, \infty) \to (-\infty, 0)$, definida por $g(x) = -x$, es un homeomorfismo entre $(0, \infty)$ y $(-\infty, 0)$, se sigue de la proposición 1.4 que $f_2 = g^{-1} \circ f_1 \circ g$ es continua.

Finalmente, por el lema del pegado podemos concluir que $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x}$ para toda $x \in X$ es continua. En efecto, $(0, \infty)$ y $(-\infty, 0)$ son abiertos en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ que lo cubren y $f\big|_{(0,\infty)} = f_1$ y $f\big|_{(-\infty,0)} = f_2$ son continuas.

1.2. Compacidad

La compacidad es una propiedad muy importante que puede tener un subconjunto de un espacio topológico. Por ejemplo, una función continua cuyo dominio es un conjunto compacto tiene propiedades relevantes, como se puede apreciar en la proposición 1.6 y en el teorema 2.3 del capítulo siguiente.

Definición 1.7. Un subconjunto K de un espacio topológico X es *compacto* si para cualquier colección $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ de abiertos tales que

$$K \subseteq \bigcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha$$

existen $n \in \mathbb{N}$ y $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \Lambda$ tales que

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}.$$

A la colección $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ se le denomina *cubierta abierta* de K y a la subcolección $\{U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_n}\}$ se le llama *subcubierta finita* de $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$.

Ejemplo 1.7. Sea X un espacio topológico. Cualquier conjunto finito $K \subseteq X$ es compacto. En efecto, si expresamos $K = \{x_1, \ldots, x_n\}$ y $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es una cubierta abierta de K, al tomar $\alpha_i \in \Lambda$ tal que $x_i \in U_{\alpha_i}$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ resulta que $\{U_{\alpha_i}\}_{i=1}^n$ es una subcubierta finita de K.

El teorema de Heine-Borel constituye una propiedad fundamental de los números reales y es una consecuencia del axioma del supremo.

Teorema 1.1 (Heine-Borel). *Para todos $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \leq b$, el intervalo $[a, b]$ es compacto.*

Lema 1.6. *Sean X un espacio topológico y $K \subseteq X$ compacto. Si $A \subseteq K$ es cerrado, entonces es compacto.*

Demostración. Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una cubierta abierta de A. Como A es cerrado, entonces A^c es abierto. Así que $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \cup \{A^c\}$ es una cubierta abierta de X y por tanto también de K. Puesto que K es compacto, existe una subcubierta finita $\mathcal{C}$ de $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \cup \{A^c\}$ que cubre a K y dado que $A \subseteq K$, entonces $\mathcal{C}$ también cubre a A. Por lo tanto, $\mathcal{C} \setminus \{A^c\}$ es una subcubierta finita de $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ que cubre a A. ■

Proposición 1.6. *Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función continua. Entonces f preserva compactos.*

Demostración. Sea K un conjunto compacto y $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una cubierta abierta de $f(K)$, entonces $(f^{-1}(U_\alpha))_{\alpha\in\Lambda}$ es una cubierta abierta de K por ser f continua. Por lo que existen $n \in \mathbb{N}$ y $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \Lambda$ tales que

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(U_\alpha).$$

Luego, $(U_{\alpha_i})_{i=1}^n$ es una cubierta finita de $f(K)$ y así este es un conjunto compacto. ■

Definición 1.8. Sea X un espacio topológico. Diremos que X es *Hausdorff* si para todos $x, y \in X$ distintos existen abiertos U, V tales que $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \varnothing$.

Proposición 1.7. *Sea X un espacio topológico Hausdorff. Si A y B son dos conjuntos compactos disjuntos en X, entonces existen abiertos disjuntos U y V tales que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$.*

Demostración. Fijemos $x \in A$ por un momento. Por ser X Hausdorff, para cada $y \in B$ existen U_y y V_y abiertos disjuntos tales que $x \in U_y$ y $y \in V_y$. De esta manera, $\{V_y\}_{y\in B}$ es una cubierta abierta de B. Al ser B compacto, existen $n \in \mathbb{N}$ y $y_1, \ldots, y_n \in B$ tales que $B \subseteq \bigcup_{i=1}^n V_{y_i}$. Definamos

$$U_x := \bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i} \quad \text{y} \quad V_x := \bigcup_{j=1}^{n} V_{y_j},$$

de tal manera que U_x, V_x son abiertos, $x \in U_x$, $B \subseteq V_x$ y

$$U_x \cap V_x = \left(\bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i}\right) \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n} V_{y_j}\right) = \bigcup_{j=1}^{n} \left[\left(\bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i}\right) \cap V_{y_j}\right] \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} \left[U_{y_j} \cap V_{y_j}\right] = \varnothing.$$

Como $\{U_x\}_{x\in A}$ es una cubierta abierta de A y A es compacto, existen $m \in \mathbb{N}$ y $x_1, \ldots, x_m \in A$ tales que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^m U_{x_i}$. Definamos

$$U := \bigcup_{i=1}^{m} U_{x_i} \quad \text{y} \quad V := \bigcap_{j=1}^{m} V_{x_j},$$

de tal manera que U, V son abiertos, $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ y

$$U \cap V = \left(\bigcup_{i=1}^{m} U_{x_i}\right) \cap \left(\bigcap_{j=1}^{m} V_{x_j}\right) = \bigcup_{i=1}^{m} \left[U_{x_i} \cap \left(\bigcap_{j=1}^{m} V_{x_j}\right)\right] \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} [U_{x_i} \cap V_{x_i}] = \varnothing.$$

■

Corolario 1.1. *Sea X un espacio topológico Hausdorff. Si K es un subconjunto compacto de X, entonces K es cerrado. En particular, si $K \subseteq X$ es finito, entonces K es cerrado.*

Demostración. Tomemos $x \in X \setminus K$. Como $\{x\}$ y K son compactos, la proposición 1.7 indica que existen abiertos disjuntos U, V tales que $x \in U$ y $K \subseteq V$. Entonces $x \in U \subseteq X \setminus V \subseteq X \setminus K$. Del lema 1.1 se sigue ahora que $X \setminus K$ es abierto y por lo tanto K es cerrado. ■

La compacidad de un conjunto es una propiedad que no depende del espacio topológico que lo contiene, sino de la topología del propio conjunto, como lo muestra la siguiente proposición.

Proposición 1.8. *Sean X un espacio topológico y $\varnothing \neq K \subseteq X$. Entonces K es compacto respecto a X si, y sólo si K es compacto con la topología subespacio en K.*

Demostración. Supongamos primero que K es compacto respecto a X. Tomemos un abierto U_α en X, para toda $\alpha \in \Lambda$, de manera que $\{U_\alpha \cap K\}_{\alpha\in\Lambda}$ sea una cubierta abierta de K en la topologia subespacio. Entonces

$$K \subseteq \bigcup_{\alpha\in\Lambda}(U_\alpha \cap K) \subseteq \bigcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha.$$

Así que $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es una cubierta abierta de K en X. Como K es compacto, existen $n \in \mathbb{N}$ y $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \Lambda$ tales que $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i}$, de donde

$$K \subseteq K \cap \left(\bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i}\right) = \bigcup_{i=1}^n (U_{\alpha_i} \cap K).$$

Por lo tanto K es compacto con la topología subespacio en K.

Ahora supongamos que K es compacto con la topología subespacio en K. Puesto que la inclusión $i : K \to X$ es continua, preserva compactos, por lo que $K = i(K)$ es compacto en X. ■

Lema 1.7. *Sea X un espacio topológico Hausdorff y A un conjunto en X. Si $x \in X$ es un punto de acumulación de A y $B \subseteq A$ es un conjunto finito, entonces x es punto de acumulación de $A \setminus B$.*

Demostración. Supongamos que $B = \{x_1, \ldots, x_k\}$ para algún $k \in \mathbb{N}$ y algunos $x_1, \ldots, x_k \in A$. Sea U una vecindad abierta de x. Como X es Hausdorff y cada $\{x_i\}$ es compacto, entonces estos son cerrados. Así que

$$B \setminus \{x\} = \bigcup_{\substack{1\leq i\leq n \\ x_i \neq x}} \{x_i\}$$

es cerrado. De esto se sigue que $(X \setminus B) \cup \{x\} = X \setminus (B \setminus \{x\})$ es abierto y en consecuencia también lo es $(U \setminus B) \cup \{x\} = U \cap ((X \setminus B) \cup \{x\})$. Como $(U \setminus B) \cup \{x\}$ es una vecindad abierta de x, se cumple que $[((U \setminus B) \cup \{x\}) \cap A] \setminus \{x\} \neq \varnothing$. Esto equivale a que $[U \cap (A \setminus B)] \setminus \{x\} \neq \varnothing$ y así x es punto de acumulación de $A \setminus B$. ■

1.3. Convergencia de sucesiones

Una sucesión es una colección de objetos se pueden indexar por los números naturales, y que a diferencia de un conjunto, el orden de los elementos importa y estos pueden repetirse.

Formalmente una *sucesión* en un conjunto X es una función $s : \mathbb{N} \to X$. Usualmente representamos a la sucesión s por $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donde $x_n := s(n)$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Una propiedad fundamental que una sucesión puede tener es que sea convergente. Intuitivamente, esto significa que los términos de la sucesión se van acercando a un punto conforme avanzamos en la sucesión. Esta idea se precisa de manera abstracta cuando se cuenta con una topología, como lo hacemos a continuación.

Definición 1.9. Sean X un espacio topológico y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ una sucesión. Si existe $x \in X$ tal que para cada vecindad abierta U de x existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U$ para $n \geq n$, entonces decimos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge* a x, que x es el *límite* de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y lo denotamos por $x_n \to x$.

Ejemplo 1.8. Sean X un espacio topológico y $x \in X$. Entonces la sucesión constante $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_n = x$ para toda $n \in \mathbb{N}$, converge a x. En efecto, dada una vecindad abierta U de $x \in X$, podemos tomar $N = 1$ y se va a cumplir que $x_n = x \in U$ para toda $n \geq N$.

Proposición 1.9. *Sean X un espacio topológico y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente en X. Si X es Hausdorff, entonces el límite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es único.*

Demostración. Sean $x, y \in X$ límites de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Sea U una vecindad abierta de x y V una vecindad abierta de y, entonces existen $N, M \in \mathbb{N}$ tales que $x_n \in U$ y $y_m \in V$ si $n \geq N$ y $m \geq M$. Al tomar $K = \max(N, M)$ tenemos que $x_K \in U \cap V$ y por tanto $U \cap V \neq \varnothing$. La contrapositiva de la definición de Hausdorff indica que $x = y$. ∎

Lema 1.8. *Sea X un espacio topológico. Si una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ converge a $x \in X$, entonces toda subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x.*

Demostración. Supongamos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ converge a $x \in X$ y sea $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ una subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Sea U una vecindad de x. Luego, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U$ si $n \geq N$. Si $k \geq N$, entonces $n_k \geq k \geq N$, por lo que $x_{n_k} \in U$. Así que $x_{n_k} \to x$. ∎

Lema 1.9. *Sean X un espacio topológico, $Y \subseteq X$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Y$ y $y \in Y$. Entonces $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a y en Y si y sólo si $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a y en X.*

Demostración. Supongamos primero que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a y en Y. Sea U una vecindad abierta de y en X. Entonces $U \cap Y$ es una vecindad abierta de y en Y. Por lo tanto, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $y_n \in U \cap Y \subseteq U$ si $n \geq N$. Por lo tanto $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a y en X.

Ahora supongamos que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a y en X. Sea $U \cap Y$ una vecindad abierta de y en Y para alguna vecindad abierta U de y en X. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $y_n \in U$ si $n \geq N$. Como $y_n \in Y$ para toda $n \in \mathbb{N}$, se sigue que $y_n \in U \cap Y$ si $n \geq N$. Por lo tanto $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a y en X. ∎

Proposición 1.10. *Sea X un espacio topológico. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ es una sucesión que converge a $x \in X$, entonces $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ es compacto.*

Demostración. Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una cubierta abierta de $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$. Existe entonces $\alpha_0 \in \Lambda$ tal que $x \in U_{\alpha_0}$. Como $x_n \to x$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U_{\alpha_0}$ si $n \geq N$. Tomemos $\alpha_i \in \Lambda$ tal que $x_i \in U_{\alpha_i}$ para toda $1 \leq i < N$. De esta manera $\{U_{\alpha_i}\}_{i=0}^{N-1}$ es una subcubierta finita. ∎

1.4. Topología producto

Sean X y Y dos espacios topológicos. En $X \times Y$ trabajamos con la *topología producto*, que es la generada por la base $\{U \times V : U \text{ abierto en } X \text{ y } V \text{ abierto en } Y\}$. Consideremos las *proyecciones canónicas* en X y Y

$$\begin{aligned} \pi_X : X \times Y &\to X \\ (x, y) &\mapsto x \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} \pi_Y : X \times Y &\to X \\ (x, y) &\mapsto y. \end{aligned}$$

Para un abierto U en X se tiene que $\pi_X^{-1}(U) = U \times Y$, que es abierto en $X \times Y$, por lo que π_X es continua. De manera análoga, π_Y también es continua.

La siguiente proposición indica que la continuidad de una función con valores en un espacio producto equivale a la continuidad de sus componentes.

Proposición 1.11. *Sean E, X y Y espacios topológicos y $f : E \to X \times Y$. Entonces f es continua si y sólo si $\pi_X \circ f$ y $\pi_Y \circ f$ lo son.*

Demostración. Si f es continua, entonces $\pi_X \circ f$ y $\pi_Y \circ f$ también lo son, ya que π_X y π_Y lo son y la composición de funciones continuas es continua.

Supongamos ahora que $\pi_X \circ f$ y $\pi_Y \circ f$ son continuas. Sea $U \times V$ un abierto básico de $X \times Y$, de manera que U es abierto en X y V es abierto en Y. Entonces $(\pi_X \circ f)^{-1}(U)$ y $(\pi_Y \circ f)^{-1}(V)$ son abiertos en E por lo que también lo es

$$f^{-1}(U \times V) = (\pi_X \circ f)^{-1}(U) \bigcap (\pi_Y \circ f)^{-1}(V).$$

Según la proposición 1.4 se concluye que f es continua. ■

Corolario 1.2. *Sean E, X y Y espacios topológicos, $f_X : E \to X$ y $f_Y : E \to Y$. Entonces la función*

$$\begin{aligned} f_X \times f_Y : E &\to X \times Y \\ z &\mapsto (f_X(z), f_Y(z)) \end{aligned}$$

es continua si y sólo si f_X y f_Y lo son.

La construcción anterior de la topología producto es fácil de extender para el producto de una cantidad finita de espacios topológicos. Sin embargo, al momento de definir el producto de una cantidad arbitraria de espacios, hay un detalle que se debe considerar para definir su topología.

Sean I un conjunto no vacío y X_i un espacio topológico para cada $i \in I$. El espacio *producto* de los espacios X_i es el conjunto

$$\prod_{i \in I} X_i = \left\{ f : I \to \bigcup_{i \in I} X_i \;\middle|\; f(i) \in X_i, \text{ para cada } i \in I \right\}.$$

Usualmente representaremos a $f \in \prod_{i \in I} X_i$ por su conjunto de valores $(x_i)_{i \in I}$ donde $x_i := f(i)$ para todo $i \in I$. En el caso finito $I = \{1, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$ observemos que $(x_i)_{i \in I}$ es simplemente la n-ada $(x_1, \ldots, x_n)$.

Para $j \in I$, la j-ésima *proyección canónica* es la función

$$\begin{aligned} \pi_j : \prod_{i \in I} X_i &\to X_j \\ (x_i)_{i \in I} &\mapsto x_j. \end{aligned}$$

En otras palabras, si $f \in \prod_{i \in I} X_i$, entonces la proyección π_j es simplemente la evaluación en j, es decir,

$$\pi_j(f) = f(j), \quad j \in I.$$

Definición 1.10. Sean I un conjunto no vacío y X_i un espacio topológico para cada $i \in I$. La *topología producto* de $\prod_{i\in I} X_i$ es la generada por la base

$$\left\{\bigcap_{j=1}^{k} \pi_{i_j}^{-1}(U_j) : k \in \mathbb{N},\, i_1, \ldots, i_k \in I \text{ y } U_j \text{ es abierto en } X_{i_j} \text{ para cada } 1 \leq j \leq k\right\}.$$

Veamos que con esta definición de topología producto las proyecciones son continuas. Fijemos $i \in I$ y tomemos cualquier abierto U_i en X_i. Entonces $\pi_i^{-1}(U_i)$ es un básico de $\prod_{i\in I} X_i$ y por tanto es abierto. Esto indica que π_i es continua.

Dados A, B dos conjuntos, denotamos por $F(A, B)$ a la colección de funciones $f : A \to B$.

Ejemplo 1.9. Sea $A \neq \varnothing$. Dada $a \in A$ denotamos por $\delta_a : F(A, B) \to B$ a la función *evaluación* en a definida para cualquier $f \in F(A, B)$ por

$$\delta_a(f) := f(a).$$

Notemos que

$$F(A, B) = \prod_{a\in A} B,$$

por lo que si B es un espacio topológico, en $F(A, B)$ naturalmente ponemos considerar su topología producto y en este caso la evaluación δ_a, $a \in A$ es la proyección π_a, por lo que δ_a es continua.

En esta topología producto podemos generalizar la proposición 1.11 y el corolario 1.2 de la siguiente manera.

Proposición 1.12. *Sean I un conjunto no vacío, E y X_i espacios topológicos para $i \in I$ y $f : E \to \prod_{i\in I} X_i$. Entonces f es continua si y sólo si $\pi_j \circ f$, $j \in I$ es continua.*

Demostración. Si f es continua, entonces para $j \in I$, $\pi_j \circ f$ también lo es, ya que la composición de funciones continuas es continua.

Supongamos ahora que $\pi_j \circ f$ es continua para toda $j \in I$. Sean $k \in \mathbb{N}$, $i_1, \ldots, i_k \in I$ y U_j un conjunto abierto en X_{i_j} para cada $1 \leq j \leq k$, de manera que $\bigcap_{j=1}^{k} \pi_{i_j}^{-1}(U_j)$ es un abierto básico de $\prod_{i\in I} X_i$. Entonces $f^{-1}(\pi_{i_j}^{-1}(U_j)) = (\pi_{i_j} \circ f)^{-1}(U_j)$ es abierto en E, por lo que también lo es

$$f^{-1}\left(\bigcap_{j=1}^{k} \pi_{i_j}^{-1}(U_j)\right) = \bigcap_{j=1}^{k} f^{-1}\left(\pi_{i_j}^{-1}(U_j)\right).$$

Según la proposición 1.4 se concluye que f es continua. ■

En la demostración de la proposición anterior se puede observar por qué es indispensable definir la topología producto como se definió y no simplemente como la generada por el producto de abiertos. De lo contrario tal proposición sería falsa.

Capítulo 2

Espacios métricos

El marco de espacios topológicos es muy general, por lo que estudiaremos a continuación un caso particular de estos espacios que tienen mejores propiedades y donde las sucesiones juegan un papel muy importante. Estos son los espacios métricos y aunque fue Maurice Fréchet quien los introdujo en su trabajo *Sur quelques points du calcul fonctionnel* en 1906, fue Hausdorff quien les otorgó el nombre.

Definición 2.1. Un *espacio métrico* es una pareja (M, d) donde M es un conjunto no vacío y $d : M \times M \to [0, \infty)$ es una función llamada *métrica* que cumple:

- **i)** Es *definida positiva*, es decir, para $x, y \in M$ se cumple que $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$.
- **ii)** Es *simétrica*, es decir, si $x, y \in M$ entonces $d(x, y) = d(y, x)$.
- **iii)** Cumple la *desigualdad del triángulo*, es decir, para $x, y, z \in M$, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

En un espacio métrico M, la *bola abierta* de centro $y \in M$ y radio $r > 0$ es

$$V_r(y) := \{x \in M : d(x, y) < r\}.$$

y la *bola cerrada* de centro $y \in M$ y radio $r > 0$ se define por

$$B_r(y) := \{x \in M : d(x, y) \leq r\}.$$

Definición 2.2. En un espacio métrico M consideramos la familia de subconjuntos de M

$$\tau_M := \{U \subseteq M : \text{ para cada } x \in U \text{ existe } r > 0 \text{ tal que } V_r(x) \subseteq U\}.$$

Esta resulta ser una topología en M y la llamamos *topología original* de M o *topología inducida* por la métrica d.

La siguiente proposición indica que en un espacio métrico M las bolas abiertas forman una base de la topología original de M.

Proposición 2.1. *Sea M un espacio métrico. La colección*

$$\mathcal{B} := \{V_r(x) : r > 0, x \in M\}$$

es una base de M.

Demostración. Tomemos $V_r(x) \in \mathcal{B}$ para algunos $r > 0$ y $x \in M$. Verifiquemos que $V_r(x)$ es abierto en M. Tomemos $y \in V_r(x)$. Consideremos $s = r - d(x,y) > 0$. Así pues si $z \in V_s(y)$, entonces $d(z,y) < s = r - d(x,y)$. Por la desigualdad del triángulo $d(x,z) \leq d(z,y) + d(x,y) < r$. Así que $z \in V_r(x)$ y $V_s(y) \subseteq V_r(x)$ y concluimos que $V_r(x)$ es abierto.

Si U es abierto de M y $x \in U$, por definición existe $r > 0$ tal que $x \in V_r(x) \subseteq U$. La proposición 1.1 indica que $\mathcal{B}$ es una base de M. ■

Definición 2.3. Un espacio topológico (X, τ) es *metrizable* si existe una métrica d en X que induce la topología τ.

Ejemplo 2.1. Veamos que la topología usual de $\mathbb{R}$ es metrizable. Para esto, mostremos que los intervalos abiertos en $\mathbb{R}$ coinciden precisamente con las bolas abiertas bajo la métrica $d : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto |x-y|$.

Tomemos un intervalo (a,b), para algunos $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Entonces

$$(a,b) = V_{\frac{b-a}{2}}\left(\tfrac{a+b}{2}\right).$$

Por otro lado tomemos una bola abierta $V_r(x)$ para algunos $x \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Entonces

$$V_r(x) = (x-r, x+r).$$

Luego, la topología usual en $\mathbb{R}$ y la topología inducida por la métrica d tienen una misma base, por lo que ambas topologías coinciden.

Ejemplo 2.2. Sea X un conjunto no vacío y consideremos la función $d : X \times X \to \mathbb{R}$ definida en $(x,y) \in X \times X$ por

$$d(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \neq y \\ 0, & \text{si } x = y. \end{cases}$$

Resulta que d es una métrica en X, a la cual denominamos *métrica discreta* en X. Observemos que tal métrica induce la topología discreta en X. En efecto una base de esta topología viene dada por $\{V_1(x) = \{x\} : x \in X\}$, así que todo subconjunto de X se puede expresar como unión de básicos y por lo tanto es abierto. Por lo tanto la topología discreta es metrizable.

Dado un espacio métrico (M,d) y $\varnothing \neq A \subseteq M$, al restringir la métrica d a A, obtenemos la función

$$\begin{aligned} d_A : A \times A &\to [0, \infty) \\ (a,b) &\mapsto d(a,b). \end{aligned}$$

De esta forma d_A resulta ser una métrica en A y se le denomina la métrica *inducida* por d en A. La siguiente proposición indica que la topología que induce d_A en A coincide con la topología subespacio de A en M.

Proposición 2.2. *Sean (M,d) un espacio métrico y $\varnothing \neq A \subseteq M$. Entonces la topología inducida por d_A y la topología subespacio de A coinciden.*

Demostración. Sean τ_{d_A} la topología inducida por d_A y τ_A la topología subespacio de A en M.

Tomemos $r > 0$ y $x \in A$. Entonces la bola abierta en A de radio r y centro x es

$$V_r^A(x) = \{y \in A : d_A(x,y) < r\} = \{y \in A : d(x,y) < r\} = A \cap V_r(x).$$

Así que todo básico en τ_{d_A} es abierto en τ_A, por lo que $\tau_{d_A} \subseteq \tau_A$.

Tomemos ahora un conjunto básico $V_r(x) \cap A$ de τ_A para algunos $r > 0$ y $x \in M$. Sea $y \in V_r(x) \cap A$. Por ser $V_r(x)$ abierto en M entonces existe $r_y > 0$ tal que $V_{r_y}(y) \subseteq V_r(x)$, de forma que $V_{r_y}(y) \cap A \subseteq V_r(x) \cap A$ y

$$V_r(x) \cap A = \bigcup_{y \in V_r(x) \cap A} V_{r_y}^A(y).$$

Luego, $V_r(x) \cap A$ es unión de abiertos en τ_{d_A} y por tanto es abierto en τ_{d_A}. ■

En un espacio métrico podemos caracterizar la convergencia de las sucesiones usando directamente la métrica, como lo expresa la siguiente proposición.

Proposición 2.3. *Sean M un espacio métrico y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en M. Entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $x \in M$ si, y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x) < \varepsilon$ si $n \geq \mathbb{N}$.*

Demostración. Supongamos que $x_n \to x$ y sea $\varepsilon > 0$. Como $V_\varepsilon(x)$ es una vecindad abierta de x, se sigue de inmediato que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in V_\varepsilon(x)$ si $n \geq \mathbb{N}$. Es decir, $d(x_n, x) < \varepsilon$ si $n \geq \mathbb{N}$.

Supongamos ahora que para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x) < \varepsilon$ si $n \geq \mathbb{N}$. Sea U una vecindad abierta de x. Entonces existe $\varepsilon > 0$ con $V_\varepsilon(x) \subseteq U$. Por hipótesis existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in V_\varepsilon(x) \subseteq U$ si $n \geq N$. Por lo tanto $x_n \to x$. ■

Observemos que la proposición anterior indica que $x_n \to x$ si y sólo sí $d(x_n, x) \to 0$.

Proposición 2.4. *Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones en $\mathbb{R}$. Si $x_n \to x$ y $y_n \to y$ para algunos $x, y \in \mathbb{R}$ entonces $x_n + y_n \to x + y$. y $x_n y_n \to xy$.*

Demostración. Tomemos $\varepsilon > 0$, de manera que existen $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tales que

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ si } n \geq N_1 \quad \text{y} \quad |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ si } n \geq N_2.$$

Luego, si $n \geq \max(N_1, N_2)$, entonces

$$|(x_n + y_n) - (x + y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Veamos ahora que $x_n y_n \to xy$ y tomemos $\varepsilon > 0$. Entonces existen M_1, M_2 y $M_3 \in \mathbb{N}$ tales que

$$|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2(|x|+1)}, \text{ si } n \geq M_1; \tag{2.1}$$

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2(|y|+1)}, \quad \text{si } n \geq M_2 \text{ y} \tag{2.2}$$

$$|x_n - x| < 1, \qquad \text{si } n \geq M_3. \tag{2.3}$$

Por la desigualdad del triángulo, (2.3) equivale a que $|x_n| < \|x\| + 1$ si $n \geq M_3$. Así pues, tomando $n \geq \max(M_1, M_2, M_3)$ se sigue que

$$\begin{aligned} |x_n y_n - xy| &= |x_n y_n - x_n y + x_n y - xy| \\ &\leq |x_n y_n - x_n y| + |x_n y - xy| \\ &= |x_n|\,|y_n - y| + |x_n - x|\,|y| \\ &\leq (|x| + 1)\,|y_n - y| + |x_n - x|\,(|y| + 1) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

■

La siguiente proposición indica que los espacios métricos son Hausdorff y por lo tanto, de acuerdo a la proposición 1.9 las sucesiones convergentes en espacios métricos tienen límite único.

Proposición 2.5. *Todo espacio métrico es Hausdorff.*

Demostración. Sea M un espacio métrico y $x, y \in M$ con $x \neq y$. Entonces $r := \frac{d(x,y)}{2} > 0$. Tomemos $U := V_r(x)$ y $V := V_r(y)$, de forma que $x \in U$ y $y \in V$. Además, si existe $z \in U \cap V$, entonces

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z) < r + r = d(x, y),$$

lo cual es una contradicción y así $U \cap V = \varnothing$ y M es Hausdorff. ■

Definición 2.4. Sea M un espacio métrico. La *distancia* de $x \in M$ a $A \subseteq M$ es

$$d(x, A) := \inf\{d(x, y) : y \in A\},$$

donde $\inf \varnothing = \infty$.

Lema 2.1. *Sean M un espacio métrico, $A \subseteq M$ un conjunto cerrado y $x \in M$. Entonces $d(x, A) > 0$ si, y sólo si $x \notin A$.*

Demostración. Si $x \in A$, entonces $d(x, A) \leq d(x, x) = 0$ y así $d(x, A) = 0$. Esto prueba que si $d(x, A) > 0$, entonces $x \notin A$.

Para establecer el recíproco demostraremos su contrapositiva. Supongamos que $d(x, A) = 0$. Tomemos un abierto U que incluya a x. Existe entonces $r > 0$ tal que $V_r(x) \subseteq U$. Por propiedades del ínfimo y puesto que $\inf\{\|y - x\| : y \in A\} = 0$, existe $y \in A$ con $\|y - x\| < r$. Esto significa que $y \in V_r(x) \subseteq U$, por lo que $U \cap A \neq \varnothing$. Así que $x \in \overline{A}$. Ya que A es cerrado, entonces $x \in A$. ■

2.1. Continuidad por sucesiones

Las sucesiones tienen un papel relevante en los espacios métricos, pues a través de ellas podemos caracterizar muchos de los conceptos topológicos que presentamos en el capítulo anterior.

Proposición 2.6. *Sean M un espacio métrico y $A \subseteq M$. Entonces $x \in \overline{A}$ si, y sólo si x es el límite de alguna sucesión en A.*

Demostración. Tomemos $x \in \overline{A}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $V_{\frac{1}{n}}(x)$ es una vecindad abierta de x y por lo tanto $V_{\frac{1}{n}}(x) \cap A \neq \varnothing$. Así que existe algún $x_n \in V_{\frac{1}{n}}(x) \cap A$. Claramente, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en A tal que $x_n \to x$.

Ahora tomemos $x \in M$ tal que existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ con $x_n \to x$. Sea U una vecindad abierta de x. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U$ si $n \geq N$. En particular, $x_N \in U \cap A \neq \varnothing$ y de esta manera $x \in \overline{A}$. ■

Proposición 2.7. *Sean M un espacio métrico, E un espacios topológico, $x \in M$ y $f : M \to E$. Son equivalentes:*

- **i)** *f es continua en x.*
- **ii)** *Para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M$ tal que $x_n \to x$ se cumple que $f(x_n) \to f(x)$.*

Demostración. Primero supongamos que f es continua. Consideremos una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M$ tal que $x_n \to x$. Sea V una vecindad abierta de $f(x)$ en Y. Como f es continua, el conjunto $f^{-1}(V)$ es una vecindad abierta de x en M. Dado que $x_n \to x$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in f^{-1}(V)$ para $n \geq \mathbb{N}$. Así pues, si $n \geq \mathbb{N}$ tenemos que $f(x_n) \in f(f^{-1}(V)) \subseteq V$. Por tanto $f(x_n) \to f(x)$.

Ahora demostraremos la contrapositiva. Supongamos pues que f no es continua en x, de manera que existe una vecindad abierta V de $f(x)$ tal que para toda $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $f(V_{\frac{1}{n}}(x)) \subsetneq V$. Así pues, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos tomar $x_n \in V_{\frac{1}{n}}(x)$ de tal manera que $f(x_n) \notin V$. Consideremos la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Resulta que $x_n \to x$. Sin embargo, para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $f(x_n) \notin V$, por lo que $f(x_n) \not\to f(x)$. ■

Teorema 2.1. *Sea M un espacios métrico. Si $f : M \to \mathbb{R}$ y $g : M \to \mathbb{R}$ son funciones continuas, entonces $f + g$ y $f \cdot g$ son continuas. Además, si $0 \notin f(M)$, entonces $\frac{1}{f}$ también es continua.*

Demostración. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en M que converge a $x \in M$. Puesto que f y g son continuas, de la proposición 2.7 se sigue que $f(x_n) \to f(x)$ y $g(x_n) \to g(x)$.

Luego, la proposición 2.4 se sigue que

$$(f + g)(x_n) = f(x_n) + g(x_n) \to f(x) + g(x) = (f + g)(x).$$

Así que de la proposición 2.7 se obtiene que $f + g$ es continua. De la misma manera, la proposición 2.4 se tiene que

$$(f \cdot g)(x_n) = f(x_n)g(x_n) \to f(x)g(x) = (f \cdot g)(x).$$

Por lo que de la proposición 2.7 se concluye que $f \cdot g$ es continua.

Finalmente, en el ejemplo 1.6 se demostró que la función $h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = \frac{1}{x}$ es continua. Luego, la función $\frac{1}{f} = h \circ f$ es continua. ■

Observación 2.1. En el caso de una función $f : M_1 \to M_2$, donde M_1 y M_2 son espacios métricos, la continuidad en $x \in M_1$ además se caracteriza por la siguiente condición:

$$\text{Para todo } \varepsilon > 0, \text{ existe } \delta > 0 \text{ tal que si } d(x, y) < \delta, \text{ entonces } d(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Lema 2.2. *Sean M un espacio métrico y $\varnothing \neq A \subseteq M$. Entonces $f : M \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = d(x, A)$ es continua.*

Demostración. Fijemos $x \in M$ y probemos que f es continua en x. Sea $y \in M$ cualquiera. Dado $a \in A$ se cumple que $d(y,a) \leq d(y,x) + d(x,a)$, por lo que

$$\begin{aligned} d(y,A) &= \inf_{a\in A}\{d(y,a)\} \leq \inf_{a\in A}\{d(y,x)+d(x,a)\} \\ &= d(y,x) + \inf_{a\in A}\{d(x,a)\} = d(y,x) + d(x,A). \end{aligned}$$

Luego, $d(y,A) - d(x,A) \leq d(y,x)$. Análogamente $d(x,A) - d(y,A) \leq d(y,x)$. Por lo tanto

$$|f(y) - f(x)| = |d(y,A) - d(x,A)| \leq d(y,x). \tag{2.4}$$

Luego, tomando $\delta = \varepsilon$ en la observación 2.1, de (2.4) se concluye que f es continua en x. ■

Definición 2.5. Sean M_1 y M_2 espacios métricos. Si $f : M_1 \to M_2$ cumple que $d(f(x), f(y)) = d(x,y)$ para todos $x, y \in M_1$, entonces decimos que f es una *isometría*.

Proposición 2.8. *Sean M_1 y M_2 espacios métricos y $f : M_1 \to M_2$ una isometría. Entonces f es un homeomorfismo entre M_1 y $f(M_1)$. Además, si M_1 es completo, entonces $f(M_1)$ también lo es.*

Demostración. Sean $x, y \in M_1$ tales que $f(x) = f(y)$. Entonces $d(x,y) = d(f(x), f(y)) = 0$ y por lo tanto $x = y$. Así que f es inyectiva y tiene inversa f^{-1} en $f(M_1)$.

Tomemos una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M_1$ y $x \in M_1$. Tenemos que $x_n \to x$ si, y sólo si $d(x_n, x) \to 0$. Como f es una isometría, lo anterior equivale a que $d(f(x_n), f(x)) \to 0$ y por el lema 1.9, a su vez es equivalente a que $f(x_n) \to f(x)$ en $f(M_1)$. De la proposición 2.7 se sigue que f y f^{-1} son continuas.

Ahora supongamos que M_1 es completo. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de tal manera que la sucesión $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. Como f es una isometría, se tiene que

$$d(x_n, x_m) = d(f(x_n), f(x_m)), \text{ para todas } n, m \in \mathbb{N}.$$

De esto se sigue que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy y como M_1 es completo, resulta que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a algún $x \in M_1$. Como $f : M_1 \to f(M_1)$ es continua, entonces $f(x_n) \to f(x)$ en $f(M_1)$. ■

2.2. Conjuntos acotados

En espacios topológicos Hausdorff, hemos visto que los conjuntos compactos necesariamente son cerrados. En el marco de espacios métricos, introducimos el concepto de conjunto acotado y estableceremos que en estos espacios todo conjunto compacto también tiene que ser acotado.

Definición 2.6. Sea M un espacio métrico. Decimos que $A \subseteq M$ es un conjunto *acotado* si existe $r > 0$ tal que $d(x,y) < r$ para todos $x, y \in A$.

Ejemplo 2.3. Consideremos cualquier bola $V_r(z)$ en un espacio métrico M, para algunos $r > 0$ y $z \in M$. Sean $x, y \in V_r(z)$. Por la desigualdad del triángulo $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) < 2r$. Así que $V_r(z)$ es un conjunto acotado. Lo mismo sucede con las bolas cerradas.

Lema 2.3. *Sea M un espacio métrico, $A \subseteq M$ y $x \in M$. Entonces A es acotado si, y sólo si existe $t > 0$ tal que $d(x,y) < t$ para todo $y \in A$.*

Demostración. Supongamos que A es acotado. Si $A = \varnothing$ entonces con $t = 1$ se cumple que $d(x, y) < t$ para todo $y \in A$. Supongamos que $A \neq \varnothing$ y sea $z \in A$. Como A es acotado, existe $r > 0$ tal que $d(y_1, y_2) < r$ para todos $y_1, y_2 \in A$. Definamos $t = d(x, z) + r > 0$ y sea $y \in A$. Entonces de la desigualdad del triángulo se sigue que $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < t$.

Ahora supongamos que existe $t > 0$ de tal forma que $d(x, y) < t$ para todo $y \in A$. Consideremos $r = 2t > 0$ y tomemos cualesquiera $y_1, y_2 \in A$. Por la desigualdad el triángulo, se sigue que $d(y_1, y_2) \leq d(y_1, x) + d(x, y_2) < 2t = r$ y así A es acotado. ■

Lema 2.4. *Sea M un espacio métrico.*

- **i)** *Si $A \subseteq M$ es un conjunto acotado, entonces todo $B \subseteq A$ es acotado.*
- **ii)** *Si $A_1, \ldots, A_n$ son conjuntos acotados, entonces $\bigcup_{i=1}^{n} A_n$ es acotado.*

Demostración.

i) Puesto que A es acotado, existe $r > 0$ tal que $d(x, y) < r$ para todos $x, y \in A$. En particular, esto se cumple si x y y están en B. Luego, B es acotado.

ii) Sea $x \in M$ cualquiera. Luego, para cada $1 \leq i \leq n$ existe $t_i > 0$ tal que $d(x, a) < t_i$ para todo $a \in A_i$. Tomemos $t = \text{máx}(t_1, \ldots, t_n)$. Si $a \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, entonces existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $a \in A_i$ y $d(x, a) < t_i \leq t$. Por lo tanto $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ es acotado.

