

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

КРЕНЕВИЧ А.П.

**Методичні вказівки  
до лабораторних занять із дисципліни  
«Алгоритми і структури даних»**

для студентів механіко-математичного факультету

Київ – 2018

УДК 519.942+550

Рецензенти:  
доктор фіз.-мат. наук, професор  
доктор фіз.-мат. наук,

*Рекомендовано до друку вченою радою механіко-математичного  
факультету  
(протокол № \_\_ від \_\_ \_\_\_\_\_ 201\_\_ року)*

**Крєневич А.П.**

Методичні вказівки до лабораторних занять із дисципліни «Алгоритми і структури даних» для студентів механіко-математичного факультету – К.: ВПЦ "Київський Університет", 2018. – \_\_ с.

Посібник містить перелік завдань для самостійної роботи з дисципліни «Алгоритми і структури даних», що викладається студентам механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Він містить завдання для засвоєння основних понять цього курсу, таких як рекурентні співвідношення, рекурсія, аналіз складності алгоритмів, лінійні рекурсивні структури даних, графи, дерева, динамічне програмування тощо.

Для студентів механіко-математичного факультету та викладачів, які проводять заняття з курсу «Алгоритми і структури даних».

## **ЗМІСТ**

<b>ВСТУП .....</b>	<b>4</b>
<b>ВИМОГИ ДО ОФОРМЛЕННЯ ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ .....</b>	<b>5</b>
<b>ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 1. СКЛАДНІСТЬ АЛГОРИТМІВ .....</b>	<b>7</b>
<b>ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 2. ЛІНІЙНИЙ ТА БІНАРНИЙ ПОШУК.....</b>	<b>13</b>
<b>ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 3. РОЗВ’ЯЗАННЯ РІВНЯНЬ МЕТОДОМ БІЕКЦІЇ. ....</b>	<b>16</b>
<b>ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 4. БІНАРНИЙ ПОШУК ПО ВІДПОВІДІ. ....</b>	<b>18</b>
<b>ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 5. ХЕШУВАННЯ ТА ХЕШ-ТАБЛИЦІ.....</b>	<b>21</b>
<b>ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 6. ХЕШ-ТАБЛИЦІ – РОЗВ’ЯЗАННЯ КОЛІЗІЙ МЕТОДОМ ЛАНЦЮЖКІВ. ....</b>	<b>24</b>
<b>ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 7. СОРТУВАННЯ.....</b>	<b>24</b>
<b>ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 8. РЕКУРСІЯ, ПОВНИЙ ПЕРЕБІР, МЕТОД «РОЗДІЛЯЙ І ВОЛОДАРЮЙ». ....</b>	<b>29</b>
<b>ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 9. СТЕК ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ.....</b>	<b>31</b>
<b>ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 10. ЧЕРГИ ТА ЗВ’ЯЗНІ СПИСКИ. ЇХНЕ ЗАСТОСУВАННЯ .....</b>	<b>33</b>
<b>ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 11. ДЕРЕВА. АЛГОРИТМИ НА ДЕРЕВАХ. ....</b>	<b>34</b>
<b>ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 12. БІНАРНІ ДЕРЕВА. БІНАРНІ ДЕРЕВА ПОШУКУ. ....</b>	<b>35</b>
<b>ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 13. БІНАРНА КУПА ТА ДЕРЕВО ВІДРІЗКІВ. ....</b>	<b>36</b>
<b>ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 14. АЛГОРИТМИ НА НЕ ЗВАЖЕНИХ ГРАФАХ. ....</b>	<b>37</b>
<b>ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 15. АЛГОРИТМИ НА ЗВАЖЕНИХ ГРАФАХ .....</b>	<b>39</b>
<b>ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 16. ЛАБІРИНТИ.....</b>	<b>40</b>
<b>СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ ТА ДОДАТКОВИХ ДЖЕРЕЛ .....</b>	<b>42</b>

## **ВСТУП**

## ВИМОГИ ДО ОФОРМЛЕННЯ ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ

1. Основна ціль лабораторної роботи довести викладачу, що студент засвоїв матеріал на достатньому рівні.
2. Кожна лабораторна роботи містить
  - a. перелік контрольних запитань, що стосуються теоретичного матеріалу;
  - b. варіанти індивідуальних/групових завдань лабораторних робіт для практичного виконання;
  - c. посилання на допоміжну літературу для закріплення теоретичного матеріалу і стане в нагоді під час виконання практичних завдань.
3. На вибір студентів надано перелік практичних завдань по кожній темі, серед яких вони мають можливість самостійно вибрати бажаний варіант. Обраний номер завдання студенти записують у спеціальний хмарний документ, наданий викладачем, ціль якого рівномірно розподілити завдання між студентами групи. Кілька студентів однієї групи, що можуть обрати один варіант не може перевищувати 2, у випадку самостійної роботи, та 3-х, у випадку роботи у команді.
4. Кожна лабораторна робота оформлюється у паперовому та електронному вигляді.
5. Паперове оформлення здійснюється за допомогою текстового процесору Word (чи аналогічного) або редактора презентацій PowerPoint (чи аналогічного) та має містити такі частини:
  - a. Титульний аркуш, що містить назву навчальної дисципліни, номер лабораторної роботи, номер варіанту, ПІБ студента (студентів, якщо спільна лабораторна робота), що виконав роботу, спеціальність, курс, номер групи.
  - b. Умову задачі. Якщо задача береться з електронних джерел, то вказати посилання на задачу. Умова задачі має містити приклади вхідних та вихідних даних.
  - c. Аналіз задачі та опис алгоритму, яким пропонується розв'язувати задачу.
  - d. Приклад роботи алгоритму на модельному прикладі (взятому з умови задачі або придуманому самостійно).
  - e. Програмну реалізацію (основні моменти).
  - f. Висновки: якщо робота програми перевірялася за допомогою електронних систем, то обов'язково вказати

посилання на систему перевірки разом з задачею (наприклад, <https://www.e-olymp.com/uk/problems/3966>), логін (логіні) виконавців лабораторної роботи та результат перевірки (наприклад, 100%). Якщо результат не 100%, то обов'язково зазначити у чому проблема (не пройшов, по часу, помилки виконання, тощо).

6. Електронна частина, складається з
  - а. Файлу (файлів), з яких друкується паперовий примірник лабораторної роботи.
  - б. Файлів вихідного коду програми, що розв'язує поставлену задачу.
  - в. Файлів вхідних даних (за необхідності) – текстові файли, що містять вхідні дані задачі. Вони мають бути названі згідно з правилом – «input.txt» (якщо один файл) та «input01.txt», «input02.txt» і т.д. – якщо кілька файлів вхідних даних.
7. Електронний варіант надсилається на електронну адресу викладача, що викладає практичні заняття не пізніше ніж напередодні лабораторного заняття, на якому студент має її захищати.
8. Захист лабораторної роботи здійснюється студентом (студентами) одним з двох способів:
  - а. Індивідуальна співбесіда з викладачем, протягом якої викладач ставить запитання по теоретичному матеріалу теми лабораторної роботи (з переліку контрольних запитань), вислуховує ідею алгоритму, що розв'язує поставлену задачу, знайомиться з деталями реалізації алгоритму та перевіряє коректність розв'язку.
  - б. Презентація розв'язаної задачі з усіма деталями реалізації для всіх студентів навчальної групи. У цьому випадку роздрукований варіант не вимагається.

## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 1. Складність алгоритмів

### Контрольні запитання

- 1.1. Наведіть означення алгоритму.
- 1.2. Що таке комп'ютерна програма? Що таке реалізація алгоритму?
- 1.3. У чому полягає аналіз алгоритму?
- 1.4. Що таке елементарна операція? Наведіть кілька прикладів.
- 1.5. Що таке час виконання програми?
- 1.6. Що означає фраза: час виконання програми сталий/логарифмічний/лінійний/поліноміальний/експоненціальний?
- 1.7. Наведіть означення таких понять як найкращий/найгірший час виконання програми. Що таке час виконання програми в середньому.
- 1.8. Наведіть означення О-оцінки: що означає  $f=O(g)$ ?
- 1.9. Наведіть означення Омега-оцінки: що означає  $f=\Omega(g)$ ?
- 1.10. Наведіть означення Тета-оцінки: що означає  $f=\Theta(g)$ ?
- 1.11. Наведіть основні правила визначення асимптотичної поведінки часу виконання.