■

En el espacio métrico $\mathbb{R}$ consideremos la colección de intervalos $([n, n+1])_{n\in\mathbb{N}}$. Cada intervalo es acotado y su unión es $[1, \infty)$, el cual no es acotado. Así que si en lugar de una colección finita, tenemos una colección contable de conjuntos acotados, su unión no necesariamente es acotada.

Ahora, encaminados en el propósito de este capítulo, mostraremos que el ser cerrado y acotado es una condición necesaria para ser compacto.

Proposición 2.9. *Sean M un espacio métrico y $K \subseteq M$. Si K es compacto, entonces es cerrado y acotado.*

Demostración. Supongamos que K es compacto. Dado que M es Hausdorff, el corolario 1.1 indica que K es cerrado. Ahora, fijemos $x_0 \in M$. Como K es compacto y $\{V_n(x_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una cubierta abierta de K, existen $k \in \mathbb{N}$ y $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ tales que $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} V_{n_i}(x_0)$. Puesto que cada bola $V_{n_i}(x_0)$ es acotado, del lema 2.4 $\bigcup_{i=1}^{k} V_{n_i}(x_0)$ es acotado y por el mismo lema, resulta que K también lo es. ■

El teorema de Heine-Borel nos permite demostrar que al menos en $\mathbb{R}$ el recíproco del resultado anterior es válido, como se muestra a continuación.

Corolario 2.1. *Sea $K \subseteq \mathbb{R}$. Entonces K es compacto si, y sólo si K es cerrado y acotado.*

Demostración. Supongamos primero que K es compacto. La proposición 2.9 indica que K es cerrado y acotado.

Ahora supongamos que K es cerrado y acotado. Como K es acotado, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $K \subseteq [-a, a]$. Puesto que K es cerrado, del lema 1.6 se concluye que K es compacto. ■

La proposición 1.6 indica que una función continua preserva compactos. Dado que en $\mathbb{R}$ los conjuntos compactos son precisamente aquellos cerrados y acotados, se obtiene el siguiente resultado.

Corolario 2.2. *Sea K un espacio topológico compacto. Si $f : K \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces alcanza su valor máximo.*

Demostración. Dado que K es compacto, por la proposición 1.6 resulta que $f(K)$ también lo es. Luego, el teorema 3.2 afirma que $f(K)$ es cerrado y acotado en $\mathbb{R}$. Como $f(K)$ es acotado y no vacío, el axioma del supremo indica que existe $\sup f(K) \in \mathbb{R}$. El ejemplo 1.4 indica que $\sup f(K) \in \overline{f(K)}$, pero como $f(K)$ es cerrado, se sigue que $\sup f(K) \in f(K)$. Así que existe $x \in K$ tal que $f(x) = \sup f(K)$. Entonces $f(x)$ es el valor máximo de f. ■

EL corolario 2.1 no se cumple en general en todos los espacios métricos como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.4. Tomemos $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$. Con la topología discreta, $\mathbb{N}$ es cerrado y acotado pues $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ es abierto y $d(n, m) \leq 1$ para todos $n, m \in \mathbb{N}$. Dado que $\{\{n\}\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una cubierta abierta de $\mathbb{N}$ sin subcubiertas propias, se sigue que $\mathbb{N}$ no es compacto.

Puesto que el ejemplo anterior muestra que ser cerrado y acotado no es suficiente para ser compacto, procederemos a definir en espacios métricos conceptos análogos, pero más fuertes que sí garanticen ser suficientes para caracterizar a los conjuntos compactos. El primero de estos conceptos es el de totalmente acotado.

Definición 2.7. Sea M un espacio métrico. Un conjunto $K \subseteq M$ es *totalmente acotado* si para cada $\varepsilon > 0$ existen $n \in \mathbb{N}, x_1, \ldots, x_n \in M$ tales que

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_\varepsilon(x_i).$$

En este caso diremos que $\{x_1, \ldots, x_n\}$ es una ε-*red* de $\mathbb{K}$

Lema 2.5. *Sea M un espacio métrico y $K \subseteq M$ un conjunto totalmente acotado. Entonces:*

- **i)** *K es acotado.*
- **ii)** *Si $A \subseteq K$, entonces A es totalmente acotado.*
- **iii)** *Si $K \neq \varnothing$, entonces para todo $\varepsilon > 0$, existe una ε-red de K formada de puntos en K.*

Demostración.

i) Puesto que K es acotado, existe una 1-red de K de bolas abiertas que cubren a K. Como las bolas son acotadas, el lema 2.4 indica que la unión de las bolas en la red es acotada. Por lo tanto K también lo es.

ii) Es claro del hecho de que toda ε-red de K también es un ε-red de A.

iii) Sea $\varepsilon > 0$. Como K es totalmente acotado, existe una $\frac{\varepsilon}{2}$-red $\{x_1, \ldots, x_n\}$ de K para algunos $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in K$. Entonces tenemos que

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_i). \tag{2.5}$$

Sean $\{x_{n_1}, \ldots, x_{n_k}\}$ los puntos en la $\frac{\varepsilon}{2}$-red tales que $K \cap V_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_{n_i}) \neq \varnothing$. Hay al menos uno de estos pues, $K \neq \varnothing$. Además, se sigue cumpliendo que $\{x_{n_1}, \ldots, x_{n_k}\}$ es una $\frac{\varepsilon}{2}$-red de K. Para cada $1 \leq i \leq k$ tomemos $y_i \in K \cap V_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_{n_i})$. Sea $x \in K$, entonces $x \in V_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_{n_i})$ para algún $i \in \{1, \ldots, k\}$. Se sigue de esto que $d(x, y_i) \leq d(x, x_{n_i}) + d(x_{n_i}, y_i) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Así que $\{y_1, \ldots, y_k\}$ es una ε-red de K con puntos en K.

■

2.3. Completez

Ahora introduciremos el concepto correspondiente al de ser cerrado, que nos permitirá complementar al de ser totalmente acotado para caracterizar la compacidad en espacios métricos.

Definición 2.8. Sea M un espacio métrico. Una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M$ es de *Cauchy* si para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ para $n, m \geq N$. Decimos que M es *completo* si toda sucesión de Cauchy converge.

Lema 2.6. *Sea M un espacio métrico. Si una sucesión en M es convergente, entonces es de Cauchy.*

Demostración. Consideremos una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en M tal que converge a $x \in M$. Sea $\varepsilon > 0$. Como $x_n \to x$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ si $n \geq N$. Luego, si $n, m \geq N$, entonces $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. ■

Lema 2.7. *Sea M un espacio métrico. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en M y tiene una subsucesión que converge a $x \in M$, entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x.*

Demostración. Supongamos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M$ es de Cauchy y que $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a $x \in X$. Sea $\varepsilon > 0$. Dado que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{si} \;\; n, m \geq N. \tag{2.6}$$

Puesto que $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_{k_n}, x) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{si} \;\; n \geq M. \tag{2.7}$$

Tomemos $L = \max(N, M)$ y $n \geq L$. De esta manera tenemos que $k_L \geq L \geq N$ y $n \geq L \geq N$ y por (2,6) se sigue que $d(x_{k_L}, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$. Además, como $L \geq M$, de (2,7) se tiene que $d(x_{k_L}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Por la desigualdad del triángulo concluimos que

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{k_L}) + d(x_{k_L}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

y así $x_n \to x$. ■

Lema 2.8. *Sean M un espacio métrico y $A \subseteq M$ un subespacio. Se cumple que:*

- **i)** *Si A es completo, entonces A es cerrado en M.*

- **ii)** *Si M es completo y A es cerrado en M, entonces A es completo.*

  Demostración.

i) Sea $x \in \overline{A}$. La proposición 2.6 establece que existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ tal que $x_n \to x$. Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, el lema 2.6 indica que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy y al ser A completo, se sigue que la sucesión converge en A. Dado que M es Hausdorff, se sigue que $x \in A$ y así A es cerrado.

ii) Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un a sucesión de Cauchy en A. Como M es completo, $x_n \to x$ para algún $x \in M$. Puesto que A es cerrado, se sigue que $x \in A$ y entonces A es completo.

■

Lema 2.9. *Sean M un espacio métrico y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en M. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, entonces $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto acotado.*

Demostración. Tomemos $\varepsilon = 1$. Así, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq N$, entonces $\|x_n - x_m\| < 1$. Esto indica que para $n \geq N$ se cumple que $d(x_n, x_N) < 1$.

Definamos $t = \text{máx}(1, d(x_1, x_N), d(x_2, x_N), \ldots, d(x_{N-1}, x_N)) > 0$. De esta manera es claro que $d(x_n, x_N) \leq t$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y del lema 2.3 se sigue que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es acotado. ■

2.4. Compacidad por sucesiones

Como demostraremos en esta sección, el que toda sucesión tenga una subsucesión convergente resulta ser una propiedad equivalente al de ser compacto en el marco de espacios métricos. A esta nueva propiedad le damos el nombre de *compacidad por sucesiones*. Además, ya que contamos con los conceptos de acotamiento total y completez, procederemos a demostrar la equivalencia, en espacios métricos, entre ser un conjunto compacto y ser completo y totalmente acotado.

Teorema 2.2. *Sean M un espacio métrico y $K \subseteq M$. Son equivalentes:*

- **i)** *K es compacto.*
- **ii)** *Toda sucesión en K contiene una subsucesión convergente en K.*
- **iii)** *K es completo y totalmente acotado.*

Demostración. Demostraremos que **i)** implica **ii)**, que **ii)** implica **iii)** y que **iii)** implica **i)**.

Así pues, tomemos un conjunto compacto $K \subseteq M$. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en K. Consideremos el conjunto $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Supongamos primero que A tiene un punto de acumulación $x \in X$. Al ser M Hausdorff, el corolario 1.1 asegura que K es cerrado. Como $A \subseteq K$, del lema 1.2 se sigue entonces que

$$x \in A' \subseteq K' \subseteq \overline{K} = K.$$

Construyamos $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ de tal forma que $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ sea una subsucesión convergente de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Como x es punto de acumulación de A y $V_{2^{-1}}(x)$ es una vecindad abierta de x, resulta que $(A \cap V_{2^{-1}}(x)) \setminus \{x\} \neq \varnothing$. Así que existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_1} \in V_{2^{-1}}(x) \setminus \{x\}$. El lema 1.7 afirma que x es punto de acumulación de $A \setminus \{x_1, \ldots, x_{n_1}\}$. Dado que $V_{2^{-2}}(x)$ es una vecindad abierta de x, tenemos que $(A \setminus \{x_1, \ldots, x_{n_1}\} \cap V_{2^{-2}}(x)) \setminus \{x\} \neq \varnothing$. Luego, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ que cumple que

$x_{n_2} \in V_{2^{-2}}(x) \setminus \{x, x_1, \ldots, x_{n_1}\}$. Esto indica que $n_1 < n_2$. Repitiendo este proceso sucesivamente construimos la subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_{n_k} \in V_{2^{-k}}(x)$. Claramente $x_{n_k} \to x$.

Ahora supongamos que A no tiene puntos de acumulación. Entonces, para cada $x \in K$ existe una vecindad abierta V_x de x tal que $(A \cap V_x) \setminus \{x\} = \varnothing$, lo que equivale a $A \cap V_x \subseteq \{x\}$. Al ser $\{V_x\}_{x\in K}$ una cubierta abierta de K, existen $k \in \mathbb{N}$, $y_1, \ldots, y_k \in \mathbb{K}$ tales que $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} V_{y_i}$. De esto resulta que

$$A = A \cap K \subseteq A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k} V_{y_i} \right) = \bigcup_{i=1}^{k} (A \cap V_{y_i}) \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} \{y_i\}.$$

Es decir, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ solamente toma algunos de los valores $\{y_1, \ldots, y_k\}$, por lo que para algún $1 \leq i \leq k$, el valor y_i aparece infinitas veces en $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. La subsucesión constante de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que consiste en este y_i converge a $y_i \in \mathbb{K}$.

Ahora supongamos **ii)**, es decir, supongamos que toda sucesión en K tiene una subsucesión que converge en K. Para probar que K es completo, tomemos una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq K$ de Cauchy. Por hipótesis, existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que converge a algún $x \in K$. El lema 2.7 indica que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x. De esta forma K es completo.

Para demostrar que K es totalmente acotado, se procederá por contrapositiva. Así, supongamos que K no es totalmente acotado. Así que existe $\varepsilon > 0$ tal que para todos $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in M$ se tiene que

$$K \subsetneq \bigcup_{i=1}^{n} V_\varepsilon(x_i).$$

Construiremos ahora una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq K$ sin subsucesiones convergentes en K. Tomemos $x_1 \in K$ cualquiera. Supongamos que tenemos definidos $x_1, \ldots, x_n \in K$ tal que $d(x_i, x_j) \geq \varepsilon$ para todos $1 \leq i, j \leq n$ distintos. Como K no es totalmente acotado, entonces $\{x_1, \ldots, x_n\}$ no es una ε-red de K. Así que existe $x_{n+1} \in \mathbb{K}$ tal que $x_{n+1} \notin \bigcup_{i=1}^{n} V_\varepsilon(x_i)$, es decir, $d(x_{n+1}, x_i) \geq \varepsilon$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$. Así pues, construimos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq K$ tal que $d(x_i, x_j) \geq \varepsilon$ si $i \neq j$.

Supongamos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene alguna subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que converge a algún $x \in K$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ si $n \geq N$. Entonces

$$d(x_N, x_{N+1}) \leq d(x_N, x) + d(x_{N+1}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

lo cual es falso. Así que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no tiene subsucesiones convergentes en K.

Finalmente, demostremos que **iii)** implica **i)** por contradicción. Supongamos que K no es compacto. Entonces existe una cubierta abierta $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ de K sin ninguna subcubierta finita.

Como K es no-vacío y es totalmente acotado, existe una 2^{-1}-red $\{p_1, \ldots, p_n\} \subseteq K$. Si toda bola $V_{2^{-1}}(p_i)$ se pudiera cubrir por una cantidad finita de elementos en $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, entonces resultaría que a partir de estos podemos formar una subcubierta finita de $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$. Entonces existe alguna bola $V_{2^{-1}}(p_i)$ que no se puede cubrir con una subcubierta finita de $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$. Tomemos $x_1 = p_i$.

Dado que $K \cap V_{2^{-1}}(p_i) \neq \varnothing$ es totalmente acotado, tiene una 2^{-2}-red $\{q_1, \ldots, q_m\} \subseteq K \cap V_{2^{-1}}(p_i)$. De manera similar a la elección de x_1, existe $j \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $K \cap V_{2^{-2}}(y_j)$ no se puede cubrir con una cantidad finita de elementos en $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$. Definimos $x_2 = q_j$.

Continuando con este proceso construimos la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq K$ de tal forma que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumpla que $x_{n+1} \in K \cap V_{2^{-n}}(x_n)$ y que no existe ninguna subcolección finita de $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ que cubra a $K \cap V_{2^{-n}}(x_n)$. Así, $d(x_n, x_{n+1}) < 2^{-n}$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Mostremos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. Sea $\varepsilon > 0$. Como $(2^{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ es sumable, podemos tomar $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{i=N}^{\infty} 2^{-i} < \varepsilon$. Por la desigualdad del triángulo, dados $m > n \geq N$, se tiene que

$$d(x_n, x_m) \leq \sum_{i=n}^{m-1} d(x_i, x_{i+1}) \leq \sum_{i=N}^{\infty} 2^{-i} < \varepsilon.$$

Puesto que K es completo, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a algún $x \in K$. Sea $\alpha_0 \in \Lambda$ tal que $x \in U_{\alpha_0}$. Tomemos $r > 0$ tal que $V_r(x) \subseteq U_{\alpha_0}$. Dado que $x_n \to x$, existe N tal que $x_N \in V_{\frac{r}{2}}(x)$ y $2^{-N} < \frac{r}{2}$. De esto se sigue que para $y \in V_{2^{-N}}(x_N)$ se cumple que

$$d(x, y) \leq d(x, x_N) + d(x_N, y) < \frac{r}{2} + 2^{-N} < r.$$

Es decir, $V_{2^{-N}}(x_N) \subseteq V_r(x) \subseteq U_{\alpha_0}$. De donde $V_{2^{-N}}(x_N) \cap K \subseteq U_{\alpha_0}$, lo cual es una contradicción. ∎

A la propiedad **ii)** en el teorema anterior se le denomina *compacidad por sucesiones*.

Según el corolario 2.2, si el dominio de una función real continua es compacto entonces tal función alcanza su valor máximo. Resulta que en espacios métricos la afirmación recíproca es cierta, como veremos en el teorema 2.3. Para probarlo requeriremos del siguiente resultado.

Lema 2.10. *Sean M un espacio métrico, $A \subseteq M$ un cerrado y $U \subseteq M$ un abierto tales que $A \subseteq U$. Entonces existe una función continua $f : M \to \mathbb{R}$ tal que $f\big|_A = 1$ y $f\big|_{U^{\mathsf{c}}} = 0$.*

Demostración. Si $A = \varnothing$, entonces la función constante $f = 0$ es continua y cumple lo indicado. En el caso $U = M$ la función $f = 1$ satisface las propiedades señaladas. Así pues, supongamos que $A \neq \varnothing$ y $U \neq M$. Consideremos las funciones $h : M \to \mathbb{R}$ y $g : M \to \mathbb{R}$ definidas por

$$h(x) = d(x, A) \text{ y } g(x) = d(x, U^{\mathsf{c}}) \text{ para } x \in M.$$

Tomemos $f = \frac{h}{h+g}$ y veamos que está bien definida. Si $x \in A$, entonces $x \notin U^{\mathsf{c}}$, por lo que $(h + g)(x) \geq g(x) = d(x, U^{\mathsf{c}}) > 0$ debido a que U^{c} es cerrado y al lema 2.1. De la misma forma, si $x \notin A$, entonces $(h + g)(x) \geq h(x) = d(x, A) > 0$, puesto que A es cerrado. Luego, f está bien definida.

El lema 2.2 indica que g y h son continuas y por el teorema 2.1 se sigue que $h + g$ también lo es. Puesto que $h + g$ no se anula el mismo teorema indica que $f = h \cdot \frac{1}{h+g}$ también es continua. Además, si $x \in A$, entonces

$$f(x) = \frac{h(x)}{h(x) + g(x)} = \frac{h(x)}{h(x)} = 1;$$

y si $x \in U^{\mathsf{c}}$, entonces

$$f(x) = \frac{h(x)}{h(x) + g(x)} = \frac{0}{g(x)} = 0.$$

∎

Teorema 2.3. *Sea K un espacio métrico. Entonces K es compacto si, y sólo si toda función continua $f : K \to \mathbb{R}$ tiene un valor máximo.*

Demostración. Si K es compacto, se estableció en el corolario 2.2 que f tiene un valor máximo.

Para establecer el recíproco demostremos su contrapositiva. Esto es, supongamos que K no es compacto y encontremos una función continua en K que $f(K)$ no tenga máximo. Como K no es compacto, del teorema 2.2 se sigue que existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en K sin subsucesiones convergentes. Sea $A := \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Si A fuera finito, existiría un elemento en A que se repetiría infinitas veces en $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y este formaría una subsucesión en $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge, por lo que A es contable y lo podemos expresar como $A = \{z_n \in K : n \in \mathbb{N}\}$ de tal forma que $z_n \neq z_m$ si $n \neq m$.

Fijemos $x \in K$ por un momento y mostremos que existe $\varepsilon > 0$ tal que $V_\varepsilon(x) \cap A \subseteq \{x\}$. Supongamos que para toda $m \in \mathbb{N}$, el conjunto $V_{\frac{1}{m}}(x) \cap A$ es infinito. Es decir, para cada $m \in \mathbb{N}$ existen infinitos valores en $\{x_n : n \geq m\} \cap V_{\frac{1}{m}}(x)$. Luego, podemos considerar una subsucesión $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ de forma que $x_{n_i} \in V_i(x)$ y $n_i \geq i$. Luego, $x_{n_i} \to x$, lo cual contradice que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no tiene subsucesiones convergentes. Así que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $V_{\frac{1}{m}}(x) \cap A$ contiene un número finito de términos $z_1, \ldots, z_k \in A$ distintos de x. Luego $\varepsilon = \min(d(z, z_1), \ldots, d(z, z_k))$ cumple lo que buscamos.

Tenemos pues que para todo $z_n \in A$, existe $\varepsilon_n > 0$ tal que $V_{\varepsilon_n}(z_n) \cap A = \{z_n\}$. Definamos $r_1 = \varepsilon_1$ y tomemos $r_2 > 0$ tal que $r_2 \leq \varepsilon_2$, $r_2 < \frac{1}{2}$ y $r_2 \leq d(z_1, z_2) - r_1$. De esta forma $V_{r_1}(z_1) \cap V_{r_2}(z_2) = \varnothing$. Luego, consideremos $r_3 > 0$ tal que $r_3 \leq \varepsilon_2$, $r_3 \leq \frac{1}{3}$ y $r_3 \leq \min(d(z_1, z_3) - r_1, d(z_2, z_3) - r_2)$. De esto se sigue que $V_{r_1}(z_1) \cap V_{r_3}(z_3) = V_{r_2}(z_2) \cap V_{r_3}(z_3) = \varnothing$. Sucesivamente podemos construir $r_n > 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$ de tal manera que $V_{r_n}(z_n) \cap V_{r_m}(z_m) = \varnothing$ si $n \neq m$ y $r_n \to 0$.

Dado $z_n \in A$, el conjunto $\{z_n\}$ es cerrado y $V_{r_n}(z_n)$ es abierto. Por el lema 2.10, existe una función continua $f_n : K \to \mathbb{R}$ tal que $f_n(V_{r_n}(z_n)^{\mathsf{c}}) = 0$ y $f_n(z_n) = n$. Definamos entonces

$$f := \sum_{n=1}^{\infty} f_n.$$

Notemos que está bien definida, pues para todo $x \in K$ se tiene que $f(x) = f_n(x)$ si $x \in V_{r_n}(z_n)$ para algún $n \in \mathbb{N}$ y $f(x) = 0$ si $x \notin V_{r_n}(z_n)$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Veamos que f es continua en todo $x \in K$. Supongamos primero que $x = z_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Como f_n es continua, de **i)** del lema 1.5 se sigue que $f\big|_{V_{r_n}(x)} = f_n\big|_{V_{r_n}(x)}$ es continua y por **ii)** de la misma proposición se sigue que f es continua en x.

Tomemos ahora $x \notin A$. Anteriormente probamos que existe $\varepsilon > 0$ tal que $V_\varepsilon(x) \cap A = \varnothing$. Demostremos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $V_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) \cap V_{r_n}(z_n) = \varnothing$ si $n \geq N$. Supongamos que no existe tal $N \in \mathbb{N}$. Como $r_n \to 0$, podemos tomar $m \in \mathbb{N}$ tal que $r_n < \frac{\varepsilon}{2}$ si $n \geq m$. Luego, existe algún $n \geq m$ tal que $V_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) \cap V_{r_n}(z_n) \neq \varnothing$. Sea $y \in V_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) \cap V_{r_n}(z_n)$. Entonces $d(x, y) < \frac{\varepsilon}{2}$ y $d(y, z_n) < r_n < \frac{\varepsilon}{2}$. Por la desigualdad del triángulo $d(x, z_n) < d(x, y) + d(y, z_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Esto indica que $z_n \in V_\varepsilon(x)$ y contradice que $V_\varepsilon(x) \cap A = \varnothing$. Por lo tanto sí existe $N \in \mathbb{N}$ que cumple lo establecido. Notemos entonces que

$$f\big|_{V_{\varepsilon/2}(x)} = \sum_{i=1}^{N} f_n\big|_{V_{\varepsilon/2}(x)}. \tag{2.8}$$

Como cada f_n es continua, de **i)** del lema 1.5 se sigue que f_n es continua en $V_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)$. Luego, de (2.8) y del teorema 2.1, se tiene que f es continua en $V_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)$. Por **ii)** del lema 1.5 resulta que f es continua en x.

Como $f(z_n) = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, resulta que f no es acotada. Por lo tanto f es una función continua en K que no alcanza su máximo. ■

El resultado anterior en general es falso cuando el dominio es un espacio topológico que no es metrizable, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.5. Consideremos la familia de subconjuntos de $\mathbb{R}$

$$\tau_c = \{A \subseteq \mathbb{R} : A^{\mathsf{c}} \text{ es contable ó } A = \varnothing\}.$$

Observemos que esta familia resulta ser una topología en $\mathbb{R}$ a la cual denominamos *topología de complemento contable* y denotamos por $\mathbb{R}_c$ a $\mathbb{R}$ dotado de esta topología. Demostremos que $\mathbb{R}_c$ no es compacto. Sea $S = \mathbb{N}^{\mathsf{c}}$ y observemos que $\{S \cup \{n\}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una cubierta abierta de $\mathbb{R}_c$. Para cualesquiera $k \in \mathbb{N}$ y $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ se tiene que existe $m \in \mathbb{N} \setminus \{n_1, \ldots, n_k\}$ de forma que $m \notin \{S \cup \{n_i\}\}_{i=1}^{k}$ y por lo tanto $\{S \cup \{n\}\}_{n\in\mathbb{N}}$ no tiene subcubiertas finitas.

Sea $f : \mathbb{R}_c \to \mathbb{R}$ una función continua. Mostremos que f es constante. Supongamos entonces que no es constante y tomemos $x, y \in \mathbb{R}_c$ tales que $f(x) \neq f(y)$. Consideremos algunas vecindades abiertas U y V de $f(x)$ y $f(y)$ que sean disjuntas. Puesto que f es continua se sigue que $f^{-1}(U)$ y $f^{-1}(V)$ son vecindades abiertas y entonces $[f^{-1}(U)]^{\mathsf{c}}$ y $[f^{-1}(V)]^{\mathsf{c}}$ son contables y por lo tanto su unión también. Como $\mathbb{R}_c$ no es contable, entonces $[f^{-1}(U)]^{\mathsf{c}} \cup [f^{-1}(V)]^{\mathsf{c}} \neq \mathbb{R}_c$ y así $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) \neq \varnothing$. Al tomar $z \in f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$, se tiene que $f(z) \in U \cap V$, lo que contradice que $U \cap V = \varnothing$. Luego, f es constante y por lo tanto alcanza su máximo.

Capítulo 3

Espacios normados

Un caso fundamental de espacios métricos son los espacios normados, en los que además de contar con la topología que induce la métrica, también tenemos una estructura algebraica de espacio vectorial compatible con esta topología.

A lo largo de este trabajo denotaremos por $\mathbb{K}$ al campo de los números reales o de los números complejos. Todos los espacios vectoriales que consideraremos serán sobre $\mathbb{K}$. Para $z \in \mathbb{C}$, denotaremos por $\Re(z)$ a la parte real de z y por $\Im(z)$ a su parte imaginaria.

Sea V un espacio vectorial y $x_1, \ldots, x_n \in V$, $n \in \mathbb{N}$. El espacio generado por un conjunto $A \subseteq V$ se denotará por $\operatorname{span} A$ y está definido como

$$\operatorname{span} A := \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i : n \in \mathbb{N}, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}, x_1, \ldots, x_n \in A \right\}.$$

Definición 3.1. Sea V un espacio vectorial. Un subconjunto A de V es *convexo* si para todos $x, y \in A$ y $\lambda \in [0,1]$ se cumple que $\lambda x + (1-\lambda)y \in A$.

Ejemplo 3.1. Sea V un espacio vectorial y $x \in V$. Claramente V y $\{x\}$ son convexos.

Proposición 3.1. *Sean V, W espacios vectoriales y $T : V \to W$ un operador lineal. Si $A \subseteq V$ es convexo, entonces $T(A)$ es convexo.*

Demostración. Sean $x, y \in A$, de tal manera que $Tx, Ty \in T(A)$, y $\lambda \in [0,1]$. Como A es convexo, se tiene que $\lambda x + (1-\lambda)y \in A$, de donde $\lambda Tx + (1-\lambda)Ty = T(\lambda x + (1-\lambda)y) \in T(A)$. ■

Definición 3.2. Sean V un espacio vectorial y $A \subseteq X$ convexo. Una función $f : A \to \mathbb{R}$ es *convexa* si para todos $x, y \in A$ y $\lambda \in [0,1]$ se tiene que

$$f(\lambda x + (1 - \lambda y)) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Lema 3.1. *Sean $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Si f' es monótona-creciente en (a,b), entonces f es convexa.*

Demostración. Tomemos $x, y \in X$ y $0 \leq \lambda \leq 1$. Los casos $x = y$ y $\lambda \in \{0,1\}$ son claros, así que supongamos que $x \neq y$ y $\lambda \in (0,1)$. Sea $c = \lambda x + (1-\lambda)y$. Sin generalidad supongamos que

$x < y$, de manera que $x < c < y$. El teorema del valor medio indica que existen $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ con $x < z_1 < c < z_2 < y$ tales que

$$f'(z_1) = \frac{f(c) - f(x)}{c - x} \quad \text{y} \quad f'(z_2) = \frac{f(y) - f(c)}{y - c}.$$

Dado que f' es monótona-creciente, se tiene que

$$\frac{f(c) - f(x)}{c - x} = f'(z_1) \leq f'(c) \leq f'(z_2) = \frac{f(y) - f(c)}{y - c}.$$

Esto implica que

$$(f(x) - f(c))(y - c) \geq (f(y) - f(c))(x - c).$$

O bien

$$f(x)(y - c) - f(c)y + f(c)c \geq f(y)(x - c) - f(c)x + f(c)c.$$

Entonces

$$f(c) \leq f(x) \cdot \frac{c - y}{x - y} + f(y) \cdot \frac{x - c}{x - y}. \tag{3.1}$$

Como

$$\frac{c - y}{x - y} = \lambda \quad \text{y} \quad \frac{x - c}{x - y} = 1 - \lambda,$$

se sigue de (3.1) que

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

■

Lema 3.2. *Sea $1 \leq p < \infty$. Entonces la función $h : \mathbb{K} \to \mathbb{R}$ definida por $h(z) = |z|^p$ es convexa.*

Demostración. Consideremos $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ dada por $f(x) = x^p$. Claramente, f es diferenciable y $f'(x) = px^{p-1}$ es monótona creciente, así que el lema 3.1 indica que f es convexa.

Tomemos $g = |\cdot|$, la cual es convexa en $\mathbb{K}$. Sean $x, y \in \mathbb{K}$ y $\lambda \in [0, 1]$, como g es convexa se tiene que

$$g(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda g(x) + (1 - \lambda)g(y).$$

Dado que f es creciente y convexa resulta que

$$f(g(\lambda x + (1 - \lambda)y)) \leq f(\lambda g(x) + (1 - \lambda)g(y)) \leq \lambda f(g(x)) + (1 - \lambda)f(g(y)).$$

Por lo tanto, la función $h = f \circ g$ es convexa. ■

Definición 3.3. Sea X un espacio vectorial. Una *norma* es una función $\|\cdot\| : X \to [0, \infty)$ tal que:

- **i)** Es *definida positiva*, esto es, para cada $x \in X$, $\|x\| = 0$ si, y sólo si $x = 0$.
- **ii)** Es *subaditiva*, es decir, para todas $x, y \in X$ se cumple $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.
- **iii)** Es *homogénea*, esto es, para toda $\lambda \in \mathbb{K}$ y $x \in X$ se satisface que $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$.

En este caso decimos que la pareja $(X, \|\cdot\|)$ es un *espacio normado*.

Es sencillo verificar que en un espacio normado X la función $d : X \times X \to [0, \infty)$ definida por

$$d(x, y) := \|x - y\|$$

es una métrica, por lo que X es un espacio métrico y entonces podemos considerar la topología inducida por la métrica, la cual se denomina *topología original* de X. A menos que se especifique otra cosa, cuando hablemos de un espacio normado como espacio topológico, lo consideraremos con su topología original.

Además, los conceptos de sucesión de Cauchy y completez se heredan de las definiciones en espacios métricos. Si un espacio normado es completo decimos que es un *espacio de Banach*.

Lema 3.3. *Sea X un espacio normado. Entonces la norma $\|\cdot\| : X \to [0, \infty)$ es una función continua y convexa.*

Demostración. Primero veamos que es convexa. Si $x, y \in X$ y $\lambda \in [0, 1]$ se tiene que

$$\|\lambda x + (1 - \lambda y)\| \leq |\lambda| \|x\| + |1 - \lambda| \|y\| = \lambda \|x\| + (1 - \lambda) \|y\|,$$

y por lo tanto $\|\cdot\|$ es convexa.

Del lema 2.2 se sigue de inmediato que $\|\cdot\| = d(\cdot, \{0\})$ es continua. ■

Ejemplo 3.2. Si X es un espacio normado y tomamos $x, y \in B_X$ y $\lambda \in [0, 1]$, entonces

$$\|\lambda x + (1 - \lambda)y\| \leq \lambda \|x\| + (1 - \lambda) \|y\| \leq \lambda + (1 - \lambda) = 1.$$

Así que $\lambda x + (1 - \lambda)y \in B_X$. Por lo tanto B_X es convexa.

La siguiente proposición generaliza de $\mathbb{R}$ a un espacio normado la proposición 2.4 y su demostración es análoga.

Proposición 3.2. *Sean X un espacio normado, $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente en $\mathbb{K}$; y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones que convergen en E. Entonces $(\lambda_n x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge y*

$$\lim_{n\to\infty} (\lambda_n x_n + y_n) = \left(\lim_{n\to\infty} \lambda_n\right) \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) + \left(\lim_{n\to\infty} y_n\right).$$

Demostración. Sean $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ y $y = \lim_{n\to\infty} y_n$. Tomemos $\varepsilon > 0$, de manera que existen $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tales que

$$\|x_n - x\| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ si } n \geq N_1 \quad \text{y} \quad \|y_n - y\| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ si } n \geq N_2.$$

Luego, si $n \geq \max(N_1, N_2)$, entonces

$$\|(x_n + y_n) - (x + y)\| \leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Sea $\lambda = \lim_{n\to\infty} \lambda_n$. Tomemos $\varepsilon > 0$, de manera que existen M_1, M_2 y $M_3 \in \mathbb{N}$ tales que

$$|\lambda_n - \lambda| < \frac{\varepsilon}{2(\|x\| + 1)}, \text{ si } n \geq M_1; \tag{3.2}$$

$$\|x_n - x\| < \frac{\varepsilon}{2(|\lambda| + 1)}, \quad \text{si } n \geq M_2 \text{ y} \tag{3.3}$$

$$\|x_n - x\| < 1, \qquad \text{si } n \geq M_3. \tag{3.4}$$

Por la desigualdad del triángulo, (3.4) equivale a que $\|x_n\| < \|x\| + 1$ si $n \geq M_3$. Así pues, tomando $n \geq \text{máx}(M_1, M_2, M_3)$ se sigue que

$$\begin{aligned}
\|\lambda_n x_n - \lambda x\| &= \|\lambda_n x_n - \lambda x_n + \lambda x_n - \lambda x\| \\
&\leq \|\lambda_n x_n - \lambda x_n\| + \|\lambda x_n - \lambda x\| \\
&= |\lambda_n - \lambda| \, \|x_n\| + |\lambda| \, \|x_n - x\| \\
&\leq |\lambda_n - \lambda| \, (\|x\| + 1) + (|\lambda| + 1) \, \|x_n - x\| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

■

Lema 3.4. *Sea X un espacio normado. Si $A \subseteq X$ es convexo, entonces $\overline{A}$ es convexa.*

Demostración. Sean $x, y \in \overline{A}$ y $\lambda \in [0,1]$. Como $x, y \in \overline{A}$, la proposición 2.6 indica que existen sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en A tales que $x_n \to x$ y $y_n \to y$. Dado que A es convexo se cumple que $\lambda x_n + (1-\lambda) y_n \in A$. Además, la proposición 3.2 indica que

$$\lim_{n\to\infty} [\lambda x_n + (1-\lambda) y_n] = \lambda \lim_{n\to\infty} x_n + (1-\lambda) \lim_{n\to\infty} y_n = \lambda x + (1-\lambda) y.$$

Por lo tanto $\lambda x + (1 - \lambda y) \in \overline{A}$. ■

Corolario 3.1. *Sea X un espacio normado. Entonces $A \subseteq X$ es un conjunto acotado si, y sólo existe $M > 0$ tal que $\|x\| \leq M$ para todo $x \in A$.*

Demostración. El lema 2.3 indica que A es acotado si y sólo si existe $M > 0$ tal que $\|x\| = d(x, 0) < M$ para todo $x \in A$. ■

No todo operador lineal $T : X \to Y$ entre los espacios normados X e Y resulta ser continuo. Los de mayor interés son los que sí lo son. Una caracterización de un operador lineal continuo es que sea un *operador lineal acotado*, esto es, que exista $t > 0$ tal que

$$\|Tx\| \leq t \, \|x\| \text{ para todo } x \in X.$$

Proposición 3.3. *Sean X y Y espacios normados y $T : X \to Y$ un operador lineal. Entonces T es acotado si, y sólo si T preserva conjuntos acotados.*

Demostración. Supongamos primero que T es acotado. Sea $A \subseteq X$ un conjunto acotado. Entonces existe $M > 0$ tal que $\|x\| \leq M$ para todo $x \in A$. Como T es continua, existe $t > 0$ tal que $\|T(x)\| \leq t \, \|x\|$ para toda $x \in X$. Así pues si $T(x) \in T(A)$ se sigue que $\|T(x)\| \leq t \, \|x\| \leq tM$. Por lo que $T(A)$ es acotado.

Ahora supongamos que T preserva conjuntos acotados. Como B_X es un conjunto acotado, entonces $T(B_X)$ es un conjunto acotado por algún $t > 0$. Sea $x \in X$. Si $x = 0$, entonces $\|Tx\| = \|0\| = 0 \leq t \, \|x\|$. Supongamos entonces que $x \neq 0$, de manera que $\frac{x}{\|x\|} \in B_X$ y por lo tanto $T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \in T(B_X)$ y por lo tanto $\left\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leq t$ y así $\|T(x)\| \leq t \, \|x\|$. ■

Sean X y Y espacios normados. Al espacio de los operadores lineales continuos $T : X \to Y$, y por tanto acotados, lo denotamos por $\mathcal{L}(X, Y)$. En este espacio definimos la función

$$\|T\| := \sup\{\|Tx\| : x \in B_X\}.$$

Esta resulta ser una norma y así $\mathcal{L}(X,Y)$ es un espacio normado. Si además Y es un espacio de Banach, entonces $\mathcal{L}(X,Y)$ también es un espacio de Banach.

Veamos que

$$\|Tx\| \leq \|T\| \, \|x\| \,, \text{ para todo } x \in X.$$

Empecemos tomando $x \in X$. Si $x = 0$, entonces

$$\|Tx\| = \|0\| = 0 \leq \|T\| \, \|x\| \,.$$

Si por otro lado $x \neq 0$, entonces $y = \frac{x}{\|x\|} \in B_X$. Por lo que $\|T\| \geq \|Ty\|$. Esto es

$$\|T\| \geq \left\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| = \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

y así $\|Tx\| \leq \|T\| \, \|x\|$.

El principio de acotamiento uniforme es un resultado fundamental del análisis funcional. Este principio indica que una condición suficiente para que una familia de operadores lineales continuos sea acotada, es que sea puntualmente acotada, como se enuncia en el siguiente teorema y se demuestra en [GF06, tma. 4.3.1].

Teorema 3.1 (Principio de acotamiento uniforme). *Sean X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $\{T_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subseteq \mathcal{L}(X,Y)$ una colección de operadores lineales continuos de X a Y. Si $\{T_\alpha(x) : \alpha \in \Lambda\}$ es un conjunto acotado en Y, entonces $\{T_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es acotado en $\mathcal{L}(X,Y)$.*

Definición 3.4.

- **i)** Sean V y W espacios vectoriales. Se dice que V y W son *isomorfos* como espacios vectoriales si existe $T : V \to W$ biyectiva y lineal. En este caso a T se la llama *isomorfismo* de espacios vectoriales.

- **ii)** Sean X y Y espacios normado. Decimos que X y Y son *isomorfos* como espacios normados, o que son *isomorficamente homeomorfos*, si existe un isomorfismo de espacios vectoriales $T : X \to Y$ que también es un homeomorfismo. En este caso a T se le llama *isomorfismo* de espacios normados.

Observación 3.1. Sean X y Y espacios normados y $T : X \to Y$ un operador lineal. Veamos que

$$T \text{ es una isometría si, y sólo si } \|Tx\| = \|x\| \text{ para todo } x \in X.$$

Si T es una isometría, entonces dado $x \in X$, $\|Tx\| = \|Tx - T0\| = \|x - 0\| = \|x\|$. Si por otro lado $\|Tx\| = \|x\|$ para todo $x \in X$, entonces al tomar cualesquiera $x, y \in X$ se tiene que $\|Tx - Ty\| = \|T(x - y)\| = \|x - y\|$ y T es una isometría.

De la proposición 2.8, se sigue que si T es una isometría, entonces T es un isomorfismo de espacios normados entre X y $T(X)$.

3.1. Ejemplos: ℓ_p^n y ℓ_p, $1 \leq p \leq \infty$, c y c_0

En $\mathbb{K}^n$ la norma euclidiana resulta ser el caso $p = 2$ de una familia de normas en $\mathbb{K}^n$ llamadas p-normas. En esta subsección introduciremos estas funciones y verificaremos que en efecto son normas en $\mathbb{K}^n$. Además, agregaremos ejemplos de espacios normados de dimensión infinita.

Ejemplo 3.3. Espacios $\boldsymbol{\ell_p^n}$. Dados $n \in \mathbb{N}$ y $1 \leq p < \infty$, definamos la función $\|\cdot\|_p : \mathbb{K}^n \to [0, \infty)$ mediante

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

En el caso $p = \infty$, definimos la función $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{K}^n \to [0, \infty)$ por

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

A continuación demostraremos que $\|\cdot\|_p$ es una norma en $\mathbb{K}^n$.

Demostración. Sea $1 \leq p < \infty$.

i) Claramente, $\|x\|_p \geq 0$ para cualquier $x \in \mathbb{K}^n$. Además, si $x = 0 \in \mathbb{K}^n$, entonces $\|x\|_p = 0$. Es sencillo observar que si $\|x\|_p = 0$ para algún $x \in \mathbb{K}^n$, entonces $x = 0$.

ii) Sea $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces

$$\begin{aligned} \|\lambda x\|_p = \|(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)\|_p &= \left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(|\lambda|^p \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \, \|x\|_p . \end{aligned}$$

iii) Sean $x, y \in \mathbb{K}^n$. Si $x = 0$ ó $y = 0$, claramente $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$. Así que tomamos $x, y \neq 0$. Definamos

$$x_0 := \frac{x}{\|x\|_p + \|y\|_p} \quad \text{y} \quad y_0 := \frac{y}{\|x\|_p + \|y\|_p},$$

de tal manera que $\|x_0\|_p + \|y_0\|_p = 1$. Definamos $\lambda := \|y_0\|_p \in (0, 1)$ y tomemos

$$\widehat{x} := \frac{x_0}{1 - \lambda} \quad \text{y} \quad \widehat{y} := \frac{y_0}{\lambda}.$$

Notemos que $\|\widehat{x}\|_p = \|\widehat{y}\|_p = 1$ y expresemos $\widehat{x} = (\widehat{x_1}, \ldots \widehat{x_n})$ y $\widehat{y} = (\widehat{y_1}, \ldots \widehat{y_n})$. El lema 3.2 muestra que la función $z \mapsto |z|^p$ es convexa , así que tenemos que para $1 \leq i \leq n$

$$|(1 - \lambda)\widehat{x_i} + \lambda \widehat{y_i}|^p \leq (1 - \lambda) |\widehat{x_i}|^p + \lambda |\widehat{y_i}|^p .$$

Y al sumar i de 1 a n obtenemos

$$\begin{aligned}
\|x_0 + y_0\|_p^p &= \|(1-\lambda)\widehat{x} + \lambda\widehat{y}\|_p^p \\
&= \sum_{i=1}^{n} |(1-\lambda)\widehat{x}_i + \lambda\widehat{y}_i|^p \\
&\leq (1-\lambda)\left(\sum_{i=1}^{n} |\widehat{x}_i|^p\right) + \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} |\widehat{y}_i|^p\right) \\
&= (1-\lambda)\|\widehat{x}\|_p^p + \lambda\|\widehat{y}\|_p^p = 1.
\end{aligned}$$

Como para $z \in [0,\infty)$ se tiene que $z^p \leq 1$ si, y sólo si $z \leq 1$, entonces

$$\|x_0 + y_0\|_p \leq 1 = \|x_0\|_p + \|y_0\|_p .$$

Esto es,

$$\left\|\frac{x+y}{\|x\|_p + \|y\|_p}\right\|_p \leq \left\|\frac{x}{\|x\|_p + \|y\|_p}\right\|_p + \left\|\frac{y}{\|x\|_p + \|y\|_p}\right\|_p .$$

Por lo tanto

$$\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p .$$

Veamos ahora que $\|\cdot\|_\infty$ es una norma en $\mathbb{K}^n$. Para eso, notemos que

i) Sea $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. Si $x = 0$, entonces $\|x\|_\infty = \text{máx}_{i\in\mathbb{N}}\, 0 = 0$. Si por otro lado $\|x\|_\infty = 0$, entonces $|x_i| = 0$ para todo $1 \leq i \leq n$, y así $x_i = 0$, por lo que $x = 0$.

ii) Sea $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ y $\lambda \in \mathbb{K}$. Entonces

$$\|\lambda x\|_\infty = \|(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |\lambda x_i| = \max_{1\leq i\leq n} |\lambda|\,|x_i| = |\lambda| \max_{1\leq i\leq n} |x_i| = |\lambda|\,\|x\|_\infty .$$

iii) Sean $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$, entonces

$$\begin{aligned}
\|x+y\|_\infty &= \|(x_1+y_1, \ldots, x_n+y_n)\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i + y_i| \\
&\leq \max_{1\leq i\leq n} (|x_i| + |y_i|) \leq \max_{1\leq i\leq n} |x_i| + \max_{1\leq i\leq n} |y_i| \\
&= \|x\|_\infty + \|y\|_\infty .
\end{aligned}$$

■

En adelante, cuando trabajemos en $\mathbb{K}^n$ con la norma $\|\cdot\|_p$ lo denotaremos por ℓ_p^n. Si hace falta especificar el campo se denotará por $\ell_p^n(\mathbb{K})$.

La norma $\|\cdot\|_2$ en $\mathbb{K}^n$ es precisamente la norma euclidiana. Siempre que trabajemos en $\mathbb{K}^n$ como espacio normado, será con esta norma y cuando trabajemos con $\mathbb{K}^n$ como espacio topológico, será con la topología original inducida por esta norma.

Cuando $n = 1$, todas las normas $\|\cdot\|_p$ coinciden con la función valor absoluto. Así que en $\mathbb{K}$ siempre consideraremos esta norma, a menos que se indique lo contrario.

Lema 3.5. *En $\mathbb{K}^n$, la topología producto coincide con la topología original.*

Demostración. Sea $U = \prod_{i=1}^n U_i$ un abierto básico en la topología producto para algunos abiertos $U_1, \ldots, U_n$ en $\mathbb{K}$. Tomemos $x = (x_1, \ldots, x_n) \in U$, de manera que $x_i \in U_i$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$. Para toda $1 \leq i \leq n$ existen $r_i > 0$ tales que $V_{r_i}(x_i) \subseteq U_i$. Definamos $r = \min(r_1, \ldots, r_n) > 0$. Sea $y = (y_1, \ldots, y_n) \in V_r(x)$. Entonces para $i \in \{1, \ldots, n\}$, $|x_i - y_i| \leq \|x - y\|_2 < r \leq r_i$, de tal forma que $y_i \in V_{r_i}(x_i) \subseteq U_i$ y así $y \in U$. Es decir, $V_r(x) \subseteq U$ y U es abierto en la topología euclidiana.

Ahora tomemos un abierto básico en la topología euclidiana $V_r(z)$, donde $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{K}^n$ y $r > 0$. Sea $x \in V_r(z)$, de manera que $s = \frac{r - \|z - x\|_2}{\sqrt{n}} > 0$.

Mostremos que $\prod_{i=1}^n V_s(x_i) \subseteq V_r(z)$. Sea pues $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \prod_{i=1}^n V_s(x_i)$. Entonces

$$\|x - y\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2} < \sqrt{ns^2} = s\sqrt{n}.$$

De la desigualdad del triángulo se sigue que

$$\|z - y\|_2 \leq \|z - x\|_2 + \|x - y\|_2 < \|z - x\|_2 + s\sqrt{n} = r.$$

Por lo tanto $V_r(z)$ es abierto en la topología producto. ∎

El siguiente teorema generaliza al corolario 2.1.

Teorema 3.2. *Sea $A \subseteq \mathbb{K}^n$. Son equivalentes:*

- **i)** *A es compacto.*
- **ii)** *A es cerrado y acotado.*

Demostración. Primero supongamos que A es compacto. De la proposición 2.9 se sigue que A es cerrado y acotado.

Ahora supongamos que A es cerrado y acotado. Trabajemos primero el caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Como A es acotado, existe $r > 0$ tal que $A \subseteq V_r(0)$. Probemos que $[-r, r]^n$ es compacto por sucesiones en $\mathbb{R}^n$ con su topología producto. Sea pues $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $[-r, r]^n$, donde cada $f_k : \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{R}$. Entonces $(f_k(1))_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $[-r, r]$. Por el teorema de Heine-Borel este intervalo es compacto, por lo que existe una subsucesión convergente $(f_{k_{1,i}}(1))_{i\in\mathbb{N}}$ de $(f_k(1))_{k\in\mathbb{N}}$. Como $(f_{k_{1,i}}(2))_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $[-r, r]$ y este es compacto, existe una subsucesión convergente $(f_{k_{2,i}}(2))_{i\in\mathbb{N}}$ de $(f_{k_{1,i}}(2))_{k\in\mathbb{N}}$. Además del lema 1.8 se sigue que $(f_{k_{2,i}}(1))_{i\in\mathbb{N}}$ también converge. Continuando sucesivamente podemos encontrar una sucesión creciente $(k_{n,i})_{i\in\mathbb{N}}$ tal que $(f_{k_{n,i}}(j))_{i\in\mathbb{N}}$ converge en $[-r, r]$ para toda $j \in \{1, \ldots, n\}$. Por la proposición 4.6 se sigue que en la topología producto de $[-r, r]^n$ la sucesión $(f_{k_{n,i}})_{i\in\mathbb{N}}$ converge. Así que $[-r, r]^n$ es compacto por sucesiones y por el lema 2.2 es compacto en la topología producto. El lema 3.5 indica que $[-r, r]^n$ es compacto en $\ell_2^n(\mathbb{R})$. Dado que $A \subseteq V_r(0) \subseteq [-r, r]^n$ y A es cerrado, el lema 1.6 asegura que A es compacto.

Si por otro lado $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, consideremos la correspondencia canónica $J : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{2n}$ definida por

$$J(a_1 + ib_1, \ldots, a_n + ib_n) := (a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n).$$

Claramente J es un isomorfismo de espacios vectoriales reales. Además

$$\|(a_1 + ib_1, \ldots, a_n + ib_n)\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |a_i + ib_i|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 + |b_i|^2} = \|(a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n)\|_2\,, \quad (3.5)$$

de lo cual resulta que J es una isometría. Por lo tanto, J es un homeomorfismo entre $\mathbb{C}^n$ y $\mathbb{R}^{2n}$. Luego si A es cerrado y acotado en $\mathbb{C}^n$, por la proposición 1.5 $J(A)$ es cerrado. Además, de (3.5) se sigue que $J(A)$ es acotado. Del caso real se sigue ahora que $J(A)$ es compacto y por la proposición 1.6 se concluye que $J^{-1}(J(A)) = A$ es compacto. ■

Teorema 3.3. *El espacio normado $\mathbb{K}^n$ es completo.*

Demostración. Sea $(x_m)_{m\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K}^n$ una sucesión de Cauchy. El lema 2.9 indica que $\{x_m : m \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto acotado por alguna constante $M \in \mathbb{N}$. Como la bola $B_M(0)$ es cerrada y acotada en $\mathbb{K}^n$, el teorema 3.2 señala que $B_M(0)$ es compacto. Dado que $(x_m)_{m\in\mathbb{N}} \subseteq B_M(0)$ y este conjunto es compacto, el teorema 2.2 dice que existe una subsucesión $(x_{k_m})_{m\in\mathbb{N}}$ de $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ que converge a algún $x \in B_M(0) \subseteq X$. Del lema 2.7 se sigue que $x_m \to x$. ■

El teorema anterior muestra que $\mathbb{K}$ con la norma $|\cdot|$ es un espacio de Banach. Más adelante probaremos que el resto de los espacios ℓ_p^n también lo son.

Ejemplo 3.4. Espacios $\boldsymbol{\ell_p}$. Denotemos por $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ al espacio de sucesiones en $\mathbb{K}$, esto es, $\mathbb{K}^{\mathbb{N}} := F(\mathbb{N}, \mathbb{K})$. Definamos las funciones $\|\cdot\|_p : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \to [0, \infty]$ para $1 \leq p < \infty$ y $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \to [0, \infty]$ por

$$\|(x_1, x_2, \ldots)\|_p := \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \text{ y } \|(x_1, x_2, \ldots)\|_\infty := \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i|\,,$$

donde consideramos que $\infty^{\frac{1}{p}} = \infty$.

Para $1 \leq p \leq \infty$ definimos a $\ell_p(\mathbb{K})$, o simplemente ℓ_p, como el espacio de sucesiones $x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ tales que $\|x\|_p < \infty$.

Lema 3.6. *Sea $1 \leq p \leq \infty$. Si $x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_p$, entonces*

$$\|x\|_p = \lim_{n\to\infty} \|(x_1, \ldots, x_n)\|_p\,.$$

Demostración. Sea $1 \leq p < \infty$. Si $x \in \ell_p$, entonces $\|x\|_p < \infty$ y por la continuidad de la función $z \mapsto z^p$ en $\mathbb{R}$ se sigue que

$$\left(\lim_{n\to\infty} \|(x_1, \ldots, x_n)\|_p\right)^p = \lim_{n\to\infty} \|(x_1, \ldots, x_n)\|_p^p = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p = \|x\|_p^p < \infty.$$

Así que

$$\lim_{n\to\infty} \|(x_1, \ldots, x_n)\|_p = \|x\|_p\,.$$

Tomemos ahora $p = \infty$. Para $n \in \mathbb{N}$ sea $a_n = \max(|x_1|, \ldots, |x_n|)$. Como $\|x\|_\infty < \infty$, el conjunto $\{|x_i| : i \in \mathbb{N}\}$ está acotado y así $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ también. Claramente, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona-creciente y

$a_n \le \|x\|_\infty < \infty$, de manera que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge y $a_k \le \lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n < \infty$ para toda $k \in \mathbb{N}$. Sea $i \in \mathbb{N}$, entonces para $k \ge i$ se tiene que $a_k \ge |x_i|$ y por lo tanto $\lim_{n\to\infty} a_n \ge |x_i|$. Así pues, $\lim_{n\to\infty} a_n$ es una cota superior de $\{|x_i| : i \in \mathbb{N}\}$. Como $\|x\|_\infty$ es la mínima cota superior, resulta que $\lim_{n\to\infty} a_n \ge \|x\|_\infty$.

Por otro lado, tenemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, resulta que $a_n \le \|x\|_\infty$. De esto se sigue que $\lim_{n\to\infty} a_n \le \|x\|_\infty$ y concluimos que $\lim_{n\to\infty} \|(x_1,\ldots,x_n)\|_\infty = \|x\|_\infty$. ∎

Lema 3.7. *Para cada $p \in [1,\infty]$, la función $\|\cdot\|_p$ es una norma en ℓ_p.*

Demostración. Sea $1 \le p \le \infty$. Notemos que:

i) Sea $x = (x_1, x_2, \ldots,) \in \ell_p$. Si $x = 0$, entonces $\|x\|_p = 0$. Si por otro lado $\|x\|_p = 0$, entonces $x_1 = x_2 = \ldots = 0$. Así que $x = 0$.

ii) Si $x = (x_1, x_2, \ldots,) \in \ell_p$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces el lema 3.6 indica que

$$\|\lambda x\|_p = \lim_{n\to\infty} \|\lambda(x_1,\ldots,x_n)\|_p = \lambda \lim_{n\to\infty} \|(x_1,\ldots,x_n)\|_p = \lambda \|x\|_p .$$

iii) Si $x = (x_1, x_2, \ldots,), y = (y_1, y_2, \ldots) \in \ell_p$, entonces del lema 3.6 se sigue que

$$\begin{aligned}
\|x\|_p + \|y\|_p &= \lim_{n\to\infty} \|(x_1,\ldots,x_n)\|_p + \lim_{n\to\infty} \|(y_1,\ldots,y_n)\|_p \\
&= \lim_{n\to\infty} \|(x_1,\ldots,x_n)\|_p + \|(y_1,\ldots,y_n)\|_p \\
&\ge \lim_{n\to\infty} \|(x_1,\ldots,x_n) + (y_1,\ldots,y_n)\|_p = \|x+y\|_p . \\
&= \lim_{n\to\infty} \|(x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n)\|_p = \|x+y\|_p .
\end{aligned}$$

Además, observemos que para cada $p \in [1,\infty]$, se tiene que $|x_n| \le \|x\|_p$ para todo $n \in \mathbb{N}$. ∎

Teorema 3.4. *Para cada $p \in [1,\infty]$, ℓ_p es un espacio de Banach.*

Demostración. Como cada elemento en ℓ_p es una sucesión en $\mathbb{K}$, usaremos la notación de funciones en ℓ_p. Tomemos pues una sucesión de Cauchy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en ℓ_p. Fijemos $k \in \mathbb{N}$. Dados $n, m \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$|f_n(k) - f_m(k)| \le \|f_n - f_m\|_p .$$

Así que, como $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en ℓ_p^n entonces $(f_n(k))_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\mathbb{K}$. Puesto que $\mathbb{K}$ es completo, se sigue que $(f_n(k))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a algún $x_k \in \mathbb{K}$. Consideremos $f : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ definida por $f(k) = x_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Demostremos que $f \in \ell_p$ y $f_n \to f$. Para eso separemos en dos casos. El primero es cuando $1 \le p < \infty$. Sean $\varepsilon > 0$ y $M \in \mathbb{N}$. Como $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para $n, m \ge N$ se tenga que

$$\sqrt[p]{\sum_{i=1}^{M} |f_n(i) - f_m(i)|^p} \le \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{\infty} |f_n(i) - f_m(i)|^p} = \|f_n - f_m\|_p < \varepsilon.$$

De donde

$$\sum_{i=1}^{M} |f_n(i) - f_m(i)|^p < \varepsilon^p \text{ si } n, m \ge N. \tag{3.6}$$

Fijemos $n \ge N$. Como $f_m(i) \to f(i)$ para todo $i \in \{1, \dots, M\}$, haciendo $m \to \infty$ en (3.6) se sigue que

$$\sum_{i=1}^{M} |f_n(i) - f(i)|^p < \varepsilon^p.$$

Haciendo ahora $M \to \infty$, resulta que

$$\|f_n - f\|_p^p = \sum_{i=1}^{\infty} |f_n(i) - f(i)|^p \le \varepsilon^p.$$

Es decir,

$$\|f_n - f\|_p \le \varepsilon \text{ si } n \ge N. \tag{3.7}$$

Tomando $\varepsilon = 1$ en (3.7) existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|f - f_N\|_p \le 1$. Así que $f - f_N \in \ell_p$, y entonces $f = (f - f_N) + f_N \in \ell_p$. Además, lo establecido en (3.7) indica precisamente que $f_n \to f$.

Ahora trabajemos el caso $p = \infty$. Sea $\varepsilon > 0$. Como $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para $n, m \ge N$ y $i \in \mathbb{N}$ se tenga que

$$|f_n(i) - f_m(i)| \le \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon.$$

Fijemos $n \ge N$. Como $f_m(i) \to f(i)$ para todo $i \in \mathbb{N}$, haciendo $m \to \infty$ se sigue que

$$|f_n(i) - f(i)| \le \varepsilon \text{ para todo } i \in \mathbb{N}.$$

Es decir,

$$\|f_n - f\|_\infty \le \varepsilon \text{ si } n \ge N. \tag{3.8}$$

Tomando $\varepsilon = 1$ en (3.8) existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|f - f_N\|_\infty \le 1$. Así que $f - f_N \in \ell_p$, y entonces $f = (f - f_N) + f_N \in \ell_\infty$. Además, lo establecido en (3.8) indica precisamente que $f_n \to f$. ■

Corolario 3.2. *Para cada $1 \le p \le \infty$ y $n \in \mathbb{N}$ el espacio ℓ_p^n es completo.*

Demostración. Procediendo como en la demostración del ejemplo anterior, sustituyendo las sucesiones en ℓ_p por tuplas en ℓ_p^n y las series por sumas, se llega a que ℓ_p^n es completo. ■

Ejemplo 3.5. Espacios c y c_0. Consideremos el conjunto c de sucesiones en $\mathbb{K}$ que son convergentes. Dada $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c$, como es convergente es de Cauchy y por el lema 2.9 se sigue que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto acotado. Así pues $\|x\|_\infty < \infty$ y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_\infty$. Tomemos $x, y \in c$ y $\lambda \in \mathbb{K}$. Por la proposición 3.2 se tiene que $x + y$ y $\lambda x \in c$. Esto indica que c es un subespacio vectorial de ℓ_∞.

Denotemos por c_0 al subconjunto de c de sucesiones en $\mathbb{K}$ que convergen a cero. Consideremos $x, y \in c_0$ y $\lambda \in \mathbb{K}$. La proposición 3.2 indica que $x + y$ y $\lambda x \in c_0$, de donde c_0 es un subespacio de c y por lo tanto también de ℓ_∞.

Teorema 3.5. *Los espacios normados c y c_0 son completos.*

Demostración. Puesto que ℓ_∞ es completo, por el lema 2.8 es suficiente demostrar que c y c_0 son cerrados en ℓ_∞.

Veamos primero que c es cerrado. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq c$ una sucesión que converge a $f \in \ell_\infty$. Para que c sea cerrado hay que demostrar que $(f(k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge.

Puesto que $f_n \to f$ en ℓ_∞, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f(k) - f_n(k)| \leq \|f - f_n\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3} \text{ para } n \geq N \text{ y } k \in \mathbb{N}. \tag{3.9}$$

Dado que f_N converge, es de Cauchy. Así que existe $K \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_N(n) - f_N(m)| < \frac{\varepsilon}{3}, \text{ para todas } n, m \geq K. \tag{3.10}$$

De esta manera, al tomar $n, m \geq K$ de (3.9) y (3.10) se sigue que

$$|f(n) - f(m)| \leq |f(n) - f_N(n)| + |f_N(n) - f_N(m)| + |f_N(m) - f(m)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Por lo tanto $(f(k))_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K}$ es de Cauchy y al ser $\mathbb{K}$ completo, se sigue que f converge.

Ahora veamos que c_0 es cerrado. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq c_0$ una sucesión que converge a $f \in \ell_\infty$. Para que c_0 sea cerrado hay que demostrar que $f \in c_0$. Tomemos entonces $\varepsilon > 0$. Como $f_n \to f$ en ℓ_∞, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|f - f_n\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$ si $n \geq N$. Luego, $|f(k) - f_N(k)| < \frac{\varepsilon}{2}$ para toda $k \in \mathbb{N}$. Dado que $f_N \in c_0$, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $|f_N(k)| < \frac{\varepsilon}{2}$ si $k \geq M$. De esto se sigue que si $k \geq M$ entonces

$$|f(k)| \leq |f(k) - f_N(k)| + |f_N(k)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

■

3.2. Compacidad de la bola cerrada

El objetivo de esta sección es demostrar que la compacidad de la bola unitaria en un espacio normado depende simplemente de si este es de dimensión finita o no.

Teorema 3.6. *Si X y Y son espacios normados de dimensión finita y de la misma dimensión, entonces son isomorfos como espacios normados.*

Demostración. Supongamos que $\dim X = n \in \mathbb{N}$ y sea $\{x_1, \ldots, x_n\}$ una base suya. Demostraremos que X es isomorfo como espacio normado a $\mathbb{K}^n$ por medio de la función

$$\begin{aligned} T : \mathbb{K}^n &\to X \\ (a_1, \ldots, a_n) &\mapsto \sum_{i=1}^{n} a_i x_i. \end{aligned}$$

Veamos que T es lineal. Dados $(a_1,\ldots,a_n),(b_1,\ldots,b_n)\in\mathbb{K}^n$ y $\lambda\in\mathbb{K}$, se tiene que

$$\begin{aligned}T((a_1,\ldots,a_n)+\lambda(b_1,\ldots,b_n)) &= T((a_1+\lambda b_1,\ldots,a_n+\lambda b_n)) = \sum_{i=1}^n (a_i+\lambda b_i)x_i \\ &= \sum_{i=1}^n a_i x_i + \lambda\sum_{i=1}^n b_i x_i = T(a_1,\ldots,a_n)+\lambda T(b_1,\ldots,b_n).\end{aligned}$$

Si $a=(a_1,\ldots,a_n)\in\mathbb{K}^n$ cumple que $T(a)=0$, entonces $\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$. Como $\{x_1,\ldots,x_n\}$ es linealmente independiente, entonces $a_1=\ldots=a_n=0$. Así que $a=0$ y T es inyectiva.

Para probar que T es sobreyectiva tomemos $x\in X$. Como $\{x_1,\ldots,x_n\}$ genera a X, entonces existen $a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{K}$ tales que $x=\sum_{i=1}^n a_i x_i = T(a_1,\ldots,a_n)$ como se quería.

Ahora, tomemos $(a_1,\ldots,a_n)\in\mathbb{K}^n$. Por la desigualdad del triángulo y la desigualdad de Schwarz

$$\begin{aligned}\|T(a_1,\ldots,a_n)\| &= \left\|\sum_{i=1}^n a_i x_i\right\| \le \sum_{i=1}^n |a_i|\,\|x_i\| \\ &\le \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^n |a_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \|(a_1,\ldots,a_n)\|_2 .\end{aligned}$$

Esto indica que T es un operador lineal acotado y por lo tanto continuo.

Ahora consideremos la función $f=\|\cdot\|\circ T$. Como la norma es una función continua y T es continua, entonces f es continua. Dado que $S_n := \{(a_1,\ldots,a_n)\in\mathbb{K}^n : \|(a_1,\ldots,a_n)\|_2 = 1\}$ es compacto en $\mathbb{K}^n$, se sigue que f alcanza un valor mínimo m en S_n. Como $f\ge 0$, entonces $m\ge 0$. Supongamos que $m=0$. Entonces existe $(a_1,\ldots,a_n)\in S_n$ tal que

$$\left\|\sum_{i=1}^n a_i x_i\right\| = f(a_1,\ldots,a_n)=0.$$

Por lo que $\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$ y esto indica que $a_1=\ldots=a_n=0$. Lo cual es una contradicción, pues entonces $\|(a_1,\ldots,a_n)\|_2=0$. Así que $m>0$ y $\frac{1}{m}>0$. Para todo $x\in X$ con $x\neq 0$ se cumple que $T^{-1}(x)\neq 0$, $\frac{T^{-1}(x)}{\|T^{-1}(x)\|}\in S_n$ y

$$\frac{\|x\|}{\|T^{-1}(x)\|} = \left\|T\left(\frac{T^{-1}(x)}{\|T^{-1}(x)\|}\right)\right\| = f\left(\frac{T^{-1}(x)}{\|T^{-1}(x)\|}\right)\ge m.$$

De lo anterior se sigue que $\|T^{-1}(x)\|\le \frac{1}{m}\|x\|$. Por lo cual T^{-1} es continua y T es un isomorfismo de espacios normados.

Análogamente, como $\dim Y = \dim X = n$, entonces existe un isomorfismo de espacios normados $S:\mathbb{K}^n\to Y$. Resulta pues de esto que $S\circ T^{-1}: X\to Y$ es un isomorfismo de espacios normados entre X y Y. ■

Lema 3.8. *Sean X y Y isomorfos como espacios normados. Si X es completo, entonces Y es completo.*

Demostración. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en Y. Consideremos un isomorfismo $T : X \to Y$ de espacios normados y a la sucesión $(T^{-1}x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X. Como T^{-1} es continua, existe $t > 0$ tal que si $x \in Y$, entonces $\|T^{-1}x\| \leq t \cdot \|x\|$. Esto indica que para $n, m \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$\left\|T^{-1}x_n - T^{-1}x_m\right\| \leq t\,\|x_n - x_m\|\,.$$

Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, esto último indica que $(T^{-1}x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ también es de Cauchy. Dado que X es completo, la sucesión $(T^{-1}(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a algún $x \in X$. Puesto que T es continua, la proposición 2.7 indica que $x_n \to T(x)$. ∎

Proposición 3.4. *Cualquier espacio normado de dimensión finita es completo.*

Demostración. Sea X un espacio normado de dimensión finita $n \in \mathbb{N}$. Dado que $\mathbb{K}^n$ con la topología euclidiana es un espacio normado completo, y X es isomorfo como espacio normado a $\mathbb{K}^n$, resulta por el lema 3.8 que X también es completo. ∎

Corolario 3.3. *Si Y es un subespacio de dimensión finita de un espacio normado X, entonces Y es cerrado en X.*

Demostración. La proposición 3.4 indica que Y es completo. Del lema 2.8 se concluye entonces que Y es cerrado en X. ∎

Lema 3.9 (Riesz). *Sean Y un subespacio propio y cerrado de un espacio normado X y $\theta \in (0,1)$, entonces existe $x_\theta \in X$ con $\|x_\theta\| = 1$ para el cual $\|x_\theta - y\| > \theta$ para todo $y \in Y$.*

Demostración. Tomemos $x \in X \setminus Y$. Como Y es cerrado, el lema 2.1 indica que la distancia $d(x,Y)$ es positiva. Dado que $0 < \theta < 1$, tenemos que

$$0 < d(x,Y) = \text{ínf}\{\|x - z\| : z \in Y\} < \frac{d(x,Y)}{\theta}.$$

Así que existe $z \in Y$ tal que $0 < \|x - z\| < \dfrac{d(x,Y)}{\theta}$. Definamos $x_\theta = \dfrac{x - z}{\|x - z\|}$. Claramente $\|x_\theta\| = 1$. Además, para $y \in Y$ se tiene que $z + \|x - z\|\, y \in Y$. Por lo que

$$\|x_\theta - y\| = \left\|\frac{x - z}{\|x - z\|} - y\right\| = \frac{1}{\|x - z\|} \cdot \|x - (z + \|x - z\|\, y)\| > \frac{\theta}{d(x,Y)} \cdot d(x,Y) = \theta.$$

∎

En un espacio normado X, denotamos a la bola unitaria centrada en el cero por B_X. Con el siguiente teorema resolvemos el objetivo que planteamos al inicio de esta subsección.

Teorema 3.7. *Sea X un espacio normado. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- **i)** *X es de dimensión finita.*
- **ii)** *Todo subconjunto cerrado y acotado de X es compacto.*
- **iii)** *La bola unitaria cerrada B_X es compacta.*

Demostración. Demostraremos que **i)** implica **ii)**, que **ii)** implica **iii)** y que **iii)** implica **i)**.

Supongamos que X es de dimensión finita n. Entonces existe un isomorfismo de espacios normados $T : X \to \mathbb{K}^n$. Sea A un conjunto cerrado y acotado en X. Por ser T isomorfismo se sigue que $T(A)$ también es cerrado y acotado. El teorema 3.2 indica que $T(A)$ es compacto en $\mathbb{K}^n$. Por lo tanto $A = T^{-1}(T(A))$ también lo es.

Supongamos ahora que todo subespacio cerrado y acotado de X es compacto. Entonces B_X es compacta, pues es cerrada y acotada.

En lugar de demostrar que si B_X es compacta entonces X es de dimensión finita, demostraremos su contrapuesta. Así que suponemos que X es de dimensión infinita. Construiremos una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en B_X sin subsucesiones convergentes. Tomemos $x_1 \in B_x$ con $\|x_1\| = 1$. Supongamos que tenemos definidos a $x_1, \ldots, x_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$ de tal forma que si $1 < k \leq n$ entonces para cualesquiera $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1} \in \mathbb{K}$

$$\left\| x_k - \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i x_i \right\| \geq \frac{1}{2}. \tag{3.11}$$

Como X es de dimensión infinita, el subespacio $\operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_n\}$ es propio y por ser de dimensión finita, por el corolario 3.3 es cerrado. Tomando $\theta = \frac{1}{4}$, por el lema de Riesz existe x_{n+1} tal que $\|x_{n+1} - y\| > \frac{1}{4}$ para todo $y \in \operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_n\}$. De esto se sigue que si tomamos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ entonces

$$\left\| x_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \right\| \geq \frac{1}{2}.$$

Así pues, queda construida la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Si tomamos $n, m \in \mathbb{N}$ con $n > m$ entonces al tomar $\alpha_1 = 1$ y $\alpha_i = 0$ para $1 \leq i \leq n-1$ e $i \neq m$, de (3,11) obtenemos que $\|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{2}$. Esto indica que cualquier subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no es de Cauchy y por lo tanto no converge. Por la proposición 2.2 concluimos que B_X no es compacto. ■

3.3. Espacio dual

Dado un espacio normado X, al espacio de operadores $\varphi : X \to \mathbb{K}$ lineales y continuos lo llamamos *espacio dual* de X y lo denotamos por $(X, \|\cdot\|)^*$ o simplemente por X^*. A los elementos de este espacio dual los llamamos *funcionales lineales continuos*. Como $\mathbb{K}$ es completo, resulta que $X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ es un espacio de Banach.

La evaluación de un funcional $x^* \in X^*$ en un vector $x \in X$ se denota por $\langle x, x^* \rangle$, esto es,

$$\langle x, x^* \rangle := x^*(x).$$

Esto induce un mapeo $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X^* \to \mathbb{K}$, llamado *apareamiento dual*.

Los teoremas de Hahn-Banach muestran que, cuando X es un espacio normado, en X^* existen suficientes funcionales que permiten enriquecer la teoría de dualidad. Las demostraciones de tales teoremas se pueden encontrar en [GF06, sec. 5.2].

Teorema 3.8 (Hahn-Banach). *Sea X un espacio normado y $Y \subseteq X$ un subespacio vectorial. Si $f \in Y^*$ entonces existe $F \in X^*$ tal que $F = f$ en V y $\|f\| = \|F\|$.*

Corolario 3.4 (Hahn-Banach). *Sean X un espacio normado y $Y \subseteq X$ un subespacio vectorial cerrado. Si $x \notin Y$, entonces existe $\varphi \in X^*$ tal que $\varphi(x) \neq 0$ y $\varphi\big|_Y = 0$.*

Existen maneras de plantear los teoremas de Hanh-Banach con un enfoque más geométrico, como lo muestra el siguiente teorema.

Teorema 3.9 (Hahn-Banach). *Sea X un espacio normado. Si A y B son dos subconjuntos convexos y disjuntos en X tales que A es cerrado y B compacto, entonces existen $\varphi \in X^*$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $\Re(\varphi(x)) < \alpha < \beta < \Re(\varphi(y))$ para todos $x \in A, y \in B$.*

Proposición 3.5. *Sea X un espacio normado. Entonces X es de dimensión infinita si y sólo si X^* también lo es.*

Demostración. Supongamos que X es de dimensión infinita. Entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ existen $x_1, \dots, x_n \in X$ linealmente independientes. Sea $V = \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_n\}$, de manera que $\{x_1, \dots, x_n\}$ es una base de V. Para $i \in \{1, \dots, n\}$ definamos el funcional lineal $\varphi_i : V \to \mathbb{K}$ dado por $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$ que es continuo por la proposición 5.13 . Por el teorema 3.8 de Hahn-Banach existe $F_i \in X^*$ tal que $F_i = \varphi_i$ en V. Veamos que $\{F_1, \dots, F_n\}$ es linealmente independiente en X^*. Sean $a_1, \dots, a_n \in K$ tales que

$$\sum_{j=1}^{n} a_i F_i = 0.$$

Al evaluar en x_i obtenemos que $a_i = 0$. Esto muestra que para toda $n \in \mathbb{N}$ existen n funcionales linealmente independientes. Por lo que X^* es de dimensión infinita.