### Завдання для аудиторної та самостійної роботи

- 1.1. Визначте час виконання фрагментів програм заданих нижче

a)

```
1 i = 0
2 while i < n:
3     k += 1
4     i += 1
```

b)

```
1 i = 1
2 while i < n:
3     k += 1
4     i = i * 2
```

c)

```
1 i = n - 1
2 while i != 0:
3     k += 1
4     i = i // 2
```

d)

```
1 i = 0
2 while i < n:
3     if i % 2 == 0:
4         k += 1
5     i += 1
```

e)

```
1 i = 0
2 while i < n:
3     j = 0
4     while j < n:
5         k += 1
6         j += 1
7     i += 1
```

f)

```
1 i = 0
2 while i < n:
3     j = i
4     while j < n:
5         k += 1
6         j += 1
7     i += 1
```

g)

```

1  i = 0
2  while i < n:
3      j = 0
4      while j < i * i:
5          k += 1
6          j += 1
7      i += 1

```

h)

```

1  i = 0
2  while i < n:
3      j = n
4      while j != 0:
5          k += 1
6          j //= 3
7      i += 1

```

1.2. Визначте час виконання програми у явному вигляді, якщо для нього відоме рекурентне співвідношення

- a)  $T(n) = \begin{cases} 1, & n = 0; \\ T(n-1) + 1, & n \geq 1. \end{cases}$
- b)  $T(n) = \begin{cases} 1, & n \leq a, a > 0; \\ T(n-a) + 1, & n \geq a. \end{cases}$
- c)  $T(n) = \begin{cases} 1, & n = 0; \\ 2T(n-1) + 1, & n \geq 1. \end{cases}$
- d)  $T(n) = \begin{cases} 1, & n = 0; \\ 2T(n-1) + n, & n \geq 1. \end{cases}$
- e)  $T(n) = \begin{cases} 1, & n = 1; \\ T(n/2) + 1, & n \geq 2. \end{cases}$
- f)  $T(n) = \begin{cases} 1, & n = 1; \\ 2T(n/2) + 1, & n \geq 2. \end{cases}$
- g)  $T(n) = \begin{cases} 1, & n = 1; \\ 2T(n/2) + n, & n \geq 2. \end{cases}$

Зауваження. У рекурентних співвідношеннях вище операція «/» означає цілочисельне ділення.

1.3. Нехай  $f(n) = 3n^2 - n + 4$ . Користуючись означенням покажіть що

- a)  $f(n) = O(n^2)$ ,                      b)  $f(n) = \Omega(n^2)$ .

1.4. Нехай  $f(n) = 3n^2 - n + 4$  та  $g(n) = n \log n + 5$ . Покажіть що

$$f(n) + g(n) = O(n^2).$$

1.5. Нехай  $f(n) = \sqrt{n}$  та  $g(n) = \log n$ . Покажіть що

$$f(n) + g(n) = O(\sqrt{n}).$$

1.6. Для кожної пари функцій  $f(n)$  та  $g(n)$ , зазначених у таблиці визначте яке із співвідношень має місце  $f(n) = O(g(n))$  чи  $g(n) = O(f(n))$

$f(n)$	$g(n)$
$10n$	$n^2 - 10n$
$n^3$	$n^2 \log n$
$n \log n$	$n + \log n$



$\log n$	$\sqrt[k]{n}$
$\ln n$	$\log n$
$\log(n + 1)$	$\log n$
$\log \log n$	$\log n$
$2^n$	$10^n$
$n^m$	$m^n$
$\cos(n\pi/2)$	$\sin(n\pi/2)$
$n^2$	$(n \cos n)^2$

1.7. Знайдіть асимптотичний час виконання програми у явному вигляді, якщо для нього відоме рекурентне співвідношення

- a)  $T(n) = \begin{cases} O(1), & n = 0; \\ aT(n-1) + O(1), & n \geq 1, a > 1. \end{cases}$
- b)  $T(n) = \begin{cases} O(1), & n = 0; \\ aT(n-1) + O(n), & n \geq 1, a > 1. \end{cases}$
- c)  $T(n) = \begin{cases} O(1), & n = 0; \\ aT([n/a]) + O(1), & n \geq 1, a \geq 2. \end{cases}$
- d)  $T(n) = \begin{cases} O(1), & n = 0; \\ aT([n/a]) + O(n), & n \geq 1, a \geq 2. \end{cases}$

1.8. Доведіть співвідношення

- a)  $\sum_{i=0}^n i = O(n)$       b)  $\sum_{i=0}^n i^2 = O(n^2)$       c)  $\sum_{i=0}^n i^3 = O(n^4)$
- d)  $\sum_{i=0}^n a^i = O(n)$       e)  $\prod_{i=1}^n \frac{1}{1+i} = O(n)$       f)  $\prod_{i=1}^n \frac{1}{1+i^2} = O(n^2)$
- g)  $\prod_{i=1}^n \frac{1}{1+i!} = O(n)$       h)  $\prod_{i=1}^n \frac{1}{1+i^m} = O(nm)$       i)  $\prod_{i=1}^n \frac{1}{1+i^i} = O(n^2)$

1.9. Чи можна описати алгоритм для кожної з задач підрахунку суми наведених нижче, асимптотична складність яких буде  $O(1)$ ? Якщо так, то наведіть фрагмент такої програми.

- a)  $\sum_{i=0}^n i$       b)  $\sum_{i=0}^n a^i$       c)  $\sum_{i=0}^{\infty} a^i, |a| \leq 1$

1.10. Чи можна описати алгоритм для кожної з задач підрахунку суми наведених нижче, асимптотична складність яких буде  $O(n)$ ? Якщо так, то наведіть фрагмент такої програми.

a)  $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}, (n \text{ коренів});$

b)  $y = x^{2^n} + x^{2^{n-1}} + \dots + x^4 + x^2 + 1;$

c)  $\left(1 + \frac{1}{1^1}\right)\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{n^n}\right);$

d)  $1 + \sin x + \dots + \sin^n x.$

1.11. Припустимо, що  $n, m$  та  $k$  невід'ємні цілі числа і методи  $e, f, g$  та  $h$  мають такі характеристики:

- Час виконання у найгіршому випадку методу  $e(n, m, k) \in O(1)$  і повертає значення з проміжку від 1 до  $(n + m + k)$ .
- Час виконання у найгіршому випадку методу  $f(n, m, k) \in O(n + m)$ .
- Час виконання у найгіршому випадку методу  $g(n, m, k) \in O(m + k)$ .
- Час виконання у найгіршому випадку методу  $h(n, m, k) \in O(n + k)$ .

Визначте асимптотичні оцінки виконання програм у найгіршому випадку в термінах  $O$ —«великого» для фрагментів програм зазначених нижче:

a)   
1 `f(n, 10, 0)`  
2 `g(n, m, k)`  
3 `h(n, m, 1000000)`

b)   
1 `for i in range(e(n, 10, 100)):`  
2 `f(n, 10, 0);`

c)   
1 `for i in range(n):`  
2 `f(n, m, k);`

d)   
1 `for i in range(n):`  
2 `for j in range(i, n):`  
3 `f(n, m, k);`

1.12. Визначте асимптотичну оцінку виконання функції у найгіршому випадку в термінах  $O$ —«великого» для функції:

```
def f(n):
    sum = 0
    for i in range(1, n + 1):
        sum = sum + i
    return sum
```

Що є результатом виконання наведеної функції для заданого натурального числа  $n$ ? Чи можна оптимізувати цю функцію, покращивши її асимптотичну оцінку?

1.13. Нехай  $f(n)$  функція визначена у вправі 1.12. Розглянемо функцію

```
def g(n):
    sum = 0
    for i in range(1, n + 1):
        sum = sum + i + f(i)
    return sum
```

Визначте асимптотичну оцінку виконання функції  $g(n)$  у найгіршому випадку в термінах  $O$ —«великого». Що є результатом виконання функції  $g(n)$  для заданого натурального числа  $n$ . Чи можна оптимізувати цю функцію, покращивши її асимптотичну оцінку?

1.14. Нехай  $f(n)$  функція визначена у вправі 1.12, а функція  $g(n)$  – у вправі 1.13. Розглянемо функцію

```
def h(n):
    return f(n) + g(n)
```

Визначте асимптотичну оцінку виконання функції  $h(n)$  у найгіршому випадку в термінах  $O$ —«великого». Що є результатом її виконання для заданого натурального числа  $n$ . Чи можна оптимізувати цю функцію, покращивши її асимптотичну оцінку?

1.15. Визначте асимптотичну оцінку виконання функції у найгіршому випадку в термінах  $O$ —«великого» для функції:

```
def f(n):
    k = 0
    i = n - 1
    while i != 0:
        k += 1.0 / i
        i = i / 2
    return k
```

Що є результатом виконання наведеної функції для заданого натурального числа  $n$ ?

1.16. Опишіть функції натурального аргументу  $n$ , час виконання яких у найгіршому випадку має асимптотику:

- a)  $O(n)$                       b)  $O(n^2)$                       c)  $O(n^3)$   
d)  $O(\log n)$                       e)  $O(n \log n)$                       f)  $O(2^n)$

1.17. Опишіть функції натуральних аргументів  $n$  та  $m$ , час виконання яких у найгіршому випадку має асимптотику:

- a)  $O(n + m)$                       b)  $O(m \log n)$                       c)  $O(n^m)$

1.18. Натуральне число називається паліндромом, якщо його запис читається однаково зліва направо і справа наліво (наприклад, 1, 393, 4884). Скласти програму, що визначає, чи є задане натуральне число  $n$  паліндромом асимптотична складність якої  $O(n)$ , де  $n$  – кількість цифр у числі.

1.19. Числами трибоначчі називається числова послідовність  $\{T_k: k \geq 0\}$ , задана рекурентним співвідношенням третього порядку:

$$T_0 = 0, T_1 = T_2 = 1, T_k = T_{k-1} + T_{k-2} + T_{k-3}, \quad k \geq 3.$$

Опишіть функції для обчислення  $T_n$  за допомогою рекурентного співвідношення та використовуючи рекурсію. Обчисліть асимптотичну складність кожного з варіантів. Порівняйте абсолютний час виконання (у секундах) обох варіантів для знаходження  $T_{10}, T_{20}, T_{50}$ .

1.20. Послідовністю Падована називається числова послідовність  $\{P_k: k \geq 0\}$ , задана рекурентним співвідношенням третього порядку:

$$P_0 = P_1 = P_2 = 1, P_k = P_{k-1} + P_{k-3}, \quad k \geq 3.$$

Опишіть функції для обчислення  $P_n$  за допомогою рекурентного співвідношення та використовуючи рекурсію. Обчисліть асимптотичну складність кожного з варіантів. Порівняйте абсолютний час виконання (у секундах) обох варіантів для знаходження  $P_{10}, P_{20}, P_{50}$ .

## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 2. ЛІНІЙНИЙ ТА БІНАРНИЙ ПОШУК.

### Контрольні запитання

- 2.1. Які задачі допомагає розв'язати лінійний пошук? Наведіть алгоритм лінійного пошуку та його складність (у найгіршому випадку).
- 2.2. У чому полягає цілочисельний бінарний пошук? Для яких структур даних він може бути реалізований? Яка складність бінарного пошуку? Яка перевага бінарного пошуку у порівнянні з лінійним пошуком? Наведіть алгоритм бінарного пошуку.

### Завдання для аудиторної роботи

- 2.1. Одиниці

<https://www.e-olymp.com/uk/problems/622>

На уроках інформатики вас, напевно, вчили переводити числа з одних систем числення у інші і виконувати інші подібні операції. Прийшов час продемонструвати ці знання. Знайдіть кількість одиниць у двійковому запису заданого числа.

*Вхідні дані*

У вхідному файлі міститься єдине ціле число  $n$  ( $0 \leq n \leq 2000000000$ ).

*Вихідні дані*

Вихідний файл повинен містити одне число — кількість двійкових одиниць у запису числа  $n$ .

*Вхідні дані #1*

5

*Вихідні дані #1*

2

*Вхідні дані #2*

7

*Вихідні дані #2*

3

*Зауваження. Скористайтесь побітовими операціями.*

- 2.2. Реалізуйте інтерфейс для роботи з англійсько-українським словником та швидким пошуком перекладу. Реалізацію здійсніть у вигляді сукупності двох функцій описаних нижче. Функція

```
def addTranslation(eng, translation)
```

додає до словника англійське слово `eng` та його переклад `translation`. Пари `(eng, translation)` приходяться у порядку, що

відповідає лексикографічному порядку. Функція

```
def find(eng)
```

повертає переклад слова `eng` зі словника, якщо воно міститься у словнику, або порожній рядок у іншому разі.

*Тестова програма `main.py`, файл `user.py`, що містить вищезгаданий інтерфейс та вхідні дані (текстові файли) розташовані за посиланням:*

*<https://github.com/krenevych/algo/tree/master/labs/T3/Search/task1>*

*Завантажте всі файли, що містяться за цим посиланням, у одну папку та реалізуйте згаданий вище інтерфейс (файл `user.py`). Для перевірки правильності алгоритму запустіть файл `main.py`.*

- 2.3. Реалізуйте алгоритм пошуку номеру найпершого входження до заданого масиву, заданого числа `x`. Якщо заданий елемент відсутній у списку - поверніть номер першого елемента, що більший за число `x`:

```
array[i] >= x
```

Алгоритм оформіть у вигляді функції

```
def bsearch_leftmost(array, x)
```

Гарантується, що вхідний масив `array` впорядкований за неспаданням.

*Тестова програма розташована за посиланням:*

*<https://github.com/krenevych/algo/tree/master/labs/T3/Search/task2>*

*Завантажте всі файли, що містяться за цим посиланням, у одну папку. Реалізуйте згадану вище функцію, інтерфейс якої міститься у файлі `user.py`. Для перевірки правильності алгоритму запустіть файл `main.py`.*

### Завдання для самостійної роботи

- 2.4. Циклічні зсуви  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/27>
- 2.5. Затятий колекціонер метеликів  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/3966>
- 2.6. Реалізуйте алгоритм пошуку номеру останнього входження до заданого масиву заданого числа `x`. Якщо такий елемент відсутній у списку - поверніть номер останнього елемента, що менший за число `x`. Зауважимо, що якщо всі елементи масиву менші за шукане число, програма має повертати значення `-1` (мінус один).

```
array[i] >= x
```

Алгоритм оформіть у вигляді функції

```
def bsearch_rightmost(array, x)
```

Гарантується, що вхідний масив array впорядкований за неспаданням.

Тестова програма розташована за посиланням:

<https://github.com/krenevych/algo/tree/master/labs/T3/Search/task3>

Завантажте всі файли, що містяться за цим посиланням, у одну папку. Реалізуйте згадану вище функцію, інтерфейс якої міститься у файлі `user.py`. Для перевірки правильності алгоритму запустіть файл `main.py`.

- 2.7. Знайдіть кількість входжень заданого числа  $x$  до масиву цілих чисел `array`. Алгоритм оформіть у вигляді функції

```
def counter(array, x)
```

Гарантується, що вхідний масив `array` впорядкований за неспаданням.