Supongamos ahora que X es de dimensión finita $n \in \mathbb{N}$. Existe entonces una base $\{x_1, \dots, x_n\}$ de X. Para $1 \leq i \leq n$ definimos $f_i : X \to \mathbb{K}$ linealmente y de tal manera que $f_i(x_j) = \delta_{ij}$. Como X es de dimensión finita la proposición 5.13 indica que cada f_i es continuo. Veamos que $\{f_1, \dots, f_n\}$ generan a X^*. Tomamos entonces $f \in X^*$ y supongamos que $f(x_i) = a_i \in \mathbb{K}$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Así, para cada $1 \leq i \leq n$

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_j f_j \right)(x_i) = a_i = f(x_i).$$

Por lo tanto $f = \sum_{j=1}^{n} a_j f_j$. Esto dice que existe un conjunto finito generador en X^*, por lo que X^* es de dimensión finita y además $\dim X^* \leq \dim X$. ■

Lema 3.10. *Sea V un subespacio propio de $\mathbb{K}^n$. Entonces existen $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}$ no todos cero tales que $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i = 0$ para todo $(x_1, \dots, x_n) \in V$.*

Demostración. Sea $\{v_1, \dots, v_k\}$ una base de V para algún $0 \leq k < n$ y algunos $v_1, \dots, v_k \in V$. Podemos tomar entonces $v_{k+1}, \dots, v_n \in \mathbb{K}^n$ tales que $\{v_1, \dots, v_n\}$ es una base de $\mathbb{K}^n$. Definamos $\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ linealmente tal que $\varphi(v_1) = \dots \varphi(v_k) = 0$ y $\varphi(v_{k+1}) = \dots = \varphi(v_n) = 1$. Entonces $\varphi(V) = \{0\}$ y $\varphi \neq 0$. Consideremos $c_i = \varphi(e_i)$ para toda $i \in \{1, \dots, n\}$. Como $\varphi \neq 0$, entonces algún c_i es distinto de cero. Para $x = (x_1, \dots, x_n) \in V$ resulta que

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi(e_i) = \varphi \left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \right) = \varphi(x) = 0.$$

■

Lema 3.11. *Sean V un espacio vectorial, $n \in \mathbb{N}$ y $f, g_1, \ldots, g_n$ funcionales lineales en V. Si $\bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker} g_i \subseteq \operatorname{Ker} f$, entonces $f \in \operatorname{span}\{g_1, \ldots, g_n\}$.*

Demostración. Definamos $F : V \to \mathbb{K}^n$ por $F(x) = (g_1(x), \ldots, g_n(x))$ para toda $x \in V$. Mostremos que F es lineal. Tomemos entonces $x, y \in V$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ y observemos que

$$\begin{aligned} F(x + \lambda y) &= (g_1(x + \lambda y), \ldots, g_n(x + \lambda y)) = (g_1(x) + \lambda g_1(y), \ldots, g_n(x) + \lambda g_n(y)) \\ &= (g_1(x), \ldots, g_n(x)) + \lambda(g_1(y), \ldots, g_n(y)) = F(x) + \lambda F(y). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Consideremos $h : F(V) \to \mathbb{K}$ definida por $h(F(x)) = f(x)$ para $F(x) \in F(V)$. Mostremos que h está bien definida. Supongamos que $F(x) = F(y)$ para algunos $x, y \in V$. Luego $F(x - y) = 0$ y por tanto

$$x - y \in \operatorname{Ker} F = \bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker} g_i \subseteq \operatorname{Ker} f,$$

por lo que $h(F(x)) = f(x) = f(y) = h(F(y))$.

Sea $\overline{h} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ una extensión lineal de h a $\mathbb{K}^n$. Entonces dado $x \in V$, tenemos que

$$f(x) = h(F(x)) = \overline{h}(g_1(x), \ldots, g_n(x)) = \overline{h}\left(\sum_{i=1}^{n} g_i(x) e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \overline{h}(e_i) g_i(x).$$

Esto indica que $f = \sum_{i=1}^{n} \overline{h}(e_i) g_i$ y entonces $f \in \operatorname{span}\{g_1, \ldots, g_n\}$. ■

Lema 3.12. *Sean X un espacio normado, $Y \subseteq X$ un subespacio de X y $x \in X$. Entonces para todo $\lambda \in \mathbb{K}$, se cumple que $|\lambda|\, d(x, Y) \leq d(\lambda x, Y)$.*

Demostración. Si $\lambda = 0$, entonces $|\lambda|\, d(x, Y) = 0 = d(\lambda x, Y)$ y se cumple lo requerido. Así que consideremos ahora el caso $\lambda \neq 0$ y procedamos por contradicción, es decir, supongamos que $|\lambda|\, d(x, Y) > d(\lambda x, Y)$. Al definir $\varepsilon := |\lambda|\, d(x, Y) - d(\lambda x, Y) > 0$, resulta de una propiedad del ínfimo que existe $y \in Y$ tal que

$$\|\lambda x - y\| < d(\lambda x, Y) + \varepsilon = |\lambda|\, d(x, Y) \leq |\lambda| \left\| x - \frac{y}{\lambda} \right\| = \|\lambda x - y\|,$$

lo cual es una contradicción. ■

Otra consecuencia del teorema de Hahn-Banach es el lema de Helly, que más adelante nos será de utilidad.

Lema 3.13 (Helly). *Sean X un espacio normado, $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in X^*$ y $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$. Son equivalentes:*

- **i)** *Para todo $\varepsilon > 0$ existe $x \in B_X$ tal que $|\varphi_i(x) - a_i| < \varepsilon$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$.*
- **ii)** *Para cualesquiera $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{K}$ se cumple que $\left| \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right| \leq \left\| \sum_{i=1}^{n} b_i \varphi_i \right\|$.*

Demostración. Supongamos **i)**. Tomemos $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{K}$ cualesquiera. Sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe $x \in B_X$ tal que $|\varphi_i(x) - a_i| < \varepsilon$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$. Observemos que

$$\left|\sum_{i=1}^n a_i b_i\right| = \left|\sum_{i=1}^n (a_i - \varphi_i(x) + \varphi_i(x)) b_i\right| \leq \left|\sum_{i=1}^n (a_i - \varphi_i(x)) b_i\right| + \left|\left(\sum_{i=1}^n b_i \varphi_i\right)(x)\right|$$
$$\leq \sum_{i=1}^n |a_i - \varphi_i(x)|\, b_i + \left\|\sum_{i=1}^n b_i \varphi_i\right\| \|x\| < \varepsilon \sum_{i=1}^n |b_i| + \left\|\sum_{i=1}^n b_i \varphi_i\right\|$$

Como esto es para todo $\varepsilon > 0$, se sigue que $\left|\sum_{i=1}^n a_i b_i\right| \leq \left\|\sum_{i=1}^n b_i \varphi_i\right\|$.

Ahora supongamos **ii)** y tomemos $\varepsilon > 0$. En el caso que $\varphi_i = 0$ para toda $1 \leq i \leq n$, para todos $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{K}$ se tiene que

$$\left|\sum_{i=1}^n a_i b_i\right| \leq \left\|\sum_{i=1}^n b_i \varphi_i\right\| = \|0\| = 0.$$

Es decir, $\sum_{i=1}^n a_i b_i = 0$ para todos $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{K}$. Si fijamos $k \in \{1, \ldots, n\}$ y tomamos $b_k = 1$ y $b_i = 0$ para $i \neq k$, entonces se tiene que $a_k = 0$. Por lo que al tomar $x = 0$ se satisface que $|\varphi_i(x) - a_i| = 0 < \varepsilon$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Consideremos ahora el caso en el que no todos los funcionales $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ son cero. Entonces reordenemos $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ de tal manera que exista $1 \leq m \leq n$ tal que $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ sean linealmente independientes y $\operatorname{span}\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\} = \operatorname{span}\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$.

Definamos $F : X \to \mathbb{K}^m$ por $F(x) = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x))$ para toda $x \in X$. En (3.12) se probó que F es lineal. Demostremos que F es sobreyectiva. Supongamos que no lo es. Entonces $F(X)$ es un subespacio propio de $\mathbb{K}^m$, por lo que del lema 3.10 existe $c = (c_1, \ldots, c_m) \in \mathbb{K}^m \setminus \{0\}$ tal que

$$\sum_{i=1}^m c_i y_i = 0 \text{ para todo } y = (y_1, \ldots, y_m) \in T(X).$$

Esto nos indica que para todo $x \in X$ se tiene que $\sum_{i=1}^m c_i \varphi_i(x) = 0$ y por lo tanto $\sum_{i=1}^m c_i \varphi_i = 0$, lo que contradice que $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ son independientes. Luego F es sobreyectiva.

Sea $y \in F^{-1}(a_1, \ldots, a_m)$. Probemos que $\varphi_i(y) = a_i$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$. Si $m = n$ no hay nada que probar. Supongamos entonces que $m < n$. Claramente $\varphi_i(y) = a_i$ para $1 \leq i \leq m$. Así que fijemos $m+1 \leq i \leq n$. Puesto que $\varphi_i \in \operatorname{span}\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$, del lema 3.10 existen $b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{K}$ tales que $\varphi_i = \sum_{j=1}^m b_j \varphi_j$. Al definir $b_i = -1$ y $b_j = 0$ para $j \in \{m+1, \ldots, n\} \setminus \{i\}$ resulta de **ii)** que

$$|\varphi_i(y) - a_i| = \left|\sum_{j=1}^m b_j \varphi_j(y) - a_i\right| = \left|\sum_{j=1}^n a_j b_j\right| \leq \left\|\sum_{j=1}^n b_j \varphi_j\right\| = \left\|\sum_{j=1}^m b_j \varphi_j - \varphi_i\right\| = \|0\| = 0.$$

y entonces $\varphi_i(y) = a_i$.

Consideremos el subespacio $K = \bigcap_{i=1}^n \operatorname{Ker} \varphi_i$ de X. Si $y \in \mathbb{K}$, entonces $a_i = \varphi_i(y) = 0$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$, por lo que $x = 0$ cumple lo requerido. Supongamos entonces que $y \notin K$ y definamos en $\operatorname{span}\{K\cup\{y\}\} = \{z+\lambda y : z \in K, \lambda \in \mathbb{K}\}$ linealmente la función ψ de tal manera que $\psi(y) = d(y,K)$ y $\psi(K) = 0$. Demostremos que ψ es continua. Al tomar $z+\lambda y \in \operatorname{span}\{K\cup\{y\}\}$, $z \in K$, $\lambda \in \mathbb{K}$ del lema 3.12 resulta que

$$\begin{aligned} |\psi(z+\lambda y)| &= |\psi(z)+\lambda\psi(y)| = |\lambda|\,|\psi(y)| = |\lambda|\,d(y,K) \\ &= d(\lambda y, K) \leq \|\lambda y - (-z)\| = \|z+\lambda y\|, \end{aligned}$$

por lo que ψ es continua y $\|\psi\| \leq 1$. Por el teorema 3.8 de Hahn-Banach existe $\widehat{\psi} \in X^*$ que extiende a ψ y tal que $\|\widehat{\psi}\| = \|\psi\| \leq 1$. Dado que $K \subseteq \operatorname{Ker}\widehat{\psi}$, del lema 3.11 se sigue que $\widehat{\psi} \in \operatorname{span}\{\varphi_1,\ldots,\varphi_n\}$. Luego, existen $b_1,\ldots,b_n \in \mathbb{K}$ tales que

$$\widehat{\psi} = \sum_{i=1}^{n} b_i\varphi_i.$$

Al aplicar ahora **ii)** resulta que

$$d(y,K) = \widehat{\psi}(y) = \sum_{i=1}^{n} b_i\varphi_i(y) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left\|\sum_{i=1}^{n} b_i\varphi_i\right\| = \left\|\widehat{\psi}\right\| \leq 1.$$

Sea $\delta > 0$ tal que $|a_i|\,\delta < \varepsilon$ para todo $1 \leq i \leq n$. Puesto que $d(y,K) \leq 1$, existe $z \in K$ tal que $\|y-z\| = d(y,z) \leq \delta+1$. Notemos que $\varphi_i(y-z) = \varphi_i(y) = a_i$ para todo $i \in \{1,\ldots,n\}$. Definamos $x = \frac{y-z}{1+\delta}$ y observemos que $\|x\| \leq 1$ y para cada $1 \leq i \leq n$ se tiene que

$$|\varphi_i(x) - a_i| = \left|\frac{\varphi_i(y)}{1+\delta} - a_i\right| = |a_i|\left|\frac{1}{1+\delta} - 1\right| = |a_i|\,\delta < \varepsilon.$$

■

Sea X un espacio normado. Para cada $x \in X$ recordemos que la evaluación $\delta_x : X^* \to \mathbb{K}$ se define mediante $\delta_x(\varphi) := \varphi(x)$, para todo $\varphi \in X^*$. Tal función evaluación es un funcional lineal continuo en X^* de acuerdo a la siguiente proposición.

Lema 3.14. *Sean X un espacio normado y $x \in X$. Entonces δ_x es un funcional lineal continuo tal que $\|\delta_x\| \leq \|x\|$.*

Demostración. Sean $\varphi, \psi \in X^*$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces

$$\delta_x(\varphi+\lambda\psi) = (\varphi+\lambda\psi)(x) = \varphi(x)+\lambda\psi(x) = \delta_x(\varphi)+\lambda\delta_x(\psi).$$

Para todo $\varphi \in X^*$ se tiene que $|\delta_x(\varphi)| = |\varphi(x)| \leq \|\varphi\|\,\|x\|$. Esto indica que δ_x es continuo y además $\|\delta_x\| \leq \|x\|$. ■

Al ser δ_x un funcional lineal continuo en X^*, este pertenece al espacio dual de X^*, el cual denotamos por X^{**}. Al espacio X^{**} lo llamaremos *bidual* de X.

Definimos la *identificación canónica* del espacio normado X en X^{**} como

$$\begin{aligned} J : X &\mapsto X^{**} \\ x &\mapsto \delta_x \end{aligned}$$

Usando la notación de apareamiento dual, la identificación canónica se caracteriza por cumplir que
$$\langle x, \varphi\rangle = \langle \varphi, Jx\rangle \quad \text{para todos } x \in X \text{ y } \varphi \in X^*.$$

Estableceremos en seguida que la identificación canónica es una isometría entre X y X^{**}. Esto nos indica que podemos pensar a X como un subespacio de X^{**}.

Proposición 3.6. *Sea X un espacio normado. Entonces la identificación canónica J es una isometría lineal.*

Demostración. Veamos que J es lineal. Tomemos entonces $x, y \in X$ y $\lambda \in \mathbb{K}$. Para $\varphi \in X^*$ se tiene que
$$J(x + \lambda y)(\varphi) = \varphi(x + \lambda y) = \varphi(x) + \lambda\varphi(y) = Jx(\varphi) + \lambda Jy(\varphi).$$
De donde $J(x + \lambda y) = Jx + \lambda Jy$.

Si $x = 0$ entonces $\|Jx\| = 0 = \|x\|$. Si en cambio $x \neq 0$, el teorema de Hahn-Banach nos permite tomar $\varphi \in S_{X^*}$ tal que $\varphi(\frac{x}{\|x\|}) = 1$. De esto se sigue que
$$|Jx(\varphi)| = |\varphi(x)| = \|x\|.$$
Así pues $\|Jx\| \geq \|x\|$. El lema 3.14 indica que $\|Jx\| = \|\delta_x\| \leq \|x\|$ y así se sigue que $\|Jx\| = \|x\|$ y J es isometría. ■

Dado que J es una isometría lineal, resulta que J es inyectiva. Más adelante mostraremos que J no siempre es sobreyectiva. Los conceptos que introduciremos a continuación tienen el propósito de estudiar cuándo J es sobreyectiva.

Sean X y Y espacios normados. El *operador transpuesto* de un operador lineal continuo $T : X \to Y$ es la función $T^{\mathsf{t}} : Y^* \to X^*$ definida por
$$T^{\mathsf{t}}\varphi := \varphi \circ T \text{ para } \varphi \in Y^*.$$

Como $T^{\mathsf{t}}\varphi$ es composición de operadores lineales continuos, entonces es lineal y continuo. Así que T^{t} está bien definido.

El operador transpuesto T^{t} se caracteriza por cumplir que
$$\langle Tx, \varphi\rangle = \langle x, T^{\mathsf{t}}\varphi\rangle \quad \text{para todos } x \in X \text{ y } \varphi \in X^*.$$

Dados $\varphi, \psi \in Y^*$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, se tiene que
$$T^{\mathsf{t}}(\varphi + \lambda\psi) = (\varphi + \lambda\psi) \circ T = \varphi \circ T + \lambda\psi \circ T = T^{\mathsf{t}}\varphi + \lambda T^{\mathsf{t}}\psi.$$

Así que T^{t} es lineal. Además, si tomamos $x \in X$, se sigue que
$$\|(T^{\mathsf{t}}\varphi)x\| = \|\varphi(Tx)\| \leq \|\varphi\| \,\|(\|\, Tx) \leq \|\varphi\| \,\|T\| \,\|x\|.$$

Esto indica que $\|T^{\mathsf{t}}\varphi\| \leq \|T\| \,\|\varphi\|$ y entonces T^{t} es acotado y $\|T^{\mathsf{t}}\| \leq \|T\|$.

Lema 3.15. *Sean X y Y espacios normados. Si $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ es biyectiva, entonces T^{t} es biyectiva y $(T^{\mathsf{t}})^{-1} = (T^{-1})^{\mathsf{t}}$.*

Demostración. Para todo $\varphi \in X^*$ se cumple que

$$(T^{\mathsf{t}} \circ (T^{-1})^{\mathsf{t}})\varphi = T^{\mathsf{t}}((T^{-1})^{\mathsf{t}}(\varphi)) = T^{\mathsf{t}}(\varphi \circ T^{-1}) = (\varphi \circ T^{-1}) \circ T = \varphi.$$

De donde $T^{\mathsf{t}} \circ (T^{-1})^{\mathsf{t}} = \mathrm{Id}_{X^*}$. Además, para todo $\varphi \in Y^*$ se cumple que

$$((T^{-1})^{\mathsf{t}} \circ T^{\mathsf{t}})\varphi = (T^{-1})^{\mathsf{t}}(T^{\mathsf{t}}(\varphi)) = (T^{-1})^{\mathsf{t}}(\varphi \circ T) = (\varphi \circ T) \circ T^{-1} = \varphi.$$

De donde $(T^{-1})^{\mathsf{t}} \circ T^{\mathsf{t}} = \mathrm{Id}_{Y^*}$. Por lo tanto T^{t} es invertible y $(T^{-1})^{\mathsf{t}}$ es su inversa. ■

Proposición 3.7. *Sean X y Y espacios normados y $J_X : X \to X^{**}$ y $J_Y : Y \to Y^{**}$ las identificaciones canónicas en X y Y. Si $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, entonces el diagrama*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "J_X"] & Y \arrow[d, "J_Y"] \\ X^{**} \arrow[r, "T^{\mathsf{tt}}"] & Y^{**} \end{tikzcd}$$

conmuta. Es decir, $J_Y \circ T = T^{\mathsf{tt}} \circ J_X$.

Demostración. Sean $x \in X$ y $\varphi \in Y^*$. Se tiene que

$$\begin{aligned} ((J_Y \circ T)x)\varphi &= \langle \varphi, J_Y(Tx) \rangle = \langle Tx, \varphi \rangle \\ &= \langle x, T^{\mathsf{t}}\varphi \rangle = \langle T^{\mathsf{t}}\varphi, J_X(x) \rangle \\ &= \langle \varphi, T^{\mathsf{tt}}(J_X(x)) \rangle = ((T^{\mathsf{tt}} \circ J_X)x)\varphi. \end{aligned}$$

Esto indica que $(J_Y \circ T)x = (T^{\mathsf{tt}} \circ J_X)x$ para toda $x \in X$ y por lo tanto $J_Y \circ T = T^{\mathsf{tt}} \circ J_X$. ■

Lema 3.16. *Sean X y Y espacios normados. Si $T : X \to Y$ es un isomorfismo de espacios normados, entonces su transpuesto T^{t} también lo es.*

Demostración. Dado que T es un isomorfismo se tiene que T es biyectiva. Por el lema 3.15 se sigue que T^{t} también es biyectiva. Como $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, entonces $T^{\mathsf{t}} \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$. Puesto que $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$, entonces $(T^{\mathsf{t}})^{-1} = (T^{-1})^{\mathsf{t}} \in \mathcal{L}(X^*, Y^*)$. Por lo tanto T^{t} es un isomorfismo de espacios normados. ■

3.4. Ejemplos: $(\ell_p^n)^*$ y ℓ_p^* , $1 \leq p \leq \infty$ y c_0^*

Muchas veces al trabajar con el dual de algún espacio normado, resulta ser muy útil el identificar tal espacio dual con algún otro espacio conocido. En esta sección identificaremos los espacios duales de los ejemplos que presentamos en la sección 3.1.

Definición 3.5. Si $1 \leq p \leq \infty$, al único elemento $1 \leq q \leq \infty$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, donde $\frac{1}{\infty} = 0$, se le llama *exponente conjugado* de p.

Notemos que el exponente conjugado del 1 es ∞. Además, si $1 < p < \infty$ y q es su exponente conjugado, entonces $1 < q < \infty$.

Observemos también que si q es el exponente conjugado de p, entonces p es el exponente conjugado de q.

Lema 3.17 (Desigualdad de Young). *Sean $1 < p < \infty$ y q su exponente conjugado. Si $a, b \geq 0$, entonces*
$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

Demostración. Consideremos la función $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -\ln(x)$, para toda $x > 0$. Notemos que $f'(x) = -\frac{1}{x}$ es monótona-creciente. El lema 3.1 indica que f es convexa. Por lo tanto, tomando $\lambda = \frac{1}{p} \in (0, 1)$, resulta que $1 - \lambda = \frac{1}{q}$. Así que

$$f(\lambda a^p + (1-\lambda)b^q) \leq \lambda f(a^p) + (1-\lambda)f(b^q),$$

esto es
$$-\ln\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\right) \leq -\frac{1}{p}\ln(a^p) - \frac{1}{q}\ln(b^p) = -\ln(a) - \ln(b) = -\ln(ab).$$

Dado que la función exponencial es creciente, de esta última desigualdad se sigue la conclusión. ■

Teorema 3.10 (Desigualdad de Hölder). *Sean $1 < p < \infty$ y q su exponente conjugado. Si $n \in \mathbb{N}$ y $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \geq 0$, entonces*

$$\sum_{i=1}^{n} a_j b_j \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Demostración. Sean
$$a = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{y} \quad b = \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Si $a = 0$ ó $b = 0$, la desigualdad de Hölder es clara. Supongamos entonces que $a, b > 0$. Por la desigualdad de Young, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ tenemos que $\frac{a_i}{a}\frac{b_i}{b} \leq \frac{1}{p}\frac{a_i^p}{a^p} + \frac{1}{q}\frac{b_i^q}{b^q}$. Luego,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a}\frac{b_i}{b} \leq \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^p}{a^p} + \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i^q}{b^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Por lo tanto
$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq ab = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

■

Corolario 3.5 (Desigualdad de Hölder). *Sean $1 \leq p \leq \infty$ y q su exponente conjugado. Si $x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_p$ y $y = (y_1, y_2, \ldots) \in \ell_q$, entonces la serie $\sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$ converge y*

$$\left|\sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i\right| \leq \|x\|_p \|y\|_q.$$

Demostración. Supongamos primero que $1 < p < \infty$. Fijemos $n \in \mathbb{N}$ y tomemos $a_i = |x_i|$ y $b_i = |y_i|$ para $1 \leq i \leq n$. Entonces de la desigualdad de Hölder se sigue que

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|\,|y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \|x\|_p \|y\|_q .$$

Haciendo $n \to \infty$ se sigue que $\sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$ es absolutamente convergente y por lo tanto converge. Además

$$\left|\sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i\right| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |x_i y_i| \leq \|x\|_p \|y\|_q .$$

Consideremos ahora $p = 1$, de manera que $q = \infty$. Entonces $|y_i| \leq \|y\|_\infty$ para todo $i \in \mathbb{N}$ y

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i y_i| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|\,|y_i| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|\,\|y\|_\infty = \|x\|_1 \|y\|_\infty .$$

Así que $\sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$ converge absolutamente, por lo tanto converge y

$$\left|\sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i\right| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |x_i y_i| \leq \|x\|_1 \|y\|_\infty .$$

El caso $p = \infty$ y $q = 1$ es análogo al anterior. ■

Teorema 3.11. *Sean $1 \leq p < \infty$ y q su exponente conjugado. Entonces ℓ_p^* y ℓ_q son isométricamente isomorfos y ℓ_1 es isométricamente isomorfo a un subespacio propio de ℓ_∞^*.*

Demostración. Tomemos $1 \leq p \leq \infty$ y fijemos $y = (y_1, y_2, \ldots) \in \ell_q$. Consideremos la función $Ry : \ell_p \to \mathbb{K}$ definida en $x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_p$ por

$$Ry(x) := \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i.$$

Notemos que por la desigualdad de Hölder la serie $Ry(x)$ converge y

$$|Ry(x)| = \left|\sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i\right| \leq \|x\|_p \|y\|_q < \infty. \tag{3.13}$$

Así que Ry está bien definida.

Mostremos que Ry es lineal. Así, sean $x = (x_1, x_2, \ldots), z = (z_1, z_2, \ldots) \in \ell_q$ y $\lambda \in \mathbb{K}$. Entonces

$$Ry(x + \lambda z) = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i + \lambda z_i) y_i = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} z_i y_i = Ry(x) + \lambda Ry(z).$$

Ya que sabemos que Ry es un funcional lineal, de la desigualdad (3.13) resulta que Ry es acotado, por lo que es continuo. Así pues, tenemos definida $Ry \in \ell_p^*$ para cada $y \in \ell_q$. Consideremos entonces la función

$$\begin{aligned} R : \ell_q &\to \ell_p^* \\ y &\mapsto Ry. \end{aligned}$$

Ahora probemos que R es lineal. Así, sean $y = (y_1, y_2, \ldots), z = (z_1, z_2, \ldots) \in \ell_q$ y $\lambda \in \mathbb{K}$. Si $x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_p$ tenemos que

$$R(y + \lambda z)(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i(y_i + \lambda z_i) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} x_i z_i = Ry(x) + \lambda Rz(x).$$

Así que $R(y + \lambda z) = Ry + \lambda Rz$ y por lo tanto R es lineal. De (3.13) se sigue que

$$\|Ry\| \leq \|y\|_q\,, \text{ para toda } y \in \ell_q. \tag{3.14}$$

Demostremos que R es sobreyectiva para $1 \leq p < \infty$. Tomemos entonces $\varphi \in \ell_p^*$. Nuestro candidato y en ℓ_q tal que $Ry = \varphi$ es $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definido por $y_n = \varphi(e_n)$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Veamos que y pertenece a ℓ_q. Supongamos primero que $p \neq 1$, de manera que $q \neq \infty$, y fijemos $N \in \mathbb{N}$. Sean $1 \leq n_1 < \ldots < n_k \leq N$ los índices de y_n que son distintos de cero. Entonces

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N} |y_n|^q &= \sum_{i=1}^{k} |y_{n_i}|^q = \sum_{i=1}^{k} \frac{|y_{n_i}|^q}{y_{n_i}} y_{n_i} = \sum_{i=1}^{k} \frac{|y_{n_i}|^q}{y_{n_i}} \varphi(e_{n_i}) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{|y_{n_i}|^q}{y_{n_i}} e_{n_i}\right) \\ &\leq \|\varphi\| \left\|\sum_{i=1}^{k} \frac{|y_{n_i}|^q}{y_{n_i}} e_{n_i}\right\|_p = \|\varphi\| \left(\sum_{i=1}^{k} |y_{n_i}|^{(q-1)p}\right)^{\frac{1}{p}} = \|\varphi\| \left(\sum_{n=1}^{N} |y_n|^q\right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

De esto se sigue que

$$\left(\sum_{n=1}^{N} |y_n|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{n=1}^{N} |y_n|^q\right)^{1-\frac{1}{p}} \leq \|\varphi\|\,.$$

Haciendo $N \to \infty$ obtenemos que $\|y\|_q \leq \|\varphi\|$.

Ahora, para $p = 1$, se tiene que $|y_n| = |\varphi(e_n)| \leq \|\varphi\| \|e_n\|_1 = \|\varphi\|$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Entonces obtenemos que $\|y\|_\infty \leq \|\varphi\|$.

Así pues, tenemos que para $1 \leq p < \infty$ se cumple que

$$\|y\|_q \leq \|\varphi\|\,. \tag{3.15}$$

Falta ver que $Ry = \varphi$. Tomemos entonces $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_p$. Mostremos que

$$x = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} x_n e_n.$$

Observemos que para todo $N \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$\left\| x - \sum_{n=1}^{N} x_n e_n \right\|_p = \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pero como $\|x\|_p^p = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$, se sigue que $\sum_{n=N+1}^{\infty} |x_n|^p \to 0$ y entonces

$$\left\| x - \sum_{n=1}^{N} x_n e_n \right\|_p \to 0.$$

Ahora, notemos que como φ es continua

$$\begin{aligned}
\varphi(x) = \varphi\left(\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} x_n e_n \right) &= \lim_{N\to\infty} \varphi\left(\sum_{n=1}^{N} x_n e_n \right) \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} x_n \varphi(e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n = Ry(x).
\end{aligned}$$

Luego $Ry = \varphi$ y R es sobreyectiva. Además, dado $y \in \ell_q$, se tiene de (3.15) que $\|y\|_q \leq \|Ry\|$ y junto con (3.14) se concluye que $\|Ry\| = \|y\|_q$ y R es una isometría.

Ahora consideremos el caso $p = \infty$ y $q = 1$. Mostremos que R es una isometría. Sea $y \in \ell_1$. Definamos $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ por $x_n = \frac{|y_n|}{y_n}$ si $y_n \neq 0$ y $x_n = 0$ si $y_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De esta manera $|x_n| \leq 1$ y por lo tanto $\|x\|_\infty \leq 1$. Además, notemos que

$$Ry(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|y_n|}{y_n} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} |y_n| = \|y\|_1 .$$

Como $x \in B_{\ell_\infty}$ y $Ry(x) = \|y\|_1$, se sigue que $\|Ry\| \geq \|y\|_1$. Junto con (3.14) se concluye que $\|Ry\| = \|y\|_1$ y R es una isometría.

Supongamos ahora que $R : \ell_1 \to \ell_\infty^*$ es sobreyectiva. Consideremos c como en el ejemplo 3.5. Definamos la función $f : c \to \mathbb{K}$ por $f((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \lim_{n\to\infty} x_n$ para toda $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c$. De la proposición 3.2 se sigue que f es lineal y dado que para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c$, se cumple que

$$|f((x_n)_{n\in\mathbb{N}})| = \left| \lim_{n\in\mathbb{N}} x_n \right| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| = \|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty ,$$

se obtiene que f es continua. Así pues $f \in c^*$. Como c es un subespacio de ℓ_∞, por el teorema 3.8 de Hahn-Banach existe $\varphi \in \ell_\infty^*$ tal que $\varphi\big|_c = f$. Dada la suposición de que R es sobreyectiva, existe $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_1$ tal que $Ry = \varphi$. Como para todo $n \in \mathbb{N}$, la sucesión e_n converge a cero 0, se sigue que

$$y_n = Ry(e_n) = \varphi(e_n) = f(e_n) = 0.$$

Esto es, $y = 0$ y por lo tanto $f = 0$. Esto es falso pues $(1)_{n\in\mathbb{N}} \in c$ y $f((1)_{n\in\mathbb{N}}) = 1$. Concluimos que R no es sobreyectiva. ■

Teorema 3.12. *Los espacios c_0^* y ℓ_1 son isométricamente isomorfos.*

Demostración. Sea $R : \ell_1 \to \ell_\infty^*$ como en la demostración del teorema anterior. Ahora, definamos $\widehat{R} : \ell_1 \to c_0^*$ por $\widehat{R}y = Ry\big|_{c_0}$ para toda $y \in \ell_1$. Además, como Ry es lineal y continua, resulta que $Ry\big|_{c_0}$ también lo es y así $\widehat{R}$ está bien definida.

Dado que R es lineal, se sigue que $\widehat{R}$ también lo es. Además, para $x \in c_0$ y $y \in \ell_1$ se tiene que

$$\left|\widehat{R}y(x)\right| = \left|Ry\big|_{c_0}(x)\right| = |Ry(x)| \leq \|Ry\| \, \|x\|_\infty ,$$

lo que indica que $\|\widehat{Ry}\| \leq \|Ry\| \leq \|R\| \, \|y\|_1 \leq \|y\|_1$.

Mostremos que $\widehat{R}$ es sobreyectiva de manera similar a la que demostramos que R era sobreyectiva en el teorema anterior. Tomemos entonces $\varphi \in c_0^*$ y sea $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definido por $y_n = \varphi(e_n)$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Veamos que y pertenece a ℓ_1. Fijemos entonces $N \in \mathbb{N}$ y sean $1 \leq n_1 < \ldots < n_k \leq N$ los índices de y_n que son distintos de cero. Entonces

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} |y_n| = \sum_{i=1}^{k} |y_{n_i}| &= \sum_{i=1}^{k} \frac{|y_{n_i}|}{y_{n_i}} \varphi(e_{n_i}) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{|y_{n_i}|}{y_{n_i}} e_{n_i}\right) \\ &\leq \|\varphi\| \left\|\sum_{i=1}^{k} \frac{|y_{n_i}|}{y_{n_i}} e_{n_i}\right\|_\infty = \|\varphi\| \left(\max_{1\leq i\leq k} \left|\frac{|y_{n_i}|}{y_{n_i}}\right|\right) = \|\varphi\| .\end{aligned}$$

Haciendo $N \to \infty$ obtenemos que $\|y\|_1 \leq \|\varphi\|$. Falta ver que $Ry = \varphi$. Tomemos entonces $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$ y mostremos que

$$x = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} x_n e_n.$$

Observemos que para todo $N \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$\left\|x - \sum_{n=1}^{N} x_n e_n\right\|_\infty = \sup_{N<i<\infty} |x_n| .$$

Pero como $x \in c_0$, se sigue que $x_n \to 0$ y entonces $\left\|x - \sum_{n=1}^{N} x_n e_n\right\|_\infty \to 0$.

Ahora, notemos que como φ es continua

$$\varphi(x) = \varphi\left(\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} x_n e_n\right) = \lim_{N\to\infty} \varphi\left(\sum_{n=1}^{N} x_n e_n\right) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} x_n \varphi(e_n) = \widehat{R}y(x).$$

Luego $\widehat{R}y = \varphi$ y $\widehat{R}$ es sobreyectiva. Además, dado $y \in \ell_1$, se tiene que $\|y\|_1 \leq \|\varphi\| = \left\|\widehat{R}y\right\|$ y se concluye que $\left\|\widehat{R}y\right\| = \|y\|_1$ y así $\widehat{R}$ es una isometría. ■

Capítulo 4

Redes

Hemos visto que el estudio de continuidad y compacidad en espacios métricos se puede realizar a través de sucesiones. Sin embargo, el concepto de red, que generaliza el de sucesión, resulta ser más adecuado en espacios con una topología que no proviene de una métrica. Por tanto, desarrollaremos un poco de teoría de redes antes de seguir adelante.

Definición 4.1. Un *conjunto dirigido* es una pareja $(\Lambda, \leq)$, donde Λ es un conjunto no-vacío y $\leq$ es una relación en Λ tal que:

- **i)** Es *reflexiva*, es decir, para cada $\alpha \in \Lambda$ se tiene $\alpha \leq \alpha$.
- **ii)** Es *transitiva*, es decir, para todas $\alpha, \beta, \gamma \in \Lambda$ se cumple que si $\alpha \leq \beta$ y $\beta \leq \gamma$, entonces $\alpha \leq \gamma$.
- **iii)** Si $\alpha, \beta \in \Lambda$, entonces existe $\gamma \in \Lambda$ con $\alpha \leq \gamma$ y $\beta \leq \gamma$.

Del principio de inducción junto con **iii)** se sigue que para cualquier cantidad $n \in \mathbb{N}$ y cualquier colección finita $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \Lambda$ de tamaño n, existe $\beta \in \Lambda$ con $\beta \geq \alpha_i$ para toda $1 \leq i \leq n$. En otras palabras, cualquier conjunto finito de Λ tiene una cota superior.

Ejemplo 4.1. Sean X un espacio topológico y $x \in X$. Consideremos la colección N_x de vecindades abiertas de x. Definamos una relación $\leq$ en N_x de forma que para U, V en N_x se tenga que

$$U \leq V \text{ si, y sólo si } V \subseteq U.$$

Notemos que $N_x \neq \varnothing$ pues $X \in N_x$. Además se cumple que:

i) Para todo $U \in N_x$ se tiene que $U \subseteq U$. Así $U \leq U$.

ii) Si $U, V, W \in N_x$ cumplen que $U \leq V$ y $V \leq W$, entonces $V \subseteq U$ y $W \subseteq V$. Por tanto $W \subseteq U$ y $U \leq W$.

iii) Sean $U, V \in N_x$. Como $x \in U$ y $x \in V$ entonces $x \in U \cap V$. Además al ser U y V abiertos, también lo es $U \cap V$. Así $U \cap V \in N_x$. Dado que $U \cap V \subseteq U$ y $U \cap V \subseteq V$, se sigue que $U \leq U \cap V$ y $V \leq U \cap V$.

Por lo anterior N_x es un conjunto dirigido con esta relación. En adelante, al considerar N_x como conjunto dirigido será con este orden.

Ejemplo 4.2. Consideremos dos conjuntos dirigidos Λ y Γ. En el producto cartesiano $\Lambda \times \Gamma$ definamos la relación $\leq$ de manera que para $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2) \in \Lambda \times \Gamma$ se tenga

$$(\alpha_1, \beta_1) \leq (\alpha_2, \beta_2) \text{ si, y sólo si } \alpha_1 \leq \alpha_2 \text{ y } \beta_1 \leq \beta_2.$$

Como Γ y Λ son no vacíos, entonces $\Lambda \times \Gamma \neq \varnothing$. Notemos también que:

i) Dado $(\alpha, \beta) \in \Lambda \times \Gamma$, se cumple que $\alpha \leq \alpha$ y $\beta \leq \beta$, por lo que $(\alpha, \beta) \leq (\alpha, \beta)$.

ii) Para cualesquiera $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2)$ y $(\alpha_3, \beta_3) \in \Lambda \times \Gamma$ con $(\alpha_1, \beta_1) \leq (\alpha_2, \beta_2)$ y $(\alpha_2, \beta_2) \leq (\alpha_3, \beta_3)$ se cumple que $\alpha_1 \leq \alpha_2$, $\alpha_2 \leq \alpha_3$, $\beta_1 \leq \beta_2$ y $\beta_2 \leq \beta_3$. Por lo que $\alpha_1 \leq \alpha_3$, $\beta_1 \leq \beta_3$ y entonces se tiene que $(\alpha_1, \beta_1) \leq (\alpha_3, \beta_3)$.

iii) Sean $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2) \in \Lambda \times \Gamma$. Entonces existen $\alpha_3 \in \Lambda$, $\beta_3 \in \Gamma$ con $\alpha_1 \leq \alpha_3$, $\alpha_2 \leq \alpha_3$, $\beta_1 \leq \beta_3$ y $\beta_2 \leq \beta_3$. Así pues $(\alpha_1, \beta_1) \leq (\alpha_3, \beta_3)$ y $(\alpha_2, \beta_2) \leq (\alpha_3, \beta_3)$.

Así pues, esta relación hace de $\Lambda \times \Gamma$ un conjunto dirigido y se le llama *orden producto*.

Ejemplo 4.3. Sea I un conjunto arbitrario. Consideremos $\Lambda = \{F \subseteq I : F \text{ es finito}\}$. Sea $\leq$ la relación en Λ de manera que para $F, G \in \Lambda$

$$F \leq G \text{ si, y sólo si } F \subseteq G.$$

La relación $\subseteq$ es reflexiva y transitiva, así que $\leq$ también lo es. Además, dados $F, G \in \Lambda$, entonces $F \cup G \subseteq I$ y $F \cup G$ es finito. Por lo tanto Λ es un conjunto dirigido. En adelante, al considerar Λ como conjunto dirigido, será con este orden, al cual llamaremos *orden de inclusión*.

Definición 4.2. Una *red* en un conjunto X es una función $\rho : \Lambda \to X$, donde Λ es un conjunto dirigido. Usualmente representamos a la red ρ por $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$, donde $x_\alpha := \rho(\alpha)$ para toda $\alpha \in \Lambda$. Cuando sea necesario indicar que el dominio de una red es Λ, la llamaremos una Λ-*red*.

Ejemplo 4.4. Claramente, $\mathbb{N}$ es un conjunto dirigido con el orden usual. Ya que las sucesiones en X son funciones de $\mathbb{N}$ en X, concluimos que las sucesiones son redes.

Puesto que las redes generalizan a las sucesiones, empezaremos a introducir conceptos análogos para redes como convergencia, puntos límite y subredes. Asimismo, estudiaremos si estos conceptos siguen teniendo las propiedades correspondientes.

Ejemplo 4.5. Sean X y Y dos conjuntos y $f : X \to Y$. Si tenemos una Λ-red $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ en X, entonces $(f(x_\alpha))_{\alpha \in \Lambda}$ es una Λ-red en Y.

Definición 4.3. Sean $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ una red en un espacio topológico X y $x \in X$. La red $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ *converge* a x si para toda vecindad abierta V de x, existe $\alpha_0 \in \Lambda$ tal que $x_\alpha \in V$ para todo $\alpha \geq \alpha_0$. En caso de que $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ converja a x, indicaremos que $x_\alpha \to x$ ó $\lim\limits_{\alpha \in \Lambda} x_\alpha = x$.

Ejemplo 4.6. Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en un espacio topológico. El ejemplo 4.4 indica que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ también es una red. Así pues, tenemos el concepto de convergencia de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ como sucesión y como red. Ambos conceptos resultan ser equivalentes.

Ejemplo 4.7. Sean X un espacio topológico, $x \in X$ y N_x el conjunto dirigido de vecindades abiertas de x. Consideremos $x_U \in U$ para toda $U \in N_x$. Entonces la red $(x_U)_{U \in N_x}$ converge a x ya que si U_0 es vecindad de x, se tiene que $U_0 \in N_x$ y para $U \in N_x$ con $U \geq U_0$ se tiene que $x_U \in U \subseteq U_0$.

Proposición 4.1. *Sean X un espacio topológico, $Y \subseteq X$, $(y_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \subseteq Y$ y $y \in Y$. Entonces $(y_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ converge a y en Y si y sólo si $(y_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ converge a y en X.*

Demostración. Supongamos primero que $(y_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ converge a y en Y. Sea U una vecindad abierta de y en X. Entonces $U \cap Y$ es una vecindad abierta de y en Y. Por lo tanto, existe $\alpha_0 \in \Lambda$ tal que $y_\alpha \in U \cap Y \subseteq U$ si $\alpha \geq \alpha_0$. Por lo tanto $(y_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}}$ converge a y en X.

Ahora supongamos que $(y_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ converge a y en X. Sea $U \cap Y$ una vecindad abierta de y en Y para alguna vecindad abierta U de y en X. Entonces existe $\alpha_0 \in \Lambda$ tal que $y_\alpha \in U$ si $\alpha \geq \alpha_0$. Como $y_\alpha \in Y$ para toda $\alpha \in \Lambda$, se sigue que $y_\alpha \in U \cap Y$ si $\alpha \geq \alpha_0$. Por lo tanto $(y_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ converge a y en X. ■

Las redes no conservan todas las propiedades de las sucesiones. Por ejemplo, si X es un espacio topológico y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión que converge a $x \in X$, entonces la proposición 1.10 indica que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ es un conjunto compacto. Sin embargo, el siguiente ejemplo muestra que esto mismo no sucede con las redes.

Ejemplo 4.8. Observemos que $\mathbb{Z}$ es un conjunto dirigido y definamos la red $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \subseteq \mathbb{R}$ por

$$x_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{si } n > 0, \\ n, & \text{si } n \leq 0. \end{cases}$$

Notemos que $\lim\limits_{n\in\mathbb{Z}} x_n = 0$. Sin embargo $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ no es acotado, por lo que tampoco es compacto.

4.1. Continuidad por redes

En espacios métricos, la proposición 2.6 da una caracterización de la cerradura de un conjunto a través de los límites de las sucesiones en ese conjunto. La siguiente proposición generaliza esa caracterización a espacios topológicos usando redes.

Proposición 4.2. *Sean X un espacio topológico, $A \subseteq X$ y $x \in X$. Entonces $x \in \overline{A}$ si y sólo sí x es el límite de alguna red en A.*

Demostración. Tomemos $x \in \overline{A}$. Dado $U \in N_x$, tenemos que $U \cap A \neq \varnothing$. Así, existe $x_U \in U \cap A$. El ejemplo 4.7 muestra que la red $(x_U)_{U\in N_x}$ converge a x.

Por otro lado tomemos $x \in X$ tal que existe una red $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ en A con $x_\alpha \to x$. Sea $U \subseteq X$ una vecindad abierta de x. Entonces existe $\alpha_0 \in \Lambda$ tal que $x_\alpha \in U$ si $\alpha \geq \alpha_0$. En particular $x_{\alpha_0} \in U$. Además $x_{\alpha_0} \in A$. Por tanto $U \cap A \neq \varnothing$ y así $x \in \overline{A}$. ■

En un principio, el límite de una red convergente no tiene por qué ser único. La siguiente proposición exhibe cuándo lo es.

Proposición 4.3. *Sea X un espacio topológico. Entonces X es Hausdorff si, y sólo si el límite de toda red que converja es único.*

Demostración. Sea $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ una red en X. Supongamos que $x_\alpha \to x$ y $x_\alpha \to y$, para algunos $x, y \in X$. Sean V_x y V_y vecindades abiertas de x y y respectivamente. Como $x_\alpha \to x$ y $x_\alpha \to y$, se sigue que existen α_x y α_y en Γ tales que $x_\alpha \in V_x$ si $\alpha \geq \alpha_x$ y $x_\alpha \in V_y$ si $\alpha \geq \alpha_y$. Tomemos $\beta \in \Lambda$

con $\beta \geq \alpha_x$ y $\beta \geq \alpha_y$. Entonces $x_\beta \in V_x \cap V_y$, por lo que $V_x \cap V_y \neq \varnothing$ y dado que X es Hausdorff se sigue que $x = y$.

Ahora supongamos que X no es Hausdorff. Entonces existen $x, y \in X$ distintos tales que para toda $U \in N_x$ y toda $V \in N_y$ se tiene que $U \cap V \neq \varnothing$. Así que podemos tomar $x_{(U,V)} \in U \cap V$ para todo $(U, V) \in N_x \times N_y$. De esta manera la red $(x_{(U,V)})_{(U,V)\in N_x \times N_y}$ converge tanto a x como a y. ■

A diferencia de la proposición 2.7, la continuidad en un espacio topológico que no sea metrizable puede no coincidir con la continuidad por sucesiones. La siguiente proposición muestra que sí coincide con la continuidad por redes.

Proposición 4.4. *Sean X, Y espacios topológicos, $f : X \to Y$ y $x \in X$. Son equivalentes:*

- **i)** *f es continua en x.*
- **ii)** *Para toda red $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ tal que $x_\alpha \to x$ se cumple que $f(x_\alpha) \to f(x)$.*

Demostración. Primero supongamos que f es continua. Consideremos una red $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ tal que $x_\alpha \to x$. Sea V una vecindad abierta de $f(x)$ en Y. Como f es continua, el conjunto $f^{-1}(V)$ es una vecindad abierta de x en X. Dado que $x_\alpha \to x$, existe $\alpha_0 \in \Lambda$ tal que $x_\alpha \in f^{-1}(V)$ para $\alpha \geq \alpha_0$. Así pues, si $\alpha \geq \alpha_0$ tenemos que $f(x_\alpha) \in f(f^{-1}(V)) \subseteq V$. Por tanto $f(x_\alpha) \to f(x)$.

Ahora supongamos que f no es continua en x, de manera que existe una vecindad abierta V de $f(x)$ tal que para toda vecindad abierta $U \in N_x$ se tiene que $f(U) \subsetneq V$. Así pues, para cada $U \in N_x$ podemos tomar $x_U \in U$ de tal manera que $f(x_U) \notin V$. Consideremos la red $(x_U)_{U\in N_x}$. Por el ejemplo 4.7 se cumple que $x_U \to x$. Sin embargo, para todo $U \in N_x$ se tiene que $f(x_U) \notin V$, por lo que $f(x_U) \not\to f(x)$. ■

Como consecuencia tenemos el siguiente corolario.

Corolario 4.1. *Sean X, Y espacios topológicos, $f : X \to Y$. Son equivalentes:*

- **i)** *f es continua.*
- **ii)** *Para toda red $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ y $x \in X$ tal que $x_\alpha \to x$ se cumple que $f(x_\alpha) \to f(x)$.*

La siguiente proposición indica que la convergencia de redes en un espacio topológico es suficiente para determinar la topología en sí.

Proposición 4.5. *Sean τ_1 y τ_2 dos topologías en un conjunto no vacío X. Si la convergencia de redes en (X, τ_1) y en (X, τ_2) coinciden, entonces $\tau_1 = \tau_2$.*

Demostración. Consideremos la función

$$\begin{aligned} \mathrm{Id} : (X, \tau_1) &\to (X, \tau_2) \\ x &\mapsto x, \end{aligned}$$

Claramente Id es una biyección. Mostremos que es un homeomorfismo. Sea $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ es una red en X y $x \in X$. Por hipótesis, tenemos que $x_\alpha \to x$ en (X, τ_1) si y sólo si $\mathrm{Id}(x_\alpha) \to \mathrm{Id}(x)$ en (X, τ_2). Del corolario 4.1 se concluye que Id es un homeomorfismo, lo cual implica que $\tau_1 = \tau_2$. ■

Proposición 4.6. *Sean X y Y espacios topológicos y consideremos en $X \times Y$ la topología producto. Sean $(x_\alpha, y_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ una red en $X \times Y$ y $(x,y) \in X \times Y$, entonces $(x_\alpha, y_\alpha) \to (x,y)$ si, y sólo si $x_\alpha \to x$ y $y_\alpha \to y$.*

Demostración. Primero supongamos que $(x_\alpha, y_\alpha) \to (x,y)$. Sea $\pi_X : X \times Y \to X$ la proyección, es decir, $\pi_X(x,y) = x$ para toda $(x,y) \in X \times Y$. Como esta proyección es continua, por el corolario 4.1 tenemos que $\pi_X(x_\alpha, y_\alpha) \to \pi_X(x,y)$. Entonces $x_\alpha \to x$. Análogamente, $y_\alpha \to y$.

Ahora supongamos que $x_\alpha \to x$ y $y_\alpha \to y$. Sea W una vecindad abierta básica de (x,y). Entonces existen U abierto de X y V abierto de Y con $W = U \times V$. Como $(x,y) \in U \times V$ resulta que U es una vecindad abierta de x y V es una vecindad abierta de y. De esto se sigue que existen $\alpha_1, \alpha_2 \in \Lambda$ tal que $x_\alpha \in U$ para $\alpha \geq \alpha_1$ y $y_\alpha \in V$ para $\alpha \geq \alpha_2$. Tomemos $\widehat{\alpha} \in \Lambda$ tal que $\widehat{\alpha} \geq \alpha_1$ y $\widehat{\alpha} \geq \alpha_2$. Así que para $\alpha \geq \widehat{\alpha}$ se tiene que $x_\alpha \in U$ y $y_\alpha \in V$, de donde $(x_\alpha, y_\alpha) \in U \times V = W$. Concluimos de esto que $(x_\alpha, y_\alpha) \to (x,y)$. ■

El resultado anterior se puede extender al producto arbitrario de espacios topológicos como lo indica la siguiente proposición.

Proposición 4.7. *Sean I un conjunto no vacío y X_i un espacio topológico para cada $i \in I$. Sean $((x_{\alpha,i})_{i \in I})_{\alpha \in \Lambda}$ una red en $\prod_{i \in I} X_i$ y $(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i$, entonces $(x_{\alpha,i})_{i \in I} \to (x_i)_{i \in I}$ en $\prod_{i \in I} X_i$ si, y sólo si $x_{\alpha,j} \to x_j$ en X_j para toda $j \in I$.*

Demostración. Supongamos primero que $(x_{\alpha,i})_{i \in I} \to (x_i)_{i \in I}$ en $\prod_{i \in I} X_i$. Tomemos $j \in I$. Como π_j es continua se tiene que $\pi_j((x_{\alpha,i})_{i \in I}) \to \pi_j((x_i)_{i \in I})$ en X_j. Esto es $x_{\alpha,j} \to x_j$.

Ahora supongamos que $x_{\alpha,j} \to x_j$ en X_j para toda $j \in I$. Sea U un abierto básico de $(x_i)_{i \in I}$. Entonces existen $k \in \mathbb{K}$, $i_1, \ldots, i_k \in I$ y $U_1, \ldots, U_k$ abiertos en $X_{i_1}, \ldots, X_{i_k}$ respectivamente tales que

$$U = \bigcap_{j=1}^{k} \pi_{i_j}^{-1}(U_j).$$

Fijemos $j \in \{1, \ldots, k\}$ por un momento. Como $(x_i)_{i \in I} \in U$, entonces $(x_i)_{i \in I} \in \pi_{i_j}^{-1}(U_j)$, de donde $x_{i_j} = \pi_{i_j}((x_i)_{i \in I}) \in U_j$. Esto dice que U_j es una vecindad abierta de x_{i_j}. Como $x_{\alpha,i_j} \to x_{i_j}$ en X_{i_j}, entonces existe $\alpha_j \in \Lambda$ tal que si $\alpha \geq \alpha_j$ entonces $x_{\alpha,i_j} \in U_j$, o bien,

$$(x_{\alpha,i})_{i \in I} \in \pi_{i_j}^{-1}(x_{\alpha,i_j}) \subseteq \pi_{i_j}^{-1}(U_j).$$

Tomemos $\widehat{\alpha} \in \Lambda$ de tal manera que $\widehat{\alpha} \geq \alpha_j$ para toda $j \in \{1, \ldots, k\}$. De esta forma

$$(x_{\alpha,i})_{i \in I} \in \bigcap_{j=1}^{k} \pi_{i_j}^{-1}(U_j) = U.$$

Concluimos de esto que $(x_{\alpha,i})_{i \in I} \to (x_i)_{i \in I}$. ■

Observación 4.1. Sea V un espacio vectorial, entonces $F(\Lambda, V)$ es un espacio vectorial con la suma y producto por escalares definidas puntualmente. De esto podemos considerar la suma de Λ-redes $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ y $(y_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ en V como

$$(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} + (y_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} = (x_\alpha + y_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}.$$

Además el producto por el escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ de la Λ-red $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ es

$$\lambda(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} = (\lambda x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}.$$

Con esta suma y producto resulta que el espacio de Λ-redes en el espacio vectorial V vuelve a ser un espacio vectorial.

Lema 4.1. ***(del sándwich)*** *Sean X un espacio topológico y f, g y h funciones reales definidas en X tales que $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para todo $x \in X$. Si para una red $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ en X se satisface que*

$$\lim_{\alpha\in\Lambda} g(x_\alpha) = \lim_{\alpha\in\Lambda} h(x_\alpha) = L,$$

entonces $\lim_{\alpha\in\Lambda} f(x_\alpha) = L$.

Demostración. Sea U una vecindad abierta de L. Tomemos $\varepsilon > 0$ tal que $(L-\varepsilon, L+\varepsilon) \subseteq U$. Como este intervalo es una vecindad abierta de L, por hipótesis existen $\alpha_1, \alpha_2 \in \Lambda$ tales que

$$g(x_\alpha) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon) \text{ si } \alpha \geq \alpha_1 \quad \text{ y } \quad h(x_\alpha) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon) \text{ si } \alpha \geq \alpha_2.$$

Al tomar $\alpha_0 \in \Lambda$ tal que $\alpha_0 \geq \alpha_1$ y $\alpha_0 \geq \alpha_2$, se cumple que $g(x_\alpha), h(x_\alpha) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$, de donde

$$L-\varepsilon < g(x_\alpha) \leq f(x_\alpha) \leq h(x_\alpha) < L+\varepsilon, \text{ si } \alpha \geq \alpha_0.$$

Por lo tanto $f(x_\alpha) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon) \subseteq U$, si $\alpha \geq \alpha_0$. ■

4.2. Compacidad por redes

En espacios métricos, el teorema 2.2 da una caracterización de los conjunto conjuntos compactos a través de las subsucesiones de las sucesiones en ese conjunto. Para generalizar esa caracterización a espacios topológicos definimos a continuación el concepto de subred.

Definición 4.4. Una red $(y_\beta)_{\beta\in\Gamma}$ en X es *subred* de la red $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ en X si existe una función $\varphi : \Gamma \to \Lambda$ tal que

- **i)** Para todo $\beta \in \Gamma$, se tiene $y_\beta = x_{\varphi(\beta)}$.
- **ii)** Es *monótona*, es decir, para cada $\beta_1, \beta_2 \in \Gamma$ con $\beta_1 \leq \beta_2$ se cumple que $\varphi(\beta_1) \leq \varphi(\beta_2)$.
- **iii)** Es *final*, es decir, si $\alpha \in \Lambda$, entonces existe $\beta \in \Gamma$ tal que $\varphi(\beta) \geq \alpha$.

Ejemplo 4.9. En el ejemplo 4.4 se mencionó que las sucesiones son redes. Notemos que toda subsucesión de una sucesión también es una subred. Sin embargo, como veremos a continuación, las subredes de las sucesiones vistas como redes no coinciden con sus subsucesiones.

Consideremos la sucesión $x_n = n$ para $n \in \mathbb{N}$. Tomamos $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ con

$$\varphi(k) = \begin{cases} n & \text{si } k = 2n \text{ con } n \in \mathbb{N}; \\ n & \text{si } k = 2n-1 \text{ con } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Al notar que φ verifica **ii)** y **iii)** de la definición anterior, podemos deducir que la sucesión $(x_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}} = (1,1,2,2,3,3,\ldots)$ es una subred, pero no una subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Al igual que el lema 1.8 asegura que las subsucesiones de las sucesiones convergentes convergen, el siguiente lema asegura lo correspondiente para el caso de las redes.

Lema 4.2. *Sean X un espacio topológico y $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \subseteq X$ una red que converge a $x \in X$. Entonces cualquier subred de $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ converge a x.*

Demostración. Sea $(y_\beta)_{\beta\in\Gamma}$ una subred de $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$, para algún conjunto dirigido Γ y una función monótona y final $\varphi : \Gamma \to \Lambda$. Sea U una vecindad abierta de x. Puesto que $x_\alpha \to x$, existe $\alpha_0 \in \Lambda$ tal que $x_\alpha \in U$ si $\alpha \geq \alpha_0$. Como φ es final, existe $\beta_0 \in \Lambda$ tal que $\varphi(\beta_0) \geq \alpha_0$. Así pues, si $\beta \geq \beta_0$, entonces $\varphi(\beta) \geq \varphi(\beta_0) \geq \alpha_0$. Por lo tanto $y_\beta = x_{\varphi(\beta)} \in U$. Así $y_\beta \to x$. ■

Definición 4.5. Sean X un espacio topológico y $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ una red en X. Decimos que $x \in X$ es un *punto límite* de $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ si para toda vecindad abierta V de x y para toda $\alpha \in \Lambda$ existe $\beta \geq \alpha$ tal que $x_\beta \in V$.

Observemos que para una red existen los conceptos de límite y punto límite. Hay que tener siempre en cuenta que son conceptos diferentes. Uno hace referencia al punto al cual puede converger la red y el otro a los puntos a los que pueden converger sus subredes, como lo muestra el siguiente lema.

Lema 4.3. *Si X es un espacio topológico, entonces $x \in X$ es un punto límite de una red $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ en X si, y sólo si x es el límite alguna subred de $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$.*

Demostración. Primero supongamos que $x \in X$ es el límite de alguna subred $(y_\beta)_{\beta\in\Gamma}$ de $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$. Entonces existe $\varphi : \Gamma \to \Lambda$ monótona y final con $y_\beta = x_{\varphi(\beta)}$. Sea V un abierto de x y $\alpha \in \Lambda$. Como $y_\beta \to x$, existe $\beta_0 \in \Gamma$ tal que $y_\beta \in V$ para $\beta \geq \beta_0$. Como φ es final existe $\beta_1 \in \Gamma$ con $\alpha \leq \varphi(\beta_1)$. Debido a que β_0 y β_1 son fijos, existe $\beta \in \Gamma$ tal que $\beta \geq \beta_0$ y $\beta \geq \beta_1$. Tenemos que $x_{\varphi(\beta)} = y_\beta \in V$ pues $\beta \geq \beta_0$. Dado que φ es monótona, se sigue que $\alpha \leq \varphi(\beta_1) \leq \varphi(\beta)$. Así que x es un punto límite de $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$.

Ahora supongamos que x es un punto límite de $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$. Sea N_x la colección de vecindades abiertas de x. Definamos el conjunto

$$B = \{(V, \alpha) : V \in N_x, x_\alpha \in V\} \subseteq N_x \times \Lambda.$$

Consideremos el orden producto de $N_x \times \Lambda$. Al restringir ese orden a B claramente seguirá siendo reflexivo y transitivo. Tomemos $(V, \alpha_0), (U, \beta_0) \in B$. Notemos que $V \cap U \in N_x$. Consideremos $\gamma_0 \in \Lambda$ con $\gamma_0 \geq \alpha_0$ y $\gamma_0 \geq \beta_0$. Como x es punto límite de $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ existe $\gamma \geq \gamma_0$ con $x_\gamma \in V \cap U$. Así que $(V \cap U, \gamma) \geq (V, \alpha), (V \cap U, \gamma) \geq (U, \beta)$ con $(V \cap U, \gamma) \in B$. Es decir, B es un conjunto dirigido con este orden.

Introduzcamos $\varphi : B \to \Lambda$ de tal manera que $\varphi(V, \alpha) = \alpha$ para $(V, \alpha) \in B$. Veamos que φ es monótona y final:

i) Sean $(V, \alpha) \leq (U, \beta)$ en B. Entonces $\alpha \leq \beta$ por lo que $\varphi(V, \alpha) \leq \varphi(U, \beta)$.

ii) Sea $\alpha \in \Lambda$. Como $X \in N_x$ y $x_\alpha \in X$, se tiene que $(X, \alpha) \in B$ y $\varphi(X, \alpha) \geq \alpha$.

Lo anterior indica que $(x_{\varphi(V,\alpha)})_{(V,\alpha)\in B}$ es una subred de $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$. Demostremos que su limite es x. Sea U una vecindad abierta de x y fijemos $\alpha_0 \in \Lambda$. Consideremos $(V,\alpha) \in B$ con $(V,\alpha) \geq (U,\alpha_0)$. Entonces $x_{\varphi(V,\alpha)} x_\alpha \in V \subseteq U$. Es decir, $x_{\varphi(V,\alpha)} \to x$. ■

En el teorema 2.2 se estableció que en espacios métricos la compacidad coincide con la compacidad por sucesiones. Esto no es cierto cuando trabajamos con espacios topológicos. Sin embargo, la siguiente proposición muestra que aún en este caso la compacidad sí coincide con la compacidad por redes.

Teorema 4.1. *Sea X un espacio topológico. Son equivalentes:*

- **i)** *X es compacto.*
- **ii)** *Toda red en X tiene una subred convergente.*

Demostración. Supongamos primero que X es compacto y consideremos una red $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ en X. Para cada $\alpha \in \Lambda$ definamos el conjunto $C_\alpha := \overline{\{x_\beta : \beta \geq \alpha\}}$. Supongamos que $\bigcap_{\alpha\in\Lambda} C_\alpha = \varnothing$. Entonces $\bigcup_{\alpha\in\Lambda}(X \setminus C_\alpha) = X$. Así pues, $\{X \setminus C_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es una cubierta abierta de X. Por ser X compacto, existen $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \Lambda$ con $X = \bigcup_{i=1}^n (X \setminus C_{\alpha_i})$. Así que $\bigcap_{i=1}^n C_{\alpha_i} = \varnothing$. Tomemos $\gamma \in \Lambda$ con $\gamma \geq \alpha_i$ para todo $1 \leq i \leq n$. De esto se sigue que $x_\gamma \in C_\gamma \subseteq C_{\alpha_i}$. Lo que indica que $x_\gamma \in \bigcap_{i=1}^n C_{\alpha_i}$. Esto es una contradicción, por lo que $\bigcap_{\alpha\in\Lambda} C_\alpha \neq \varnothing$.

Tomemos $x \in \bigcap_{\alpha\in\Lambda} C_\alpha$. Veamos que x es un punto límite de $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$. Sea V una vecindad abierta de x y $\alpha \in \Lambda$. Como $x \in C_\alpha$, se tiene que $\{x_\beta : \beta \geq \alpha\} \cap V \neq \varnothing$. Así que existe $\beta \geq \alpha$ con $x_\beta \in V$. Del lema 4.3 se sigue que existe una subred de $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ que converge a x.

Supongamos ahora que X no es compacto. Existe entonces una cubierta abierta $\{V_i\}_{i\in I}$ de X tal que no tiene una subcubierta finita. Sea Λ la colección de subconjuntos finitos de I con el orden de inclusión. Para cada $F \in \Lambda$ la subcolección finita $\{V_i : i \in F\}$ no cubre a X. Por lo que $\bigcup_{i\in F} V_i \neq X$. Así que existe $x_F \in X$ tal que $x_F \notin V_i$ para todo $i \in F$. Consideremos la red $(x_F)_{F\in\Lambda}$. Demostremos que esta red no tiene subredes que converjan. Por el lema 4.3 esto último equivale a demostrar que $(x_F)_{F\in\Lambda}$ no tiene puntos límite. Sea $x \in X$. Entonces $x \in V_{i_0}$ para algún $i_0 \in I$. Además, para $F \in \Lambda$ tal que $\{i_0\} \subseteq F$ se tiene que $x_F \notin V_{i_0}$. Esto indica que x no es punto límite de $(x_F)_{F\in\Lambda}$. ■

4.3. Teorema de Tychonoff

Si tenemos un par de espacios topológicos compactos, es sencillo verificar que su producto sigue siendo compacto. Uno de los teoremas más importantes en la topología es el teorema de Tychonoff y generaliza este resultado estableciendo que el producto arbitrario de espacios compactos es compacto. En seguida introduciremos algunos conceptos y proposiciones necesarias para la demostración de tal teorema.

Definición 4.6. Sea A un conjunto no vacío. Una relación $\leq$ en A es un *orden parcial* si

- **i)** Es *reflexiva*, es decir, para cada $a \in A$ se tiene $a \leq a$.
- **ii)** Es *transitiva*, es decir, para $a, b, c \in A$ se cumple que si $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $a \leq c$.
- **iii)** Es *antisimétrica*, es decir, si para $a, b \in A$, se cumple que $a \leq b$ y $b \leq a$ entonces $a = b$.

En este caso, a la pareja $(A, \leq)$ se le denomina *conjunto parcialmente ordenado*. Si $(A, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado y además cumple que

- **iv)** Es *total*, es decir, para todos $a, b \in A$ se satisface que $a \leq b$ o que $b \leq a$,

diremos que $(A, \leq)$ es un *conjunto totalmente ordenado*.

El lema de Zorn, enunciado a continuación, garantiza la existencia de elementos maximales en algunos conjuntos parcialmente ordenados. Este lema se considera en muchas circunstancias como un axioma por su equivalencia con el axioma de elección.

Lema 4.4 (Zorn). *Sea A un conjunto no vacío. Si todo subconjunto no vacío y totalmente ordenado de A tiene un elemento máximo, entonces A tiene un elemento maximal.*

Ejemplo 4.10. Sean A y B conjuntos. Denotemos por $\mathcal{G}(A, B)$ a la familia de funciones $f : D \to B$ tales que $D \subseteq A$. Claramente, la función vacía $f_\varnothing : \varnothing \to B$ está en $\mathcal{G}(A, B)$, por lo que este es no vacío. En $\mathcal{G}(A, B)$ definamos la relación $\leq$ de manera que para $f, g \in \mathcal{G}(A, B)$ se tenga que

$$f \leq g \ \text{ si, y sólo si } \ \operatorname{Dom} f \subseteq \operatorname{Dom} g \text{ y } g\big|_{\operatorname{Dom} f} = f,$$

donde $\operatorname{Dom} f$ denota el dominio de la función f.

Notemos que:

i) Al tomar $f \in \mathcal{G}(A, B)$, claramente se tiene que $\operatorname{Dom} f \subseteq \operatorname{Dom} f$ y $f\big|_{\operatorname{Dom} f} = f$.

ii) Dados $f, g, h \in \mathcal{G}(A, B)$ tales que $f \leq g$ y $g \leq h$. Como $\operatorname{Dom} f \subseteq \operatorname{Dom} g$ y $\operatorname{Dom} g \subseteq \operatorname{Dom} h$, se sigue que $\operatorname{Dom} f \subseteq \operatorname{Dom} h$. Además, puesto que $f = g\big|_{\operatorname{Dom} f}$ y $g = h\big|_{\operatorname{Dom} g}$, se tiene que

$$f = g\big|_{\operatorname{Dom} f} = \left(h\big|_{\operatorname{Dom} g}\right)\Big|_{\operatorname{Dom} f} = h\big|_{\operatorname{Dom} f}.$$

Luego $f \leq h$.

iii) Sean $f, g \in \mathcal{G}(A, B)$ tales que $f \leq g$ y $g \leq f$. Entonces $\operatorname{Dom} f \subseteq \operatorname{Dom} g$ y $\operatorname{Dom} g \subseteq \operatorname{Dom} f$. Así que $\operatorname{Dom} f = \operatorname{Dom} g$ y puesto que $f = g\big|_{\operatorname{Dom} f} = g\big|_{\operatorname{Dom} g} = g$, resulta que $f = g$.

Por lo tanto $\leq$ es un orden parcial en $\mathcal{G}(A, B)$. A este le llamamos *orden de extensión de funciones*.

Definición 4.7. Sean A y B conjuntos no vacíos. Decimos que un subconjunto no vacío $\mathcal{C}$ de $\mathcal{G}(A, B)$ es *extendible* si

$$\text{para todas } f, g \in \mathcal{C}, \text{ se cumple que } f = g \text{ en } \operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g. \tag{4.1}$$

Sea $\mathcal{C}$ un subconjunto extendible de $\mathcal{G}(A, B)$ y $D = \bigcup_{f \in \mathcal{C}} \operatorname{Dom} f$. Denotamos por $\bigcup_{f \in \mathcal{C}} f$ a la función $g : A \to B$ construida de la siguiente forma. Dado $a \in A$, existe $f \in \mathcal{C}$ tal que $a \in \operatorname{Dom} f$, de manera que definimos $g(a) = f(a)$.

Notemos que la propiedad (4.1) indica que g está bien definida en todo A.

Definición 4.8. Sean I un conjunto no vacío y X_i un espacio topológico para cada $i \in I$.

- **i)** Un *miembro parcialmente definido* de $\prod_{i \in I} X_i$ es cualquier elemento g en $\prod_{j \in J} X_j$ para algún $J \subseteq I$ no vacío.

- **ii)** Dada una red $(f_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ en $\prod_{i\in I} X_i$, decimos que un miembro parcialmente definido g de $\prod_{i\in I} X_i$ con $\operatorname{Dom} g = J$ es un *punto límite parcial* de $(f_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$, si g es un punto límite de la red $(f_\alpha\big|_J)_{\alpha\in\Lambda}$ en $\prod_{j\in J} X_j$.

Para evitar ambigüedades al trabajar con las proyecciones, denotaremos por $\pi_{J,i}$ a la proyección de dominio $\prod_{j\in J} X_j$ tal que $\pi_{J,i}(f) = f(i)$ para algún $J \subseteq I$ y $i \in J$.

Lema 4.5. *Sean I un conjunto no vacío, X_i un espacio topológico para cada $i \in I$ y $(f_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ una red en $\prod_{i\in I} X_i$. Si para algún $j \in I$ se tiene que $x \in X_j$ es un punto límite de $(f_\alpha(j))_{\alpha\in\Lambda}$, entonces $g : \{j\} \to \bigcup_{i\in I} X_i$, definida por $g(j) = x$, es un punto límite parcial de $(f_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$.*

Demostración. Tomemos $\pi^{-1}_{\{j\},j}(U)$ una vecindad básica de g para alguna a vecindad abierta U de x en X_j. Como x es punto límite de $(f_\alpha(j))_{\alpha\in\Lambda}$, existe $\alpha_0 \in \lambda$ tal que si $\alpha \geq \alpha_0$, entonces $\pi_{\{j\},j}(f_\alpha\big|_{\{j\}}) = f_\alpha(j) \in U$, es decir $f_\alpha\big|_{\{j\}} \in \pi^{-1}_{\{j\},j}(U)$. Así que g es punto límite parcial de $(f_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$. ■

Proposición 4.8. *Sean I un conjunto no vacío, X_i un espacio topológico para todo $i \in I$, $(f_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ una red en $\prod_{i\in I} X_i$, y $\mathcal{C}$ una familia no vacía y extendible de puntos límite parciales de $(f_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$. Entonces $\bigcup_{g\in\mathcal{C}} g$ es un punto límite parcial de $(f_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$.*

Demostración. Sean $h = \bigcup_{g\in\mathcal{C}} g$ y $J = \operatorname{Dom} h$. Consideremos una vecindad abierta $\bigcap_{k=1}^{n} \pi^{-1}_{J,j_k}(U_k)$ de h para algunos $n \in \mathbb{N}$, $j_1, \ldots, j_n \in J$ y $U_1, \ldots, U_n$ abiertos en $X_{j_1}, \ldots, X_{j_n}$ respectivamente. Fijemos $k \in \{1, \ldots, n\}$ por un momento. Sea $g_k \in \mathcal{C}$ tal que $j_k \in J_k$, donde $J_k = \operatorname{Dom} g_k$. Dado que $h \in \pi^{-1}_{J,j_k}(U_k)$, se sigue que

$$\pi_{J_k,j_k}(g_k) = g_k(j_k) = h(j_k) = \pi_{J,j_k}(h) \in U_k.$$

De esto resulta que $g_k \in \pi^{-1}_{J_k,j_k}(U_k)$ y como g_k es punto límite de $(f_\alpha\big|_{J_k})_{\alpha\in\Lambda}$, existe $\alpha_k \in \Lambda$ tal que $f_\alpha\big|_{J_k} \in \pi^{-1}_{J_k,j_k}(U_k)$ siempre que $\alpha \geq \alpha_k$. Es decir, si $\alpha \geq \alpha_k$, entonces

$$f_\alpha\big|_J(j_k) = f_\alpha\big|_{J_k}(j_k) = \pi_{J_k,j_k}\left(f_\alpha\big|_{J_k}\right) \in U_k,$$

o bien, $f_\alpha\big|_J \in \pi^{-1}_{J,j_k}(U_k)$ para $\alpha \geq \alpha_k$. Tomando $\beta \in \Lambda$ tal que $\beta \geq \alpha_k$ para toda $k \in \{1, \ldots, n\}$, se obtiene que $f_\alpha\big|_J \in \bigcap_{k=1}^{n} \pi^{-1}_{J,j_k}(U_k)$ y por lo tanto h es punto límite de $(f_\alpha\big|_J)_{\alpha\in\Lambda}$. ■

Teorema 4.2 (Tychonoff). *Sean I un conjunto no vacío y X_i un espacio topológico para cada $i \in I$. Si cada X_i es un espacio compacto, entonces el espacio $\prod_{i\in I} X_i$ es compacto.*

Demostración. Sea $(f_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ una red en $X = \prod_{i\in I} X_i$. Demostremos que $(f_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ tiene un punto límite. De esta manera por el teorema 4.1 y el lema 4.3 se concluiría que $\prod_{i\in I} X_i$ es un espacio compacto.