Тестова програма розташована за посиланням:

<https://github.com/krenevych/algo/tree/master/labs/T3/Search/task4>

Завантажте всі файли, що містяться за цим посиланням, у одну папку. Реалізуйте згадану вище функцію, інтерфейс якої міститься у файлі `user.py`. Для перевірки правильності алгоритму запустіть файл `main.py`.

- 2.8. Реалізуйте алгоритм лінійного пошуку всіх елементів списку, що є степенями двійки та визначте асимптотичну складність отриманого алгоритму.
- 2.9. Припустимо, що список містить елементи, для яких визначена операція  $\leq$  (менше або рівно) і елементи у цьому списку розташовані у порядку зростання. Скориставшись цією властивістю списку, запропонуйте алгоритм лінійного пошуку та оцініть його час виконання. Чи буде такий алгоритм оптимальнішим ніж класичний лінійний пошук?
- 2.10. Реалізуйте алгоритм бінарного пошуку з використанням рекурсії.

## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 3. РОЗВ'ЯЗАННЯ РІВНЯНЬ МЕТОДОМ БІСКЦІЇ.

### Контрольні запитання

- 3.1. Для чого використовується дійсний бінарний пошук? Наведіть приклад задачі. Чи є відмінність у реалізації дійсного бінарного пошуку від цілочисельного? Які основні підходи застосовуються для моменту завершення пошуку? У чому їхні переваги та недоліки у порівнянні один з одним? Наведіть алгоритм дійсного бінарного пошуку.

### Завдання для аудиторної роботи

- 3.1. Для монотонної на відрізьку  $[a, b]$  функції  $f$  розв'яжіть рівняння

$$f(x) = c. \quad (3.1)$$

Реалізацію здійсьніть у вигляді сукупності двох функцій описаних нижче. Функція

```
def solve(f, c, a, b):
```

Для неспадної на відрізьку  $[a, b]$  функції  $f$  розв'язує рівняння (3.1), а функція

```
def solve_decreasing(f, c, a, b)
```

відповідно для незростаючої на відрізьку  $[a, b]$  функції  $f$  розв'язує рівняння (3.1). Для визначення моменту завершення пошуку використайте всі три підходи (точність по аргументу, точність по значенню та безпосереднє сусідство двох чисел з плаваючою крапкою). Порівняйте отримані результати.

Тестова програма розташована за посиланням:

<https://github.com/kreneych/algo/tree/master/labs/T3/Search/task5>

Завантажте всі файли, що містяться за цим посиланням, у одну папку. Реалізуйте згадані вище функції, інтерфейси яких містяться у файлі `user.py`. Для перевірки правильності алгоритму запустіть файл `main.py`.

### Завдання для самостійної роботи

- 3.2. <https://www.e-olymp.com/uk/problems/3968>

- 3.3. Знайдіть найменше  $x \in [0, 10]$ , що
- $$f(x) = x^3 + x + 1 > 5$$



3.4. На відрізку  $[1.6, 3]$  знайдіть корінь рівняння

$$\sin x = \frac{x}{3}.$$

3.5. На відрізку  $[0, 2]$  знайдіть корінь рівняння

$$x^3 + 4x^2 + x - 6.$$

## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 4.

### БІНАРНИЙ ПОШУК ПО ВІДПОВІДІ.

#### Контрольні запитання

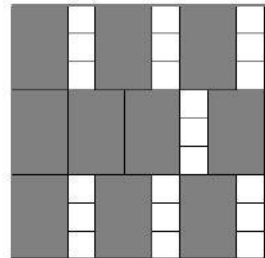
4.1. У чому полягає концепція бінарного пошуку по відповіді?

#### Завдання для аудиторної роботи

4.1. Дипломи

<https://www.e-olymp.com/uk/problems/3969>

Коли Петя вчився в школі, він часто брав участь в олімпіадах з інформатики, математики та фізики. Так як він був досить здібним хлопчиком і старанно вчився, то на багатьох із цих олімпіад він отримував дипломи. До закінчення школи у нього накопичилося  $n$  дипломів, причому, як виявилось, всі вони мали однакові розміри:  $w$  - в ширину і  $h$  - у висоту.



Зараз Петя навчається в одному з кращих університетів і живе в гуртожитку зі своїми одногрупниками. Він вирішив прикрасити свою кімнату, повісивши на одну зі стін свої дипломи за шкільні олімпіади. Так як до бетонної стіни прикріпити дипломи досить важко, він вирішив купити спеціальну дошку з коркового дерева, щоб прикріпити її до стіни, а до неї - дипломи. Для того, щоб ця конструкція виглядала більш красиво, Петя хоче, щоб була квадратною і займала якомога менше місця на стіні. Кожен диплом повинен бути розміщений строго в прямокутнику  $w$  на  $h$ . дипломи забороняється повертати на 90 градусів. Прямокутники, які відповідають різним дипломам, не повинні мати спільних внутрішніх точок.

Потрібно написати програму, яка обчислить мінімальний розмір сторони дошки, яка буде потрібно Пете для розміщення всіх своїх дипломів.

*Вхідні дані*

Вхідний файл містить три цілих числа  $w$ ,  $h$ ,  $n$  ( $1 \leq w, h, n \leq 109$ ).

### *Вихідні дані*

У вихідний файл вивести відповідь до сформульованої задачі.

#### *Вхідні дані #1*

2 3 10

#### *Вихідні дані #1*

9

#### 4.2. Дуже Легка Задача

<https://www.e-olymp.com/uk/problems/5102>

Сьогодні вранці журі вирішило додати у варіант олімпіади ще одну, Дуже Легку Задачу. Відповідальний секретар оргкомітету надрукував її умову в одному екземплярі, і тепер йому потрібно до початку олімпіади встигнути зробити ще  $n$  копій. У його розпорядженні є два ксерокси, один з яких копіює аркуш за  $x$  секунд, а другий за  $y$ . (Дозволяється використовувати як один ксерокс, так і обидва одночасно. Можна копіювати не лише з оригінала, але і з копії.)

Допоможіть йому вияснити, який мінімальний час для цього потрібно.

### *Вхідні дані*

Три натуральних числа  $n$ ,  $x$  та  $y$  ( $1 \leq n \leq 2 \cdot 10^8$ ,  $1 \leq x, y \leq 10$ ).

### *Вихідні дані*

Виведіть одне число – мінімальний час в секундах, необхідний для отримання  $n$  копій.

#### *Вхідні дані #1*

4 1 1

#### *Вихідні дані #1*

3

#### *Вхідні дані #2*

5 1 2

#### *Вихідні дані #2*

4

### **Завдання для самостійної роботи**

#### 4.3. Корови – в стійла

<https://www.e-olymp.com/uk/problems/5149>

#### 4.4. Черепаха

<https://www.e-olymp.com/uk/problems/669>

#### 4.5. Мутанти

<https://www.e-olymp.com/uk/problems/3970>

#### 4.6. Рисосховище

<https://www.e-olymp.com/uk/problems/2254>

#### 4.7. Мотузочки

<https://www.e-olymp.com/uk/problems/3967>

- 4.8. Роботи  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/161>
- 4.9. Автобус  
<https://www.e-olymp.com/uk/problems/6132>

## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 5. Хешування та хеш-таблиці.

### Контрольні запитання

- 5.1. Що таке хешування?
- 5.2. Наведіть приклад хеш-функції.
- 5.3. Наведіть основні характеристики, яким має задовольняти хеш-функція
- 5.4. Що таке колізія хеш-функції?
- 5.5. Яка хеш-функція називається ідеальною?
- 5.6. Що таке асоціативний масив?
- 5.7. Яка структура даних називається хеш-таблицею? Які основні операції вона має підтримувати?
- 5.8. У чому полягає процес розв'язання колізій?
- 5.9. Які види хеш-таблиць бувають? Які відмінності між ними?
- 5.10. Яким чином реалізується процес видалення ключів у хеш-таблиці з відкритою адресацією?
- 5.11. Запропонуйте алгоритм збільшення слотів хеш-таблиці, що використовує лінійне зондування для розв'язання колізій, для випадку, якщо фактор завантаження таблиці перевищує деякий поріг.