Sea $\mathcal{Q}$ la colección de puntos límite parciales de $(f_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$. Entonces $\mathcal{Q}$ es un conjunto parcialmente ordenado con el orden de extensión de funciones. Veamos que $\mathcal{Q}$ es no-vacío. Fijemos $i_0 \in I$ cualquiera. Entonces $(f_\alpha(i_0))_{\alpha\in\Lambda}$ es un red en X_{i_0}. Como X_{i_0} es compacto, $(f_\alpha(i_0))_{\alpha\in\Lambda}$ tiene alguna subred que converge a algún $p \in X_{i_0}$. Por el lema 4.3, se sigue que p es un punto límite de $(f_\alpha(i_0))_{\alpha\in\Lambda}$. Definamos $g : \{i_0\} \to \bigcup_{i\in I} X_i$ por $g(i_0) = p$. El lema 4.5 indica que g es punto límite parcial de $(f_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ y así $\mathcal{Q} \neq \varnothing$.

Sea $\mathcal{C}$ un subconjunto totalmente ordenado no vacío de $\mathcal{Q}$. Tomemos $g_1, g_2 \in \mathcal{C}$. Como $\mathcal{C}$ es totalmente ordenado, podemos suponer sin perdida de generalidad de $g_1 \leq g_2$, por lo que $\operatorname{Dom} g_1 \subseteq \operatorname{Dom} g_2$ y $g_1 = g_2\big|_{\operatorname{Dom} g_1}$. Así que $g_1 = g_2$ en $\operatorname{Dom} g_1 = \operatorname{Dom} g_1 \cap \operatorname{Dom} g_2$. Esto indica que $\mathcal{C}$ es extendible y así podemos definir $g_0 = \bigcup_{g \in \mathcal{C}} g$. La proposición 4.8 asegura que g_0 es un punto límite parcial de $(f_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$, de manera que $g_0 \in \mathcal{Q}$. Claramente $g_0 \geq g$ para toda $g \in \mathcal{C}$. Así que $\mathcal{C}$ tiene un elemento máximo. Por el lema de Zorn, se sigue que $\mathcal{Q}$ tiene un elemento maximal g de dominio $J \subseteq I$.

Nuestro último paso es probar que $J = I$. Supongamos que $J \subsetneq I$, de forma que existe $j \in I \setminus J$. Como X_j es compacto y $(f_\alpha(j))_{\alpha\in\Lambda}$ es una red en X_j, del teorema 4.1 y del lema 4.3 se sigue que existe un punto límite $q \in X_j$ de $(f_\alpha(j))_{\alpha\in\Lambda}$. El lema 4.5 indica que la función $h : \{j\} \to \bigcup_{i\in I} X_i$ definida por $h(j) = q$ es un punto límite parcial de $(f_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$. Notemos que $\{g, h\}$ es una familia de puntos límite parciales de $(f_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ que es extendible, pues $\operatorname{Dom} g \cap \operatorname{Dom} h = J \cap \{j\} = \varnothing$. Luego, la proposición 4.8 indica que $g \cup h$ es un punto límite parcial de $(f_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$. Pero esto contradice que g sea maximal en $\mathcal{Q}$, pues $g \cup h \in \mathcal{Q}$, $g \leq g \cup h$ y $g \neq g \cup h$. Así que $J = I$, por lo que g es un punto límite de $(f_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$. ■

Ejemplo 4.11. El espacio producto $F(A, \mathbb{K})$ Sea A un conjunto no vacío y consideremos el espacio producto $F(A, \mathbb{K})$. Tomemos una colección de reales positivos indexados por A, $\{c_a > 0 : a \in A\}$. Como cada bola cerrada $B_{c_a} \subseteq \mathbb{K}$ es compacta, del teorema de Tychonoff se sigue que el conjunto

$$\prod_{a\in A} B_{c_a}(0) = \{f \in F(A, \mathbb{K}) : |f(a)| \leq c_a, \forall\, a \in A\}$$

es compacto bajo la topología producto en $F(A, \mathbb{K})$.

Capítulo 5

Espacios vectoriales topológicos

La relación entre la estructura algebraica y la topología de un espacio normado no es propia de estos espacios. En este capítulo introduciremos los espacios vectoriales topológicos que son los que mantienen este vínculo entre álgebra y topología y que precisamente son la generalización de los espacios normados.

Supongamos que τ es una topología de un espacio vectorial E sobre $\mathbb{K}$ tal que:

- **i)** E es Hausdorff.
- **ii)** Las operaciones de espacio vectorial $+ : E \times E \to E$ y $\cdot : \mathbb{K} \times E \to E$ son continuas. Naturalmente, en $E \times E$ y en $\mathbb{K} \times E$ consideramos las correspondientes topologías producto.

En este caso decimos que τ es una *topología vectorial* y que E es un *espacio vectorial topológico*.

Ejemplo 5.1. Veamos que $\mathbb{K}$ es un espacio vectorial topológico. Como $\mathbb{K}$ con $|\cdot|$ es un espacio normado, entonces es Hausdorff. Mostremos ahora que las funciones $+ : \mathbb{K}\times\mathbb{K} \to \mathbb{K}$ y $\cdot : \mathbb{K}\times\mathbb{K} \to \mathbb{K}$ son continuas.

En el lema 3.5 se verificó que la topología de $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$ está inducida por la norma $\|\cdot\|_2$, por lo que para ver que $+$ y $\cdot$ son continuas, basta mostrar que son continuas por sucesiones. Así pues, sea $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$ que converge a $(x, y) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$. Como las sucesiones son redes, la proposición 4.6 indica que $x_n \to x$ y $y_n \to y$. Luego, la proposición 3.2 asegura que $+(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_n+y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $\cdot(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_n\cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergen a $+(x, y) = x+y$ y $\cdot(x, y) = x\cdot y$ respectivamente.

Lema 5.1. *Sea E un espacio vectorial topológico. Para cada vecindad abierta U del 0, existe una vecindad abierta V de 0 tal que*

$$V + V \subseteq U.$$

Demostración. Sea U una vecindad abierta del 0. Como E es un espacio vectorial topológico, la función $+ : E \times E \to E, (x, y) \mapsto x + y$ es continua en el $(0, 0)$. Esto nos dice que para U, existe una vecindad abierta W del $(0, 0)$ tal que $+(W) \subseteq U$. Existe entonces un básico $V_1 \times V_2$ en $E \times E$ con V_1, V_2 vecindades abiertas del 0 tal que $V_1 \times V_2 \subseteq W$. Entonces $V := V_1 \cap V_2$ es una vecindad abierta del 0 que cumple que $V \times V \subseteq W$. De esto se sigue que

$$V + V = +(V \times V) \subseteq +(W) \subseteq U.$$

■

Definición 5.1. Sea V un espacio vectorial.

- **i)** Dado $x \in V$, la *traslación* por x es la transformación
$$\begin{aligned} T_x : V &\to V \\ y &\mapsto x + y. \end{aligned}$$
- **ii)** Dado $\lambda \in \mathbb{K}$, la *dilatación* por λ es la transformación
$$\begin{aligned} D_\lambda : V &\to V \\ y &\mapsto \lambda y. \end{aligned}$$

Proposición 5.1. *Sean E un espacio vectorial topológico, $x \in E$ y $\lambda \neq 0$. Entonces T_x y D_λ son homeomorfismos.*

Demostración. Claramente $T_{-x} = T_x^{-1}$ y $D_{\lambda^{-1}} = D_\lambda^{-1}$, de manera que T_x y D_λ son biyectivas. Definamos
$$\begin{aligned} e_x : E &\to E \times E \\ y &\mapsto (x, y) \end{aligned}$$
Notemos que para $y \in E$ se tiene que $(\pi_1 \circ e_x)(y) = x$ y $(\pi_2 \circ e_x)(y) = y$. Esto indica que $\pi_1 \circ e_x$ es constante y $\pi_2 \circ e_x$ es la identidad en X y por lo tanto ambas son continuas. Por la proposición 1.11 se tiene que e_x es continua. De manera que $T_x = + \circ e_x$ es continua. Como la x fue arbitraria, entonces T_{-x} también es continua.

De manera similar definimos
$$\begin{aligned} e_\lambda : E &\to \mathbb{K} \times E \\ y &\mapsto (\lambda, y) \end{aligned}$$
Notemos que para $y \in E$ se tiene que $(\pi_1 \circ e_\lambda)(y) = \lambda$ y $(\pi_2 \circ e_\lambda)(y) = y$. Esto indica que $\pi_1 \circ e_\lambda$ es constante y $\pi_2 \circ e_\lambda$ es la identidad en E y por lo tanto ambas son continuas. Por la proposición 1.11 se tiene que e_λ es continua. De manera que $D_\lambda = \cdot \circ e_\lambda$ es continua. Como λ fue arbitraria, entonces $D_{\lambda^{-1}}$ también es continua. ∎

Observación 5.1. Como consecuencia de la proposición anterior, si U es un abierto en un espacio vectorial topológico E y $x \in X$, entonces
$$x + U := \{x + y : y \in U\} = T_x(U)$$
también es abierto. Resulta así que V es vecindad abierta de x si, y sólo si, $V = x + U$, donde U es vecindad abierta de 0.

Si ademas consideramos $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces
$$\lambda \cdot U := \{\lambda \cdot y : y \in U\} = D_\lambda(U)$$
también es abierto. Resulta así que U es vecindad abierta de x si y sólo si, λU es vecindad abierta de λx.

Proposición 5.2. *Sean E, F espacios vectoriales topológicos. Si $T : E \to F$ es lineal y continua en el cero, entonces T es continua.*

Demostración. Sea $x \in E$. Veremos que T es continua en x. Sea U una vecindad abierta de Tx de manera que $Tx \in U$. Entonces $U_0 := U - Tx$ es abierto en F y además $0 \in U_0$. Como T es continua en 0, existe un abierto V_0 del cero tal que $Ty \in U_0$ si $y \in V_0$. Así que $x \in V_0 + x$ y $V_0 + x$ es una vecindad abierta de x. Si $y \in V_0 + x$, entonces $y - x \in V_0$, de manera que $Ty - Tx = T(y - x) \in U_0 = U - Tx$, de donde $Ty \in U$. Así que T es continua en x. ∎

Proposición 5.3. *Sean E un espacio vectorial topológico, $(\lambda_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \in \mathbb{K}$ una red que converge en $\mathbb{K}$; y $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ y $(y_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ redes que convergen en E. Entonces $(\lambda_\alpha x_\alpha + y_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ converge y*

$$\lim_{\alpha\in\Lambda}(\lambda_\alpha x_\alpha + y_\alpha) = \left(\lim_{\alpha\in\Lambda} \lambda_\alpha\right)\left(\lim_{\alpha\in\Lambda} x_\alpha\right) + \left(\lim_{\alpha\in\Lambda} y_\alpha\right).$$

Demostración. Sea $\sigma : E \times E \to E$ la función suma, es decir, $\sigma(x, y) = x + y$ para toda $(x, y) \in E \times E$. Supongamos que $x_\alpha \to x$ y $y_\alpha \to y$ para algunos $x, y \in E$. De esto y por la proposición 4.6 se sigue que $(x_\alpha, y_\alpha) \to (x, y)$. Como σ es continua, por el corolario 4.1 tenemos que $\sigma(x_\alpha, y_\alpha) \to \sigma(x, y)$. Es decir,

$$\lim_{\alpha\in\Lambda}(x_\alpha + y_\alpha) = \left(\lim_{\alpha\in\Lambda} x_\alpha\right) + \left(\lim_{\alpha\in\Lambda} y_\alpha\right).$$

Consideremos ahora $\pi : \mathbb{K} \times E \to E$ la función producto por un escalar, es decir $\pi(\lambda, x) = \lambda x$ para toda $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E$. Supongamos que $x_\alpha \to x$ y $\lambda_\alpha \to \lambda$ para algunos $x \in E, \lambda \in \mathbb{K}$. Por la proposición 4.6 tenemos que $(\lambda_\alpha, x_\alpha) \to (\lambda, x)$. Como π es continua, por el corolario 4.1 tenemos que $\pi(\lambda_\alpha, x_\alpha) \to \sigma(\lambda, x)$. Es decir,

$$\lim_{\alpha\in\Lambda}(\lambda_\alpha x_\alpha) = \left(\lim_{\alpha\in\Lambda} \lambda_\alpha\right)\left(\lim_{\alpha\in\Lambda} x_\alpha\right).$$

∎

Lema 5.2. *Sea X un espacio topológico y E un espacio vectorial topológico. Si $f : X \to E$, $g : X \to E$ y $h : X \to \mathbb{K}$ son continuas, entonces $f + g$ y $h \cdot f$ son continuas.*

Demostración. Como f y g son continuas, el corolario 1.2 indica que $f \times g : X \to E \times E$ es continua. Al ser continua la suma $+ : E \times E \to E$, resulta que $f + g = + \circ (f \times g) : X \to E$ también es continua.

Ahora, al ser h y f funciones continuas, tenemos que $h \times f : X \to \mathbb{K} \times E$ es continua. Como el producto por escalares $\cdot : \mathbb{K} \times E \to E$ es una función continua, se sigue entonces que $h \cdot f = \cdot \circ (h \times f) : X \to E$ es continua. ∎

Dado un espacio vectorial topológico E, al espacio de operadores $\varphi : E \to \mathbb{K}$ lineales y continuos lo llamamos *espacio dual* de E y lo denotamos por $(E, \tau)^*$ o simplemente por E^*. A tales operadores se les denomina *funcionales lineales*.

Corolario 5.1. *Sea E un espacio vectorial topológico, entonces E^* es un espacio vectorial.*

Demostración. Como $E^* \subseteq F(E, \mathbb{K})$ y $F(E, \mathbb{K})$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, basta probar que E^* es un subespacio de $F(E, \mathbb{K})$. Así pues, consideremos $\varphi, \psi \in E^*$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, de manera que φ y ψ son lineales y continuas. Por el lema 5.2 se sigue que $\varphi - \lambda\psi$ es lineal y continua. Así $\varphi - \lambda\psi \in E^*$ y E^* es un espacio vectorial. ∎

En espacios topológicos no existe un concepto similar al de una sucesión de Cauchy en espacios métricos. Sin embargo, en un espacio vectorial topológico sí se puede definir y se puede generalizar incluso a redes, como se muestra en seguida.

Definición 5.2. Sea E un espacio vectorial topológico. Una *red de Cauchy* en E es una red $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \subseteq E$ tal que para toda vecindad abierta U del cero existe $\alpha \in \Lambda$ tal que $x_{\alpha_1} - x_{\alpha_2} \in U$ siempre que $\alpha_1, \alpha_2 \geq \alpha$.

Resulta ahora de interés saber si esta definición satisface algunas propiedades que las sucesiones de Cauchy en espacios métricos sí cumplen. Así lo muestran los siguientes resultados.

Lema 5.3. *Sea E un espacio vectorial topológico. Si una red en E es convergente, entonces es de Cauchy.*

Demostración. Sea $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ una red en E tal que converge a $x \in E$. Sea U una vecindad abierta del cero. Por el lema 5.1 existe una vecindad abierta V del cero tal que $V + V \subseteq U$. Como V es vecindad abierta del cero, entonces $V + x$ es vecindad abierta de x y por tanto existe $\beta_1 \in \Lambda$ tal que

$$x_\beta \in V + x, \text{ si } \beta \geq \beta_1. \tag{5.1}$$

Por otro lado, $-V$ también es una vecindad abierta del 0. Así que $-V + x$ es una vecindad abierta de x y así existe $\beta_2 \in \Lambda$ tal que

$$x_\beta \in -V + x, \text{ si } \beta \geq \beta_2. \tag{5.2}$$

Al tomar $\alpha \in \Lambda$ con $\alpha \geq \beta_1$ y $\alpha \geq \beta_2$, junto con (5.1) y (5.2) se tiene que si α_1 y $\alpha_2 \in \Lambda$ cumplen que $\alpha_1 \geq \alpha$ y $\alpha_2 \geq \alpha$, entonces $x_{\alpha_1} \in V + x$ y $x_{\alpha_2} \in -V + x$. De esto se sigue que $x_{\alpha_1} - x \in V$ y $x_{\alpha_2} - x \in -V$ y así

$$x_{\alpha_1} - x_{\alpha_2} = (x_{\alpha_1} - x) + (x - x_{\alpha_2}) \in V + V \subseteq U.$$

■

Por otro lado, en cualquier espacio vectorial topológico no se cumple que toda red de Cauchy sea convergente. Es por esto que, en correspondencia con lo que conocemos en espacios métricos, tenemos la siguiente definición.

Definición 5.3. Un espacio vectorial topológico E es *completo* si toda red de Cauchy en E converge.

Lema 5.4. *Sean E un espacio vectorial topológico y $F \subseteq E$ un subespacio vectorial. Si F es completo, entonces F es cerrado en E.*

Demostración. Sea $x \in \overline{F}$. La proposición 4.2 establece que existe una red $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \subseteq F$ tal que $x_\alpha \to x$. Como $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ es convergente, el lema 5.3 indica que $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ es de Cauchy y al ser F completo, se sigue que la red converge en F. Al ser E Hausdorff, se sigue que $x \in F$ y así F es cerrado. ■

Lema 5.5. *Sean E y F espacios vectoriales topológicos. Si $T : E \to F$ es una función lineal y continua, entonces preserva redes de Cauchy.*

Demostración. Sean $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ una red de Cauchy en E y $(T(x_\alpha))_{\alpha\in\Lambda}$ una red en F. Consideremos una vecindad abierta del cero U en F. Ya que T es continua se tiene que $T^{-1}(U)$ es una vecindad abierta del cero en E, por lo que existe $\alpha_0 \in \Lambda$ tal que $x_{\alpha_1} - x_{\alpha_2} \in T^{-1}(U)$ para $\alpha_1, \alpha_2 \geq \alpha_0$. Así pues, por la linealidad de T, $T(x_{\alpha_1}) - T(x_{\alpha_2}) = T(x_{\alpha_1} - x_{\alpha_2}) \in U$ si $\alpha_1, \alpha_2 \geq \alpha_0$. Esto indica que $(T(x_\alpha))_{\alpha\in\Lambda}$ es una red de Cauchy en E. ■

Lema 5.6. *Sean E y F espacios vectoriales topológicos. Si $T : E \to F$ es un homeomorfismo lineal y E es completo, entonces F es completo.*

Demostración. Sea $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ una red de Cauchy en F. Al ser la función T^{-1} lineal y continua, el lema 5.5 indica que $(T^{-1}(x_\alpha))_{\alpha\in\Lambda}$ es una red de Cauchy en E. Como E es completo, la red $(T^{-1}(x_\alpha))_{\alpha\in\Lambda}$ converge a algún $x \in E$. Puesto que T es continua, el corolario 4.1 indica que $x_\alpha \to T(x)$. ■

Definición 5.4. Sea E un espacio vectorial topológico. Un conjunto $B \subseteq E$ es *acotado* si para toda vecindad abierta del cero U, existe $r > 0$ tal que $B \subseteq sU$ para todo $s \geq r$.

Lema 5.7. *Sean X un espacio normado y $B \subseteq X$. Entonces B es acotado como espacio normado si, y sólo si B es acotado como espacio vectorial topológico.*

Demostración. Supongamos primero que B es acotado como espacio normado. Entonces existe $t > 0$ tal que $\|x\| < t$ para todo $x \in B$, es decir, $B \subseteq V_t(0)$. Sea U una vecindad abierta del cero. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $V_\varepsilon(0) \subseteq U$. Tomemos $r = \frac{t}{\varepsilon}$ y sea $s \geq r$, de manera que $t \leq \varepsilon s$ y por lo tanto $B \subseteq V_t(0) \subseteq V_{s\varepsilon}(0) = sV_\varepsilon(0) \subseteq sU$. Luego, B es acotado como espacio vectorial topológico.

Ahora supongamos que B es acotado como espacio vectorial topológico. Puesto que $V_1(0)$ es una vecindad abierta del cero, existe $r > 0$ tal que $B \subseteq rV_1(0) = V_r(0)$. Así pues $\|x\| < r$ para todo $x \in B$ y B es acotado como espacio normado. ■

Para que un conjunto en un espacio topológico sea compacto se ha mostrado que es necesario que sea cerrado. En el caso de espacios métricos, también se necesita que el conjunto sea acotado. La siguiente proposición muestra que pasa lo mismo en espacios vectoriales topológicos.

Proposición 5.4. *Sea E un espacio vectorial topológico. Si $K \subseteq E$ es compacto, entonces K es cerrado y acotado.*

Demostración. Supongamos que $K \subseteq E$ es compacto. El corolario 1.1 indica que K es cerrado. Tomemos una vecindad abierta del cero U. Consideremos las dilataciones $\{nU\}_{n\in\mathbb{N}}$ y mostremos que forman una cubierta de K. Sea $x \in K$, al ser E un espacio vectorial topológico, la función $f : \mathbb{K} \to Y, \lambda \mapsto \lambda x$ es continua. Como U es vecindad abierta del cero, $f^{-1}(U)$ es una vecindad abierta del cero en $\mathbb{K}$. Luego, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{m} \in f^{-1}(U)$ para todo $m \geq n$, de donde $f(\frac{1}{m}) = \frac{1}{m}x \in U$. Así que

$$x \in mU \text{ si } m \geq n. \tag{5.3}$$

Así, $\{nU\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una cubierta abierta de K. Dado que K es compacto, existen $l \in \mathbb{N}, n_1, \ldots, n_l \in \mathbb{N}$ tales que $\{n_1U, \ldots, n_lU\}$ cubre a K. Así pues tomemos $r = \text{máx}(n_1, \ldots, n_l)$. Sea $s \geq r$ y consideremos $x \in K$. Entonces existe $1 \leq i \leq l$ tal que $x \in n_iU$ y como $n_i \leq r \leq s$, de (5.3) se sigue que $x \in sU$. Luego $K \subseteq sU$ y por lo tanto K es acotado. ■

Corolario 5.2. *Sean E un espacio vectorial topológico y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$ una sucesión. Si $x_n \to x$ para algún $x \in E$, entonces $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ es acotado.*

Demostración. Supongamos que $x_n \to x$ para algún $x \in E$. Por la proposición 1.10 tenemos que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ es un conjunto compacto. Luego, de la proposición 5.4 resulta que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ es acotado. ■

5.1. Espacio vectorial topológico generado por una familia de seminormas

Un método para construir espacios vectoriales topológicos, el cual utilizaremos después para obtener la topología débil de un espacio de normado X y la topología débil* en X^*, es utilizar el concepto de la topología generada por una familia de seminormas en un espacio vectorial.

Definición 5.5. Sea X un espacio vectorial. Una *seminorma* es una función $p : X \to [0,\infty)$ tal que es subaditiva y es homogénea.

Ejemplo 5.2. Sea X un espacio vectorial y $\varphi : X \to \mathbb{K}$ un funcional lineal. Entonces $p = |\varphi|$ es una seminorma, pues $p(x) = |\varphi(x)| \geq 0$ para toda $x \in X$ y

i) Si $x, y \in X$, entonces $p(x+y) = |\varphi(x+y)| = |\varphi(x)+\varphi(y)| \leq |\varphi(x)| + |\varphi(y)| = p(x) + p(y)$.

ii) Si $\lambda \in \mathbb{K}$ y $x \in X$, entonces $p(\lambda x) = |\varphi(\lambda)x| = |\lambda\varphi(x)| = |\lambda|\,|\varphi(x)| = |\lambda|\,p(x)$.

Proposición 5.5. *Sean X un espacio vectorial y p una seminorma. Entonces*

- **i)** $p(0) = 0$.
- **ii)** *Para $x, y \in X$ se tiene que $|p(x) - p(y)| \leq p(x-y)$.*

Demostración.

i) Observemos que $p(0) = p(0 \cdot 0) = |0|\,p(0) = 0$.

ii) Por la subaditividad de p tenemos que $p(x) = p(x-y+y) \leq p(x-y) + p(y)$. De esto resulta que $p(x) - p(y) \leq p(x-y)$. Análogamente, $p(y) - p(x) \leq p(y-x) = p(x-y)$ y entonces $|p(x) - p(y)| \leq p(x-y)$.

■

Definición 5.6. Sean X un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $\mathcal{F}$ una familia de seminormas en X. Diremos que $\mathcal{F}$ *separa puntos* en X, si para cada $x \in X \setminus \{0\}$ existe $p \in \mathcal{F}$ tal que $p(x) \neq 0$.

Ejemplo 5.3. Sea A un conjunto no-vacío. Entonces $Y := F(A,\mathbb{K})$ es un espacio vectorial. Para cada $a \in A$, sea $\delta_a : Y \to \mathbb{K}$ la función evaluación.

Fijemos $a \in A$ y notemos que:

i) Sean $f, g \in Y$, entonces

$$\delta_a(f+g) = f(a) + g(a) = \delta_a(f) + \delta_a(g).$$

ii) Sean $f \in Y$, $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces

$$\delta_a(\lambda f) = \lambda f(a) = \lambda \delta_a(f).$$

iii) Sea $f \in Y$, $f \neq 0$, entonces existe $a \in A$ con $|\delta_a|(f) = |f(a)| \neq 0$.

Tenemos que **i)** y **ii)** indican δ_a es un funcional lineal y el ejemplo 5.2 indica que $\mathcal{F} = \{|\delta_a| : a \in A\}$ es una familia de seminormas en Y. Por **iii)** tenemos que esta familia separa puntos en Y.

Sea $\mathcal{T}$ la colección de topologías de un espacio vectorial X en las que toda seminorma en $\mathcal{F}$ es continua. Claramente, la topología discreta de X está en $\mathcal{T}$ y así esta colección es no-vacía y entonces la intersección de todas las topologías en $\mathcal{T}$ vuelve a ser una topología de X.

Definición 5.7. Sea $\mathcal{F}$ una familia no vacía de seminormas en X. La *topología* inducida por $\mathcal{F}$ en X es

$$\sigma(X, \mathcal{F}) := \bigcap_{\tau \in \mathcal{T}} \tau.$$

La siguiente proposición proporciona una base de la topología $\sigma(X, \mathcal{F})$.

Proposición 5.6. *Sea $\mathcal{F}$ una familia no vacía de seminormas en un espacio vectorial X. La familia de conjuntos*

$$U_{x,p_1,p_2,\ldots,p_k,\varepsilon} := \bigcap_{i=1}^{k} \{y \in X : p_i(x-y) < \varepsilon\},\ x \in X, k \in \mathbb{N}, p_1, p_2, \ldots, p_k \in \mathcal{F}\ y\ \varepsilon > 0;$$

forma una base de la topología $\sigma(X, \mathcal{F})$.

Demostración. Sea $\mathcal{B}$ la colección de conjuntos de la forma $U_{x,p_1,\ldots,p_k,\varepsilon}$, para algunos $x \in X$, $k \in \mathbb{N}$, $p_1, \ldots, p_k \in \mathcal{F}$, $\varepsilon > 0$. Veamos que $\mathcal{B}$ es una base.

Dado $x \in X$, tomemos cualquier $p \in \mathcal{F}$. Entonces $x \in U_{x,p,1}$. Por lo tanto $\mathcal{B}$ es una cubierta de X.

Tomemos $U_{x,p_1,\ldots,p_k,\varepsilon}$, $U_{y,s_1,\ldots,s_l,\delta} \in \mathcal{B}$ para algunos $x, y \in X$, $k, l \in \mathbb{N}$, $p_1, \ldots, p_k, s_1, \ldots, s_l \in \mathcal{F}$ y algunos $\varepsilon, \delta > 0$. Sea $z_0 \in U_{x,p_1,\ldots,p_k,\varepsilon} \cap U_{y,s_1,\ldots,s_l,\delta}$. Definamos

$$\varepsilon_i := \varepsilon - p_i(x - z_0) > 0 \text{ para } i = 1, \ldots, k;$$
$$\delta_j := \delta - s_j(y - z_0) > 0 \text{ para } j = 1, \ldots, l.$$

Consideremos $r = \min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k, \delta_1, \ldots, \delta_l\} > 0$ y tomemos $U_{z_0,p_1,\ldots,p_k,s_1,\ldots,s_l,r} \in \mathcal{B}$ y z dentro de este conjunto. Dado $1 \leq i \leq k$, se tiene

$$p_i(z_0 - z) < r \leq \varepsilon_i = \varepsilon - p_i(x - z_0).$$

Por la subaditividad de p_i se tiene que

$$p_i(x - z) = p_i((x - z_0) + (z_0 - z)) \leq p_i(x - z_0) + p_i(z_0 - z) < \varepsilon.$$

Así que $z \in U_{x,p_i,\varepsilon}$. De manera análoga tenemos que $z \in U_{y,s_j,\delta}$ para $1 \leq j \leq l$, por lo que

$$z_0 \in U_{z_0,p_1,\ldots,p_k,s_1,\ldots,s_l,r} \subseteq U_{x,p_1,\ldots,p_k,\varepsilon} \cap U_{y,s_1,\ldots,s_l,\delta}.$$

Esto demuestra que $\mathcal{B}$ es una base. Denotemos por $\tau(\mathcal{B})$ la topología generada por $\mathcal{B}$. Falta probar que $\tau(\mathcal{B})$ coincide con $\sigma(X, \mathcal{F})$.

Tomemos $U_{x,p_1,\ldots,p_k,\varepsilon} \in \mathcal{B}$ para algunos $x \in X$, $k \in \mathbb{N}$, $p_1, \ldots, p_k \in \mathcal{F}$, $\varepsilon > 0$. Sea $1 \leq i \leq k$, tenemos que $V_\varepsilon(p_i(x)) := \{\lambda \in \mathbb{R} : |\lambda - p_i(x)| < \varepsilon\}$ es un abierto en $\mathbb{K}$. Como $p_i : X \to \mathbb{R}$ es continua bajo la topología $\sigma(X, \mathcal{F})$ en su dominio y $t : X \to X$ con $t(y) = x - y$ también es continua, se sigue que $p_i \circ t$ también es continua, al igual que la función $f_i : X \to \mathbb{R}$ definida por

$$f_i(y) = p_i(x) - p_i(x - y).$$

Así que

$$\begin{aligned} f_i^{-1}(V_\varepsilon(p_i(x))) &= \{y \in X : f_i(y) \in V_\varepsilon(p_i(x))\} \\ &= \{y \in X : |f_i(y) - p_i(x)| < \varepsilon\} \\ &= \{y \in X : |p_i(x) - p_i(x - y) - p_i(x)| < \varepsilon\} \\ &= \{y \in X : p_i(x - y) < \varepsilon\} = U_{x,p_i,\varepsilon} \end{aligned}$$

es abierto en $\sigma(X, \mathcal{F})$. Por lo tanto $U_{x,p_1,\ldots,p_k,\varepsilon} = \bigcap_{i=1}^k U_{x,p_i,\varepsilon}$ es abierto en $\sigma(X, \mathcal{F})$. Esto indica que $\mathcal{B} \subseteq \sigma(X, \mathcal{F})$, por lo que $\tau(\mathcal{B}) \subseteq \sigma(X, \mathcal{F})$.

Demostremos que con la topología $\tau(\mathcal{B})$ en X, todas las seminormas $p : X \to \mathbb{R}$ en $\mathcal{F}$ son continuas. Así pues, tomemos $p \in \mathcal{F}$. Sea $x \in X$ cualquiera y $V_\varepsilon(p(x))$ una vecindad de $p(x)$ en $\mathbb{R}$. Notemos que $U_{x,p,\varepsilon}$ es una vecindad abierta de x y además, si $y \in U_{x,p,\varepsilon}$, entonces $p(x-y) < \varepsilon$. Por la proposición 5.5 se sigue que $|p(x) - p(y)| < \varepsilon$ y así $p(U_{x,p,\varepsilon}) \subseteq V_\varepsilon(p(x))$. Como $U_{x,p,\varepsilon}$ es abierto en $\sigma(X, \mathcal{F})$, se sigue que p es continua.

Esto indica que $\tau(\mathcal{B}) \in \mathcal{T}$. Por la minimalidad de $\sigma(X, \mathcal{F})$ y dado que $\tau(\mathcal{B}) \subseteq \sigma(X, \mathcal{F})$ se concluye que $\tau(\mathcal{B}) = \sigma(X, \mathcal{F})$ y así $\mathcal{B}$ es base de $\sigma(X, \mathcal{F})$. ■

Proposición 5.7. *Sea $\mathcal{F}$ una familia no vacía de seminormas en un espacio vectorial X. Si U es un abierto en $\sigma(X, \mathcal{F})$ y $x \in U$, entonces existen $k \in \mathbb{N}$, $p_1, \ldots, p_k \in \mathcal{F}$ y $\varepsilon > 0$ tales que $U_{x,p_1,\ldots,p_k,\varepsilon} \subseteq U$.*

Demostración. Por la proposición 5.6 existen $y \in X$, $k \in \mathbb{N}$, $p_1, \ldots, p_k \in \mathcal{F}$ y $\delta > 0$ tal que $x \in U_{y,p_1,\ldots,p_k,\delta} \subseteq U$. Entonces $p_i(x - y) < \delta$ para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$, de forma que podemos considerar

$$\varepsilon := \min_{1 \leq i \leq k} (\delta - p_i(x - y)) > 0.$$

Tomemos $z \in U_{x,p_1,\ldots,p_k,\varepsilon}$. Entonces para $1 \leq i \leq n$ tenemos que $p_i(z - x) < \varepsilon \leq \delta - p_i(x - y)$. Por la desigualdad del triángulo $p_i(z - y) \leq p_i(z - x) + p_i(x - y) < \delta$. Así pues, $z \in U_{y,p_1,\ldots,p_k,\delta}$ y $U_{x,p_1,\ldots,p_k,\varepsilon} \subseteq U_{y,p_1,\ldots,p_k,\delta} \subseteq U$. ■

Si la red $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} \subseteq X$ converge en la topología $\sigma(X, \mathcal{F})$, su límite lo denotamos por $\sigma(X, \mathcal{F})$-$\lim_{\alpha \in \Lambda} x_\alpha$. En el caso particular de una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ denotamos el límite de la sucesión por $\sigma(X, \mathcal{F})$-$\lim_{n \to \infty} x_n$. La siguiente proposición indica una caracterización de las sucesiones convergentes bajo la topología $\sigma(X, \mathcal{F})$.

Proposición 5.8. *Sean X un espacio vectorial, $\mathcal{F}$ una familia no vacía de seminormas en X, $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ una red en X y $x \in X$. Entonces*

$$\sigma(X,\mathcal{F})\text{-}\lim_{\alpha\in\Lambda} x_\alpha = x \text{ si, y sólo si } \lim_{\alpha\in\Lambda} p(x_\alpha - x) = 0 \text{ para toda } p \in \mathcal{F}.$$

Demostración. Primero supongamos que $\sigma(X,\mathcal{F})$-$\lim_{\alpha\in\Lambda} x_\alpha = x$. Sea $p \in \mathcal{F}$ y $\varepsilon > 0$. Dado que $U_{x,p,\varepsilon}$ es una vecindad abierta de x, existe $\alpha_0 \in \Lambda$ tal que $x_\alpha \in U_{x,p,\varepsilon}$ para cualquier $\alpha \geq \alpha_0$. Así pues, suponiendo $\alpha \geq \alpha_0$ tendríamos que $0 \leq p(x_\alpha - x) < \varepsilon$. Es decir, $p(x_\alpha - x) \to 0$.

Ahora supongamos que para toda $p \in \mathcal{F}$ se tiene que $p(x_\alpha - x) \to 0$. Sea $U_{y,p_1,\ldots,p_k,\varepsilon}$ un básico de la topología débil que contiene a x para algunos $k \in \mathbb{N}, p_1, \ldots, p_k \in \mathcal{F}$ y $\varepsilon > 0$.

Fijemos $1 \leq i \leq k$ por un momento. Tenemos que $p_i(x - y) < \varepsilon$, de manera que podemos definir $\varepsilon_i := \varepsilon - p_i(x-y) > 0$. Como $p_i(x_\alpha - x) \to 0$, podemos tomar $\alpha_i \in \Lambda$ de tal manera que si $\alpha \geq \alpha_i$, entonces $p_i(x_\alpha - x) < \varepsilon_i$.

Definamos ahora $\widehat{\alpha}$ de tal manera que $\widehat{\alpha} \geq \alpha_i$ para todo $1 \leq i \leq k$. Así tendríamos que si $\alpha \geq \widehat{\alpha}$, entonces para $1 \leq i \leq k$ se tiene que $p_i(x_\alpha - x) < \varepsilon_i = \varepsilon - p_i(x-y)$, de donde

$$p_i(x_\alpha - y) \leq p_i(x_\alpha - x) + p_i(x - y) < \varepsilon.$$

Esto indica que para todo $\alpha \geq \widehat{\alpha}$ se tiene que $x_\alpha \in U_{y,p_1,\ldots,p_k,\varepsilon}$ y así $\sigma(X,\mathcal{F})$-$\lim_{\alpha\in\Lambda} x_\alpha = x$. ■

Corolario 5.3. *Sean X un espacio vectorial, $\mathcal{F}$ una familia de seminormas, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ una sucesión en X y $x \in X$. Entonces $\sigma(X,\mathcal{F})\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ si, y sólo si $\lim\limits_{n\to\infty} p(x_n - x) = 0$ para toda $p \in \mathcal{F}$.*

Sean X un espacio vectorial y Y un subespacio. Si $p : X \to \mathbb{R}$ es una seminormas en X, entonces su restricción $p\big|_Y : Y \to \mathbb{R}$ es una seminorma en Y. Esto motiva la siguiente proposición.