### Завдання для аудиторної роботи

- 5.1. Реалізуйте інтерфейс асоційованого масиву, ключами якого є цілі числа, а значеннями - рядки. Реалізацію здійсніть як хеш-таблицю з відкритою адресацією у вигляді сукупності функцій описаних нижче функцій. Функція

```
def init()
```

Викликається 1 раз на початку виконання програми. Функція

```
def set(key: int, value: str) -> None
```

встановлює значення value для ключа key. Якщо такий ключ відсутній у структурі – додає пару, інакше змінює значення для цього ключа. Функція

```
def get(key: int) -> str
```

за ключем key повертає значення зі структури (або None, якщо ключ відсутній у структурі). Нарешті функція

```
def delete(key: int) -> None
```

видаляє пару ключ-значення за заданим ключем, якщо такий ключ

міститься у таблиці.

Тестова програма розташована за посиланням:

[github.com/krenevych/algo/tree/master/labs/T3/Hashtables/task1](https://github.com/krenevych/algo/tree/master/labs/T3/Hashtables/task1)

Завантажте всі файли, що містяться за цим посиланням, у одну папку. Реалізуйте згадані вище функції, інтерфейси яких містяться у файлі `user.py`. Для перевірки правильності алгоритму запустіть файл `main.py`.

- 5.2. Розглядається бібліотека художніх книг. У бібліотеці може міститися кілька книг одного автора. Реалізуйте каталог для цієї бібліотеки. Інтерфейс, що необхідно реалізувати наведено нижче.

```
def init():
    """ Викликається 1 раз на початку виконання програми. """
    pass

def addBook(author, title):
    """ Додає книгу до бібліотеки.
    :param author: Автор книги
    :param title: Назва книги
    """
    pass

def find(author, title):
    """ Перевірає чи міститься задана книга у бібліотеці.
    :param author: Автор
    :param title: Назва книги
    :return: True, якщо книга міститься у бібліотеці та
            False у іншому разі. """
    return False

def delete(author, title):
    """ Видаляє книгу з бібліотеки.
    :param author: Автор
    :param title: Назва книги
    """
    pass

def findByAuthor(author):
    """ Повертає список книг заданого автора.
    Якщо бібліотека не містить книг заданого автора,
    то підпрограма повертає порожній список.
    :param author: Автор
    :return: Список книг заданого автора у алфавітному порядку. """
    return []
```

Тестова програма розташована за посиланням:

[github.com/krenevych/algo/tree/master/labs/T3/Hashtables/task2](https://github.com/krenevych/algo/tree/master/labs/T3/Hashtables/task2)

Завантажте всі файли, що містяться за цим посиланням (у тому

*ж числі папку data разом з усім її вмістом), у одну папку. Реалізуйте згадані вище функції, інтерфейси яких містяться у файлі user.py. Для перевірки правильності алгоритму запустіть файл main.py.*

#### **Завдання для самостійної роботи**

5.3.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/4842">https://www.e-olymp.com/uk/problems/4842</a>
5.4.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/1227">https://www.e-olymp.com/uk/problems/1227</a>

#### **Завдання для самостійної роботи підвищеної складності**

5.5.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/131">https://www.e-olymp.com/uk/problems/131</a>
5.6.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/2035">https://www.e-olymp.com/uk/problems/2035</a>
5.7.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/1225">https://www.e-olymp.com/uk/problems/1225</a>

## **ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 6. Хеш-таблиці – розв’язання колізій методом ланцюжків.**

### **Контрольні запитання**

- 6.1. Поясніть концепцію методу ланцюжків для розв’язання колізій при реалізації хеш-таблиць.

### **Завдання для аудиторної роботи**

- 6.1. Розв’яжіть задачу 5.1 реалізуючи хеш-таблицю з розв’язанням колізій методом ланцюжків.
- 6.2. Розв’яжіть задачу 5.2 реалізуючи хеш-таблицю з розв’язанням колізій методом ланцюжків.

### **Завдання для самостійної роботи**

6.3.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/4842">https://www.e-olymp.com/uk/problems/4842</a>
6.4.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/1227">https://www.e-olymp.com/uk/problems/1227</a>
6.5.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/131">https://www.e-olymp.com/uk/problems/131</a>

### **Завдання для самостійної роботи підвищеної складності**

6.6.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/2035">https://www.e-olymp.com/uk/problems/2035</a>
6.7.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/7273">https://www.e-olymp.com/uk/problems/7273</a>



## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 7.

### Сортування – алгоритми зі складністю $n^2$ .

#### Контрольні запитання

7.1.

#### Завдання для аудиторної роботи

- 7.1. Реалізуйте алгоритм сортування обміном (бульбашкове сортування). Реалізацію здійсніть у вигляді функції

```
def sort(array):  
    """ Сортування масиву  
    :param array: Вхідний масив даних, що треба відсортувати. """  
    pass # TODO: implement
```

що отримує на вхід масив array та сортує його.

Тестова програма розташована за посиланням:

<https://github.com/krenevych/algo/tree/master/labs/T3/Sort/task1>

Завантажте всі файли, що містяться за цим посиланням, у одну папку. Реалізуйте згадану вище функцію у файлі user.py. Для перевірки правильності алгоритму запустіть файл main.py.

- 7.2. Модифікуйте алгоритм бульбашкового сортування, реалізований під час виконання задачі 7.1, перевіркою на кожному проході чи відсортований вже масив. Порівняйте час виконання обох програм
- 7.3. Реалізуйте алгоритм сортування вибором. Реалізацію здійсніть у вигляді функції

```
def sort(array):  
    """ Сортування масиву  
    :param array: Вхідний масив даних, що треба відсортувати. """  
    pass # TODO: implement
```

що отримує на вхід масив array та сортує його. Порівняйте час виконання цього алгоритму сортування з алгоритмами реалізованими у попередніх задачах.

Тестова програма розташована за посиланням:

<https://github.com/krenevych/algo/tree/master/labs/T3/Sort/task1>

Завантажте всі файли, що містяться за цим посиланням, у одну папку. Реалізуйте згадану вище функцію у файлі user.py. Для перевірки правильності алгоритму запустіть файл main.py.

- 7.4. Реалізуйте алгоритм сортування вставкою. Реалізацію здійсніть у

вигляді функції

```
def sort(array):  
    """ Сортування масиву  
    :param array: Вхідний масив даних, що треба відсортувати. """  
    pass # TODO: implement
```

що отримує на вхід масив array та сортує його. Порівняйте час виконання цього алгоритму сортування з алгоритмами реалізованими у попередніх задачах.

Тестова програма розташована за посиланням:

<https://github.com/krenevych/algo/tree/master/labs/T3/Sort/task1>

Завантажте всі файли, що містяться за цим посиланням, у одну папку. Реалізуйте згадану вище функцію у файлі user.py. Для перевірки правильності алгоритму запустіть файл main.py.

### Завдання для самостійної роботи

- 7.5. <https://www.e-olymp.com/uk/problems/2663>
- 7.6. <https://www.e-olymp.com/uk/problems/5089>

### Завдання для самостійної роботи підвищеної складності

- 7.7. <https://www.e-olymp.com/uk/problems/2664>
- 7.8. <https://www.e-olymp.com/uk/problems/972>
- 7.9. <https://www.e-olymp.com/uk/problems/1130>
- 7.10. <https://www.e-olymp.com/uk/problems/1344>
- 7.11. <https://www.e-olymp.com/uk/problems/1462>
- 7.12. <https://www.e-olymp.com/uk/problems/2662>
- 7.13. <https://www.e-olymp.com/ru/problems/4230>

## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 8.

### Сортування – швидкі алгоритми.

#### Контрольні запитання

8.1.

#### Завдання для аудиторної роботи

- 8.1. Реалізуйте алгоритм сортування злиттям. Реалізацію здійсніть у вигляді функції

```
def sort(array):  
    """ Сортування масиву  
    :param array: Вхідний масив даних, що треба відсортувати. """  
    pass # TODO: implement
```

що отримує на вхід масив array та сортує його. Порівняйте час виконання цього алгоритму сортування з алгоритмами реалізованими у попередній лабораторній роботі.

Тестова програма розташована за посиланням:

<https://github.com/krenevych/algo/tree/master/labs/T3/Sort/task1>

Завантажте всі файли, що містяться за цим посиланням, у одну папку. Реалізуйте згадану вище функцію у файлі user.py. Для перевірки правильності алгоритму запустіть файл main.py.

- 8.2. Реалізуйте швидкий алгоритм сортування QuickSort. Реалізацію здійсніть у вигляді функції

```
def sort(array):  
    """ Сортування масиву  
    :param array: Вхідний масив даних, що треба відсортувати. """  
    pass # TODO: implement
```

що отримує на вхід масив array та сортує його. Порівняйте час виконання цього алгоритму сортування з алгоритмом сортування вставкою.

Тестова програма розташована за посиланням:

<https://github.com/krenevych/algo/tree/master/labs/T3/Sort/task1>

Завантажте всі файли, що містяться за цим посиланням, у одну папку. Реалізуйте згадану вище функцію у файлі user.py. Для перевірки правильності алгоритму запустіть файл main.py.

### **Завдання для самостійної роботи**

- 8.3. <https://www.e-olymp.com/ru/problems/3607>
- 8.4. <https://www.e-olymp.com/uk/problems/2321>
- 8.5. <https://www.e-olymp.com/uk/problems/4037>

### **Завдання для самостійної роботи підвищеної складності**

- 8.6. <https://www.e-olymp.com/uk/problems/1303>
- 8.7. <https://www.e-olymp.com/uk/problems/1457>

## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 9. Рекурсія, повний перебір, Метод «розділай і володарюй».

### Контрольні запитання

9.1.

### Завдання для аудиторної роботи

9.1.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/364">https://www.e-olymp.com/uk/problems/364</a>
9.2.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/1296">https://www.e-olymp.com/uk/problems/1296</a>
9.3.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/1540">https://www.e-olymp.com/uk/problems/1540</a>
9.4.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/1592">https://www.e-olymp.com/uk/problems/1592</a>
9.5.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/1781">https://www.e-olymp.com/uk/problems/1781</a>

### Варіанти індивідуальних завдань

9.1.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/224">https://www.e-olymp.com/uk/problems/224</a>
9.2.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/317">https://www.e-olymp.com/uk/problems/317</a> – Множення Карацуби
9.3.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/1266">https://www.e-olymp.com/uk/problems/1266</a>
9.4.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/1524">https://www.e-olymp.com/uk/problems/1524</a>
9.5.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/2000">https://www.e-olymp.com/uk/problems/2000</a>
9.6.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/2633">https://www.e-olymp.com/uk/problems/2633</a>
9.7.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/2764">https://www.e-olymp.com/uk/problems/2764</a>
9.8.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/3606">https://www.e-olymp.com/uk/problems/3606</a>
9.9.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/4746">https://www.e-olymp.com/uk/problems/4746</a>
9.10.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/7031">https://www.e-olymp.com/uk/problems/7031</a>
9.11.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/7227">https://www.e-olymp.com/uk/problems/7227</a>
9.12.	<a href="https://www.e-olymp.com/ru/problems/6">https://www.e-olymp.com/ru/problems/6</a>

### Допоміжна література по темі

- 9.1. А.П.Креневич «Алгоритми і структури даних», §4  
<https://1drv.ms/b/s!AkQ93-IlGoCHgpsqQvGRPDuln6aiw>
- 9.2. <https://logic.pdmi.ras.ru/~kulikov/simplealgscourse/lecture2-handout.pdf>
- 9.3. [http://nord.org.ua/static/course/algo\\_2011/lecture3.pdf](http://nord.org.ua/static/course/algo_2011/lecture3.pdf)
- 9.4. <http://csaa.ru/algoritmy-razdeljaj-i-vlastvuj/>
- 9.5. [http://www.kalinin.ru/programming/alg/11\\_11\\_00.shtml](http://www.kalinin.ru/programming/alg/11_11_00.shtml)

9.6.

<https://dic.academic.ru/dic.nsf/ruwiki/201612#.D0.A1.D0.B2.D1.8F.D0.B7.D1.8C.D1.81.D0.BA.D0.BE.D0.BD.D1.86.D0.B5.D0.BF.D1.86.D0.B8.D0.B5.D0.B9.C2.AB.D1.80.D0.B0.D0.B7.D0.B4.D0.B5.D0.BB.D1.8F.D0.B9.D0.B8.D0.B2.D0.BB.D0.B0.D1.81.D1.82.D0.B2.D1.83.D0.B9.C2.BB>

9.7. [http://math.nsc.ru/LBRT/k4/or/or\\_part4.pdf](http://math.nsc.ru/LBRT/k4/or/or_part4.pdf)

9.8. <https://www.matburo.ru/Examples/Files/Nazn3.pdf>

9.9.

<https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%97%D0%B0%D0%B4%D0%B0%D1%87%D0%B0%D0%BF%D0%B0%D0%BA%D1%83%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%BD%D1%8F%D1%80%D1%8E%D0%BA%D0%B7%D0%B0%D0%BA%D0%B0%D0%9C%D0%B5%D1%82%D0%BE%D0%B4%D0%B3%D1%96%D0%BB%D0%BE%D0%BA%D1%96%D0%BC%D0%B5%D0%B6>

9.10.

<https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A3%D0%BC%D0%BD%D0%BE%D0%B6%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5%D0%9A%D0%B0%D1%80%D0%B0%D1%86%D1%83%D0%B1%D1%8B> –Множення великих чисел

## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 10. Стек та його застосування.

### Контрольні запитання

10.1.

### Завдання для аудиторної роботи

10.1.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/1994">https://www.e-olymp.com/uk/problems/1994</a>
10.2.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/4259">https://www.e-olymp.com/uk/problems/4259</a>
10.3.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/2479">https://www.e-olymp.com/uk/problems/2479</a>
10.4.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/7433">https://www.e-olymp.com/uk/problems/7433</a>
10.5.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/855">https://www.e-olymp.com/uk/problems/855</a>
10.6.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/731">https://www.e-olymp.com/uk/problems/731</a>
10.7.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/5322">https://www.e-olymp.com/uk/problems/5322</a>
10.8.	

### Варіанти індивідуальних завдань

10.1.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/1376">https://www.e-olymp.com/uk/problems/1376</a>
10.2.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/5205">https://www.e-olymp.com/uk/problems/5205</a>
10.3.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/3013">https://www.e-olymp.com/uk/problems/3013</a>
10.4.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/4438">https://www.e-olymp.com/uk/problems/4438</a>
10.5.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/1801">https://www.e-olymp.com/uk/problems/1801</a>
10.6.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/2039">https://www.e-olymp.com/uk/problems/2039</a>
10.7.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/5539">https://www.e-olymp.com/uk/problems/5539</a>
10.8.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/2702">https://www.e-olymp.com/uk/problems/2702</a>
10.9.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/1008">https://www.e-olymp.com/uk/problems/1008</a>
10.10	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/1377">https://www.e-olymp.com/uk/problems/1377</a>
.	
10.11	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/1394">https://www.e-olymp.com/uk/problems/1394</a>
.	
10.12	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/1073">https://www.e-olymp.com/uk/problems/1073</a>
.	
10.13	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/1515">https://www.e-olymp.com/uk/problems/1515</a>
.	
10.14	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/1549">https://www.e-olymp.com/uk/problems/1549</a>

.	
10.15	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/3837">https://www.e-olymp.com/uk/problems/3837</a>
.	<a href="https://www.e-olymp.com/ru/problems/1776">https://www.e-olymp.com/ru/problems/1776</a>

### **Допоміжна література по темі**

10.1.



## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 11. Черги та зв'язні списки. Їхнє застосування

### Контрольні запитання

11.1.

### Завдання для аудиторної роботи

11.1.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/971">https://www.e-olymp.com/uk/problems/971</a>
11.2.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/6125">https://www.e-olymp.com/uk/problems/6125</a>
11.3.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/6126">https://www.e-olymp.com/uk/problems/6126</a>
11.4.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/6127">https://www.e-olymp.com/uk/problems/6127</a>
11.5.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/6128">https://www.e-olymp.com/uk/problems/6128</a>
11.6.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/6129">https://www.e-olymp.com/uk/problems/6129</a>
11.7.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/6130">https://www.e-olymp.com/uk/problems/6130</a>
11.8.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/4847">https://www.e-olymp.com/uk/problems/4847</a>

### Варіанти індивідуальних завдань

11.1.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/3615">https://www.e-olymp.com/uk/problems/3615</a>
11.2.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/1549">https://www.e-olymp.com/uk/problems/1549</a>
11.3.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/1515">https://www.e-olymp.com/uk/problems/1515</a>
11.4.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/2510">https://www.e-olymp.com/uk/problems/2510</a>
11.5.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/3809">https://www.e-olymp.com/uk/problems/3809</a>
11.6.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/4847">https://www.e-olymp.com/uk/problems/4847</a>
11.7.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/694">https://www.e-olymp.com/uk/problems/694</a>
11.8.	<a href="https://www.e-olymp.com/ru/problems/1228">https://www.e-olymp.com/ru/problems/1228</a>
11.9.	<a href="https://www.e-olymp.com/ru/problems/4005">https://www.e-olymp.com/ru/problems/4005</a>
11.10.	<a href="https://informatics.msk.ru/mod/statements/view.php?id=206">https://informatics.msk.ru/mod/statements/view.php?id=206</a>
11.11.	<a href="https://informatics.msk.ru/mod/statements/view3.php?id=206&amp;chapterid=112984">https://informatics.msk.ru/mod/statements/view3.php?id=206&amp;chapterid=112984</a>
11.12.	<a href="https://informatics.msk.ru/mod/statements/view3.php?id=206&amp;chapterid=53">https://informatics.msk.ru/mod/statements/view3.php?id=206&amp;chapterid=53</a>
11.13.	<a href="https://informatics.msk.ru/mod/statements/view3.php?id=601&amp;chapterid=746">https://informatics.msk.ru/mod/statements/view3.php?id=601&amp;chapterid=746</a>

## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 12. Дерева. Алгоритми на деревах.

### Контрольні запитання

12.1.

### Завдання для аудиторної роботи

12.1.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/2317">https://www.e-olymp.com/uk/problems/2317</a>
12.2.	

### Варіанти індивідуальних завдань

12.1.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/2925">https://www.e-olymp.com/uk/problems/2925</a>
12.2.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/4325">https://www.e-olymp.com/uk/problems/4325</a>
12.3.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/4173">https://www.e-olymp.com/uk/problems/4173</a>
12.4.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/5067">https://www.e-olymp.com/uk/problems/5067</a>
12.5.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/2242">https://www.e-olymp.com/uk/problems/2242</a>
12.6.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/2923">https://www.e-olymp.com/uk/problems/2923</a>
12.7.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/3710">https://www.e-olymp.com/uk/problems/3710</a>
12.8.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/3983">https://www.e-olymp.com/uk/problems/3983</a>
12.9.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/3299">https://www.e-olymp.com/uk/problems/3299</a>
12.3.	<a href="https://www.e-olymp.com/ru/problems/3037">https://www.e-olymp.com/ru/problems/3037</a>

### Допоміжна література по темі

12.1.

## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 13. Бінарні дерева. Бінарні дерева пошуку.

### Контрольні запитання

13.1.

### Завдання для аудиторної роботи

13.1.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/2312">https://www.e-olymp.com/uk/problems/2312</a>
13.2.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/2316">https://www.e-olymp.com/uk/problems/2316</a>
13.3.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/1513">https://www.e-olymp.com/uk/problems/1513</a>
13.4.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/7466">https://www.e-olymp.com/uk/problems/7466</a>
13.5.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/2314">https://www.e-olymp.com/uk/problems/2314</a>

### Варіанти індивідуальних завдань

13.1.	Дерево синтаксичного розбору – <a href="http://aliev.me/runestone/Trees/ParseTree.html">http://aliev.me/runestone/Trees/ParseTree.html</a>
13.2.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/1846">https://www.e-olymp.com/uk/problems/1846</a>
13.3.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/1516">https://www.e-olymp.com/uk/problems/1516</a>
13.4.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/468">https://www.e-olymp.com/uk/problems/468</a>
13.5.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/2950">https://www.e-olymp.com/uk/problems/2950</a>
13.6.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/3326">https://www.e-olymp.com/uk/problems/3326</a>

### Допоміжна література по темі

13.1.

## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 14. Бінарна купа та дерево відрізків.

### Контрольні запитання

14.1.

### Завдання для аудиторної роботи

14.1.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/4481">https://www.e-olymp.com/uk/problems/4481</a>
14.2.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/4482">https://www.e-olymp.com/uk/problems/4482</a>
14.3.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/2919">https://www.e-olymp.com/uk/problems/2919</a>
14.4.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/3737">https://www.e-olymp.com/uk/problems/3737</a>
14.5.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/4039">https://www.e-olymp.com/uk/problems/4039</a>

### Варіанти індивідуальних завдань

14.1.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/5952">https://www.e-olymp.com/uk/problems/5952</a>
14.2.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/695">https://www.e-olymp.com/uk/problems/695</a>
14.3.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/4496">https://www.e-olymp.com/uk/problems/4496</a>
14.4.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/3318">https://www.e-olymp.com/uk/problems/3318</a>
14.5.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/3329">https://www.e-olymp.com/uk/problems/3329</a>
14.6.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/402">https://www.e-olymp.com/uk/problems/402</a>
14.7.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/4487">https://www.e-olymp.com/uk/problems/4487</a>
14.8.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/4488">https://www.e-olymp.com/uk/problems/4488</a>
14.9.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/4491">https://www.e-olymp.com/uk/problems/4491</a>
14.10.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/4492">https://www.e-olymp.com/uk/problems/4492</a>
14.11.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/4082">https://www.e-olymp.com/uk/problems/4082</a>
14.12.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/3358">https://www.e-olymp.com/uk/problems/3358</a>
14.13.	<a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/5274">https://www.e-olymp.com/uk/problems/5274</a>

## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 15. Алгоритми на не зважених графах.

### Контрольні запитання

15.1.