Proposición 5.9. *Sean X un espacio vectorial y Y un subespacio. Si $\mathcal{F}$ es una familia no vacía de seminormas en X y $\mathcal{G}$ sus restricciones a Y, entonces $\sigma(Y,\mathcal{G})$ y la topología subespacio $\sigma(X,\mathcal{F})$ en Y coinciden.*

Demostración. Consideremos una red $(y_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ en Y y $y \in Y$. Tenemos que $y_\alpha \to y$ en $\sigma(Y,\mathcal{G})$ si, y sólo si $p\big|_Y(y_\alpha - y) \to 0$ para toda $p\big|_Y \in \mathcal{G}$, que es lo mismo que $p(y_\alpha - y) \to 0$ para toda $p \in \mathcal{F}$. Esto es equivalente a que $y_\alpha \to y$ en $\sigma(X,\mathcal{F})$. De la proposición 4.1 se sigue que esto último equivale a que $y_\alpha \to y$ en $\sigma(X,\mathcal{F})_Y$. Por la proposición 4.5 se concluye que $\sigma(Y,\mathcal{G}) = \sigma(X,\mathcal{F})_Y$. ■

Teorema 5.1. *Si X es un espacio vectorial y $\mathcal{F}$ una familia de seminormas que separa puntos en X, entonces X con la topología inducida por $\mathcal{F}$ es un espacio vectorial topológico.*

Demostración. Sean $x_1, x_2 \in X$ distintos. Como $x_1 - x_2 \neq 0$ y $\mathcal{F}$ separa puntos de X, existe $p \in \mathcal{F}$ tal que $p(x_1 - x_2) \neq 0$. Sea $\varepsilon = \frac{p(x_1-x_2)}{2}$ y definamos los abiertos en X

$$V := U_{x_1,p,\varepsilon} \text{ y } W := U_{x_2,p.\varepsilon}.$$

Claramente, $x_1 \in V$ y $x_2 \in W$. Además al suponer que existe $z \in V \cap W$, llegamos a que $p(x_1 - z) < \varepsilon$ y $p(x_2 - z) < \varepsilon$, de donde

$$p(x_1 - x_2) \leq p(x_1 - z) + p(z - x_2) < 2\varepsilon = p(x_1 - x_2).$$

Lo cual es una contradicción. Así que $V \cap W = \varnothing$ y $\sigma(X, \mathcal{F})$ es Hausdorff.

Sean $\sigma : X \times X \to X$ la función suma. Es decir, $\sigma(x, y) = x + y$ para $(x, y) \in X \times X$. Probaremos la continuidad de σ usando el corolario 4.1. Tomemos una red $(x_\alpha, y_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ en $X \times X$ y $(x, y) \in X \times X$ tal que $(x_\alpha, y_\alpha) \to (x, y)$. La proposición 4.6 indica que $\sigma(X, \mathcal{F})\text{-}\lim_{\alpha\in\Lambda} x_\alpha = x$ y $\sigma(X, \mathcal{F})\text{-}\lim_{\alpha\in\Lambda} y_\alpha = y$. Por la proposición 5.8 tenemos que para toda $p \in \mathcal{F}$ se tiene que $p(x_\alpha - x) \to 0$ y $p(y_\alpha - y) \to 0$. Por la subaditividad de p tenemos que

$$0 \leq p(x_\alpha + y_\alpha - x - y) \leq p(x_\alpha - x) + p(y_\alpha - y).$$

Por la proposición 5.3 y puesto que $\mathbb{R}$ es un espacio vectorial topológico se sigue que

$$\lim_{\alpha\in\Lambda}[p(x_\alpha - x) + p(y_\alpha - y)] = \lim_{\alpha\in\Lambda} p(x_\alpha - x) + \lim_{\alpha\in\Lambda} p(y_\alpha - y) = 0.$$

Entonces, por el lema del sándwich tenemos que $\lim\limits_{\alpha\in\Lambda} p(x_\alpha + y_\alpha - x - y) = 0$ para toda $p \in \mathcal{F}$.

Por la proposición 5.8 obtenemos que

$$\sigma(X, \mathcal{F})\text{-}\lim_{\alpha\in\Lambda} \sigma(x_\alpha, y_\alpha) = \sigma(X, \mathcal{F})\text{-}\lim_{\alpha\in\Lambda}(x_\alpha + y_\alpha) = x + y = \sigma(x, y).$$

Así que σ es continua.

Consideremos ahora la función producto por un escalar $\pi : \mathbb{K} \times X \to X$. Es decir, $\pi(\lambda, x) = \lambda x$ para $(\lambda, x) \in \mathbb{K}\times X$. Veamos que esta es continua. Tomemos una red $(\lambda_\alpha, x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ en $\mathbb{K}\times X$ y $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times X$ tal que $(\lambda_\alpha, x_\alpha) \to (\lambda, x)$. La proposición 4.6 indica que $\lambda_\alpha \to \lambda$ y $\sigma(X, \mathcal{F})\text{-}\lim_{\alpha\in\Lambda} x_\alpha = x$. Por la proposición 5.8 tenemos que para toda $p \in \mathcal{F}$ se tiene que $p(x_\alpha - x) \to 0$. Por la subaditividad de p se sigue que

$$0 \leq p(x_\alpha) \leq p(x_\alpha - x) + p(x).$$

Por el lema del sándwich y la proposición 5.3 se tiene que

$$0 = \lim_{\alpha\in\Lambda} 0 \leq \lim_{\alpha\in\Lambda} p(x_\alpha) \leq \lim_{\alpha\in\Lambda}[p(x_\alpha - x) + p(x)] = \lim_{\alpha\in\Lambda} p(x_\alpha - x) + \lim_{\alpha\in\Lambda} p(x) = p(x).$$

Además, por la subaditividad de p tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &\leq p(\lambda_\alpha x_\alpha - \lambda x) \leq p(\lambda_\alpha x_\alpha - \lambda x_\alpha) + p(\lambda x_\alpha - \lambda x) \\ &= p((\lambda_\alpha - \lambda)x_\alpha) + p(\lambda(x_\alpha - x)) = |\lambda_\alpha - \lambda|\, p(x_\alpha) + |\lambda|\, p(x_\alpha - x). \end{aligned}$$

Por la proposición 5.3 se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha\in\Lambda}[|\lambda_\alpha - \lambda|\, p(x_\alpha) + |\lambda|\, p(x_\alpha - x)] &= \left(\lim_{\alpha\in\Lambda} |\lambda_\alpha - \lambda|\right)\left(\lim_{\alpha\in\Lambda} p(x_\alpha)\right) + \left(\lim_{\alpha\in\Lambda} |\lambda|\, p(x_\alpha - x)\right) \\ &\leq (0)\, p(x) + |\lambda|\, 0 = 0. \end{aligned}$$

Por el lema del sándwich se tiene entonces que $\lim_{\alpha\in\Lambda} p(\lambda_\alpha x_\alpha - \lambda x) = 0$ para toda $p \in \mathcal{F}$. Por la proposición 5.8 obtenemos que

$$\sigma(X, \mathcal{F})\text{-}\lim_{\alpha\in\Lambda} \pi(\lambda_\alpha, x_\alpha) = \sigma(X, \mathcal{F})\text{-}\lim_{\alpha\in\Lambda} \lambda_\alpha x_\alpha = \lambda x = \pi(\lambda, x).$$

Así que π es continua. ■

Corolario 5.4. *Si X es un espacio normado, entonces es un espacio vectorial topológico.*

Demostración. Denotemos por τ la topología original de X. Por definición, $\|\cdot\|$ es una seminorma en X. Además $\{\|\cdot\|\}$ separa puntos, pues dado $x \in X$ con $x \neq 0$, se tiene que $\|x\| \neq 0$. Demostraremos que $\tau = \sigma(X, \{\|\cdot\|\})$. Dado que el teorema 5.1 indica que X es un espacio vectorial topológico con la topología $\sigma(X, \{\|\cdot\|\})$, esto implicará que la topología original es una topología vectorial.

Así pues, para mostrar que $\tau = \sigma(X, \{\|\cdot\|\})$ mostraremos que tienen una base común. Sea $\mathcal{B}_1$ la base de la topología original. Esto es

$$\mathcal{B}_1 = \{V_r(x) : r > 0, x \in X\}.$$

Denotemos por $\mathcal{B}_2$ la base de la topología $\sigma(X, \{\|\cdot\|\})$, es decir,

$$\mathcal{B}_2 = \{U_{x,\|\cdot\|,\varepsilon} : \varepsilon > 0, x \in X\}.$$

Ya que

$$U_{x,\|\cdot\|,\varepsilon} = \{y \in X : \|\cdot\|(x-y) < \varepsilon\} = \{y \in X : \|x-y\| < \varepsilon\} = V_\varepsilon(x),$$

concluimos que $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2$. ■

Proposición 5.10. *Si X es un espacio de Banach, entonces es un espacio vectorial topológico completo.*

Demostración. El corolario 5.4 indica que X es un espacio vectorial topológico. Falta probar que las redes de Cauchy en X convergen. Sea entonces $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ una red de Cauchy en X.

Construyamos una sucesión $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en Λ de la siguiente manera. Sea $\alpha_1 \in \Lambda$ cualquiera. Supongamos que ya hemos definido α_{n-1} para algún $n \geq 2$. Como $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ es de Cauchy, existe $\beta \in \Lambda$ tal que $x_{\beta_1} - x_{\beta_2} \in V_{\frac{1}{n}}(0)$ para $\beta_1, \beta_2 \geq \beta$. Así pues, definamos α_n de tal manera que $\alpha_n \geq \alpha_{n-1}$ y $\alpha_n \geq \beta$.

Una vez construida $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, notemos que $(x_{\alpha_n})_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en X que cumple que

$$\|x_{\alpha_n} - x_\beta\| < \frac{1}{n}, \text{ si } \beta \geq \alpha_n. \tag{5.4}$$

Tomemos $\varepsilon > 0$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < \varepsilon$. De esta manera tenemos que si $n, m \geq N$, entonces $x_{\alpha_n} - x_{\alpha_m} \in V_{\frac{1}{N}}(0)$ y así $\|x_{\alpha_n} - x_{\alpha_m}\| < \varepsilon$. Esto indica que $(x_{\alpha_n})_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy.

Ya que X es completo, $(x_{\alpha_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge a algún $x \in X$. Demostremos que $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ converge también a x.

Sea U una vecindad del cero en X. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ con $V_{\frac{1}{N}}(0) \subseteq U$. Como $x_{\alpha_n} \to x$, podemos tomar $M \geq N$ tal que

$$\|x_{\alpha_n} - x\| < \frac{1}{2N} \text{ para } n \geq M. \tag{5.5}$$

Definamos $\beta = \alpha_{2M}$. Por (5.4) y (5.5), al tomar $\gamma \geq \beta$ se tiene que

$$\|x_\gamma - x_{\alpha_{2M}}\| < \frac{1}{2N} \text{ y } \|x_{\alpha_{2M}} - x\| < \frac{1}{2N}.$$

Por la desigualdad del triángulo $\|x_\gamma - x\| < \frac{1}{N}$ y así $x_\gamma - x \in U$. Es decir, $x_\alpha \to x$. ■

Como resultado de lo anterior, el espacio $\mathbb{K}^n$ como espacio vectorial topológico es completo.

Dado que la desigualdad del triángulo tiene una estrecha relación con la convexidad, se motiva las siguiente definición.

Definición 5.8. Sea X un espacio topológico. Si existe una base de X que consiste de conjuntos convexos, entonces decimos que X es *localmente convexo.*

Proposición 5.11. *Sea X un espacio vectorial y $\mathcal{F}$ una familia de seminormas en X. Entonces X con la topología inducida por X es localmente convexo.*

Demostración. Basta notar que cada abierto básico $U = U_{x,p_1,\ldots,p_n,\varepsilon}, x \in X, p_1, \ldots, p_n \in \mathcal{F}, \varepsilon > 0$, es convexo. Sean pues $y, z \in U$ y $\lambda \in [0, 1]$. Se cumple entonces que $p_i(x - y) < \varepsilon$ y $p_i(x - z) < \varepsilon$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$. Por la desigualdad del triángulo, se tiene que para $1 \leq i \leq n$

$$\begin{aligned} p_i(x - [\lambda y + (1 - \lambda)z]) &\leq p_i(\lambda(x - y)) + p_i((1 - \lambda)(x - z)) \\ &\leq \lambda p_i(x - y) + (1 - \lambda)p_i(x - z)z\lambda \\ &< \varepsilon + (1 - \lambda)\varepsilon = \varepsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\lambda y + (1 - \lambda)z \in U$ y así U es convexo. ■

Cabe observar que existen algunas versiones de los teoremas de Hahn-Banach que se extienden a espacios vectoriales topológicos localmente convexos en lugar de espacios normados, como se puede encontrar en [NB10, cap. 7]. Además se cumple que la topología de todo espacio vectorial topológico localmente convexo está generada por una familia de seminormas. Esto se demuestra en [NB10, cap. 5].

Lema 5.8. *Sea X un espacio vectorial con la topología generada por una familia no vacía de seminormas $\mathcal{F}$ que separa puntos en X. Entonces $B \subseteq X$ es acotado si, y sólo si $p(B) \subseteq \mathbb{R}$ es acotado para toda $p \in \mathcal{F}$.*

Demostración. Supongamos primero que B es acotado y tomemos alguna $p \in \mathcal{F}$. Entonces el conjunto $U := U_{0,p,1} = \{x \in X : p(x) < 1\}$ es una vecindad abierta del 0. Entonces existe $r > 0$ tal que $B \subseteq rU$. Así que $p(B) \subseteq p(rU) = rp(U) \subseteq r[0, 1) = [0, r)$.

Ahora supongamos que $p(B)$ es un conjunto acotado para toda $p \in \mathcal{F}$. Sea $U := U_{0,p_1,\ldots,p_k,\varepsilon}$ una vecindad abierta del cero, para algunos $k \in \mathbb{N}$, $p_1, \ldots, p_k \in \mathcal{F}$ y $\varepsilon > 0$. Para cada $1 \leq i \leq k$ se tiene que $p_i(B)$ es acotado y por lo tanto B existe $m_i > 0$ tal que $p_i(B)$ está acotado por m_i. Al tomar $r = \frac{1}{\varepsilon} \max(m_1, \ldots, m_k) > 0$ se sigue que si $s \geq r$, entonces para $x \in B$, $p_i(x) \leq m_i \leq s\varepsilon$ para toda $i \in \{1, \ldots, k\}$. Así que $p(s^{-1}x) = s^{-1}p_i(x) < \varepsilon$. Luego, $s^{-1}x \in U$. Entonces $B \subseteq sU$. y B es acotado. ■

5.2. El espacio vectorial topológico $F(A, \mathbb{K})$

Ejemplo 5.4. El espacio vectorial topológico $F(A, \mathbb{K})$ Sean A un conjunto no-vacío y $Y = F(A, \mathbb{K})$, como en el ejemplo 5.3. Se verificó ahí que $\mathcal{F} = \{|\delta_a| : a \in A\}$ es una familia de seminormas en Y que separa puntos, por lo que Y con la topología $\sigma(Y, \mathcal{F})$ es un espacio vectorial topológico. En adelante, cuando trabajemos con el espacio $F(A, \mathbb{K})$ será con dicha topología.

Proposición 5.12. *Sea A un conjunto no vacío. Entonces la topología de $F(A,\mathbb{K})$ coincide con la topología producto de $F(A,\mathbb{K})$.*

Demostración. Sea $Y = F(A,\mathbb{K})$. Basta notar que para $f \in Y$, $k \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_k \in A$ y $\varepsilon > 0$ se cumple que

$$U_{f,|\delta_{a_1}|,\ldots,|\delta_{a_k}|,\varepsilon} = \{g \in Y : |f(a_i) - g(a_i)| < \varepsilon \text{ para } 1 \leq i \leq k\} = \bigcap_{i=1}^{n} \pi_{a_i}^{-1}(V_\varepsilon(f(a_i))).$$

Por lo que los básicos de la topología $\sigma(Y,\mathcal{F})$ coinciden con los básicos de la topología producto. ■

Notemos que para cada $a \in A$, $\delta_a : Y \to \mathbb{K}$ es continua. Sea pues $(f_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ una red en Y que converge a $f \in Y$. Por la proposición 5.8, se tiene que $|f_\alpha(a) - f(a)| = |\delta_a|(f_\alpha - f) \to 0$, de donde $\delta_a(f_\alpha) = f_\alpha(a) \to f(a) = \delta_a(f)$. De la proposición 4.4 se concluye que δ_a es continua.

Demostremos ahora que Y es completo. tomemos entonces una red de Cauchy $(f_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ en Y. Fijemos $a \in A$. Dado que δ_a es una función lineal y continua, se sigue del lema 5.5 que $(f_\alpha(a))_{\alpha\in\Lambda} = (\delta_a(f_\alpha))_{\alpha\in\Lambda}$ es de Cauchy en $\mathbb{K}$. Como $\mathbb{K}$ es completo, existe $x_a \in \mathbb{K}$ tal que $f_\alpha(a) \to x_a$. Definamos entonces $f \in Y$ por $f(a) = x_a$, para toda $a \in A$.

Mostremos que $f_\alpha \to f$. Como $f_\alpha(a) \to x_a = f(a)$ para toda $a \in A$, se sigue de la proposición 4.4 que $f_\alpha \to f$. Esto prueba que $(Y, \sigma(Y,\mathcal{F}))$ es completo.

En el teorema 3.7 se demostró que, entre los espacios normados, solamente en los de dimensión finita se cumple que ser cerrado y acotado es suficiente para ser compacto. El siguiente teorema muestra que, a diferencia de lo que sucede con espacios normados, en un espacio vectorial topológico de dimensión infinita esta caracterización también se puede cumplir.

Teorema 5.2. *Sean A un conjunto no vacío y $K \subseteq F(A,\mathbb{K})$. Entonces K es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.*

Demostración. Primero supongamos que K es compacto. De la proposición 5.4 se sigue que K es cerrado y acotado.

Supongamos ahora que K es cerrado y acotado. Para cada $a \in X$, el conjunto $U_{0,|\delta_a|,1}$ es una vecindad abierta del cero. Como K es acotado, existe $r_a > 0$ tal que $K \subseteq r_a U_{0,|\delta_a|,1}$. Definamos el conjunto

$$D_a := \{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| \leq r_a\}.$$

Como para cada $a \in A$, D_a es compacto en $\mathbb{K}$, entonces el teorema de Tychonoff indica que

$$\mathcal{D} := \prod_{a\in A} D_a$$

es un espacio compacto con la topología producto.

Veamos que $K \subseteq \mathcal{D}$. Tomemos $f \in K$. Dada $a \in A$, tenemos que $f \in r_a U_{0,|\delta_a|,1}$, de donde se sigue que $r_a^{-1} f \in U_{0,|\delta_a|,1}$. Es decir, $r_a^{-1}|f(a)| = |\delta_a|(r_a^{-1} f - 0) < 1$. Así que $|f(a)| < r_a$ y $f(a) \in D_a$, por lo que $f \in \mathcal{D}$.

Ahora, como $\mathcal{D}$ es compacto en la topología producto, también lo es en la topología $\sigma(Y,\mathcal{F})$ y dado que K es cerrado se sigue del lema 1.6 que K también es compacto. ■

5.3. Espacios vectoriales topológicos de dimensión finita

Definición 5.9. Sean E y F espacios vectoriales topológicos. Se dice que E y F son *isomorfos* como espacios vectoriales topológicos o que son *isomorficamente homeomorfos* si existe un isomorfismo de espacios vectoriales $T : E \to F$ que también es un homeomorfismo. En este caso a T se le llama *isomorfismo* de espacios vectoriales topológicos.

Teorema 5.3. *Si E es un espacio vectorial topológico y* $\dim E = n < \infty$*, entonces E es isomorficamente homeomorfo a $\mathbb{K}^n$.*

Demostración. Sea $\{x_1, \ldots, x_n\}$ una base de E. Definamos la función

$$T : \mathbb{K}^n \to X$$
$$(a_1, \ldots, a_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_i x_i.$$

Si $a = (a_1, \ldots, a_n), b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{K}^n$ cumplen que $T(a) = T(b)$, entonces $\sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i)x_i = 0$. Como $\{x_1, \ldots, x_n\}$ es linealmente independiente, entonces $a_1 - b_1 = \ldots = a_n - b_n = 0$. Así que $a = b$ y T es inyectiva.

Sea $x \in E$. Como $\{x_1, \ldots, x_n\}$ genera a E, existen $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ tales que

$$x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = T(a_1, \ldots, a_n)$$

y así T es sobreyectiva.

Veamos que T es lineal. Dados $(a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{K}^n$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, se tiene que

$$\begin{aligned} T((a_1, \ldots, a_n) + \lambda(b_1, \ldots, b_n)) = T((a_1 + \lambda b_1, \ldots, a_n + \lambda b_n)) &= \sum_{i=1}^{n}(a_i + \lambda b_i)x_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + \lambda \sum_{i=1}^{n} b_i x_i = T(a_1, \ldots, a_n) + \lambda T(b_1, \ldots, b_n). \end{aligned}$$

Demostremos que T es continuo. Para $1 \leq i \leq n$ consideremos las proyecciones canónicas $\pi_i : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ y las funciones constantes $f_i : \mathbb{K}_n \to E$, $a \mapsto x_i$. Como π_i y f_i son continuas, entonces el lema 5.2 indica que $T = (\pi_1 \cdot f_1) + \ldots + (\pi_n \cdot f_n)$ es continua.

Ya sólo falta ver que T^{-1} es continua. La proposición 5.2 indica que basta probar que T^{-1} es continua en el cero. Sea U una vecindad del cero en $\mathbb{K}^n$. Entonces existe $r > 0$ tal que $V_r(0) \subseteq U$. Es conocido que en la topología euclidiana la esfera $S_2^{n-1} := \{a \in \mathbb{K}^n : \|a\|_2 = 1\}$ es un conjunto compacto. Por la proposición 1.6 tenemos que $T(S_2^{n-1})$ es un conjunto compacto en E que no contiene al cero.

Dado que $\{0\}$ es compacto en E y $T(S_2^{n-1})$ también es compacto, por la proposición 1.7 existen U y V abiertos disjuntos tales que $0 \in U$ y $T(S_2^{n-1}) \subseteq V$.

Ahora, como el producto por escalares $\cdot : \mathbb{K} \times E \to E$ es continuo y V es una vecindad abierta del cero, existe un básico $(-\varepsilon, \varepsilon) \times \widehat{V}$ en $\mathbb{K} \times E$ tal que $0 \in \widehat{V}$ y

$$\cdot((-\varepsilon, \varepsilon) \times \widehat{V}) = \{tz : t \in (-\varepsilon, \varepsilon), z \in \widehat{V}\} \subseteq V.$$

Probemos que $T^{-1}(\widehat{V}) \subseteq V_{\frac{1}{\varepsilon}}(0)$. Sea $z \in \widehat{V}$, de manera que $T^{-1}z \in T^{-1}(\widehat{V})$. Tomemos $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Entonces $tz \in V$, de donde $tz \notin T(S^{n-1})$. Es decir, $T^{-1}(tz) \notin S^{n-1}$, o bien $\|(T^{-1}(tz)\| \neq 1$. Así que $|t| \cdot \|T^{-1}z\| \neq 1$. Por lo tanto, para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \setminus \{0\}$ se tiene que $\|T^{-1}z\| \neq \frac{1}{|t|}$, por lo que $T^{-1}z \in V_{\frac{1}{\varepsilon}}(0)$.

Demostremos que $T^{-1}(r\varepsilon \cdot \widehat{V}) \subseteq U$. Tomemos $y \in \widehat{V}$, de manera que $T^{-1}(r\varepsilon \cdot y) \in T^{-1}(r\varepsilon \cdot \widehat{V})$. Como $T^{-1}(\widehat{V}) \subseteq V_{\frac{1}{\varepsilon}}(0)$, se sigue que $T^{-1}y \in V_{\frac{1}{\varepsilon}}(0)$. Es decir, $\|T^{-1}y\| < \frac{1}{\varepsilon}$. De esto se sigue que $r\varepsilon \|T^{-1}y\| < r$, o bien $\|r\varepsilon \cdot T^{-1}y\| < r$. Entonces $T^{-1}(r\varepsilon \cdot y) \in V_r(0) \subseteq U$.

Dado que $\widehat{V}$ es una vecindad abierta del cero, la observación 5.1 indica que $r\varepsilon \cdot \widehat{V}$ también es vecindad abierta del cero. De esto y de que $T^{-1}(r\varepsilon \cdot \widehat{V}) \subseteq U$ concluimos que T^{-1} es continua. ■

Como consecuencia del resultado anterior, observemos que la topología usual en $\mathbb{K}^n$ es la única topología bajo la cual $\mathbb{K}^n$ es un espacio vectorial topológico.

Proposición 5.13. *Sea E un espacio vectorial topológico de dimensión finita. Si $\varphi : E \to \mathbb{K}$ es un funcional lineal, entonces φ es continuo.*

Demostración. Sean $\dim E = n \in \mathbb{N}$ y $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq X$ una base de X. Sea $T : \mathbb{K}^n \to E$ como en la demostración del teorema 5.3. Entonces T^{-1} es continua. Definamos $S : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ como $S(a_1, \ldots, a_n) = a_1\varphi(x_1) + \ldots + a_n\varphi(x_n)$. Para $1 \leq i \leq n$ las proyecciones $\pi_i : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ y las funciones constantes $f_i : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$, $a \mapsto \varphi(x_i)$ son continuas. Como $\mathbb{K}$ es un espacio vectorial topológico, el lema 5.2 indica que $S = (\pi_1 \cdot f_1 + \ldots + \pi_n \cdot f_n)$ es continua de manera que $\varphi = S \circ T^{-1}$ también es continua. ■

Proposición 5.14. *Cualquier espacio vectorial topológico de dimensión finita es completo.*

Demostración. Sea E un espacio vectorial topológico de dimensión finita $n \in \mathbb{N}$. Dado que ℓ_2^n es un espacio vectorial topológico de dimensión n, del teorema 5.3 se sigue que E es isomorfo a ℓ_2^n como espacio normado. Según el teorema 3.3, ℓ_2^n es un espacio completo. Así que del lema 5.6 resulta que E también es completo. ■

Corolario 5.5. *Sea E un espacio vectorial topológico. Si F es un subespacio de dimensión finita de E, entonces F es cerrado en E.*

Demostración. La proposición 5.14 indica que F es completo. Luego, del lema 5.4 se concluye que F es cerrado en E. ■

A pesar de que uno de nuestros principales objetivos es encontrar una topología vectorial de un espacio normado X donde la bola unitaria sea compacta, el siguiente teorema nos indica que cuando $\dim X = \infty$ en tal topología la bola unitaria no es una vecindad del cero.

Teorema 5.4. *Sea E un espacio vectorial topológico. Entonces E es de dimensión finita si y sólo si existe una vecindad compacta del cero.*

Demostración. Supongamos primero que E es de dimensión finita $n \in \mathbb{N}$. Del teorema 5.3 se sigue que existe un isomorfismo de espacios vectoriales topológicos $T : \mathbb{K}^n \to E$. Por el teorema 3.7 la bola $B_{\mathbb{K}^n}$ es una vecindad compacta del cero en $\mathbb{K}^n$, por lo que $T(B_{\mathbb{K}^n})$ es una vecindad compacta del cero en E.

Ahora supongamos que existe una vecindad compacta K del cero. Tomemos entonces un abierto V tal que $0 \in V \subseteq K$. Luego, de la observación 5.1 se sigue que $\frac{1}{2}V$ también es una vecindad abierta del cero. De la misma observación resulta que $\{x+\frac{1}{2}V\}_{x\in E}$ es una cubierta abierta de K. Como K es compacto, existen $x_1,\ldots,x_m \in E$, $m \in \mathbb{N}$ tales que $\{x_i+\frac{1}{2}V\}_{i=1}^m$ cubre a K. Sean $S = \{x_1,\ldots,x_m\}$ y F el espacio vectorial de dimensión finita generado por S. Entonces

$$K \subseteq S + \frac{1}{2}V \subseteq S + \frac{1}{2}K \subseteq F + \frac{1}{2}K.$$

Observemos entonces que

$$K \subseteq F + \frac{1}{2}K \subseteq F + \frac{1}{2}\left(F + \frac{1}{2}K\right) = F + \frac{1}{2}F + \frac{1}{4}K = F + \frac{1}{4}K.$$

Procediendo sucesivamente de esta manera se tiene que $K \subseteq F + 2^{-n}K$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Como K es compacto, por el lema 5.4 se sigue que K es acotado. Sea U una vecindad abierta del cero y $r > 0$ tal que $K \subseteq sU$ para $s > r$. Elijamos $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $2^n > r$. Entonces $K \subseteq 2^nU$ y por lo tanto para toda vecindad abierta U del cero se cumple que

$$K \subseteq F + 2^{-n}K \subseteq F + U. \tag{5.6}$$

Demostremos que $K \subseteq F$. Sea $x \in K$ y supongamos que $x \notin F$. Ya que dim $F < \infty$, por el corolario 5.5 se tiene que F es cerrado y por lo tanto $x \notin \overline{F}$. Entonces existe una vecindad abierta W de x tal que $W \cap F = \varnothing$. Por la observación 5.1 $x - W$ es una vecindad abierta del cero. De (5.6) se tiene que $x \in F + (x - W)$. Luego, existen $y \in F$ y $z \in W$ tal que $x = y + x - z$, de donde $y = z$. Esto contradice que $W \cap F = \varnothing$. Así que $K \subseteq F$.

Sea $x \in E$, como V es una vecindad abierta del cero, según la demostración de la proposición 5.4, podemos tomar $n \in \mathbb{N}$ tal que $2^{-n}x \in V \subseteq K$. Por lo tanto $x \in 2^nK \subseteq 2^nF = F$. Así que $E = F$ es un espacio de dimensión finita.

■

Capítulo 6

Topologías débil y débil*

Hemos visto que la bola unitaria de un espacio normado de dimensión infinita no es compacta. Podemos interpretar esto en el sentido de que la topología usual de tal espacio normado X tiene demasiados abiertos. Esto motiva el propósito de construir en X topologías más débiles que su topología original, esto es, con menos abiertos. Una de estas es la topología débil, la cual se construye a partir de los funcionales lineales continuos de X. De manera similar definiremos la topología débil* en X^*.

6.1. Topología débil

Sean X un espacio normado y X^* su espacio dual. Notemos que para cada $\varphi \in X^*$ la función $|\varphi|$ es una seminorma. Además por el teorema de Hahn-Banach, para cada $x \neq 0$ existe un funcional lineal $\varphi \in X^*$ tal que $\varphi(x) \neq 0$. De manera que $|\varphi(x)| \neq 0$. Por tanto

$$\mathcal{F}_X := \{|\varphi| : \varphi \in X^*\}$$

es una familia de seminormas en X que separa puntos en X.

Definición 6.1. Sea X un espacio normado. La *topología débil* de X es $\sigma(X, \mathcal{F}_X)$ y la denotaremos por $\sigma(X, X^*)$ o simplemente por τ_{w} si no hace falta especificar el espacio X. Cuando trabajemos con la topología débil de X, el espacio vectorial topológico correspondiente se denotará por X_{w}.

Observemos que según la proposición 5.6, la familia de conjuntos

$$U_{x,\varphi_1,\ldots,\varphi_k,\varepsilon} := U_{x,|\varphi_1|,\ldots,|\varphi_k|,\varepsilon}, x \in X, k \in \mathbb{N}, \varphi_1, \ldots, \varphi_k \in X^*, \varepsilon > 0;$$

forman una base de la topología débil.

Como consecuencia del teorema 5.1 el siguiente corolario indica que X_{w} es un espacio vectorial topológico. Así que podemos considerar su espacio dual, el cual denotaremos por ${X_{\mathrm{w}}}^*$ para diferenciarlo de X^*_{w}, que denota considerar primero el dual del espacio X y en este considerar su topología débil, es decir, $X^*_{\mathrm{w}} = (X, \|\cdot\|)^*$ y ${X_{\mathrm{w}}}^* = (X, \tau_{\mathrm{w}})^*$.

Corolario 6.1. *Si X es un espacio normado, entonces X_{w} es un espacio vectorial topológico.*

Sea X un espacio normado. La topología original de X se denotará por τ. Notemos que cada seminorma en $\mathcal{F}_X$ es continua si consideramos la topología original en el dominio de cada funcional. Esto indica que $\tau_{\mathrm{w}} \subseteq \tau$. Esta contención es propia cuando X es de dimensión infinita, como se muestra en la siguiente proposición. La idea de la demostración radica en que los abiertos de la topología débil en espacios de dimensión infinita siempre son "grandes", pues cada uno de ellos contiene una traslación de un subespacio no trivial.

Proposición 6.1. *Si X es un espacio normado de dimensión infinita, entonces $\tau_{\mathrm{w}} \subsetneq \tau$.*

Demostración. En la observación anterior notamos que $\tau_{\mathrm{w}} \subseteq \tau$. Demostraremos que ningún abierto básico de la topología débil es acotado bajo la norma. Esto es suficiente para obtener la conclusión ya que algunos abiertos de la topología original sí son acotados.

Sea $U_{x,\varphi_1,\ldots,\varphi_k,\varepsilon}$ un abierto básico de τ_{w}, para algunos $x \in X, k \in \mathbb{N}, \varphi_1, \ldots, \varphi_k \in X^*$ y $\varepsilon > 0$. Consideremos $F : X \to \mathbb{K}^k$ definida por $F(y) = (\varphi_1(y), \ldots, \varphi_k(y))$ y observemos que es lineal. De esta manera notemos que

$$\operatorname{Ker} F = \bigcap_{i=1}^{k} \operatorname{Ker} \varphi_i.$$

Si Ker F fuese trivial, entonces F sería inyectiva. Lo cual es falso, pues su dominio es de dimensión infinita y su codominio de dimensión finita. Por lo tanto $\bigcap_{i=1}^{k} \operatorname{Ker} \varphi_i \neq \{0\}$ y existe $y \in X \setminus \{0\}$ tal que $\varphi_i(y) = 0$ para toda $i \in \{1, \ldots, k\}$. Ahora tomemos $M > 0$. Notemos que

$$\lim_{\lambda \to \infty} |\lambda \|y\| - \|x\|| = \infty.$$

Por lo que podemos tomar $\lambda > 0$ tal que

$$\|\lambda y + x\| \geq |\lambda \|y\| - \|x\|| > M.$$

Además,

$$|\varphi_i(\lambda y + x) - \varphi(x)| = |\varphi_i(y)| = 0 < \varepsilon,$$

para toda $i \in \{1, \ldots, k\}$ y así $\lambda y + x \in U_{x,\varphi_1,\ldots,\varphi_k,\varepsilon}$. ■

En un espacio normado X denotamos que la red $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \subseteq X$ converge a $x \in X$ bajo la topología débil, por $\text{w-lím}_{\alpha\in\Lambda} x_\alpha$ o también por $x_\alpha \xrightarrow{\mathrm{w}} x$. En el caso particular de una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ denotaremos el límite de la sucesión por $\text{w-lím}_{n\to\infty} x_n$.

Corolario 6.2. *Sean X un espacio normado y $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \subseteq X$ una red y $x \in X$. Entonces $x_\alpha \xrightarrow{\mathrm{w}} x$ si, y sólo si, $\varphi(x_\alpha) \to \varphi(x)$ para todo $\varphi \in X^*$.*

En particular, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ es una sucesión en X y $x \in X$, entonces $\underset{n\to\infty}{\text{w-lím}}\, x_n = x$ si, y sólo si $\lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \varphi(x)$ para cualquier $\varphi \in X^*$.

Proposición 6.2. *Sean X un espacio normado y $A \subseteq X$. Entonces A es $\|\cdot\|$-acotado si, y sólo si A es* w*-acotado.*

Demostración. Supongamos primero que A es $\|\cdot\|$-acotado. Entonces existe $t > 0$ tal que $\|x\| < t$ para todo $x \in A$. Luego, para toda $\varphi \in X^*$ y $x \in A$ se cumple que $|\varphi(x)| \leq \|\varphi\| \|x\| < \|\varphi\| t$. Por lo tanto, para cada $\varphi \in X^*$, se cumple que $|\varphi| (A)$ está acotado por $\|\varphi\| t$ y por el lema 5.8 se concluye que A es $\|\cdot\|$-acotado.

Ahora supongamos que A es $\|\cdot\|$-acotado. Del lema 5.8 se sigue que para toda $\varphi \in X^*$, se cumple que $|\varphi|(A) = \{|Jx|(\varphi) : x \in A\}$ es acotado. Como X^* es un espacio de Banach, por el principio de acotamiento uniforme se cumple que $\{Jx : x \in A\}$ es acotado en $X^{**} = \mathcal{L}(X^*, \mathbb{K})$. Por lo tanto existe $t > 0$ tal que $\|x\| = \|Jx\| < t$ para toda $x \in A$ y así A es acotado. ■

Corolario 6.3. *Sean X un espacio normado y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ una sucesión. Si $x_n \xrightarrow{\text{w}} x$ para algún $x \in X$, entonces $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto $\|\cdot\|$-acotado.*

Demostración. Por la proposición 5.2 tenemos que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ es w-acotado y de esta manera la proposición 6.2 indica que también es $\|\cdot\|$-acotado. Finalmente, por el lema 2.4 se concluye que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es $\|\cdot\|$-acotado. ■

Ejemplo 6.1. Consideremos la sucesión de vectores canónicos $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en el espacio ℓ_p, $1 \le p \le \infty$. Dados $n, m \in \mathbb{N}$ distintos se tiene que $\|e_n - e_m\|_p = \sqrt[p]{2}$ para $1 \le p < \infty$ y $\|e_n - e_m\|_\infty = 1$, lo cual indica que $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no es de Cauchy y por tanto no converge en ninguno de estos espacios.

Sin embargo, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sí converge débilmente a cero en ℓ_p para $1 < p < \infty$. En efecto, si $\varphi \in \ell_p^*$, por el teorema 3.11 existe $y = (y_1, y_2, \ldots) \in \ell_q$ con $Ry = \varphi$, donde q es el exponente conjugado de p. Luego $\varphi(e_n) = Ry(e_n) = y_n \to 0$, pues $y \in \ell_q$. De manera análoga, por el teorema 3.12 se tiene que $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge débilmente a cero en c_0.

Consideremos ahora $p = 1$, entonces $q = \infty$. Tomando $y = (1)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_\infty$, se tiene que $Ry(e_n) = y_n = 1$ y por lo tanto $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \ell_1$ no converge débilmente a cero.