### Завдання для аудиторної роботи

15.1.	Зв'язність - <a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/982">https://www.e-olymp.com/uk/problems/982</a>
15.2.	Обход в ширину - <a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/2401">https://www.e-olymp.com/uk/problems/2401</a>
15.3.	Перевірка на неорієнтовність – <a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/2470">https://www.e-olymp.com/uk/problems/2470</a>
15.4.	Від матриці суміжності до списку ребер – <a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/2471">https://www.e-olymp.com/uk/problems/2471</a>
15.5.	Витоки та стоки - <a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/3986">https://www.e-olymp.com/uk/problems/3986</a>
15.6.	Компоненти зв'язності - 2 – <a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/4816">https://www.e-olymp.com/uk/problems/4816</a>
15.7.	Найкоротша відстань - <a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/4852">https://www.e-olymp.com/uk/problems/4852</a>
15.8.	Найкоротший шлях - <a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/4853">https://www.e-olymp.com/uk/problems/4853</a>
15.9.	Підрахунок кількості ребер – <a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/5072">https://www.e-olymp.com/uk/problems/5072</a>
15.10.	Мультиребра - <a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/5073">https://www.e-olymp.com/uk/problems/5073</a>
15.11.	Степені вершин за списками ребер – <a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/5074">https://www.e-olymp.com/uk/problems/5074</a>
15.12.	Півстепені вершин за списками ребер – <a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/5075">https://www.e-olymp.com/uk/problems/5075</a>
15.13.	Кількість висячих вершин 1 – <a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/5080">https://www.e-olymp.com/uk/problems/5080</a>
15.14.	Степені вершин - <a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/5082">https://www.e-olymp.com/uk/problems/5082</a>

### Варіанти індивідуальних завдань

15.1.	Маршрути в горах - <a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/122">https://www.e-olymp.com/uk/problems/122</a>
15.2.	Стародавній рукопис - <a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/610">https://www.e-olymp.com/uk/problems/610</a>
15.3.	Отримай дерево - <a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/978">https://www.e-olymp.com/uk/problems/978</a>
15.4.	Топологічне сортування – <a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/1948">https://www.e-olymp.com/uk/problems/1948</a>
15.5.	Повний граф - <a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/3987">https://www.e-olymp.com/uk/problems/3987</a>

15.6.	Обхід у глибину - <a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/4000">https://www.e-olymp.com/uk/problems/4000</a>
15.7.	Геть списування! - <a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/4002">https://www.e-olymp.com/uk/problems/4002</a>
15.8.	Чи є цикл? - <a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/4004">https://www.e-olymp.com/uk/problems/4004</a>
15.9.	Числа - <a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/4007">https://www.e-olymp.com/uk/problems/4007</a>
15.10.	Підпал - <a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/4369">https://www.e-olymp.com/uk/problems/4369</a>
15.11.	Зв'язність графа - <a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/4374">https://www.e-olymp.com/uk/problems/4374</a>
15.12.	Магічна машинка - <a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/4850">https://www.e-olymp.com/uk/problems/4850</a>
15.13.	Регулярний граф - <a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/5076">https://www.e-olymp.com/uk/problems/5076</a>
15.14.	Напівповний граф - <a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/5077">https://www.e-olymp.com/uk/problems/5077</a>
15.15.	Транзитивність орієнтовного графа – <a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/5079">https://www.e-olymp.com/uk/problems/5079</a>
15.16.	Покриття шляхами - <a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/5299">https://www.e-olymp.com/uk/problems/5299</a>

#### Варіанти для командних завдань

15.1.	Рекурсія - <a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/553">https://www.e-olymp.com/uk/problems/553</a>
15.2.	Ходи ферзем! - <a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/1098">https://www.e-olymp.com/uk/problems/1098</a>
15.3.	Сильная связность - <a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/2403">https://www.e-olymp.com/uk/problems/2403</a>
15.4.	Забавна гра - <a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/4050">https://www.e-olymp.com/uk/problems/4050</a>
15.5.	Хрещений батько - <a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/5366">https://www.e-olymp.com/uk/problems/5366</a>

#### Допоміжна література по темі

15.1.

## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 16. Алгоритми на зважених графах

### Контрольні запитання

16.1.

### Завдання для аудиторної роботи

16.1.	Алгоритм Дейкстри - <a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/1365">https://www.e-olymp.com/uk/problems/1365</a>
16.2.	Найкоротший шлях - <a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/4856">https://www.e-olymp.com/uk/problems/4856</a>
16.3.	

### Варіанти індивідуальних завдань

16.1.	Відстань між вершинами – <a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/625">https://www.e-olymp.com/uk/problems/625</a>
16.2.	Флойд - 1 - <a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/974">https://www.e-olymp.com/uk/problems/974</a>
16.3.	Флойд - <a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/975">https://www.e-olymp.com/uk/problems/975</a>
16.4.	Флойд - існування - <a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/976">https://www.e-olymp.com/uk/problems/976</a>
16.5.	Мінімальний каркас - <a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/981">https://www.e-olymp.com/uk/problems/981</a>
16.6.	Червякові діри - <a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/1108">https://www.e-olymp.com/uk/problems/1108</a>
16.7.	Заправки - <a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/1388">https://www.e-olymp.com/uk/problems/1388</a>
16.8.	Автобуси - <a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/1389">https://www.e-olymp.com/uk/problems/1389</a>
16.9.	Форд-Беллман - <a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/1453">https://www.e-olymp.com/uk/problems/1453</a>
16.10.	Лабіринт знань - <a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/1454">https://www.e-olymp.com/uk/problems/1454</a>
16.11.	Цикл - <a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/1455">https://www.e-olymp.com/uk/problems/1455</a>
16.12.	Ліфти - <a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/2209">https://www.e-olymp.com/uk/problems/2209</a>
16.13.	Мінімальний каркас - <a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/3835">https://www.e-olymp.com/uk/problems/3835</a>
16.14.	Доставка кефірчика - <a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/4006">https://www.e-olymp.com/uk/problems/4006</a>
16.15.	

### Варіанти для командних завдань

16.1.	Складний тест - <a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/626">https://www.e-olymp.com/uk/problems/626</a>
16.2.	Мандри - <a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/2267">https://www.e-olymp.com/uk/problems/2267</a>
16.3.	Альтернативні шляхи - <a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/4637">https://www.e-olymp.com/uk/problems/4637</a>
16.4.	

## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 17. Лабіринти.

### Контрольні запитання

17.1.

### Завдання для аудиторної роботи

17.1.	Площа кімнати - <a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/4001">https://www.e-olymp.com/uk/problems/4001</a>
17.2.	

### Варіанти індивідуальних завдань

17.1.	Помста Лі Чака - <a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/88">https://www.e-olymp.com/uk/problems/88</a>
17.2.	Підземелля - <a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/432">https://www.e-olymp.com/uk/problems/432</a>
17.3.	Лінії - <a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/1060">https://www.e-olymp.com/uk/problems/1060</a>
17.4.	Фарбування лабіринту - <a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/1061">https://www.e-olymp.com/uk/problems/1061</a>
17.5.	Lines - <a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/1062">https://www.e-olymp.com/uk/problems/1062</a>
17.6.	Видалення клітинок - <a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/1063">https://www.e-olymp.com/uk/problems/1063</a>
17.7.	Шлях коня - <a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/1064">https://www.e-olymp.com/uk/problems/1064</a>
17.8.	Грядки - <a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/1065">https://www.e-olymp.com/uk/problems/1065</a>
17.9.	Переміщення коня - <a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/2820">https://www.e-olymp.com/uk/problems/2820</a>
17.10.	Іграшковий лабіринт - <a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/4452">https://www.e-olymp.com/uk/problems/4452</a>
17.11.	Вихід з лабіринту - <a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/4820">https://www.e-olymp.com/uk/problems/4820</a>
17.12.	Місце зустрічі змінити неможна – <a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/5069">https://www.e-olymp.com/uk/problems/5069</a>
17.13.	Лабіринт - <a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/5622">https://www.e-olymp.com/uk/problems/5622</a>
17.14.	Лабіринт - <a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/7215">https://www.e-olymp.com/uk/problems/7215</a>

### Варіанти для командних завдань

17.1.	Виведи хомячків - <a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/213">https://www.e-olymp.com/uk/problems/213</a>
17.2.	Сон - <a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/499">https://www.e-olymp.com/uk/problems/499</a>
17.3.	Золота рибка – друге бажання Петрика – <a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/4634">https://www.e-olymp.com/uk/problems/4634</a>
17.4.	Гном і монети - <a href="https://www.e-olymp.com/uk/problems/7229">https://www.e-olymp.com/uk/problems/7229</a>

### Допоміжна література по темі

17.1.





### **Список літератури та додаткових джерел**

1. **Кренивч А.П.** Алгоритми та структури даних. Підручник. – К.: ВПЦ "Київський Університет", 2020. – 777 с.