Proposición 6.3. *Si X es un espacio normado, entonces $X^* = {X_\text{w}}^*$.*

Demostración. Tomemos $\varphi \in X^*$. Por definición la seminorma $|\varphi| : X_\text{w} \to \mathbb{K}$ es continua, en particular es continua en el cero. Sea V un entorno del cero en $\mathbb{K}$ y escojamos una bola abierta $V_r(0)$ con $r > 0$ tal que $V_r(0) \subseteq V$. Como $|\varphi|$ es continua, existe un abierto W en τ_w del cero en X tal que $|\varphi|(W) \subseteq [0, r)$. Pero esto implica que $\varphi(W) \subseteq V_r(0) \subseteq V$. Así que φ es continua en el cero y como también es lineal por la proposición 5.2 podemos concluir que es continua. Esto muestra que $X^* \subseteq {X_\text{w}}^*$.

Por otro lado, la proposición 6.1 indica que $\tau_\text{w} \subseteq \tau$. Por lo que todo funcional lineal y continuo con la topología τ_w también será continuo con la topología τ. Es decir, ${X_\text{w}}^* \subseteq X^*$. ■

Proposición 6.4. *Sean E un espacio vectorial topológico, X un espacio normado y $T : E \to X_\text{w}$ un operador lineal. Entonces T es continua si, y sólo si $\varphi \circ T \in E^*$ para toda $\varphi \in X^*$.*

Demostración. Sea $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ una red en E que converge a $x \in E$. Tenemos que T es continua si, y sólo si $Tx_\alpha \to Tx$ en X_w. Por el corolario 6.2, esto último es equivalente a que $\varphi(Tx_\alpha) \to \varphi(Tx)$ para todo $\varphi \in X^*$. Esto es $(\varphi \circ T)x_\alpha \to (\varphi \circ T)x$ para todo $\varphi \in X^*$. Dado que $\varphi \circ T$ es lineal para todo $\varphi \in X^*$, se sigue que lo anterior equivale a que $\varphi \circ T \in E^*$ para todo $\varphi \in X^*$. ■

La cerradura respecto a la topología débil de un subconjunto A de un espacio normado X se denotará por $\overline{A}^\text{w}$. Para hacer más notoria la cerradura respecto a la topología original, denotaremos a esta última por $\overline{A}^{\|\cdot\|}$.

Proposición 6.5. *Sea X un espacio normado. Si $A \subseteq X$ es convexo, entonces $\overline{A}^{\|\cdot\|} = \overline{A}^\text{w}$.*

Demostración. Mostremos primero que $\overline{A}^{\|\cdot\|} \subseteq \overline{A}^{\mathrm{w}}$. Sean $x \in \overline{A}^{\|\cdot\|}$ y U una vecindad abierta de x en τ_{w}. Puesto que $\tau_{\mathrm{w}} \subseteq \tau$, entonces U es vecindad abierta de x en τ. Por lo tanto $A \cap U \neq \varnothing$ y por lo tanto $x \in \overline{A}^{\mathrm{w}}$.

Para mostrar la otra contención demostremos que $X \setminus \overline{A}^{\|\cdot\|} \subseteq X \setminus \overline{A}^{\mathrm{w}}$. Así pues, tomemos $x_0 \in X \setminus \overline{A}^{\|\cdot\|}$. Entonces $\{x_0\}$ y $\overline{A}^{\|\cdot\|}$ son conjuntos disjuntos. Como A es convexo, por el lema 3.4, se tiene que $\overline{A}^{\|\cdot\|}$ también es convexo y además es $\|\cdot\|$-cerrado. Por otro lado, $\{x_0\}$ es convexo y compacto. Por el teorema 3.9 de Hahn-Banach, existen $\varphi \in X^*$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que

$$\Re(\varphi(x_0)) < \alpha < \Re(\varphi(x)), \text{ para todo } x \in \overline{A}^{\|\cdot\|}. \tag{6.1}$$

Sea $\varepsilon = \alpha - \Re(\varphi(x_0)) > 0$ y consideremos la vecindad abierta $U_{x_0,\varphi,\varepsilon}$ de x_0 en τ_{w}. Al tomar cualquier $x \in U_{x_0,\varphi,\varepsilon}$ se tiene que

$$\begin{aligned}\Re(\varphi(x)) - \Re(\varphi(x_0)) &\leq |\Re(\varphi(x)) - \Re(\varphi(x_0))| = |\Re(\varphi(x) - \varphi(x_0))| \\ &\leq |\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \varepsilon = \alpha - \Re\varphi(x_0),\end{aligned}$$

de donde $\Re(\varphi(x)) < \alpha$. Luego, por (6.1) se sigue que $x \notin \overline{A}^{\|\cdot\|}$, por lo que $x \notin A$. Esto indica que $U_{x_0,\varphi,\varepsilon} \cap A = \varnothing$. Por lo tanto $x_0 \notin \overline{A}^{\mathrm{w}}$. ■

Definición 6.2. Sea X un espacio normado y $A \subseteq X$. Decimos que $x \in X$ es una *combinación convexa* de A si existen $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0,1]$ y $x_1, \ldots, x_n \in A$ tales que

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i.$$

Al conjunto de todas las combinaciones convexas de A se le llama *envolvente convexa* de A.

Proposición 6.6. *Sea X un espacio normado y $A \subseteq X$. La envolvente convexa de A es convexa.*

Demostración. Tomemos x, y combinaciones convexas de A y $0 \leq \mu \leq 1$. Entonces existen $n, m \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \gamma_1, \ldots, \gamma_m \in [0,1]$ y $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m \in A$ tales que

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \quad \text{y} \quad y = \sum_{j=1}^{m} \gamma y_j.$$

Observemos que de esto se sigue que

$$\mu x + (1-\mu)y = \mu \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \right) + (1-\mu) \left(\sum_{j=1}^{m} \gamma_j y_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \mu \lambda_i x_i + \sum_{j=1}^{m} (1-\mu) \gamma_j y_j.$$

Además cada $\mu\lambda_i \in [0,1]$ y $(1-\mu)\gamma_j \in [0,1]$ y

$$\sum_{i=1}^{n} \mu \lambda_i + \sum_{j=1}^{m} (1-\mu)\gamma_j = \mu \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \right) + (1-\mu) \left(\sum_{j=1}^{m} \gamma_j \right) = \mu + (1-\mu) = 1.$$

Así pues $\mu x + (1-\mu)y$ es una combinación convexa de A. ■

Corolario 6.4. *Sean X un espacio normado y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X. Si $x_n \xrightarrow{\text{w}} 0$, entonces existe una sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de combinaciones convexas de $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ tal que $\|y_n\| \to 0$.*

Demostración. Supongamos que $x_n \xrightarrow{\text{w}} 0$ y sea A la envolvente convexa de $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Claramente, cada $x_n \in A$, para toda $n \in \mathbb{N}$. De la proposición 6.6 se tiene que A es convexo. Luego, por la proposición 6.5 se tiene que $\overline{A}^{\|\cdot\|} = \overline{A}^{\text{w}}$. Dado que $x_n \xrightarrow{\text{w}} 0$ y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$, por la proposición 4.2 se tiene que $0 \in \overline{A}^{\text{w}}$, por lo que $0 \in \overline{A}^{\|\cdot\|}$. Por la proposición 2.6 existe una sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ tal que $y_n \to 0$, esto es $\|y_n\| \to 0$. ■

En la proposición 2.6, se caracteriza la cerradura de un conjunto en un espacio métrico con los límites de sus sucesiones. El siguiente ejemplo muestra que esto en general es falso cuando el espacio topológico no es metrizable, como ya antes se había mencionado.

Ejemplo 6.2. Consideremos el conjunto $A := \{e_n + ne_m : n, m \in \mathbb{N}, n < m\} \subseteq \ell_2$, donde e_k es el k-ésimo vector canónico en ℓ_2. Probemos que $0 \in \overline{A}^{\text{w}}$ y que, sin embargo, no existe ninguna sucesión en A que converja débilmente a 0.

Demostración. Veamos primero que $0 \in \overline{A}^{\text{w}}$. Consideremos $k \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ y $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in \ell_2^*$ y probemos entonces que $U_{0,\varphi_1,\ldots,\varphi_k,\varepsilon} \cap A \neq \varnothing$.

Por el teorema 3.11 para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$ existe $f_i \in \ell_2$ tal que $\varphi_i = Rf_i$, esto es

$$\varphi_i(x) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \cdot f_i(j), \text{ para } x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_2.$$

Dado que cada $f_i \in \ell_2$, se tiene que $\lim_{k\to\infty} f_i(k) = 0$. Luego, existe $N_i \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_i(k)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ si } k \geq N_i. \tag{6.2}$$

Al tomar $N = \max(N_1, \ldots, N_k)$, se cumple que $|f_i(N)| < \frac{\varepsilon}{2}$ para toda $1 \leq i \leq k$. Además, puesto que $\lim_{k\to\infty} f_i(k) = 0$ para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, existe $M_i \in \mathbb{N}$ tal que $N < M_i$ y

$$|f_i(k)| < \frac{\varepsilon}{2N} \text{ si } k \geq M_i. \tag{6.3}$$

Observemos que al tomar $M = \max(M_1, \ldots, M_k)$, de (6.2) y (6.3) se sigue que

$$|\varphi_i(e_N + Ne_M)| = |f_i(N) + Nf_i(M)| \leq |f_i(N)| + N\,|f_i(M)| < \frac{\varepsilon}{2} + N\frac{\varepsilon}{2N} = \varepsilon.$$

Lo anterior indica que $e_N + Ne_M \in A \cap U_{0,\varphi_1,\ldots,\varphi_k,\varepsilon}$.

Demostremos ahora que no existe ninguna sucesión en A que converja débilmente a cero. Supongamos entonces que sí existe una sucesión $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq A$ tal que $x_k \xrightarrow{\text{w}} 0$. Entonces existen sucesiones $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ y $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{N}$ tales que $x_k = e_{a_k} + a_k e_{b_k}$ y $a_k < b_k$ para toda $k \in \mathbb{N}$. Del corolario 6.3 se tiene que $\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto acotado. Así que existe $K \in \mathbb{N}$ tal que

$$a_k = \|a_k e_{b_k}\|_2 \leq \|e_{a_k} + a_k e_{b_k}\|_2 = \|x_2\|_2 \leq K.$$

Consideremos $f \in \ell_2$ definida en $k \in \mathbb{N}$ por

$$f(k) = \begin{cases} 1, & \text{si } 1 \leq k \leq K; \\ 0, & \text{si } K < k. \end{cases}$$

Del teorema 3.11 se tiene que $Rf \in \ell_2^*$. Por un lado como $x_k \xrightarrow{\text{w}} 0$ del corolario 6.2 resulta que $Rf(x_k) \to 0$, mientras que por otro lado para cada $k \in \mathbb{N}$, se tiene que $Rf(x_k) = 1 + a_k \chi_{\{1,\ldots,K\}}(b_k) \geq 1$, donde χ es la función característica. Esto es una contradicción y así no existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ con $x_k \xrightarrow{\text{w}} 0$. ■

6.2. Topología débil*

Dado cualquier espacio normado X, hemos construido entonces su topología débil. Usando esta construcción con X^* y a partir de X^{**} obtenemos la correspondiente topología débil en X^*. Sin embargo, en X^{**} aparece otro espacio de funcionales que permite construir otra topología en X^* que, en muchos casos, es todavía más débil que la topología débil de X^*. Lo describiremos a continuación.

Para cada $x \in X$ resulta que $|\delta_x|$ es una seminorma. Dado $\varphi \in X^*$ distinto de cero, existe $x \neq 0$ con $\varphi(x) \neq 0$. Así que $\delta_x(\varphi) \neq 0$. Es decir,

$$\mathcal{F}_{X^*} := \{|\delta_x| : x \in X\}$$

es una familia de seminormas en X^* que separa puntos de X.

Definición 6.3. Sea X un espacio normado. La *topología débil** de X^* es $\sigma(X^*, \mathcal{F}_{X^*})$ y se denotará por $\sigma(X^*, X)$ o simplemente por τ_{w^*}. Cuando trabajemos con la topología débil* de X^*, al espacio vectorial topológico correspondiente lo denotaremos por $X^*_{\text{w}^*}$.

Aplicando el teorema 5.1 se deduce el siguiente corolario.

Corolario 6.5. *Sea X un espacio normado. Entonces $X^*_{\text{w}^*}$ es un espacio vectorial topológico.*

La cerradura respecto a la topología débil* de un subconjunto F del espacio dual X^* de un espacio normado X se denotará por $\overline{F}^{\text{w}^*}$.

En el espacio dual X^* de un espacio normado X la convergencia en la topología débil* de una red $(\varphi_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \subseteq X^*$ a $\varphi \in X^*$ se denotará por $\text{w}^*\text{-lím}_{\alpha\in\Lambda} \varphi_\alpha = \varphi$ o también por $\varphi_\alpha \xrightarrow{\text{w}_*} \varphi$.

Corolario 6.6. *Sea X un espacio normado. Para una red $(\varphi_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \subseteq X^*$ y $\varphi \in X^*$ se satisface que $\varphi_\alpha \xrightarrow{\text{w}_*} \varphi$ si, y sólo si $\varphi_\alpha(x) \to \varphi(x)$ para todo $x \in X$.*

En particular, si $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X^*$ es una sucesión en X^* y $\varphi \in X^*$, tenemos entonces que $\underset{n\to\infty}{\text{w}^*\text{-lím}}\, \varphi_n = \varphi$ si, y sólo si $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \varphi(x)$ para cualquier $x \in X$.

Observemos que la convergencia debil* de funcionales es precisamente la convergencia puntual.

Según la proposición 5.6, la familia de conjuntos

$$U_{\varphi,x_1,\ldots,x_k,\varepsilon} := U_{\varphi,\left|\delta_{x_1}\right|,\ldots,\left|\delta_{x_k}\right|,\varepsilon}, \varphi \in X^*, k \in \mathbb{N}, x_1,\ldots,x_k \in X, \varepsilon > 0;$$

forman una base de la topología débil.

De acuerdo al desarrollo anterior, en el espacio X^* podemos considerar tres topologías: la topología original $\tau_{\|\cdot\|}$, la topología débil $\sigma(X^*, X^{**})$ y la topología débil* $\sigma(X^*, X)$. Establezcamos una relación entre ellas.

Para $\varphi \in X^*$, $k \in \mathbb{N}$, $x_1,\ldots,x_k \in X$ y $\varepsilon > 0$, tenemos que

$$U_{\varphi,x_1,\ldots,x_k,\varepsilon} = U_{\varphi,J(x_1),\ldots,J(x_k),\varepsilon}. \tag{6.4}$$

Notemos que el primer conjunto es un abierto de $X^*_{\mathrm{w}^*}$ y el segundo es un abierto de X^*_{w}. Así pues, todo abierto en $X^*_{\mathrm{w}^*}$ es abierto en X^*_{w}. Por esto y por la proposición 6.1 se tiene que

$$\sigma(X^*, X) \subseteq \sigma(X^*, X^{**}) \subseteq \tau_{\|\cdot\|_{X^*}}. \tag{6.5}$$

Proposición 6.7. *Sea X un espacio normado, entonces $J(X) = (X^*_{\mathrm{w}^*})^*$.*

Demostración. Tomemos $x \in X$, de donde $Jx \in J(X)$. Por definición la seminorma $|\delta_x| : X^*_{\mathrm{w}^*} \to \mathbb{K}$ es continua, en particular es continua en el cero. Sea V un entorno del cero en $\mathbb{K}$ y escojamos una bola abierta $V_r(0)$ con $r > 0$ tal que $V_r(0) \subseteq V$. Como $|\delta_x|$ es continua, existe una vecindad abierta W en $X^*_{\mathrm{w}^*}$ del cero tal que $|\delta_x|(W) \subseteq [0, r)$. Pero esto implica que $\delta_x(W) \subseteq V_r(0) \subseteq V$. Así que $\delta_x = Jx$ es continua en el cero y como también es lineal por la proposición 5.2 podemos concluir que es continua. Esto muestra que $J(X) \subseteq (X^*_{\mathrm{w}^*})^*$.

Ahora tomemos $\delta \in (X^*_{\mathrm{w}^*})^*$ de manera que $\delta : X^*_{\mathrm{w}^*} \to \mathbb{K}$ es continua. Como $V_1(0)$ es abierto en $\mathbb{K}$, se sigue que $\delta^{-1}(V_1(0))$ es abierto en $X^*_{\mathrm{w}^*}$. Así que existen $k \in \mathbb{N}$, $x_1,\ldots,x_k \in X$ y $\varepsilon > 0$ tales que el básico $U_{0,x_1,\ldots,x_k,\varepsilon} \subseteq \delta^{-1}(V_1(0))$. Por la linealidad de δ y $\delta_{x_1},\ldots,\delta_{x_k}$ se sigue que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$U_{0,x_1,\ldots,x_k,\frac{\varepsilon}{n}} \subseteq \delta^{-1}\left(V_{\frac{1}{n}}(0)\right). \tag{6.6}$$

Consideremos $\varphi \in \bigcap_{i=1}^k \operatorname{Ker}\delta_{x_i}$. Entonces $\varphi \in U_{0,x_1,\ldots,x_k,\frac{\varepsilon}{n}}$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Luego, por (6.6) se sigue que $|\delta(\varphi)| < \frac{1}{n}$ para toda $n \in \mathbb{N}$, así que $\delta(\varphi) = 0$ y p or tanto $\varphi \in \operatorname{Ker}\delta$. Esto indica que $\bigcap_{i=1}^k \operatorname{Ker}\delta_{x_i}$, por lo que el lema 3.11 asegura que $\delta \in \operatorname{span}\{\delta_{x_1},\ldots,\delta_{x_k}\} \subseteq J(X)$ y así se concluye que $(X^*_{\mathrm{w}^*})^* \subseteq J(X)$. ∎

En general no se cumple que $J(X) = (X^*)^*$, pero si en X^* consideramos la topología débil*, entonces por la proposición anterior $J(X) = (X^*_{\mathrm{w}^*})^*$. Así que podemos identificar a $(X^*_{\mathrm{w}})^*$ con X.

Observemos que X^* es un subespacio vectorial de $F(X, \mathbb{K})$ y las evaluaciones $\delta_x^{X^*} : X^* \to \mathbb{K}$ son restricciones de las evaluaciones $\delta_x : F(X, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$. Por otra parte, la topología en $F(X, \mathbb{K})$ es la generada por las seminormas $\mathcal{F} = \{|\delta_x| : x \in X\}$. En cuanto a X^*, su topología débil* está generada por la familia $\mathcal{G} = \{\left|\delta_x^{X^*}\right| : x \in X\}$ de seminormas en $F(X, \mathbb{K})$ restringidas a X^*. Entonces la proposición 5.9 dice que la topología débil* en X^* es precisamente la topología subespacio de $F(X,\mathbb{K})$. Como la inclusión de un subespacio con la topología subespacio en el espacio original es continua, se sigue que la inclusión de $X^*_{\text{w}^*}$ en $F(X,\mathbb{K})$ es continua. Por la contención (6.5) la inclusión $Id : X^* \to X^*_{\text{w}^*}$ es continua y por lo tanto la inclusión del espacio normado X^* en $F(X,\mathbb{K})$ también es continua.

Si X es un espacio de dimensión infinita, la proposición 3.5 muestra que X^* es de dimensión infinita, por lo que resulta que B_{X^*} no es compacta respecto a la topología original. El siguiente teorema muestra que bajo la topología débil* sí lo es, lo cual representa un punto culminante en el desarrollo de este trabajo.

Teorema 6.1 (Banach-Alaoglu). *Sea X un espacio normado. Entonces la bola unitaria cerrada de X^* es compacta en la topología débil*.*

Demostración. Consideremos $Y = F(X,\mathbb{K})$. Por el teorema 5.2 basta establecer que B_{X^*} es cerrado y acotado en Y.

Sea x, de manera que $|\delta_x| \in \mathcal{F}$. Para $\varphi \in B_{X^*}$ se tiene que

$$|\delta_x|(\varphi) = |\varphi(x)| \leq \|\varphi\| \|x\| \leq \|x\| .$$

Luego $|\delta_x|(B_{X^*})$ está acotado por $\|x\|$ y del lema 5.8 se sigue que B_{X^*} es acotado.

Ahora tomemos una red $(\varphi_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ en B_{X^*} que converge a alguna φ en Y. Entonces $\varphi_\alpha(x) \to \varphi(x)$ para toda $x \in X$. Veamos que φ es lineal. Tomemos pues $x, y \in X$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ y notemos que

$$\varphi(x+\lambda y) = \lim_{\alpha_\Lambda} \varphi_\alpha(x+\lambda y) = \lim_{\alpha_\Lambda} \varphi_\alpha(x) + \lambda\varphi_\alpha(y) = \lim_{\alpha_\Lambda} \varphi_\alpha(x) + \lambda \lim_{\alpha_\Lambda} \varphi_\alpha(y) = \varphi(x) + \lambda\varphi(y).$$

Al fijar $x \in X$ notemos que $|\varphi_\alpha(x)| \leq \|x\|$ para toda $\alpha \in \Lambda$. Como el valor absoluto es continuo, se sigue que

$$|\varphi(x)| = \left|\lim_{\alpha\in\Lambda} \varphi_\alpha(x)\right| = \lim_{\alpha\in\Lambda} |\varphi_\alpha(x)| \leq \|x\| .$$

Así que $\varphi \in B_{X^*}$. Esto prueba que B_{X^*} es cerrada en $F(X,\mathbb{K})$. ■

Observemos que como consecuencia del teorema de Banach-Alaoglu y del teorema 5.4 se tiene que en espacios normados de dimensión infinita la bola unitaria B_{X^*} no es una w*-vecindad del cero.

Proposición 6.8. *Sea X un espacio normado. Si $A \subseteq X^*$ es $\|\cdot\|$-acotado, entonces A es* w**-acotado. Cuando X es un espacio de Banach, el recíproco también es cierto.*

Demostración. Supongamos primero que A es $\|\cdot\|$-acotado. Por la proposición 6.2 se sigue que A es w-acotado. Entonces, por el lema 5.8, para toda $x \in X$, se tiene que $|\delta_x|(A)$ es acotado y por el mismo lema 5.8 se sigue que A es w*-acotado.

Ahora supongamos que X es un espacio de Banach y que A es w*-acotado. Por el lema 5.8 para todo $x \in X$, el conjunto $|\delta_x|(A) = \{|\varphi(x)| : \varphi \in A\}$ es acotado. Por lo que $\{\varphi(x) : \varphi \in A\}$, $x \in X$, también es acotado. Dado que X es un espacio de Banach, por el principio del acotamiento uniforme resulta que A es $\|\cdot\|$-acotado en $\mathcal{L}(X,\mathbb{K}) = X^*$. ■

Corolario 6.7. *Sea X un espacio de Banach y $A \subseteq X^*_{\mathrm{w}^*}$. Entonces A es compacto si, y sólo si es cerrado y acotado.*

Demostración. Si A es compacto, de la proposición 5.4 se sigue que A es cerrado y acotado.

Ahora supongamos que A es cerrado y acotado. Por la proposición 6.8 A es $\|\cdot\|$-acotado. Entonces existe $r > 0$ tal que $A \subseteq rB_{X^*}$. Por el teorema de Banach-Alaoglu, rB_{X^*} es w*-compacto. Como A es w*-cerrado y $A \subseteq rB_{X^*}$, por el lema 1.6 se concluye que A es w*-compacto. ■

6.3. Reflexividad

El comportamiento de la identificación canónica J permite distinguir una clase importante de espacios de Banach. Resulta ser de nuestro interés que J sea un isomorfismo de espacios normados entre X y X^{**} para así poder identificar a X no sólo con un subespacio de X^{**}, sino con X^{**} mismo. Es de esto que se motiva la siguiente definición.

Definición 6.4. Si X es un espacio normado tal que $J(X) = X^{**}$ se dice que X es *reflexivo*.

Observemos que todo espacio reflexivo es isométricamente isomorfo a su doble dual. Podríamos pensar entonces que esta es una caracterización de los espacios reflexivos, pero no es así. En [Jam51] se puede encontrar un ejemplo de un espacio no reflexivo que es isométricamente isomorfo a su doble dual.

Proposición 6.9. *Todo espacio normado de dimensión finita es reflexivo.*

Demostración. Sea X un espacio normado de dimensión finita. Al final de la demostración de la proposición 3.5 se estableció entonces $\dim X \geq \dim X^*$. Luego $\dim X \geq \dim X^* \geq \dim X^{**}$. Por otro lado $J : X \to X^{**}$ es inyectiva, por lo que $\dim X \leq \dim X^{**}$. Así que X y X^{**} son de la misma dimensión. Como J es lineal, inyectiva y está definida entre espacios de la misma dimensión, resulta que es sobreyectiva y X es reflexivo. ■

Lema 6.1. *Sean X y Y dos espacios normados isomorfos. Si X es reflexivo, entonces Y también lo es.*

Demostración. Sea $T : Y \to X$ un isomorfismo de espacios normados. Por el lema 3.16 se sigue que $T^{\mathsf{tt}} : X^{**} \to Y^{**}$ es también un isomorfismo de espacios normados. Como X es reflexivo, se tiene que la identificación canónica $J_X : X \to X^{**}$ es sobreyectiva, por lo que es invertible. De la proposición 3.7 se sigue que $T^{\mathsf{tt}} \circ J_X = J_Y \circ T$, de donde $J_Y = T^{\mathsf{tt}} \circ J_X \circ T^{-1}$. Como J_Y es composición de funciones sobreyectivas, resulta que J_Y también lo es. Así que Y es reflexivo. ■

Observación 6.1. Si X es un espacio reflexivo, entonces la ecuación (6.4) indica que las bases de la topología débil* y la topología débil de X^* coinciden, por lo que se cumple la igualdad

$$\sigma(X^*, X) = \sigma(X^*, X^{**}). \tag{6.7}$$

Proposición 6.10. *Sea X un espacio normado. Entonces $J : X_{\mathrm{w}} \to X^{**}_{\mathrm{w}^*}$ es continua. Si además X es reflexivo, entonces $J : X_{\mathrm{w}} \to X^{**}_{\mathrm{w}^*}$ es un homeomorfismo.*

Demostración. Supongamos que X es reflexivo y mostremos que J es homeomorfismo. Sólo notemos que en la parte donde se demuestra que J es continua, no se requiere que X sea reflexivo. Así pues, dado que J es un isomorfismo de espacios vectoriales, ya sólo falta verificar que J y J^{-1} son continuas. Para eso tomemos una red $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \subseteq X_{\mathrm{w}}$ y $x \in X_{\mathrm{w}}$. El corolario 6.2 dice que que $x_\alpha \xrightarrow{\mathrm{w}} x$ si, y sólo si $\varphi(x_\alpha) \to \varphi(x)$ para toda $\varphi \in X^*$. Esto último equivale a que $\delta_{x_\alpha}(\varphi) \to \delta_x(\varphi)$ para toda $\varphi \in X^*$. El corolario 6.6 indica que esto es lo mismo que $\delta_{x_\alpha} \xrightarrow{\mathrm{w}_*} \delta_x$, o bien, $J(x_\alpha) \xrightarrow{\mathrm{w}_*} J(x)$. Por lo que J es continua al igual que J^{-1}. ■

Corolario 6.8. *Si X es un espacio normado reflexivo, entonces B_{X^*} es* w*-compacta.*

Demostración. Habíamos notado anteriormente que en espacios reflexivos $\sigma(X^*, X) = \sigma(X^*, X^{**})$. Por lo que la compacidad con la topología débil y débil* de B_{X^*} coinciden. Por el teorema de Banach-Alaoglu resulta entonces que B_{X^*} es w*-compacta y por tanto w-compacta. ■

Teorema 6.2 (Goldstine). *Sea X un espacio normado. Entonces $\overline{J(B_X)}^{\mathrm{w}^*} = B_{X^{**}}$.*

Demostración. El teorema de Banach-Alaoglu nos dice que $B_{X^{**}}$ es w*-compacta y como X^{**} es Hausdorff del corolario 1.1 se sigue que $B_{X^{**}}$ también es w*-cerrado. Dado que $J(B_X) \subseteq B_{X^{**}}$, se cumple que

$$\overline{J(B_X)}^{\mathrm{w}^*} \subseteq \overline{B_{X^{**}}}^{\mathrm{w}^*} = B_{X^{**}}.$$

Para demostrar la otra contención tomemos $\delta \in B_{X^{**}}$. Sea U una w*-vecindad de δ. Hay que demostrar que $J(B_X) \cap U \neq \varnothing$. Por la proposición 5.7 existen $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in X^*$ y $\varepsilon > 0$ tales que $U_{\delta,\varphi_1,\ldots,\varphi_n,\varepsilon} \subseteq U$.

Sean $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{K}$ cualesquiera. Entonces

$$\left|\sum_{i=1}^n \delta(\varphi_i) b_i\right| = \left|\delta\left(\sum_{i=1}^n b_i\varphi_i\right)\right| \leq \|\delta\| \left\|\sum_{i=1}^n b_i\varphi_i\right\| \leq \left\|\sum_{i=1}^n b_i\varphi_i\right\|.$$

El lema 3.13 de Helly indica que existe $x \in B_X$ tal que para toda $1 \leq i \leq n$ se cumple que $|\varphi_i(x) - \delta(\varphi_i)| < \varepsilon$, o bien $|(Jx - \delta)(\varphi_i)| < \varepsilon$. Es decir, $Jx \in J(B_X) \cap U_{\delta,\varphi_1,\ldots,\varphi_n,\varepsilon} \subseteq J(B_X) \cap U$. ■

Teorema 6.3. *Sea X un espacio normado. Entonces X es reflexivo si y sólo si B_X es* w*-compacta.*

Demostración. Supongamos primero que X es reflexivo. El teorema de Banach-Alaoglu indica que $B_{X^{**}}$ es $\sigma(X^{**}, X^*)$-compacto. Por otra parte, la proposición 6.10 indica que $J : X_{\mathrm{w}} \to X^{**}_{\mathrm{w}^*}$ es un homeomorfismo y como J es reflexivo entonces $B_X = J^{-1}(B_{X^{**}})$ es $\sigma(X, X^*)$-compacto.

Ahora supongamos que B_X es w-compacta. La proposición 6.10 indica que $J : X_{\mathrm{w}} \to X^{**}_{\mathrm{w}^*}$ es continua. Así $J(B_X)$ es w*-compacto, por lo que al ser X^{**} Hausdorff resulta del corolario 1.1 que $J(B_X)$ también es w*-cerrado. Entonces, por el teorema de Goldstine se cumple que

$$B_{X^{**}} = \overline{J(B_X)}^{\mathrm{w}^*} = J(B_X).$$

Se sigue de aquí que X es reflexivo. ■

Lema 6.2. *Sea X un espacio normado reflexivo. Si $Y \subseteq X$ es un subespacio vectorial cerrado, entonces Y es reflexivo.*

Demostración. Mostremos que Y es cerrado en la topología débil. Sea $x \notin Y$, por el corolario 3.4 de Hahn-Banach existe $\varphi \in X^*$ tal que $\varphi(x) = 1$ y $\varphi(Y) = 0$. Luego $U_{x,\varphi,1} \cap Y = \varnothing$. En efecto, si $y \in U_{x,\varphi,1} \cap Y$, entonces $|\varphi(x)| = |\varphi(x) - \varphi(y)| < 1$, lo que contradice que $\varphi(x) = 1$.

Como $U_{x,\varphi,1} \subseteq Y^{\mathsf{c}}$, entonces Y^{c} es w-abierto y por lo tanto Y es w-cerrado. Puesto que B_X es w-cerrada, entonces $B_Y = B_X \cap Y$ también lo es. Por el teorema 6.3 B_X es w-compacta. Además, dado que $B_Y \subseteq B_X$ y B_Y es w-cerrada, del lema 1.6 se sigue que B_Y es w-compacta. Por el teorema 6.3 se concluye que Y es reflexivo. ■

Teorema 6.4. *Sea X un espacio de Banach. Entonces X es reflexivo si y sólo si X^* es reflexivo.*

Demostración. Supongamos primero que X es reflexivo. Por el corolario 6.8 B_{X^*} es w-compacta. Del teorema 6.3 se sigue que X^* es reflexivo.

Ahora supongamos que X^* es reflexivo. De lo anterior se sigue que X^{**} es reflexivo. Como X es completo, entonces $J(X)$ es completo en X^{**} y por lo tanto es cerrado. Del lema 6.2 se sigue que $J(X)$ es reflexivo. Como X y $J(X)$ son isomorfos como espacios normados, del lema 6.1 se sigue que X es reflexivo. ■

Corolario 6.9. *Sea X un espacio normado. Entonces X es reflexivo si, y sólo si $\sigma(X^*, X) = \sigma(X^*, X^{**})$.*

Demostración. Si X es reflexivo, en (6.7) se estableció que $\sigma(X^*, X) = \sigma(X^*, X^{**})$. Supongamos ahora que $\sigma(X^*, X) = \sigma(X^*, X^{**})$. El teorema de Banach-Alaoglu indica que B_{X^*} es w*-compacta y entonces es w-compacta. Por el teorema 6.3 se sigue que X^* es reflexivo y por lo tanto, del teorema 6.4 se concluye que X es reflexivo. ■

Ejemplo 6.3. El espacio ℓ_p es reflexivo para $1 < p < \infty$ y no es reflexivo para $p = 1$ ó $p = \infty$. Además c y c_0 tampoco son reflexivos.

Demostración. Sean $1 \leq p < \infty$ y $1 < q \leq \infty$ su exponente conjugado. Consideremos $R_q : \ell_q \to \ell_p^*$ definida como R en el teorema 3.11 y sea $R_p : \ell_p \to \ell_q^*$ definida de manera análoga a R pero intercambiando los papeles de p y q. En el teorema 3.11 se demostró que R_q era un isomorfismo de espacios normados. Así que del lema 3.16 se sigue que $R_q^{\mathsf{t}} : \ell_p^{**} \to \ell_q^*$ es un isomorfismo de espacios normados.

Demostremos que $R_q^{\mathsf{t}} \circ J = R_p$. Dados $x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_p$ y $y = (y_1, y_2, \ldots) \in \ell_q$ tenemos que

$$((R_q^{\mathsf{t}} \circ J)x)y = (R_q^{\mathsf{t}}(Jx))y = (Jx \circ R_q)y = Jx(R_q y) = R_q y(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i = R_p x(y).$$

De donde $(R_q^{\mathsf{t}} \circ J)x = R_p x$ y por tanto $R_q^{\mathsf{t}} \circ J = R_p$. Luego $J = (R_q^{\mathsf{t}})^{-1} \circ R_p$. En el caso $1 < p < \infty$, R_p es isomorfismo de espacios normados, así que J también lo es, por lo que X es reflexivo. Cuando $p = 1$, se mostró en el teorema 3.11 que R_p no es sobreyectiva, por lo que J tampoco y así ℓ_1 no es reflexivo.

Dado que ℓ_1 no es reflexivo, el teorema 6.4 indica que ℓ_1^* tampoco es reflexivo. Según el teorema 3.11, los espacios normados ℓ_1^* y ℓ_∞ son isomorfos. Por lo tanto del lema 6.1 se concluye que ℓ_∞ no es reflexivo.

Mostremos que c_0 no es reflexivo. Supongamos entonces que c_0 es reflexivo. Entonces el teorema 6.4 indica que c_0^* también es reflexivo. Según el teorema 3.12, los espacios normados c_0^* y ℓ_1 son isomorfos. Por lo tanto del lema 6.1 se concluye que ℓ_1 es reflexivo, lo cual es falso. Así que c_0 no es reflexivo.

Por último demostremos que c tampoco es reflexivo. Supongamos pues que c es reflexivo. En la demostración del teorema 3.5 se mostró que c_0 es cerrado en ℓ_∞, por lo que también es cerrado en c. Del lema 6.2 se sigue que c_0 es reflexivo, lo cual es falso. Por lo tanto c no es reflexivo. ∎

Bibliografía

[Bre10] Haim Brezis. «Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations». Springer Science & Business Media, 2010. ISBN: 9780387709147.

[Che92] Paul R. Chernoff. «A Simple Proof of Tychonoff's Theorem Via Nets». The American Mathematical Monthly, Vol. 99 Nº 10, p. 932, 1992. ISSN 00029890.

[Cro02] Fred H. Croom. «Principles of Topology». Cengage Learning, agosto de 2002. ISBN: 9789812432889.

[DGC05] F. J Díaz y José Manuel García Calcines. «Curso de topología general». Vision Net, Madrid, España, 2005. ISBN: 9788497707688. OCLC: 645655325.

[Die84] J. Diestel. «Sequences and Series in Banach Spaces». Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1984. ISBN: 9781461297345.

[FGdB02] Helga Fetter y Berta Gamboa de Buen. «Introducción al análisis funcional y a la geometría de espacios de Banach». Iberoamérica, 2002. ISBN: 9789706253415.

[FHH+01] Marian Fabian, Petr Habala, Petr Hajek, Vicente Montesinos Santalucia, Jan Pelant y Vaclav Zizler. «Functional Analysis and Infinite-Dimensional Geometry». CMS Books in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 2001. ISBN: 9780387952192.

[GF06] Fernando Galaz Fontes. «Elementos de análisis funcional». Centro de Investigación en Matemáticas, 2006. ISBN: 9789685733076.

[Jam51] Robert C. James. «A Non-Reflexive Banach Space Isometric with Its Second Conjugate Space». Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, Vol. 37 Nº 3, p. 174–177, 1951. ISSN 0027-8424.

[Meg98] Robert E. Megginson. «An Introduction to Banach Space Theory». Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1998. ISBN: 9780387984315.

[NB10] Lawrence Narici y Edward Beckenstein. «Topological Vector Spaces». Taylor & Francis, 2nd Ed., julio de 2010. ISBN: 9781584888666.

[Rud91] Walter Rudin. «Functional Analysis». International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill, New York, 2nd Ed., 1991. ISBN: 9780070542365.

[Tao11] Terence Tao. «Locally Compact Topological Vector Spaces», 2011. URL https://terrytao.wordpress.com/2011/05/24/locally-compact-topological-vector-spaces/.